UNIÓN
REVISTA IBEROAMERICANA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA
www.fisem.org/web/union

ISSN: 1815-0640
Número 39. Septiembre de 2014
páginas 57-79

Construcciones y mecanismos mentales asociados a las ecuaciones trigonométricas del tipo *ab=0*

Gabriel Araya Rivera, Marcela Parraguez González

Fecha de recepción: 25/09/2013
Fecha de aceptación: 4/06/2014

Resumen	La investigación que reportamos presenta las construcciones y mecanismos mentales asociados a la solución de las ecuaciones trigonométricas del tipo *ab=0,* de ángulos simples, como una necesidad de responder a la problemática de un trabajo mecanizado de los aprendices al resolver dichas ecuaciones, mediante el análisis de la aplicación de la propiedad "si *ab=0*, entonces a=*0* ó b=*0*". A partir de un análisis cognitivo basado en la teoría APOE (acciones, procesos, objetos y esquemas), modelamos cómo estudiantes de secundaria construyen y aprenden el concepto solución de dichas ecuaciones trigonométricas. **Palabras clave**: mecanismos mentales, ecuaciones trigonométricas.
Abstract	The research we report presents mental constructs and mechanisms associated with the solution of trigonometric equations of simple angles *ab=0*, as a need to analyse the mechanized work of apprentices when solving these kind of equations using the property "if *ab =0*, then *a= 0* or *b=0*". From a cognitive analysis based on APOS theory (actions, processes, objects and schemes) modelling how high school students construct and learn the concept solution of these equations. **Keywords**: mental mechanisms, trigonometric equations.
Resumo	A pesquisa que nós informamos apresenta as construções e mecanismos mentais associados à solução das equações trigonométricas do tipo *ab=0*, de ângulos simples, como uma necessidade de responder ao problema de um trabalho automatizado dos aprendizes ao resolver estas equações, por meio da análise da aplicação da propriedade "se *ab = 0*, então *a = 0* ou *b = 0*." A partir da análise cognitiva baseada na teoria APOS (ações, processos, objetos e esquemas), nós modelamos como os estudantes secundários eles constroem e eles aprendem a conceito de solução destas equações trigonométrico. **Palavras-chave:** mecanismos mentais, equações trigonométricas.

1. Problemática de investigación

La ecuación cuadrática $x^2 + x = 0$ de variable real *x* se puede generalizar a ecuaciones del tipo $sen^2 x + sen\, x = 0$, y para que un estudiante determine su conjunto solución, es importante que factorice, esto es, $sen\, x(sen\, x + 1) = 0$, y posteriormente reflexione sobre qué valores debe tomar $sen\ x$ y luego la variable x para que cada factor se haga cero. Pero si los estudiantes utilizan técnicas memorísticas, no podrán mostrar en sus argumentos propiedades de la matemática que justifiquen sus procedimientos. De esta forma, centrarse en el producto igualado a cero permitirá, por ejemplo, resolver la ecuación $sen\,x\,(2sen\,x+1)=0$ sin calcular el producto, sino más bien reflexionando que para que $sen\,x\,(2sen\,x+1)=0$, uno de los factores debe ser cero. Igualando cada factor a cero, el estudiante reflexionará en torno a $sen\,x=0$ y $2sen\,x+1=0$, lo que le permitirá llegar a $sen\,x=0$, para $x=0°, x=180°$ o $sen\,x=-\frac{1}{2}$, para $x=210°, x=330°$, transformando estos valores a radianes y generalizando el conjunto solución a $S=\left\{0+n\pi, \frac{7\pi}{6}+2n\pi, \frac{11\pi}{6}+2n\pi \,/\, n\in \mathbf{Z}\right\}$.

Nuestra problemática de estudio surge del interés por contribuir al aprendizaje de la resolución de ecuaciones trigonométricas *ab=0,* utilizando las propiedades del cuerpo de los números reales, como lo es la *propiedad hankeliana*: *ab=0* entonces *a=0* o *b=0*. Específicamente nos centramos en la factorización como forma de resolver en los números reales una ecuación del tipo *ab=0*, donde los factores *a* y *b* representen funciones trigonométricas de ángulos simples. Nos preguntamos ¿qué justifica el paso de la factorización *ab=0* a la separación en dos ecuaciones *a=0* ó *b=0*, que permiten despejar la variable o la función trigonométrica, si corresponde?. Nuestra problemática de investigación consiste en describir y analizar qué matemática y por qué esa matemática es la que los estudiantes de cuarto año medio ponen en juego cuando se ven enfrentados a resolver ecuaciones trigonométricas del tipo *ab=0,* donde *a* y *b* son funciones trigonométricas de ángulos simples

2. Importancia de resolver el problema planteado

Nuestro propósito es enfrentar a los estudiantes a la resolución de las ecuaciones trigonométricas a través de la *propiedad hankeliana*, porque su aplicación permite analizar las dificultades que presenta un estudiante de cuarto año medio (Formación Diferenciada de Matemática para el cuarto nivel, 17 años) en las conexiones y el tránsito de ciertos conceptos matemáticos, como por ejemplo: las funciones trigonométricas, el producto igualado a cero y los ceros de una función, y también si es capaz de comprender una ecuación, esquematizarla, reconocer los elementos que se dan para su resolución a través de la *propiedad hankeliana*, así como seleccionar una propiedad matemática que le permita dar solución a la ecuación planteada.

3. Antecedentes de investigación

Revisamos investigaciones en Matemática Educativa para detectar qué se ha hecho en relación a nuestro objeto de estudio. En la mayoría de ellas no encontramos indicios sobre estudios en ecuaciones trigonométricas propiamente tales, aunque sí existen estudios de la trigonometría en general y de las funciones trigonométricas en particular. Maldonado y Miranda (2009) reportan un análisis didáctico y cognitivo de los elementos de la trigonometría, y Navarro y Villalva (2009) estudian la desarticulación entre la semejanza y la trigonometría en el bachillerato.

Sin embargo, Ochoviet (2004) reflexiona sobre la propiedad “si *ab=0*, entonces *a=0* ó *b=0*”, siendo a y *b* números reales (propiedad hankeliana), lo que permite justificar el paso del producto igualado a cero, a las dos ecuaciones. Reportaremos la investigación de Ochoviet porque nos brinda elementos acerca de la aplicación de la *propiedad hankeliana* cuando un producto está igualado a cero, cuestión que se generalizará en nuestra investigación a ecuaciones trigonométricas de ángulos simples del tipo *ab=0*.

Ochoviet estudia las dificultades que se dan cuando no se especifica qué representan en la propiedad hankeliana los factores *a* y *b*. En efecto, analiza casos en que los estudiantes presentan dificultades en su aplicación

1) Si bien los estudiantes conocen la propiedad, no la utilizan para resolver ecuaciones de segundo grado, aun cuando es la única herramienta disponible.
2) En la verificación de la solución de ecuaciones de segundo grado en su forma factorizada, los estudiantes reemplazan por las dos raíces en forma simultánea. Por ejemplo, al resolver la ecuación $(4x+8)(x-5)=0$, obtienen las raíces -2 y 5. Pero al verificar evalúan incorrectamente $(4\cdot(-2)+8)((5-5))=0$, con esto deducen que $0\cdot 0=0$.

En investigaciones acerca de las funciones trigonométricas, Maldonado y Miranda (2009) hacen un análisis didáctico y cognitivo de los elementos de trigonometría. Aquí se observa que las nociones de los estudiantes sobre razones trigonométricas carecen de significado, lo que implica negativamente en el estudio de las funciones trigonométricas. Estos autores, Maldonado y Miranda observan que la secuencia curricular que antecede a las funciones trigonométricas son: razones trigonométricas de un ángulo agudo: seno, coseno, tangente, y sus recíprocas; valores del seno, el coseno y la tangente para los ángulos de 30^{o}, 45^{o} y 60^{o}; uso de tablas y calculadora para otros ángulos agudos; resolución de triángulos rectángulos y su aplicación a la solución de problemas: cálculo de distancias inaccesibles. Esta presentación, de acuerdo al estudio sobre libros de texto, orienta a quedarse en la algoritmización, limitando al estudiante en significar los conceptos necesarios para el estudio de la función trigonométrica.

Otro antecedente reportado en la tesis de Maldonado (2005) es que antes de abordar las funciones trigonométricas como una función de variable real, se definen las razones trigonométricas con ángulos medidos en grados, seguido de la conversión de grados a radianes en el círculo unitario, apareciendo de esta forma la función de variable real. Esto lleva a una relación radianes-reales no explícita, produciendo conflicto en el estudiante al no concebir la noción del concepto de función.

En Maldonado, Rodríguez y Santana (2009), se hace una propuesta para abordar la transición grados a radianes, observando que un buen diseño de actividades favorece dicho aprendizaje.

Por otro lado, Buendía y Montiel (2009) realizan un acercamiento socioepistemológico a la historia de las funciones trigonométricas. Presentan la importancia del traspaso de la trigonometría clásica a la trigonometría en el círculo, como también la importancia del trabajo con ángulos negativos, la conversión de grados a radianes, la equivalencia entre radianes y reales, la periodicidad y el acotamiento de la función.

Como podemos apreciar, las investigaciones en funciones trigonométricas convergen en el problema de traspaso de las razones a las funciones. En nuestro estudio será interesante observar si las dificultades que manifiestan estos investigadores también se presentan en los informantes de esta investigación. En efecto, pondremos cuidado en qué dificultades existen en el traspaso de grados a radianes, cómo abordan los ángulos negativos, qué dificultades tienen para trabajar ángulos especiales de $30^{\circ}, 45^{\circ}$ y 60° para ser aplicados en todo el dominio de las funciones trigonométricas.

4. Marco teórico: teoría APOE

Para analizar las conexiones matemáticas y el tránsito entre objetos matemáticos, hemos elegido la teoría APOE (Acciones, Procesos, Objetos, Esquemas), porque nos entrega las herramientas necesarias para describir las conexiones y el tránsito entre determinados objetos matemáticos, a través de las construcciones y mecanismos mentales necesarios para llegar a resolver una ecuación trigonométrica de ángulos simples de la forma *ab=0*.

La teoría APOE es desarrollada por Ed Dubinsky, basándose en el enfoque constructivista de Piaget. Dubinsky (1996) toma el concepto de abstracción reflexiva de Piaget que describe el desarrollo del pensamiento lógico de los estudiantes aplicado en estudios cualitativos. La abstracción reflexiva aparece a temprana edad, cuando se coordina la estructura sensoriomotriz, y se va desarrollando en el estudiante que logra entender características matemáticas más elevadas.

Según la hipótesis de APOE, todo estudiante que se enfrenta a problemas construye acciones, procesos y objetos que se organizan en esquemas. Las **acciones** son construcciones básicas para que un estudiante entienda un concepto matemático, son transformaciones de los objetos mediante estímulos externos. En los **procesos,** mediante construcciones internas, repite las acciones anteriores reflexionando sobre ellas para **interiorizarlas** en un proceso. Las reflexiones sobre los procesos desde una mirada global se **encapsulan** en un **objeto**. Cuando ve las acciones, procesos y objetos como una estructura coherente, tiene una concepción **esquema** del concepto (Trigueros, 2005). Las acciones, procesos, objetos y esquemas son las estructuras mentales que necesita para construir el concepto, y necesita de las abstracciones reflexivas (interiorización, encapsulación, coordinación, generalización y reversión), denominadas también mecanismos mentales, que le permitirán pasar de una estructura a otra.

4.1 Relación entre la problemática, la teoría APOE y el objeto de estudio

Al ser nuestra problemática de corte cognitivo, a través de APOE se enfrentará a los estudiantes a la resolución de las ecuaciones trigonométricas a través de la *propiedad hankeliana*, analizando las dificultades que presentan en la resolución de ecuaciones trigonométricas, y también si son capaces de comprender un problema, esquematizarlo, reconocer los elementos que se dan para su resolución, y seleccionar una propiedad matemática que les permita dar solución a la ecuación planteada. Además, miraremos la articulación que un estudiante realiza entre la *propiedad hankeliana* que conoce en los números reales, las funciones trigonométricas y la resolución de ecuaciones.

Nuestro marco teórico nos permitirá analizar las reflexiones de los estudiantes cuando construyan acciones, procesos y objetos asociados a las ecuaciones trigonométricas de ángulos simples del tipo *ab=0*. La descomposición genética permitirá modelar la epistemología y la cognición del concepto a través de las construcciones y mecanismos mentales.

Objetivos generales de investigación

1. Analizar las construcciones y mecanismos mentales de los estudiantes para resolver ecuaciones trigonométricas de ángulos simples del tipo *ab=0*.
2. Modelar las construcciones y mecanismos mentales de los estudiantes a través de una descomposición genética.

Objetivos específicos de investigación

1. Realizar un análisis teórico (descomposición genética) de las ecuaciones trigonométricas de ángulos simples del tipo *ab=0*.
2. Documentar las acciones que muestran los estudiantes para resolver ecuaciones trigonométricas de ángulos simples del tipo *ab=0*.
3. Identificar qué acciones interiorizan los estudiantes en un proceso para resolver ecuaciones trigonométricas de ángulos simples del tipo *ab=0*.
4. Describir cómo los estudiantes encapsulan en un objeto los procesos que le permiten resolver ecuaciones trigonométricas de ángulos simples del tipo *ab=0*.
5. Analizar los procesos que se coordinan para construir el objeto ecuaciones trigonométricas de ángulos simples del tipo *ab=0*.

Con los objetivos y el problema presentados, necesitamos que este último sea plasmado directamente a través de las siguientes preguntas de investigación:

- ¿Qué conexiones realizan los estudiantes en la aplicación de la *propiedad hankeliana* para resolver ecuaciones trigonométricas de ángulos simples del tipo *ab=0*?
- ¿Entre qué matemática o conceptos matemáticos transitan los estudiantes cuando resuelven ecuaciones trigonométricas de ángulos simples del tipo *ab=0*, aplicando la *propiedad hankeliana*?

5. Metodología

El ciclo de investigación que nos proporciona la teoría APOE permite obtener una descripción detallada de los conceptos matemáticos mediante su repetición. Este ciclo tiene tres componentes:

- Análisis teórico (descomposición genética).
- Diseño y aplicación de instrumentos.
- Análisis y verificación de datos.

Análisis teórico:

También conocido como "*descomposición genética*" (DG), este análisis inicial del concepto matemático permite determinar un camino viable en la construcción del concepto, modelando la epistemología y la cognición de éste. El resultado de la DG es la base para ayudar a la construcción del concepto a través de una descripción detallada de las construcciones y mecanismos mentales que pone en juego cuando construye un determinado concepto.

Así, nos preguntamos ¿qué es comprender el concepto de ecuación trigonométrica de ángulos simples del tipo *ab=0*? Cabe señalar que no existe una única DG del concepto: puede estar sujeta a las vías que se generen para la construcción del concepto y las estructuras mentales definidas de antemano.

Diseño y aplicación de instrumentos.

Para determinar la viabilidad de la DG es necesario documentarla mediante el diseño y aplicación de instrumentos, que en esta investigación consisten en un *cuestionario diagnóstico* y una *entrevista semiestructurada*.

Los instrumentos que recogerán información se aplicarán a una muestra dirigida, conformada por estudiantes de cuarto año medio que cursan la asignatura Funciones y Procesos Infinitos, de un colegio particular subvencionado de la Región de Coquimbo, Chile. El cuestionario diagnóstico de cuatro preguntas se aplicará a ocho estudiantes (que etiquetamos desde E1 hasta E8) a fin de detectar los conocimientos previos que subyacen alrededor del concepto en estudio.

Al ser nuestra investigación cualitativa, nos interesa la calidad y profundidad de la información. Necesitamos *estudiantes tipo* que puedan comprender los conceptos descritos en la DG y otros que no, para discutir si la diferencia radica en la presencia o falta de alguna construcción mental. Tampoco necesitamos de la representatividad de la población, sino de la selección de estudiantes con las características ya mencionadas. Así, los criterios de selección de los informantes son: Estudiantes voluntarios, estudiantes tipo del curso Funciones y Procesos Infinitos de un establecimiento particular subvencionado de la comuna de Ovalle y estudiantes que estén en el cuarto año de enseñanza media.

Tabla 1. Resumen de la recogida de información.

<table>
<tr><td rowspan="2">Muestra dirigida de ocho estudiantes tipo</td><td>Cuestionario diagnóstico (aplicado a la totalidad)</td></tr>
<tr><td>Entrevista semiestructurada (aplicada a seis estudiantes)</td></tr>
</table>

La entrevista que se aplicará a seis de los ocho estudiantes (E2, E3, E4, E5, E6 y E7) que desarrollaron el cuestionario diagnóstico, nos permitirá documentar de mejor manera las construcciones y mecanismos mentales que están dispuestos en la DG, o bien ausentes de ella. En este último caso, se requerirá de una refinación de la DG.

Análisis y verificación de datos.

Obtenidos los datos empíricos, deben analizarse y verificarse desde la DG. Este análisis debe permitir responder a:

- ¿Qué elementos no han sido considerados en la DG?
- ¿Cuáles de las construcciones incluidas en la DG hipotética no se perciben?

Al responder estas preguntas, el investigador podrá refinar su DG. La aplicación completa de las tres componentes permitirá documentarla mediante los datos empíricos. El método de análisis permite comparar las respuestas de los estudiantes y detectar a los que comprendieron el concepto y los que no. El análisis busca encontrar la explicación al porqué de las diferencias en estos estudiantes en términos de construcciones de acciones, procesos, objetos y esquemas.

6. Descomposición genética hipotética

La DG que diseñamos del concepto "Ecuaciones trigonométricas de ángulos simples del tipo *ab=0*" se basa, por un lado, en la experiencia y conocimiento que tenemos como docentes del concepto al impartir las asignaturas Álgebra y Modelos Analíticos y Funciones y Procesos Infinitos (MINEDUC, 2002); por otro lado, en el conocimiento de los investigadores del concepto, la revisión de textos como Swokowski y Cole (1997), la revisión de los programas de estudio y la revisión de la investigación de Ochoviet acerca de la propiedad "si *ab=0*, entonces *a=0 ó b=0*". Todo esto nos permitirá modelar un camino viable que será la base para ayudar a los estudiantes a la construcción del concepto. La DG hipotética de las "ecuaciones trigonométricas del tipo *ab=0*" que presentaremos, permitirá indagar a partir de las construcciones y mecanismos mentales, saber qué significa comprender este concepto y cómo esa comprensión puede ser alcanzada por un estudiante.

A continuación presentamos un posible camino o mapa de mecanismos y construcciones mentales para el concepto "ecuaciones trigonométricas de ángulos simples del tipo *ab=0* y su solución", a través de la *propiedad hankeliana*. Probaremos su viabilidad para que los estudiantes comprendan el concepto.

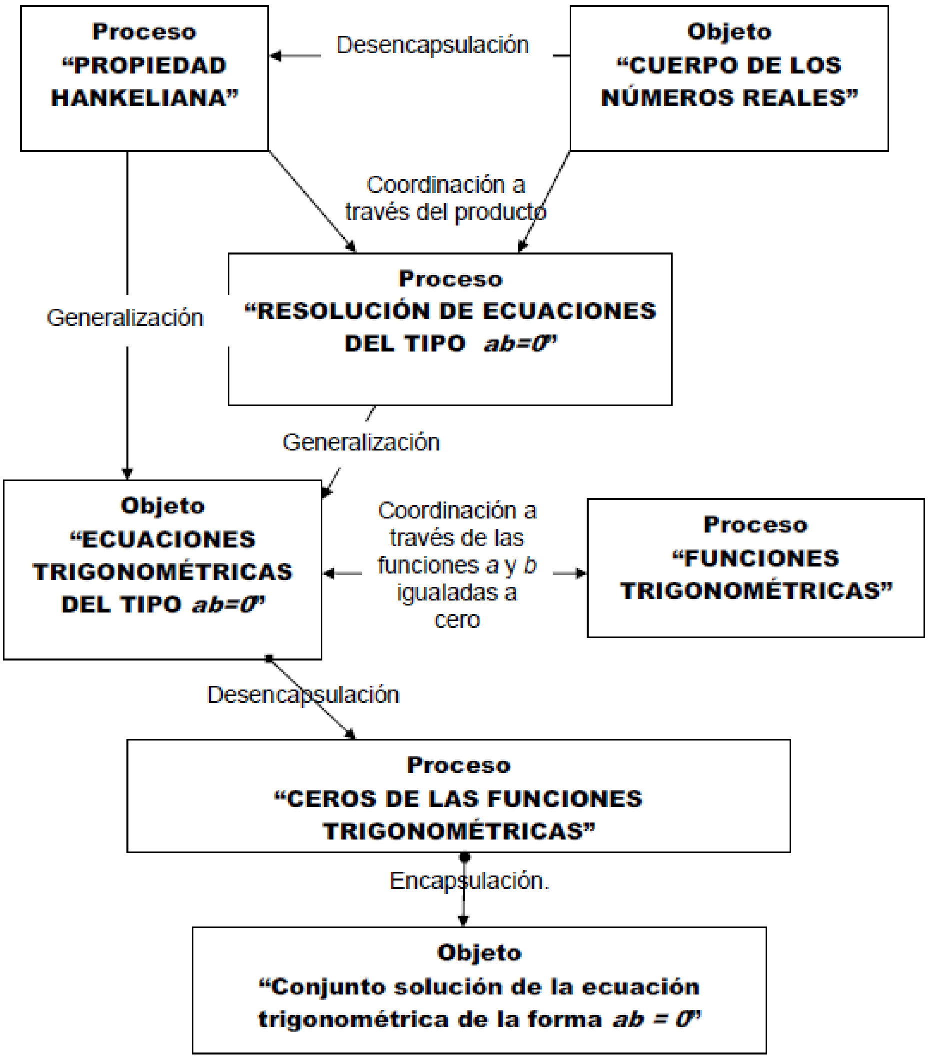
Descripción de la DG

De acuerdo a la figura 1:

- Si el estudiante es consciente de los procesos suma y multiplicación de números reales como una totalidad, actuando sobre las propiedades clausura, conmutativa, asociativa, elementos neutros, elementos inversos y propiedad distributiva, entonces tiene una concepción objeto del concepto "cuerpo de los números reales".
- Si el estudiante es capaz de registrar que *a y b* representan números reales, reconocer que el producto *ab=0* implica que *a=0 ó b=0* y comprender que si *ab=0* es verdadero, entonces *a=0 ó b=0* también es verdadero, entonces tiene una concepción proceso del concepto *propiedad hankeliana*.
- Si el estudiante es capaz de expresar una ecuación como *ab=0,* reconocer que *a y b* representan expresiones algebraicas de variable real, reconocer que si el producto *ab=0* implica *a=0 ó b=0* y encontrar las raíces reales que verifican que *ab=0*, entonces tiene una concepción proceso del concepto "Ecuaciones del tipo *ab=0*".
- Si el estudiante es capaz de expresar una ecuación trigonométrica como *ab=0*, reconocer que *a y b* representan funciones trigonométricas de variable real, reconocer que si el producto *ab=0* implica *a=0 ó b=0*, encontrar el conjunto solución donde se verifica que *ab=0* y estar consciente de todo este proceso en su totalidad, entonces tiene una concepción objeto del concepto "Ecuaciones trigonométricas de ángulos simples del tipo ab =0".

- Si el estudiante es capaz de entender que en las funciones trigonométricas a cada valor de la variable independiente del dominio (expresados como radianes) le corresponde un único valor de la variable dependiente, entonces tiene una concepción proceso del concepto “Funciones trigonométricas”.
- Si el estudiante es capaz de entender que si en una función trigonométrica de variable real, para cualquier valor que es un cero de la función, entonces tiene una concepción proceso del concepto “ceros de las funciones trigonométricas”.
- Si el estudiante es capaz de entender que el conjunto solución de una ecuación trigonométrica se puede representar como una o varias expresiones del tipo, donde es una expresión algebraica de variable entera, toma conciencia de este proceso en su totalidad y es capaz de actuar sobre él, entonces tiene una concepción objeto del concepto “conjunto solución de una ecuación trigonométrica del tipo ab =0”.

Figura 1: DG del conjunto solución de la construcción conjunto solución de la ecuación trigonométrica ab=0, como objeto



7. En búsqueda de evidencias empíricas para la DG

Realizamos una toma de datos con la intención de documentar las construcciones y mecanismos mentales dispuestos en la DG, que consideró dos momentos: la aplicación de un cuestionario diagnóstico de cuatro preguntas construidas a la luz de la DG, y la indagación en profundidad a través de una entrevista semiestructurada de tres preguntas, de ciertos aspectos de la DG dados por el análisis del cuestionario anterior.

7.1 Primer momento: el cuestionario

Diseñamos un cuestionario diagnóstico con la intención de documentar:

- El cuerpo de los números reales como objeto (pregunta 1)
- Propiedad hankeliana como proceso (pregunta 2)
- Resolución de las ecuaciones del tipo *ab=0* como proceso (pregunta 3)
- Funciones trigonométricas como proceso (pregunta 4)

Realizamos un análisis a priori y uno a posteriori para cada una de las preguntas.

7.1.1 Análisis a priori del cuestionario

Hemos seleccionado una pregunta del cuestionario, para darla a conocer en esta comunicación, que a continuación será analizada a la luz de la DG presentada.

Pregunta 3 del cuestionario

Resolver en los números reales las siguientes ecuaciones, verificar una a una las soluciones y escribir en forma explícita el conjunto solución.

$i)\quad (x-1)x=0 \qquad\qquad ii)\quad (2x+5)(x-4)=0$

$iii)\quad x^3+7x^2+10x=0 \qquad\qquad iv)\quad 0=5x$

En esta pregunta se espera que los estudiantes resuelvan cada ecuación ocupando la propiedad hankeliana y las propiedades de los números reales como cuerpo. Nos interesa indagar su concepción sobre ecuaciones de este tipo, así como también si aplican la propiedad hankeliana, despejan la variable ocupando propiedades de los reales como cuerpo, verifican para cada raíz encontrada y explicitan el conjunto solución. La **respuesta esperada,** que mostramos sólo para la ecuación i), corresponde a un procedimiento como el siguiente:

$i)\quad (x-1)x=0$ aplicamos la propiedad hankeliana

$x-1=0 \quad \vee \quad x=0$

$x_1=1 \qquad\qquad x_2=0$

Verificación: Para $x_1=1 \rightarrow$ $\begin{array}{c}(1-1)\cdot 1=0\\ 0\cdot 1=0\\ 0=0\end{array}$ Verdadero

Para $x_2=0 \rightarrow$ $\begin{array}{c}(0-1)\cdot 0=0\\ (-1)\cdot 0=0\\ 0=0\end{array}$ Verdadero

Por lo tanto el conjunto solución de *i)* es $S=\{0,1\}$

7.1.2 Observaciones sobre el desempeño de los estudiantes y análisis a posteriori

Con el fin de mostrar ejemplos de los datos obtenidos, a continuación presentamos una selección del trabajo realizado por los estudiantes en la pregunta antes descrita.

Análisis a posteriori Pregunta 3

En la parte i de la pregunta 3, el estudiante 1 (E1) realiza la acción de calcular el producto $x(x-1)$, factoriza erróneamente, y a pesar de eso encuentra una de las raíces en forma correcta y otra en forma errónea, como consecuencia de la factorización incorrecta. Luego realiza la acción de verificar con $x=1$, la cual finalmente explicita como solución (figura 2).

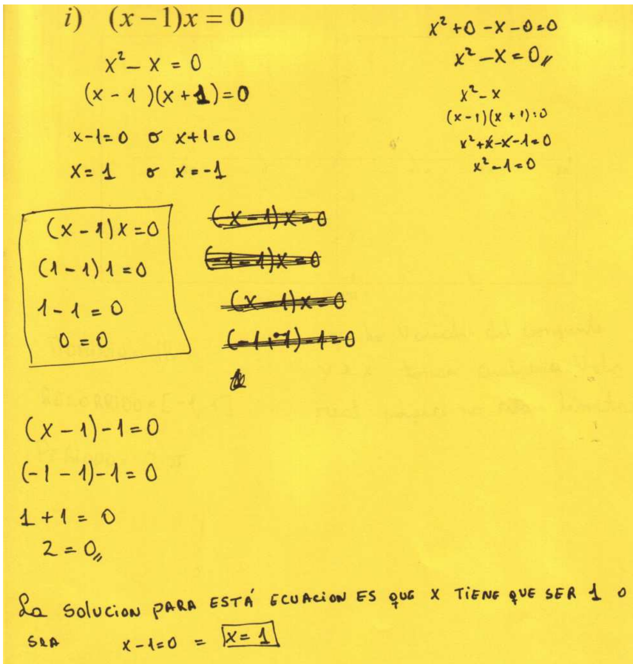


Figura 2: Respuesta del E1 a la pregunta 3 apartado i.

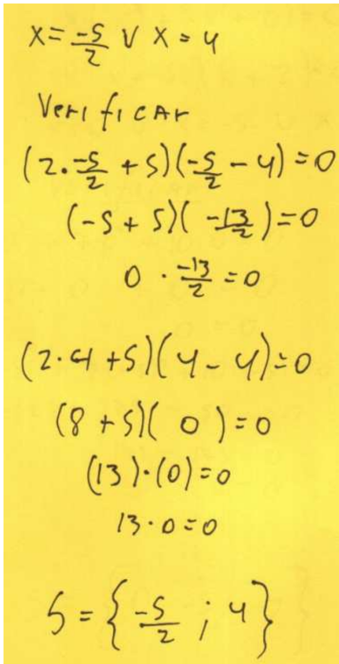


Figura 3: Respuesta del E6 a la pregunta 3, apartado ii

De acuerdo a este análisis, este estudiante, para la parte i de la pregunta 3, muestra una concepción acción del concepto ecuaciones del tipo *ab=0*. En la parte ii de la pregunta 3, el estudiante 6 (E6) realiza la acción de igualar cada factor a cero en forma mental, representando dicha forma en las acciones: despejar la variable, verificar para cada raíz encontrada y explicitar el conjunto solución (figura 3), acciones que logra interiorizar en el proceso “ecuaciones del tipo *ab=0*”.

En la parte iii de la pregunta 3, E2 realiza la acción de factorizar el trinomio por *x*, luego realiza la acción de volver a factorizar el segundo factor expresado en $(x+5)(x+2)$. Al tener toda la expresión igualada a cero y factorizada, realiza la acción de encontrar dos de las tres raíces, omitiendo la raíz $x=0$ (figura 4); como en la parte i de la pregunta 3, en $(x-1)x=0$, encuentra las dos raíces, podría ser que en la parte iii le resta importancia al factor x ante los otros dos factores provenientes del trinomio cuadrático, reduciendo el factor x a un mero coeficiente, pero sin una reflexión. De todas formas realiza la acción de verificar las raíces encontradas, finalizando con la acción de explicitar el conjunto solución, pero con la omisión de $x=0$. Todas estas evidencias muestran que para la parte iii de la pregunta 3, E2 está en vías de mostrar una concepción proceso del concepto “resolución de ecuaciones del tipo *ab=0*”.

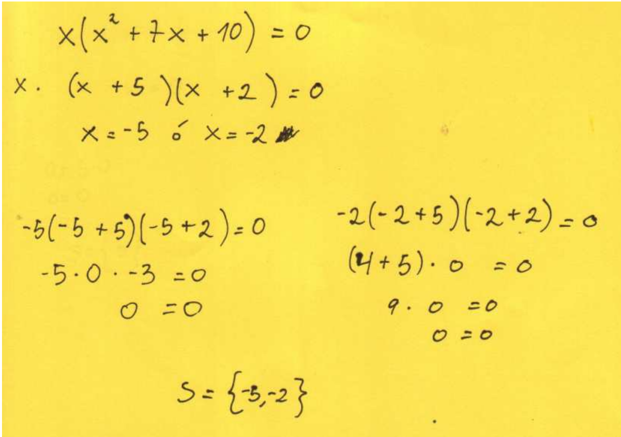


Figura 4: Respuesta del E2 a la pregunta 3, apartado iii.

En el apartado iv, E3 realiza la acción de identificar el producto igualado a cero y resuelve la ecuación ocupando la *propiedad hankeliana*. Esto se aprecia en sus argumentos cuando iguala cada factor a cero (figura 5). También realiza las acciones de identificar una contradicción para 5=0 y de encontrar la única raíz; luego realiza las acciones de verificar para la raíz encontrada y de explicitar el conjunto solución.

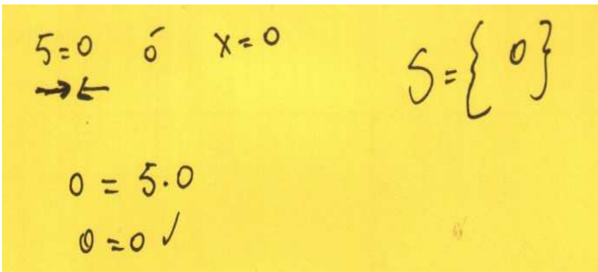


Figura 5: Respuesta del E3 a la pregunta 3, apartado iv).

De acuerdo a este análisis, se puede apreciar que el estudiante reflexiona en las acciones de igualar cada factor a cero, encontrar y verificar la única raíz y explicitar el conjunto solución. Esto evidencia que E3 ha interiorizado estas acciones en el proceso “resolución de ecuaciones del tipo *ab=0*”.

Conclusiones de la pregunta 3

De un total de ocho estudiantes que respondieron la pregunta 3 del cuestionario inicial, podemos señalar que:

- Siete de los ocho muestran la concepción proceso del concepto “ecuaciones del tipo *ab=0*”. Evidencia de lo anterior es que transforman mediante estímulos internos una ecuación de la forma *ab=0* a dos expresiones igualadas a cero como aplicación de la *propiedad hankeliana*, lo que lleva a realizar las acciones de encontrar cada raíz, verificar para cada raíz y explicitar el conjunto solución. Estas acciones se interiorizan en el proceso “ecuaciones del tipo *ab=0*”.

- Uno de los ocho estudiantes (E2) está en vías de mostrar una concepción proceso del concepto "ecuaciones del tipo *ab=0*". Las evidencias mostraron que este estudiante tiene problemas en la factorización y la interpretación de un producto igualado a cero.
- Es importante señalar que sólo E3 resuelve la ecuación *0=5x* ocupando la *propiedad hankeliana*.

7.2 Segundo momento: la entrevista semiestructurada

Hemos seleccionado una pregunta de la entrevista para mostrar los problemas que los estudiantes presentaron para abordarla. Más aún, a través de su respuesta muestran las construcciones y mecanismos mentales puestos en juego en su desarrollo.

7.2.1 Análisis a priori de la entrevista

Pregunta 1 de la entrevista

Resolver las siguientes ecuaciones para la variable x en todo el dominio de la(s) función(es). Verificar en el intervalo $[0,2\pi[$.

$i)\quad (sen\,x-1)\cos x = 0$ $\qquad ii)\quad (2sen\,x+1)(sen\,x-4)=0$

$iii)\quad \tan x\, sen^2 x - sen^2 x - \tan x\, sen\,x + sen\,x = 0$ $\qquad iv)\quad 0 = 5\tan x$

El propósito de esta pregunta es documentar la construcción objeto del concepto "ecuaciones trigonométricas de ángulos simples del tipo *ab=0*", a partir de un comportamiento observable de los estudiantes, esto es:

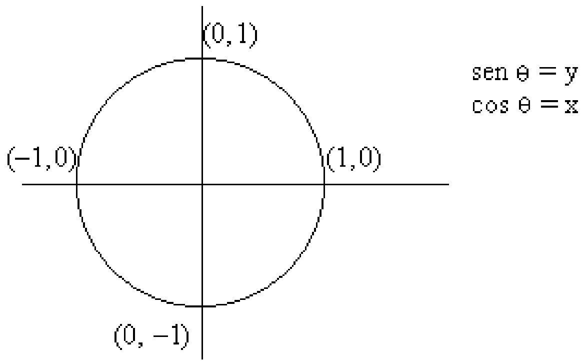
- Si el estudiante en i) generaliza la *propiedad hankeliana* y las ecuaciones del tipo *ab=0* a ecuaciones trigonométricas, igualando cada factor a cero, despeja para la o las funciones ocupando inverso aditivo y multiplicativo, determina los valores de *x* para que $sen\ x = 1$ y $\cos x = 0$, justificando con la circunferencia goniométrica, verifica para cada raíz, da la solución general para todo el dominio de las funciones seno y coseno, y está consciente de todo el proceso, actuando sobre él, entonces muestra la concepción objeto del concepto "ecuaciones trigonométricas de ángulos simples del tipo *ab=0*".
- Si el estudiante en ii) generaliza la *propiedad hankeliana* y las ecuaciones del tipo *ab=0* a ecuaciones trigonométricas, igualando cada factor a cero, despeja para la función seno ocupando inverso aditivo y multiplicativo, encuentra los valores de *x* en el intervalo $[0,2\pi[$ para $sen\ x = -\frac{1}{2}$, determina que no existen valores de *x* para *sen x=4*, verifica en el intervalo $[0,2\pi[$, entrega la solución general en todo el dominio de la función seno, y está consciente de todo el proceso, actuando sobre él, entonces muestra la concepción objeto del concepto "ecuaciones trigonométricas de ángulos simples del tipo *ab=0*".
- Si el estudiante en iii) factoriza por $sen\ x$, luego factoriza en dos binomios, generaliza la *propiedad hankeliana* y las ecuaciones del tipo *ab=0* a ecuaciones trigonométricas, igualando cada factor a cero, despeja para cada función ocupando inverso aditivo y multiplicativo, encuentra los valores de *x* en

el intervalo $[0,2\pi[$ verifica en el intervalo $[0,2\pi[$, entrega la solución general en todo el dominio de las funciones, y está consciente de todo el proceso actuando sobre él, entonces muestra la concepción objeto del concepto "ecuaciones trigonométricas de ángulos simples del tipo *ab=0*".

- Son suficientes i) y ii) para que dé el objeto; el análisis de iii) es similar, salvo que existe la dificultad de la factorización. Si el estudiante no logra factorizar es imposible hacer el análisis del resto del procedimiento. En $0 = 5\tan x$, si el estudiante justifica que para que se cumpla la igualdad debe hacerse cero la tan(x), ocupando la *propiedad hankeliana,* y entrega la solución particular en el intervalo $[0,2\pi[$, entonces tendrá la concepción proceso del concepto "ecuaciones trigonométricas de ángulos simples del tipo *ab=0*". Si entrega la solución general en todo el dominio de la función tangente, entonces tendrá la concepción objeto del concepto "ecuaciones trigonométricas de ángulos simples del tipo *ab=0*". Si despeja $\tan x$ ocupando inverso multiplicativo, no se puede hacer el análisis con la *propiedad hankeliana*.

Mostramos, a modo de ejemplo, la **respuesta esperada i**:

$$i)\quad (sen\ x - 1)\cos x = 0$$
$$sen\ x - 1 = 0 /{+1} \quad \vee \quad \cos x = 0$$
$$sen\ x = 1 \quad \vee \quad \cos x = 0$$
$$x = 90^{o} \qquad x = 90^{o}, 270^{o}$$
$$x = \frac{\pi}{2} \qquad x = \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}$$



Verificación:

Para $x = 90^{o} \rightarrow$
$$i)\quad (sen\ 90^{o} - 1)\cos 90^{o} = 0$$
$$(1-1)\cdot 0 = 0$$
$$0 \cdot 0 = 0$$
$$0 = 0$$

Verdadero

Para $x = 270^{o} \rightarrow$
$$(sen 270^{o} - 1)\cdot \cos 270^{o} = 0$$
$$(-1-1)\cdot 0 = 0$$
$$(-2)\cdot 0 = 0$$
$$0 = 0$$

Verdadero

$$S = \left\{ (2n-1)\cdot \frac{\pi}{2} / ; n \in Z \right\}$$

7.2.2 Observaciones sobre el desempeño de los estudiantes y análisis a posteriori

Con el fin de mostrar ejemplos de los datos obtenidos, presentamos una selección del trabajo realizado por los estudiantes en la pregunta antes descrita.

Análisis a posteriori pregunta 1

En la parte i de la pregunta 1, E4 generaliza la propiedad hankeliana y las ecuaciones del tipo *ab=0* a ecuaciones trigonométricas del tipo *ab=0*, igualando cada factor a cero. Esto le permite coordinar los procesos funciones trigonométricas y ecuaciones trigonométricas del tipo *ab=0* a través de cada factor igualado a cero, despejando cada función y determinando los valores de x para $senx = 1$ y $\cos x = 0$, recurriendo al círculo unitario (figura 6); además verifica $x = \frac{\pi}{2}$ y $x = \frac{3\pi}{2}$ en el intervalo $[0, 2\pi)$. Entrega la solución general $S = \begin{cases} \frac{\pi}{2} + 2n\pi \\ \frac{3\pi}{2} + 2n\pi \end{cases}, \ (n \in Z)$, aunque esta solución se reduce a $S = \left\{ \frac{(2n-1)\pi}{2}, \right. \ (n \in Z)$.

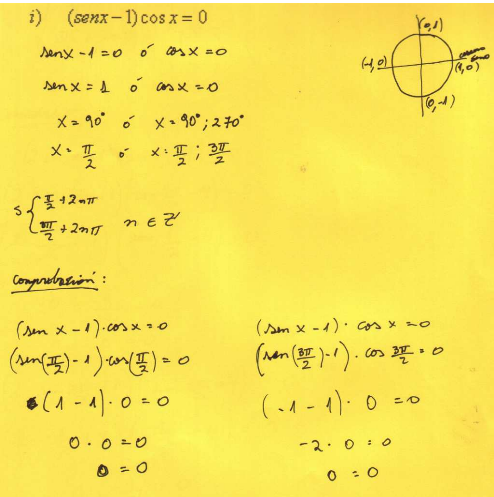


Figura 6: Respuesta del E4 a la pregunta 1i de la entrevista.

Estas evidencias demuestran que E4, para esta parte de la pregunta 1, está consciente de todo el proceso de resolver una ecuación trigonométrica del tipo *ab=0*, por lo que dicho proceso es encapsulado en el objeto “ecuaciones trigonométricas de ángulos simples del tipo *ab=0*”.

En la parte ii de la pregunta 1, E5 generaliza la propiedad hankeliana y las ecuaciones del tipo *ab=0* a ecuaciones trigonométricas del tipo *ab=0*. Esto le permite coordinar los procesos “funciones trigonométricas” y “ecuaciones trigonométricas del tipo *ab=0*” a través de los factores $2senx+1$ y $senx-4$ igualados a cero. A partir del primer factor encuentra las raíces x=210° y x=330° en el intervalo $[0, 2\pi)$ y deduce que de $sen\ x = 4$, la solución es vacía. Posteriormente verifica para *x*=210° y justifica que para *x*=330° no es necesario la comprobación porque daría lo mismo (figura 7).

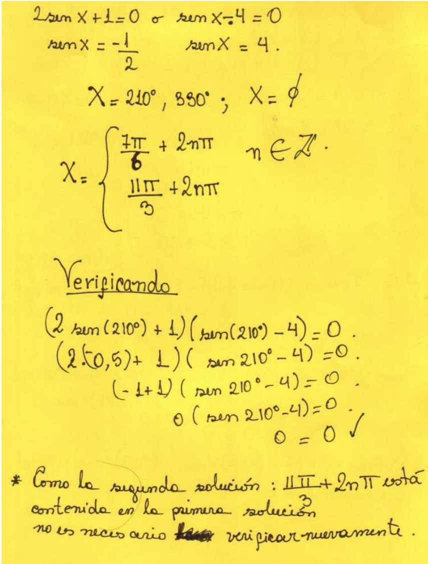


Figura 7: Respuesta del E5 a la pregunta 1ii de la entrevista.

Explicita incorrectamente el conjunto solución, porque transforma 330° en $\frac{11\pi}{3}$. Se puede observar que E5, para esta parte de la pregunta 1, está en vías de mostrar una concepción objeto del concepto "ecuaciones trigonométricas de ángulos simples del tipo AB=0", ya que comete el error mencionado anteriormente.

En la parte iii de la pregunta 1, E6 realiza la acción de transformar $\tan x$ en $\frac{senx}{\cos x}$, pudiendo haber factorizado por $sen\ x$; luego realiza las acciones de calcular la potencia $senx \cdot sen^2 x$, eliminar el denominador de la expresión $\frac{senx}{\cos x} \cdot sen^2 x - sen^2 x - \frac{senx}{\cos x} + senx = 0$ y factorizar por $sen\ x$ (figura 8).

E6 logra coordinar los procesos funciones trigonométricas y ecuaciones trigonométricas del tipo *ab=0* a través de los factores igualados a cero, porque sólo iguala $sen\ x$ a cero y esto lo utiliza en el otro factor: $sen^2 x - sen^2 x \cdot \cos x - 1 + \cos x$, haciendo cero los términos que contengan $sen\ x$, para deducir que $\cos x = 1$. La factorización le permite realizar la acción de encontrar dos de las tres soluciones particulares en el intervalo $[0, 2\pi)$, generalizando ambas en $S = \{n\pi,\ \ n \in Z$. Por último, realiza la acción de verificar las raíces particulares. Este estudiante, en sus trasformaciones, realiza sólo algunas reflexiones internas que lo llevan a parte de la solución, pero la trasformación de $\tan x$ por $\frac{senx}{\cos x}$, hizo que se perdiera la solución particular $x = \dfrac{\pi}{4}$, y por ende entregar el conjunto solución completo. En consecuencia, para la parte iii de la pregunta 1, E6 está en vías de mostrar una concepción proceso del concepto "ecuaciones trigonométricas de ángulos simples del tipo *ab=0*".

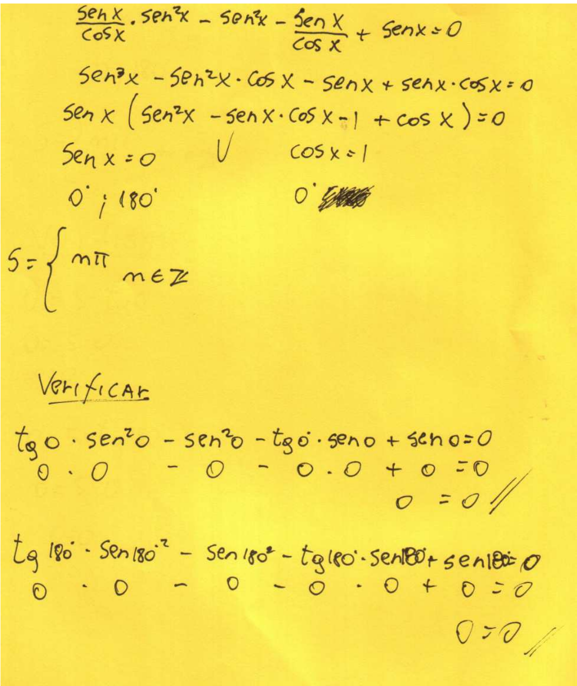


Figura 8: Respuesta del estudiante 6 a la pregunta 1iii de la entrevista.

En la parte iv de la pregunta 1, E2 iguala $\tan x$ a cero, encontrando las soluciones particulares x=0° y x=180°. Posteriormente generaliza la solución a:

$$S = \begin{cases} 0 + n\pi \\ \pi + n\pi \end{cases}, \quad n \in Z$$

y verifica sólo para *x*=0° (figura 9), quizás porque sabe que para *x*=180° será lo mismo.

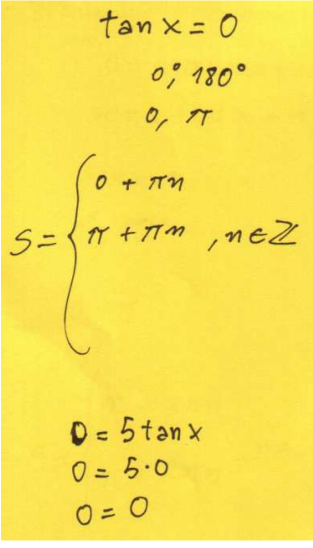


Figura 9: Respuesta del E2 a la pregunta 1iv de la entrevista.

De acuerdo a nuestra DG, E2 para esta parte de la pregunta 1, muestra una concepción objeto del concepto “ecuaciones trigonométricas de ángulos simples de la forma *ab=0*”, ya que está consciente de todo el proceso y actúa sobre él, lo que le permite encontrar el conjunto solución.

Conclusiones de la pregunta 1

De un total de seis estudiantes que respondieron la pregunta 1, podemos señalar que los principales errores que cometieron fueron: omisión de alguna raíz particular, al no utilizar fórmulas de reducción como $\tan x = \tan(180° + x)$, y no descartar *x*=90° con su generalización en el conjunto solución, aunque hayan notado que en la verificación indetermina *tan*(90°). Esto último quizás por falta de orden en el procedimiento, donde primero debieron verificar y luego generalizar el conjunto solución.

- Dos los seis estudiantes igualaron directo $\tan x$ a cero, sin dividir por 5 en la ecuación 0=5tan(x), lo que permitió hacer el análisis a partir de nuestra DG pero con dificultades, ya que asumimos que pensaron que $5\tan x = 0$, sólo cuando $\tan x = 0$.
- Uno de seis estudiantes igualó a cero tanto el factor 5 como el factor $\tan x$ en la ecuación $0 = 5\tan x$, lo que permitió analizar sin ningún problema su respuesta a partir de una generalización directa de la *propiedad hankeliana*.
- Uno de los seis estudiantes muestra una concepción proceso del concepto “ecuaciones trigonométricas de ángulos simples de la forma *ab=0*”. Si bien generaliza las ecuaciones de la forma *ab=0* y la *propiedad hankeliana* a ecuaciones de la forma *ab=0,* y además coordina los procesos funciones trigonométricas y ecuaciones trigonométricas de la forma *ab=0*, a través de los factores *a* y *b* igualados a cero, no está consciente de todo el proceso que le permita actuar sobre él y detectar errores al resolver una ecuación trigonométrica del tipo *ab=0*.
- Tres de los seis estudiantes muestran estar en vías de tener una concepción objeto del concepto “ecuaciones trigonométricas de ángulos simples de la forma *ab=0*”. Si bien están conscientes de todo el proceso, falta que actúen en mayor profundidad sobre él, para que detecten pequeños errores y tomen buenas decisiones algebraicas que les permitan que se encuentren todas las soluciones particulares o que pueden factorizar en todas las ecuaciones dadas, como generalización de la *propiedad hankeliana* a ecuaciones trigonométricas de la forma *ab=0*.
- Dos de los seis estudiantes muestran una concepción objeto del concepto “ecuaciones trigonométricas de ángulos simples de la forma *ab=0*”. Ellos son capaces de resolver una ecuación de este tipo a través de una generalización de las ecuaciones del tipo *ab=0* y la *propiedad hankeliana*; además, coordinan los procesos ecuaciones trigonométricas del tipo *ab=0* con las funciones trigonométricas a través de los factores *a* y *b* igualados a cero. En consecuencia están conscientes en todo el proceso, siendo capaces de actuar sobre él.

8. Conclusiones y reflexiones

8.1. Conclusiones teóricas

A partir de la investigación de Ochoviet (2004), nos centrarnos en la *propiedad hankeliana*, que fue nuestra base como estructura matemática en la resolución de "ecuaciones trigonométricas de ángulos simples del tipo *ab=0*".

Con la teoría APOE analizamos la evolución cognitiva de los conceptos que subyacen alrededor de las "ecuaciones trigonométricas de ángulos simples del tipo *ab=0*" mediante la descripción de las construcciones y mecanismos mentales. El resultado de este análisis a priori se tradujo en nuestra DG Hipotética, que tenía como objetivo probar su viabilidad mediante un cuestionario diagnóstico y una entrevista semiestructurada.

Los instrumentos se analizaron con las respuestas de los estudiantes, categorizando las conclusiones, lo que nos permitió llegar a una DG refinada. Esta última contribuyó a la discusión final de los resultados, concluyendo que de acuerdo a nuestros estudiantes, los conceptos que surgen alrededor de nuestro objeto cognitivo son:

- Cuerpo de los números reales.
- Propiedad hankeliana en los reales.
- Resolución de ecuaciones del tipo *ab=0*.
- Funciones trigonométricas.
- Ecuaciones trigonométricas del tipo *ab=0*.
- Raíces de las funciones trigonométricas en intervalo $[0,\ 2\pi[$.
- Conjunto solución de la ecuación trigonométrica de ángulos simples del tipo *ab=0*.

Esto responde a una de nuestras preguntas de investigación: ¿entre qué matemática u objetos matemáticos transitan los estudiantes de cuarto año medio cuando resuelven ecuaciones trigonométricas de ángulos simples del tipo *ab=0*, aplicando la *propiedad hankeliana*? Esto contrasta los análisis a priori y posteriori de nuestra investigación para los conceptos matemáticos involucrados.

Para responder la pregunta ¿qué conexiones realizan los estudiantes de cuarto año medio en la aplicación de la *propiedad hankeliana* para resolver ecuaciones trigonométricas de ángulos simples del tipo *ab=0*?, sintetizaremos las conclusiones por categorías en la siguiente tabla, donde se aprecian las conexiones que realizan los estudiantes al transitar entre conceptos (o en el mismo), pasando de una concepción a otra a través de los mecanismos mentales.

La síntesis tiene como base la DG refinada.

Tabla 1

Concepto	Mecanismos y construcciones mentales
Cuerpo de los números reales	Un estudiante muestra una concepción **objeto** del concepto "cuerpo de los números reales" cuando está consciente de todo el **proceso** suma y multiplicación de números reales, actuando sobre las propiedades clausura, conmutatividad, asociatividad, neutro aditivo, neutro multiplicativo, inverso aditivo, inverso multiplicativo y distributividad.
Propiedad hankeliana. Si *ab=0*, entonces *a=0 o b=0*; a, b reales	Cuando un estudiante muestre la concepción **objeto** del concepto "cuerpo de los números reales", podrá **desencapsular** en un **proceso** el concepto *propiedad hankeliana,* reconociendo que si *a y b* son números reales, el producto *ab=0* implica que *a=0 o b=0*.
Resolución de ecuaciones del tipo *ab=0*	Cuando un estudiante muestre la concepción **objeto** del concepto "cuerpo de los números reales, podrá **desencapsular** en un **proceso** el concepto "resolución de ecuaciones del tipo *ab=0*"; además, podrá **coordinar** los **procesos** *propiedad hankeliana* y "resolución de ecuaciones del tipo *ab=0*", a través del producto *ab=0*.
Funciones trigonométricas	Un estudiante muestra la concepción **objeto** del concepto "funciones trigonométricas", cuando reflexiona sobre los **procesos** dominio, recorrido y periodicidad de una función específica, tomando conciencia de estos **procesos** al pensarlos como un todo y actuando sobre ellos.
Ecuaciones trigonométricas del tipo *ab=0*	Un estudiante muestra la concepción **objeto** del concepto ecuaciones trigonométricas de ángulos simples del tipo *ab=0* cuando es capaz de reconocer que los factores *a y b* representan funciones trigonométricas de variable real, reconocer que si *ab=0*, entonces *a=0 o b=0.* Además logra **generalizar** la resolución de ecuaciones del tipo *ab=0* y la *propiedad hankeliana* a este tipo de ecuaciones. **Coordina** los **objetos** ecuaciones trigonométricas de ángulos simples del tipo *ab=0* y funciones trigonométricas a través de los factores *a y b* igualados a cero. Además está consciente del proceso como una totalidad, actuando sobre él.
Raíces de la ecuación trigonométrica del tipo *ab=0* en el intervalo $[0, 2\pi[$	Un estudiante muestra la concepción **proceso** del concepto "raíces de la ecuación trigonométrica del tipo *ab=0* en el intervalo $[0, 2\pi[$" si es capaz de entender que si en una función trigonométrica $f(x)$ de variable real, para cualquier valor $x=c$, si $f(c)=0$, entonces c es un cero de la función trigonométrica. Además logra **desencapsular** los objetos funciones trigonométricas y ecuaciones trigonométricas del tipo *ab=0* en este **proceso.**
Conjunto solución de la ecuación trigonométrica de la forma *ab=0*	Un estudiante muestra la concepción **proceso** del concepto "conjunto solución de la ecuación trigonométrica de la forma *ab=0*", cuando es capaz de **coordinar** la solución general con la solución particular en el intervalo $[0, 2\pi[$ a través del período de la función trigonométrica específica.

Las preguntas de investigación fueron guiadas por nuestros dos objetivos generales, que se desglosaron en cinco objetivos específicos. Estos fueron alcanzados a través de nuestra investigación y se concretizan y sintetizan en los siguientes resultados:

- Construcción de una DG, producto del análisis teórico, que describió hipotéticamente las construcciones y mecanismos mentales que subyacen alrededor de las ecuaciones trigonométricas de ángulos simples del tipo *ab=0*.
- El 16,6% de los estudiantes muestra una concepción **proceso** del concepto "ecuaciones trigonométricas de ángulos simples de la forma *ab=0*". Las evidencias muestran que un estudiante para esta concepción es capaz de generalizar las ecuaciones de la forma *ab=0* y la *propiedad hankeliana* a ecuaciones trigonométricas de ángulos simples del tipo *ab=0*; pero al intentar coordinar los procesos funciones trigonométricas y ecuaciones trigonométricas de ángulos simples del tipo *ab=0*, presenta dificultades tales como: transformación de grados a radianes, determinación de alguna solución particular de una ecuación trigonométrica y reflexión en el error cuando se verifica una solución particular.
- El 50% de los estudiantes está en **vías** de mostrar una concepción **objeto** del concepto "ecuaciones trigonométricas de ángulos simples de la forma *ab=0*". Un estudiante en vías de mostrar la concepción objeto generaliza la *propiedad hankeliana* y las ecuaciones de la forma *ab*, y coordina los procesos funciones trigonométricas y ecuaciones trigonométricas del tipo *ab=0* a través de los factores *a y b* igualados a cero, pero con reparos, ya que puede cometer errores en la determinación de un ángulo específico cuando $sen\ x$ es negativo u omitir una solución particular en un cuadrante distinto del primero. Además encuentra el conjunto solución con algunas dificultades producto de errores anteriores. No obstante, un estudiante con estas características está consciente del proceso "ecuaciones trigonométricas de ángulos simples del tipo *ab=0*", pero al actuar sobre él no detecta errores, por eso se explica que muestra estar en vías de la concepción objeto para este concepto.
- El 33% de los estudiantes muestra una concepción **objeto** del concepto "ecuaciones trigonométricas de ángulos simples de la forma *ab=0*". Esto se demuestra porque son capaces de generalizar las ecuaciones del tipo *ab=0* y la *propiedad hankeliana* a ecuaciones trigonométricas de la forma *ab=0*. Además coordinan los procesos funciones trigonométricas y ecuaciones trigonométricas de la forma *ab=0* a través de los factores *a y b* igualados a cero, y todo esto les permite encontrar el conjunto solución. En consecuencia, un estudiante con estas características está consciente de todo el proceso y actúa sobre él.

8.2. Conclusiones didácticas

El análisis de los resultados permitió reafirmar que se necesita de una concepción objeto de la estructura de cuerpo de los números reales, para resolver "ecuaciones trigonométricas de ángulos simples del tipo *ab=0*". Esto porque los estudiantes necesitan transitar por esta estructura para justificar sus procedimientos, utilizando propiedades como asociatividad, distributividad, existencia de inverso multiplicativo, entre otras, tránsito que se planteó en una de nuestras preguntas de investigación.

Por otro lado, los estudiantes necesitan transitar por las funciones trigonométricas para resolver las ecuaciones trigonométricas propuestas en nuestra investigación. Se pudo concluir que un estudiante que muestre una concepción objeto de la estructura de cuerpo de los números reales (como lo mostró E18), no podrá mostrar una concepción objeto del concepto “ecuaciones trigonométricas de ángulos simples del tipo *ab=0*” si no muestra una concepción objeto del concepto “funciones trigonométricas”.

Las conexiones que realizan los estudiantes en la aplicación de la *propiedad hankeliana* para resolver ecuaciones trigonométricas de ángulos simples del tipo *ab=0*, permitió que nos diéramos cuenta, a través del análisis de resultados, de que necesitan coordinar los objetos “ecuaciones trigonométricas de ángulos simples del tipo *ab=0*” y las “funciones trigonométricas a través de los factores *a y b* igualados a cero, teniendo presente “la estructura de cuerpo de los números reales” como objeto, cuestión que se puede explicar a través de:

- Detectamos que los estudiantes tienen problemas de traspaso de las razones trigonométricas a las funciones trigonométricas, dificultades de traspaso de grados a radianes, problemas de manipulación de ángulos negativos y de ángulos especiales *30°*, *45°* y *60°* para ser aplicados en todo el dominio de las funciones trigonométricas. Pudimos apreciar dificultades en la determinación de ángulos en cuadrantes distintos del primero, al encontrar, por ejemplo, tres de cuatro soluciones particulares en el intervalo $[0, 2\pi[$ y principalmente, cuando la imagen de la función no es una de las usuales que se desprenden de la circunferencia goniométrica o de los triángulos rectángulos especiales.
- Al no verificar antes de explicitar el conjunto solución, algunos estudiantes olvidan descartar las soluciones que no verifican la igualdad y que estaban incluidas en la solución general.

La teoría APOE permite describir la evolución cognitiva de las ideas matemáticas, lo que se representó para los conceptos en la DG hipotéticos y refinados. De esta forma se pueden construir estos conceptos matemáticos, ya que la hipótesis de la teoría APOE es que todo concepto matemático se puede describir a partir de las construcciones y mecanismos mentales. La importancia de esto es realizar una DG para los conceptos previos más relevantes: estructura de cuerpo de los números reales y funciones trigonométricas. Una DG permitiría detectar qué significa comprender el concepto cuerpo de los reales y funciones trigonométricas y cómo puede ser alcanzada tal construcción.

Por otro lado, la *propiedad hankeliana* nos da luces para otras investigaciones, como las construcciones y mecanismos mentales asociados a cualquier tipo de ecuaciones del tipo *ab=0*, donde *a y b* son funciones de variable real. Cualquier investigación en Matemática Educativa debe estar atenta a responder a las necesidades del sistema educacional. En Chile, la enseñanza media sufre cambios constantemente. Actualmente existe un ajuste curricular en primero y segundo medio, que en los próximos años se extenderá a tercero y cuarto. En segundo medio se estudian los números reales. Será interesante que investigaciones analicen cómo se aborda este concepto, por la importancia en la construcción de conceptos tales como funciones trigonométricas o funciones exponenciales, entre otros. Como sugerencia, se puede hacer reflexionar a los estudiantes de enseñanza media acerca de las propiedades de cuerpo de los números reales, centrándose en el sentido de la igualdad y el uso posterior para justificar, por ejemplo, la resolución de ecuaciones o el análisis de parámetros en funciones trigonométricas o exponenciales. También existe una necesidad del desarrollo de habilidades propias de la matemática y que aparecen en los programas de estudio. Estas habilidades podrían relacionarse con los mecanismos mentales que ponen en juego los estudiantes cuando conectan conceptos matemáticos. Esto da pie a otro foco de investigación; por ejemplo, cómo se puede relacionar habilidades como el conocer, comprender, aplicar, analizar, sintetizar y evaluar con los mecanismos mentales.

Sugerimos también que cuando se aborden las funciones trigonométricas, se dé importancia a cualquier tipo de ángulo y no sólo los usuales que se desprenden de los triángulos rectángulos especiales o de la circunferencia goniométrica. Asimismo, dar mayor importancia en la enseñanza media a las funciones trigonométricas inversas, incluso cuando haya un trabajo con calculadora: lo que interesa son las reflexiones que pone en juego un estudiante cuando transita de un concepto a otro.

Bibliografía

Buendía, G y Montiel, G. (2009). Acercamiento socioepistemológico a la historia de las funciones trigonométricas. En P. Lestón (Ed), *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa 22,* 1287-1296. México. Comité Latinoamericano de Matemática Educativa.

Dubinsky, E. (1996). Aplicación de la perspectiva piagetiana a la educación matemática universitaria. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa* 8(3), 24-41

Maldonado, E y Miranda, J. (2009). Análisis didáctico y cognitivo de los elementos de trigonometría. En P. Lestón (Ed), *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa 22,* 169-178. México. Comité Latinoamericano de Matemática Educativa.

Maldonado, E, Rodríguez, F y Santana, S. (2009). Una propuesta para abordar la transición grados→radianes. En P. Lestón (Ed*), Acta Latinoamericana de Matemática Educativa 22*, 693-701. México. Comité Latinoamericano de Matemática Educativa.

Maldonado, E. (2005). *Un análisis didáctico de la función trigonométrica*. Tesis de Maestría no publicada, Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del IPN. México.

MINEDUC (2002). *Funciones y Procesos Infinitos*. Programa de Estudio Cuarto Año Medio. Santiago-Chile.

Navarro, P. y Villalva, M. (2009). Un estudio sobre la desarticulación entre la semejanza y la trigonometría en el bachillerato. En P. Lestón (Ed), *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa 22*, 287-296. México. Comité Latinoamericano de Matemática Educativa.

Ochoviet, T. (2004). *¿ $A \cdot B = 0 \Rightarrow A = 0 \quad \vee \quad B = 0$? Reflexiones e implicancias en la enseñanza de la matemática.* Tesis de maestría no publicada, Centro de Investigación y de Estudios avanzados del IPN. México.

Swokowski, E. y Cole, J. (1997). *Álgebra y trigonometría con geometría analítica.* México D.F.: International Thomson Editores.

Trigueros, M. (2005). La noción de esquema en la investigación en Matemática Educativa a nivel superior. *Revista Educación Matemática Santillana 7(001),* 5-31.

Gabriel Araya Rivera: Magíster en Didáctica de la Matemática. Pontificia Universidad Católica de Valparaíso (Chile). Profesor de Matemática y Computación. Universidad de La Serena (Chile). **gearaya@gmail.com**

Marcela Parraguez González. Pontificia Universidad Católica de Valparaíso (Chile). Doctora en Matemática Educativa. Profesora del Programa de Doctorado y Magíster en Didáctica de la Matemática de la Pontificia Universidad Católica de Valparaíso (Chile). **marcela.parraguez@ucv.cl**