REVISTA IBEROAMERICANA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA

ISSN: 1815-0640
Número 57. Diciembre 2019
Páginas 121-137

http://www.fisem.org/www/index.php
https://union.fespm.es/index.php/UNION

Matemática é criação ou descoberta? A importância dos Experimentos Mentais

Willian José da Cruz

Fecha de recepción: 11/07/2019
Fecha de aceptación: 20/01/2020

Resumen	¿Es la Matemática una creación o un descubrimiento? Este breve texto es parte de la investigación teórica en curso que tiene como propósito comprender los aspectos semióticos y el uso de Experimentos Mentales en la enseñanza y el aprendizaje de la Matemática. El objetivo es presentar una visión teórica sobre el papel de la Matemática como creación o descubrimiento, comenzando con aspectos filosóficos, pasando a continuación por la Educación Matemática y la Historia de la Matemática, resaltando la importancia de los Experimentos Mentales en la enseñanza de esta ciencia. Asumimos que los Experimentos Mentales son formas realizadas por el sujeto cognitivo, que coloca el propio pensamiento conforme a un contexto previamente establecido. Tal pensamiento es el objeto considerado, estudiado por medio de una representación. **Palabras clave:** Educación Matemática. Filosofía de la Matemática. Historia de la Matemática. La enseñanza.
Abstract	Is Mathematics a creation or a discovery? This short text is part of the ongoing theoretical research that seeks to understand semiotic aspects and the use of Thoughts Experiments in teaching and learning in Mathematics. The objective is to present a theoretical view on the role of Mathematics as creation or discovery, starting with philosophical considerations, going through Mathematical Education and the History of Mathematics and extolling the importance of Thoughts Experiments in the teaching of this science. We assume that Thoughts Experiments are ways, performed by the cognitive subject, to put his own thought, attending a well-defined context, as a considered object, through a representation. **Keywords**: Mathematics Education. Philosophy of Mathematics. History of Mathematics. Teaching.
Resumo	Matemática é uma criação ou uma descoberta? Este pequeno texto faz parte da pesquisa teórica em andamento que busca entender os aspectos semióticos e o uso dos Experimentos Mentais no ensino e na aprendizagem em Matemática. O objetivo é apresentar uma visão teórica sobre o papel da Matemática como criação ou descoberta, começando por considerações filosóficas, perpassando pela Educação Matemática e a História da Matemática e exaltando a importância dos Experimentos Mentais no âmbito do ensino dessa ciência. Assumimos que os Experimentos Mentais são formas, desempenhadas pelo sujeito cognoscente, de colocar seu próprio pensamento, atendendo um contexto bem definido, como objeto de consideração, por meio de uma representação. **Palavras-chave:** Educação Matemática. Filosofia da Matemática. História da Matemática. Ensino.

1. Introdução

Matemática é uma criação ou uma descoberta? Esta velha questão tem sido argumentada há tempos. Esse argumento remete à antiga batalha entre as correntes filosóficas platonistas e os não platonistas. Os platonistas pensam que as entidades matemáticas não podem ser criações humanas. Eles acreditam que essas entidades já existem, quer sabemos ou não. Nós podemos descobri-las, mas não podemos criá-las porque já existem em algum lugar. Os não platonistas, ao contrário, pensam que a Matemática é criação dos matemáticos.

No campo da Educação Matemática há duas visões possíveis: descobrimos ou criamos soluções e procedimentos para resolver determinado problema. Há neste ponto uma tendência em desenvolver Experimentos Mentais, que são formas do sujeito de representar seus próprios pensamentos, por meio de um "sistema de representação" coerente, como objeto de consideração na resolução de certos problemas e/ou provas matemáticas. Na História da Matemática, há várias situações que conduzem à criação de grandes teorias. Portanto, descobrir e/ou criar faz parte da dinâmica do pensamento matemático.

Este texto faz parte da pesquisa teórica em andamento que busca entender os aspectos semióticos e o uso dos Experimentos Mentais no ensino e na aprendizagem em Matemática. A intenção é trazer à baila uma visão teórica sobre o papel da Matemática como criação ou descoberta, começando por considerações filosóficas, perpassando pela Educação Matemática e a História da Matemática e exaltando a importância dos Experimentos Mentais no âmbito do ensino dessa ciência.

Nossa intenção não é fazer um questionamento que envolve essas duas perspectivas de matemática, mas sugerir ao professor que ao estudar essas duas perspectivas, ele seja capaz de olhar para o conteúdo e/ou problema de matemática, apresentando significados para os mesmos.

Isso porque, em concordância com Fiorentini, para o professor de matemática não basta ter o domínio de uma abordagem enciclopédica ou técnico-formal da Matemática, "mas, sim, uma abordagem compreensiva abarcando múltiplos aspectos e dimensões, que busca explorar a compreensão lógica, epistemológica, semiótica e histórica da ciência que ensina" (2005, p. 110). Logo surge o interesse em desenvolver uma perspectiva de matemática (não rígida) que vai coordenar a priori os caminhos pelos quais o fazer matemático no ensino e na aprendizagem se conduzirá. Uma perspectiva não rígida neste texto, significa a possibilidade de mudanças e/ou adaptações a outras formas de ver e entender a Matemática, pelo ponto de vista do ensino e da aprendizagem desta ciência.

Nesta investigação, nossos objetivos acenam para desenvolver um estudo, referenciado teoricamente, na busca de entendimento do que venha ser Matemática, voltado para a compreensão da seguinte questão: o que é Matemática realmente? Considerando nossa questão de investigação, optamos por conduzir nosso estudo, tomando como ponto de partida, a proposta de analisar livros textos, artigos, e outras fontes, para buscar entendimento sobre Matemática como criação e Matemática como descoberta. Esta conduta nos revelou uma maneira operacional de aprofundar nosso entendimento a respeito da questão de investigação, caminhando na direção de nossos objetivos.

Optamos por fazer este estudo desencadeando, como afirma D' Ambrosio (2008), um estudo voltado para os aspectos históricos, filosóficos, teóricos, experimentais, aplicações, fórmulas e resultados importantes e gerais, no âmbito da Matemática e da Educação Matemática.

2 – Pela Filosofia

A discussão desta questão que ora se apresenta, isto é, Matemática como criação ou descoberta, remonta à velha história entre as ideias platônicas de um mundo ideal e às correntes não platônicas como os logicistas, intuicionistas e os formalistas.

Para os platônicos, as entidades matemáticas existem fora do espaço e do tempo, fora do pensamento e da matéria, numa realidade independente de qualquer consciência individual ou social (Hersh, 1997).

A matemática platônica tem um significado filosófico considerável. Em sua forma mais abrangente, consiste a alegação de que existem objetos ideais, juntamente com as seguintes questões: o que são objetos ideais? Como os seres humanos compreendem o reino dos objetos ideais ou abstratos?

Silva, dissertando sobre Platão escreve:

> Para Platão, a matemática se ocupa das formas, não das ideias. Essas são objetos da filosofia; delas ocupa-se a dialética, a mais elevada e característica disciplina filosófica. As formas, os objetos matemáticos por excelência, habitam, como dissemos, um lugar celeste fora deste mundo imperfeito, fora do espaço e do tempo, e assim imunes à geração e à degradação. Preexistem, portanto, à atividade matemática; à qual cabe apenas "ascender" até eles e estudá-los (2007, p. 41; 42).

A compreensão platônica de círculos, triângulos e números, por exemplo, não são meramente formais ou estruturas quantitativas impostas pela mente humana nos fenômenos naturais, nem estão mecanicamente presentes nos fenômenos como um fato concreto. São entidades transcendentais que existem independentemente de qualquer fenômeno. Para esta corrente, a mente humana tem a capacidade de perceber essas entidades, de descobri-las, mas não criá-las.

Já as correntes filosóficas logicista, intuicionista e formalista, ao contrário dos platonistas, pensam que a Matemática são criações feitas por pessoas, em especial os matemáticos. Isto não pode ser descoberto, pois, não há nada para se descobrir, antes de algo ser criado.

A doutrina logicista nasceu de certa forma, como indica Costa (2008), das indagações delineadas por diversos matemáticos, no intuito de construir um edifício lógico que pudesse fundamentar toda Matemática. Isto se deu em virtude do grande desenvolvimento da Matemática, no século XIX. Este movimento iniciado por Cauchy, Abel e Weierstrass ficou conhecido como o movimento de retorno aos fundamentos da Matemática, culminando na chamada arimetização da análise matemática, eliminando várias questões confusas, como a ideia de infinitésimo nos moldes antiquados (Costa, 2008). A este movimento, agregaram-se Cantor, Dedekind que deram grandes contribuições para as definições aritméticas de números reais.

Em meados do século XIX, paralelamente ao movimento de reestruturação nos fundamentos da Matemática, grandes progressos foram alcançados na lógica formal, especialmente com Boole que dotou a lógica de um simbolismo matemático, o qual permitiu analisar profundamente as operações lógicas.

Antes de Boole, outros matemáticos já haviam tentado algebrizar a lógica, dentre os quais destacamos Leibniz, Lambert e Plouquet. No entanto, a lógica estruturada matematicamente, apresentava pouca importância para os fundamentos matemáticos. Foi então que em 1880, Peano e sua escola (Padoa, Pieri, Burali-Fort, Vaca e outros) foram capazes de mostrar a melhor compreensão para os fundamentos da Matemática. “Peano Criou uma linguagem lógico-simbólica na qual tratou de expor todas as disciplinas dedutivas” (Costa, 2008, p. 17). Outra criação neste mesmo sentido foi desenvolvida por Cantor, por volta de 1872.

A matemática do ponto de vista logicista é uma criação. Peano, por exemplo, mostra que “a teoria ordinária dos números naturais pode ser construída a partir, tão-somente, de três conceitos primitivos e de cinco postulados” (Costa, 2008, p. 22).

O intuicionismo, criado pelo matemático holandês Luitzen E. J. Brouwer nos anos 20 do século XX, sob a influência de Kronecker, adveio da necessidade de se modelar completa e radicalmente a Matemática. “Brouwer insiste que a Matemática não se compõe de verdades eternas, relativas a objetos intemporais, metafísicos, semelhantes a ideia platônicas” (Costa, 2008, p. 36). Ele considera que a matemática faz parte das atividades sociobiológicas para satisfazer certas exigências vitais do homem. Nesta visão, o saber matemático escapa a toda visão de caracterização simbólica.

A matemática de Brouwer é uma atividade e não uma doutrina. Para ele, o matemático não descobre as entidades matemáticas, mas as criam para estudar, isto é, a expressão “*A* existe”, só tem significado em matemática, pois *A* foi construído pela capacidade inteligível do humano. “A atividade do matemático, portanto, cria e dá forma aos entes matemáticos” (Costa, 2008, p. 36).

“A prática matemática não se constituía, para Brouwer, na derivação de teoremas no interior de uma lógica determinada a priori, como os logicistas e formalistas, mas no exercício criativo de uma consciência matemática” (Silva, 2007,

p. 152). Esta prática está apenas limitada pelo princípio formal no qual está sujeito toda construção, o tempo.

O formalismo, que tem como seu principal fundador David Hilbert, nasceu das vitórias alcançadas pelo chamado método axiomático no final do século XIX e início do século XX. Esta corrente se fortaleceu das preocupações de vários matemáticos com os fundamentos da matemática, em especial, com a axiomatização da geometria. O matemático alemão Pasch, por exemplo, percebeu que utilizando somente o postulado de Euclides, não seria possível provar que se uma reta intersecta um lado de um triângulo então ela intersectará o outro lado do mesmo triângulo. Esse método consiste da escolha de um certo número de noções e de proposições primitivas, que sejam suficientes para edificar a teoria, aceitando outras proposições ou ideias mediante definições e demonstrações. Essa teoria deixa de lado os significados intuitivos dos conceitos primitivos, que são considerados termos caracterizados implicitamente pelas proposições primitivas. “Procuram-se então, as consequências do sistema obtido, sem preocupação com a natureza ou com o significado inicial desses termos ou relações entre eles existentes” (Costa, 2008, p. 49).

Costa (2008) afirma que o formalismo pretende transformar o método axiomático na essência da Matemática. Os formalistas veem a Matemática como a ciência da estrutura dos objetos. O matemático pode estudar e criar as propriedades dos objetos somente por meio de um sistema apropriado de símbolos. Neste processo, o matemático reconhece e releva os aspectos afastados de importância de sinais adequados (Costa, 2008).

Hersh (1997) afirma que cada posição (platônica ou não platônica) é internamente consistente, no entanto, ambas parecem incompatíveis e a questão para a Educação Matemática ainda continua.

3 - Na Educação Matemática

Por que ambas as palavras (criação ou descoberta) parecem plausíveis na Educação Matemática? Pense em um problema simples da escola básica, por exemplo: *“Encontre a área do polígono a seguir*”.

Figura 1: Área da figura. **Fonte: O próprio autor**

Cada estudante vai escolher o seu método de encontrar a área do polígono da figura 1. No entanto, os seus diferentes métodos devem produzir o mesmo resultado. Se alguém produzir um resultado diferente, estará cometendo um erro. Frequentemente, o erro é encontrado e corrigido e qualquer novo erro encontrado na correção do processo, é também corrigido. Ao final, toda turma, acaba encontrando o mesmo resultado.

Esta é uma experiência canônica, paradigmática e fundamental na resolução de problemas matemáticos, como afirma Hersh (1997). É por isto que dizemos “descoberta”. Não estamos livres para responder de acordo com as nossas fantasias e/ou imaginações. A resposta é a resposta queiramos ou não. Dessa forma, nos convencemos que a resposta deve estar em algum lugar. Há aqui um certo grau de platonismo, mas também um certo grau de criação humana.

Se o problema é claramente e definitivamente formulado, nós tomamos como certo de que ele tem solução. Às vezes, a solução do problema é uma prova de que não há solução do tipo procurado (Hersh, 1997).

Quando nós resolvemos um problema, geralmente dizemos, na linguagem comum, que a solução foi encontrada ou descoberta. Ou seja, não foi criada, porque a solução já estava determinada pela descrição do problema e pelas propriedades conhecidas dos objetos matemáticos dos quais as soluções dependem.

Por exemplo: a curvatura de um círculo de raio 5 é completamente determinada pela noção de círculo e pela noção de curvatura. Sabemos que existe uma única resposta, ou seja, $\frac{1}{5}$.

Para aguçar o conhecimento, vamos desenvolver os conceitos de curvatura e encontrar a curvatura de um círculo cujo raio seja igual a a.

“Se T é um vetor unitário de uma curva lisa, cujo parâmetro comprimento de arco seja s, a função curvatura da curva é dada por:

$$k = \left|\frac{dT}{ds}\right|$$

Se uma curva lisa r(t) for dada por um parâmetro t diferente do parâmetro comprimento de arco s, então podemos calcular a sua curvatura da seguinte forma:

$$k = \left|\frac{dT}{ds}\right| = \left|\frac{dT}{dt} \times \frac{dt}{ds}\right|$$

Logo, temos:

$$k = \frac{1}{\left|\frac{ds}{dt}\right|} \times \left|\frac{dT}{dt}\right|$$

Fazendo $\frac{ds}{dt} = v$, podemos escrever:

$$k = \frac{1}{|v|} \times \left|\frac{dT}{dt}\right|$$

Então, a curvatura de r(t) é:

$$k = \frac{1}{|v|} \times \left|\frac{dT}{dt}\right|$$

Encontrando a curvatura de um círculo de raio *a*, baseando-se nas ideias anteriores.

Considere a equação do círculo da figura 2, sob o parâmetro t, sendo $\vec{\imath}$ e $\vec{\jmath}$ vetores unitários na direção do vetor $\overrightarrow{Ox}$ e $\overrightarrow{Oy}$ respectivamente:

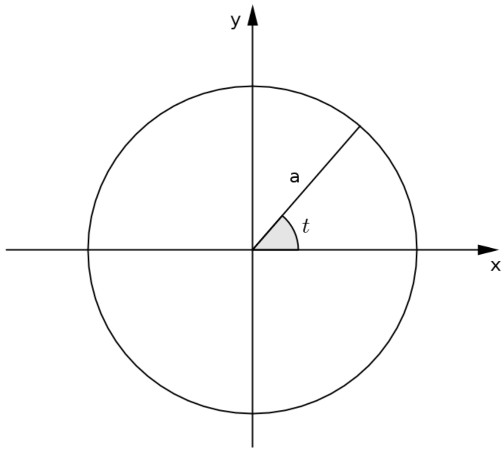

Figura 2: Círculo de raio a
Fonte: O próprio autor

$$r(t) = (acost)\vec{\imath} + (asent)\vec{\jmath}$$

Encontrando v, temos:

$$v = \frac{dr}{dt} = -(asent)\vec{\imath} + (acost)\vec{\jmath}$$

Logo, podemos calcular o módulo de v

$$|v| = \sqrt{a^2(sen^2t) + a^2(cos^2t)} = a$$

Como T é um vetor unitário na direção de v, temos:

$$T = \frac{v}{|v|} = \frac{-(asent)\vec{\imath} + (acost)\vec{\jmath}}{a}$$

$$T = (-sent)\vec{\imath} + (cost)\vec{\jmath}$$

Calculando $\frac{dT}{dt}$, encontramos:

$$\frac{dT}{dt} = (-cost)\vec{\imath} + (-sent)\vec{\jmath}$$

Encontrando a curvatura k, temos:

$$k = \frac{1}{|v|} \times \left|\frac{dT}{dt}\right|$$

$$k = \frac{1}{a} \times \sqrt{cos^2 t + sen^2\, t}$$

$$k = \frac{1}{a}$$

Quando um problema é resolvido, a solução emerge de dentro do problema. O que estava implícito se torna explícito, o que estava oculto se torna acessível. Antes de ser descoberta, ela ficava oculta, como uma imagem de um filme fotográfico exposto e não revelado. Uma vez encontrada, podemos verificar em qual contexto matemático ela está envolvida. E todos concordam que esta é a solução.

4 – Na História da Matemática

Mas a Matemática não avança somente resolvendo problemas bem definidos. Também há invenção de conceitos e criação de teorias. Destacamos de forma elogiosa pessoas como Gauss, Riemann, Euler, porque criaram novos campos da Matemática.

Radford (2011) argumenta que o ato de inventar ou criar uma ideia matemática, parece, em princípio, uma tarefa epistemológica interessante, porém está longe de ser fácil. Para esse autor, "toda criação é, originalmente, a luta de uma forma dominante contra uma forma imitada" (Radford, 2011, p. 49). A tarefa de criar exige uma investigação no interior do quadro conceitual do qual emergirá o novo objeto e seus elementos constitutivos, que permitirão pensá-lo, imaginá-lo e inventá-lo (Radford, 2011).

Hersh (1997) cita uma lista de grandes criações na Matemática como: a T*eoria dos Conjuntos transfinitos* de Cantor, que traduz um pensamento logicista, a *Teoria dos Campos Numéricos Algébricos* de Galois, a T*eoria da Análise Não-standard* de Robinson, a T*eoria das Funções Generalizadas* de Schwartz. Para esse autor, não dizemos que essas teorias foram descobertas, pois elas são em parte predeterminadas pelo conhecimento existente e, em parte, pela criação do seu inventor. Percebemos um salto intelectual, como em um grande romance ou em uma grande sinfonia (Hersh, 1997).

Cantor, por exemplo, não queria estudar a teoria dos conjuntos no caso completo (enquanto teoria), mas apenas e tão-somente dar significados aos *números transfinitos*. Seus estudos foram publicados em 1890, sob o título de *zur lehre vom transfinitem* (a doutrina dos transfinitos) (Cantor, 1915).

Ele afirmava que todas as provas da possibilidade de números verdadeiramente infinitos são falsas na medida em que lhes são atribuídos todas as propriedades dos números finitos. Ao estudar os infinitos, deve constituir-se um novo tipo de número, oposto aos finitos e a natureza desse novo tipo de número dependerá da natureza das coisas, constituindo-se dessa forma um objeto de investigação, mas não da nossa arbitrariedade ou do nosso preconceito (Cantor, 1915).

Tentando explicar sobremaneira as ideias de Cantor, podemos dizer que a quantidade de elementos de um conjunto finito A é igual a quantidade de elementos de um conjunto finito B, se ambos têm a mesma quantidade de elementos.

Se substituirmos o conceito "conjuntos (finitos) com a mesma quantidade de elementos" por um conceito mais geral "conjuntos equivalentes", então a afirmação anterior não seria válida para conjuntos infinitos (nota-se que o conjunto dos números inteiros tem, em hipótese, mais elementos do que o conjunto dos números inteiros pares). Mas, Cantor observou que é possível dispor todos os números inteiros pares em correspondência com todos os números inteiros, como pode ser visto na figura 3.

Figura 3: Relação de correspondência
Fonte: (Courant; Robbins, 2000, p. 90)

Isto quer dizer que ambos os conjuntos são equivalentes. Courant e Robbins argumentam que: "esta contradição à verdade familiar, "o todo é maior do que quaisquer de suas partes", mostra as surpresas com que vai deparar no domínio do infinito" (2000, p. 91).

Cantor também demonstrou que o conjunto dos números racionais é equivalente ao conjunto dos números inteiros, formando uma bijeção entre os inteiros e os racionais $r_1, r_2, r_3, r_4, \ldots, r_n, \ldots$ como pode ser visto na figura 4.

Figura 4: Relação entre inteiros e racionais
Fonte: (Courant; Robbins, 2000, p. 91)

Este processo é chamado de desnumeração ou enumeração, pois não podemos dispor os números racionais positivos em ordem de tamanho como fizemos com os inteiros, dizendo que *a* é o primeiro número racional, *b* o seguinte maior, etc., pois existem infinitos racionais entre dois deles (este é o princípio da densidade do referido conjunto) (Courant; Robbins, 2000).

Para Courant e Robbins, "uma vez que se demonstrou que os números racionais são enumeráveis, pode-se suspeitar que qualquer conjunto infinito seja enumerável, e que seria o resultado fundamental da análise do infinito" (2000, p. 93). Mas, Cantor mostrou que o conjunto de todos os números reais não é enumerável, isto é, a totalidade dos números reais apresenta uma infinidade radicalmente diferente. Em resumo, podemos considerar que há pelo menos dois tipos de infinidades distintas, a infinidade enumerável e a infinidade não enumerável do contínuo.

Dizemos que dois conjuntos finitos ou infinitos equivalentes têm a mesma cardinalidade (o mesmo número cardinal). Porém, "se um conjunto A é equivalente a algum subconjunto B, enquanto B não é equivalente a A ou a qualquer de seus subconjuntos, devemos dizer, concordando com Cantor que o conjunto B tem um número cardinal maior" (Courant; Robbins, 2000, p.96).

Correlacionando os números reais com os inteiros, podemos observar que o conjunto dos inteiros é um subconjunto dos reais, mas, o conjunto dos reais não é nem equivalente ao conjunto dos inteiros e nem a qualquer subconjunto deste. O conjunto dos números reais não é nem enumerável e nem finito. Logo, podemos concluir que o contínuo dos números reais tem um número cardinal maior do que o conjunto dos números inteiros.

"Na realidade, Cantor efetivamente mostrou como construir toda sequência de conjuntos infinitos com números cardinais cada vez maiores" (Courant; Robbins, 2000, p.96). Iniciando com os números inteiros, a ideia era mostrar claramente que podemos construir qualquer conjunto B com um número cardinal maior, sendo dado qualquer conjunto A. Esta foi a principal criação de Cantor para a Matemática, que reflete, em certo sentido, na Educação Matemática.

Nos anos de 1930 e 1940, surgiu a necessidade de reconhecer um cálculo generalizado para funções singulares como a *função delta* de Dirac. Teorias de funções generalizadas foram criadas por Solomon Bochner, Sobolev e Kurt

Friedrichs. Destinadas a servir a um mesmo propósito, as respostas encontradas para esses tipos de funções em diferentes problemas de cálculo, não eram idênticas. *Os espaços* de Sobolev e a *teoria da distribuição* de Laurent Schwartz tiveram aceitação geral (Hersh, 1997).

Quando vários matemáticos resolvem um problema bem definido, afirma Hersh (1997), suas respostas são idênticas. Todos eles descobrem esta resposta. Mas, quando eles criam teorias cumprindo algumas necessidades, suas teorias não são idênticas. Neste caso, criam teorias distintas.

5 – A complementaridade entre criação (invenção) e descoberta: o uso de Experimentos Mentais

Complementaridade é uma forma de conexão entre dois conceitos que se corrigem reciprocamente e se integram na descrição de um fenômeno. A noção de complementaridade teve suas origens nas ideias de Niels Bohr, que a considerava como princípio fundamental da mecânica quântica. Ele afirmava que os objetos têm propriedades complementares as quais não podem ser medidas ao mesmo tempo com precisão. Os aspectos de partícula e de onda de objetos físicos, por exemplo, são fenômenos complementares.

A concepção de complementaridade adotada neste texto apoia-se em Cruz o qual afirma que "a epistemologia da complementaridade sucede à epistemologia da dualidade, da polarização, da oposição, da separação, da exclusão. Ao invés de separar conceitos em "isto ou aquilo", nós consideramos ambos como "isto mais aquilo" (2018, p. 43).

A distinção entre invenção e descoberta ocorre entre dois tipos de avanço matemático. Descobrir parece ser completamente determinado. Inventar parece vir de uma ideia que não existia antes de seu inventor pensar nisto. Mas, depois de inventar uma nova teoria, o inventor tem que descobrir suas propriedades, resolvendo questões matemáticas precisamente formuladas. Isto quer dizer que inventar leva a descobrir, ou vice-versa.

A importância desses conceitos na Educação Matemática ocorre por entendermos principalmente que invenção não acontece somente na construção de teorias. Num problema bem definido, as respostas devem ser as mesmas, mas os métodos de resolução do problema por diferentes pessoas podem ser distintos.

Pode haver a necessidade de fazer algo novo, um experimento mental, para trazer alguma ideia nova à resolução do problema. Podemos inventar uma nova forma para descobrir a solução. Desde já, para os propósitos deste trabalho, adotaremos a conceituação de Experimentos Mentais desenvolvida por Cruz (2018).

D'Ambrosio (2011, p. 39), citando pesquisas sobre visualizações que propõem o uso dos Experimentos Mentais, mostra o interesse transcultural e transdisciplinar envolvidos nesses tipos de pesquisas. Para esse autor, o objetivo é identificar conceitos de espaços e tempo, espiritualidade, número, dimensão, forma, simetria e outros, não se restringindo somente ao âmbito acadêmico.

Segundo D'Ambrosio (2011), há uma Matemática acadêmica que está, na maioria das vezes, distante das preocupações diárias, e uma Matemática social que se aproxima dessas preocupações e que de certa forma, não está sendo ensinada nos sistemas escolares. Neste contexto, ressalta-se a importância dos processos cognitivos de representação e o reconhecimento do objeto matemático no meio escolar. "o raciocínio simbólico e analítico e a tecnologia são partes iguais da cidadania completa" (D'Ambrosio, 2011, p. 43).

Os Experimentos Mentais tentam resgatar as experimentações, analogias e o uso de metáforas na aprendizagem da Matemática, colocando o sujeito como agente produtor de seu próprio conhecimento, exaltando a criatividade. Para a construção do conceito de Experimentos Mentais, destacamos alguns pesquisadores do campo da Ciência, Filosofia, Matemática e da Educação Matemática que tratam sobre o tema.

Thomas Kuhn (2011), um estudioso no ramo da filosofia da ciência, conceitua Experimentos Mentais como um instrumento analítico que auxilia os cientistas a encontrarem contradições e/ou erros conceituais, permitindo chegar a leis ou teorias diferentes daquelas que eles sustentavam anteriormente.

Kuhn coloca os Experimentos Mentais como uma forma de auxiliar na reformulação ou na compreensão de reajuste de conceitos já existentes. Esses experimentos, segundo esse autor, ajudam-nos a perceber dados antigos em uma nova forma de conceituação, isto é, "os Experimentos Mentais podem gerar uma mudança de paradigmas" (Cruz, 2018, p.79).

Brown (2005) filósofo canadense, que milita na filosofia da ciência, considera que os Experimentos Mentais estabelecem algum fenômeno e busca alguma teoria para explicá-lo. Esse autor considera que os Experimentos Mentais são conjecturais, uma vez que estamos conjecturando uma explicação para os acontecimentos vividos no experimento.

Brown defende que para entender a Matemática, por meio dos Experimentos Mentais, "temos que assumir um certo tipo de platonismo" (Cruz, 2018, p. 79), isto é, temos de acreditar na referência, ou seja, acreditar na existência de objetos matemáticos, da mesma forma que acreditamos que existem objetos na física.

Bendegem (2003), matemático e filosofo da ciência, argumenta que os Experimentos Mentais são formas de explorar fatos imaginários, com vistas ao melhor entendimento dos fatos reais e das teorias que os incorporam. Esse mesmo autor escreve que podemos substituir o termo fato por provas em Matemática. Logo, os Experimentos Mentais podem ajudar a entender as provas matemáticas que procuramos desenvolver ou descobrir.

Mueller (1969), um estudioso da filosofia grega antiga, ao estudar as provas nos elementos de Euclides, considera que as derivações euclidianas são Experimentos Mentais com a intenção de mostrar se certo tipo de objeto tem uma determinada propriedade ou se é possível realizar determinada operação. Neste caso, os Experimentos Mentais podem ser considerados um espaço de meras possibilidades.

Cruz (2018), educador matemático, conceitua Experimentos Mentais como formas, desempenhadas pelo sujeito cognoscente, de colocar seu próprio pensamento, atendendo um contexto bem definido, como objeto de consideração, por meio de uma representação. Esses experimentos são admitidos como um sistema de atividades supostas, isto é, conceitos implícitos, que permite o uso da intuição.

Cruz, dissertando sobre importância dos Experimentos Mentais, escreve:

> A importância de sua utilidade revela-se por ser uma reflexão à base de dados conhecidos, ajudando a resolver confusões no modo de pensar. As verdades são consideradas sintéticas, do ponto de vista de Kant (1997), e estão relacionadas ao desenvolvimento do raciocínio teoremático (ou diagramático), na concepção de Peirce, na busca de generalidade (2018, p.105).

O raciocínio teoremático (ou diagramático), descrito por Cruz, é um processo de três etapas, a saber: “(a) a construção de uma representação, (b) a experimentação dessa construção, e (c) a observação dos resultados” (Peirce, 1979, 3.363).

Mas, a característica essencial do raciocínio teoremático tornando este processo interessante, é que o mesmo deve ser desenvolvido por meio de um “sistema de representação coerente” (Hoffmann, 2006).

Esse sistema de representação é conceituado como um conjunto de convenções com a finalidade de representar proposições e relações lógicas entre essas proposições e um conjunto de regras para transformação de gráficos. Em outras palavras, podemos considerar que esse sistema de representação é o universo do discurso, no qual se desenvolverá todas as transformações no diagrama.

A consistência no sistema de representação se torna essencial na utilização do raciocínio diagramático. Hoffmann (2006) disserta que, para além de consistência, o sistema de representação deve permitir, por um lado a construção de uma representação particular e por outro a normatização das ações sobre essa representação. “A consistência e normatividade do sistema de representação são decisivas quando se trata da possibilidade de descoberta” (Cruz, 2018, p. 153).

A aplicação dos Experimentos Mentais em um determinado problema cria formas de desenvolvimento ou resoluções, no intuito de descobrir a resposta e/ou resultado pretendido. Mais uma vez, inventar ou criar faz parte da descoberta.

Voltando ao problema da "figura 1", vamos apresentar duas formas distintas para resolvê-lo, isto é, dois Experimentos Mentais, no entanto acreditamos que possam ser criadas outras formas de se descobrir o resultado.

1ª Forma: Um aluno dividiu a "figura 1" em dois triângulos (1 e 3) e dois retângulos (2 e 4), como podemos observar na figura 5.

Figura 5: Triângulos e retângulos
Fonte: O próprio autor

Percebendo que os dois triângulos são retângulos, isósceles e congruentes (sistema de representação), calculou a medida dos catetos, observando que se tirasse do lado correspondente do retângulo (4), a medida de 2 u.m (u.m = unidade de medida de comprimento), ficaria então sobrando 2 u.m para ser dividida entre os dois segmentos restantes, encontrando 1 u.m para cada um. Na sequência, calculou as áreas dos dois triângulos e as áreas dos dois retângulos.

$$A_1 = A_3 = \frac{1 \times 1}{2} = \frac{1}{2} u.a, A_2 = 2 \times 1 = 2u.a,, A_4 = 5 \times 4 = 20u.a$$

Portanto, a área da total da figura é:

$$A = A_1 + A_2 + A_3 + A_4$$

$$A = \frac{1}{2} + 2 + \frac{1}{2} + 20 = 23u.a$$

(u.a = unidade de medida de área)

2ª Forma: Outro aluno pensou em completar a "figura 1", formando um grande retângulo e, na sequência, subtrair a área de dois triângulos retângulos isósceles congruentes, como podemos verificar na figura 6.

Figura 6: Completando o retângulo.
Fonte: O próprio autor

Completando a figura 6, ele construiu um retângulo maior. Percebeu que os lados a mais do retângulo eram lados de um triângulo retângulo isósceles. Por meio da trigonometria (sistema de representação), chegou à conclusão que os catetos desses triângulos medem 1 u. m. cada.

Concluiu que: $A = A_{retângulomaior} - 2A_{triângulo}$.

Logo,

$$A = 6 \times 4 - 2\frac{1 \times 1}{2} = 24 - 1 = 23u.a$$

De acordo com Cruz (2018), nos Experimentos Mentais, o sujeito pensa e estabelece o contexto, compreendendo a Matemática como uma atividade, uma construção à base de possibilidades. Esse mesmo autor conclui que "nas ciências naturais, os Experimentos Mentais são importantíssimos para a descoberta de novas leis e teorias. Sua aplicação na Matemática é uma questão de descoberta, mas há um problema em relação à fundamentação" (2019, p. 25; 26).

6 – Considerações finais

Talvez a ideia ajude outras pessoas a resolverem os seus problemas. Na sequência, esse problema ou essa resolução receberá um nome e será estudada por si mesma. Para descobri suas propriedades, novas criações (invenções) serão necessárias.

Por exemplo, Fourier inventou a *Análise de Fourier* para resolver equações lineares de calor e vibração. Então, algumas questões aparentemente naturais sobre a série de Fourier se tornaram complexas. Logo, a *Análise de Fourier* tornou-se um campo de pesquisa próprio.

A necessidade da Análise de Fourier e outras partes da Matemática conduziram para espaços infinitos de dimensão linear (espaços de Hilbert e os espaços de funções generalizadas). Esses novos espaços em si mesmo são agora grandes campos de pesquisas, que necessitam de novas ideias na *Teoria do Operador Linear* e *Análise Funcional*.

D' Ambrosio afirma que "o mundo do século XXI é um mundo apinhado em números. Isso significa que toda a sociedade está envolvida em números" (2011, p.43) Logo, perguntamos: Os números naturais foram descobertos ou inventados? Não podemos esquecer-nos da famosa afirmação de Ludwing Kronecker, o qual diz: "Deus nos deu os números naturais, e o resto é obra dos homens" (Costa, 2008, p.34).

É possível que Kronecker quisesse dizer isto literalmente. Mas quando o matemático hoje em dia cita isto, "Deus", neste caso se transforma numa figura de expressão. Podemos interpretar essa frase de Kronecker da seguinte forma: Os números naturais foram descobertos e todo resto foi inventado ou criado. Esta declaração é bem platônica, no que diz respeito aos números naturais.

Como podemos responder a isto de um ponto de vista humanista? Podemos fazer uma distinção entre números de contagem e números puros, por exemplo. Os números de contagem são adjetivos aplicados a coleções de objetos físicos (Hersh, 1997). Em nosso entendimento, esses números são finitos, pois a capacidade de contar é sempre finita, se considerarmos que quem está contando é uma pessoa. Os números puros são objetos, isto é, ideia na consciência compartilhada por um grupo de pessoas. Logo, os números de contagem são descobertos e os números puros são inventados.

Concluímos voltando à mesma questão: A Matemática é uma criação ou uma descoberta? Uma resposta possível é dizer ambas, interagindo numa relação dialética interativa e alternativa, num aspecto complementar.

7 - Bibliografia

Bendegem, J. P. V. (2003**).** *Thought experiments in mathematics: anytidng but proof*. Philosophical. 9 - 33 pp.

Brown, J. R. (2005). *The Laboratory of the mind: Thought experiments in the natural sciences***.** This edition published in the Taylor & Francis e- Library.

Cantor, G. (1915). *Contributions to The Founding of theory of Transfinite Numbers*. New York: Dover Publications, INC.

Costa. N. C. A. (2008). *Introdução aos fundamentos da matemática*. São Paulo: Hucitec, .

Courant, R.; Robbins, H. (2000). *O que é matemática? Uma abordagem elementar de métodos e conceitos*. Rio de Janeiro: Editora Ciência Moderna Ltda.

Cruz, W. J. (2018). *Experimentos Mentais na Educação Matemática: uma analogia com provas matemática formais.* Curitiba: Appris.

Cruz, W. J. (2019). *O raciocínio diagramático e os experimentos mentais numa perspectiva semiótica.* Educação Matemática em Revista, Brasília, v. 24, n. 62, p. 6-28.

D'ambrosio, U. (2011). *EA, Pitágoras e Avatar: cenários distintos em matemática.* São Paulo: Artes-livros Editora.

D'ambrosio, U**.** (2008)**.** *Educação Matemática: Da Teoria à Prática.* 16ª ed. Campinas SP: Papirus.

Fiorentini, D. (2005). *A formação matemática e didático-pedagógica nas disciplinas da licenciatura em matemática*. Campinas: Revista de Educação – PUC – Campinas, n: 18, p. 107 – 115.

Hersh, R. (1997). *What is mathematics, really?.* Oxford University Press, Inc.

Hoffmann, H. G. M. (2006**).** *Seeing problems, seeing solutions. Abduction and diagrammatic reasoning in a theory of scientific discovery.* Georgia Institute of Technology: School of Public Policy.

Kuhn, T. S. (2011**).** *A tensão essencial.* São Paulo: Editora UNESP, 257 – 282 pp.

Mueller, I. (1969). *Euclid's Elements and the Axiomatic Method.* Brit. F. Phil. Sci. 20 (1969), Printed in Great Britain,. 289-309 pp.

Peirce, C. S. (1979) *CP = Collected Papers of Charles Sanders Peirce,* Volumes I-VI, ed. by Charles Hartshorne and Paul Weiß, Cambridge, Mass. (Harvard UP) 1931-1935, Volumes VII-VIII, ed. by Arthur W. Burks, Cambridge, Mass. (Harvard UP) 1958 (quoted by no. of volume and paragraph) . NEM = New Elements of Mathematics. Harvard UP.

Radford, L. (2011). *Cognição Matemática: história, antropologia e epistemologia.* São Paulo: Editora Livraria da Física.

Silva, J. J. (2007). *Filosofia Matemática*. São Paulo: Editora UNESP.

Willian José da Cruz é Professor efetivo do programa de Pós-graduação em Educação Matemática da Universidade Federal de Juiz de Fora - MG (UFJF - Brasil). Doutor em Educação Matemática pela Universidade Anhanguera de São Paulo (UNIAN); Mestre em Educação Matemática pela UFJF. Coordenador do curso de Matemática Integral da UFJF.
Contatos: williancruz990@gmail.com ou willian.jose.cruz@ice.ufjf.br