

<http://www.fisem.org/www/index.php>  
<https://union.fespm.es/index.php/UNION>

## Competencias Matemáticas de Estudiantes de Nuevo Ingreso a una Licenciatura en Física

Agustín Torres Rodríguez, Marcos Campos Nava

Fecha de recepción: 25/07/2019  
Fecha de aceptación: 15/04/2020

<p><b>Resumen</b></p>	<p>Se aplicó una prueba diagnóstica a estudiantes de tres generaciones que ingresaron a una licenciatura en física de una universidad pública; dicho instrumento estuvo dividido en cuatro secciones que buscaban indagar sobre las competencias matemáticas que los estudiantes poseían en aritmética y álgebra, geometría y trigonometría, pre-cálculo, y cálculo. En general se encontró que una proporción mayor de los estudiantes no contó con las competencias mínimas necesarias para el buen desempeño durante sus estudios, y que en particular las dificultades se concentraron en las competencias de resolución de problemas, argumentación y modelación. <b>Palabras clave:</b> competencias matemáticas, prueba diagnóstica, licenciatura en física</p>
<p><b>Abstract</b></p>	<p>A diagnostic test was applied to students of three generations who entered a degree in physics from a public university; this instrument was divided into four sections that sought to investigate the mathematical competencies that students possessed in arithmetic and algebra, geometry and trigonometry, pre-calculation, and calculation. In general, it was found that a larger proportion of the students did not have the minimum skills necessary for good performance during their studies, and that in particular the difficulties were concentrated in the problem solving, argumentation and modeling skills. <b>Keywords:</b> Mathematical skills, diagnostic test, degree in physics</p>
<p><b>Resumo</b></p>	<p>Um teste diagnóstico foi aplicado a estudantes de três gerações que ingressaram em um curso de física de uma universidade pública; Este instrumento foi dividido em quatro seções que buscaram investigar as competências matemáticas que os estudantes possuíam em aritmética e álgebra, geometria e trigonometria, pré-cálculo e cálculo. Em geral, constatou-se que uma proporção maior dos alunos não possuía as habilidades mínimas necessárias para um bom desempenho durante os estudos e que, em particular, as dificuldades estavam concentradas nas habilidades de resolução de problemas, argumentação e modelagem. <b>Palavras-chave:</b> Habilidades matemáticas, teste de diagnóstico, licenciatura em física</p>

## 1. Introducción

En menos de un siglo, las matemáticas pasaron a ser de un conjunto de herramientas elementales de la vida diaria, a considerarse como un componente fundamental de la cultura hoy en día (Boero, Dapueto y Parenti, 1996), debido a que están estrechamente relacionadas a las tecnologías actuales, así como a los distintos fenómenos naturales y sociales. En el contexto educativo, la importancia que tienen las matemáticas para el aprendizaje de las diferentes disciplinas científicas, incluida la física, no está puesta en juicio, basta recordar que las matemáticas le han permitido el desarrollo de sus teorías y aplicaciones (Rodríguez, 2011), y que la práctica diaria de la física utiliza cantidades enormes de matemáticas, pues los conceptos con los que formula sus teorías son de naturaleza matemática. Es por ello que en los modelos educativos actuales, la enseñanza de las matemáticas resulta central. En México, a partir de la reforma educativa vigente para el nivel bachillerato (conocida como RIEMS), la Secretaría de Educación Pública, la Subsecretaría de Educación Media Superior y la Dirección General de Bachillerato han delineado el denominado Sistema Nacional de Bachillerato (SNB), que se estructura en un marco curricular común, y define un conjunto de competencias que conforman un perfil de egreso del estudiante de bachillerato. En este perfil se incluyen y describen algunos conocimientos y habilidades. En esta reforma educativa, se declara el propósito de que el enfoque de competencias tiene como finalidad contribuir a formar personas competentes para la vida personal, social, académica y profesional, además de que les proporciona una base para acceder al siguiente grado o nivel educativo, que en este caso sería el nivel profesional o universitario.

## 2. Algunos referentes teóricos

En el caso concreto de las competencias matemáticas escolares, no existen suficientes referentes a nivel nacional (Bartolucci, 2013), pero podemos partir de los conceptos y clasificaciones establecidos por PISA (Programa Internacional para la Evaluación de los Estudiantes), organismo que, desde su informe de 2003 define las competencias matemáticas como “un conjunto de capacidades puestas en juego por los estudiantes para analizar, razonar y comunicar con eficacia cuando resuelven o formulan problemas matemáticos” (p.37). Las razones de la importancia que tienen las competencias para organismos como la OCDE (Organización para la Cooperación y Desarrollo Económico) e instancias como PISA, tienen relación con la capacidad de los estudiantes para analizar, razonar y comunicar eficazmente sus ideas al tiempo que se plantean, formulan, resuelven e interpretan problemas matemáticos en una variedad de contextos. PISA clasifica las competencias matemáticas en ocho tipos a saber: pensar y razonar, argumentar, comunicar, modelar, plantear y resolver problemas, representar, utilizar lenguajes simbólicos y hacer uso de recursos y herramientas. Las competencias matemáticas se hallan interrelacionadas también con diferentes expresiones del pensamiento matemático. Estas expresiones o dimensiones del pensamiento matemático son: el pensamiento numérico, el

geométrico, el lógico, el algebraico y el variacional, entre otros (Rondero, 2013). Así por ejemplo en el pensamiento numérico se incluyen, además de las operaciones básicas, las propiedades numéricas y todas aquellas actividades que se pueden identificar con la acción de contar. En el caso del pensamiento geométrico, tiene relación con el estudio de las formas de figuras geométricas regulares, pero también con las medidas lineales, de área, de volumen y le medida de los ángulos. Otro tipo de pensamiento matemático es el pensamiento variacional, que resulta un poco más complejo que los anteriores, porque se sustenta en el estudio de lo que varía o cambia, la modelación de fenómenos donde surge la variación aparece en el estudio de las sucesiones, series, funciones, límites, derivadas e integrales.

En el cuadro siguiente (tabla 1) se resumen estas clasificaciones, en las cuales basamos la propuesta de este trabajo.

Competencias Habilidades y destrezas <sup>1</sup>		Dimensiones del pensamiento matemático <sup>2</sup>
Pensar y razonar	Plantear y resolver problemas	Numérico
Argumentar	Representar	Algebraico
Comunicar	Usar lenguaje simbólico	Geométrico
Modelar	Hacer uso de recursos y herramientas	Lógico
		Variacional
1.-Con base en clasificación de PISA (2003).		
2.-Rondero (2013).		

**Tabla 1.** Clasificación de los referentes teóricos empleados.

Para entender las interrelaciones que existen entre estos referentes, tomemos un ejemplo: para el logro de la competencia *plantear y resolver un problema*, se requiere la conjunción de varias de las dimensiones del pensamiento matemático, como puede ser el caso del pensamiento aritmético y algebraico al plantear una ecuación que represente la relación entre dos incógnitas o variables. En otro sentido, otro ejemplo podría ser al plantear la resolución de un triángulo, que implica las dimensiones numérica, algebraica y geométrica; en combinación con las habilidades de uso de lenguaje simbólico, de representar y argumentar.

### 3. Antecedentes

En el contexto mexicano, se tiene un estudio del Instituto Nacional de Evaluación Educativa (INEE) del año 2013, en el que se evaluaron competencias del estudiante que egresa del nivel medio superior (bachillerato); en dicho estudio, se clasifican las competencias matemáticas de los estudiantes, agrupándolas en cuatro niveles, basándose a su vez en datos de la evaluación de PISA del 2009.

Entre sus resultados más relevantes, se obtuvo que aproximadamente el 30% de los estudiantes en México se encuentran dentro del nivel 1 de desempeño, esto significa que pueden responder a preguntas relacionadas con contextos familiares claramente definidos y en las que está presente la información relevante, también son capaces de identificar alguna información y usar procedimientos rutinarios siguiendo instrucciones directas. Otro 30 % se ubicaba en el nivel 2, donde ya pueden interpretar y reconocer situaciones en contextos que requieren de inferencias directas, logran utilizar algoritmos y fórmulas, así como procedimientos simples, efectuando razonamientos directos e interpretaciones literales de los resultados.

Por su parte, en el nivel (3) se ubicó el 25 % de los estudiantes, aquí ejecutan procedimientos que requieren decisiones secuenciales, seleccionan y aplican estrategias de solución a los problemas, elaboran escritos breves exponiendo interpretaciones, resultados y razonamientos. Sólo el 15% se hallaba en el nivel 4, donde ya trabajan con modelos explícitos en situaciones complejas que exigen la formulación de supuestos y conjeturas, además de elaborar y comunicar explicaciones y argumentos.

En el caso de este trabajo, nos interesó indagar acerca de las competencias y el tipo de pensamiento matemático que exhiben estudiantes que ingresan al primer semestre de la licenciatura en Física y Tecnología Avanzada, que se imparte en el Instituto de Ciencias Básicas e Ingeniería de la Universidad Autónoma del Estado de Hidalgo, tomando como base las competencias con las cuales debe egresar el estudiante del nivel educativo anterior, en este caso del bachillerato. Se considera además que la naturaleza propia de esta licenciatura exige asimismo un perfil de ingreso donde se declaran ciertas competencias que deben poseer los aspirantes, que en el caso de las matemáticas solicita conocimientos básicos en cuatro áreas: geometría, trigonometría, álgebra y cálculo. Se consideran relevantes estas bases, en virtud de que una de las competencias que se espera pueda desarrollar durante su carrera se refiere a la modelación teórica y experimental de sistemas y procesos físicos, en particular se pretenden desarrollar las siguientes competencias: la específica de modelación como un eje central del currículum, y la genérica de pensamiento crítico. Así tenemos que ambas requieren desarrollar fuertemente las herramientas que proporcionan las matemáticas.

#### 4. Metodología

Es importante aclarar que este estudio no tiene el propósito de analizar los resultados en forma preponderantemente cuantitativa, así como tampoco asegurar que una prueba pueda ser estandarizada, como el caso de los estudios que lleva a cabo PISA. La finalidad, en cambio, es indagar acerca de las competencias que exhibe un grupo de estudiantes de nuevo ingreso en la licenciatura en física. Para ello se diseñó un instrumento con un total de 20 reactivos y se aplicó como un examen diagnóstico a un grupo de estudiantes que ingresaron a primer semestre de la

licenciatura en física, en los periodos de 2013, 2014 y 2015, y que fueron 26, 21 y 21 respectivamente. Este examen se encuentra dividido en cuatro partes que examinan cuatro áreas de la matemática del nivel medio superior: aritmética y álgebra (AA), geometría (G), pre-cálculo (PC) y cálculo (C). Es importante también aclarar que nuestra intención no fue considerar exhaustivamente cada una de las competencias, tal como las clasifica PISA, sino preguntas diversas que exploran algunas de las competencias involucradas. Es por ello que se seleccionaron preguntas que puedan identificar si el estudiante exhibe algunas de estas competencias. Las fuentes de los problemas planteados fueron libros de texto de bachillerato, el texto de álgebra recreativa de Yákov Perelmán, así como guías de estudio para el nivel medio superior, complementándolas con reactivos diseñados por los autores.

Algunas preguntas solo requerían que el estudiante desarrollara algunos procedimientos algorítmicos que les permitieran encontrar una solución correcta, exhibiendo competencias como el pensar, razonar y comunicar; en tanto que otras pretendieron que el estudiante hiciera uso de competencias más complejas, tales como la modelación, la argumentación y el planteamiento y resolución de problemas. En el anexo A, se muestra el diseño de la prueba tal como les fue presentada a los estudiantes. Las preguntas 2 y 4 de la sección de aritmética y álgebra, la pregunta 5 de la parte de geometría, las preguntas 3 y 4 de la sección de pre-cálculo y la pregunta 3 de la sección de cálculo fueron elegidas y/o diseñadas con la intención de explorar las competencias más complejas, ya que para resolverlas el estudiante puede explorar diferentes rutas, además de que algunas no presentan una solución única.

## 5. Análisis de resultados

En la tabla 2 se muestran los puntajes generales obtenidos por los estudiantes. Se clasificaron cuatro grupos o niveles, en el (1) los que contestaron de 0 a 5 reactivos correctamente, (2) los que contestaron de 6 a 10 reactivos, (3) los que solucionaron de 11 a 15 reactivos y en (4) los que solucionaron más de 15 reactivos, que correspondieron respectivamente a las generaciones 2013, 2014 y 2015 de los alumnos del estudio. Una razón para esta clasificación en cuatro niveles fue considerar una forma análoga de clasificar los resultados al estudio del INEE de 2013, y asimismo la clasificación de los reactivos en las 4 áreas de la matemática, para empatarlas con las cuatro áreas que consideran básicas y donde se requieren de competencias previas de los estudiantes que ingresan en la licenciatura de física estudiada.

De este modo podemos utilizar tanto los resultados de estudios previos, como las clasificaciones de las competencias matemáticas y de las dimensiones o tipos de pensamiento matemático, para poder tener un marco de referencia pertinente para el análisis de nuestros resultados.

Puntaje 2013	# de estudiantes	Puntaje 2014	# de estudiantes	Puntaje 2015	# de estudiantes
$0 < x \leq 5$	11	$0 < x \leq 5$	9	$0 < x \leq 5$	6
$5 < x \leq 10$	14	$5 < x \leq 10$	12	$5 < x \leq 10$	10
$10 < x \leq 15$	1	$10 < x \leq 15$	0	$10 < x \leq 15$	5
$15 < x \leq 20$	0	$15 < x \leq 20$	0	$15 < x \leq 20$	0
Total estudiantes	26		21		21

**Tabla 2.** Puntajes generales obtenidos en las tres aplicaciones realizadas.

Estos puntajes expresados como calificaciones resultan ser de 5.40, 5.62 y 7.76 en promedio, con lo que parecería a primera vista que la tercera generación tuvo un mayor desempeño, además porque si observamos con cuidado, una mayor proporción (15/21) de los estudiantes de esta generación se ubicaron en los niveles segundo y tercero según esta tabla.

Si pretendemos, hallar diferencias significativas entre las tres generaciones, y asumimos que las calificaciones de cada caso se distribuyen en forma aproximadamente normal, podemos configurar un análisis ANOVA simple aleatorio (Gutiérrez y de la Vara, 2012), aún para un número relativamente pequeño de observaciones, como es en nuestro caso. La hipótesis nula consiste en afirmar entonces que no existe diferencia significativa entre las tres medias de calificación. Si consideramos a cada generación como un tratamiento distinto, tendremos resumidos los principales cálculos en la siguiente tabla:

Fuente de variabilidad	Suma de cuadrados	Grados de libertad	Cuadrados medios	Fo calculada	$F_{(0.05, 65, 2)}$
Tratamientos	74.8	2	37.4	1.67	$3 < F < 3.15$
Error	1,450.02	65	22.31		
total	1,524.82	67			

**Tabla 3.** Resumen de los cálculos para el ANOVA.

De los cálculos realizados, tenemos que al ser menor el valor de F calculado que el de las tablas, y para un nivel de significancia de  $\alpha=0.05$ , se acepta la hipótesis nula y consideramos entonces que las medias correspondientes a los tres tratamientos (la generación de adscripción) son iguales. Recordemos que el análisis ANOVA mide no solo las diferencias debidas al tratamiento en sí, sino las diferencias debidas a los factores aleatorios mismos, de modo que no podemos establecer diferencias significativas entre las tres aplicaciones de la evaluación, que sean debidas o explicadas por la generación de pertenencia del estudiante.

Sin embargo, el análisis que más nos interesa es el de naturaleza cualitativa, esto es, identificar cuáles fueron las preguntas en las que se exhibió mayor dominio de las competencias requeridas, y cuáles exhibieron un dominio inferior o nulo (por reactivos no contestados o inconclusos). Para ello realizamos la agrupación de los

datos por cada una de las preguntas planteadas, y consideramos asimismo una tabla por cada nivel de desempeño basándonos en la clasificación propuesta por el INEE en su estudio de 2013, relacionándola con la clasificación propia de los cuatro grupos de estudiantes según sus calificaciones, para de esta forma facilitar y guiar nuestro análisis.

De este modo, se resumen en la tabla 4 las frecuencias correspondientes de las respuestas correctas para las tres pruebas aplicadas (se señalan las tres generaciones en orden cronológico), y además clasificadas según las cuatro áreas examinadas: álgebra y aritmética (AA), geometría (G), pre-cálculo (PC) y cálculo (C). Asimismo, para cada área se muestra el número de preguntas, 7 para AA, 5 para G, 4 para PC y 4 para C; respetando la numeración tal como aparece en la prueba aplicada a los estudiantes (ver anexo A).

AA	Frecuencia			G	Frecuencia			PC	Frecuencia			C	Frecuencia		
	2013	2014	2015		2013	2014	2015		2013	2014	2015		2013	2014	2015
1	3	1	1	1	5	0	0	1	1	4	1	1	2	2	3
2	0	0	0	2	1	2	1	2	0	0	1	2	0	0	0
3	8	8.5	6	3	0	0	1	3	0	0	0	3	0	0	0
4	5.5	3	2.5	4	0	0	0	4	0	0.5	0	4	0	0	0
5	3	1	1	5	5	0.5	3								
6	1	0	0												
7	2	5	3												

**Tabla 4.** Frecuencia de preguntas acertadas grupo en nivel (1), con puntaje  $0 < x \leq 5$

Un primer resultado que salta a la vista es que los estudiantes en el nivel (1) solo contestaron en su mayoría las preguntas 1, 3, 4, 5 y 7 de la sección de álgebra y aritmética (AA), si nos detenemos en estas preguntas tenemos por ejemplo que para la pregunta 3 se requiere de un razonamiento directo, menos elaborado, que implica cálculos sencillos. En la pregunta 4, varios fueron capaces de proponer un resultado (6 camisas y 6 pantalones) pero igualmente no recorrieron otras posibles rutas de solución, además de que no pusieron en juego otros registros de representación tales como el tabular y el gráfico que pudieron darles pistas para otras posibles respuestas. En el caso de la pregunta 5, se hubiera esperado que identificaran algunos elementos de las sucesiones y series, pero en vez de ello, hicieron técnicas de conteo simples. En el problema 7 de esta misma sección, algunos estudiantes consiguieron encontrar los valores de la variable “x” solicitados.

En el caso de la sección de geometría (G), sólo resolvieron mayormente las preguntas 1, 2 y 5, dónde consideramos que se interrelacionan los pensamiento numérico y geométrico, así como las competencias de pensar y razonar. En la sección de pre-cálculo (PC), estos estudiantes del grupo en nivel (1) solo abordaron la

pregunta 1, dónde tenían que relacionar la ecuación con su gráfica, pero varios lo hicieron por ensayo y/o relación directa, o bien realizaron cálculos numéricos de sustitución, pues no mostraron las mismas habilidades en la pregunta 2, que es de naturaleza similar, pero donde no se muestran escalas, y por lo tanto para su respuesta requiere de otros conceptos relacionados con la ecuación de una recta, como la tangente y la ordenada al origen. Fue notorio también en este primer grupo de estudiantes, que en la sección de cálculo solo abordaron la pregunta 1, dónde se solicitaba derivar una expresión algebraica sencilla, lo que puede hacerse en forma directa (un procedimiento algorítmico).

A continuación se muestran los resultados resumidos para el grupo de estudiantes que se ubicó en el nivel 2 de desempeño según la clasificación adoptada (de 6 a 10 reactivos contestados), en la tabla 5.

AA	Frecuencia			G	Frecuencia			PC	Frecuencia			C	Frecuencia		
	2013	2014	2015		2013	2014	2015		2013	2014	2015		2013	2014	2015
1	6	4	3	1	6	7	6	1	7	4	7	1	8.5	11	7
2	2	2	4	2	8.5	6	3	2	3	7	5	2	0	0	0
3	10.5	11.5	10	3	3	1	3	3	0.5	0	0	3	4.5	6	1
4	7.5	4.5	5	4	3.5	0	1	4	3	1.5	0.5	4	2	1	2
5	4.5	2	6	5	6.5	4.5	4.5								
6	0	3	4												
7	7	9	4												

**Tabla 5.** Frecuencia de preguntas acertadas grupo (2), con un rango de preguntas acertadas de  $5 < x \leq 10$ .

Al analizar los resultados del segundo grupo de estudiantes (nivel 2), se observa que en general abordaron una mayor variedad de preguntas, así en la sección AA abordaron también la preguntas 2 y 6. La pregunta 2, acerca de las edades del padre y del hijo, involucra los pensamientos numérico y algebraico, pero no con procedimientos directos, debido a que había que ampliar la línea del tiempo hacia atrás para encontrar la respuesta correcta. Para la pregunta 6 se requiere a su vez un pensamiento algebraico más elaborado. Para la sección de geometría (G) se incrementó el número de estudiantes que contestaron correctamente la pregunta 5, pero además se abordaron ya la 3 y la 4 que implican poner en juego un mayor número de conocimientos sobre las ecuaciones de primer grado y su representación gráfica, así como el conocimiento de las relaciones trigonométricas en el triángulo rectángulo.

Para la sección de pre-cálculo (PC) ya se abordaron las preguntas 1, 2 y 4, recordando que esta última, que se refiere a la sombra de Alicia, necesita de algunos elementos relativos a triángulos, relaciones trigonométricas, pero también de pensamiento variacional y del concepto de función. En la sección de cálculo (C)

abordaron, además de la pregunta 1, la 3 y la 4, dónde en esta última se les solicitaba la resolución de integrales para funciones sencillas de naturaleza algebraica. Para el caso de la pregunta número 3, era necesario tener claros los conceptos de derivada y de antiderivada como operadores matemáticos inversos. En general, es notorio también que a diferencia del primer grupo (nivel 1), en este segundo grupo de estudiantes, ya aparecieron con mayor frecuencia respuestas en las secciones de pre-cálculo (PC) y cálculo (C), como puede constatarse en el caso de un mayor número de casillas con frecuencias nulas en estas dos secciones para el grupo de estudiantes de nivel 1 (ver tabla 3). También el hecho de que ya hubo estudiantes que abordaron preguntas que requerían poner en juego un pensamiento numérico, algebraico y trigonométrico más riguroso; ello resulta importante en virtud de que implica el empleo de un mayor número de competencias.

Por último, se presentan en la tabla siguiente (tabla 5) los resultados resumidos para el tercer grupo de estudiantes en esta clasificación (recordemos que en nuestro caso, no hubo estudiantes que alcanzaran el nivel 4).

AA	Frecuencia			G	Frecuencia			PC	Frecuencia			C	Frecuencia		
	2013	2014	2015		2013	2014	2015		2013	2014	2015		2013	2014	2015
1	1	0	3	1	0	0	4	1	1	0	4	1	1	0	5
2	1	0	2	2	1	0	5	2	1	0	3	2	1	0	1
3	1	0	5	3	0	0	3	3	0	0	1	3	1	0	5
4	1	0	2	4	0.5	0	4	4	0.5	0	1	4	1	0	4
5	0	0	0	5	1	0	2								
6	1	0	2												
7	1	0	5												

Tabla 5. Frecuencia de preguntas acertadas grupo (3), con puntaje  $10 < x \leq 15$

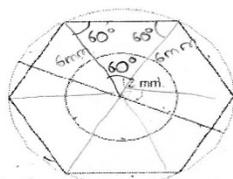
Para este tercer grupo de estudiantes, clasificados en el nivel (3), que fueron solo cinco estudiantes del total (68) se observaron dos características: primero, que lograron abordar la mayoría de las preguntas correspondientes en general a las cuatro secciones consideradas. De hecho solo se observaron problemas o dificultades en abordar las preguntas 5 (AA), 3 (PC) y en la 2 (C). La pregunta 5 de la sección AA como mencionábamos involucraba elementos de las sucesiones numéricas, la 3 de la sección PC es referente a las dimensiones del envase cilíndrico, y requiere de competencias más complejas como la de modelación y el planteamiento y resolución de problemas, implicando elementos de los pensamientos geométrico, algebraico y variacional.

Por su parte, la pregunta 2 de la sección C está muy relacionada con la anterior, pues se refiere a las nociones y significados asociados a los máximos y mínimos de

una función. Consideramos que también tenía un mayor nivel de complejidad, pues involucraba el pensamiento variacional, pero al mismo tiempo a los pensamientos aritmético, algebraico y geométrico, así como tener muy claro el concepto de función y los significados asociados a la primera derivada. Por otro lado, un elemento a destacar de este grupo de estudiantes, y que está en estrecha relación con la clasificación del INEE, concretamente para su clasificación de los estudiantes de niveles (3) y (4), es que mostraron no solo procedimientos generalmente correctos, sino que también emplearon el lenguaje escrito para apoyar sus razonamientos, planteaban conjeturas o hipótesis, y ponían en juego un mayor número de elementos matemáticos.

Ejemplos de estas argumentaciones se pueden apreciar en la figura 1, donde se muestra el caso de las preguntas 2, 3 y 4 de geometría. Como puede apreciarse en la figura, este estudiante empleó sus conocimientos sobre los triángulos equiláteros y sus propiedades para el cálculo solicitado en el caso de la tuerca, conocimientos y significados alrededor del concepto de la recta y su ecuación en el caso de determinar si un conjunto de puntos pertenece a la misma recta o no. Y en el caso del ejercicio 4, conocimientos sobre las funciones trigonométricas, las leyes de senos y cosenos y en general las relaciones entre los lados y ángulos de un triángulo cualquiera.

2.- De una placa circular de metal, se va a hacer una tuerca hexagonal cortando sectores circulares como se muestra en la figura. Si el diámetro de la placa es de 12 mm., ¿Cuánto medirá cada lado de la tuerca?

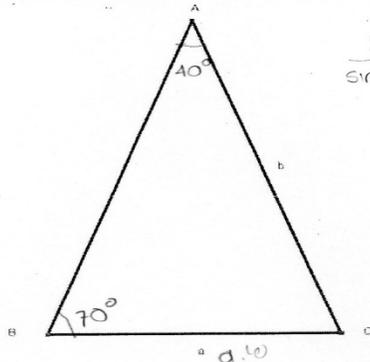


RESPUESTA: 6 mm.  
 Es un triángulo equilátero y todos los ángulos internos miden  $60^\circ$   
 $\frac{6 \text{ mm}}{\sin 60} = \frac{L}{\sin 60}$   
 $L = \frac{6 \text{ mm} \cdot \sin 60}{\sin 60} \quad L = 6 \text{ mm}$

3.- Una recta pasa por los puntos  $(-2, 2)$  y  $(7, -5)$ . ¿Pertenece a la misma recta el punto  $(20, -15)$ ?

$m = \frac{-5 - 2}{7 - (-2)} = \frac{-7}{9}$   $(y - y_1) = m(x - x_1)$   $(y + 5) = \frac{-7}{9}(x + 2)$   $9y + 45 = -7x - 14$   
 $9y = -7x - 59$   
 $y = \frac{-7x - 59}{9}$

4.- Encuentra la medida del lado  $b$  si  $\angle A = 40^\circ$ ;  $\angle B = 70^\circ$ , y el lado  $a = 10$ .



Usando la ley de senos encontramos la relación.  
 $\frac{b}{\sin 70^\circ} = \frac{10}{\sin 40^\circ}$   
 $b = \frac{10 \sin 70^\circ}{\sin 40^\circ}$   
 $b = 14.619$

Fig. 1. Ejemplos de respuestas de un estudiante ubicado en el nivel (3).

En la figura 2, correspondiente la pregunta 3 de la sección de pre-cálculo (sombra de Alicia), igualmente se puede observar el uso del lenguaje escrito como un elemento de argumentación, así como el uso de lenguaje simbólico. Se puede apreciar

que después de elaborar un diagrama de la situación, identifica algunos elementos de tipo variacional, e intenta establecer relaciones entre los ángulos y las distancias, aun cuando no concluye este ejercicio. Este mismo estudiante mostró un mayor dominio en la sección de cálculo, ya que contestó correctamente las cuatro preguntas planteadas. Es importante hacer notar que en el caso de las preguntas 2 y 3 de esta sección de cálculo, no era suficiente desarrollar procedimientos directos (algorítmicos), sino que implica también el pensar en algunos conceptos y significados más elaborados como el del criterio de la primer derivada, y su aplicación en el análisis de la función (problema 2); así como la relación existente entre los procesos de derivación e integración como operadores matemáticos inversos, y el concepto de la primitiva de una función (problema 3).

3.- ¿Qué dimensiones en centímetros debería de tener un envase cilíndrico (radio y altura) de 355 ml (355 cm<sup>3</sup>) de capacidad, para que su costo de fabricación en términos de material utilizado sea el menor posible?

*No contestó (bono el planteamiento)*  
 $V = \pi r^2 h = 355$   
 $C = 2\pi r h + 2\pi r^2$

4.- Alicia mide 1.5 m y se encuentra de pie a 3 m de la base de un poste que tiene una lámpara a 4.5 m. de altura ¿cuánto mide la sombra de Alicia? ¿Cómo varía la longitud de la sombra de Alicia cuando se aleja o se acerca al poste? Trace una gráfica en el sistema cartesiano ¿puedes encontrar una fórmula para esa gráfica?

*la sombra varía aumentando conforme la distancia aumenta y disminuye al acercarse según:*

*Entendí el problema  
 Intenté algo más  
 Intenté con la derivada...*

**CÁLCULO**

$\tan \theta = \frac{S}{h}$   
 $\theta = 0$   $\theta = \pi$

1.- ¿Cuál es la derivada de la función  $f(x) = x^3 + 3x^2 + x + 1$ ?

$3x^2 + 6x + 1$

2.- Encuentra si es que tiene, los máximos y mínimos locales de la función de la pregunta anterior.

$y' = 3x^2 + 6x + 1 = 0 \rightarrow y'' = 6x + 6 = 0$   
 $x = -1 \pm \frac{\sqrt{5}}{3}$   
 $x \approx 0.18$   $x \approx -1.8$   
 A(-0.18, f(0.18)) *Mínimo*  
 B(-1.8, f(-1.8)) *Máximo*

3.- Si la derivada de una función es  $x^3 + 3x^2 + x + 1$  ¿Cuál es la función que se derivó?

$\int x^3 + 3x^2 + x + 1 \, dx = \frac{x^4}{4} + x^3 + \frac{x^2}{2} + x + C$

4.- Encuentra la integral de la función  $f(x) = x\sqrt{x}$

$\int x\sqrt{x} \, dx = \int x x^{\frac{1}{2}} \, dx = \int x^{\frac{3}{2}} \, dx = \frac{x^{\frac{5}{2}}}{\frac{5}{2}} = \frac{2\sqrt{x^5}}{5} + C$

*Entendí algoritmos  
 para derivar  
 Entendí algoritmos  
 para integrar  
 Entendí conceptos  
 de derivada,  
 máximos y  
 mínimos*

Fig. 2. Ejemplos de respuestas y argumentaciones de un estudiante ubicado en el nivel (3).

Al considerar la naturaleza compleja de las interrelaciones entre los distintos elementos o dimensiones del pensamiento matemático, y las 8 habilidades definidas por PISA en cada una de las 4 áreas de la matemática consideradas, se pueden identificar en forma resumida algunos hallazgos relevantes, tal como se muestra a continuación.

Los estudiantes que alcanzaron el nivel 1 según la clasificación empleada, por lo general contestaron solamente las preguntas correspondientes al área de aritmética y álgebra, pero no así las restantes áreas. En general demostraron poder realizar

cálculos sencillos o directos, pero no mostraron poseer habilidades y destrezas tales como el empleo de lenguajes simbólicos, el uso de distintos registros de representación o bien la utilización de diferentes herramientas y recursos. Estas 3 habilidades están identificadas como competencias matemáticas por PISA. En lo que concierne a las dimensiones del pensamiento matemático implicadas en la solución de este tipo de problemas, solo se pudieron articular elementos del pensamiento de tipo numérico y algebraico.

En el caso de los estudiantes que alcanzaron el nivel 2 se observó en general que consiguieron contestar de forma acertada algunas preguntas referentes a los contenidos de aritmética y álgebra, pero también de los contenidos de geometría. Pudieron acreditar en mayor medida las siguientes habilidades: empleo de lenguajes simbólicos, uso de distintos registros de representación, pensar y razonar, y utilización de herramientas y recursos, que son competencias matemáticas clasificadas por PISA (ver tabla 1).

Mostraron mejores habilidades en la resolución de problemas relacionados con contenidos tales como las ecuaciones de primer grado, su representación gráfica o la resolución de triángulos que implica a su vez la comprensión de las distintas relaciones trigonométricas. En torno a los tipos de pensamiento involucrados, se conjugaron los tipos de pensamiento aritmético, algebraico y geométrico, así como el de razonamiento lógico.

Se puede identificar un tercer grupo de estudiantes (en realidad un 7.3% de los participantes), ubicados en el nivel 3 de la clasificación empleada, que en general obtuvieron no solo un mayor número de preguntas contestadas en forma acertada, sino que además mostraron conocimientos en las áreas de aritmética y álgebra, pero también en geometría y en pre-cálculo. En el contenido de cálculo tuvieron un desempeño menor. Algo destacable en este grupo de estudiantes fue que mostraron un mejor dominio de las habilidades de pensar y razonar, representar, usar herramientas y recursos, usar lenguajes simbólicos y plantear problemas (ver tabla 1); sin embargo también mostraron las competencias de argumentar, comunicar y modelar, que son 3 de las 8 competencias matemáticas clasificadas por PISA, y que no fueron mostradas en general por los dos grupos de estudiantes que obtuvieron puntajes dentro de los niveles 1 y 2. En forma paralela, dentro de los tipos de pensamiento matemático que exhibieron, se añadió el del pensamiento variacional, que es una base fundamental para los cursos de cálculo que normalmente se ofertan en los primeros semestres de una licenciatura en física.

## 6. Conclusiones

Finalmente, considerando estos elementos de discusión de los resultados, y a partir de las respuestas que se obtuvieron en este examen diagnóstico aplicado a un grupo de estudiantes de nuevo ingreso en la carrera de física, podemos delimitar algunas conclusiones. Primeramente, parece evidenciarse que abordan de forma

más eficiente aquellos problemas o situaciones donde solo hay uno o dos tipos de pensamiento involucrados, sobre todo en el caso de la combinación entre pensamiento geométrico y numérico, y que además el tipo de preguntas que abordaron el pensamiento algebraico representaron mayores dificultades para su solución. También se observaron mayores dificultades en las competencias de argumentación, de modelación, así como en aquellos ejercicios que involucraron la combinación de los pensamientos algebraico, numérico o geométrico con el pensamiento variacional.

Asimismo, tomando como referencia las concepciones de competencias que establece PISA, así como la propuesta de clasificación de niveles de desempeño del INEE en su estudio de 2013, podemos considerar que esta tipología nos permitió identificar en nuestro caso y de una forma más sencilla cuáles son algunas de las dificultades en las competencias que exhiben los estudiantes, contrastadas con las competencias que se esperaba que dominaran una vez que han cursado el nivel educativo inmediato anterior, que es el medio superior (bachillerato).

Pensamos que estos resultados preliminares, posibilitan identificar con mayor claridad algunos de los contenidos, dónde los estudiantes presentan mayores dificultades en cada uno de los 4 contenidos temáticos consideradas en la prueba.

Este tipo de resultado tiene el potencial de que una vez identificadas diversas problemáticas específicas, puedan posteriormente ser tomadas en consideración para el diseño de algunas actividades de aprendizaje o tareas para realizar en el aula de clase, a modo de poder reforzar el nivel de desempeño para las diversas competencias. Ello resulta primordial para comenzar el estudio de una licenciatura como la de física, visto que requiere del desarrollo de una base sólida en aritmética y álgebra, así como en pre-cálculo y cálculo, para posteriormente poder construir las herramientas matemáticas que resultan fundamentales para adquirir en particular las competencias de modelación y argumentación que están identificadas como centrales en el estudio de esta licenciatura en la institución estudiada.

## Bibliografía

- Bartolucci, E. y Bartolucci, J. (2013, 21 de noviembre). *¿Para qué nos sirven las pruebas PISA? Revista Campus: Educación, Ciencias y Cultura, Diario Milenio*, 50-52. Recuperado de:  
[http://campusmilenio.mx/index.php?option=com\\_k2&view=item&id=981:para-que-nos-sirven-las-pruebas-pisa&Itemid=346](http://campusmilenio.mx/index.php?option=com_k2&view=item&id=981:para-que-nos-sirven-las-pruebas-pisa&Itemid=346)
- Boero, P.; Dapuzo, C. & Parenti, L. (1996). Didactics of Mathematics and the Professional Knowledge of Teachers. En: Alan J. Bishop, Ken Clements, Christine Keitel, Jeremy Kilpatrick y Colette Laborde (Eds.) *International Handbook of Mathematics Education*. (p. 1097-1121). Dordrecht, The Netherlands: Kluwer Academic Publisher.

- Gutiérrez, H y de la Vara, R. (2012) *Análisis y Diseño de Experimentos*. México: McGraw-Hill.
- INEE (2013). *La Educación Media Superior en México*. 2ª. Edición. México: INEE.
- OCDE (2004). *Informe PISA 2003, Aprender para el Mundo del Mañana*. España: OCDE/Ediciones Santillana.
- Rodríguez, M. E. (2011). *La matemática y su relación con las ciencias como recurso pedagógico*. *Revista Números*, 77, 35-49.
- Rondero, C. (2013). Algunos elementos conceptuales sobre la formación de profesores. En: Rondero, C. (Ed.). *La Formación de Profesores en Competencias Matemáticas*. (p.13-51). México: Ediciones Díaz de Santos.

## ANEXO

### DIAGNÓSTICO DE MATEMÁTICAS PARA ESTUDIANTES DE NUEVO INGRESO A LA LIFTA

ALUMNO: \_\_\_\_\_ CARRERA: \_\_\_\_\_  
SEMESTRE Y GRUPO: \_\_\_\_\_ FECHA: \_\_\_\_\_

**Instrucciones:** Se permite el uso de calculadora aunque no es indispensable; conteste cada sección, justificando su respuesta por medio de un procedimiento.

#### ARITMÉTICA Y ÁLGEBRA

1.- José ganó \$150 y desea comprar videos y discos compactos. Una tienda vende videos a \$20 cada uno y discos a \$14 cada uno. Si  $v$  es el número de videos y  $c$  es el número de discos que José comprará ¿cuál de las siguientes expresiones representa cuantos objetos de cada tipo puede comprar?

a)  $20v + 14c \leq 150$       b)  $20v + 14c \geq 150$       c)  $20v + 14c = 150$

d)  $v + c \leq 150$       e)  $v + c \geq 150$

2.-Un padre tiene 32 años de edad y su hijo tiene 5 años de edad. ¿En cuánto tiempo la edad del padre es diez veces la del hijo?

3.- Un televisor de plasma de 50 pulgadas, tiene un precio de \$22 000, si se sabe que cada año se deprecia \$3 500 ¿Cuánto tiempo debe transcurrir para que comercialmente no tenga valor?

4.- Juan tiene \$ 1200 y desea comprar ropa. Encuentra una tienda en la que cada pantalón cuesta \$120 y cada camisa \$80. Si decide gastar todo el dinero en pantalones y camisas, ¿cuántas prendas de cada tipo puede comprar?

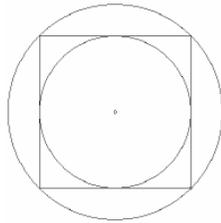
5.- Una tribuna del estadio tiene 7 butacas en la primera fila, 10 en la segunda, 13 en la tercera y así sucesivamente. Si la última fila tiene 91 butacas ¿cuántas butacas hay en la tribuna?

6.- Si  $x^2 + 10x + 4 + b$  es el resultado de desarrollar un binomio al cuadrado ¿Cuánto debe valer  $b$ ?

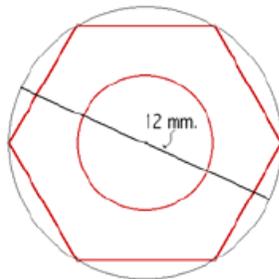
7.- En la ecuación  $(x - 1)(x + 2) = 0$ , ¿Cuáles son los posibles valores para  $x$ ?

## GEOMETRÍA

1.- Un círculo cuyo radio mide 1 centímetro está inscrito en un cuadrado. Si este cuadrado, a su vez, está inscrito en otro círculo, ¿Cuánto mide el radio de este último círculo?

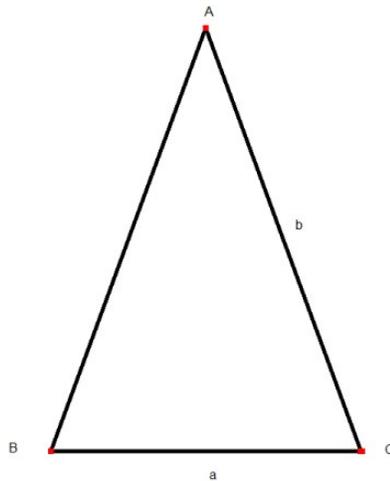


2.- De una placa circular de metal, se va a hacer una tuerca hexagonal cortando sectores circulares como se muestra en la figura. Si el diámetro de la placa es de 12 mm., ¿Cuánto medirá cada lado de la tuerca?



3.-Una recta pasa por los puntos  $(-2,2)$  y  $(7,-5)$ . ¿Pertenece a la misma recta el punto  $(20,-15)$ ?

4.- Encuentra la medida del lado b si  $\sphericalangle A = 40^\circ$ ;  $\sphericalangle B = 70^\circ$  , y el lado a = 10.



5.- Sharon vive a 7 kilómetros de la escuela, Monse vive a 5 kilómetros de la escuela, con esta información explica ¿qué puedes concluir sobre a qué distancia vive Sharon de Monse?

## PRECÁLCULO

1.-Cuál es la ecuación que mejor representa la gráfica?

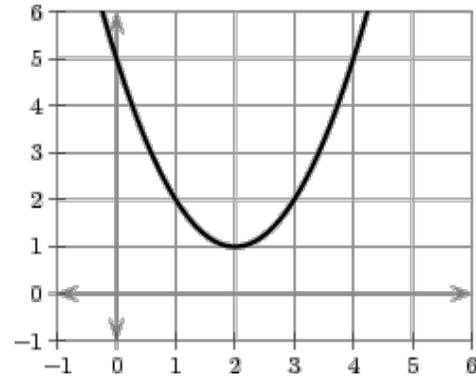
1.  $y = x^2 + 2x + 5$

2.  $y = x^2 - 4x + 1$

3.  $y = (x - 2)^2 + 1$

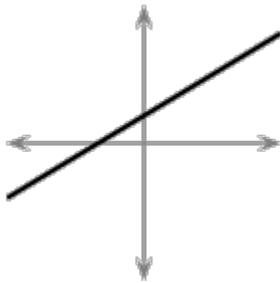
4.  $y = (x + 2)^2 + 1$

5.  $y = (-x - 2)^2 + 2$

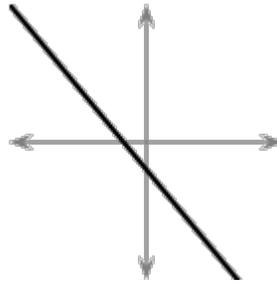


2.- ¿Cuál de las siguientes gráficas representa a la ecuación  $-2y = x + 2$  ?

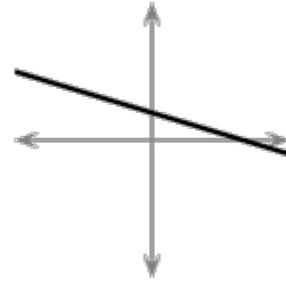
a)



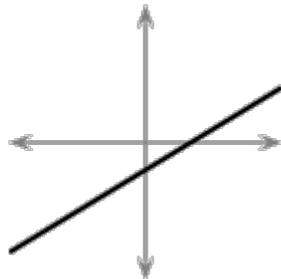
b)



c)



d)



3.- ¿Qué dimensiones en centímetros debería de tener un envase cilíndrico (radio y altura) de 355 ml ( $355 \text{ cm}^3$ ) de capacidad, para que su costo de fabricación en términos de material utilizado sea el menor posible?

4.- Alicia mide 1.5 m y se encuentra de pie a 3 m de la base de un poste que tiene una lámpara a 4.5 m. de altura ¿cuánto mide la sombra de Alicia? ¿Cómo varía la longitud de la sombra de Alicia cuando se aleja o se acerca al poste? Trace una gráfica en el sistema cartesiano ¿puedes encontrar una fórmula para esa gráfica?

## CÁLCULO

1.- ¿Cuál es la derivada de la función  $f(x) = x^3 + 3x^2 + x + 1$ ?

2.- Encuentra si es que tiene, los máximos y mínimos locales de la función de la pregunta anterior.

3.- Si la derivada de una función es  $x^3 + 3x^2 + x + 1$  ¿Cuál es la función que se derivó?

4.- Encuentra la integral de la función  $f(x) = x\sqrt{x}$

### Autores:

**Torres Rodríguez, Agustín Alfredo:** Profesor del Departamento de Ciencias Básicas del Tecnológico Nacional de México, plantel Atitalaquia. Sus líneas de investigación se centran en las problemáticas asociadas a la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas. Otros temas de su interés han sido la formación de profesores de matemáticas en el nivel superior, así como el empleo de las TIC en la enseñanza de las matemáticas. Email: aatr68@hotmail.com.

**Campos Nava Marcos:** Profesor investigador del Área Académica de Matemáticas y Física de la Universidad Autónoma del Estado de Hidalgo, México, sus líneas de investigación son diseño de tareas de aprendizaje en matemáticas y física y formación de profesores de matemáticas y física. Email: mcampos@uaeh.edu.mx