

## Análisis del concepto de dimensión fractal: una posible reconstrucción para su enseñanza

Victoria Artigue, María de los Ángeles Fanaro, Eduardo Lacués

Fecha de recepción: 08/04/2022  
 Fecha de aceptación: 25/06/2022

|                        |  |
|------------------------|--|
| <p><b>Resumen</b></p>  | <p>Se presentan un análisis y una ejemplificación de las distintas definiciones del concepto matemático de dimensión fractal, y a partir de sus características, se reconstruye un concepto de dimensión de auto semejanza estricta, aplicable a un conjunto de fractales. Se formula una propuesta de intervención didáctica en un contexto matemático, adecuada a estudiantes de los últimos años de secundaria. Se presentan algunas producciones de profesores de Matemática desarrolladas en el marco de un curso en el cual se implementó la propuesta. Los resultados indican que presenta riqueza matemática, formalizando las ideas intuitivas usualmente presentes en los textos y las actividades de enseñanza.</p> <p><b>Palabras clave:</b> Geometría Fractal, dimensión, enseñanza, riqueza matemática</p> |
| <p><b>Abstract</b></p> | <p>An analysis and exemplification of the different definitions of the mathematic concept of dimension is presented, and based on its characteristics, a concept of strict self-similarity dimension, applicable to a set of fractals, is reconstructed. The proposal is formulated in a mathematical context, with ideas and concepts according to the knowledge of the students of the last years of high school. Some productions of Mathematics teachers who participated in a course in which the proposal was implemented are presented. The results indicate that the proposal presents mathematical richness, thus formalizing the intuitive ideas, that are usually present in texts and teaching proposals.</p> <p><b>Keywords:</b> Fractal Geometry, dimension, teaching, richness of mathematics</p>         |
| <p><b>Resumo</b></p>   | <p>Apresenta-se uma análise e exemplificação das diferentes definições do conceito matemático de dimensão e, com base nas suas características, reconstitui-se um conceito de dimensão de auto-similaridade estricta, aplicável a um conjunto de fractais. A proposta é formulada em um contexto matemático, com ideias e conceitos acessíveis aos alunos do ensino médio. São apresentadas algumas produções de professores de Matemática que participaram de um curso no qual a proposta foi implementada. Os resultados indicam que a proposta apresenta riqueza matemática, formalizando assim as ideias intuitivas, geralmente presentes em textos e propostas de ensino.</p> <p><b>Palavras-chave:</b> Geometria Fractal, dimensão, ensino, riqueza matemática</p>   |

## 1. Introducción

En el ámbito de la enseñanza de la Matemática, se reconoce a la Geometría Fractal (GF) como importante debido a la gran cantidad de nociones matemáticas que permite recuperar y por la enorme cantidad de aplicaciones que tiene. Sin embargo, un análisis que realizamos acerca de las investigaciones que proponen su enseñanza en el nivel medio, nos dio indicios de que la forma en que esta geometría es enseñada apela a lo visual y a su aspecto estético. Esta perspectiva ofrece muy pocas posibilidades para que un estudiante pueda interactuar con estos objetos matemáticos, sin ir más lejos que calcular áreas, perímetros y dimensión en casos muy puntuales. Así, por ejemplo, se presentan ciertas formas geométricas obtenidas en un número fijo de iteración, y se lo presenta como *fractal* sin explicitar que el fractal, es la figura límite de esa iteración (Artigue et al. 2021).

El término fractal proviene del latín *fractus* (adjetivo que significa interrumpido o irregular) y fue introducido por el matemático Benoit B. Mandelbrot (1975), quien observó que la naturaleza presenta formas tan complejas (como una nube, una montaña o costas de países) que para estudiarla se necesita otra geometría distinta a la geometría euclidiana (GE). En términos generales, la GF estudia objetos geométricos, algunos de los cuales son producto directo o indirecto de un procedimiento iterativo, lo cual hace que esta geometría tenga características distintivas.

Desde hace tiempo, se ha planteado un debate en el mismo seno matemático acerca de cómo definir estos objetos. Spinadel (2002) plantea que, entonces, lo más conveniente es realizar una lista de sus propiedades más características para abordarlos. Por ejemplo, Falconer (2003), especifica que cuando se hace referencia al conjunto  $F$  como fractal, se tiene en cuenta que: posee una estructura fina con detalles sobre escalas arbitrariamente pequeñas; es demasiado irregular para ser descrito en el lenguaje geométrico tradicional, local y globalmente; está definido de una manera simple, a veces mediante una recursión y tiene alguna forma de autosemejanza; tiene asignada una dimensión fractal (designada en este trabajo como  $D_F$ ) que puede calcularse de cierta forma. Como se puede notar, esta definición de figura fractal es bastante imprecisa, porque no ofrece una forma explícita de encontrar el valor para la  $D_F$ , ni la forma de caracterizar y justificar su autosemejanza. Sin embargo, podemos partir de aceptar que estos objetos son conjuntos de puntos, cuyas principales características son la autosemejanza y la intervención de dos parámetros fundamentales que definen el otro concepto clave, el de  $D_F$ : la cantidad de partes en que se divide el objeto y el tamaño de esas partes (Castiblanco Hernández y Montana Páez, 2018). Así, asumimos que dos son los conceptos que caracterizan a la GF: la autosemejanza y la  $D_F$ .

Si bien la autosemejanza parece ser una noción evidente y no necesitar más explicación que la presentación de ejemplos sencillos, con escasa intervención de la Matemática, es un concepto esencial para dar significado a los fractales, ya que es una propiedad subyacente en gran cantidad de ellos. Una forma de ejemplificarla es con la cabeza del conocido brócoli romanesco: contiene partes que cuando se quitan y se comparan con el conjunto son muy parecidos, solo que más pequeñas (Peitgen, et al., 2004). Otro ejemplo bastante intuitivo de la autosemejanza es una varilla graduada de un metro, que tiene marcados los decímetros, los centímetros y los

milímetros: un decímetro, junto con sus marcas, parecen un metro con sus respectivas marcas, pero reducido en un factor de 10. Si bien en este caso no se trata de un fractal sirve para presentar un ejemplo donde la autosemejanza parece ser evidente.

La autosemejanza no es el único indicador para considerar que un conjunto de puntos o un objeto sea de un fractal, sino que también será la posibilidad de definir su  $D_F$ . En un trabajo previo (Autor 1 et al., 2021) realizamos un análisis clasificando algunos tipos de autosemejanza, y propusimos una forma operativa que, superando la idea intuitiva, permite conocer si una figura tiene autosemejanza estricta, utilizando el concepto de Sistema de Funciones Iteradas (SFI).

El concepto de dimensión ha sido formulado matemáticamente desde varios enfoques, no todos equivalentes entre sí, y definirlo fue un importante problema para la comunidad de matemáticos del siglo XX, como ampliaremos en la sección siguiente.

## 2. Sobre el concepto de dimensión

El concepto intuitivo o usual de dimensión proviene de Euclides (Rubiano, 2009); la dimensión euclídea ( $D_E$ ) aparece como el conjunto de parámetros que es necesario para describir la posición de una figura: un punto o un conjunto finito de puntos tiene dimensión igual a cero; una recta, una circunferencia o el perímetro de un polígono tienen dimensión igual a uno; un cuadrado o un triángulo tienen dimensión igual a dos y un cubo, una esfera, o el espacio que habitamos tiene dimensión igual a tres. En todos los casos la  $D_E$  es un número entero, que es un indicador del número de grados de libertad para “moverse” en el conjunto.

A partir de fines del siglo XIX, la necesidad de analizar y ampliar el concepto de dimensión comenzó a ser evidente para los matemáticos, como consecuencia de la inadecuación de la noción euclídea para estudiar ciertos conjuntos, algunos de los cuales eran conocidos desde siglos atrás, mientras que otros habían tomado relevancia en el marco de la naciente teoría de conjuntos o de interrogantes relacionadas con la cuestión de la convergencia. Otros problemas surgieron posteriormente, como la manera de describir el grado de irregularidad de un objeto.

Actualmente se cuenta con varias acepciones de dimensión en Matemática, ya que depende del contexto para comprender en qué casos tiene sentido referirse a un tipo y en qué casos a otro (Binimelis, 2017).

Acordamos con Garbin y Mireles (2009) para quienes el concepto de  $D_F$ , aplicado a los objetos geométricos fractales caracteriza al objeto en cuestión y es un elemento clave para acercarse a su complejidad. Si bien la noción de  $D_F$  se puede apoyar en la noción de  $D_E$ , es necesario comprender que hay que realizar un salto epistémico para pasar de una a otra, porque si bien en ambos casos se usa la misma palabra, ella adquiere distinto significado en cada contexto. Como constata la investigación de estos mismos autores, el tratamiento del concepto de  $D_F$  en los libros de texto de la escuela secundaria es casi nulo, lo que se evidencia en la ausencia de actividades referidas a ella. Estos autores señalan la necesidad de introducir el concepto de  $D_F$  mediante una recontextualización o transposición didáctica adecuada.

Por eso, en este trabajo nos enfocamos en algunos aspectos del concepto de  $D_F$ , dado que el interés es estudiar las transformaciones necesarias que hay que

realizar en las prácticas de enseñanza para que los conceptos e ideas clave de la GF resulten enseñables en los últimos años de la escuela secundaria.

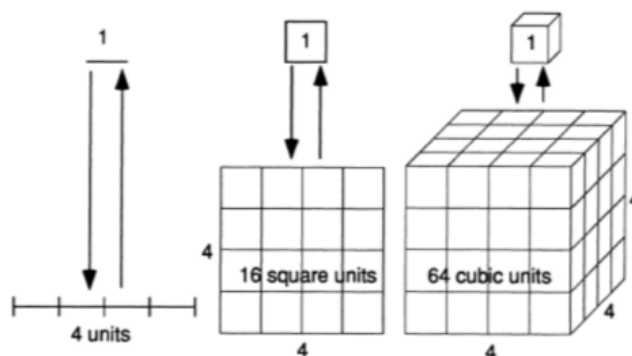
A continuación, presentaremos algunas de las respuestas a los problemas referidos. En algunos momentos advertiremos acerca de que el tratamiento matemático riguroso de las cuestiones abordadas escapa al alcance de este trabajo.

## 2.1. La dimensión de compás, de cajas y de autosemejanza

Una perspectiva muy utilizada sobre la noción de dimensión proviene del intento de medir el grado de irregularidad de una figura. Peitgen et al. (2004) indican que se pueden definir tres tipos de dimensión fractal que atiendan a este asunto: dimensión de autosemejanza ( $D_A$ ) aplicable únicamente a fractales con autosemejanza estricta; dimensión de compás ( $D_C$ ) utilizada en curvas irregulares como fronteras de países, y dimensión por conteo de cajas<sup>1</sup> ( $D_{CC}$ ) útil cuando el fractal no se subdivide en copias exactas de sí mismo (se puede aplicar en curvas irregulares, también, como costas de países al igual que en el caso anterior).

La construcción de la  $D_A$  la ejemplificamos de la siguiente manera. Consideremos un segmento de recta, un cuadrado y un cubo (figuras con  $D_E$  1, 2 y 3 respectivamente). El segmento y cada uno de los lados del cuadrado y del cubo se dividen entre un número positivo  $k$  arbitrario, con lo que cada uno de estos conjuntos puede considerarse particionado en cierto número de subconjuntos congruentes con el original en una semejanza de razón  $r = \frac{1}{k}$ . El número  $N$  de estos subconjuntos congruentes con el original es una función de  $k$  y depende además de la figura (segmento, cuadrado o cubo).

Tomemos, por ejemplo,  $r = \frac{1}{4}$  como se representa en la Figura 1.



**Figura 1.** Dimensión de autosemejanza con razón  $r = \frac{1}{4}$ . Fuente: Peitgen et al. (2004).

La Tabla 1 muestra el valor  $N(k)$  para cada una de las figuras consideradas en la Figura 1, para un número  $k$  cualquiera (Peitgen et al., 2004; Binimelis, 2017).

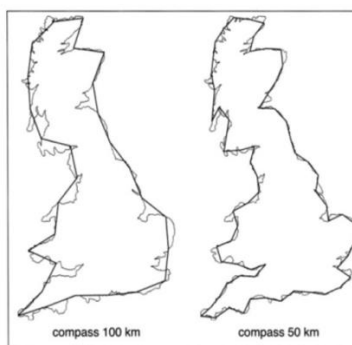
<sup>1</sup> Traducción del inglés “box counting”.

| Figura | Segmento | Cuadrado | Cubo  |
|--------|----------|----------|-------|
| $N(k)$ | $k^1$    | $k^2$    | $k^3$ |

**Tabla 1.** Cantidad de subconjuntos congruentes con el original en una semejanza de razón  $\frac{1}{k}$ .  
Elaboración personal.

En estos casos, la  $D_E$  coincide con el exponente al que hay que elevar el número  $k$  para obtener la cantidad de subconjuntos  $N$  en los que resultó particionada la figura, es decir,  $N(k)=k^r$ , de donde resulta que una definición tentativa de  $D_A$  es  $\frac{\log N(k)}{\log k} = \frac{\log N(k)}{\log \frac{1}{r}}$ .

En cuanto a la definición de la  $D_C$ , su necesidad nació por el interés de medir como puede ser la costa de un país o de una laguna como se muestra en la Figura 2. Los procedimientos que describiremos a continuación también se aplican a otras situaciones (Peitgen et al., 2004).



**Figura 2.** Dimensión de compás con abertura de 100km y 50km. Fuente: Peitgen et al., (2004).

Elijamos una unidad de medida  $s$  y tomando un punto de partida sobre la costa, marquemos un punto (de los posibles) que esté también sobre la costa a una distancia igual a la unidad elegida. Tomando este primer punto elegido, repetamos el procedimiento el número  $n$  (notemos que  $n$  depende de  $s$ , es decir,  $N(s)=n$ ) de veces necesario para abarcar la extensión de costa que queremos medir y aceptemos que ese número multiplicado por nuestra unidad de medida es una aproximación de la longitud  $u$  de la costa.

Por lo tanto, parece ocurrir que cuanto menor sea la unidad de medida, o nuestro compás, mayor es la longitud de la curva. Sin embargo, debemos recordar que este procedimiento es empírico, por lo tanto, es imposible considerar unidades de medida arbitrariamente pequeñas y precisiones cartográficas arbitrariamente grandes. Por lo tanto, la validez de este razonamiento está limitada a ciertos rangos tanto para la unidad de medida como para la escala cartográfica. De cualquier manera, esta situación alerta acerca de que la longitud euclídea tiene un sentido diferente al que estamos queriendo desarrollar (Redondo y Haro, 2004).

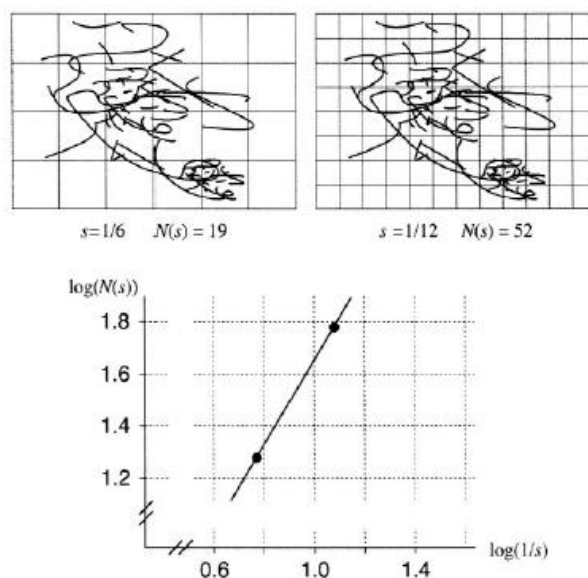
Para continuar, debemos advertir que es necesario tener conocimiento acerca de escalas logarítmicas y ajuste lineal de datos empíricos. En un sistema cartesiano tomemos en el eje de las abscisas el logaritmo del inverso de nuestra unidad de medida, y en el de las ordenadas el logaritmo de la aproximación la longitud de la

costa. Utilizando el método de los mínimos cuadrados se encuentra que existe una recta que ajusta con buena precisión el conjunto de datos representados.

Esta relación lineal tiene como ecuación  $y = dx + b$ . Para los cálculos que siguen, es necesario explicitar el significado de las variables  $x$  e  $y$ . Volviendo a nuestra construcción anterior, recordemos que  $x = \log \frac{1}{s}$  e  $y = N(s) \cdot s$ , de donde resulta que  $N(s) \cdot s = d \cdot \log \frac{1}{s} + b$ . De aquí puede deducirse, tomando el límite para  $s \rightarrow 0$ , que  $d = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{N(s) \cdot s}{\log \frac{1}{s}}$ .

Lo que resulta notable en este desarrollo (y ocurrirá lo mismo en el que sigue) es que la función cuyo límite se calcula coincide con la que se obtiene al considerar la que se obtuvo al calcular la  $D_A$  (en este último caso, la función resulta constante y por lo tanto, su límite es la misma constante).

Finalmente, la  $D_{CC}$  surge al considerar objetos que no tienen autosemejanza estricta y que pueden resultar tan complejas o *salvajes* como se muestra en parte superior de la Figura 3 (Peitgen et al., 2004). En la parte de la izquierda se inscribe la imagen de un objeto representado en un rectángulo, el cual ha sido dividido en 24 cuadrados de lado  $\frac{1}{6}$  de su largo, de los cuales hay 19 ocupados por la figura. En la parte de la derecha se realizó un procedimiento análogo, pero dividiendo en 96 cuadrados iguales y más pequeños ( $\frac{1}{12}$  del largo del rectángulo original), de los cuales se ocupan 52 con la figura.



**Figura 3.** Dimensión de conteo de cajas para una figura *salvaje* con dos cuadrículas. Fuente: Peitgen et al. (2004).

El procedimiento se generaliza, dividiendo el rectángulo mediante una cuadrícula regular, donde cada cuadrado de la cuadrícula (los llamados cajas) tiene lado de longitud  $s$ . Luego, se contabiliza el número  $n$  de cajas necesario para cubrir el objeto representado, que depende de  $s$ , es decir,  $n = N(s)$ .

Efectuando una representación cartesiana similar a la usada para la medida de una costa, elegimos tomar en el eje de abscisas a  $x = \log \frac{1}{s}$  y en el de ordenadas a  $y =$

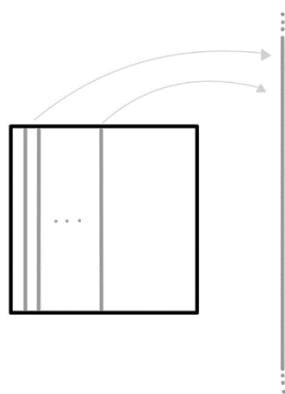
$N(s)$ . Ajustando los datos mediante la construcción de la recta de mínimos cuadrados, se obtiene una ecuación parecida a la anterior:  $\log(N(s)) = d \cdot \log \frac{1}{s} + b$ , de donde se consigue para  $d$  el mismo resultado que en el caso anterior.

Este procedimiento que, como señala Peitgen (2004), tienen otros ejemplos representativos en biología y fisiología, son evidencias de carácter empírico que refuerzan la idea de que la definición dada de  $D_A$  puede tener una relevancia que trascienda a los ejemplos que la motivaron inicialmente.

## 2.2. La dimensión de Hausdorff: un valor entre infinitas medidas

Rubiano (2009) señala que, hace más de un siglo, el matemático Félix Hausdorff buscó generalizar las ideas de longitud, área y volumen. Comenzamos esta sección retomando de forma intuitiva sus ideas, proponiendo pensar que la recta tiene una longitud mayor a 0, un área igual a 0 y un volumen igual a 0, que un cuadrado tiene un área mayor a 0 y un volumen igual a 0, y que un cubo tiene un volumen mayor a 0.

La clave para aceptar la afirmación de que el cuadrado tiene una longitud infinita es realizar el siguiente razonamiento: para cubrirlo con segmentos, se necesitan infinitos de ellos, ya que, al quitar cada uno y unirlos fuera del cuadrado, se obtiene una recta que tiene longitud infinita, como se muestra en la Figura 4. De esta manera, para cubrir una figura de dimensión  $d$  con figuras de dimensión menor que  $d$ , se necesitarán infinitas de ellas (Kohavi y Davdovich, 2006).



**Figura 4.** La longitud infinita de un cuadrado. Fuente: Aramburú (2021)

De forma análoga, se puede recubrir un cubo con una cantidad infinita de cuadrados, por lo que se puede realizar la unión de todos ellos arista con arista generando un área infinita. Por lo tanto, el cubo tiene también un área infinita. La Tabla 2 presenta algunos resultados de este procedimiento, donde  $med_1$  significa longitud,  $med_2$  significa área y  $med_3$  significa volumen.

|                 | $med_1$  | $med_2$  | $med_3$ |
|-----------------|----------|----------|---------|
| <b>Segmento</b> | $> 0$    | 0        | 0       |
| <b>Cuadrado</b> | $\infty$ | $> 0$    | 0       |
| <b>Cubo</b>     | $\infty$ | $\infty$ | $> 0$   |

**Tabla 2.** Idea intuitiva de la  $D_H$ . Basada en Aramburú (2021).

Siguiendo el argumento de Rubiano (2009), Hausdorff observó que para un subconjunto de un espacio con  $D_E$  igual a  $n$ , podía definirse medidas de orden  $k$  ( $med_k$ ) para cualquier entero  $k$ , de manera que el valor de  $med_k$  es infinito si  $k < n$  y 0 si  $k > n$ .

Para dar más precisión a esta idea, es necesario dar algunas definiciones. En lo que sigue  $x$  e  $y$  representan elementos de  $\mathbb{R}^n$ , es decir,  $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$  e  $y = (y_1, y_2, \dots, y_n)$  donde  $x_i$  e  $y_j$  son números reales cualesquiera sean  $i$  o  $j$ .

La distancia entre  $x$  e  $y$  es el número:

$$d(x,y) = \sqrt{(x_1-y_1)^2 + (x_2-y_2)^2 + \dots + (x_n-y_n)^2} = \sqrt{\sum_{i=1}^n (x_i-y_i)^2}$$

Una bola de centro  $x$  y radio  $\delta > 0$  es el conjunto  $B(x, \delta) = \{y/d(x,y) < \delta\}$ .

Advertimos que en lo que sigue es necesario el conocimiento de lo que significan el ínfimo de un conjunto de número reales y la suma de una serie.

El diámetro de un subconjunto  $S$  de  $\mathbb{R}^n$  es  $\text{diam}(S) = \sup\{d(x,y); x,y \text{ son elementos de } S\}$ . Este diámetro es o bien un número real no negativo (en el caso de que  $S$  esté contenido en una bola) o bien más infinito.

Un recubrimiento numerable de un conjunto  $S$  es una familia  $\{U_k\}_{k \in \mathbb{N}}$  donde  $U_n$  es un subconjunto de  $\mathbb{R}^n$  y  $k$  en un número natural cualquiera, para la cual ocurre que cualquier elemento de  $S$  es también elemento de algún conjunto de la familia, dicho de otra manera,  $S$  está contenido en la unión de la familia. Si todos los conjuntos de la familia son abiertos, el recubrimiento se dice abierto.<sup>2</sup> Volvamos a la observación de Hausdorff, concretándola a un subconjunto de  $\mathbb{R}^2$ . Una manera de aproximar el área de una figura  $S$  es cubrirla con una sucesión de bolas abiertas (o discos)  $B_1, B_2, \dots, B_n, \dots$  y calcular la suma de la serie formada las áreas de esas bolas<sup>3</sup>:

$$A(S) = \frac{\pi}{4} ((\text{diam}(B_1))^2 + (\text{diam}(B_2))^2 + \dots + (\text{diam}(B_n))^2 + \dots)$$

En cualquier caso, los discos pueden superponerse y cubrir una buena parte del plano que no es del conjunto  $S$  (Rubiano, 2009). Incluso la serie podría resultar divergente. Sin embargo, una solución para calcular el área de  $S$  es considerar el conjunto de todas las sumas obtenidas con el procedimiento anterior, cuando la serie resulte convergente. El ínfimo de este conjunto es, esperamos, la mejor aproximación al área de  $S$ , dado que este número no incluiría ningún exceso de área. Si se quisiera calcular la longitud de  $S$ , se puede calcular la suma de la serie de los diámetros de las mismas bolas:

$$L(S) = (\text{diam}(B_1))^1 + (\text{diam}(B_2))^1 + \dots + (\text{diam}(B_n))^1 + \dots$$

<sup>2</sup> Un cubrimiento finito  $\{V_1, V_2, \dots, V_p\}$  de un conjunto  $X$  queda incluido en esta definición, porque se puede considerar que equivale al cubrimiento  $\{U_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ , donde  $U_k = V_k$  para  $k=1, 2, \dots, p$  y  $U_k = \emptyset$  si  $k > p$ .

<sup>3</sup> En el caso de que el recubrimiento sea finito, la suma de la serie coincide con una suma finita.



Por un procedimiento similar al anterior, el ínfimo del conjunto de estas sumas (si es que alguna de estas series resultara convergente) es lo que llamaríamos longitud de  $S$ .

Observemos que, en el caso del área, los exponentes a los que se encuentran elevados los diámetros es 2 y en el caso de la longitud es 1.

Hausdorff rigORIZÓ y generalizó este procedimiento. Para cada subconjunto  $T$  de  $\mathbb{R}^n$  y cada número real positivo  $\delta$ , consideró todos los recubrimientos de  $T$  para los cuales el diámetro de cada miembro del recubrimiento fuera menor que  $\delta$ .

Si  $\{U_k\}_{k \in \mathbb{N}}$  es uno de estos recubrimientos y  $s$  es un número real no negativo, calculó la suma  $(\text{diam}(U_1))^s + (\text{diam}(U_2))^s + \dots + (\text{diam}(U_k))^s + \dots$  y consideró el ínfimo del conjunto de estas sumas (cuando la serie resultaba ser convergente). Designó a este ínfimo con el símbolo  $H_\delta^s(T)$ , es decir,  $H_\delta^s(T) = \inf \{ \sum_{n=1}^{+\infty} (\text{diam}(U_n))^s \}$ .

Hausdorff llamó medida  $s$ -dimensional de  $T$  a  $\lim_{\delta \rightarrow 0} H_\delta^s(T)$ . Si  $H^s(T)$  denota a este límite, probó que existe un único valor  $d$  para el cual ocurre que  $H^s(T) = \begin{cases} +\infty & s < d \\ 0 & s > d \end{cases}$ .

Este número  $d$  es la dimensión de Hausdorff ( $D_H$ ) del conjunto  $F$ . Constituye una generalización de la noción tradicional de dimensión, en el sentido de que, por ejemplo, la medida de dimensión 1 calcula la longitud de una curva suave en  $\mathbb{R}^3$ , la medida de dimensión 2 es proporcional al área de figuras planas, y la medida de dimensión 3 es proporcional al volumen de un sólido.

Como es posible notar, los resultados de los dos últimos párrafos no son posibles de demostrar en el nivel de tratamiento del tema que estamos dando en este trabajo. Por su parte, el lector interesado puede profundizar y encontrar ejemplos de la aplicación de la  $D_H$  en Castro (2018) y García (2018).

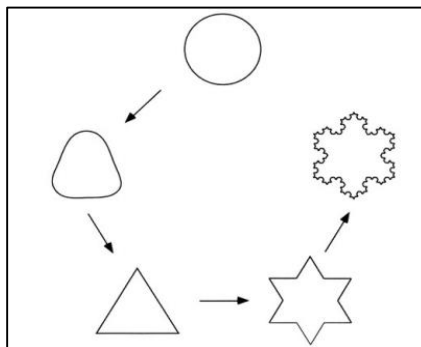
### 2.3. La dimensión topológica

En esta sección se mencionan áreas matemáticas y algunas de las entidades que las componen en un nivel que no va más allá de lo descriptivo, porque el abordaje de cualquiera de los resultados que se van a referir requiere desarrollos que son especializados, no elementales y cuyo tratamiento, aún uno introductorio, sobrepasa el alcance de este trabajo.

Una de las áreas de la topología tiene como objeto el estudio de las formas en que ciertas figuras pueden “deformarse sin romperse” para transformarse en otras. El instrumento que se utiliza para describir estas transformaciones es lo que se llama homeomorfismo, que se define como una función biyectiva continua cuya inversa es también continua. Los homeomorfismos son instrumentos con los cuales pueden establecerse nociones de equivalencia entre figuras.

En la caracterización de las equivalencias importa definir parámetros que sean invariantes, entre los cuales se encuentra la dimensión topológica ( $D_T$ ) de un objeto. Un ejemplo está provisto por las curvas representadas en la Figura 5. Cada una de ellas puede transformarse en cualquiera de las otras. En este caso, la  $D_T$  de la

circunferencia es igual a 1 (coincidente con la  $D_E$ , tal cómo se analizará a continuación) y entonces todas las demás tendrán la misma  $D_T$ .



**Figura 5.** Un círculo se puede deformar continuamente en un triángulo y un triángulo en la curva de Koch. **Fuente:** Peitgen et al., (2004)

Una definición de  $D_T$  para un subconjunto  $A$  de  $\mathbb{R}^n$  es la que sigue:

1) Si para cada punto  $x$  de  $A$  existe una bola que contiene a  $x$  y cuya frontera no contiene ningún punto de  $A$ , entonces  $D_T(A)=0$ .

2) Si para cada punto  $x$  de  $A$  existe una bola que contiene a  $x$ , cuya frontera interseca a  $A$  en un conjunto de dimensión  $k - 1$ , y  $k$  es el menor entero no negativo para el cual esto ocurre, entonces  $D_T(A)=k$ .

Entonces, cualquier conjunto finito o numerable tiene  $D_T$  igual a 0, al igual que el conjunto de Cantor, mientras que la gráfica de cualquier función continua con dominio en un intervalo cerrado de  $\mathbb{R}$  y codominio  $\mathbb{R}^n$  tiene  $D_T$  igual a 1, al igual que la curva de Koch y el triángulo de Sierpinski (Dummit, 2015).

Con la definición dada, puede probarse que  $D_T$  es un invariante mediante homeomorfismos y, por lo tanto, la  $D_T$  de cualquiera de las curvas de la Figura 5 es 1, como la de cualquier circunferencia.

### 2.3. Algunas dimensiones de la curva de Koch y la definición de fractal

En esta sección mostramos una posible manera de calcular algunas de las dimensiones desarrolladas anteriormente, para el caso de la curva de Koch. Elegimos este fractal porque más adelante presentamos resoluciones de una actividad matemática por parte de profesores de Matemática, que forma parte de la propuesta implementada, en la que aparece. En dicha actividad se estudian fractales cuya figura inicial, en todos los casos, es un segmento. Uno de ellos es la curva de Koch, y otros se construyen de una manera geoméricamente similar.

Para la  $D_A$ , basta notar que el número de subconjuntos congruentes con el original es 4 y que la razón  $r$  de semejanza es  $\frac{1}{3}$ . Por lo tanto, resulta que su  $D_A$  es  $\frac{\log 4}{\log 3}$ .

Para calcular la  $D_H$  de la curva de Koch (que designamos con  $(D_H(K))$ ) notemos que un recubrimiento posible está compuesto por  $4^k$  intervalos, cada uno de ellos de

longitud  $\frac{1}{3^k}$ . Entonces,  $H_\delta^s(K) = \inf \{ \sum_{n=1}^{+\infty} (\text{diam}(U_n))^s = 4^k \left(\frac{1}{3^k}\right)^s$ , y por lo tanto  $\lim_{\delta \rightarrow 0} H_\delta^s(T) = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{4^k}{3^{ks}} = \lim_{k \rightarrow \infty} \left(\frac{4}{3^s}\right)^k$ . El único caso en que este límite será un número diferente de 0 y de infinito es en el que  $s$  satisface  $\frac{4}{3^s} = 1$ , o equivalentemente,  $\log s = \frac{\log 4}{\log 3}$ . Notemos que, ambas definiciones ( $D_A$  y  $D_H$ ) conducen al mismo valor.

Por otro lado, recordamos que esta curva tiene  $D_T$  igual a 1 (Dummit, 2015). Tenemos entonces un ejemplo de fractal definido como lo hizo Mandelbrot (1975): figura o conjunto en el cual se cumple que su  $D_H$  excede estrictamente su  $D_T$ . Esta definición, a pesar de su sencillez y precisión, claramente no es susceptible de ser tratada con estudiantes de la escuela secundaria, dada su poca disponibilidad de saberes previos relativos a la topología.

Con el propósito de tratar matemáticamente a los elementos y características de algunas figuras fractales, como la autosemejanza estricta y la  $D_A$ , superando una forma intuitiva de tratarlos en los últimos años de la escuela secundaria, en este trabajo planteamos una actividad de enseñanza que reconstruye matemáticamente estos conceptos. Pretendemos aportar soluciones al problema didáctico siguiente:

¿Cómo hacer un uso matemático de los elementos característicos de las figuras fractales en la escuela secundaria, que no requieran nociones de topología, estableciendo la diferencia con las nociones de la GE?

### 3. Una propuesta para reconstruir el concepto de dimensión Fractal en la escuela secundaria

#### 3.1 Fundamentos matemático-didácticos de la propuesta

Anteriormente señalamos que la propiedad de autosemejanza está asociada a expresiones coloquiales como: *es posible encontrar al todo en cualquier parte del fractal; cuando se pueden encontrar copias reducidas del todo en ciertos puntos de la figura; la figura es invariante ante cualquier cambio de escala; si se hace zoom en cualquier parte de la figura se encuentra la misma figura.*

De la revisión bibliográfica realizada en Autor 2 et al. (2021) se desprende que con el concepto de  $D_F$  ocurre algo similar, en el sentido de apelar a lo intuitivo, atribuyéndole a este concepto frases como: *a mayor rugosidad o irregularidad, mayor dimensión; la dimensión de un fractal es un número fraccionario que da cuenta de qué tanto llena el fractal una región plana*, entre otras que, si bien no son incorrectas, son expresiones coloquiales que no ofrecen una forma matemática de trabajar en el aula.

La calidad matemática de un proceso de instrucción puede ser analizado bajo el descriptor de *riqueza matemática* (Font et al., 2015). Estos autores se basaron en las categorías antes propuestas por Hill, Blunk, Charambous, Lewis, Phelps, Sleep y Ball (2008) quienes habían considerado que dicha riqueza puede analizarse a partir de: la detección de errores matemáticos, las justificaciones, las representaciones matemáticas, los métodos de resolución, las generalizaciones y las observaciones matemáticas. Hill et al. (2008) formularon un sistema de categorías para medir la calidad de la instrucción, de las cuales seleccionamos y adaptamos en este trabajo

una de ellas, y es en qué grado *el trabajo que implica la tarea está conectado con la matemática*. En este sentido, notamos que las ideas y conceptos que presentamos en la sección anterior, con diferentes grados de intuición, difícilmente permitan a los estudiantes de la escuela media, desarrollar tareas matemáticas, ya que no conectan con operaciones matemáticamente realizables como calcular, comparar, analizar.

Lo anterior se relaciona estrechamente con el concepto de *operatividad*, ya que la significación de una definición (como expresión) depende en parte de lo que la expresión permite accionar, hacer y las posibilidades de ser transformadas en otras representaciones. La operatividad de una definición refiere entonces a la posibilidad de operar dentro de un marco de referencia y en función de la tarea que se quiere realizar. De esta manera, la operatividad de una definición demanda al estudiante la elección de transformaciones válidas y pertinentes. Esto refiere a las sustituciones de unas representaciones por otras en el discurso matemático mediante un cambio de contenido para asegurar el progreso del razonamiento o de cálculos (Panizza, 2015).

En este trabajo proponemos reconstruir una forma operativa, con calidad y riqueza matemática, en el sentido de Hill et al. (2008) de la dimensión para los fractales con autosemejanza estricta, extendiendo la reconstrucción del concepto de autosemejanza que ya realizamos en otro trabajo previo (Autor 1, et al., 2021). La oportunidad de esta forma es que se puede reconstruir el concepto de  $D_A$  prescindiendo de las siguientes  $D_C$ ,  $D_{CC}$ ,  $D_H$  y  $D_T$ , y conservar la idea de contar con un invariante numérico propio de cada fractal. Partimos de la siguiente idea:

*Una figura es autosemejante estrictamente si es obtenida como límite<sup>4</sup> de un proceso iterativo a partir de una figura inicial llamada semilla, donde el resultado de cada paso admite una partición de manera que se cumplen las siguientes condiciones:*

1. *Cualquiera de los subconjuntos de la partición correspondiente a cualquier paso iterativo es semejante a la semilla (es decir, cada elemento de la partición es imagen de la semilla por medio de una cierta semejanza, y todas ellas comparten el mismo factor);*
2. *Es constante el cociente entre el factor de semejanza de cualquiera de los subconjuntos de la partición correspondiente a un cierto paso con la semilla, y el factor de semejanza de los subconjuntos correspondientes al paso anterior con la semilla; además, este cociente es igual al inverso del factor de semejanza que vincula la semilla con los subconjuntos de la partición correspondiente al primer paso;*
3. *El cociente entre las cantidades de subconjuntos de la partición correspondiente a un cierto paso y a su anterior es constante.*

Por ejemplo, para saber si la curva de Koch es autosemejante estrictamente verificamos que se cumplan las tres condiciones: la primera condición surge de la forma de construir la figura (en la primera iteración se tienen 4 subconjuntos todos semejantes a la semilla, con factor de semejanza de  $\frac{1}{3}$ ). El factor de semejanza al que hace referencia el punto 2.a es, en la primera iteración es 3 ya que el segmento semilla

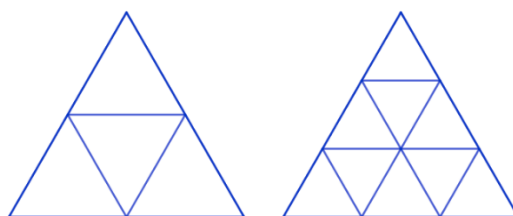
<sup>4</sup> Se ha usado la palabra límite en un sentido que es imposible rigORIZAR completamente en este contexto. Con ella se ha querido apelar a la intuición para indicar que un proceso iterativo efectuado sobre figuras geométricas está asociado a una cierta figura a la cual se *parecen* en algún sentido los resultados de cada paso iterativo.

se divide en partes; en la segunda es 9, en la tercera es 27, y así sucesivamente. Para la condición 2.b el factor considerado es 1 para la primera iteración, para la segunda iteración es 3, para la tercera es 9, y así sucesivamente. Realizamos los cocientes  $\frac{3}{1} = \frac{9}{3} = \frac{27}{9} = 3$ , obteniendo una constante, que es en este caso, 3 cuyo inverso ( $\frac{1}{3}$ ), corresponde al factor de semejanza que vincula la semilla con los subconjuntos en los cuales se dividió.

La condición 3 se cumple ya que la cantidad de subconjuntos de la partición, en la primera iteración es 4, en la segunda iteración es 16, en la tercera es 64, y así sucesivamente. Los cocientes, así resultan constantes ya que  $\frac{4}{1} = \frac{16}{4} = \frac{64}{16} = 4$ . Con todo esto, podemos asegurar que la curva de Koch es autosemejante estrictamente.

Es necesario destacar que en nuestra definición es central que la figura se haya podido obtener a partir de un proceso iterativo. En efecto, existen figuras que pueden ser subdivididas en un número finito  $N(k)$  de subfiguras o subconjuntos, todos congruentes entre sí (por traslaciones o rotaciones) y ser copias reducidas del objeto inicial por un factor de contracción  $r = \frac{1}{k}$ , y sin embargo, puede no cumplirse la existencia de un único valor de  $d$  tal que  $N(k) = k^d$ , de la cual se deduce que  $d = \frac{\log N(k)}{\log(k)}$ .

Un ejemplo lo constituye un triángulo equilátero; si se lo divide según sus rectas paralelas medias de sus lados, obtenemos en este caso 4 triángulos equiláteros congruentes con el original. Sin embargo, cuando lo dividimos según rectas que dividen a cada uno de sus lados en tercios, obtenemos 9 triángulos congruentes. De estas dos subdivisiones se desprende que existen al menos dos valores para  $d$  que cumplen con la igualdad  $N(k) = k^d$ . La figura 6 muestra esta situación.



**Figura 6.** Un ejemplo de figura que se divide en subfiguras congruentes a ella, sin cumplirse la unicidad de  $d$  que satisfaga  $N(k) = k^d$ . **Fuente:** elaboración propia

Retomando con la idea de autosemejanza estricta, podemos reformular esta noción de la siguiente manera:

*Una figura es autosemejante estrictamente si es obtenida como límite de un proceso iterativo a partir de una figura inicial llamada semilla, donde el resultado de cada paso admite una partición tal que cada subconjunto que la integra es imagen de la semilla en una cierta semejanza, todas ellas con el mismo factor, menor que 1; además, si se designan con  $p_k$  la cantidad de subconjuntos de la partición correspondiente al  $k$  –ésimo paso, y con  $\alpha_k$  el factor de semejanza de cada subconjunto de la partición con la semilla, resulta que los cocientes  $p = \frac{p_{k+1}}{p_k}$  y  $\frac{1}{\alpha} = \frac{\alpha_{k+1}}{\alpha_k}$  son constantes.*

Para contar con una definición operativa de la  $D_F$  es necesario notar primero que es conveniente contar con los cocientes anteriores, elevados a una misma potencia, llamémosla  $r$ , donde las iteraciones consideradas difieran en este mismo valor de potencia  $r$  (en lugar de dos consecutivas como antes). Entonces:

$$p^r = \frac{p_{k+r}}{p_k} \text{ y } \left(\frac{1}{\alpha}\right)^r = \frac{1}{\alpha^r} = \frac{\alpha_{k+r}}{\alpha_k}.$$

Siguiendo con el ejemplo de la curva de Koch tenemos por ejemplo que, si fijamos el paso  $k = 1$ , se tiene que  $p = 4$  (cociente constante entre dos iteraciones consecutivas). Ahora analicemos para distintas potencias o valores de  $r$ :

$$\text{Para } r = 2, \frac{p_3}{p_1} = \frac{6^4}{4} = \frac{6^4}{4} = 16 = 4^2, \text{ para } r = 3, \frac{p_4}{p_1} = \frac{256}{4} = 64 = 4^3, \text{ y}$$

$$\text{para } r = 4, \frac{p_5}{p_1} = \frac{1024}{4} = 256 = 4^4$$

Notamos que el exponente coincide con el valor en que difieren las dos iteraciones consideradas. Un análisis similar para los cocientes entre los factores de semejanza (o factor de escala) de los subconjuntos correspondientes al paso anterior con la semilla ( $\alpha$ ) nos conduce a aceptar que el exponente, coincide con el valor en que difieren las dos iteraciones consideradas. Con lo cual, si buscamos analizar los cocientes independientemente de  $r$ , al estar como exponente, podemos tomar el logaritmo a ambas expresiones y ahora considerar su cociente, ya que:

$$\frac{\log \frac{p_{k+r}}{p_k}}{\log \frac{\alpha_{k+r}}{\alpha_k}} = \frac{\log p^r}{\log \left(\frac{1}{\alpha}\right)^r} = \frac{r \cdot \log p}{r \cdot \log \frac{1}{\alpha}} = \frac{\log p}{\log \frac{1}{\alpha}}$$

La dimensión, así construida, cuyo valor es el resultado del cociente representa el *tamaño* del fractal (depende de qué tan *grande* sea  $p$  y de qué tan *chico* sea  $\alpha$ ). Al valor de este cociente, que es invariante, lo vamos a designar como la dimensión de autosemejanza estricta ( $D_{AE}$ ) de la figura.

El valor de la reconstrucción recién realizada radica principalmente en dos aspectos. Por un lado, se cuenta con una forma de obtener un valor numérico para la dimensión de una figura fractal que tiene autosemejanza estricta, esto es, en términos de Hill et al. (2008), presenta calidad matemática, dado su potencial para permitir calcular, evitar errores, analizar los resultados, comparar, etc. Por otro lado, no utiliza el razonamiento basado en la GE de recurrir a ampliar la figura utilizando cierto factor de escala. En cambio, propone analizar la dimensión dentro de la propia construcción del fractal, notando cómo se generan las copias idénticas naturalmente, como parte del proceso de construcción. Es decir, si bien la expresión para la  $D_{AE}$  es el mismo cociente que ya presentamos para el cálculo de la  $D_A$ , es importante notar que los razonamientos que se utilizan en cada caso son radicalmente distintos. Así, el procedimiento que seguimos para abordar la  $D_A$  al aplicarla a una figura que no sea fractal (de la GE) y luego generalizar a las figuras fractales, seleccionamos un valor, entre infinitos valores posibles. Sin embargo, en nuestra reconstrucción, los factores de escala son específicos y propios de cada fractal. Por ejemplo, para la curva de Koch los factores de escala deben ser  $\frac{1}{3}$  (Peitgen et., al, 2004), con lo cual esta forma de abordar el concepto de dimensión hace referencia exclusiva a la figura fractal,

evitando a los alumnos una especie de *hibridización* entre ambas geometrías (GF y GE) allanando el camino a la comprensión de los elementos clave de la GF.

Por otro lado, también notamos que nuestra propuesta para reconstruir la noción de  $D_F$ , la  $D_{AE}$ , permitió hacer una interpretación geométrica y visual, ya que se vincula con la medida de qué tan *lleno* resulta ser un fractal, cuánto *llena* el plano una curva, y de cuán *rugosa* resulta ser una figura. Esto es debido a que, por un lado, esta característica es consecuencia de en cuántas partes se divida la figura obtenida en cada paso y, por otro, de qué tan grandes se mantengan los tamaños de cada una de esas partes.

### 3.2. La propuesta de actividades y su implementación: resultados preliminares

La reconstrucción matemática para la  $D_{AE}$  que presentamos en el apartado anterior fue propuesta a treinta y un profesores de Matemática en ejercicio en escuelas secundarias de Uruguay, que participaron voluntariamente como estudiantes en tres ediciones de un curso online titulado *Geometría Fractal: análisis didáctico de propuestas de enseñanza*. El objetivo general del curso fue contribuir en la formación continua de los profesores en ejercicio, y en especial en GF, ya que la mayoría de los participantes expresaron haber tenido poco o nulo contacto con la temática. El curso abarcó varias actividades, referidas a autosemejanza y a  $D_F$ , pero en este apartado solamente presentaremos algunos ejemplos que permiten obtener evidencia acerca de la percepción de la calidad matemática de la actividad sobre  $D_F$  contextualizada en un sitio web. Es decir, analizamos en qué medida los profesores aprovecharon el potencial de la reconstrucción propuesta, a la hora de resolverla.

La actividad tuvo la siguiente consigna:

*Le proponemos que recorra la página web “[InterActivate](http://www.shodor.org/interactivate/)” (<http://www.shodor.org/interactivate/activities/FractalDimensions/>), para familiarizarse con el contenido dedicado al concepto de Dimensión fractal. Para ello resulta útil ingresar en las distintas pestañas del sitio: “Aprendiz”, “Actividad”, “Ayuda”, “Instructor”.*

*Luego, en la pestaña Actividad, realice lo siguiente:*

- 1. Para cada fractal, complete los campos de texto con el factor de escala y el número de copias. Note que recién cuando los valores ingresados sean correctos, el sitio devolverá como resultado la dimensión de cada fractal.*
- 2. Elija un fractal de los que se muestran y justifique que tienen autosemejanza estricta con la definición brindada en las Notas del curso.*
- 3. Ordene la dimensión de todos los fractales presentados en la página, de menor a mayor, y a partir de esta ordenación, elabore una conclusión que relacione la dimensión fractal con “qué tanto llena el fractal”.*

Antes de explicitar la actividad, propusimos analizar con los profesores nuestra reconstrucción de la  $D_{AE}$ . En este trabajo presentamos la parte de la actividad referida a la  $D_F$ , que consiste en hacer uso de los dos parámetros característicos de la  $D_F$  (factor de escala y cantidad de copias), explorar distintos valores para cada uno, y luego relacionar estos valores con el valor resultante para la dimensión. Cada fractal del sitio tiene como figura semilla un segmento, y uno de ellos es la curva de Koch.

Adicionalmente, se busca, conectar con la idea intuitiva y matemáticamente informal de *llenado del espacio* (*filled in* en inglés), con el valor de la dimensión (cociente de logaritmos) calculado para cada fractal.

Al ordenar los fractales que presenta el sitio, en orden creciente de dimensión, permite comparar el valor de los cocientes calculados por el programa pudiendo conjeturar y visualizar su relación con la *rugosidad* de los fractales. En la Figura 7 se muestra el sitio web donde se enmarca la actividad.

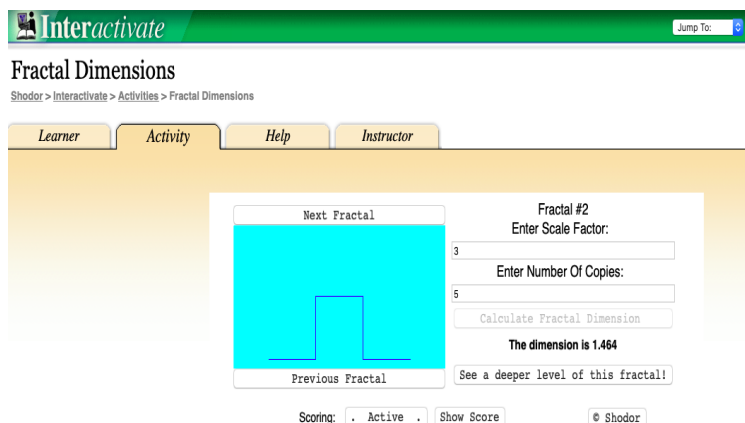


Figura 7. Portada del sitio web a donde se dirige la actividad propuesta. Fuente: <http://www.shodor.org/>

### 3.3 Algunos resultados de la implementación de la propuesta

Mostramos en este apartado un primer análisis de algunas producciones de los profesores que realizaron el curso, teniendo en cuenta que haremos referencia a la operatividad de la definición de  $D_{AE}$ . Esto significa que, en este análisis consideramos los cálculos, las observaciones y las justificaciones matemáticas que las resoluciones presentan, respecto a la calidad matemática de la  $D_{AE}$  y su conexión con la capacidad del fractal de *rellenar el espacio*.

Todos los participantes que realizaron el curso entregaron la actividad. Realizamos una primera clasificación de las respuestas según su grado de riqueza matemática desarrollada. Así, obtuvimos resoluciones donde solamente interactuaron con el sitio, ordenaron los fractales según su valor de dimensión, y concluyeron acerca del llenado a partir de esta ordenación, y de la representación visual que muestra el sitio. Por otro lado, se presentaron resoluciones más complejas que analizaron las variaciones en el numerador y denominador de los cocientes, y realizaron una justificación para concluir acerca de la relación entre dimensión y el *llenado* del espacio, que no es inductiva, como la anterior. Estas últimas resoluciones indican que los profesores lograron valorar la riqueza matemática de la situación planteada.

Como representante del primer tipo de resolución, mostramos las producciones presentadas en las Figuras 8 y 9. En el caso de la Figura 8, la ordenación numérica es acompañada con las imágenes correspondientes a la primera iteración de cada fractal del sitio, y, en el caso de la Figura 9, la ordenación numérica es acompañada con las imágenes correspondientes al resultado de la mayor iteración que muestra el sitio. En esta última, se puede apreciar que es mayor la rugosidad de la figura o el llenado del plano, cuanto mayor es el valor de la dimensión.



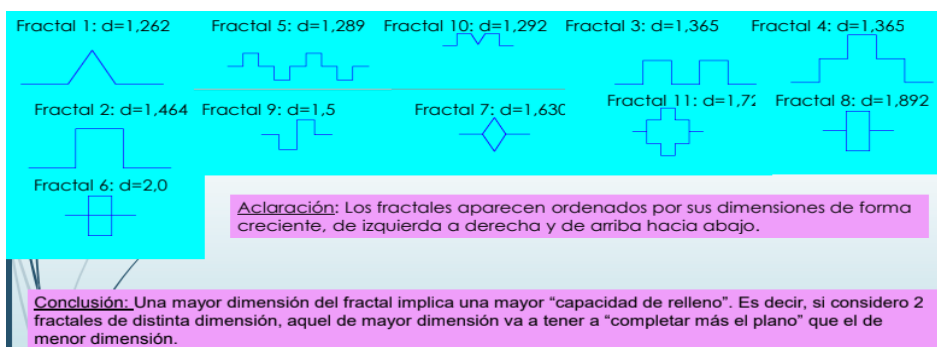


Figura 8. Ordenación y primera iteración de los fractales de la actividad. Fuente: producción de un docente participante del curso.

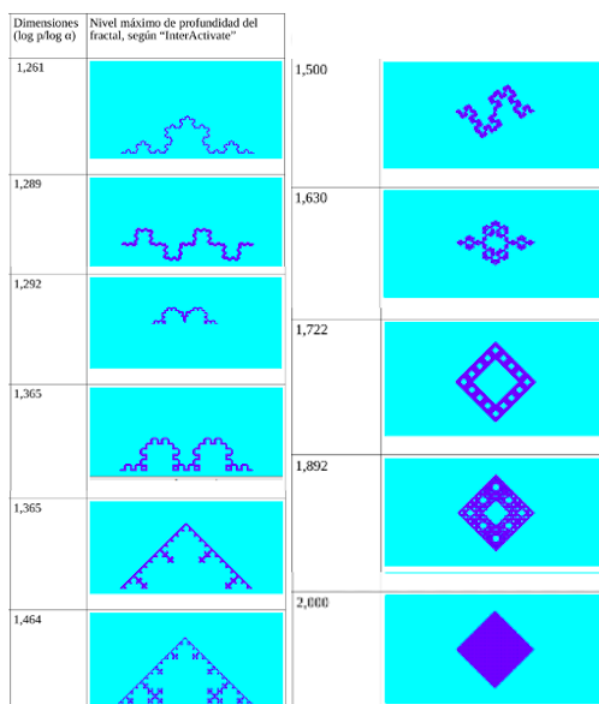


Figura 9. Ordenación y última iteración de los fractales de la actividad. Fuente: producción de un docente participante del curso.

Como representante del segundo tipo de resoluciones, en las producciones que presentamos en la Figura 10 se pueden apreciar observaciones matemáticas respecto al cociente calculado, cuando se comparan fractales que tienen el mismo factor de escala o la misma cantidad de subconjuntos de cada partición en cada iteración.

|  |   |           |                 |           |  |            |  |                       |  |           |                 |           |  |           |                 |            |  |           |                 |           |                 |
|--|---|-----------|-----------------|-----------|--|------------|--|-----------------------|--|-----------|-----------------|-----------|--|-----------|-----------------|------------|--|-----------|-----------------|-----------|-----------------|
| <p>Observando los resultados obtenidos:</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>• si comparamos fractales con <b>igual <math>\alpha</math></b>, es mas lleno el fractal que tenga mayor <math>p</math>, o sea mayor cantidad de subconjuntos en la partición. (segmentos)</li> <li>• Si comparamos fractales con <b>igual <math>p</math></b>, es más lleno el fractal que tenga menor <math>\alpha</math>, o sea el que tenga segmentos de mayor longitud.</li> </ul> | <table border="0"> <tr> <td>#Fractal1</td> <td>N° de copias: 4</td> </tr> <tr> <td>#Fractal5</td> <td></td> </tr> <tr> <td>#Fractal10</td> <td></td> </tr> <tr> <td>#Fractal3 y #Fractal4</td> <td></td> </tr> <tr> <td>#Fractal2</td> <td>N° de copias: 5</td> </tr> <tr> <td>#Fractal9</td> <td></td> </tr> <tr> <td>#Fractal7</td> <td>N° de copias: 6</td> </tr> <tr> <td>#Fractal11</td> <td></td> </tr> <tr> <td>#Fractal8</td> <td>N° de copias: 8</td> </tr> <tr> <td>#Fractal6</td> <td>N° de copias: 9</td> </tr> </table> <p>La dimensión fractal aparece como una medida de que tan lleno resulta ser un fractal. Es consecuencia de en cuántas partes se divide la figura obtenida en cada paso, y por otro, de qué tan grandes se mantengan los tamaños de cada una de esas partes.</p> <p>Observamos que de estos fractales de factor escala 3 (en <b>negrita</b>), están ordenados por número de copias de menor a mayor.</p> | #Fractal1 | N° de copias: 4 | #Fractal5 |  | #Fractal10 |  | #Fractal3 y #Fractal4 |  | #Fractal2 | N° de copias: 5 | #Fractal9 |  | #Fractal7 | N° de copias: 6 | #Fractal11 |  | #Fractal8 | N° de copias: 8 | #Fractal6 | N° de copias: 9 |
| #Fractal1  | N° de copias: 4   |           |                 |           |  |            |  |                       |  |           |                 |           |  |           |                 |            |  |           |                 |           |                 |
| #Fractal5  |   |           |                 |           |  |            |  |                       |  |           |                 |           |  |           |                 |            |  |           |                 |           |                 |
| #Fractal10   |   |           |                 |           |  |            |  |                       |  |           |                 |           |  |           |                 |            |  |           |                 |           |                 |
| #Fractal3 y #Fractal4  |   |           |                 |           |  |            |  |                       |  |           |                 |           |  |           |                 |            |  |           |                 |           |                 |
| #Fractal2  | N° de copias: 5   |           |                 |           |  |            |  |                       |  |           |                 |           |  |           |                 |            |  |           |                 |           |                 |
| #Fractal9  |   |           |                 |           |  |            |  |                       |  |           |                 |           |  |           |                 |            |  |           |                 |           |                 |
| #Fractal7  | N° de copias: 6   |           |                 |           |  |            |  |                       |  |           |                 |           |  |           |                 |            |  |           |                 |           |                 |
| #Fractal11   |   |           |                 |           |  |            |  |                       |  |           |                 |           |  |           |                 |            |  |           |                 |           |                 |
| #Fractal8  | N° de copias: 8   |           |                 |           |  |            |  |                       |  |           |                 |           |  |           |                 |            |  |           |                 |           |                 |
| #Fractal6  | N° de copias: 9   |           |                 |           |  |            |  |                       |  |           |                 |           |  |           |                 |            |  |           |                 |           |                 |

Figura 10. Observaciones matemáticas respecto al cociente que permite hallar la dimensión de los fractales. Fuente: producción de dos participantes del curso.

En el caso de la producción de la derecha, el estudiante identificó todos los fractales con factor de escala 3, observando que el número de copias aumenta, al igual que la dimensión. Este estudio se ve reflejado también en la producción de la izquierda al indicar que, de los fractales con igual factor de escala, los fractales que más llenan son los que tienen mayor cantidad de subconjuntos en la partición. En este caso se aprovechó la riqueza matemática potencial de la propuesta.

Como se puede notar, nuestra propuesta para reconstruir la noción de  $D_{AE}$ , permite realizar una interpretación geométrica de esta idea de la  $D_F$ . Dado que se define como un cociente, es susceptible de analizar el numerador, el denominador y la relación entre ambos. Es decir, el *tamaño* de la  $D_F$  depende de qué tan *grande* sea  $p$  (el número por el que se multiplica la cantidad de subconjuntos de la partición correspondiente a un cierto paso para obtener el número de subconjuntos de la partición correspondiente al siguiente) y de qué tan *pequeño* sea  $\alpha$  (factor de semejanza que relaciona a cada subconjunto de la partición correspondiente a un paso con los de la partición correspondiente al paso siguiente).

#### 4. Reflexiones finales

Este trabajo es parte de un proyecto de investigación más amplio cuyo propósito es estudiar los procesos de enseñanza y aprendizaje de los elementos clave de la GF en la escuela secundaria. La GF es un campo de conocimientos relativamente reciente (gestado hace alrededor de 50 años) que, además, ha generado muchas controversias dentro de la Matemática misma, hasta tal punto que actualmente no hay pleno acuerdo acerca de lo que se considera un fractal, o de qué operaciones matemáticas se pueden realizar para analizar su autosemejanza o calcular su dimensión. Aun así, ya está presente en los diseños curriculares de varios países, lo cual justifica la necesidad de un análisis didáctico que se ocupe de cómo enseñar sus aspectos fundamentales desde un punto de vista matemático, sin caer en un breve recorrido que solo haga alusión a los aspectos visuales y llamativos de los fractales.

En particular, consideramos necesario analizar la forma de enseñar las dos características que definen a los fractales, que son la autosemejanza y la dimensión. Para la autosemejanza, en trabajos previos, delineamos una propuesta de enseñanza, aplicable a aquellos fractales que se generan a partir de algún tipo de iteración. Basándonos en esa propuesta para la autosemejanza, en este trabajo nos ocupamos del concepto de dimensión, como primera aproximación didáctica, aceptando que las ideas y conceptos tratadas aquí constituyen un comienzo, ya que un siguiente paso del trabajo didáctico se basa en la construcción de una secuencia de actividades para que los profesores de Matemática puedan desarrollar el tema con sus estudiantes.

Así, aquí presentamos y analizamos algunas de las distintas interpretaciones que encontramos, para el concepto de dimensión, que fueron surgiendo en distintos contextos históricos y matemáticos. Algunas de ellas resultan intuitivas y parecen estar acordes con el sentido común, pero carecen de sentido en la GF, como la  $D_E$ . Por otro lado, reconocemos que otras definiciones y tratamientos matemáticos, cuyo abordaje implica que los estudiantes hayan trabajado con conceptos e ideas como lo son las relativas a la topología, no están usualmente disponibles en los estudiantes de este nivel educativo, como por ejemplo la  $D_H$ .

Ante este panorama, decidimos reconstruir un concepto que permita calcular, analizar, representar e interpretar matemáticamente con los alumnos, el concepto de  $D_F$ . Esto lo hicimos a partir de las nociones de escala y de partes idénticas, dos características esenciales de los fractales que presentan autosemejanza estricta. Denominamos a esta reconstrucción, dimensión fractal de autosemejanza estricta ( $D_{AE}$ ) y si bien resulta aplicable sólo a aquellas figuras fractales que tienen este tipo de autosemejanza, consideramos que el tratamiento escolar de estos fractales con este encare presenta una riqueza matemática que puede ser útil en la enseñanza. Un primer acercamiento a un conjunto de profesores de Matemática, nos dio indicios de ello, ya que obtuvimos respuesta a las actividades con buenos desarrollos matemáticos. Un estudio posterior, donde los profesores ya dispongan de la secuencia de enseñanza que estamos elaborando a partir de la propuesta presentada en este trabajo, y la desarrollen en sus clases de Matemática, nos aportará más conocimiento acerca del desarrollo de esta propuesta. En este sentido, se dirigen nuestras próximas investigaciones.

## 5. Referencias bibliográficas

- Aramburú, F. (2021). Dimensiones no enteras y curvas con áreas. *Laberintos & Infinitos*, 54, <http://laberintos.itam.mx/dimensiones-no-enteras-y-curvas-con-area/>
- Artigue, M.V., Fanaro, M.A., Lacues, E. (2021). Estado del arte sobre la enseñanza y el aprendizaje de la Geometría Fractal en la escuela secundaria. *Pensamiento Matemático*, 11 (2), 75-92.
- Binimelis, M. (2012). *Una nueva manera de ver el mundo. La Geometría Fractal*. RBA editores, España, Navarra.
- Castiblanco Hernández, S.E. y Montana Páez, S.Y. (2018) *Geometría y dimensión: representación y caracterización de objetos 2d, 3d y 4d*. Tesis de Licenciatura. Departamento de Matemáticas de la Universidad Pedagógica Nacional como requisito para optar por el título de Licenciado en Matemáticas. <http://repository.pedagogica.edu.co/bitstream/handle/20.500.12209/11153/TE-22698.pdf?sequence=1&isAllowed=y>
- Castro, A. (2018). *Medida, dimensión y fractales*. Trabajo fin de grado en Matemática. La Laguna.
- Dummit, E. (2015). *Dynamics, Chaos and Fractals (Part 4): Fractals, Course Notes*. <https://web.northeastern.edu/dummit/handouts.html>
- Edgar, G. (2008). *Measure, topology, and fractal geometry*. Springer, second edition. USA.
- Falconer, K. (2003). *Fractal Geometry. Mathematical Foundations and Applications*. Wiley, Segunda Edición, UK.
- Font, V., Adán, M. y Ferreres, S. (2015). Valoración de la idoneidad de las Matemáticas enseñadas En P. Scott & A. Ruíz (Eds.). *Educación Matemática en las Américas: 2015*. Volumen 2: Formación Inicial para Secundaria (pp. 338-345). República Dominicana: Comité Interamericano de Educación Matemática
- Garbin, S., y Mireles, M. (2009). Un estudio sobre la noción de dimensión en la enseñanza-aprendizaje de las matemáticas. *Enseñanza de las ciencias*, 27 (2), 223-240.
- García, E. (2018). *Teoría de la dimensión topológica*. Trabajo de fin de grado. Universidad de Cantabria.

<https://repositorio.unican.es/xmlui/bitstream/handle/10902/15262/Garcia%20Fernandez%20Esther.pdf?sequence=1&isAllowed=y>

- Hill, H., Blunk, M., Charalambos, C., Lewis, J., Phelps, G., Sleep, L., y Ball, D. (2008). Mathematical Knowledge for teaching and the Mathematical Quality of Instruction: An Exploratory Study. *Cognition and Instruction*, 24, 430-511.
- Kohavi, Y., y Davdovich, H. (2006). Topological dimensions, Hausdorff dimension & fractals.
- Mandelbrot, B. (1975). *La naturaleza fractal de la naturaleza*. Tusquets Editores. España. Primera edición.
- Panizza, M. (2015). Las transformaciones semióticas en los procesos de definición de objetos matemáticos. Tesis de doctorado. Universidad Nacional de Córdoba.
- Pascual, F. (1991). El modelo matemático del espacio-tiempo. *Contextos*, 9(17), 231-255.
- Peitgen, H., Jürgens, H. y Saupe, D. (2004). *Chaos and Fractals. New Frontiers or Science*. Second Edition. Springer, New York, EEUU.
- Redondo, A y Haro, M. (2004). Actividades de geometría fractal en el aula I. *Suma*. (47), 19-28.
- Rubiano, G. (2009). *Iteración y fractales (con Mathematica)*. Vicerrectoría Académica, Colombia, primera edición.
- Spinadel, V. (2002). Geometría Fractal y Geometría Euclideana. *Educación y Pedagogía*, 15 (35), 85-91.

**Artigue, Victoria:** Magister en Educación por Universidad ORT (Uruguay), Profesora de Matemática por Universidad de Montevideo. Profesora de alta dedicación en la Universidad Católica del Uruguay, Profesora Articuladora Departamental por Inspección de Matemática de la Dirección General de Educación Secundaria. e-mail: [victoria.artigue@gmail.com](mailto:victoria.artigue@gmail.com).  
ORCID: <https://orcid.org/my-orcid?orcid=0000-0001-6753-0952>

**Fanaro, María de los Ángeles:** Doctora en Enseñanza de las Ciencias, por la Universidad de Burgos (España) Investigador Independiente del CONICET con lugar de trabajo en el Núcleo de Estudios Sociales y Educativos (NEES) de la Facultad de Ciencias Humanas de la UNICEN. -Profesor Adjunto, Área Didáctica de Matemática, Facultad de Ciencias Exactas, UNICEN. e-mail: [mariangelesfanaro@gmail.com](mailto:mariangelesfanaro@gmail.com)  
ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-9290-5450>

**Lacués, Eduardo:** Doctor en Psicología por la Universidad Autónoma de Madrid. Profesor de Matemática en la Universidad Católica del Uruguay desde 1987 a 2020. e-mail: [elacues@gmail.com](mailto:elacues@gmail.com)  
ORCID: <https://orcid.org/0000-0001-7449-999X>