

El rincón de los problemas

Uldarico Malaspina Jurado
 Pontificia Universidad Católica del Perú
umalasp@pucp.edu.pe

Una experiencia didáctica con problemas creados por docentes. Reflexiones y perspectivas.

Problema

¿Todo número en el reloj es el consecutivo de algún número en el reloj?

Comentaré y daré nuevas pistas de trabajo sobre una interesante experiencia didáctica desarrollada por dos profesoras de primaria con alumnos de 9 años, del tercer grado de este nivel educativo de una escuela estatal del distrito de Ate-Vitarte, en Lima. El problema enunciado es uno de los problemas que ellas crearon y los propusieron a los alumnos, con el objetivo de “Reforzar el razonamiento lógico y también el concepto de números naturales consecutivos.”

La experiencia didáctica fue iniciativa de las profesoras María Teresa Portugal y Norma Espinoza, como parte de un trabajo en sus estudios de Maestría en Enseñanza de las Matemáticas con mención en Educación Primaria que ofrecemos en la Pontificia Universidad Católica del Perú, y es una muestra clara de que los profesores de primaria pueden crear problemas e imaginar y desarrollar clases entretenidas, que estimulan el pensamiento matemático de los niños. Fue inspirado en la lectura que hicieron del artículo “Hacia la creación de problemas”, publicado en esta sección del número 29 de *UNIÓN*, (Malaspina, 2012). En tal artículo me refiero a la experiencia didáctica desarrollada con estudiantes de profesorado de primaria, partiendo de una definición de “dúo” como un conjunto formado por dos números naturales, con la única condición de ser números consecutivos. Las profesoras decidieron usar esta idea para desarrollar una experiencia didáctica con niños de tercer grado de primaria.

A continuación haré un resumen de la exposición que ellas hicieron en clase, luego de desarrollar la experiencia, complementada con la información adicional que me dieron, comentando las actividades desarrolladas.

Considerando lo importante que es para los niños el uso de material concreto, idearon utilizar relojes de cartón y tapitas de botellas (“chapitas”), en las que estaban escritos los números del 1 al 12 (Figuras 1 y 2).

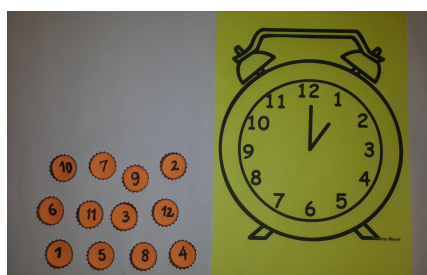


Figura 1

Después que los niños manipularon libremente el material recibido, recibieron la siguiente información:

**Si escribes dos números naturales consecutivos,
entonces formas un "dúo"**

Y luego la siguiente pregunta:

¿Cuántos dúos puedes formar con los números del reloj? Escríbelos.

Los niños, en grupos de tres, trabajaron con mucho entusiasmo y espontáneamente salieron a la pizarra a escribir los dúos que iban encontrando (Figuras 2 y 3).



Figura 2



Figura 3

Luego propusieron otro problema a los niños:

**¿Es verdad o falso que la suma de los dos números de un dúo
siempre es un número impar? Expliquen su respuesta.**

Las profesoras comentan que quedaron sorprendidas ante las reacciones de los niños, que analizaban con entusiasmo diversos casos, afirmaban que al sumar los números de sus dúos siempre obtenían un número impar y finalmente explicaban que tenía que ser así

- "porque en un dúo siempre se tiene un número par y otro impar"
- "porque la suma de par más impar es impar, porque siempre se queda uno sin pareja".

Las profesoras siguieron "desafiando" a los niños:

**Si Jaimito se levantó a las 7 am, ¿cuántos dúos puedes formar con este
número? Escríbelos.**

Los niños escribieron el dúo (7; 8). Ante esto, las profesoras afirmaron:

- Bien, porque 8 es el consecutivo de 7, pero ¿7 es el consecutivo de algún número del reloj?

Hubo un silencio inicial, pero pronto se dieron cuenta que 7 es el consecutivo de 6 y escribieron el dúo (6; 7). Más aún, una de las niñas manifestó que 7 es el consecutivo de 6 porque 7 menos 1 es 6 y escribió lo que se ve en la Figura 4. Notar en la parte superior el número 1 y el “signo menos” que lo acompaña a su derecha, para representar simbólicamente esta idea, como leyendo de derecha a izquierda “7 menos 1 es 6”.

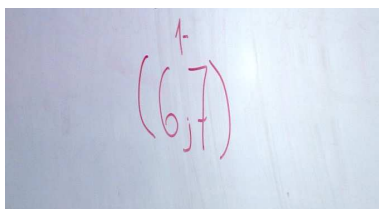


Figura 4

Entonces las profesoras decidieron proponer a sus alumnos el problema que consideraban más retador:

¿Todo número en el reloj es el consecutivo de algún número en el reloj? ¿Por qué?

Los niños no respondieron inmediatamente; algunos inicialmente dijeron que sí, pero finalmente llegaron a una respuesta correcta:

- “No, porque el 1 es el consecutivo del 0, pero el 0 no es un número del reloj.”

Profesoras y alumnos mostraron gran satisfacción al llegar a esta conclusión – como se puede ver en las figuras 5 y 6 – y dieron por terminada la sesión.



Figura 5



Figura 6

Las profesoras, al narrar su experiencia en la clase de maestría, hicieron varios comentarios, de los cuales destaco los siguientes:

- a) Los alumnos participaron en forma activa, dinámica y espontánea durante toda la actividad.
- b) Los niños se mostraban emocionados y dialogaban haciendo uso del material ante las preguntas planteadas.
- c) Se pudo observar la rapidez de sus respuestas ante las primeras preguntas.

- d) Pudimos observar mayor participación, mejor argumentación y rapidez de las respuestas en las niñas, en particular de Nahisha.
- e) Cuando planteamos problemas de mayor complejidad, los niños analizaron los problemas varias veces y con ayuda del material fueron dando sus respuestas con mayor seguridad.
- f) Los alumnos se mostraron contentos al realizar las actividades, siendo un tema novedoso para ellos el tema de los “Dúos”..
- g) Al realizar dicha secuencia didáctica se evitó forzar las respuestas, más bien indujimos de manera progresiva a que analicen y argumenten sus respuestas en forma espontánea.
- h) Sentimos gran satisfacción al haber aplicado esta secuencia didáctica a partir de los “Dúos” porque encontramos que los niños entendieron lo que se les preguntaba y podían responder dando sus justificaciones.

Más allá de la experiencia descrita

Ciertamente, la experiencia descrita es muy rica y muestra lo importante que es brindar a los niños oportunidades para desarrollar su creatividad, su entusiasmo, su curiosidad y sus ganas de aprender. Parte de la riqueza de la experiencia es que invita a pensar en las proyecciones que tiene y en las posibilidades de crear nuevos problemas a ser trabajados con niños de primaria, de secundaria y también con estudiantes de educación superior y con profesores de educación básica. A continuación algunos comentarios e ideas:

1. Los problemas con un subconjunto de los números naturales, ideados por las profesoras y trabajados con los niños, fueron más allá del concepto de números naturales consecutivos, de las operaciones de adición y de la paridad o imparidad de números naturales, pues la última pregunta conlleva una proposición con los cuantificadores universal y existencial. En términos formales, en un nivel educativo superior, la pregunta planteada a los niños podría reformularse pidiendo analizar la verdad o falsedad de una proposición que se enuncie llamando, por ejemplo, J al conjunto de los “números en el reloj”. Así, en lugar de preguntar:

**¿Todo número en el reloj es el consecutivo de algún número en el reloj?
¿Por qué?,**

Se podría pedir:

**Analizar la verdad o falsedad de la siguiente proposición:
para todo $x \in J$, existe $y \in J$ tal que x es el consecutivo de y .**

Usando los símbolos habituales para los cuantificadores, la proposición se puede escribir:

$\forall x \in J, \exists y \in J$ tal que x es el consecutivo de y .

Podemos advertir que este tipo de proposición se usa con frecuencia en el análisis matemático universitario, por ejemplo al definir el límite de una función en un punto. Seguramente que las dificultades que los alumnos universitarios tienen para entender esta definición no serían tan serias si desde la primaria vivieran experiencias como las que vivieron los niños, jugando y pensando con “los números en el reloj”. Experiencias sencillas y de carácter lúdico, pero

también desafiantes, que van formando un razonamiento matemático, considerando casos generales y particulares.

2. Trabajar con “los números en el reloj” puede llevar a crear nuevos problemas con los niños y aun a pedirles a ellos que creen problemas. Algunas ideas para ello son:

i. Jaimito afirma que si dos números en el reloj forman un dúo, entonces los dos números están uno al lado del otro en el reloj; y María afirma que si dos números en el reloj están uno al lado del otro, entonces los dos números forman un dúo.

¿Cuál de las afirmaciones es verdadera? ¿O las afirmaciones de Jaimito y María son ambas verdaderas? Explicar.

ii. Observar la secuencia de las sumas de los números en el reloj que están en posiciones diametralmente opuestas; es decir, la secuencia de las sumas $1 + 7$; $2 + 8$; ...; $6 + 12$. ¿Qué afirmaciones se pueden hacer?

iii. ¿Cómo expresar el número diametralmente opuesto a cada uno de los números en el reloj comprendidos entre 1 y 6 inclusive?

iv. ¿Qué podemos decir de la diferencia entre cada uno de los números en el reloj comprendidos entre 7 y 12 inclusive, con el correspondiente número que está en posición diametralmente opuesta?

v. Encontrar una expresión general que caracterice a los seis primeros términos de la sucesión 1×7 ; 2×8 ; ...; 6×12 ; Estos son los productos de los números en el reloj que se encuentran en posiciones diametralmente opuestas, comenzando por el 1 y el 7.

Este es un problema particularmente interesante, porque lleva a la consideración de una función cuadrática y en consecuencia a una progresión aritmética de segundo orden. Evidentemente no es un problema para primaria. Puede usarse en secundaria y en cursos de formación de profesores. Una manera de llegar a la solución es respondiendo algebraicamente la pregunta formulada en (iii).

vi. Imaginar que el día está dividido en 48 horas y responder las siguientes cuestiones:

A. ¿Cuáles son los números en un reloj de forma circular que corresponden a esta división horaria?

B. Dibujar un reloj circular para días de 48 horas

C. ¿Cuántos dúos se pueden formar con los números de este reloj?

D. ¿Cuáles son, en tal reloj, los números que se ubican en posiciones diametralmente opuestas?

E. Proponer y resolver problemas similares a los problemas enunciados en los ítems del (ii) al (v), considerando este nuevo reloj.

Esta es una perspectiva lúdica e imaginativa, con la cual se pueden hacer diversas variaciones, con distintas divisiones horarias. El profesor puede considerar días de $4n$ horas, siendo n un número natural mayor que cero.

En verdad, se está jugando con la imaginación de manera razonada y pasando a una generalización, que en una mirada intra matemática,

corresponde a la división de una circunferencia en m arcos de igual longitud, siendo m un número par mayor que cero. Al asignar ordenadamente a cada punto de división, un número natural de 1 a m e identificar los puntos de cada división de la circunferencia con el número natural asignado, se puede hablar de números en posición diametralmente opuesta y considerar tanto problemas similares a los dados anteriormente como todos los que surjan de la creatividad.

El lector puede advertir que con las ideas expuestas se puede trabajar lúdicamente nociones de lógica, de geometría, de álgebra, de sucesiones, de funciones afines, de progresiones aritméticas y de funciones cuadráticas y su vinculación con las progresiones.

Comentarios finales

La experiencia didáctica desarrollada, es una clara evidencia de que los profesores de primaria, adecuadamente motivados y preparados, pueden crear problemas de matemáticas pensando en proponerlos a sus alumnos y desarrollar con ellos clases que los entusiasmen, que los hagan disfrutar mientras aprenden y que los estimulen a razonar y desarrollar su creatividad y su pensamiento matemático.

Una base fundamental para desarrollar en los profesores su capacidad de crear problemas y usarlos en clases en la educación básica, es una buena formación en matemática y en su didáctica, con reflexiones suscitadas por lecturas de artículos sobre investigaciones y experiencias didácticas en la educación matemática.

Crear problemas y actividades para lograr aprendizajes de los niños incursionando en su mundo del juego, estimulando su creatividad y su imaginación, es contribuir a que ellos perciban la belleza de la matemática y la disfruten desde pequeños. Así, creando problemas como los expuestos y los sugeridos, avanzamos maestros y alumnos, pues “aunque imperfecta, la habilidad de formular problemas es vital en el proceso creativo” (Mann, E., 2009, p 346).

No quiero terminar este artículo sin destacar la importancia de la libertad y la imaginación en los procesos creativos, evidenciados en dos momentos en párrafos anteriores: a) el uso de una notación con originalidad y libertad de una niña (Figura 4) para mostrar que 7 es el consecutivo de 6 y que fue valiosamente respetado por las profesoras; y b) el jugar con la imaginación para “construir un reloj circular correspondiente a un día de 48 horas” y en él plantearse y resolver problemas relacionados con la lógica, el álgebra y las funciones. ¡Cuán cierto es lo que dice Gregory Chaitin (citado por Pickover, C., 2014)!: “Las matemáticas son una disciplina maravillosa, alocada, llena de imaginación, de fantasía y de una creatividad que no se ve limitada por los pequeños detalles del mundo físico: su único límite es la fuerza de nuestra luz interior”.

Referencias

- Malaspina, U. (2012) Hacia la creación de problemas. *UNIÓN, Revista Iberoamericana de Educación Matemática*, 29, 155 – 160. Recuperado de <http://www.fisem.org/www/union/revistas/2012/29/archivo13.pdf>
- Mann, E. (2009). The search for mathematical creativity: identifying creative potential in middle school students. *Creativity Research Journal*, 21 (4), 338 – 348.
- Pickover, C. (2014). *El libro de las matemáticas*. Holanda: Librero.