UNIÓN
REVISTA IBEROAMERICANA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA

www.fisem.org/web/union
http://www.revistaunion.org

ISSN: 1815-0640
Número 46. Junio 2016
Página 49-70

Diseño de una situación de aprendizaje para la comprensión de la derivada

María del Socorro García González, Crisólogo Dolores Flores

Fecha de recepción: 08/06/2015
Fecha de aceptación: 26/03/2016

Resumen	Se exponen los elementos del diseño y puesta en escena de una Situación de Aprendizaje para la enseñanza de la derivada en estudiantes principiantes universitarios de la Universidad Autónoma de Guerrero, México. Este trabajo es motivado por la detección de un problema concreto en un curso de Cálculo Diferencial: una cantidad significativa de los estudiantes escasamente comprenden este concepto. Por tal razón, se propone como objetivo ayudarlos a mejorar su comprensión del concepto derivada. Para elaborar la Situación de Aprendizaje se han tomado como ejes directrices la variación y la transición entre registros de representación. **Palabras clave**: Derivada, Variación, Estudiantes universitarios
Abstract	We expose the design elements and staging of a Learning Situation for teaching of the derivative to beginner's students university of the Autonomous University of Guerrero, Mexico. This work is motivated by the detection of a specific problem in a course of differential calculus: a significant number of students barely understand this concept. For this reason, we decided to help them improve their understanding of derivative concept. To develop the Learning Situation are taken as guidelines axis: the variation and the transition between representation registers. **Keywords**: Derivative, Variation, University students
Resumo	Expomos a concepção e a experimentação de uma situação de aprendizagem para o ensino de derivada para estudantes iniciantes universitários, inscritos na Universidade Autónoma de Guerrero, México. Este trabalho é motivado pela detecção de um problema específico em um curso de cálculo diferencial: um número significativo de alunos raramente entende esse conceito. Por esta razão, decidimos ajudá-los a melhorar a sua compreensão do conceito derivada. Para desenvolver a situação de aprendizagem são tomados como diretrizes: a variação e a transição entre os registros de representação. **Palavras-chave:** Derivada, Variação, Estudantes universitários.

1. Introducción

Con base en la revisión de algunas investigaciones realizadas en Matemática Educativa a nivel bachillerato tocante a los conceptos límite y derivada, se concluye que la mayoría de los estudiantes sólo logran un dominio razonable de los algoritmos algebraicos para calcular límites y derivadas; sin embargo escasamente comprenden el significado de esos algoritmos que realizan (García y Navarro, 2010; Sánchez-Matamoros et al, 2008; Dolores, 2004; Dolores, 2007; Dolores y Zavaleta, 2010). A diferencia de estas investigaciones, nuestro propósito está dirigido al trabajo con estudiantes de Nivel Superior en específico estudiantes de primer año de Licenciatura en Matemáticas. Centramos la atención en el concepto: derivada.

Para obtener evidencia sobre lo que los estudiantes conocen acerca de la derivada, se realizó una encuesta a los 2 grupos que cursaban el primer año (45 estudiantes) de dicha licenciatura (con edades entre 17 y 25 años) de la Universidad Autónoma de Guerrero (UAGro), México; en ella se les pedía contestar la pregunta ¿qué es la derivada de una función? Los resultados obtenidos indicaron que gran parte de los estudiantes tenían ideas alejadas de lo que es la derivada de una función (la identifican como fórmula) y sólo el 15% da evidencia de tener una idea más cercana de la definición (la identifican con pendiente de la recta tangente, límite, razón de cambio).

Esta situación nos permitió identificar un problema concreto de aprendizaje vinculado a la práctica escolar en un escenario concreto, por tanto motivó nuestra investigación, a saber: la escasa comprensión del concepto derivada en estudiantes de primer año de licenciatura en matemáticas. Debemos aclarar que si bien emitimos este juicio a partir de la sola definición del concepto, la justificación se basa en que desde nuestro punto de vista conocer la definición de un concepto es una de las actividades fundamentales para comprender un concepto. En la sección 2 se abordará más a fondo esta cuestión.

Debido al problema detectado el objetivo de la investigación estuvo dirigido al diseño y puesta en práctica de una Situación de Aprendizaje (SA) que contribuyera a la mejora de la comprensión del mencionado concepto en los estudiantes en los que se detectó tal deficiencia. Por tanto esta investigación, a diferencia de otras, se sitúa en condiciones escolares concretas: con un grupo de estudiantes de licenciatura, en un curso de Cálculo Diferencial con validez curricular en donde la SA para el tratamiento del concepto en cuestión se insertó y ejecutó en las actividades oficiales del Programa de Estudios correspondiente.

La razón por la que abogamos a la comprensión del concepto es que creemos de acuerdo con Jungk (1986), que ésta es fundamental para poder aplicar lo aprendido de forma segura, al mismo tiempo que es esencial para poder comunicarlo. Debido a ello, se decidió usar lo menos posible el formalismo matemático y poner en el centro de atención al enfoque variacional y junto a ello la transición entre registros. Por tal razón para el diseño de la SA se usó como base el libro: La variación y la derivada, de Dolores (2013). En esta obra se aportan elementos didácticos cuyo fin es propiciar una mejor comprensión de las ideas y conceptos básicos de Cálculo en especial aquellos que tienen una relación estrecha con la derivada.

El sustento teórico que fundamenta este trabajo, es la Teoría de la Actividad (TA). Y el marco metodológico al que se rige es la Metodología de la Enseñanza de la Matemática (MEM).

2. Elementos teóricos y Metodología

Debido a que nuestra intención fue proponer actividades que ayudaran a los alumnos a comprender el concepto derivada, es necesario aclarar a qué nos referimos cuando hablamos de la palabra comprender, a continuación lo hacemos.

En el contexto educativo Stone(1990) señala que comprender no es simplemente tener conocimientos, sino más bien tener la habilidad de pensar con eso que se sabe y además poder aplicarlo flexiblemente en el mundo, esto último es a lo que algunos autores llaman aplicación o uso de los conceptos. Sierpinska (1992) en el terreno de la Educación Matemática, plantea que se logra comprender algo de un concepto, cuando se han visto ejemplos y contraejemplos de él, cuando se puede decir lo que un concepto es y no es, cuando un sujeto puede darse cuenta de las relaciones de tal concepto con otros, cuando se perciben relaciones análogas con las que se están familiarizadas y cuando se ha entendido cuáles son las posibles aplicaciones de tal concepto.

Desde la perspectiva de la MEM (Jungk, 1986), un estudiante asimila un concepto cuando es capaz de realizar las siguientes actividades: Poder indicar ejemplos para el concepto tratado, conocer y utilizar correctamente la denominación del concepto, poder nombrar propiedades del concepto, indicar contraejemplos, señalar casos especiales, señalar casos límite, conocer relaciones con los demás conceptos, conocer varias definiciones del concepto y conocer una sucesión de indicaciones para reconocer un representante de un concepto dado.

Las ideas expuestas por los autores anteriores, se complementan entre sí, por esta razón con base en ellas, asumimos que se comprende un concepto cuando el estudiante: sabe qué es y cómo se define ese concepto, cuando puede indicar ejemplos de él, cuando conoce y utiliza correctamente la denominación del concepto, cuando puede nombrar propiedades del concepto, indicar ejemplos y contraejemplos, dar varias definiciones de este, identificar casos especiales y casos límite del concepto, cuando conoce relaciones de este con otros conceptos y cuando pueda usar o aplicar el concepto en la resolución de problemas o situaciones. A estas actividades las hemos caracterizado como fundamentales para comprender un concepto.

Por otro lado, definimos una Situación de Aprendizaje, como el espacio de encuentro en el que los participantes (profesor y alumnos), coordinan acciones a través de un proceso de interpretación/comprensión mediante el cual logran construir significados que comparten. Las situaciones de aprendizaje se construyen de acuerdo a los conocimientos que el alumno debe aprender y a las características que estos saberes presentan y se realizan con un método óptimo. En la presente investigación el espacio de encuentro fue el salón de clases, y las acciones coordinadas por el profesor (en este caso la primera autora del artículo) y los alumnos, estuvieron encaminadas a la resolución de un conjunto de actividades (secuencias) mediante las cuales se pretendió aportar elementos que permitieran a los estudiantes mejorar la comprensión del concepto derivada.

2.1. La Teoría de la Actividad: Base para la orientación de la SA

La Teoría de la Actividad aporta elementos para orientar la actividad cognoscitiva, es el lugar de encuentro interdisciplinar donde se estudian las diferentes formas de las prácticas humanas tanto en el ámbito individual como social al mismo tiempo.

Leontiev (1981) describe que una actividad está compuesta por sujeto, objeto, acciones y operaciones. El sujeto es la persona (o grupo) comprometida con la actividad. El objeto (como objetivo), es mantenido por el sujeto y motiva la actividad, generando una determinada dirección de acción. Esta dirección puede cambiar a lo largo de la actividad. Las acciones son lo que se entiende normalmente por tareas. Las operaciones son acciones llevadas a cabo de forma automática, esta rutina se adquiere con la práctica y repetición de la misma acción en el tiempo. Las operaciones dependen de las condiciones bajo las que la acción se está llevando a cabo. A su vez, la actividad tiene 4 momentos principales en que transcurre: orientación, ejecución, control y corrección. Estos serán explicados a detalle en la sección dedicada a la estructura de la propuesta.

2.2. La Metodología de la Enseñanza de la Matemática

Para el diseño de la SA se adoptó como marco metodológico los fundamentos lógicos de la elaboración y formación de conceptos tal y como lo propone la MEM. Por tal motivo seguimos los lineamientos generales establecidos en ella para la estructuración total de la elaboración de conceptos y sus definiciones.

Bajo la perspectiva de la MEM (Ballester, Arango, y Rodríguez, 1992) se distinguen dos vías principales para formar un concepto, la vía inductiva y la vía deductiva. En la primera el concepto se desarrolla por medio de descripciones y explicaciones, hasta llegar a la definición. En la segunda, se parte de la definición del concepto y mediante el análisis de ejemplos se descubre el contenido y extensión del concepto. Para nuestros fines y de acuerdo a nuestro objetivo de investigación seguimos la vía inductiva. De esta forma, el proceso total de elaboración de conceptos por la vía inductiva se conformó en tres fases: Consideraciones y ejercicios preparatorios, formación del concepto y asimilación del concepto o fijación del concepto. Estas fases son explicadas más adelante.

2.3 Los registros de representación

En el diseño de la SA, se pretendió generalizar el concepto derivada aparecido en el plano físico, con el uso de otros registros de representación, tales como el numérico, el geométrico, el algebraico y el verbal. Siguiendo a Duval (1998), por registro de representación se entiende a un sistema de signos utilizados para representar una idea u objeto matemático (en este caso la derivada) y que además cumple con las siguientes características: es identificable, permite el tratamiento, esto es, la manipulación y transformación dentro del mismo registro y por último, permite la conversión, consistente en la transformación total o parcial en otro registro.

Los registros a trabar fueron: el registro verbal, delimitado por el lenguaje matemático (oral), el registro algebraico, demarcado por el uso de la escritura mediante expresiones algebraicas, el registro numérico, enfatizado por el uso de sucesiones numéricas y el registro gráfico definido por el uso de imágenes o figuras.

La transición entre registros de la que se habla, se fundamenta en la idea de Duval (1998) de que para la comprensión de un concepto es necesaria la coordinación de los diferentes registros de representación del concepto, siendo suficiente con la coordinación de al menos dos registros de representación. Bajo esta idea creemos que la transición entre registros de representación es una parte fundamental para comprender un concepto.

3. Estructura de la Situación de Aprendizaje

En el plano del contenido matemático la SA se organizó en torno de la variación, misma que se constituyó como un eje directriz. En el plano cognitivo se organizó en torno del eje directriz tendiente a la transición entre registros (geométrico, numérico, algebraico y verbal). Respecto del primer eje, se trató de acercar a los estudiantes a tres nociones físicas fundamentales: la variación, la rapidez promedio de la variación y la rapidez instantánea de la variación, ya que a través del estudio de este tipo de problemas queda al descubierto la verdadera esencia del concepto derivada.

Esto último debido a que en el desarrollo histórico del concepto derivada la introducción de la matemática del cambio fue decisiva, pero ésta a su vez fue introducida por la necesidad de resolver los problemas generados por el desarrollo de las fuerzas productivas alcanzando en los siglos XVI y XVII, de la solución de esos problemas surgieron las estrategias seguidas por los precursores e inventores del cálculo empeñados en darles explicaciones racionales al movimiento de un cuerpo impulsado, etc. De ahí nacieron las nociones de variable y función, se generó la necesidad de cuantificación de la rapidez de la variación y el concepto de razón de cambio instantánea, concepto que expresa la rapidez con que cambia una variable respecto a otra en un instante, esta es la idea física fundamental que subyace en el actual concepto de derivada (Dolores, 2013).

Por las razones expuestas, la SA contempla secuencias de actividades que respondan a las siguientes cuestiones: ¿qué cambia?, ¿cuánto cambia?, ¿cómo cambia?, ¿qué tan rápido cambia?, ¿cuál es la rapidez en un instante? y la generalización, en donde se trabaja con la definición del concepto de derivada en diversos registros.

Con el fin de percatarnos de la mejora en la comprensión de la derivada por parte de los estudiantes, se decidió valorar la SA diseñada por medio de un cuestionario, que fue aplicado antes y después de la puesta en escena de la SA. Este cuestionario contenía 22 preguntas basadas en las actividades que consideramos fundamentales para la comprensión del concepto derivada.

En la tabla 2 se describe grosso modo la estructura de la situación de aprendizaje.

Situación de Aprendizaje	
Prueba inicial Cuestionario de diagnóstico	Formado por 22 preguntas en donde son contempladas 10 actividades fundamentales para la comprensión del concepto derivada de acuerdo con la Metodología de la Enseñanza de las Matemáticas.

Momentos de la actividad	Fases en la elaboración de conceptos	Secuencias diseñadas	Contenido
Fase 1			
Control (regulación sistemática)	Consideraciones y ejercicios preparatorios	UNO: ¿Qué cambia? ¿Cuánto cambia? ¿Cómo cambia? <u>Sección de tareas, para ejercitar lo aprendido</u>	1.1 La medición del cambio 1.2 Una notación operativa para cuantificar los cambios 1.3 ¿Cómo se comportan los cambios?
Fase 2			
Ejecución	Formación del concepto	DOS: ¿Qué tan rápido cambia? <u>Sección de tareas, para ejercitar lo aprendido</u>	1.4 La rapidez media de la variación: ¿Qué tan rápido cambia un fenómeno? 1.5 ¿Cómo cambia la rapidez media?
Control (regulación sistemática)		TRES: ¿Cuál es la rapidez en un instante? Generalización y uso de registros: numérico, verbal y geométrico <u>Sección de tareas, para ejercitar lo aprendido</u>	1.6 Los cambios infinitamente pequeños y la velocidad instantánea. 1.7 Interpretación geométrica de la velocidad instantánea.
		CUATRO: Generalización y uso de registros:, algebraico y verbal <u>Sección de tareas, para ejercitar lo aprendido</u>	1.8 Cálculo de velocidades instantáneas por medios algebraicos 1.9 Cálculo de las diferencias infinitamente pequeñas.
Fase 3			
Ejecución **Control (regulación sistemática)**	Asimilación del concepto	CINCO : Actividades para las asimilación	Actividades fundamentales para comprender un concepto: **A1**. Poder indicar ejemplos para el concepto tratado **A2**. Conocer y utilizar correctamente la denominación del concepto **A3**. Poder nombrar propiedades del concepto **A4**. Indicar contraejemplos **A5**. Señalar casos especiales **A6**. Señalar casos límite **A7**. Conocer relaciones con los demás conceptos **A8**. Conocer varias definiciones del concepto **A9**. Conocer una sucesión de indicaciones para reconocer un representante de un concepto dado **A10**. Uso y utilización del concepto

Prueba final Cuestionario de evaluación		Es igual al cuestionario aplicado para el diagnóstico.
Control (comprobación final de lo logrado)	**Confrontación entre los cuestionarios de diagnóstico y evaluación**	

Tabla 1. Estructura de la Situación de Aprendizaje

La intención de trabajar la SA con la estructura mostrada en la tabla anterior obedeció a que el concepto derivada no fuera presentado a los estudiantes como un tema más del Programa de Estudio por medio de la exposición magistral del profesor por el contrario, se pretendió proveer a los alumnos de las condiciones necesarias para que fueran ellos quienes “descubrieran” el concepto por medio de la solución de problemas.

Desde la Teoría de la Actividad (TA), que es el referente teórico del presente trabajo, el conocimiento se ubica en la práctica, es decir cuando el sujeto realiza una actividad, desde esta perspectiva teórica, se considera que la actividad está compuesta por cuatro momentos. La orientación del sujeto, la ejecución, el control y la corrección, de acuerdo a los intereses perseguidos por este trabajo, sólo serán tomados en cuenta los tres primeros momentos. Estos momentos junto con las fases propuestas por la MEM, son la clave para delimitar las tres fases de las que se compone la propuesta que tiene el objetivo de contribuir en la mejora de la comprensión del concepto derivada. A continuación explicamos a detalle cada una de las fases de que consta la propuesta diseñada.

3.1. Fase 1. Orientación: consideraciones y ejercicios preparatorios

La *orientación* del sujeto, desde la TA está basada en los esquemas referenciales de que dispone e incluye la planificación de las futuras acciones. Lo que requiere que el trabajo se inicie a partir de lo que el estudiante ya conoce, esto se corresponde con la fase de consideraciones y ejercicios preparatorios propuesta por la MEM. El momento de *control*, como la marca la TA es considerado en esta etapa, como regulación sistemática de las acciones que se pretenden sean realizadas por el estudiante, lo que se enfatiza en la secuencia de actividades que se ha propuesto para llevar a cabo la fase 1.

Esta fase tiene el objetivo de preparar a los estudiantes en el trabajo con el fenómeno del cambio para más tarde poder relacionar estas ideas con las propias de la derivada. Para desarrollarla es preciso de igual forma que los alumnos estén familiarizados con conceptos tales como; función, límite y continuidad, se requiere también el dominio sobre gráficas de funciones lineales, cuadráticas y cúbicas (requerimiento mínimo). Para lograr el cumplimiento de este propósito, se realizó una entrevista informal al profesor a cargo del grupo con el que se trabajaría así como a algunos estudiantes del grupo, respecto a los temas que ya habían abordado en clase, además de una revisión de las notas de cuadernos de los alumnos más constantes en clase.

Una vez aplicada la entrevista y hecha la revisión de notas, se constató que los estudiantes ya tenían conocimientos sobre los conceptos requeridos: función, límite y continuidad (al menos habían sido abordados ya en clase); por otro lado debido a que la propuesta aboga por las ideas de variación, para esta primera etapa se elaboró una Secuencia de actividades (uno), con la que se pretendió contestar las interrogantes: ¿Qué cambia?, ¿cuánto cambia? y ¿cómo cambia?, para ello se trataron temas tales como: el cambio, su medición y comportamiento.

Con el desarrollo de los temas tratados en esta secuencia, se esperaba que los estudiantes se percataran que cuando ocurren cambios, estos se comportan de manera distinta dependiendo principalmente de la fórmula de la función que los describe. De igual forma se introdujo la simbología Δf para calcular cambios de manera más sencilla, aclarando que para que esta pueda usarse se requiere de un estado inicial: $f(x_i)$, y un estado final: $f(x_i+\Delta x)$. De esta forma la diferencia Δf (también llamada Δy, pues $y = f(x)$) queda determinada por la igualdad: $\Delta f = f(x_i+\Delta x) - f(x_i)$.

La notación introducida permite manipular y calcular los cambios que experimentan las variables en un proceso de variación, ésta es favorable debido a que involucra a las fórmulas que relacionan a las variables en juego. Así, cuando cambia la variable independiente es fácil determinar cuánto cambia la variable dependiente trabajando con la fórmula que las vincula. Con esta notación se facilita la obtención de diferencias y con ello la medición del cambio. El análisis del comportamiento de los cambios también fue tratado en esta primera secuencia, es de suma importancia para estudiar la variación, pues los movimientos están determinados por los cambios, y el comportamiento de los cambios (los que a su vez pueden variar también, o permanecer estables) son el aspecto esencial de la variación. Ejemplificamos esta situación con el siguiente problema:

Problema. Secuencia de actividades 1. ¿Cómo se comportan los cambios?

La ley que describe la caída libre de los cuerpos en la superficie terrestre está dada por $s(t) = 4.9t^2$*, en donde s es la distancia recorrida y t el tiempo. Halle una expresión que permita calcular la diferencia* Δs*, luego complete la siguiente tabla y analice cómo se comportan los cambios de la distancia que recorre un cuerpo en caída libre.*

Los cambios de distancia están dados por $s(t_i+\Delta t) - s(t_i)$, de tal forma que $\Delta s = 9.8t_i\Delta t + 4.9\Delta t^2$ con ésta fórmula puede completarse fácilmente la tabla 2.

t_i **a** $(t_i+\Delta t)$	$\Delta t = t_f - t_i$	**¿Cuánto cambia? (** Δs **)**
De 0 a 0+1	1	**Δ**s_1= 4.9 m
De 1 a 1+1	1	**Δ**s_2= 14.7 m
De 2 a 2+1	1	**Δ**s_3= 24.5 m
De 3 a 3+1	1	**Δ**s_4= 34.3 m
De 4 a 4+1	1	**Δ**s_5= 44.1 m
De 5 a 5+1	1	**Δ**s_6= 53.9 m

Tabla 2. Comportamiento de los cambios de distancia

Gracias a los resultados que arroja la tabla anterior, se sabe que las magnitudes de las distancias varían, lo anterior indica que un cuerpo que cae libremente recorre distancias cada vez más grandes por cada segundo que transcurre, y dichos cambios están dados por la fórmula $\Delta s = 9.8t_i\Delta t + 4.9\Delta t^2$.

El problema analizado permite responder a las cuestiones que motivan la primera secuencia: ¿Qué cambia?, la distancia con respecto al tiempo (*s* con respecto de *t*), ¿cuánto cambia?, para dar respuesta a esta pregunta pueden obtenerse las diferencias entre las Δs obtenidas.

3.2 Fase 2. Ejecución: formación del concepto

Esta etapa fue delimitada desde la MEM por la fase de formación del concepto constituyendo de esta forma el centro de la propuesta, ya que en ésta se pretendía arribar a la definición del concepto derivada con todo y sus características esenciales. Desde la TA se consideraron dos momentos, el momento de *ejecución* que consiste en la realización práctica de las acciones encaminadas a que el estudiante llegue a la definición del concepto derivada en el contexto físico primeramente. El momento de *control* ha sido considerado en su acepción de regulación sistemática de las acciones que se pretenden sean realizadas por el estudiante, lo que se acentúa en la secuencias de actividades que se han propuesto para desarrollar la fase, se diseñaron tres secuencias de actividades (2, 3 y 4).

La Secuencia de actividades 2 pretendió dar respuesta a la pregunta ¿qué tan rápido cambia? En el problema tratado en la Secuencia 1, se hacía referencia al cambio de la distancia recorrida en un intervalo de tiempo. Ahora en cambio, se estudian dos fenómenos cercanos a la experiencia: la rapidez y la velocidad. La Secuencia de actividades 3, intentó dar respuesta a la interrogante ¿cuál es la rapidez en un instante? La Secuencia de actividades 4, como complemento de las secuencias 2 y 3 expone los temas del cálculo de velocidades instantáneas por medios numéricos y algebraicos, para posteriormente calcular diferencias infinitamente pequeñas. Cabe mencionar que en las secuencias 3 y 4, se busca la generalización del concepto derivada requiriendo para ello el uso de registros tales como el geométrico, el algebraico y el verbal.

La motivación para formar el concepto derivada como velocidad instantánea (contexto físico), la constituyó un problema en el que se tiene que calcular la velocidad de un cuerpo en un instante determinado, en este momento y resultado de las secuencias 1 y 2, los alumnos sólo conocen la fórmula para calcular velocidad media, precisamente es ésta limitante la que los conducirá a buscar una forma factible que les permita dar solución al problema planteado (Secuencia 3). A continuación se describe este problema a detalle.

Problema: Motivación

Un cuerpo se mueve de tal forma que la relación entre las distancias que recorre respecto del tiempo está dada por la fórmula $s(t) = 20t - 5t^2$ *¿cuál es la velocidad de este cuerpo exactamente en* $t = 1$ *segundo?*

Para la solución de este problema, se propone emplear la fórmula para el cálculo de la velocidad media, esto con el fin de que el alumno se percate de la imposibilidad de este método para emitir el resultado correcto.

$v = \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{s(t_f) - s(t_i)}{t_f - t_i}$ … fórmula para calcular velocidad media

Al emplear la fórmula anterior y sustituir los datos en la expresión para calcular la velocidad media se obtiene:

$$v = \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{\left[20(1) - 5(1)^2\right] - \left[20(1) - 5(1)^2\right]}{1-1} = \frac{15-15}{0} = \frac{0}{0} \text{ ¡!}$$

De esta forma, al proceder por la vía sugerida se llega a un resultado de la forma 0/0, lo que parece ser un absurdo. Esto debido a que se está empleando una fórmula para calcular velocidad media a una situación en la que se pide calcular velocidad instantánea. Se esperaba que los alumnos se percaten de tal situación, y junto con ello respondan las cuestiones: ¿es imposible calcular la velocidad exactamente en $t=1$?, ¿habrá una forma de calcular esta velocidad? Ante tales interrogantes planteadas pueden surgir varias opiniones, por ello como el problema es averiguar la velocidad exactamente en el primer segundo, parece razonable proponer utilizar variaciones de tiempo pequeñas de manera que se acerquen a $t=1$ con el fin de investigar que está pasando con las velocidades *medias muy cerca* de 1 segundo.

Para sistematizar los procedimientos se hace que t_i sea fijo (en este caso $t_i = 1$), y t_f se hace variar, de modo que los cambios de tiempo Δt sean cada vez más pequeños Se aplican para ello acercamientos por la derecha y por la izquierda. Haciendo uso de la expresión: $v = \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{s(t_i + \Delta t) - s(t_i)}{\Delta t} = \frac{20\Delta t - 10 t_i \Delta t - 5\Delta t^2}{\Delta t}$.

La tabla 3 muestra los resultados obtenidos de las velocidades medias.

	Acercamiento por la izquierda							Acercamiento por la derecha				
t	0.5	0.9	0.99	0.999	0.9999	…➔	**1**	🡐…	1.0001	1.001	1.01	1.1	1.5
v	12.5	10.5	10.05	10.005	10.0005	…➔	**10**	🡐…	9.9995	9.995	9.95	9.5	7.5

Tabla 3. Acercamientos laterales (velocidades medias)

Con los datos de la tabla 3, se aprecia que las sucesiones de cocientes (aproximación por la derecha e izquierda) que representan a las velocidades medias, muy cerca de 1 segundo se comportan de modo que estas tienden a 10. Aunque los cálculos se hicieron un número finito de veces, es de esperar que si se continúan haciendo aproximaciones tanto por la derecha como por la izquierda, los cocientes no pasarían del valor 10, esto es, 10 es el límite del cual no pasan ambas sucesiones. Parece ser que con el análisis hecho se ha encontrado una solución al problema planteado, si Δt es un cambio infinitamente pequeño, esto es, infinitamente cercano a $t_i = 1$, entonces la velocidad del cuerpo en $t=1$ es igual a 10 *m*/*s*. De esta forma en la velocidad que encontramos, el intervalo de tiempo es infinitamente pequeño, esto es, $t \to 0$, en este caso se habla de la velocidad instantánea, la cual definiremos de la siguiente forma: $v_{inst} = \lim\limits_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta s}{\Delta t}$, si el límite existe.

En estas condiciones el cuerpo que se mueve de acuerdo con la fórmula $s(t) = 20t - 5t^2$, tiene una velocidad de 10 *m/s* exactamente en 1 segundo. Es necesario destacar que este método difiere de todos los que se utilizan en matemática elemental. La diferencia fundamental radica en que obliga necesariamente a la utilización de procesos que involucran al concepto de *infinito*. El uso de los procesos infinitos se manifiesta cuando se hacen que los cambios sean *infinitamente pequeños* (esto no quiere decir que sean cero) y cuando se analiza el comportamiento tendencial de la sucesión de velocidades medias. El análisis simultáneo del comportamiento tendencial de ambos procesos infinitos y su límite permite la obtención de la velocidad instantánea.

En resumen, puede decirse que la *velocidad instantánea* está dada por las *últimas razones* de cantidades que *se desvanecen*, cantidades que a su vez son medidas de cambios infinitamente pequeños. Se ha expuesto un método numérico para calcular velocidades instantáneas utilizando procesos que involucran al infinito (cambios *muy pequeños*) e introduciendo la idea de *límite.* Este es uno de los conceptos más importantes del Cálculo Diferencial. Con el problema planteado queda al descubierto la noción de derivada en el contexto físico, como la velocidad instantánea (derivada de la distancia respecto del tiempo).

Con el desarrollo de la fase de motivación, se resuelve el problema de la velocidad instantánea por medio de aproximaciones numéricas (se hace el uso del registro numérico), cómo se planteó en la estructura de la SA, se pretendía generalizar el concepto derivada aparecido en el contexto físico, con el uso de otros registros, tales como el numérico, el geométrico, el algebraico y el verbal.

Registro numérico

Los procedimientos numéricos que permiten obtener la sucesión de velocidades medias se resumen en lo siguiente*:*

1. El problema principal consiste en la imposibilidad de calcular la velocidad en un instante o en un punto por medios aritméticos conocidos.

2. La estrategia central del método consiste, ya que se desconoce la velocidad en un punto, en explorar qué ocurre con la sucesión de velocidades medias muy cerca del punto en cuestión, acercándose a éste tanto por la derecha como por la izquierda.

3. La velocidad instantánea es el límite, si existe, de tales velocidades medias

Registro gráfico

En el problema que motiva el surgimiento de la derivada, la velocidad instantánea es imposible de ser calculada aplicando la noción de velocidad media pues el hacerlo conduce a una indeterminación. Sin embargo la exploración de lo que sucede con las velocidades medias por medio de acercamientos a $t = 1$, tanto por la derecha como por la izquierda, proporciona una información muy valiosa.

Mostramos ahora una interpretación geométrica de esta situación. Cuando los cambios de tiempo se van haciendo cada vez más pequeños, los cambios en las distancias también se hacen cada vez más pequeños, pero la sucesión de velocidades medias a que da origen tiende a 10, tanto por la derecha como por la izquierda. Obsérvense las figuras 1 y 2.

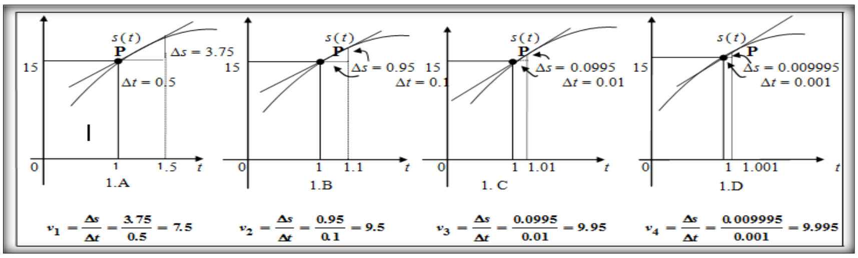


Figura 1. Acercamientos por la derecha.

Fuente: **García** (2011).

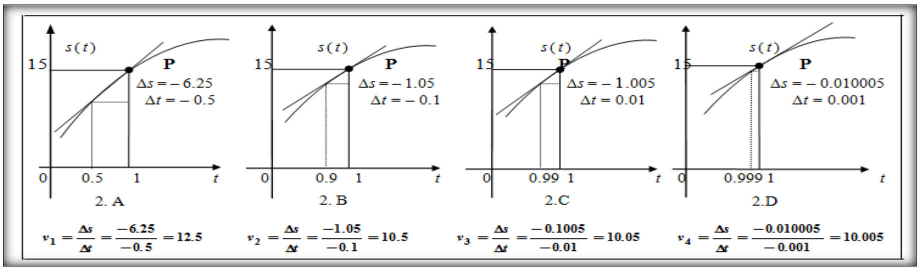


Figura 2. Acercamiento por la izquierda.

Fuente: **García** (2011).

Entonces la velocidad en $t = 1$ es exactamente 10 *m*/*s*; las gráficas anteriores muestran los acercamientos a 10. Pero para ver *más de cerca* lo que sucede se propone la figura 3.

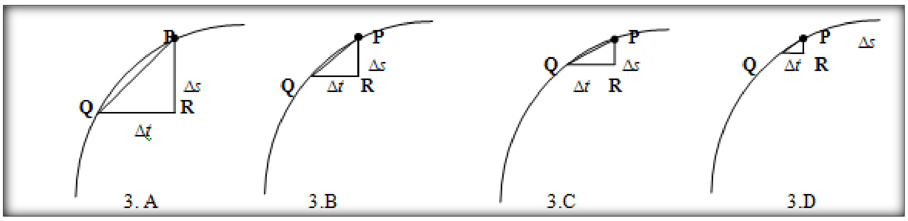


Figura 3. Acercamientos.

Fuente: García (2011).

El triángulo rectángulo PQR, tiene catetos Δs y Δt. A medida que Δs y Δt *se hacen* más pequeños, la hipotenusa $\overline{PQ}$ se hace también muy pequeña y *se asemeja mucho a la curva* en una zona muy cercana a *P*. La velocidad instantánea se obtiene cuando $\Delta t \to 0$, es decir si Δt es infinitamente pequeño. Cuando esto sucede el triángulo PQR es también de *tamaño infinitesimal*. Lo interesante sucede en una zona de la curva *muy cercana* a P. Imagínese una vecindad en torno a P. Para averiguar qué pasa con la curva, se hacen algunas amplificaciones véase figura 4.

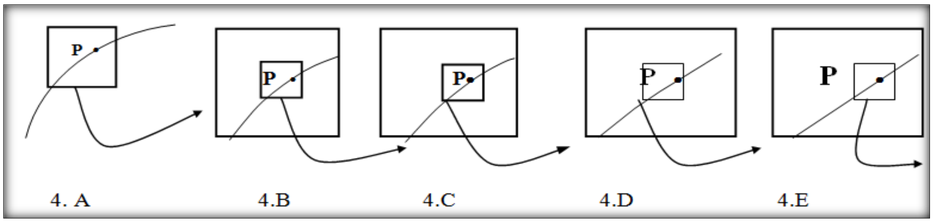


Figura 4. Ampliaciones sucesivas.

Fuente: García (2011).

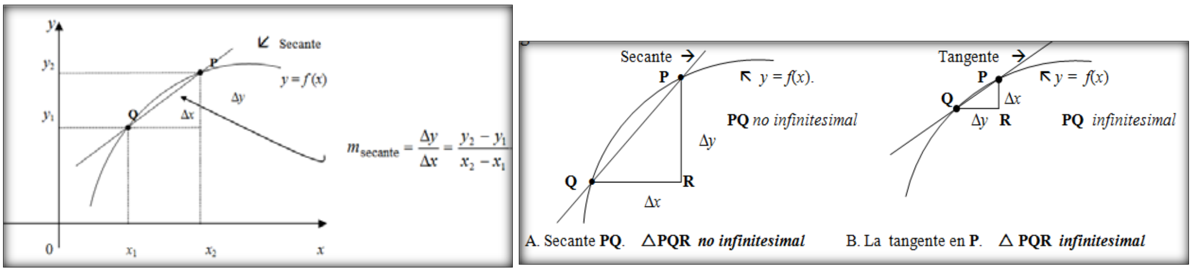
Al *agrandar* sucesivamente la región de la curva que rodea al punto P, la curva *se va pareciendo* a una recta; si se prosigue el proceso hasta llegar a una zona infinitesimal en torno a P, en ella la curva sería prácticamente una recta. Este es un argumento plausible para considerar a las curvas *bien comportadas* (que no tengan picos o zigzagueos bruscos), como formadas por segmentos de recta infinitamente pequeños (ver figura 5). La prolongación de cualquiera de estos segmentos infinitesimales sería una tangente. En el caso que nos ocupa, la prolongación del segmento infinitesimal PQ sería la tangente a la curva *s*(*t*) en el punto P.

Figura 5. Recta tangente.

Fuente: García (2011).

Ahora bien, la velocidad media del cuerpo en cuestión entre el punto P y Q, está dada por la expresión $v = \frac{\Delta s}{\Delta t}$. Si $v = m$ y $s(t) = f(x) = y$, entonces esta igualdad queda como: $m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$, que es precisamente la expresión de la pendiente de la recta que pasa por los puntos $P_1(x_1, y_1)$ y $P_2(x_2, y_2)$. Si P_1 y P_2 son puntos de la curva $y = f(x)$, entonces la recta que pasa por esos puntos es una secante a dicha curva (figura 6). Por tanto, la velocidad media y la pendiente de la secante son nociones equivalentes. Pero interesa la velocidad instantánea y su interpretación geométrica. Sabemos que la velocidad instantánea se obtiene mediante la expresión: $v_{inst} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta s}{\Delta t}$.

Si $v_{inst} = m$ y $s(t) = f(x) = y$, entonces la igualdad anterior queda como: $m = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$



Figuras 6. Rectas secante y tangente.

Fuente: García (2011).

Volviendo a las ideas consideradas antes, si Δx es un infinitesimal entonces desde el punto de vista geométrico la prolongación de la hipotenusa PQ es la tangente a la curva *y*=*f*(*x*) en P. Por tanto, así como la velocidad media equivale a la pendiente de la secante, la velocidad instantánea equivale a la pendiente de la tangente en el punto P. Ver figura 7. De manera que las fórmulas respectivas se corresponden como lo muestra la Tabla 4.

$v_{media} = \frac{\Delta s}{\Delta t}$	$m_{secante} = \frac{\Delta y}{\Delta x}$
$v_{inst} = \lim\limits_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta s}{\Delta t}$	$m_{tangente} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$

Tabla 4. Fórmulas correspondientes

Registro algebraico

El cálculo de velocidades instantáneas por la vía de las aproximaciones numéricas utilizando números muy pequeños es muy laborioso. Por ello se estudia un método que ahorra mucho trabajo, este es el *método algebraico*. Antes de entrar en él es necesario recalcar que, lo que hace posible la determinación de velocidades instantáneas es suponer cambios de tiempo infinitamente cercanos a t_i. Estos cambios se miden con diferencias: $t_f - t_i = \Delta t$, si t_f es infinitamente cercano a t_i, entonces $\Delta t \to 0$, es decir, se hace infinitamente pequeño. Pero a cambios infinitamente pequeños de t corresponden cambios de magnitud similar a la variable $s(t)$ y estos cambios son de la forma: $s(t_i + \Delta t) - s(t_i) = \Delta s$. Cuando $\Delta t \to 0$ también $\Delta s \to 0$, aunque no necesariamente con la misma rapidez con que Δt tiende a cero. Finalmente la velocidad instantánea se obtiene de: $v_{inst} = \lim\limits_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta s}{\Delta t}$ … i)

El cálculo de velocidades instantáneas se reduce con ello a la obtención de las diferencias infinitamente pequeñas Δs y Δt. Para facilitar el manejo de éstas es necesario establecer un acuerdo en cuanto a su simbología: si $\Delta t \to 0$ entonces Δt se denota *dt*; análogamente si $\Delta s \to 0$ entonces se escribirá como *ds*. De este modo *ds* y *dt* son diferencias infinitamente pequeñas de *s* y de *t,* respectivamente. Bajo estas consideraciones la expresión i) queda como: $v_{inst} = \frac{ds}{dt}$ … ii)

Este procedimiento reduce enormemente el cálculo de las velocidades instantáneas, incluso se está en condiciones de plantear una sucesión de indicaciones algorítmicas que lo hagan más operativo:

1. Obténganse *ds* de la misma manera que como antes se obtenía Δs

2. Aplíquese la fórmula de la velocidad instantánea: $v_{inst} = \frac{ds}{dt}$

3. Elimínense los sumandos que contengan *dt* y sustitúyase t_i para obtener la velocidad deseada.

Supóngase una función $s(t)$ que relaciona a la distancia y el tiempo. A un cambio del tiempo corresponde un cambio de distancia; si t_i cambia a $t_i + \Delta t$ entonces $s(t)$ *cambia de* $s(t_i)$ *a* $s(t_i + \Delta t)$*.* Lo que cambia *s* se obtiene de $\Delta s = s(t_i + \Delta t) - s(t_i)$*.* Si *t* cambia en una magnitud infinitamente pequeña, de t pasa $t + dt$, entonces $s(t)$ cambia a $s(t + dt)$; lo que cambia *s* está dado por $ds = s(t + dt) - s(t)$. En general, si *s* es cualquier función continua $y = f(x)$, a cambios infinitamente pequeños de x, se denotan dx, corresponden cambios infinitamente pequeños de y, se denotan dy*.* A dx y dy se les conoce como *diferenciales*. Una definición de diferencial queda en los siguientes términos:

La diferencial de la variable y*, se denota* dy*, es el cambio que experimenta* y *para cambios infinitamente pequeños de* x *(*dx*), se obtiene de:* $dy = f(x + dx) - f(x)$ *para calcular pues velocidades, razones de cambio instantáneas, o derivadas en general, se necesita medir cambios infinitamente pequeños y estos cambios son medidos por las diferenciales.*

En resumen, el concepto derivada aparece en el contexto físico como velocidad instantánea. Posteriormente son usados diferentes registros en donde han sido expuestas características comunes que definen a la derivada, tales como: cambios, límite, cociente, cantidades infinitamente pequeñas. Pero cabe aclarar que la noción de velocidad instantánea es propia del contexto físico, por ello conviene hablar de la definición de derivada en términos generales, por ello proponemos la siguiente definición:

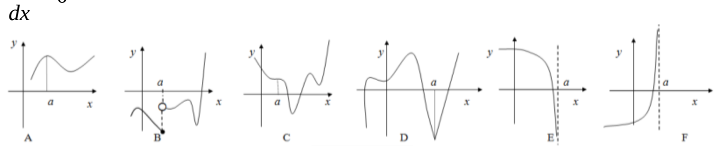
Definición de derivada

Sea f una función real definida en un intervalo I subconjunto de R. Sea $x_0 \in I$.

La derivada de f *en el punto* x_0, denotada $f'(x_0)$, es el $lím_{x\to x_0} \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$, si este límite existe.

3.3 Fase 3. Asimilación del concepto

Esta etapa ha sido delimitada desde la MEM por la fase de asimilación del concepto; desde la TA se han considerado dos momentos, el momento de *ejecución* que consiste en la realización práctica de las acciones encaminadas a que el estudiante logre la asimilación del concepto derivada y el momento de *control*, regulación sistemática de las acciones que se pretenden sean realizadas por el estudiante y que se acentúan en las 10 actividades consideradas como fundamentales para comprender un concepto. El objetivo que se persigue es que el estudiante desarrolle las ejercitaciones, profundizaciones, sistematizaciones y aplicaciones, y los repasos del concepto. Para llevar a cabo esta fase, se elaboró una secuencia con actividades consideradas por la MEM como fundamentales para asimilar los conceptos. La tabla 5, muestra algunos de los ejercicios y/o problemas que se trabajan.

Actividades (MEM)	Problemas/Ejercicios
A1: Poder indicar ejemplos para el concepto tratado. Los estudiantes deben identificar con la derivada objetos conocidos de su medio circundante o de su actividad.	Menciona algunos ejemplos particulares del concepto de derivada.
A2: Conocer y utilizar correctamente la denominación del concepto, es decir, la palabra o el símbolo correspondiente. Con el ejercicio planteado, se enfatiza en la escritura correcta de la definición de derivada.	Indica ¿en cuál de las siguientes expresiones se define correctamente la derivada de una función $y = f(x)$? Justifica tu respuesta. $a)\frac{dy}{dx} = \lim_{h\approx 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h}$ $b)\frac{dy}{dx} = \lim_{f=0} \frac{f(x+h)-f(x_0)}{h}$ $c)\frac{dy}{dx} = \lim_{x\approx 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h}$ $d)\frac{dy}{dx} = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h}$
A3: Poder nombrar propiedades del concepto. Se espera que el estudiante pueda darse cuenta de las características que hacen diferente a la derivada de otros conceptos.	La siguiente expresión corresponde a la definición de Derivada de una función: $f´(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h}$, sí el límite existe. ¿Cuáles son las características invariantes del concepto de derivada presentes en la expresión anterior? a) Es el límite de un cociente en donde el denominador *h* tiende a cero. b) Es el límite de un cociente de diferencias infinitamente pequeñas. c) Es el límite de un cociente donde el numerador y el denominador se hacen cero. d) Es el límite de los cambios de la función *f*(*x*).
A4: Estar en condiciones de indicar contraejemplos y de fundamentar por qué estos no pertenecen a la extensión del concepto. Se enfatiza en la definición analítica de la derivada, se espera que el estudiante pueda discriminar entre las opciones dadas aquellas que no conduzcan a la definición de la derivada y junto a ello justifique sus argumentos.	¿En qué casos el límite conduce a la derivada de una función diferenciable *f* ? Argumente. A) $\lim_{a\to x} \frac{f(a)-f(x)}{a-x}$ B) $\lim_{x\to a} \frac{f(x)-f(a)}{a-x}$ C) $\lim_{\Delta x\to 0} \frac{f(a)-f(x)}{x-a}$ D) $\lim_{h\to 0} \frac{f(a)-f(x)}{a-x}$ E) $\lim_{x\to a} \frac{f(a)-f(x)}{a-x}$ F) $\lim_{a\to x} \frac{f(x)-f(a)}{a-x}$
A5: Poder señalar casos especiales. Se espera que el estudiante pueda identificar en las situaciones presentadas los casos en los que existe la derivada en un punto dado.	¿En cuál o cuáles de las gráficas siguientes se cumple que: $\frac{dy}{dx} = 0$ en *x* = *a*? 
A6: Poder señalar casos límite. Se espera que el estudiante	¿En cuál o cuáles de las gráficas siguientes la derivada en *x* = *a,* no existe?

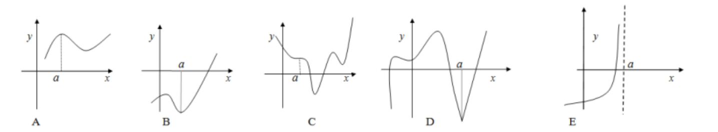
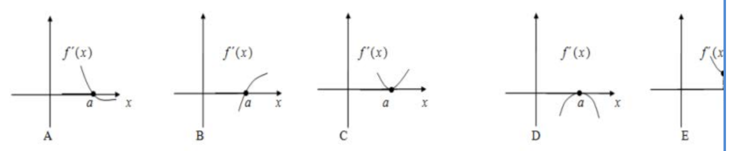
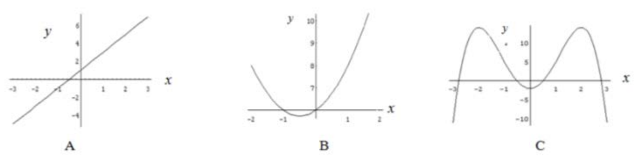
pueda identificar en las situaciones presentadas los casos en los que no es posible obtener la derivada	
A7: Conocer las relaciones de la derivada con los demás conceptos. Se espera que el estudiante pueda esbozar las gráficas de $f(x)$ a partir de las de $f'(x)$, involucrando los conceptos de función creciente, decreciente, cóncava y convexa.	Esboce la (s) gráficas de $f(x)$ cuyas derivadas en *a* se comportan de acuerdo a las gráficas de: 
A8: Conocer la definición del concepto, ocasionalmente también varias definiciones y comprender su equivalencia. Se espera que el estudiante pueda identificar la definición de derivada entre las proposiciones mostradas.	Identifica las definiciones correctas de derivada. P) Es la operación que se obtiene por medio de la regla de los cuatro pasos[1] y sirve para calcular tangentes. Q) Es el límite de la razón del incremento de la función, al incremento de la variable independiente cuando ambos tienden a cero. R) La derivada de f en x_0 existe, si y sólo si f tiene una recta tangente no vertical en $(x_{0,}f(x_0))$ además la pendiente de la recta tangente es $f'(x_0)$. S) Es el límite de la razón del incremento de la función al incremento de la variable independiente cuando éste último tiende a cero.
A9: Conocer una sucesión de indicaciones para reconocer un representante de un concepto dado. Se espera que a través de la regla de los 4 pasos, el alumno identifique los incrementos de *x* e *y*, así como el cociente de estos y su límite para poder obtener la derivada.	Utilice la regla de los 4 pasos y obtenga la derivada de la función: $y = x^3$, en el punto P(1, 1) luego esboce la gráfica de la función y la de su derivada en el punto pedido.
A10: Uso y aplicación del concepto. Se espera que el estudiante utilice los conceptos de máximos, mínimos, monotonía, y concavidad para poder esbozar la gráfica de la función derivada (en ellos va implícita la derivada).	En la siguiente figura aparecen los gráficos de tres funciones, analícense cuidadosamente y esboce los gráficos de sus funciones derivadas. 

Tabla 5. Secuencia 5: Actividades para la asimilación del concepto derivada

[1] 1. Se da un incremento Δx a la variable independiente x 2. Se obtiene el incremento correspondiente a la función $f(x+\Delta x)-f(x)$ 3. Se obtiene el cociente de los incrementos. $\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$ 4. Se calcula el límite del cociente de incrementos $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$

4. La puesta en práctica de la Situación de Aprendizaje

Participaron en la investigación uno de los dos grupos de primer año de la Licenciatura en Matemáticas, de la Unidad Académica de Matemáticas, de la Universidad Autónoma de Guerrero. Este grupo se encontraba cursando la asignatura de Cálculo I, y no habían abordado en clase el tema de derivada, sólo sabían de este, lo que en sus cursos de bachillerato abordaron. Se trabajó con ellos por un período de 3 semanas, con 6 sesiones de 50 minutos de clase por semana. Este grupo estaba formado por 22 estudiantes, de los cuales sólo 12 aceptaron participar voluntariamente en la puesta en escena de la SA, el resto no quiso hacerlo y por tanto no participó (no se les obligó a hacerlo).

Para llevar a cabo nuestro el trabajo, se les proporcionaron a todos los estudiantes participantes secuencias de actividades (5 en total), mismas que fueron resueltas mediante el trabajo en equipo. Los equipos fueron formados en un principio por afinidad, debido a que no se conocía al grupo, posteriormente, conforme se resolvían las diferentes secuencias, se volvían a integrar equipos, de tal forma que un alumno trabajara con todos sus compañeros. En todo momento el papel de la investigadora (primera autora del artículo) fue una especie de guía; los alumnos discutían los temas tratados en las secuencias y resolvían los problemas planteados, posteriormente los resultados obtenidos por cada equipo eran sometidos a revisión por todo el grupo, llegando de esta forma a un consenso que daba solución a dichos problemas.

La primera clase en la que se trabajó con los alumnos, se les pidió contestar el cuestionario correspondiente a la prueba inicial, se les dijo que la intención de este era percatarnos de los conocimientos que de derivada tenían como consecuencia de sus cursos de Cálculo del Bachillerato. Después de la puesta en escena de la propuesta, ésta se evaluó con una prueba final (que se conformó de un cuestionario igual al aplicado en la prueba inicial), la finalidad de esto fue constatar la mejora o no, de la comprensión de la derivada en los estudiantes participantes.

Durante el resto de las clases se resolvieron las secuencias que contemplaba la SA diseñada, en algunas de ellas se dejaban tareas a los estudiantes a manera de ejercitación. Aunque el trabajo realizado con la SA no se tomó en cuenta para la evaluación de la materia de Cálculo (la calificación del curso estaba a cargo del profesor), para nuestros fines se llevó un registro de quienes asistieron a las clases durante el tiempo que se desarrolló la SA, así como también de las participaciones de los estudiantes y de la entrega en las tareas encomendadas.

5. Resultados sobre la mejora de la comprensión de la derivada

Con el fin de percatarnos de la mejora en la comprensión de la derivada por parte de los estudiantes, se decidió valorar la SA diseñada por medio de un cuestionario con preguntas basadas en las 10 actividades que hemos mencionado anteriormente y que consideramos fundamentales para la comprensión del concepto derivada. Para cuantificar la mejora de la comprensión de la derivada en los participantes usamos una escala basada en la cantidad de respuestas correctas obtenidas en la prueba final respecto de las obtenidas en el inicial, tomando como el

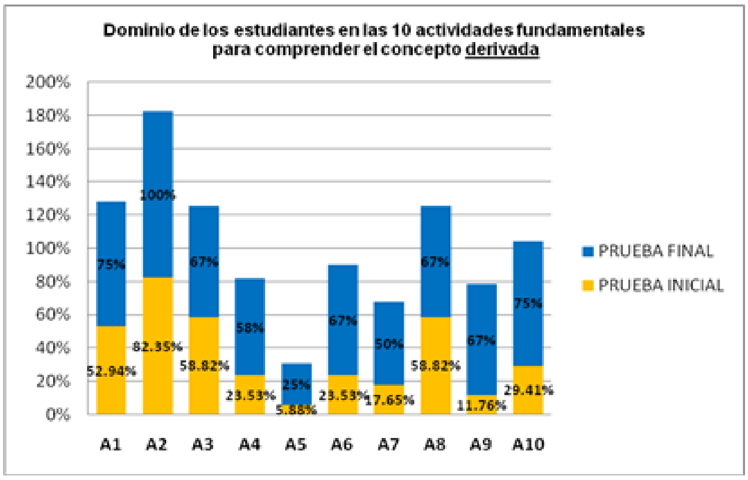
100% las 22 preguntas del cuestionario. Por ejemplo un estudiante en la prueba inicial contestó correctamente 6 preguntas de 22, y en la final contestó correctamente 12 preguntas de 22. Esto indica un incremento del 27.27% respecto de las preguntas totales. Nótese que al contestar el doble de respuestas no significa que hubo un incremento del 100% de preguntas correctas, pues consideramos el total de preguntas del cuestionario. La graduación a considerar fue: Menor o igual al 0% *no mejoró la comprensión;* de 1% a 30%, la *mejora de la comprensión es escasa*, de 31% a 60%, la *mejora de la comprensión es aceptable* y de 61% a 90% la *mejora de la comprensión es significativa*.

Una vez analizado los resultados de los cuestionarios observamos que no hubo mejoría significativa en los estudiantes participantes, pero si una comprensión aceptable en 2 estudiantes. Ellos realizaron aceptablemente todas las actividades que hemos caracterizado como fundamentales para la compresión de conceptos. 2 alumnos no mejoraron su comprensión. Y 8 estudiantes aún presentan una comprensión escasa del concepto en cuestión. La Tabla 6 muestra las actividades que hemos considerado como fundamentales para comprender la derivada.

	Actividades fundamentales para comprender el concepto derivada
A1	Poder indicar ejemplos para el concepto
A2	Conocer y utilizar correctamente la denominación del concepto
A3	Poder nombrar propiedades del concepto
A4	Estar en condiciones de indicar contraejemplos del concepto.
A5	Poder señalar casos especiales
A6	Poder señalar casos límite
A7	Conocer las relaciones con los demás conceptos
A8	Conocer varias definiciones
A9	Conocer una sucesión de indicaciones
A10	Uso y aplicación del concepto

Tabla 6. Actividades fundamentales para comprender la derivada

La gráfica 1 muestra los resultados del dominio de los estudiantes en las 10 actividades fundamentales para la comprensión del concepto derivada.



Gráfica 1. Porcentajes del dominio en las actividades fundamentales para comprender el concepto.

Como se aprecia en la gráfica anterior, al inicio de la puesta en escena de la SA diseñada, los estudiantes daban muestra de un escaso dominio en el trabajo con las actividades referentes a estar en condiciones de indicar contraejemplos y de fundamentar por qué estos no pertenecen a la extensión del concepto (A4); poder señalar casos especiales(A5), conocer las relaciones de la derivada con otros conceptos(A7) y conocer una sucesión de indicaciones para reconocer un representante de la derivada (A9). Cabe señalar que el porcentaje más bajo que ocupó la actividad A9, se debió a que fue la menos contestada por los alumnos. Se cree que fue debido a que los alumnos no podían trabajar con el tipo de problemas que cubría esta actividad.

Por el contrario, una vez que fue realizada la prueba final, se aprecia que el dominio en las actividades cambió favorablemente, esto se deja ver en los porcentajes obtenidos (gráfica 1), este cambio es claramente consecuencia del trabajo con la SA pues en ella se trató de desarrollar estas actividades en los participantes. El puntaje más bajo en la prueba inicial fue de 5.88 % en el grupo de actividades A5, que cambió a 25% en la prueba final, una diferencia de 19 puntos porcentuales. Así mismo, el porcentaje más alto en la prueba inicial se obtuvo en el grupo de actividades A2 y fue de 82.35%, mismo que subió casi 18% al ocupar un porcentaje del 100% en la prueba final. Es de destacarse que en todas las actividades se notó una mejora considerable. Sin embargo aún se percibe un escaso dominio en el grupo de actividades A5, encaminadas a poder señalar casos especiales del concepto.

6. Conclusiones

Ante el problema que representó la escasa comprensión del concepto derivada por parte de los alumnos de primer año de la Licenciatura en Matemáticas, de la UAGRo en este trabajo se planteó como objetivo el diseño y puesta en práctica de una Situación de Aprendizaje basada en la Metodología de la Enseñanza de las Matemáticas para el tratamiento de conceptos, con la que se pretendió proporcionar a los alumnos elementos que les ayudaran a comprender el concepto de derivada.

Diseñada la Situación de Aprendizaje se puso en práctica con un grupo voluntario de primer año de la Licenciatura en Matemáticas que cursaba la asignatura de Cálculo I. Contrastando las actividades que los estudiantes fueron capaces de realizar antes y después de la puesta en escena de la SA, se evidenció que sólo 2 alumnos de los 12 participantes mejoraron su comprensión de la derivada. Estos estudiantes realizaron aceptablemente todas las actividades propuestas mediante las cuales se contribuye al desarrollo de habilidades que hemos caracterizado como fundamentales para la compresión de conceptos matemáticos, en particular de la derivada. Una de las limitaciones de esta investigación es la cantidad de estudiantes con los que se desarrolló la SA, creemos que ésta debe ser aplicada más veces y con más participantes con fines de probar su funcionalidad y cumplir su objetivo, mejorar la comprensión de la derivada.

Si bien los resultados obtenidos no son muy alentadores el hecho de que al menos 2 estudiantes hayan mejorado su comprensión aceptablemente, nos motiva a creer en la factibilidad de la SA. Debemos destacar que los alumnos que lograron mejorar su comprensión fueron aquellos que estuvieron en todas las clases y en ellas intervenían constantemente, que discutían con sus compañeros y que realizaron todas las tareas que se les encomendaron; estos fueron factores que estamos seguros influyeron en sus resultados aunque no fueron contemplados en la cuantificación hecha para valorar la mejora de la comprensión de la derivada, pues solo se centró en los cuestionarios aplicados al final y al inicio de la SA. Por otro lado quienes no mostraron una mejora respecto de la comprensión del concepto, fueron aquellas personas que por motivos diferentes (económicos, familiares, etc.) no asistieron a todas las clases, que no realizaron tareas y que casi no participaban en el grupo. Por ello creemos que los factores ajenos al ambiente escolar influyen sobre manera en el desempeño de los alumnos en sus cursos.

En conclusión, la puesta en escena de la SA diseñada ha permitido confirmar en esta investigación que ante una de las tantas dificultades que puede haber en el aula de clases, en este caso, la escasa comprensión de un concepto, el trabajo del profesor como principal actor que busca en su labor aminorar estos inconvenientes en sus estudiantes va más allá de diseñar y proporcionar herramientas con las que los estudiantes puedan trabajar y como lo propugna el constructivismo vayan construyendo su “propio conocimiento”, sino junto con las herramientas debe involucrárseles a los estudiantes para que sean ellos quienes en interacción con sus pares y el propio profesor se responsabilicen de su “propio conocimiento”.

Bibliografía

Ballester, S., Arango, C. y Rodríguez, M. (1992). *Metodología de la enseñanza de la Matemática Tomo I*. La Habana, Cuba: Editorial Pueblo y Educación.

Dolores, C. y Zavaleta, A. (2010). *Entre lo planeado y lo alcanzado en matemáticas, el caso del Bachillerato del Estado de Guerrero.* México: Díaz de Santos.

Dolores, C. (2004). La derivada y el Cálculo, una mirada sobre su enseñanza por medio de los textos y programas. En C. Dolores, G. Martínez, R. Farfán, C. Carrillo, I. López & C. Navarro (Eds.), *Matemática Educativa, algunos aspectos de la socioepistemología y la visualización en el aula*, 231-259. Díaz Santos: México.

Dolores, C. (2007). *Elementos para una aproximación variacional a la derivada*. México: Díaz de Santos.

Dolores, C. (2013). *La variación y la derivada*. México: Díaz de Santos.

Duval, R. (1998). *Registros de representación semiótica y funcionamiento cognitivo del pensamiento*. En Hitt, F. (Ed). Investigaciones en matemática educativa II, 173-201. México: Grupo editorial Iberoamérica.

García, M. y Navarro, C. (2010). Una alternativa para trabajar con límites especiales. *Números*, 75(1), 105-120.

García, M. S. (2011). *Una situación de aprendizaje para ayudar a mejorar la comprensión del concepto derivada*. Tesis de Maestría no publicada. Cimate-Universidad Autónoma de Guerrero.

Jungk, W. (1986). *Conferencias sobre la metodología de la enseñanza de la matemática 2*. La Habana, Cuba: Editorial Pueblo y Educación

Leontiev, A. (1981). *Actividad, Conciencia, personalidad*. La Habana, Cuba: Editorial Pueblo y Educación.

Sánchez-Matamoros, G., García, M. y Llinares, S. (2008). La comprensión de la derivada como objeto de investigación en Didáctica de la Matemática. *Revista Latinoamérica de Investigación en Didáctica de la Matemática*, 11(2), 267-296.

Sierpinska, A. (1992).On Understanding the Notion of Function. En G. Harel y E. Dubinsky (Eds), *The Concept of Function Aspects of Epistemology and Pedagogy*. 25-58. Mathematical Association of America: Washington, DC.

Stone Wiske, M. (1990). Diálogo en Buenos Aires con la pedagoga de Harvard. Recuperado el 20 de noviembre de 2010, de http://edant.clarin.com/diario/2007/05/27/sociedad/s-05401.htm
.

Autores:

García González María del Socorro**: Originaria de Oaxaca, México. Actualmente es estudiante del programa de doctorado en matemática Educativa, del Cinvestav, México. Ha escrito artículos sobre la didáctica del cálculo y el dominio afectivo, líneas de investigación en las que actualmente trabaja.**
Dirección postal: Calle veta grande 26, colonia valle Goméz. Cp. 15210, Cd. De México. México.
Email: mgargonza@gmail.com
Teléfono: 5514772385

Dolores Flores Crisólogo: **Originario de Guerrero, México. Profesor e investigador del posgrado de Matemática Educativa de la Universidad Autónoma de Guerrero (UAGro). Trabaja en la línea de investigación relativa a los estudios sobre el pensamiento y lenguaje variacional. cdolores2@gmail.com**