ISSN: 1815-0640
Número 67. Abril 2023
Páginas 1-20

Una tarea de final abierto en la enseñanza de la parábola
Uma tarefa em aberto no ensino da parábola

Elena Freire-Gard

Fecha de recepción: 03/05/2022
Fecha de aceptación: 22/09/2022

Resumen	En este artículo se reporta la implementación de una tarea de final abierto en el tema parábola. La experiencia se desarrolló en un grupo de 6° año de bachillerato de ingeniería en una Institución Educativa de Educación Secundaria. La aplicación de la tarea de final abierto pone en evidencia la variedad de estrategias que implementan los estudiantes en su resolución y muestra cómo se atienden los diferentes niveles de conocimientos gracias a la flexibilidad que ofrece para sus soluciones. **Palabras clave**: tareas de final abierto, parábola, prácticas pedagógicas de matemática.
Abstract	This paper reports the implementation of an open-ended task on the subject of parabola. The experience was developed in a group of 6th year engineering baccalaureate students in a Secondary Education Educational Institution. The application of the open-ended task highlights the variety of strategies implemented by students in its resolution and shows how different levels of knowledge are addressed thanks to the flexibility it offers for its solutions. **Keywords**: open-ended tasks, parabola, mathematics pedagogical practices.
Resumo	Este artigo relata a implementação de uma tarefa em aberto sobre o tema da parábola. A experiência foi desenvolvida num grupo de estudantes do 6º ano de bacharelato em engenharia numa instituição educativa do ensino secundário. A aplicação da tarefa aberta destaca a variedade de estratégias que os alunos implementam na sua resolução e mostra como diferentes níveis de conhecimento são abordados graças à flexibilidade que oferece para as suas soluções. **Palavras-chave:** tarefas em aberto, parábola, práticas pedagógicas em matemática.

1 Introducción

Las tendencias actuales de la matemática educativa promueven que los profesores no se limiten a utilizar actividades rutinarias o de repetición de algoritmos. El National of Council of Teachers of Mathematics (NCTM, 2014) alienta al profesor a integrar “tareas desafiantes que impliquen construir sentidos significativos y que apoyen el aprendizaje significativo” (p. 9). El NCTM sugiere también vincular los nuevos conocimientos con los conocimientos previos, posibilitar que el estudiante pueda transferir y aplicar el conocimiento en nuevas situaciones y fundamentar las resoluciones que propone.

Zaslavsky (1995) identificó que pequeñas modificaciones en el enunciado de una tarea pueden provocar grandes cambios en la resolución de estas. Para dicha autora, las tareas de final abierto (en inglés: open ended task) tienen múltiples respuestas correctas, la actividad no tiene un único camino de resolución. Estas actividades posibilitan que se origine el debate y discusión sobre diferentes formas de razonamiento que se desarrollan frente a la resolución de la tarea de final abierto; de esta forma se promueve la comunicación matemática. Un ejemplo de tarea de final abierto puede observase en la Tabla 1 (Zaslavsky, 1995, p. 15). En la columna izquierda de la tabla se muestra un enunciado tradicional de una actividad con una única solución. Los estudiantes tendrán que resolver un sistema de ecuaciones conformado por las expresiones analíticas de la parábola y de la recta, la resolución la realizarán por sustitución, reducción o igualación. Sin embargo, en la columna derecha de la tabla, que contiene el enunciado de la tarea de final abierto, al pedir encontrar la ecuación de una recta que tiene dos puntos en común con la parábola, se presentarán múltiples respuestas que involucrarán diferentes conocimientos. El problema propuesto en la columna de la derecha promoverá, en los estudiantes, diferentes argumentaciones.

Tarea estándar	Tarea de final abierto
How many intersection points does the parabola: $y=x^2+4x+5$ have with the straight line: $y=2x+5$?	Find an equation of a straight line that has two intersection points with the parabola: $y=x^2+4x+5$
¿Cuántos puntos de intersección tiene la parábola $y=x^2+4x+5$ con la recta $y=2x+5$?	Encuentra la ecuación de una recta que tiene dos puntos de intersección con la parábola: $y=x^2+4x+5$

Tabla 1. Tarea estándar y tarea de final abierto. Fuente: Zaslavsky (1995, p.15). [Traducción del autor]

Algunas de las ventajas de incluir tareas de final abierto son: conectar diferentes contenidos matemáticos según las fortalezas que tienen los estudiantes, visualizar diferentes formas de razonamiento sin estar direccionados por el profesor, por el contrario, creadas y elegidas por ellos mismos. La experiencia reportada por Zasvlasky (1995), aplicada en un taller con profesores de matemáticas, fue un primer paso para el desarrollo y diseño de problemas de final abierto. Permitió mostrar el potencial de estos problemas y abrió la oportunidad para que profesores compartan sus experiencias de implementación, con tareas similares, en el aula. Otras experiencias (Martínez, 2020 y Scorza, 2016) también reportan beneficios de implementar tareas de final abierto. Martínez (2020) da cuenta que las tareas de final abierto permiten atender las individualidades de los estudiantes para que ellos trabajen según sus conocimientos. En la investigación de Scorza (2016) se contribuyó en que docentes formadores conocieran la implementación y además diseñaran tareas de final abierto, pero observó que, en algunos casos, se pusieron en juego las estrategias de una tarea estándar, pues los profesores se centraron en aplicar conceptos específicos. A pesar de ello, los profesores reconocieron la potencialidad de las tareas de final abierto. Entre las conclusiones de Scorza (2016) se propuso atender con especial cuidado la planificación de las actividades antes de llevarlas a la clase para optimizar su uso.

En este artículo se reporta una experiencia de enseñanza en la que se implementa una tarea de final abierto al enseñar un tema matemático. La experiencia fue realizada en una Institución pública de Montevideo-Uruguay en un grupo de 6° año de Educación Secundaria de bachillerato de Ingeniería durante el año 2019 por una profesora (la autora de este artículo).

A continuación, el artículo se desarrolla a partir de identificar algunas dificultades al enseñar el tema parábola, luego se incluye el enunciado de la tarea de final abierto y el análisis a priori realizado por la profesora. Se continúa con la implementación del problema en el aula y el reporte de las diferentes soluciones propuestas por los estudiantes. Finaliza con las conclusiones de la experiencia áulica.

2 Enseñanza y aprendizaje de la parábola en bachillerato

Diversas investigaciones identifican que el aprendizaje de la geometría analítica no debería ser memorístico, ni restringirse a la repetición de procedimientos. López y Bermúdez (2012) y López et al. (2013) reportaron que los estudiantes tienen dificultades para apropiarse de los conceptos e interiorizarlos cuando solo repiten procedimientos en forma mecanizada para resolver ejercicios. Por su parte, Ruiz (2014) identificó que se presentan dificultades en la resolución algebraica para obtener la ecuación canónica de una parábola y en la trasposición entre la representación analítica y su representación gráfica. Para facilitar la conversión hacia el registro gráfico y hacer partícipes a los estudiantes se incluyó softwares de geometría dinámica. Asimismo, Sánchez (2019) identificó que los estudiantes desconocen las propiedades métricas de la parábola y, por ello, propuso coordinar la representación gráfica, algebraica y verbal de una parábola para que los estudiantes logren apropiarse de los conceptos matemáticos. En la investigación de Sánchez (2019) se detectaron dificultades de los estudiantes al factorizar y resolver ecuaciones. Por otro lado, también se encontraron problemas al realizar conversiones desde el registro gráfico hacia el registro algebraico. En particular, algunos estudiantes no asociaron la representación gráfica de la parábola con su ecuación canónica.

El aprendizaje del tema parábola se vincula con los diferentes registros de este concepto. Duval (1999) propuso que existe una estrecha relación entre las representaciones semióticas y las representaciones mentales que desarrolla el estudiante, éstas posibilitan la realización de las actividades matemáticas. Sugiere que es necesario profundizar en cada registro de representación (lenguaje común, figural, algebraico y aritmético) de un concepto matemático, como también en la conversión entre los diferentes registros de representación.

3 Objetivo

Con base en las dificultades que se identificaron en el aprendizaje del tema parábola se piensa que la experiencia áulica que se presenta podría contribuir en promover el diseño de problemas que se resuelven utilizando diferentes estrategias. Sumado a ello, la inclusión de problemas de final abierto fomenta la movilización de diversos conocimientos con el fin de encontrar una estrategia para su resolución.

Objetivo general de la experiencia áulica:

- Resolver un problema de final abierto que involucre conocimientos analíticos y gráficos de parábolas con estudiantes de 17-18 años y utilizar distintas estrategias para su resolución.

Objetivos específicos:

- Promover la expresión oral y escrita junto con la argumentación al resolver un problema matemático.
- Fomentar el diálogo, la escucha y el trabajo colaborativo entre estudiantes.
- Utilizar softwares de geometría dinámica para analizar posiciones relativas entre rectas y parábolas.

4 Enunciado de una tarea tradicional y su transformación a tarea de final abierto

Una tarea tradicional, con una única solución, puede ser transformada en una tarea de final abierto si se realizan pequeñas modificaciones en su enunciado. A continuación, se muestra en la Tabla 2, del lado izquierdo, la tarea tradicional y, del lado derecho, la tarea de final abierto que se implementó en la experiencia de enseñanza que se reporta.

Tarea estándar	Tarea de final abierto
Se considera la parábola P y el haz de rectas (H_k) cuyas ecuaciones son: P) y = $\frac{1}{2}x^2 + 3x + 1$ H_k) y =$5x + k$ Hallar la condición que debe cumplir el parámetro real “k” para que la recta del haz H_k) sea: a) Tangente a la parábola. b) Secante a la parábola.	Se considera la parábola P cuya ecuación es: P) y = $\frac{1}{2}x^2 + 3x + 1$ Hallar la ecuación de una recta: a) Tangente a la parábola. b) Secante a la parábola. Explique su razonamiento

Tabla 2. Tarea estándar y tarea de final abierto utilizada en la clase. Fuente: creación propia con base en el texto de Zaslavsky (1995).

La incertidumbre que puede provocar la implementación de tareas de final abierto, frente a la diversidad de razonamientos que surgen en el aula, hace necesario que el profesor anticipe qué va a ocurrir o prever cómo puede desarrollarse la actividad antes de aplicarla. Al respecto, la Teoría de las Situaciones Didácticas (Brousseau, 1986) ofrece algunas recomendaciones que debería considerar un profesor. Brousseau sugiere realizar un análisis a priori para que el profesor pueda asegurar los medios efectivos para la adquisición de los conocimientos, desenvolverse con mayor soltura y seguridad. Seguidamente, propone realizar el análisis a posteriori para rever los sucesos ocurridos en la clase y prever nuevas acciones. En forma complementaria, se retoma la metodología de la Ingeniería Didáctica (Artigue et al., 1991) de elaborar el análisis a priori para identificar los posibles sucesos que pueden desarrollarse en el aula asociados a la variación de las variables didácticas que intervienen en la situación didáctica y los diferentes abordajes que se podrían presentar. Luego de realizada la implementación de la clase, Artigue et al. (1991) proponen pensar el análisis a posteriori con el objetivo de confrontar lo que se tenía previsto hacer en el aula (el análisis a priori) y lo que realmente ocurrió. Esta confrontación se efectuará con la intención de incluir ajustes en las futuras acciones del profesor. Asimismo, el análisis a posteriori le permitirá al profesor realizar modificaciones en su planificación para mejorar, en futuras instancias, su rol al aplicar la misma situación didáctica.

A continuación, se detalla el análisis a priori de la implementación de la tarea de final abierto.

5 Análisis a priori de la tarea de final abierto

Para contextualizar, la experiencia que se comparte corresponde a un curso de geometría analítica que había comenzado hace dos meses, la profesora ya había enseñado el tema circunferencia. En el momento que se realiza la implementación de la tarea de final abierto se estaba trabajando con parábolas. Los estudiantes ya conocían la ecuación analítica de una recta, su ecuación explícita, haces de rectas paralelas y haces de rectas secantes. Hasta el momento, los estudiantes habían llegado a aprender la ecuación analítica de una parábola y se demostró, también, la equivalencia entre la ecuación polar de la parábola y la tangente cuando el punto pertenece a la parábola. A su vez, se trabajó con la ecuación analítica de una circunferencia y con un método analítico para identificar las diferentes posiciones de una recta respecto de una circunferencia. La tarea de final abierto fue implementada con el fin de involucrar diferentes conocimientos previos (trabajados en los temas de recta, circunferencia y parábola) con el fin de hallar ecuaciones de rectas secantes o de la recta tangente en un punto a una parábola dada. Además, se consideró que cada una de las partes de la tarea de final abierto podría ser resuelta por diferentes métodos, obteniendo múltiples soluciones.

Comencemos con anticipar que podría ocurrir en cada parte de la tarea de final abierto.

5.1 Análisis a priori de los posibles planteos que pueden surgir en el aula para la parte a) de la tarea de final abierto

En este apartado se plantean las posibles soluciones que la profesora pensó que podrían proponer sus estudiantes. El análisis a priori le permitió a la profesora identificar diferentes caminos de abordaje a la tarea propuesta y disminuir las situaciones de contingencia que se le presentarían al implementar la tarea de final abierto. De esta forma, la profesora pudo gestionar con mayor seguridad su clase.

A continuación, se plantean diferentes razonamientos para resolver la parte a) de la tarea de final abierto.

5.1.1 Recta tangente a la parábola: un primer razonamiento

Se recuerda que la tarea de final abierto pide escribir la ecuación de una recta tangente a la parábola ***P***, de la cual se conoce su ecuación: ***P)*** $y = \frac{1}{2}x^2 + 3x + 1$

Para hallar la recta tangente el estudiante podrá identificar un punto de la parábola y luego averiguar la ecuación desdoblada. A continuación, se plantea una posible respuesta que podría presentar un estudiante.

El estudiante podrá elegir un valor cualquiera para la abscisa de un punto A y averiguar su ordenada al sustituirla en la ecuación de la parábola. Por ejemplo, si x_A=*2* al sustituir en la ecuación de la parábola ***P*** se obtiene la ordenada del punto A: $y_A = \frac{1}{2}2^2 + 3.(2) + 1$ por lo tanto A (2; 9) es un punto de la Parábola. Un posible camino que podría considerar un estudiante, para obtener la ecuación de la tangente en el punto A, es utilizar la ecuación polar de la parábola en un punto de ella.

En la Tabla 3 se muestran las sustituciones para obtener la ecuación de la recta polar de la parábola respecto de un punto A(x_A, y_A).

Valor de la variable	Sustitución para obtener la ecuación de la polar
x^2	$x.x_A$
x	$\frac{x+x_A}{2}$
y^2	$y.y_A$
y	$\frac{y+y_A}{2}$

Tabla 3. Sustituciones para obtener la ecuación de la polar de una cónica.

A partir de las sustituciones planteadas en la Tabla 3 el estudiante podrá escribir la ecuación polar de la parábola en el punto A de coordenadas (2; 9) y obtener la ecuación de la tangente en A. La ecuación general de la parábola ***P)*** con eje paralelo a Oy y la ecuación de la polar en el punto A [que notaremos: $polar_A$] son las siguientes:

P) $y = a.x^2 + bx + c$ $\quad\quad$ $polar_A)\ \frac{y+y_A}{2} = a.x.x_A + b\left(\frac{x+x_A}{2}\right)^2 + c$

En el caso particular de la tarea de final abierto:

P) $y = \frac{1}{2}x^2 + 3x + 1$ $\quad\quad$ $polar_{(2;9)})\ \frac{y+9}{2} = \frac{1}{2}x.(2) + 3\frac{(x+2)}{2} + 1$

Por lo tanto, la ecuación de la tangente en el punto A(2; 9) es tg_A) $y = 5x - 1$. Cabe considerar que el estudiante podría hacer el mismo razonamiento al utilizar las coordenadas de cualquier otro punto de la parábola.

En resumen, un primer razonamiento incluye que el estudiante obtenga:

1) las coordenadas de un punto A de la parábola,
2) la ecuación polar de la parábola en A.

En la puesta en común de este primer razonamiento será necesario recordar a los estudiantes la relación que se presenta entre la ecuación de la polar de la parábola en un punto de ella y la ecuación de la tangente.

En la figura 1 se incluye la representación gráfica de la ecuación de la tangente en A. Téngase en cuenta que el alumno podría haber elegido cualquier valor de x y haber obtenido, por este primer método, la ecuación de otra tangente a la parábola (también solución correcta del problema). El software GeoGebra permitirá visualizar si la recta obtenida es tangente y analizar otras posibles soluciones. Si se proyecta en la pared se observará, en simultáneo con la resolución analítica, la vista gráfica y la vista algebraica de GeoGebra.

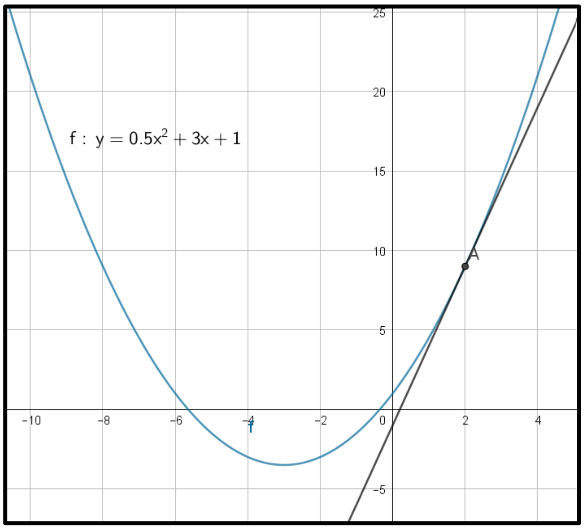

Figura 1. Representación gráfica de un primer razonamiento para hallar la ecuación de la tangente en A.

5.1.2 Recta tangente a la parábola: un segundo razonamiento posible

A continuación, se presenta un segundo razonamiento, que podría surgir, para plantear la ecuación de una tangente a la parábola. El estudiante podría identificar que un caso particular de recta tangente a la parábola es la podaria (tangente en el vértice de la parábola). Para encontrar la ecuación averigua las coordenadas del vértice y luego plantea la ecuación buscada.

En este caso, se podrá hallar la abscisa del vértice de la parábola de dos maneras diferentes: hallando la semisuma de las raíces de la función ***f***(x)= $\frac{1}{2}$ x^2+3x+1 o, en su defecto, utilizando la fórmula del vértice V. En el caso particular de la tarea propuesta, la parábola tiene eje de simetría paralelo a $\boldsymbol{Oy}$ y el vértice tiene las siguientes coordenadas V$\left(\frac{-b}{2a};\ a\left(\frac{-b}{2a}\right)^2+b\left(\frac{-b}{2a}\right)+c\right)$ ya que la ecuación de la parábola es ***P)*** y=ax^2+bx+c

El vértice obtenido es: V(-3; -3,5). La podaria, en este caso, es una recta horizontal cuya ecuación es: t_V) y= -3,5. En plenario se visualizará la representación gráfica con el software GeoGebra. En la figura 2 se muestra la representación gráfica de la parábola y la recta tangente en el vértice (podaría de la parábola).

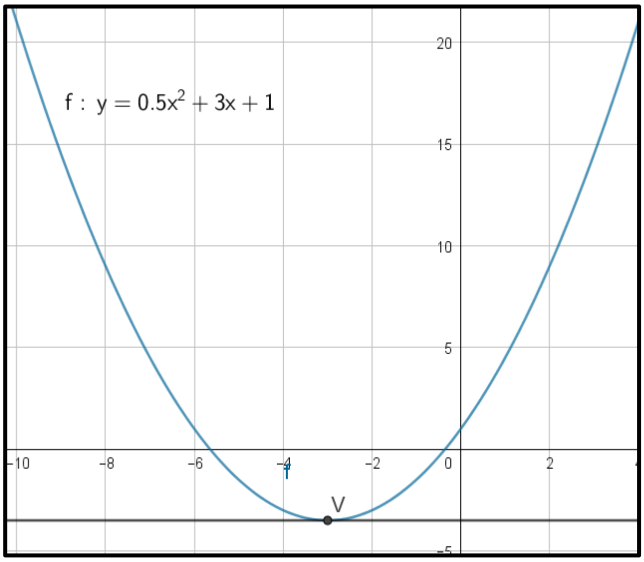

Figura 2. Una tangente particular de la parábola: la podaria.

A continuación, se presenta un tercer razonamiento que podría surgir en la clase.

5.1.3 Recta tangente a la parábola: tercer razonamiento posible

En un tercer razonamiento el estudiante podría asociar el concepto de función derivada con el de coeficiente angular de la recta tangente. Primero tendría que identificar un punto A de la parábola y utilizar la función derivada. Luego, averiguar el valor numérico de la derivada en la abscisa del punto A, para obtener el valor del coeficiente angular de la recta tangente en A. Finalmente, plantear la ecuación de la tangente a partir de conocer el coeficiente angular y un punto de ella.

Un ejemplo de resolución consistiría en elegir un punto de la parábola a partir de un valor de "x" y sustituirlo en la ecuación de la parábola. Por ejemplo, si el punto de la parábola es A(2; 9) el estudiante planteará la ecuación de la parábola ***P)*** y = $\frac{1}{2}$ x^2+3x+1 como la función ***f(***x***)=*** $\frac{1}{2}$ x^2+3x+1 y averiguará la función derivada obteniendo: $\boldsymbol{f'(x)}$**=** $\frac{1}{2}.2x+3$

Al agrupar los términos semejantes obtendrá que la función derivada es: $f'(x) = x + 3$.

El valor numérico de la función derivada para *x*=2 es el coeficiente angular de la tangente en A (se denominará: m). Es decir: $f'(2)$= 2 + 3, por lo tanto *f´(*2***)=***5=m. A partir de conocer el valor del coeficiente angular de la recta tangente a la parábola en A (m=5), será posible hallar la ecuación de la tangente. Un posible camino es tener en cuenta que la ecuación de una recta puede escribirse como $y-y_A=m(x-x_A)$. Al sustituir en la ecuación anterior m, x_A e y_A se obtendrá la ecuación de la tangente a la parábola en el punto A(2; 9). Es decir, la ecuación de la tangente será: $tg._A$) *y-9=5(x-2),* que al agrupar términos es $tg._A$) *y=5x-1* (representada gráficamente en la figura 1).

5.1.4 Recta tangente a la parábola: cuarto razonamiento posible

En otro razonamiento posible, el estudiante podría averiguar las coordenadas de un punto A de la parábola y luego utilizar un método general para hallar la ecuación de la tangente. Podría comenzar por realizar la intersección de un haz de rectas de centro A con la parábola y, luego, plantear cuál es la condición para que la solución de dicho sistema sea única. A continuación, se desarrolla la resolución.

a) Identifica las coordenadas del punto A(2; 9) (por el método ya explicado en la sección 5.1.1).
b) Plantea la ecuación de un haz de rectas con centro A. Por lo tanto, la ecuación del haz será: ***r_k***) y-9=k(x-2) siendo k un parámetro real.
c) Se realiza la intersección entre el haz de rectas ***r_k*** y la parábola ***P***.

$$\begin{cases} r_k)\ y-9=k(x-2) \\ P)\ y=\frac{1}{2}x^2+3x+1 \end{cases}$$

d) Impone la condición de tangencia para que el sistema anterior tenga una sola solución, esto quiere decir para que la recta ***r_k*** sea tangente a la parábola.

$$\begin{cases} r_k)\ y-9=k(x-2) \\ P)\ y=\frac{1}{2}x^2+3x+1 \end{cases}$$

Se despeja y en la primera ecuación y se sustituye en la segunda ecuación.

$$\begin{cases} y-9=k(x-2) \\ k(x-2)+9=\frac{1}{2}x^2+3x+1 \end{cases}$$

e) Luego, al desarrollar la segunda ecuación, se obtiene una ecuación de grado 2 respecto de ***x***.

$$\begin{cases} y-9=k(x-2) \\ \frac{1}{2}x^2+(3-k)x-8+2k=0 \end{cases}$$

Considerando que la recta que se quiere hallar debe ser tangente a la parábola se busca un valor de *k* para que el sistema tenga solución única. Para ello, la segunda ecuación solo podrá tener una raíz real doble. Es decir, la condición para obtener k es que el discriminante de la segunda ecuación sea 0. Por lo tanto, deberá cumplirse que $(3-k)^2-4.\frac{1}{2}.(-8+2k)=0$ o sea que $k^2-10k+25=0$. Esto implica que *k*=5.

Con el valor de k obtenido se sustituye en la ecuación del haz de rectas ***r_k)*** y-9=k(x-2) y se obtiene la ecuación de la tangente buscada.

Para m=5 se obtiene ***r₅)*** y-9=5(x-2). Es decir que la ecuación de la tangente en A es: tg_A) y=5x-1.

5.2 Análisis a priori de los posibles planteos que realizarían los estudiantes para la parte b) de la tarea de final abierto

En este apartado se realiza un análisis a priori con posibles respuestas que se podrían presentar en la parte b) de la tarea de final abierto. Recordamos que el enunciado de la tarea de final abierto pedía hallar la ecuación de una recta secante a la parábola ***P*** cuya ecuación es **P**) $y = \frac{1}{2}x^2 + 3x + 1$.

5.2.1 Recta secante a la parábola: un primer razonamiento

El estudiante podría comenzar por averiguar las coordenadas de dos puntos de la parábola a partir de elegir dos valores cualesquiera para las abscisas. Luego, plantear la ecuación de una recta a partir de las coordenadas de dos puntos.

Por ejemplo: si los dos puntos de la parábola son: A(2; 9) y V(-3; -3,5) el estudiante podrá plantear que la ecuación de una recta secante se obtiene utilizando la ecuación de la recta *g*) $y - \mathrm{y_A} = \frac{\mathrm{y_A - y_V}}{\mathrm{x_A - x_V}}(x - x_A)$. En dicho caso, se obtendrá que una solución de la parte b) es la recta *g* cuya ecuación es: ***g)*** y=2,5 x+4. La recta *g* se representó gráficamente en la figura 3.

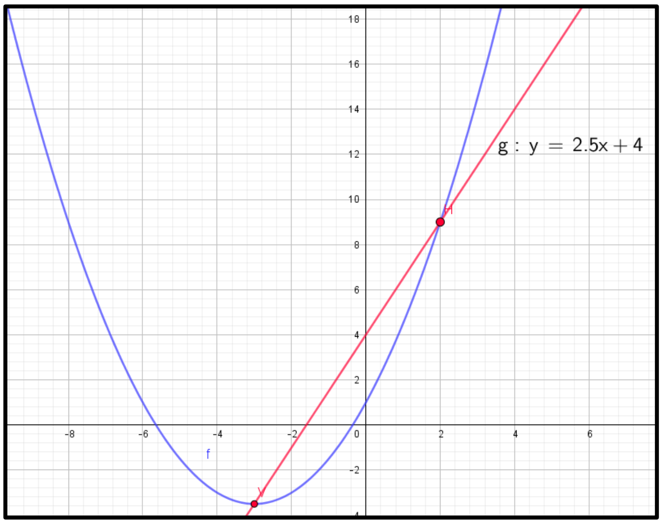

Figura 3. Secante a la parábola: un primer razonamiento.

5.2.2 Recta secante a la parábola: un segundo razonamiento

Los estudiantes podrían haber considerado el haz de rectas (con centro en un punto de la parábola) propuesto en el punto 5.1.4 y pensar cuál debería ser la condición para que la recta escrita en función de k (número real) sea secante a la parábola.

$$\begin{cases} r_k)\ y-9=k(x-2) \\ P)\ y = \frac{1}{2}x^2+3x+1 \end{cases}$$

Esta condición podrían inferirla luego de comenzar a resolver el sistema y al darse cuenta de que se obtendrá (al restar las ecuaciones de la recta y la parábola) una ecuación (Ec. II***)*** de grado 2 en ***x*** con el parámetro ***k***.

$$\begin{cases} y-9=k(x-2) \\ \frac{1}{2}x^2+(3-k)x-8+2k=0 \quad \text{(Ec. II)} \end{cases}$$

La condición para hallar los valores de k, que cumplen que las rectas $\boldsymbol{r_k}$ son secantes a la parábola, surgirá de identificar cuándo la Ec.II tiene dos raíces reales distintas. Esta condición aparecerá al plantear el discriminante mayor a 0 de la Ec.II.

Es decir, deberá cumplirse: $(3-k)^2-4.\frac{1}{2}.(-8+2k)>0,$ esto equivale a: $k^2-10k+25>0$. La inecuación anterior factorizada es $(k-5)^2>0$. Para encontrar una solución bastaría encontrar un valor de k que verifique la inecuación y sustituir dicho valor en la ecuación de $\boldsymbol{r_k}$.

Se concluye que cualquier valor de k diferente a 5 verifica la inecuación y permite obtener la ecuación de una recta $\boldsymbol{r_k}$ secante a la parábola ***P***. En la figura 4 se representaron tres posibles rectas secantes a la parábola: si k=0 se obtiene $\boldsymbol{r_0}$) y=9, si k=1 la recta del haz es $\boldsymbol{r_1}$)y=x+7 y para k=2 la recta del haz es $\boldsymbol{r_2}$)y=2x+5.

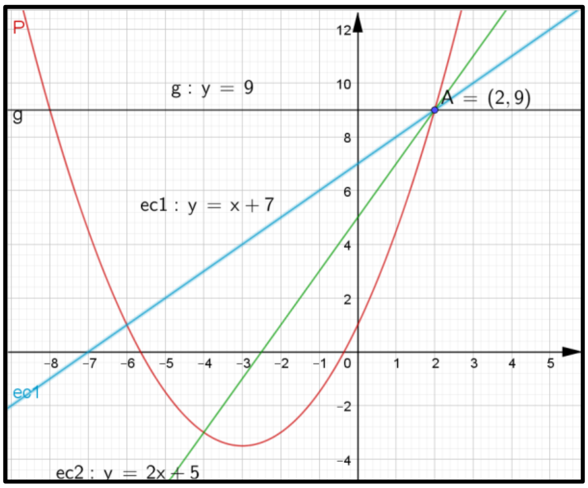

Figura 4. Tres posibles rectas secantes por el punto A(2; 9)

5.2.3 Recta secante a la parábola: un tercer razonamiento

Los estudiantes podrían proponer la ecuación de un haz de rectas paralelas a partir de elegir un valor específico para el coeficiente angular (por ejemplo, el haz de rectas de ecuación: y=3x+h) y analizar cuál es la condición para que cada recta del haz sea secante a la parábola ***P*** (de ecuación) $y=\frac{1}{2}x^2+3x+1$), resolviendo el sistema en forma similar al apartado 5.2.2. Para responder a la parte b) alcanzará con encontrar la ecuación de una recta secante a la parábola. Puede utilizarse el software GeoGebra e investigar algún posible valor del parámetro o elemento del haz de rectas. Por ejemplo, la ecuación y=3x+14 es secante a la parábola (figura 5 y 6).

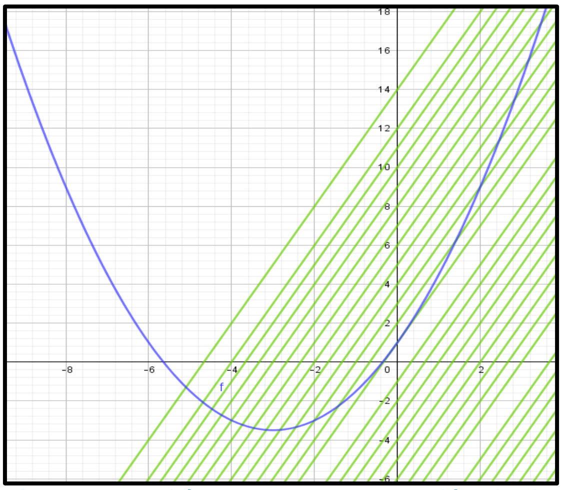

Figura 5. Podrían plantear la ecuación del haz de rectas paralelas y=3x+h y luego analizar qué condición debería cumplir "h" para que la recta del haz sea secante a la parábola

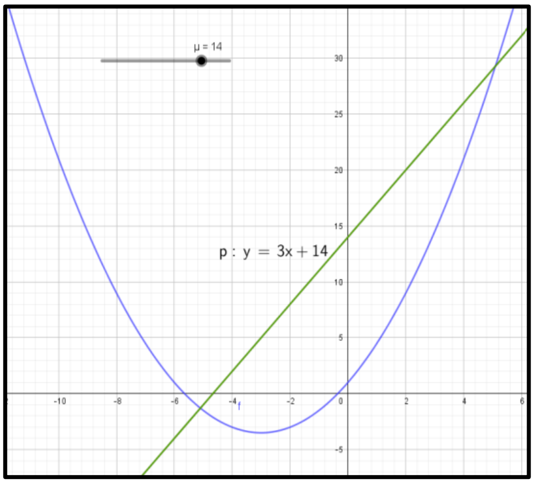

Figura 6. Una posible solución, la recta de ecuación es y=3x+14, un elemento del haz de rectas paralelas que corresponde a una recta secante a la parábola.

6 Implementación de la tarea de final abierto en el aula

La clase que se reporta se implementó en 90 minutos. La metodología de trabajo utilizada fue: entregar el enunciado de la actividad en fotocopias (5 minutos) y conformar subgrupos de trabajo de tres estudiantes para resolver la parte a) (5 minutos). Los equipos pensaron la resolución, mientras la profesora recorrió la clase y fue observando los razonamientos y discusiones de los estudiantes (15 minutos). Luego se socializaron las respuestas de la parte a) (25 minutos). Inmediatamente se propuso la parte b) y se repitió la metodología de trabajo utilizada para la parte a). Para finalizar se realizó un cierre de clase (10 minutos) con el objetivo que los estudiantes analicen los beneficios de haber trabajado con una tarea de final abierto y además se les preguntó si alguna vez habían resuelto alguna actividad similar.

Los recursos que disponía la profesora fueron: dos pizarrones, un proyector, una computadora con el software de geometría dinámica GeoGebra y un teclado inalámbrico. Estos permitirían compartir y visualizar, en forma colectiva, los diferentes razonamientos que fueran aportando los subgrupos de trabajo. El teclado inalámbrico sería utilizado por los alumnos para mostrar a sus compañeros sus razonamientos cuando pasaran al pizarrón. Asimismo, algunos alumnos ya tenían descargada la aplicación de GeoGebra en sus celulares. La estrategia de la profesora fue observar el trabajo de cada subgrupo, tratando de intervenir solo a requerimiento de los estudiantes, promoviendo que los propios estudiantes descubrieran posibles formas de resolución. En simultáneo, la profesora registró en qué orden organizaría las intervenciones para que se visualizaran primero razonamientos más simples y luego otros más complejos.

En este apartado se desarrollan algunos de los acontecimientos ocurridos en el aula al proponer y al resolver la parte a) y la parte b) de la tarea de final-abierto propuesta en la Tabla 2.

En la primera parte, en que los estudiantes tienen que hallar la ecuación de una tangente a la parábola ***P***) y= $\frac{1}{2}$ x^2 +3x+1, surgió como primera pregunta si podían trabajar con rectas horizontales. La profesora pidió que lo decidieran a partir de releer el enunciado de la tarea y que justificaran su decisión. Otro de los subgrupos preguntó en el caso de considerar un haz de rectas, ¿cómo podrían hacerlo si el enunciado de la actividad no especificaba las coordenadas de un punto? A lo cual se les contestó que ellos determinen las coordenadas de un punto, trabajen con un único parámetro y con las restricciones que indica la actividad propuesta. En realidad, estaban sorprendidos de ser ellos quienes tuvieran la libertad de seleccionar el método de resolución y, además, buscar un camino para obtener las coordenadas de un punto de la parábola.

La profesora aclaró que habría varios caminos de resolución y múltiples soluciones, entre los integrantes de cada subgrupo deberían acordar el criterio a utilizar y su justificación. Hubo cinco subgrupos que realizaron las presentaciones de sus trabajos. A continuación, se resume el razonamiento utilizado por cada uno de ellos.

6.1 Resolución del problema realizada por el subgrupo 1

A continuación, se presentan dos apartados que detallan la resolución que realizó el subgrupo 1.

6.1.1 Parte a) razonamiento utilizado para hallar la ecuación de una tangente a la parábola

Para averiguar una recta tangente este subgrupo pensó en hallar la podaria y preguntó a la profesora si esta solución era válida. Primero identificaron las coordenadas del vértice ***V*** (-2; $-\frac{7}{2}$) y se propusieron hallar la ecuación de la tangente en el vértice. El subgrupo1 tuvo en cuenta que una tangente particular de la parábola es la podaria (en este caso es una recta horizontal). La recta se escribió analíticamente y se obtuvo su ecuación: *tg.**)*** y= $-\frac{7}{2}$

En la figura 7 puede observarse que el razonamiento propuesto por el subgrupo 1 coincide con el segundo razonamiento a priori previsto por la profesora (ver apartado 5.1.2). Los estudiantes primero identificaron las coordenadas del vértice de la parábola y luego averiguaron la ecuación de la recta tangente en el vértice.

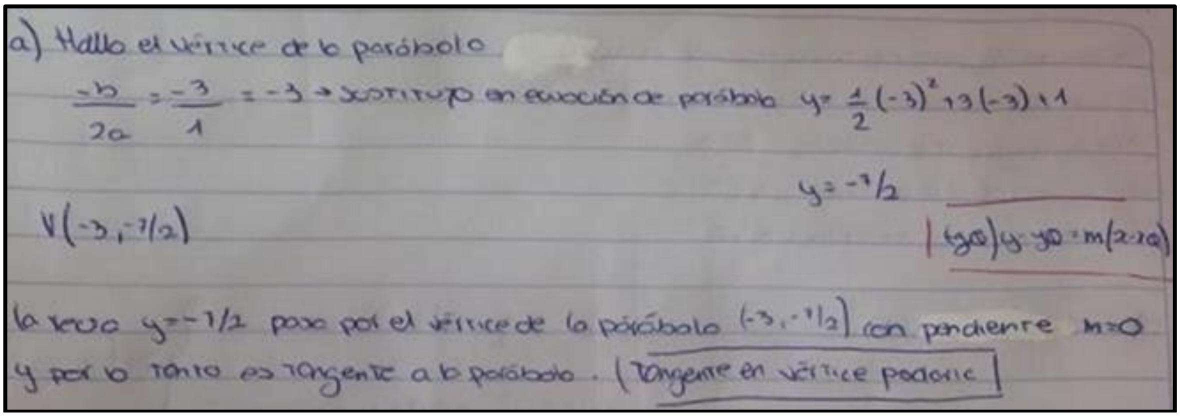
a) Hallo el vértice de la parábola
$\frac{-b}{2a} = \frac{-3}{1} = -3$ → sustituyo en ecuación de parábola $y = \frac{1}{2}(-3)^2 + 3(-3) + 1$
$y = -7/2$
$V(-3, -7/2)$
(x_0, y_0) $y - y_0 = m(x - x_0)$
la recta $y = -7/2$ pasa por el vértice de la parábola $(-3, -7/2)$ con pendiente $m=0$
y por lo tanto es tangente a la parábola. (Tangente en vértice podaria)

Figura 7. Resolución de la actividad realizada por la estudiante utilizando la ecuación de la recta por un punto con pendiente m=0

Respecto a esta primera parte, los estudiantes manifestaron sentirse sorprendidos que fuera válida esta respuesta pues consideraron que era muy sencilla. La profesora los alentó a pensar otro razonamiento.

6.1.2 Parte b) razonamiento utilizado para hallar la ecuación de una recta secante a la parábola

El subgrupo 1 realizó en GeoGebra la representación gráfica de la recta ***r***) de ecuación ***r***) y=k e identificó que si k>-3,5 la recta ***r***) cumplirá la condición de ser secante a la parábola ya que la parábola tiene concavidad positiva y eje paralelo a *Oy*. Una de las rectas que propusieron fue la de ecuación ***r***) $y = 2$ la cual cumple la condición anteriormente mencionada para el valor k=2. Argumentaron que, para que la recta sea secante, k debe ser un número real mayor que la ordenada del vértice de la parábola. En la figura 8 puede verse el bosquejo y las ecuaciones de las rectas planteadas.

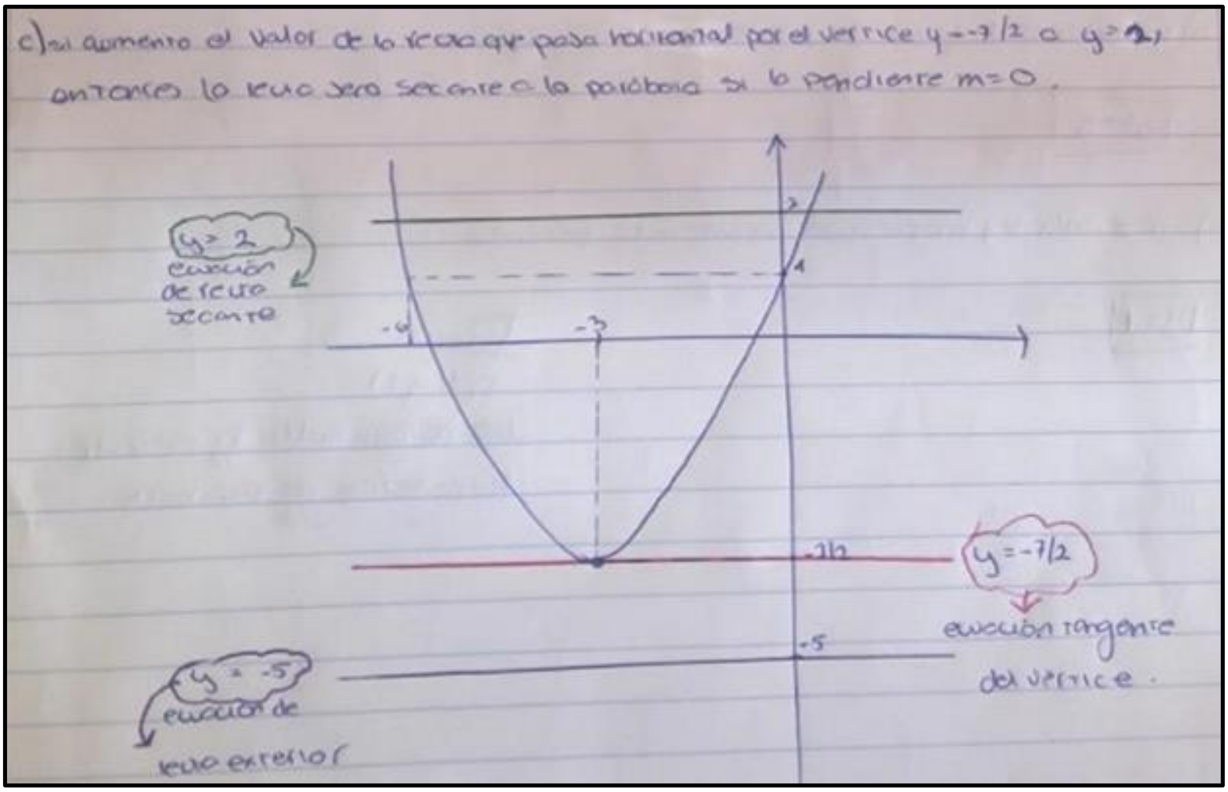

Figura 8. Resolución de la actividad utilizando un haz de rectas paralelas con la misma dirección que la podaria de la parábola

6.2 Resolución del problema realizada por el subgrupo 2

Un segundo subgrupo propuso plantear un haz de rectas paralelas cuya pendiente sea m=4, el valor de la pendiente lo eligieron en forma arbitraria, por lo tanto, el haz de rectas fue ***r***$_n$***)*** $y = 4x + n$ siendo "n" un parámetro real.

Luego escribieron el sistema de ecuaciones generado por la ecuación de la parábola ***P)*** y del haz de rectas ***r***$_n$) $y = 4x + n$.

$$\begin{cases} y = 4x + n \\ y = \frac{1}{2}x^2 + 3x + 1 \end{cases}$$

La resolución del sistema tuvo la intención de encontrar puntos comunes entre la parábola ***P)*** y la recta ***r_n)***. Durante la resolución del sistema, al igualar las dos ecuaciones, surgió una ecuación de grado 2 que ordenaron según x. Luego plantearon su discriminante imponiendo la condición de tener dos raíces (discriminante mayor a 0).

El sistema anterior es equivalente al siguiente sistema (SII)

$$\begin{cases} r_n)\ y = 4x + n \\ 4x + n = \frac{1}{2}x^2 + 3x + 1 \end{cases}$$

Lo que es equivalente a plantear que:

$$\begin{cases} y = 4x + n \\ \frac{1}{2}x^2 - x + (1 - n) = 0 \quad \text{(Ecuación II)} \end{cases}$$

Los estudiantes identificaron que, cuando la recta ***r_n***) sea secante a la parábola, la Ecuación II de segundo grado en x debería tener dos raíces (en función de "n"). Por ello, plantearon el discriminante de esa ecuación:

$$\Delta = 1 - 4\left(\frac{1}{2}\right)(1 - n)$$

A partir del Δ pudieron obtener una condición para que la recta sea secante, otra condición para el caso en que r) sea tangente y una tercera condición para que la recta r) sea exterior a la parábola. Este razonamiento permitió plantean las rectas soluciones de cada una de las partes del problema.

Para el caso en que r) es tangente a la parábola deberá haber una solución del sistema de ecuaciones. En este caso se planteó que:

$$\Delta = 1 - 4\left(\frac{1}{2}\right)(1 - n) = 0$$

Al resolver la ecuación anterior obtuvieron el valor del parámetro "n":

$1 - 2(1 - n) = 0$ por lo tanto $-1 + 2n = 0$ por lo que se obtiene que $n = \frac{1}{2}$.

La ecuación de la recta tangente a la parábola surgió al sustituir el valor de n en la ecuación de la recta $r_n)$ $y = 4x + n$. Luego obtuvieron la ecuación $r_{\frac{1}{2}})$ $y = 4x + \frac{1}{2}$

Los estudiantes utilizaron el software GeoGebra para proyectar y mostrar a sus compañeros gráficamente la representación de la parábola y de la recta obtenida.

La resolución realizada por los estudiantes puede observarse en la figura 9.

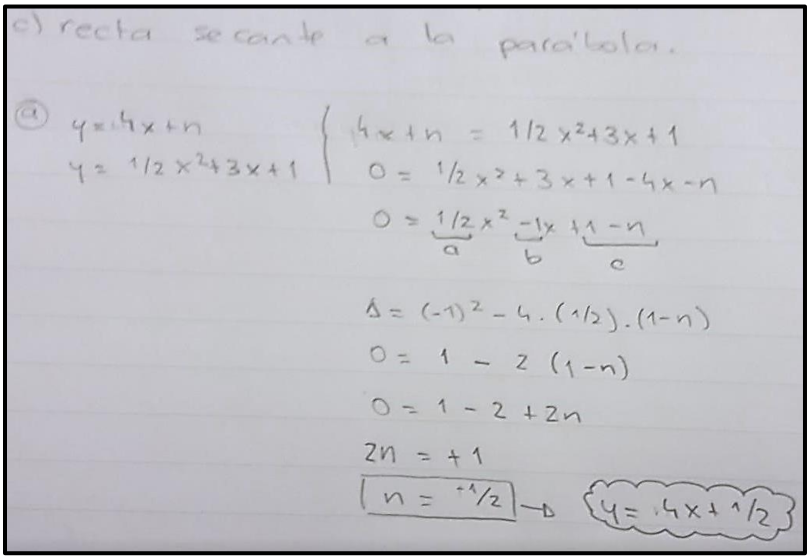

Figura 9. R resolución de la actividad utilizando haz de rectas paralelas cuyo coeficiente angular es 4. Fuente: elaboración del subgrupo 2.

Al culminar esta resolución la profesora preguntó a los estudiantes si podrían haber planteado otro haz de rectas paralelas para que reflexionaran sobre esto.

6.3 Resolución presentada por el subgrupo 3

Un tercer subgrupo para resolver la parte a) (hallar la recta tangente a la parábola) decidió hallar la polar de la parábola respecto de un punto de ella. Luego, para resolver la parte b) averiguaron las coordenadas de un punto exterior a la parábola y plantearon la ecuación de la polar, obteniendo una recta secante a la parábola. En la figura 10 puede observarse la resolución de la parte b) que explicaron primero en el pizarrón y luego con GeoGebra.

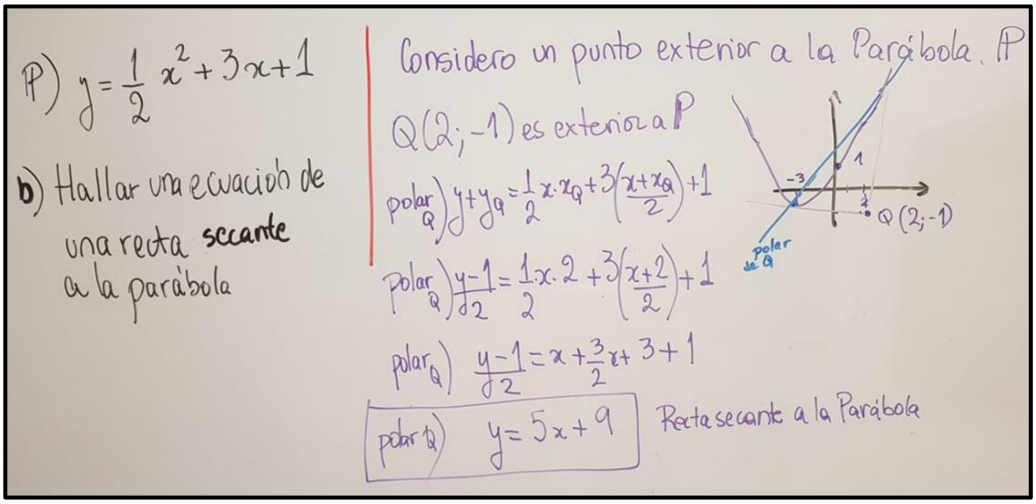

Figura 10. Resolución de la actividad utilizando la polar (ecuación desdoblada) de la parábola respecto del punto (2, -1). Fuente: elaboración del subgrupo 3.

6.4 Resolución del problema realizada por el subgrupo 4

Los estudiantes del subgrupo 4 plantearon un haz de rectas cuyo centro es un punto exterior a la parábola y luego averiguaron la condición para que la recta del haz sea tangente, exterior o secante. En las figuras 11 pueden observarse parte de la resolución realizada. Un estudiante realizó los trazados en el software, otro en el pizarrón y un tercer estudiante explicó la representación gráfica.

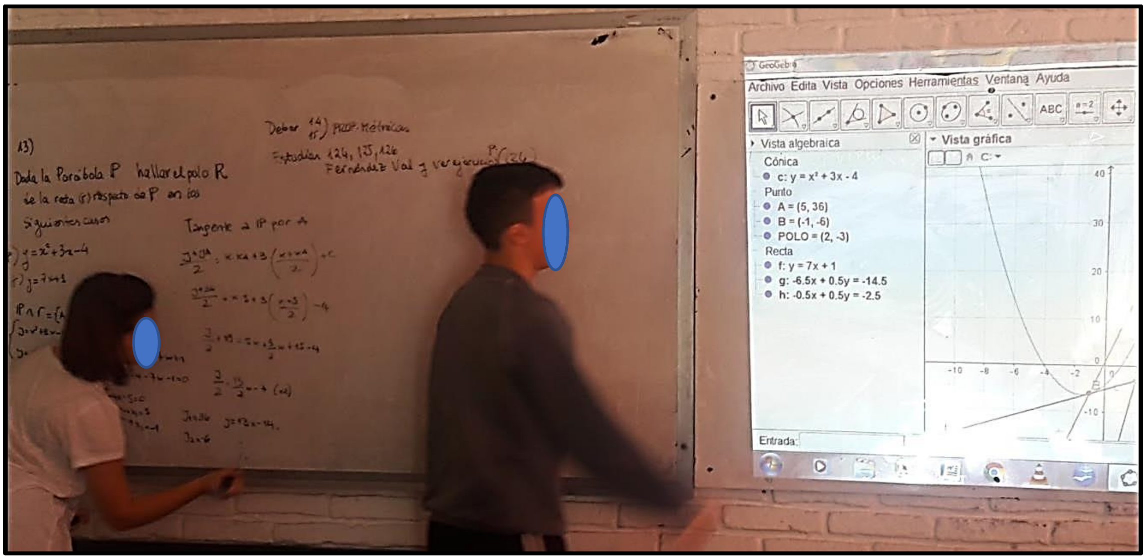

Figura 11. Estudiantes del subgrupo 4 proyectando el gráfico de la parábola y la recta secante obtenida.
Fuente: elaboración del subgrupo 4.

6.5 Resolución presentada por el subgrupo 5

El subgrupo 5 propuso para la parte a) el mismo razonamiento que el subgrupo 1. Sin embargo, para la parte b) al hallar la recta secante a la parábola los estudiantes de este subgrupo de trabajo propusieron escribir la ecuación de un haz de rectas cuyo centro fuera el foco de la parábola. Primero averiguaron las coordenadas del foco y luego escribieron la ecuación del haz de rectas que tiene centro el Foco (F) y coeficiente angular variable. A continuación, se escribe la ecuación del haz de rectas que utilizaron los estudiantes, con μ parámetro real:

$$H\mu\boldsymbol{)}\ y - y_F = \mu(x - x_F)$$

Como el foco de la parábola es ***F***(-3; -3) entonces $H\mu\boldsymbol{)}\ y + 3 = \mu(x + 3)$

Los estudiantes argumentaron que para cualquier valor real del parámetro μ obtendrán la ecuación de una recta secante a la parábola. Además, explicaron que el único caso que no serviría como recta secante en dos puntos es la recta vertical por el foco de la parábola, ya que en este caso la parábola tiene eje paralelo a Oy. Al escribir la ecuación del haz en su forma explícita no se incluye la ecuación de la recta vertical. Por lo tanto, cualquier número asignado a μ genera la ecuación de una recta secante a la parábola. En las figuras 12 y 13 se muestra la representación gráfica del planteo realizado.

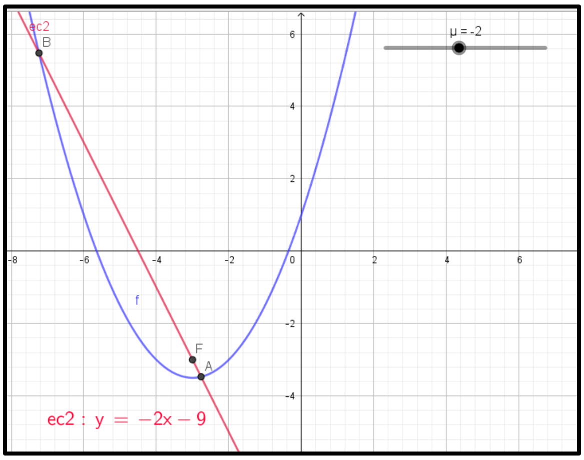

Figura 12. Representación gráfica de una recta del haz Hμ. Fuente: elaboración propia.

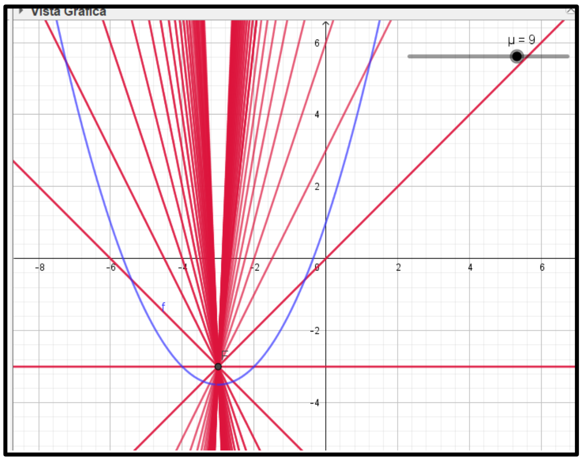

Figura 13. Representación gráfica de varias rectas del haz Hμ. Fuente: elaboración propia.

7 Resultados

El análisis de los resultados permitió inferir que los estudiantes realizaron un amplio recorrido por los conocimientos previos y seleccionaron diferentes caminos para llegar a la solución. Al comienzo de la clase, cuando la profesora planteó la propuesta, descolocó, un poco, a los estudiantes el hecho de no tener todos los datos para realizar la actividad. Luego que los estudiantes se dieron cuenta que podían optar por un procedimiento según sus conocimientos, respetando las condiciones de la tarea de final abierto, comenzaron a trabajar con mayor seguridad.

Cabe considerar que algún razonamiento anticipado por el profesor en forma a priori, como el de elegir las coordenadas de dos puntos de la parábola y luego escribir la ecuación de la recta que será secante a la parábola, no fue considerado por los estudiantes. Pero también, es importante mencionar que surgió un razonamiento diferente al previsto por la profesora. Un subgrupo de estudiantes planteó un haz de rectas secantes con centro el foco de la parábola e identificó que cada recta de dicho haz es secante a la parábola. A esta conclusión llegaron al darse cuenta de que el foco F es un punto interior de la parábola y que cualquier recta que contenga al Foco tendrá dos puntos en común con esta (con excepción del eje de la parábola que es secante a la parábola en su vértice).

8 Conclusiones

Luego de observar los diferentes razonamientos que surgieron en la clase queda visible el potencial de incluir tareas de final abierto en el aula de matemática. Si bien la mayoría de los posibles razonamientos habían sido anticipados por la profesora, en el último subgrupo, al realizar la parte b) se presentó un nuevo razonamiento no anticipado en forma a priori en la planificación. Este hecho muestra que algunas veces el profesor se enfrenta a situaciones que no había pensado con anterioridad. Por otro lado, la implementación de esta actividad sorprendió a los estudiantes y a la profesora por la diversidad de respuestas que se presentaron y evidenció la ejecución de diferentes conocimientos aprendidos por los estudiantes.

Los estudiantes, por su parte, manifestaron que les resultó novedoso haber realizado una tarea que tuviera diferentes caminos de resolución y comentaron que hasta el momento no se les había presentado una tarea similar. Ellos revelaron no haber realizado actividades con varios caminos de resolución o con la aplicación de diversos conocimientos para proporcionar diferentes respuestas a un mismo problema. La implementación de la actividad de final abierto les permitió conocer y enriquecerse por medio de los diferentes razonamientos realizados por los compañeros de clase.

El diseño de tareas abiertos y su resolución aportó una oportunidad de atención a la diversidad debido a que se presentaron y se dieron a conocer respuestas con diferentes grados de complejidad.

9 Agradecimientos

Se agradece al Prof. Antonio Martinón por los comentarios aportados para mejorar la escritura de este artículo. Estos fueron realizado en el marco del Taller de Escritura organizado por la Federación Iberoamericana de Sociedades de Educación Matemática (FISEM) y por la Universidad sin Fronteras (USF) en abril de 2022.

4. Referencias bibliográficas

Artigue, M.; Duoday, R.; Moreno, L. y Gómez, P. (1995). *Ingeniería didáctica en Educación Matemática. Un esquema para la investigación y la innovación en la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas.* Grupo Editorial Iberoamericana.

Brousseau, G. (1986). *Fundamentos y métodos de la didáctica de las matemáticas*. Universidad de Burdeos.

Duval, R. (1999). *Semiosis y pensamiento humano. Registros semióticos y aprendizajes intelectuales*. Editions scientifiques européennes

López, J., Aldana, E. y Alonso, A. (2013). Análisis de la comprensión del concepto parábola. *Respuestas, 18*(2), 74-79.

López, J., y Aldana, E. (2012). La comprensión del concepto parábola como una cónica. En Obando, Gilberto (Ed.), *Memorias del 13° Encuentro Colombiano de Matemática Educativa* (pp. 329-334). Medellín: Sello Editorial Universidad de Medellín.

Martínez, A. (2020). Las tareas de final abierto: su incidencia en el aprendizaje de la matemática. Departamento de Matemática. Consejo de Formación en Educación. Uruguay. http://repositorio.cfe.edu.uy/handle/123456789/1099?show=full

National Council of Teachers of mathematics. (NCTM). (2014). *De los principios a la acción. Para garantizar el éxito matemático de todos*. NCTM. Reston, Va.: NCTM.

Ruiz, J. F. (2014). *Una propuesta didáctica para la enseñanza de la parábola como lugar geométrico en el grado décimo de la institución educativa Luis López de Mesa del municipio de Medellín*. [Tesis para optar el título de Magister en

Enseñanza de las Ciencias Exactas y Naturales, Universidad Nacional de Colombia] https://repositorio.unal.edu.co/handle/unal/74931

Sánchez, L. (2019). *La comprensión de la parábola a través de las representaciones semióticas* [Tesis para optar el título de Magister en Educación Matemática, Universidad Pedagógica y Tecnológica de Colombia]. https://repositorio.uptc.edu.co/bitstream/001/2994/1/TGT_1615.pdf

Scorza, V. (2016). Las tareas de final abierto y su potencial para la enseñanza de la matemática en la formación de profesores. ANEP. https://bit.ly/3MNhuMW

Zaslavsky, O. (1995). Open-ended tasks as a trigger for mathematics teachers' professional development. *For the Learning of Mathematics, 15*(3), 15-20. https://www.jstor.org/stable/40248183

Elena Freire Gard. Es Profesora de Matemática. Magister en Ciencias en Matemática Educativa (Cicata-Legaria, México DF). Magister en Educación (2014, UNINI, México). Actualmente se desempeña como Profesora de Didáctica en el Instituto de Profesores Artigas de Montevideo- Uruguay. Departamento de Matemáticas. Consejo de Formación en Educación. Es estudiante de Doctorado en Matemática Educativa y Ciencias Aplicadas en el Centro de Investigaciones en Ciencias y Tecnología Avanzada. IPN. México.). efreire@docente.ceibal.edu.uy
https://orcid.org/0000-0003-1498-0903