

<http://www.fisem.org/www/index.php>
<https://union.fespm.es/index.php/UNION>

Confusión entre definiciones y propiedades de conceptos matemáticos en la universidad. Un acercamiento a la problemática a través de un análisis interdisciplinario

Fabiana Montenegro, Mario Garelik, Estela Mattioli

Fecha de recepción: 16/08/2018
Fecha de aceptación: 20/01/2020

Resumen	<p>El presente trabajo expone el análisis de las dificultades que muestran los estudiantes universitarios cuando aprenden definiciones y propiedades en las asignaturas de primer año en carreras de ingeniería. Nuestras conjeturas plantean que la confusión sobre el tema en el esquema mental del alumno se debe, en parte, al modo en que se organiza el discurso para presentar estos distintos niveles de conceptualización a través del lenguaje natural. Atender a estas cuestiones de naturaleza lingüística en la clase de matemática permitiría subsanar en parte estas dificultades de comprensión.</p> <p>Palabras clave: definición, propiedades, rasgos esenciales, relaciones causales</p>
Abstract	<p>The present work exposes the analysis of the difficulties that university students show when they learn definitions and properties in the first year subjects in engineering careers. Our conjectures suggest that the confusion on the subject in student's mental scheme is due, in part, to the way in which the discourse to present these different levels of conceptualization through natural language is organized. Addressing these questions of a linguistic nature in mathematics class would partially correct these comprehension difficulties.</p> <p>Keywords: definition, properties, essential features, causal connections</p>
Resumo	<p>O presente trabalho expõe o primeiro avanço de uma análise das dificuldades que mostram os estudantes universitários quando aprendem definições e propriedades de alguns conceitos matemáticos, nas disciplinas de primeiro ano de cursos de engenharia. Nossas conjeturas sugerem que a confusão sobre o tema no esquema mental do aluno se deve, em parte, ao modo em que o discurso é organizado para apresentar esses distintos níveis de conceituação através da linguagem natural. Atender a essas questões de natureza lingüística na aula de matemática permitiria corrigir em parte essas dificuldades de compreensão.</p> <p>Palavras chave: definição, propriedades, características essenciais, relações causais</p>

1. Introducción

La problemática de la lectocomprensión en la Universidad es reconocida de manera indiscutible por toda la comunidad académica como una realidad evidente y preocupante que afecta de manera determinante la apropiación de todos los contenidos impartidos a lo largo de las carreras, pero que cobra mayor dimensión entre los estudiantes de los primeros años, los cuales ingresan masivamente (Ezcurra, 2011) e inmediatamente presentan altos grados de deserción y desgranamiento.

La formación en el nivel superior supone una experiencia compleja que implica la adquisición de contenidos, pero principalmente el ingreso a una nueva cultura de prácticas académicas que configuran las esferas disciplinares. En esta etapa, los estudiantes deberán apropiarse de las formas socialmente consensuadas de construir, negociar y comunicar el conocimiento en la universidad (Hyland, 2007, pp. 148-164)

En los últimos años se ha logrado un fuerte consenso sobre la necesidad de que la misma universidad se haga cargo de la enseñanza de estas prácticas, si bien existe una importante discusión acerca de cómo realizarla (Carlino, 2013, pp. 355-381), es decir, si la tarea debe ser desarrollada por los docentes de Lengua en sus materias específicas, si la incorporan los docentes expertos de cada campo disciplinar dentro de sus clases habituales o se constituye en una acción integrada en la que cada profesor incluya dentro del desarrollo específico de los contenidos del área, el trabajo y la reflexión sobre el uso del lenguaje a través del cual es posible aprender ciencia, opción en la que inscribimos nuestra propuesta.

En este artículo describimos una experiencia de investigación-acción que desarrollamos en la Facultad de Ingeniería y Ciencias Hídricas (FICH) de la Universidad Nacional del Litoral (UNL), en el marco del Proyecto titulado “La comunicación del conocimiento científico en los primeros años de ingeniería. El desarrollo informativo de los textos de Matemática y Química, y las estrategias que favorecen su comprensión.” El equipo de trabajo está conformado por los profesores de las asignaturas de Matemática y de Comunicación Oral y Escrita (COE) que se dictan en primero y segundo año de las cuatro carreras de ingeniería de FICH. Uno de los trayectos incluidos en este proyecto centra su atención en las dificultades que presentan los estudiantes de primer año para distinguir entre la definición y las propiedades (o teorema) sobre determinado concepto matemático. Si bien partimos del presupuesto que son varios los factores determinantes de esta situación, la experiencia llevada a cabo nos ha permitido otorgarle una valoración importante al modo en que se presentan estas conceptualizaciones en el lenguaje natural.

Este trabajo expone las primeras etapas de este trayecto interdisciplinario, describiendo primeramente la indagación preliminar llevada a cabo como experiencia de aula que nos ha permitido focalizar la atención en las cuestiones mencionadas. Luego presentamos el marco teórico y los antecedentes relativamente incipientes que guían nuestro trabajo, recuperando planteos tanto de la didáctica general como de la matemática y la lingüística. Seguidamente se exponen los aspectos metodológicos y las distintas fases contempladas para el trabajo. Luego se describe la experiencia de

investigación propiamente dicha llevada a cabo con los estudiantes y finalmente los primeros resultados obtenidos seguidos de las conclusiones.

Estos resultados provisorios nos permiten sugerir que una reorganización del discurso para la presentación de las definiciones facilitaría la identificación por parte de los alumnos de la intención comunicativa que éstas presentan y las diferenciaría de los fragmentos textuales que desarrollan propiedades o criterios para hallar determinado objeto matemático.

2. Planteo del problema. Indagación preliminar

Tanto durante el desarrollo cotidiano de la experiencia áulica como en el análisis de producciones escritas de los estudiantes en las distintas instancias de evaluación en las distintas asignaturas de Matemática del primer año, se presentan frecuentemente falencias relacionadas con la confusión entre un determinado concepto matemático y una propiedad, criterio o teorema que brindan una manera de obtenerlo. La observación minuciosa de las mismas nos ha permitido apreciar diversas aristas que presenta la conflictiva relación *concepto – propiedad* subyacente en los alumnos en distintos temas de la disciplina.

A manera de ejemplo, se proponen algunas imágenes que ilustran la situación. Ante la consigna Definir punto de inflexión, fue común encontrarse con respuestas como la siguiente:

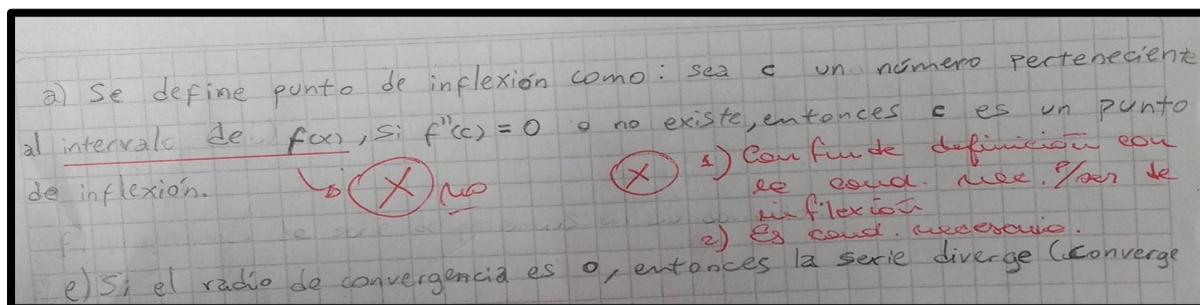


Figura 1. Examen Diciembre 2017

Fuente: Elaboración propia

Se puede apreciar cómo el alumno pretende sustituir la definición solicitada en la consigna con una condición necesaria, presente en un criterio para la determinación de la presencia o no del objeto en estudio (punto de inflexión de una función).

Otro caso lo exhibe la siguiente imagen:

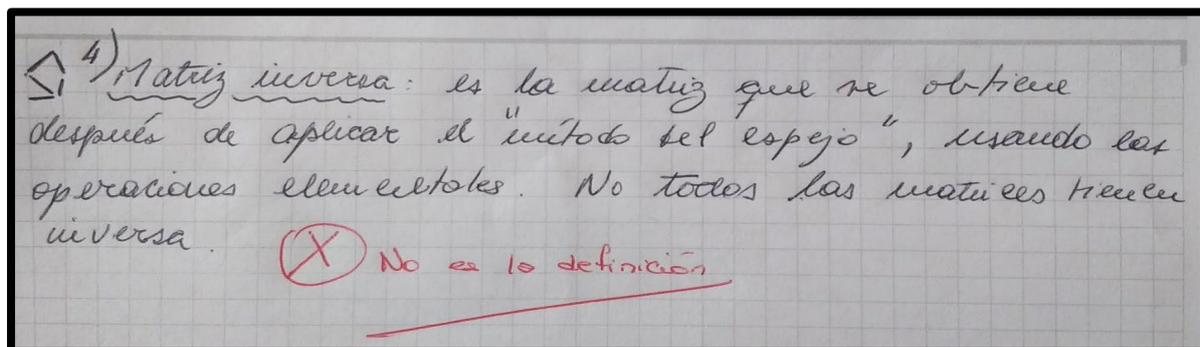


Figura 2. Examen Julio 2018

Fuente: Elaboración propia

El estudiante, ante la consigna Defina matriz inversa, responde proponiendo como definición uno de los algoritmos de cálculo, el método del espejo, con el que se obtiene, en los casos en que es posible, la matriz inversa.

En la próxima imagen, se exhibe la respuesta de un alumno ante la consigna Defina ceros de una función real de variable real:

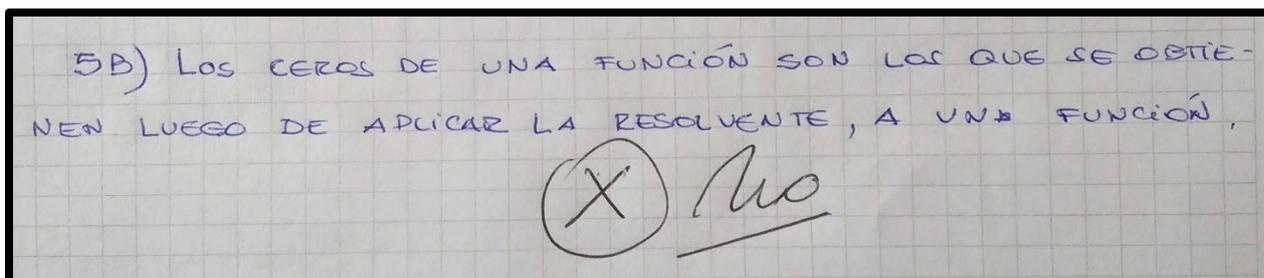


Figura 3. Examen Agosto 2017

Fuente: Elaboración propia

Claramente, al margen de los errores estrictamente matemáticos, puede notarse cómo se recurre a una herramienta que permite el cálculo del concepto en cuestión como sustituta de la definición solicitada.

La siguiente es la respuesta a la premisa Defina sucesión convergente:

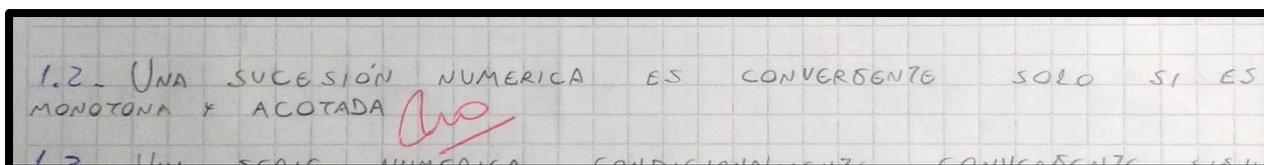


Figura 4. Examen Marzo 2017

Fuente: Elaboración propia

Aquí se aprecia cómo se propone a una condición suficiente (que la sucesión sea monótona y acotada) en reemplazo de la definición formal.

A partir de los problemas detectados, se generó nuestro interés por profundizar en el tema, buscando indagar los posibles orígenes de los mismos. Así, se recolectaron evaluaciones escritas de los estudiantes, correspondientes a las asignaturas iniciales de las carreras: Álgebra Lineal y Cálculo I, y se identificaron los errores relacionados con la temática. Esta documentación constituyó la base para llevar adelante la experiencia investigativa que presentamos.

3. Estado del arte y marco teórico

La formación matemática en la universidad, principalmente en carreras como las de ingeniería, es considerada como perteneciente a una “etapa avanzada” en relación con espacios de formación previos. Mayormente, los conceptos trabajados en esta instancia son producto de la evolución de otros más elementales desarrollados en la etapa anterior de escolaridad secundaria. Uno de los rasgos más notables que se aprecia en el paso de la matemática elemental a la avanzada radica en el cambio en la adjudicación de importancia y en la frecuencia de aparición de ciertos

comportamientos matemáticos, fundamentalmente la definición y la demostración (Calvo Pesce, 2001).

El movimiento desde el pensamiento matemático elemental al avanzado involucra una significativa transición: aquella que va de descubrir a definir, de convencer a probar en una manera lógica basada en esas definiciones... Es la transición desde la coherencia de la matemática elemental a la consecuencia de la matemática avanzada, basada en entidades abstractas que el individuo debe construir a través de deducciones a partir de definiciones formales. (Tall, 1991, p.20)

En relación con los medios a través de los cuales se construyen esos conceptos en ambas etapas, los alumnos deben apropiarse del conocimiento y, simultáneamente, de las «maneras de decir» propias del discurso científico y de las formas de representar y comunicar a través de los diversos recursos semióticos prototípicos de dicha comunidad. En este sentido, se consideran tres aspectos: los rasgos del discurso científico (elementos característicos como vocabulario técnico, conectores lógicos y nominalizaciones), la especialización de los recursos semióticos (distintos modos de proporcionar información a través de palabras, gráficos, fórmulas) y los patrones de significado como configuraciones de estas formas de decir (prácticas sociales específicas y complejas que se implementan para cumplir con determinado objetivo, como puede ser la secuencia de actividades en una clase para enseñar un determinado concepto) (Manghi y Córdova, 2011, pp. 17- 39).

Considerando a la Matemática como una manifestación semiótica, sus elementos generan significados sintácticos y semánticos en un lenguaje simbólico, el cual podría considerarse equivalente al lenguaje natural de un individuo (Radford, 1997, pp. 26-33). Sin embargo los estudiantes no transponen automáticamente el lenguaje natural que utilizan habitualmente al sistema de escritura matemática. Por lo general no dimensionan la importancia que tiene una adecuada utilización del lenguaje, que es equiparable a la acción de pensar (Mariscal Antezana, 2003).

La realidad es que este proceso de creación de significados en el aula rara vez es explicitado por los docentes, más bien se plantea como una práctica convencional del experto para generar el aprendizaje en la interacción áulica, como un tipo de conocimiento tácito que debe ser apropiado por los aprendices de modo casi automático, sin considerar que la verdadera comprensión se da cuando los alumnos pueden familiarizarse con este discurso y acceder a él. Conocimiento y discurso científico multimodal constituyen un mismo aprendizaje semiótico que necesariamente debe estar atravesado por una instancia reflexiva y consciente de ambos componentes.

Respecto de esta apropiación consciente, y con el propósito de describir la naturaleza del conocimiento de los estudiantes y los procesos de construcción del mismo, Tall y Vinner (1981) proponen una distinción entre los conceptos matemáticos definidos formalmente y los procesos cognitivos que sirven para concebirlos. La definición consiste en una secuencia de palabras o una expresión verbal del concepto, fruto de su evolución histórica. Al mismo tiempo se pueden diferenciar las definiciones formales, convenidas y aceptadas por la comunidad científica que aparecen en los

libros, y las definiciones personales que utilizan los aprendices o expertos como interpretación o reelaboración de una definición formal.

En relación con la función que cumplen las definiciones para la consistencia de los esquemas conceptuales, hay que señalar que el modo en que se presenta habitualmente la información en los textos avanzados y en las publicaciones científicas no refleja el proceso de su creación y eso induce a muchos profesores a plantear sus clases mediante secuencias definición-teorema-aplicación que no tienen en cuenta los procesos involucrados en la actividad matemática y en su aprendizaje. Esta organización presupone que los conceptos se adquieren a partir de sus definiciones y que los estudiantes recurrirán a éstas cuando demuestren teoremas y resuelvan problemas (Azcárate, 2001. pp. 159-170).

Para Vinner (1991), este supuesto no es tal, ya que cuando se percibe el nombre de un concepto matemático, lo que suele ser evocado no es la definición del concepto sino el «esquema conceptual» (Tall y Vinner, 1981, pp- 151-169) y que estos autores definieron como toda la estructura cognitiva del sujeto asociada a un concepto. El esquema conceptual está formado por representaciones visuales, procedimientos, ejemplos, no-ejemplos y sensaciones vinculados al concepto, por recuerdos de experiencias con el concepto, por enunciados de algunas de sus propiedades, etc. La estructura cognitiva así conformada no es estática sino que evoluciona con el tiempo, como consecuencia de las experiencias que va teniendo el individuo con el concepto.

Esto significa que para el estudiante no es nada sencillo identificar y activar la definición, distinguiéndola de todos los otros componentes involucrados en su esquema conceptual. En ese sentido, es fundamental que el profesor sea consciente de las dificultades cognitivas que involucra la definición de conceptos matemáticos para sus alumnos y resulta relevante analizar la adecuación de las imágenes, propiedades y procesos que integran el esquema conceptual asociado a un concepto, respecto a su definición. Raramente un individuo sostiene proposiciones contradictorias simultáneamente; las situaciones que reflejan lo inadecuado de un esquema conceptual son debidas, mayoritariamente, a la compartimentación de los conocimientos matemáticos o a la presencia de inconsistencias (Azcárate, 2001, pp. 159-170).

Tall (1995) señala la existencia de dos secuencias de desarrollo, distintas y simultáneas, que empiezan una por la percepción de objetos y la otra con la acción sobre ellos. Por un lado se produce la percepción de objetos en forma visual-espacial, seguida de su descripción verbal, su clasificación y el inicio de deducciones verbales. Por otro, la acción sobre objetos matemáticos implica un tipo de desarrollo cognitivo distinto, relacionado con el problema de la dualidad proceso-objeto y la noción de lo que llama «procepto»: un objeto mental combinado que consiste en un proceso, un concepto producido por dicho proceso, y un símbolo que se puede usar para significar cualquiera de los dos o los dos.

En este procesamiento de la información, Radatz (1980) señala que habitualmente se presentan errores, entre los cuales se destacan aquellos debidos a asociaciones incorrectas o a rigidez del pensamiento y los producidos por la aplicación de reglas o estrategias irrelevantes.

Por otro lado, Movshovitz-Hadar, Zaslavsky e Inbar (1987) identifican errores producidos por la interpretación incorrecta del lenguaje. Se incluyen en este caso los generados por una traducción inexacta de hechos matemáticos descritos en un lenguaje simbólico a otro lenguaje simbólico distinto. Esto ocurre al poner un problema en ecuaciones expresando una relación diferente de la enunciada; también cuando se designa un concepto matemático mediante un símbolo distinto del usual y operando con él según las reglas usuales; a veces se produce también una interpretación incorrecta de símbolos gráficos como términos matemáticos y viceversa.

Por su parte, Socas (1997) distingue cuatro elementos básicos como productores de dificultades en el currículo de matemáticas: las habilidades necesarias para desarrollar capacidades matemáticas que definen la competencia de un alumno en matemáticas, la necesidad de contenidos anteriores, el nivel de abstracción requerido y la naturaleza lógica de las matemáticas escolares.

Para Duval (1993), frecuentemente los errores se manifiestan durante la manipulación de una representación dentro de un mismo sistema semiótico, que generalmente es el algebraico. Otro tipo de error se puede presentar cuando hay una elección inadecuada de un sistema semiótico al resolver un problema matemático. También, muchas de las dificultades encontradas por los estudiantes en diferentes niveles del currículo pueden ser descritas y explicadas como una falta de coordinación de registros de representación. Además, la construcción inadecuada de un concepto se puede deber a una carencia de articulación entre diferentes registros semióticos de representación.

3.1. Las definiciones. Características y condiciones

En general, definir es el proceso por el cual se establece de modo conciso el preciso significado o acepción de un concepto. Es el establecimiento de las propiedades esenciales (la intención) que caracterizan a todos y solamente a los elementos de la extensión del concepto. Pero

Definir es un acto matemático y lógico, demasiado esencial para ser confundido con simplemente designar[...] Algunas veces la palabra a ser definida es una etiqueta atribuida a un objeto construido dentro de una teoría matemática y suficientemente importante para que distintas caracterizaciones hayan sido consideradas para él; la designación aparece cuando el objeto es bien distinguido de los otros objetos de la teoría. O, y esto es más serio, uno crea una nueva noción, lo que lleva una extensión de la teoría". (Felix, 1960, p. 148 y 149)

Se considera que las definiciones, junto con los axiomas y los teoremas son el sustento de todas las teorías matemáticas. El enunciado verbal utilizado para definir un concepto lo predetermina de una manera no circular (sus elementos deben ser nociones primitivas de la teoría o nociones definidas previa e independientemente) y consistente (no puede involucrar contradicciones lógicas que derivarían en que ningún objeto verifique sus condiciones) (Winicki-Landman, 2006, pp. 528-537).

En el proceso de definir influyen distintos criterios, como los lógicos y estéticos. Desde el punto de vista lógico, la definición debe respetar ciertas condiciones: a) ser precisa, b) basarse solamente en otros conceptos previamente definidos o en conceptos primitivos, c) ser consistente con definiciones anteriores en la que ella se apoya, d) ser arbitraria y e) establecer condiciones necesarias y suficientes. Desde el punto de vista estético, la definición debe: a) ser minimalista, no debe contener partes que pueden deducirse lógicamente de otras partes de la definición, b) ser sencilla en el uso de simbolismo y simple en su presentación (Winicki-Landman y Leikin, 2000, pp. 17-21).

En cuanto a las características que presentan las definiciones, Calvo Pesce (2001) sostiene que desde el punto de vista de la lógica formal, una definición representa la cesión de un nombre a un objeto caracterizado por ciertas propiedades, una mera abreviatura, sin que esto altere el alcance teórico de la disciplina. En el marco de la actividad matemática y de su aprendizaje, la definición introduce una noción que no existía antes, que puede abrir problemas nuevos, brindar nuevas perspectivas para pensar en problemas viejos o colaborar en la organización del sistema teórico en que se inserta. El establecimiento de una definición matemática, por tanto, no es un fin en sí mismo sino que responde a ciertas necesidades de organización y crecimiento del conocimiento; es en este contexto que adquiere relevancia la elección de la definición concreta que se presentará en la clase, puesto que las definiciones no están predeterminadas sino que son convencionales.

A manera de síntesis, Azcárate Giménez y Camacho Machín (2003) señalan que la diferencia más notable entre las matemáticas elementales y las avanzadas es que, en las primeras, los objetos se describen, mientras en las segundas, se definen. Respecto del lenguaje, en ambos casos se utiliza el natural para relacionar las actividades matemáticas con el contexto, así como para describir o enunciar las propiedades de los objetos. Sin embargo, en las matemáticas elementales las descripciones se construyen sobre la experiencia (percepción visuo-espacial, interacción con proceptos operacionales), mientras que en el nivel de las matemáticas avanzadas (conocimiento formal), las propiedades de los objetos se construyen a partir de definiciones.

Estos autores sostienen que memorizar la definición de un concepto no garantiza en absoluto comprender su significado; comprender implica construir un esquema conceptual a partir de la asociación de varios significados con la palabra que designa el concepto: imágenes mentales, propiedades, procedimientos, experiencias, sensaciones. Sin embargo, la presentación y la organización de la mayoría de los libros de texto y de buena parte de las clases de matemáticas parecen basarse en la presunción de que los conceptos se adquieren mediante su definición y de que los estudiantes utilizarán las definiciones en la realización de tareas o la resolución de problemas.

Desde la perspectiva lingüística, la definición puede ser reconocida como un tipo de género, entendido como un proceso social que se estructura en fases y etapas, y está orientado hacia un fin (Martin, 2000). Específicamente, la definición permite adjudicar atributos a un tema/objeto en términos de la pertenencia a una clase y de la especificación de sus rasgos característicos. Desde el punto de vista de su estructura, presenta los siguientes componentes: nombre del término, verbo *ser* (para expresar

procesos relacionales) en tiempo presente, categorización (lo que lo ubica en una clase y lo diferencia de otra cosa; su esencia) y especificación (para indicar la/s característica/s básica/s que presenta). Cuando se seleccionan verbos de denominación diferentes al verbo *ser* (como *denominar*, *llamar*, etc.), éstos se colocan al inicio del texto, luego se introduce el nombre del término, la categorización y la especificación.

4. Metodología

4.1 Características generales

El presente estudio propone una metodología esencialmente cualitativa, en un marco de indagación y exploración, que procura dar cuenta tanto de las concepciones como de los aspectos procedimentales de los estudiantes respecto de un tema importante en matemática: el concepto y la propiedad.

La decisión se enmarca, dentro de lo que sostiene Mella, en el sentido que el investigador debe procurar el entendimiento en profundidad en vez de la exactitud por parte del entrevistado, procurar la comprensión más profunda posible (Mella, 2003).

En la misma línea, Taylor y Bogdan (1986), como se citó en Pérez (1994), señalan que “[...] para el investigador cualitativo, todas las perspectivas son valiosas: busca una comprensión detallada de las perspectivas de otras personas” (Pérez 1994, p. 47)

Por su parte, Quecedo y Castaño resaltan que el estudio cualitativo

“facilita una recogida de datos empíricos que ofrecen descripciones complejas de acontecimientos, interacciones, comportamientos, pensamientos que conducen al desarrollo o aplicaciones de categorías y relaciones que permiten la interpretación de los datos” y establecen el contrapunto que se da en el hecho de que mientras “el diseño cualitativo está unido a la teoría, en cuanto a que se hace necesario una teoría que explique, que informe e integre los datos para su interpretación (...), los estudios cuantitativos buscan la verificación o comprobación deductiva de proposiciones causales elaboradas fuera del lugar en el que se realiza la investigación” (Quecedo y Castaño, 2003, p. 12).

La investigación se contextualiza desde dos planos: por una parte, en lo espacio-temporal, en tanto trata con alumnos que cursan las asignaturas iniciales de las distintas carreras de ingeniería de la FICH-UNL, en su gran mayoría en la franja etaria de entre 18 y 19 años y, por otra, abordando la temática específica de la distinción entre la definición y una herramienta de cálculo de un determinado objeto matemático.

4.2 Diseño y desarrollo

A partir de la indagación preliminar que se constituye en el planteo del problema, las etapas del presente diseño metodológico fueron: formulación de líneas de acción, elaboración de un instrumento de recolección de información y fase de desarrollo.

Los errores detectados en la revisión de las producciones de los estudiantes guiaron este trabajo a indagar sobre el origen de las falencias. Para tal fin, se

consideró pertinente la elaboración de una actividad a proponer a los alumnos que, apoyada en el registro de sus percepciones (conocimientos previos) acerca de qué significa una definición, una propiedad y de qué manera les resulta posible distinguirlas, orientara de manera más específica acerca de, por un lado, cómo se gesta la confusión sobre el tema en el esquema mental del alumno y, por otro, trazado de líneas directrices inherentes al proceso de enseñanza que actúen en favor de una posible solución del problema.

La fase experimental estuvo dirigida por una conjetura: “[...] inferencia basada en pruebas incompletas o no concluyentes, la cual es revisada o elaborada a lo largo del proceso de investigación” (Molina González, 2006, p. 285).

La elección de esta modalidad se fundamenta en el carácter flexible de la misma, en tanto si bien no existen inicialmente hipótesis a ser probadas, sí objetivos y preguntas de investigación a las que se pretende dar respuesta. En estos términos, puede trazarse un paralelo entre el desarrollo de la conjetura conforme el progreso de la investigación y la evolución de la teoría de Lakatos apoyada en la incesante mejora de especulaciones y criticismo constante. (Confrey, y Lachance, 2000, pp. 231-265).

Siempre en esta línea se sostiene, acerca de la conjetura, que “...es como un gran esquema que va emergiendo de muchas piezas inicialmente inconexas, haciéndose cada vez más conexo al ayudar al investigador a percibir nuevos sucesos o relaciones y hacerle cambiar, eventualmente, su perspectiva inicial” (Molina González, 2006, p. 285).

En función de lo anterior, puede conjeturarse que, en la fase experimental, los alumnos evidenciarán cierto grado de confusión entre el concepto del objeto matemático y la propiedad, teorema o criterio relativo al mismo que facilita o establece las condiciones para su identificación. No debería descartarse que, en estos términos, propongan a uno como sustitutivo del otro, apoyando sus argumentaciones conceptuales sólo en los mecanismos de cálculo.

Se decidió, para esta etapa, elaborar dos cuestionarios correspondientes a dos tópicos de áreas bien diferenciadas de matemática: cálculo diferencial y álgebra lineal. Por tal motivo, uno de los instrumentos de recolección de la información se elaboró en torno a punto de inflexión de una función y el otro referido a matriz inversa. Ambos cuestionarios resultan isomórficos en cuanto a estructura y objetivos (cfr. Anexo). La definición y la propiedad fueron extraídas de Larson, Hostetler, Edwards (2010) y de Grossman (2012), respectivamente. El cuestionario, aproximación inicial y punto de partida para la preparación e inicio del desarrollo de este estudio, se considera la técnica más universal y de mayor uso en la investigación social.

5. Implementación de la experiencia.

Para esta investigación se optó por desarrollar una actividad cuya modalidad fue de tipo mixto, en tanto incluye actividades de respuestas cerradas, en las que los estudiantes dispusieron en el mismo cuestionario de alternativas de respuesta únicas, pero también abiertas o no estructuradas, en las que tuvieron total libertad de expresar y justificar sus propias respuestas.

Entre las ventajas y desventajas de cada tipo de pregunta, las cerradas ofrecen un sencillo tratamiento al momento del procesamiento y análisis estadístico, mientras que las no estructuradas permiten revelar ante el entrevistador esquemas de pensamiento, lo que facilita... “obtener una información detallada y la principal desventaja es que dificulta su procesamiento estadístico, siendo necesaria la utilización de otra técnica auxiliar como es el análisis de contenido” (Chávez de Paz, s.f., p.15)

La distribución de los cuestionarios fue presencial, a cargo de los mismos docentes de las asignaturas nombradas y al término de una clase de teoría. La elección de una clase teórica se basó en la posibilidad de contar con la mayoría de los alumnos cursantes. Aunque, cabe aclarar, que la clase de teoría en la que se implementó cada cuestionario, no correspondió al contenido matemático del mismo. Esta manera presencial de administrar los cuestionarios evita la pérdida de los mismos y permite disponer de la información solicitada en un tiempo previsto, no extenso. El tiempo otorgado para responderlo fue de 15 minutos, totalmente flexibles, luego de los cuales cada docente se encargó de la recolección.

El procesamiento y análisis de las respuestas dadas por los alumnos en los cuestionarios aportó información de interés sobre diferentes focos de problematicidad en los temas considerados para este trabajo. Los mismos se desarrollan en las secciones siguientes

6. Análisis de las definiciones empleadas

Desde el campo de la matemática, se puede señalar que la definición de punto de inflexión satisface los criterios desde el punto de vista lógico y de estética planteados por Winicki-Landman y Leikin (2000).

Conforme a la jerarquía, se basa en conceptos definidos previa e independientemente como el de continuidad de una función en un intervalo abierto y existencia de recta tangente a la gráfica de una función en un punto. Además, es precisa y arbitraria: dadas las condiciones previas relativas a la función f , si la concavidad se modifica a izquierda y derecha de $(c, f(c))$, entonces éste es un punto de inflexión de la misma. Asimismo no contiene partes que se deduzcan lógicamente de otros fragmentos de la misma y es elegante desde el punto de vista matemático (Winicki Landman, 2006, pp. 528-537).

Respecto de la definición de matriz inversa, también se ajusta a los criterios desde la perspectiva de la lógica: es arbitraria, tiene precisión -pues requiere satisfacer dos igualdades para determinar si B es la matriz inversa de A - y se basa en los conceptos de matriz cuadrada, producto de matrices y matriz identidad, previamente definidos. Asimismo, debido a que es minimalista y sencilla en su simbolismo, satisface los criterios desde el punto de vista estético.

Advertimos que, quizás por el minimalismo y la simplicidad que recién mencionamos, la definición de matriz inversa incluye una igualdad que puede pasar desapercibida para los alumnos pero que reviste importancia desde el punto de vista matemático ya que representa una ruptura entre el producto de objetos que cotidianamente manejan los alumnos. Considerando que la igualdad $AB=BA$, que denota la propiedad conmutativa del producto, es válida para objetos matemáticos

tales como números reales, expresiones algebraicas, funciones, etc., pero que no lo es en el contexto de matrices, es oportuno recuperar en el análisis de dicha definición durante la enseñanza que esta igualdad es una de las condiciones que aseguran B es la matriz inversa de A .

Por las observaciones previas, se puede afirmar que las dos definiciones que conforman los cuestionarios, expresadas en parte en lenguaje natural y en parte en lenguaje matemático, lo hacen de manera no circular y consistente en el sentido de no incluir contradicciones lógicas que deriven en que ningún objeto verifica sus condiciones.

Si analizamos las definiciones desde el punto de vista estrictamente lingüístico y nos enfocamos en el “modo” de organización de la información, observamos que las dos definiciones consignadas en los cuestionarios presentan las siguientes características textuales:

Punto de Inflexión:

- Oración con verbo ser en modo subjuntivo (sea... y sea...) que contextualiza la situación + adjunto circunstancial de condición + consecuencia + adjunto circunstancial de condición.
- Intercala lenguaje simbólico para identificar elementos.
- Se observa redundancia de expresiones referidas a los cambios en la concavidad de la función.

En contraste con la propiedad correspondiente, la organización de la información es similar, aunque para la propiedad hay variación en la última fase: Oración con verbo ser en modo subjuntivo (sea...) que contextualiza la situación + adjunto circunstancial de condición + consecuencia con dos opciones (entonces... o bien...).

Matriz inversa:

- Oración con verbo ser en modo subjuntivo (sean...) que contextualiza la situación + adjunto circunstancial de condición + consecuencia.
- Intercala lenguaje simbólico para identificar elementos y establecer relaciones lógicas entre ellos.
- En contraste con la propiedad correspondiente, la organización de la información es diferente. La propiedad se presenta a través de una secuencia de pasos que incluyen frases pasivas con se y finalizan con estructuras de condición/consecuencia.

Para concluir el análisis lingüístico, ambas definiciones presentan combinación de lenguaje natural y simbólico, propia de la disciplina, y una organización informativa no convencional con uso del modo subjuntivo para enmarcar la situación que se plantea y presencia de estructuras condicionales no necesarias para desarrollar la función comunicativa inherente al género definición. En un caso, dichas estructuras se presentan además en un orden no convencional.

7. Resultados. Análisis de la información

La intención que perseguimos en la Consigna 1 fue que expusieran sus conocimientos básicos sobre la diferencia entre una definición y una propiedad; en la

Consigna 2, que aplicaran esa distinción, y finalmente, en la Consigna 3, que justificaran de alguna manera la respuesta anterior.

Respecto de la Consigna 1, las respuestas para ambos cuestionarios no mostraron diferencias, fueron escuetas y en algunos casos, contradictorias. Las expresiones recurrentes (presentadas desde las más frecuentes a las menos frecuentes) fueron:

- *la definición explica, es larga, mientras que la propiedad expresa y es más corta.*
- *la definición se cumple sí o sí, en cambio la propiedad, no siempre y es más específica.*
- *la definición da el significado y la propiedad, las condiciones.*
- *la definición explica lo que es y la propiedad, lo que ocurre.*
- *la definición no se demuestra, la propiedad sí.*
- *la definición dice qué es, en cambio la propiedad indica las características, cómo identificarlo o los pasos a seguir.*
- *las definiciones pueden decirse de distinto modo, las propiedades, no.*
- *la definición es más fácil de entender que la propiedad.*
- *la definición es corta y la propiedad es larga.*

Respecto de la Consigna 2, los datos arrojaron los siguientes resultados:

RESPUESTAS \ CUESTIONARIO REFERIDO A	PUNTO DE INFLEXION	MATRIZ INVERSA
Identifica la definición y la propiedad/algoritmo	8%	42%
No identifica la definición y la propiedad/algoritmo	87%	54%
No contesta	5%	4%

Tabla 1: Resultados de la Consigna 2

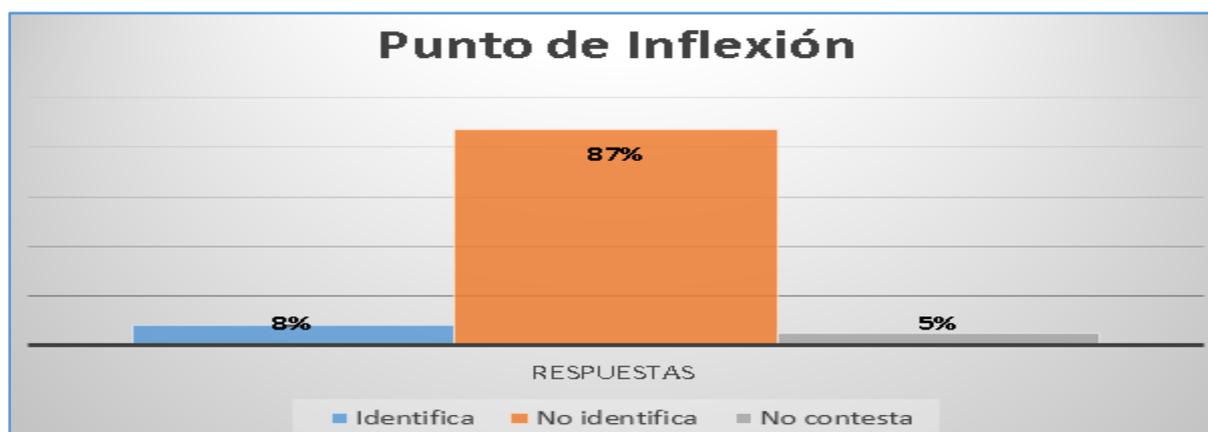


Figura 5. Respuestas a la Consigna 2 del Cuestionario 1

Fuente: Elaboración propia

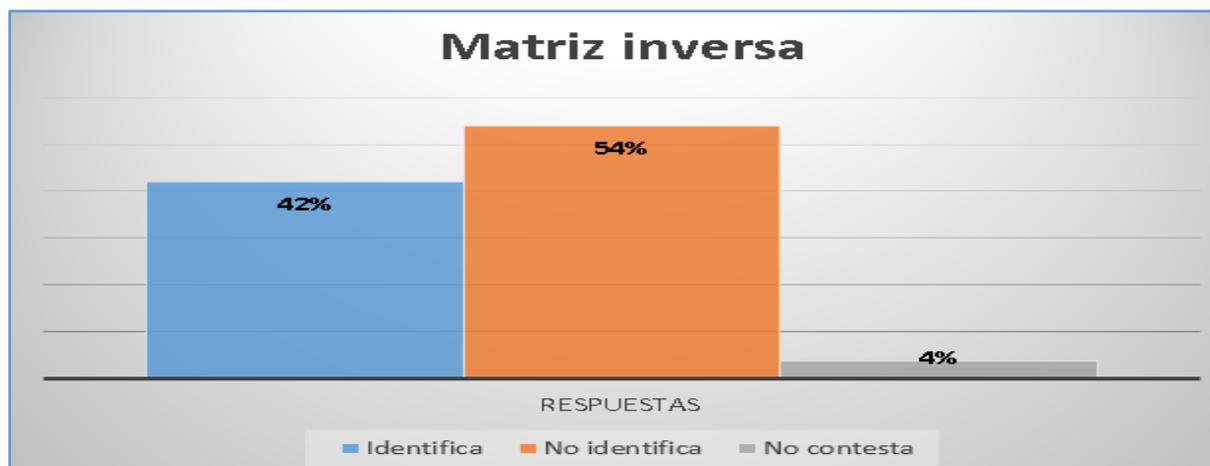


Figura 6: Respuestas a la Consigna 2 del Cuestionario 2

Fuente: Elaboración propia

En cuanto a la Consigna 3, las respuestas para ambos cuestionarios no mostraron diferencias entre sí y fueron menos variadas. En varios casos repitieron lo dicho en la Consigna 1 y se observaron las mismas contradicciones mencionadas para esa consigna. Las expresiones recurrentes (presentadas desde las más frecuentes a las menos frecuentes) fueron:

- *las distinguí por la extensión.*
- *las distinguí porque una usa más palabras y la otra, más fórmulas.*
- *las distinguí porque la definición es siempre cierta y la propiedad, a veces.*
- *las distinguí porque la definición da el significado y la propiedad, las características/pasos a seguir.*

Investigando en los cuestionarios si existe coherencia entre las respuestas abiertas (Consignas 1 y 3) y la cerrada (Consigna 2) los resultados se sintetizan en el siguiente cuadro:

CUESTIONARIO REFERIDO A	PUNTO DE INFLEXIÓN	MATRIZ INVERSA
RESPUESTAS		
Manifiesta coherencia	15%	62%
No manifiesta coherencia	85%	38%

Tabla 2. Relación de resultados entre Consignas 1/3 y 2



Figura 7: Respuestas a la Consigna 3 del Cuestionario 1
Fuente: Elaboración propia

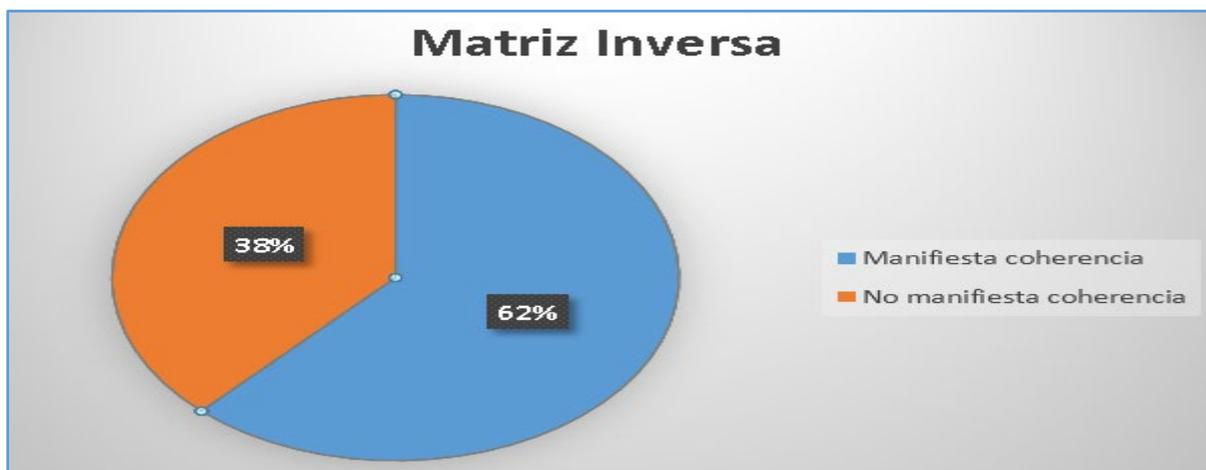


Figura 8: Respuestas a la Consigna 3 del Cuestionario 2
Fuente: Elaboración propia

En función de los resultados obtenidos, podemos interpretar que, en general, los alumnos manejan nociones básicas sobre las diferencias que existen entre una definición y una propiedad. Estas nociones refieren, por un lado, a la función comunicativa, al significado lógico que expresa cada enunciado (la definición indica el concepto mientras que la propiedad alude a relaciones causales en las que el objeto interviene, como pueden ser condiciones, pasos requeridos para calcularlo, alcance o dominio de validez, etc.). Por otro, a aspectos relacionados con el modo en que se presenta la información (extensión, tipo de lenguaje utilizado).

No obstante esto, la distinción que los estudiantes plantean en un nivel conceptual, no se logra aplicar a la hora de identificar concretamente cuál es el enunciado de la definición y cuál el del criterio. Esta incoherencia entre conocimiento teórico y práctico se manifiesta más aun en el caso del tema "punto de inflexión".

A partir de estas observaciones, podemos plantear que un aspecto determinante de estas dificultades estaría asociado a las características del lenguaje natural utilizado en las dos definiciones seleccionadas. Concretamente, la organización de la

información que ambas presentan en el nivel textual generaría obstáculos a los estudiantes para poder poner en juego sus nociones previas sobre función comunicativa y significado específico de la definición y, de este modo, diferenciarla de otras categorías conceptuales.

En este sentido, creemos que para evitar las confusiones observadas, sería conveniente presentar los enunciados de una manera más sencilla y ordenada, evitando utilizar recursos lingüísticos innecesarios. Básicamente, estas modificaciones podrían consistir en quitar las frases condicionales características de las propiedades y desarrollar el enunciado a través de expresiones simples que focalicen en la información propia del género definición, como son los rasgos esenciales del objeto descrito.

A continuación presentamos una posible reelaboración para cada definición considerada en este trabajo:

Matriz inversa: Se llama matriz inversa de una matriz cuadrada A a una matriz cuadrada B que satisface que $A.B = B.A = I$

Punto de inflexión: Sea f una función continua en un intervalo abierto I . Un punto c del intervalo en el que la función tiene recta tangente, es continua y sus concavidades son opuestas a izquierda y derecha de él, recibe el nombre de punto de inflexión.

También sería conveniente que paralelamente, en la clase de COE, se analizaran los distintos significados que, en el contexto de la matemática, se le pueden asignar a los verbos en modo subjuntivo, dada la alta recurrencia de los mismos observada en el discurso disciplinar. Un ejemplo concreto es la presencia de la expresión “sea” utilizada con valor veritativo en los dos enunciados de las definiciones seleccionadas para esta experiencia.

8. Conclusiones

Tal como fue mencionado en el estado del arte, acordamos que uno de los quiebres más notables entre el pensamiento matemático elemental y el avanzado, como el que se espera en la universidad, radica en la importancia de las definiciones matemáticas formales aceptadas por la comunidad científica y que se presentan en los libros de estudio. Entrar en una cultura matemática significa “involucrarse en situaciones donde sea posible entender un modo de pensar y de producir conocimiento y tomar contacto con herramientas y procedimientos específicos de esta ciencia” (Sáiz, 2001).

El papel preponderante que ocupa el aprendizaje de las definiciones en esta etapa nos obliga a repensar nuestras intervenciones didácticas, de modo que colaboren en la superación de las dificultades que se han puesto de manifiesto en esta investigación. Reconociendo que son diversos los factores involucrados, pretendemos hacer hincapié en dos de ellos que consideramos pertinentes en el marco de este trabajo interdisciplinario.

Por un lado, y como se detalla en la sección anterior, avanzamos en la idea de que la reelaboración del enunciado de algunas definiciones matemáticas que se presentan a los estudiantes de los primeros años de la universidad, adecuándolas a

las convenciones del lenguaje natural, facilitaría la comprensión y la distinción de dichos enunciados con respecto a otras conceptualizaciones como teoremas o propiedades.

Por otro lado, una arista importante e indudablemente asociada a lo anterior, radica en la formación y el desarrollo profesional de los docentes de matemática que, raramente, son interpelados a reflexionar sobre las definiciones de los conceptos matemáticos. Se destaca la importancia de esta práctica “para poder desarrollar su propia concepción sobre el proceso de enseñanza-aprendizaje de las matemáticas en general y particularmente sobre los distintos aspectos relacionados al aprendizaje de conceptos y su definición” (Winicki-Landman, 2006, p. 528).

Coincidimos con este autor que, la experiencia de analizar y discutir, en el seno de la comunidad académica (entre los propios docentes de matemática, y entre éstos y los docentes de otras disciplinas, como lengua o pedagogía) los modos de enseñar las definiciones y otros contenidos, contribuiría a adecuar cada propuesta de clase a las necesidades de nuestros alumnos y a sus concepciones previas. Esta experiencia docente llevaría a fomentar e instalar la misma práctica como una constante dentro del aula, en la convicción de que la reflexión metalingüística posee un alto valor epistémico para los estudiantes.

Naturalmente, los resultados obtenidos hasta el momento abren un abanico de posibilidades para seguir avanzando en nuestra tarea investigativa. Lo que sigue será plantear otra etapa de trabajo que nos permita confirmar la importancia de atender los aspectos lingüísticos para asegurar la comprensión matemática y la necesidad de trabajar interdisciplinariamente en la formación universitaria, especialmente en los primeros años de formación superior.

9. Referencias bibliográficas.

- Azcárate, C. (2001). *Definiciones, demostraciones, ¿por qué?, ¿cuándo?, ¿cómo?* X Jornadas para el Aprendizaje y la Enseñanza de las Matemáticas Ponencia, 159-170. Zaragoza, España.
- Azcárate Giménez, C. y Camacho Machín, M. (2003). *Sobre la Investigación en Didáctica del Análisis Matemático*. *Boletín de la Asociación Matemática Venezolana* X (2), 135-149.
- Calvo Pesce, C. (2001). *Un estudio sobre el papel de las definiciones y las demostraciones en cursos preuniversitarios de Cálculo Diferencial e Integral* (tesis doctoral). Universidad Autónoma de Barcelona. Barcelona. Recuperado de <https://ddd.uab.cat/record/37676>.
- Carlino P. (2013). *Alfabetización académica diez años después*. *Revista Mexicana de Investigación Educativa* 18 (57), 355-381.
- Chávez de Paz, D. (s.f.). *Conceptos y técnicas de recolección de datos en la investigación jurídico social*. Universidad Nacional Mayor de San Marcos. Recuperado el 05 de agosto del 2019, de http://www.unifr.ch/ddp1/derechopenal/articulos/a_20080521_56.pdf
- Confrey, J. y Lachance, A. (2000). *Transformative teaching experiments through conjecture-driven research design*. En A. E. Kelly y R. A. Lesh (Eds) *Handbook*

- of research design in mathematics and science education (pp. 231-265). : Lawrence Erlbaum Associates. New Jersey, EEUU.
- Duval, R. (1993). *Registres de représentations sémiotique et fonctionnement cognitif de la pensée, Annales de Didactique et de Sciences Cognitives* 5, 37-65. Recuperado de: https://mathinfo.unistra.fr/fileadmin/upload/IREM/Publications/Annales_didactique/vol_05/adsc5_1993-003.pdf
- Ezcurra, A. (2011). *Igualdad en educación superior. Un desafío mundial*. Universidad de General Sarmiento. Los Polvorines, Argentina.
- Felix, L. (1960). *The Modern Aspects of Mathematics*. Basic Books Inc. Nueva York, EEUU.
- Grossman, S. (2012). *Algebra Lineal* (Séptima Edición). Mc Graw Hill. Ciudad de México, México.
- Hayland, K. (2007). *Genre pedagogy: Language, literacy and L2 writing instruction. Journal of second language writing* 16(3), 148-164.
- Larson, R. E, Hostetler, R. P., Edwards B. H. (2010). *Cálculo Esencial*. Cengage Learning. Ciudad de México, México.
- Manghi, D. y Córdova, J. (2011). *Definiciones y explicaciones multimodales: Potencial semiótico en la enseñanza de la biología en Educación Media. Revista Logos de Lingüística, Filosofía y Literatura* 21 (2), 17- 39.
- Mariscal Antezana, G. (2003). *Una aproximación a la Didáctica en el Proceso del Aprendizaje de las Matemáticas*. Disponible en <http://www.revistaciencias.com>
- Martin, J. R. (2000). *La gramática se reúne con el género. Reflexiones sobre la Escuela de Sydney*. Recuperado el 27 de julio del 2019, de <https://es.scribd.com/document/407853427/La-Gramatica-Se-Reune-Con-El-Genero>
- Mella Valenzuela, O. (2003). *Metodología cualitativa en ciencias sociales y educación: Orientaciones teórico-metodológicas y técnicas de investigación*. Editorial Primus. Santiago de Chile, Chile.
- Molina González, M. (2006). *Desarrollo del pensamiento relacional y comprensión del signo igual por alumnos de tercero de educación primaria* (tesis doctoral). Universidad de Granada. Granada, España.
- Movshovitz-Hadar, N., Zaslavksy, O. & Inbar, S. (1987). *An Empirical clasification model for errors in High School Mathematics. Journal for Research in Mathematics Education* 18, 3-14.
- Pérez, G. (1994). *Investigación cualitativa. Retos e interrogantes*. La Muralla. Madrid, España.
- Quecedo, R. y Castaño, C. (2003). *Introducción a la metodología de investigación cualitativa. Revista de Psicodidáctica* 14, 5-39.
- Radatz, H. (1980). *Students' Errors in the Mathematical Learning Process: a Survey. For the Learning of Mathematics* 1(1), 1-20.

- Radford, L. (1997). *On Psychology, Historical Epistemology and the teaching of Mathematics: Toward a Socio-Cultural History of Mathematics. For the learning of Mathematics* 17 (1), 26-33.
- Sáiz, I. (2001). *Reforzando el pensamiento matemático*. Programa de Apoyo al ingresante. Universidad Nacional del Nordeste.
- Socas, M. (1997). Dificultades, obstáculos y errores en el aprendizaje de las Matemáticas en la Educación Secundaria. En L. Rico (Coord.), *La Educación Matemática en la Enseñanza Secundaria* (pp. 125-154). Ed. Horsori. Barcelona, España.
- Tall, D. (1991). *Advanced mathematical thinking*. Kluwer Academic Publisher. Dordrecht, Países Bajos.
- Tall, D. (1995). *Advanced mathematical thinking*. Kluwer Academic Publisher. Dordrecht, Países Bajos.
- Tall, D. y Vinner, S. (1981). *Concept Image and Concept definition in mathematics with particular reference to Limits and Continuity. Educational Studies in Mathematics* 12, 151-169.
- Vinner, S. (1991). The role of definitions in the teaching and learning of mathematics. En D. Tall (Ed.), *Advanced mathematical thinking* (pp. 65-81). Dordrecht, Holanda: Kluwer.
- Winicki-Landman, G. (2006). *Las definiciones en matemáticas y los procesos de su formulación: algunas reflexiones. Acta Latinoamericana de Matemática Educativa* 19, 528-537.
- Winicki-Landman, G. Leikin, R. (2000). *On Equivalent and Non-Equivalent Definitions Part I. For the Learning of Mathematics* 20(1), 17-21.

Anexo

CUESTIONARIO 1 (para alumnos de Cálculo 1)	
1- ¿Cuál es, según su punto de vista, la diferencia entre una definición y una propiedad (o un teorema)?	
2- Identificar cuál de los dos enunciados siguientes es, a su entender, la definición y cuál la propiedad (o criterio) que refiere a PUNTO DE INFLEXIÓN.	
Sea f una función que sea continua en un intervalo abierto y sea c un punto en ese intervalo. Si la gráfica de f tiene una recta tangente en el punto $(c, f(c))$. entonces este punto es un punto de inflexión de la gráfica de f si la concavidad de f cambia de hacia arriba a hacia abajo o de hacia abajo a hacia arriba	Sea c un punto del dominio de f . Si $(c, f(c))$ es un punto de inflexión de f , entonces $f''(c)=0$ o bien no existe $f''(x)$ en $x=c$.
3- ¿Cómo estableció la diferencia entre la definición y la propiedad en cada caso?	

CUESTIONARIO 2 (para alumnos de Álgebra Lineal)	
1- ¿Cuál es, según su punto de vista, la diferencia entre una definición y una propiedad (o un teorema)?	
2- Identificar cuál de los dos enunciados siguientes es, a su entender, la definición y cuál la propiedad (o criterio) que refiere a MATRIZ INVERSA	
Para encontrar la inversa de una matriz cuadrada A: Paso 1. Se escribe la matriz aumentada $(A I)$. Paso 2. Se utiliza la reducción por renglones para poner la matriz A a su forma escalonada reducida por renglones. Paso 3. Si la forma escalonada reducida por renglones de A es la matriz identidad I, entonces A^{-1} es la matriz que se tiene a la derecha de la barra vertical. Si la reducción de A conduce a un renglón de ceros a la izquierda de la barra vertical, entonces A no es invertible.	Sean A y B dos matrices cuadradas. Si se verifica que $AB = BA = I$ (*) entonces se dice que 'B es la matriz inversa de A' y se indica $B = A^{-1}$.
3: ¿Cómo estableció la diferencia entre el concepto y el criterio de Matriz Inversa?	

Fabiana Montenegro es Profesora de Matemática, Licenciada en Matemática Aplicada y Magister en Matemática. Actualmente doctoranda en Educación. Profesora adjunta en la Facultad de Ingeniería y Ciencias Hídricas de la Universidad Nacional del Litoral y Profesora titular en el Profesorado de Educación Secundaria en Matemática de la Escuela Normal Superior N° 32. Santa Fe– Argentina. montenegrofg@gmail.com. Tel. Móvil: 54-9-342-5337389.

Mario Garelik es Licenciado en Matemática Aplicada y Magister en Didácticas Específicas y se dedica a la investigación en Matemática Educativa, ocupándose en especial de las dificultades de enseñanza y aprendizaje de los principios del cálculo. Profesor titular en la Facultad de Ingeniería y Ciencias Hídricas - Universidad Nacional del Litoral - Santa Fe – Argentina. mgarelik@gmail.com. Tel. Móvil: 54-9-342-4399197.

Estela Mattioli es Lic. en Letras y Mag. en Docencia Universitaria. Dirige el Proy. CAI+D "La comunicación del conocimiento científico en los primeros años de ingeniería. El desarrollo informativo de los textos de Matemática y Química, y las estrategias que favorecen su comprensión." Se desempeña como docente de grado y posgrado en la FICH-UNL- Santa Fe - Argentina. mattioli.estela@gmail.com - Tel. Móvil: 54-9-342-4472754