UNIÓN
REVISTA IBEROAMERICANA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA

ISSN: 1815-0640
Número 37. Marzo de 2014
páginas 9-29

www.fisem.org/web/union

Comment analyser le problème crucial de la compréhension des mathématiques?

Firma Invitada: Raymond Duval

L'enseignement des mathématiques se heurte à des difficultés systématiques et récurrentes de compréhension qu'on ne retrouve pas dans l'enseignement des autres disciplines. Cette incompréhension apparaît très vite, à tous les niveaux, lorsque les élèves doivent résoudre des problèmes, ce qui est pourtant considéré comme la situation par excellence pour acquérir des connaissances mathématiques et pour apprendre à les utiliser. D'où vient l'incompréhension ressentie, de manière durable et souvent définitive, par tant d'élèves à l'égard des mathématiques?

Beaucoup d'explications ont été avancées. Certaines ont insisté sur la nécessité de prendre en compte la complexité épistémologique propre à chacun des concepts enseignés. D'autres ont mis en avant la nécessité d'introduire les connaissances mathématiques en suivant le processus naturel et commun de la formation des concepts à partir d'observations et d'expériences concrètes. D'autres ont plus simplement souligné qu'il fallait commencer par faire découvrir l'intérêt pratique des mathématiques puisqu'elles sont utilisées dans beaucoup d'activités, quotidiennes et professionnelles. Cependant toutes ces explications ont un point commun. Elles en restent au seul point de vue mathématique pour analyser ce qu'est l'activité mathématique, pour choisir les connaissances qui vont être fixés comme objectifs globaux d'une éducation mathématique pour tous les élèves jusqu'à 16 ans, et pour décomposer ces connaissances en une progression à suivre sur un cycle de plusieurs années. Et quand on s'en tient à ce seul point de vue sur ces questions décisives pour l'enseignement des mathématiques, on manque la raison profonde des difficultés récurrentes des élèves dans l'apprentissage des mathématiques. En mathématiques, on ne pense pas et on ne travaille pas du tout de la même manière que dans les autres domaines de connaissance.

Le défi majeur de l'enseignement des mathématiques est de faire entrer les élèves dans la manière de penser et de travailler propre aux mathématiques. Car c'est la condition préalable à toute acquisition de concepts mathématiques. Mais pour cela, il faut pouvoir analyser la manière mathématique de penser et de travailler *dans ce qu'elle a de radicalement différent des manières plus spontanées de penser et de travailler dans les autres domaines de la connaissance.* Une telle analyse ne peut être faite que d'un point de vue cognitif. La théorie des registres de représentation sémiotique est essentiellement un outil que nous avons élaboré pour analyser la manière de penser et de travailler en mathématiques, quels que soient les concepts mathématiques utilisés et quels que soient les domaines des mathématiques où l'on travaille (géométrie, algèbre, analyse..). En un certain sens, l'activité mathématique présente deux faces: celle qui apparaît quand on la considère du point de vue mathématique, et celle qui apparaît quand on la considère du point de vue cognitif.

Dans cet article, nous allons présenter l'importance et la nécessité de faire entrer les élèves dans la manière de penser et de travailler propre aux mathématiques. Pour cela nous allons aborder les quatre questions suivantes:

— Comment décrire la manière de penser et de travailler en mathématiques?

— La conversion des représentations est-elle le premier obstacle à la compréhension en mathématiques?

— Qu'est-ce comprendre en mathématiques?

— Les deux faces de l'activité mathématique sont-elles prises en compte dans l'enseignement et dans les recherches didactiques?

1. Comment décrire la manière de penser et de travailler en mathématiques?

Cette question est cruciale pour toute recherche sur l'apprentissage des mathématiques et, par conséquent, pour l'enseignement des mathématiques. Pour y répondre, il faut comparer les mathématiques aux autres types de connaissance. Les mathématiques sont-elles un type de connaissance comme les autres connaissances ou sont-elles un type de connaissance à part? Autrement dit, l'acquisition de connaissances mathématiques relève-t-elle des mêmes processus cognitifs que pour les autres types de connaissance, ou exige-t-elle le développement de processus cognitifs spécifiques?

Trois idées sont fondamentales pour analyser la connaissance et son processus de développement, quels que soient les types de connaissance considérés.

1.1. Tout objet donne lieu à autant de représentations possibles et différentes qu'il existe de systèmes utilisables pour produire des représentations de cet objet.

Il existe deux grandes classes de systèmes producteurs de représentations. Les systèmes sémiotiques comme le langage, et les systèmes non sémiotiques comme les instruments qui donnent des images de ce qu'on ne peut pas percevoir directement (télescopes, microscopes, oscilloscopes). Parmi tous les systèmes non sémiotiques, on peut aussi ranger les réseaux neuronaux d'une région cérébrale qui permettent de produire des images mentales, comme dans le cas de la mémoire visuelle ou auditive.

Ainsi, en mathématiques, les systèmes producteurs de représentations utilisés sont des systèmes sémiotiques. Le développement des mathématiques a été étroitement lié à l'invention de nouveaux systèmes sémiotiques producteurs de représentations. L'exemple le plus simple est celui de la représentation des nombres. Il y a autant de représentations possibles d'un nombre entier que de systèmes d'écriture des nombres. Les deux progrès décisifs dans la représentation des nombres ont été, d'une part, leur représentation en fonction d'une base et de la position des signes utilisés et, d'autre part, l'invention du «zéro». L'écriture décimale constitue ainsi un véritable système sémiotique selon la définition structuraliste des signes de Saussure (Duval 2006c, p. 53-54). Mais l'exemple le plus frappant est la révolution sémiotique qui s'est produite en mathématiques aux XVIe et XVIIe siècle, en moins de 150 ans. Il y a eu l'invention d'une écriture littérale pour exprimer des relations d'égalité ou d'inégalité entre des grandeurs et, dans la foulée, l'invention d'un système de représentations graphiques en utilisant une règle de correspondance entre un point et un couple de nombres sur deux axes gradués. L'invention de ces deux systèmes ont marqué l'émergence de l'algèbre et celle de l'Analyse (Duval 2011, b. 24-25). Notons ici que l'invention du système cartésien de représentation graphique constitue un type visualisation mathématique qui est totalement différent de la visualisation proprement géométrique qui s'était développée avec Euclide. Cette observation est d'autant plus importante que ces deux types de visualisation sont très vite utilisés dans l'enseignement pour introduire des notions mathématiques.

Dans tous les autres domaines scientifiques, les systèmes producteurs de représentations sont, au contraire, des systèmes non sémiotiques, c'est à dire des instruments qui permettent d'accéder aux objets échappant à toute perception directe. L'exemple historique est l'utilisation en 1609 d'une lunette pour regarder la lune. En l'absence d'appareils enregistreurs, Galilée a du dessiner les images obtenues grâce une lunette grossissant à peine 10 fois l'objet regardé. Naturellement il fallait interpréter ces images pour savoir ce qu'elles représentaient, car elles montraient des choses différentes de celles que l'on distingue à l'œil nu. Leur interprétation exigeait un raisonnement analogique et non mathématique, entièrement fondé sur le principe expérimental de l'isolation et de la variation des facteurs. Galilée est le premier à l'avoir mis en œuvre en appliquant ce type de raisonnement aux phénomènes de réflexion de la lumière sur différents types de surface (Duval 2011a, p. 46-47, 57).

1.2. Un objet ne doit jamais être confondu avec l'une quelconque de ses représentations possibles.

C'est l'exigence fondatrice de toute connaissance et, plus particulièrement de toute connaissance scientifique. Elle a été formulée pour la première fois par Platon qui en a fait l'idée directrice de toute sa « théorie de la connaissance».

Une telle exigence peut paraître triviale et relever du bon sens. Dans le domaine des objets concrets, que l'on peut non seulement voir, mais toucher et, surtout, manipuler (regrouper ou séparer, déplacer, retourner, déformer..), confondre la représentation d'un objet avec l'objet lui-même — même si on voit sans pouvoir toucher – ne vient pas à l'esprit. Ou alors on commencera à parler de «troubles»! Dans le domaine des connaissances scientifiques, c'est moins trivial comme l'histoire de la connaissance de l'univers et de la nature le montre. Mais cela ne soulève aucune difficulté épistémologique ou cognitive sérieuse. *Car il y a toujours un moyen d'avoir un accès non-sémiotique aux objets eux-mêmes.* Et l'on oublie jamais qu'on utilise un instrument, alors qu'on oublie souvent les représentations sémiotiques, à commencer par le langage, qui sont mobilisées implicitement, ou produites « mentalement»!

En mathématiques, au contraire, on ne peut jamais distinguer l'objet et ses représentations, car il n'y a pas de double accès aux objets mathématiques, l'un qui serait celui d'une perception concrète ou lié à l'utilisation d'un instrument comme en physique, et l'autre qui serait lié à la production de représentations sémiotiques. L'accès aux objets mathématiques passe nécessairement par la production de représentations sémiotiques. Revenons à l'exemple de la représentation des nombres. Dans le tableau ci-dessous nous avons juxtaposé différentes représentations d'un nombre, à la manière dont Kosuth avait photographié une chaise réelle contre un mur avec, de part et d'autre, collés au mur la photo de cette chaise et un texte définissant le mot «chaise ». Et il avait intitulé la photo de cette mise en scène: «une ou trois chaises». Nous pourrions de même intituler ce regroupement de représentations: « un nombre ou huit nombres?».

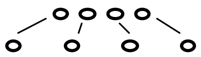
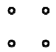
IIII *ou* II II *doigts, allumettes*  *la t‰che piagetienne* ((((I) I) I) I) *inclusions lineaires*  *configuration polygonale*	**«quatre»** *Le lexique varie considérablement selon les langues*	**«4»** (dans le système décimal) . **«100»** (dans le système binaire) **64/16** (dans l'écriture fractionnaire)
Organisation spatiale de marques matérielles ou dessinées: **Opérations** de regroupement, de séparation des items	**Une suite de désignations verbales** à reproduire toujours dans le même ordre. **Opération** de comptage des éléments de petites collections discrètes.	**Organisation sémiotique ensystèmes d'écriture** utilisant **le symbole «0»** **Les quatre opérations** arithmétiques sur les entiers

Figure 1. Un nombre ou huit nombres?

Mais la question importante dans ce montage de représentations à la manière de Kosuth n'est pas celle-là. Dans la photo de Kosuth, il est facile de reconnaître où se trouve la chaise elle-même et où sont les deux représentations de la chaise. Ici, dans ce montage, peut-on dire où se trouve le nombre lui-même et, donc, le distinguer de ses représentations? Dans le mot, dans son écriture décimale ou dans l'une des organisations spatiales d'items matériels? La question peut paraître saugrenue. On peut en donner une formulation moins tranchée. Parmi toutes ces représentations possibles, quelle est la meilleure pour que les élèves puissent apprendre et comprendre? Cette question est celle que les enseignants posent chaque fois qu'ils doivent introduire en classe une nouvelle notion mathématique et qu'ils se heurtent à l'incompréhension des élèves.

L'impossibilité d'un double accès aux objets mathématiques, c'est à dire d'un accés non sémiotique qui soit indépendant de la production de représentations sémiotiques, constitue ce que nous avons appelé le «paradoxe cognitif» des mathématiques.

— *Si les objets mathématiques ne sont pas accessibles en dehors de la production d'une représentation sémiotique,* comment ne pas confondre l'objet mathématique et la représentation sémiotique utilisée?

— *Et si il y a plusieurs représentations sémiotiques d'un même objet mathématique qui apparaissent n'avoir rien de commun,* qu'est-ce qui permet de savoir qu'il ne s'agit pas d'objets mathématiques différents mais du même objet mathématique?

Pour bien comprendre le paradoxe cognitif des mathématiques, il est important d'introduire un troisième personnage, si l'on ose dire, dans la distinction entre l'objet lui-même et l'une quelconque des représentations de l'objet: *le contenu de la représentation*. Ainsi, les légendes pertinentes pour la photo de Kosuth et le montage de représentations d'un nombre sont «un chaise et deux représentations différentes» et «huit représentation représentations différentes d'un nombre».

Le contenu d'une représentation sémiotique présente, en effet, deux caractéristiques inséparables. D'une part, il explicite ou présente certaines propriétés d'un objet et en occulte d'autres. D'autre part, il dépend entièrement du système sémiotique utilisé pour produire la représentation, comme on peut le voir dans la troisième colonne de la Figure 1 ci-dessus. *Cette deuxième propriété montre le fossé épistémologique qui sépare les représentations sémiotiques et les représentations non sémiotiques.* Les systèmes sémiotiques permettent une création illimitée de représentations nouvelles, indépendamment d'une relation préalable à l'objet lui-même. Elles libèrent l'esprit de la connaissance préalable des objets. En ce sens, le symbole «0» est le symbole par excellence de la représentation sémiotique des nombres.

1.3. En mathématiques, l'intérêt d'un système sémiotique dépend de ses possibilités de transformation de représentations produites en d'autres représentations du même système.

D'un point de vue mathématique toutes les représentations sémiotiques ne sont pas du tout équivalentes ou également intéressantes. Le critère de choix dépend des opérations que l'on peut faire avec un type de représentations pour obtenir d'autres représentation dont les contenus feront apparaître une information ou une donnée nouvelle.

Ainsi les opérations numériques que l'on peut faire avec des éléments matériels, ou des marques tracées portent sur leur disposition spatiale et sont en quelque sorte extérieures au contenu de la représentation (Figure 1, colonne 1). Ces éléments servent simplement de support pour une une opération de comptage, c'est à dire pour une désignation verbale successive de chacun des éléments (Figure 1, colonne 2). En revanche, les opérations que l'on peut faire avec l'écriture décimale portent sur les chiffres et la position des chiffres dans l'écriture. Ces systèmes permettent de calculer sans effectuer aucun comptage, et indépendamment de la grandeur des nombres. Ces systèmes offrent donc une puissance de calcul illimitée au regard des autres types de représentations des nombres. En revanche, la puissance de calcul à partir de la seule utilisation de la langue naturelle est très faible. L'utilisation de la langue naturelle implique toujours la mobilisation implicite ou explicite d'un autre type de représentation des nombres.

On peut aussi observer l'importance du système sémiotique choisi, même lorsque les systèmes offrent la même puissance de calcul. *Les algorithmes de calcul changent en fonction du système d'écriture utilisé, alors que du point de mathématique les opérations arithmétiques sont les mêmes.* Il suffit de comparer les opérations suivantes:

$$0,25 + 0,5 \quad \text{et} \quad 1/4 + 1/2 \quad ; \qquad 0,25 \times 0,5 \quad \text{et} \quad 1/4 \times 1/2$$

Tous les systèmes sémiotiques utilisés en mathématiques *sont des systèmes spécialisés pour remplir une fonction spécifique de transformation de représentations sémiotiques*. Certains ont été créés dans la dynamique du développement des mathématiques. Ainsi le système des représentations graphiques a été créé pour pouvoir décrire de manière algébrique des formes géométriques, des courbes quadratiques, des courbes mécaniques, etc. Et cela a conduit à faire de ce système un puissant moyen de visualisation mathématique. D'autres systèmes ont été développés en reprenant une pratique culturellement commune, mais en en modifiant les règles de production. Ce qui est important, par exemple, avec les figures géométriques, ce n'est pas leur production à l'aide d'instruments visualisant certaines propriétés (règle, compas, etc.), mais c'est *leur possibilité d'être réorganisées visuellement en d'autres figures.* Grâce à cette possibilité de transformation visuelle, les figures «géométriques» remplissent une fonction d'exploration heuristique dans la résolution de problèmes (Duval, 2005).

1.4. Quelle théorie pour analyser le fonctionnement cognitif spécifique à la manière de travailler et de penser en mathématiques?

Les mathématiques sont un type de connaissance qui, d'un point de vue épistémologique, est complément différent des autres types de connaissance. Deux caractéristiques fondamentales les mettent à part. Tout d'abord, l'accès aux objets mathématiques se fait exclusivement par la production de productions sémiotiques. Et cela se traduit par le fait que les mathématiques sont le domaine de connaissance où l'on utilise presque tout le spectre des types possibles de représentation sémiotique. Ensuite, la manière de travailler en mathématiques est indissociable de la transformation de représentations sémiotiques en d'autres représentations sémiotiques dans un même système sémiotique. Et cela se traduit par le fait que les preuves mathématiques sont exclusivement fondées sur la nécessité de certaines transformations de représentations sémiotiques.

Ce statut épistémologique à part explique le fossé cognitif qui sépare la manière de penser et de travailler en mathématiques et celle qui est commune aux autres types de connaissance. Les difficultés de compréhension auxquelles la majorité des élèves se heurtent dans l'apprentissage des mathématiques viennent d'abord de ce fossé à franchir. Elles sont de deux types. Il y a celles liées au paradoxe cognitif des mathématiques. Et il y a celles liées à la manière de voir en mathématique et avec la manière d'utiliser la langue naturelle. La manière mathématique de voir va contre la reconnaissance perceptive des formes et contre la reconnaissance iconique des objets graphiquement représentés. La manière de définir et d'utiliser les définitions en mathématiques va contre la manière spontanée de débattre, de justifier, de raisonner en dehors des mathématiques. Comment alors analyser le fonctionnement cognitif dont l'enseignement des mathématiques doit favoriser le développement chez les élèves, pour qu'ils puissent réellement comprendre, quels que soient les contenus mathématiques enseignés?

Nous avons introduit la notion de registre pour désigner tous les systèmes sémiotiques qui sont utilisés en mathématiques pour remplir une fonction spécifique de transformation de représentations sémiotiques. Cela signifie qu'aucune représentation sémiotique ne peut être considérée isolément. Les représentations sémiotiques doivent être décrites en fonction du registre dans lequel elles ont été produites et qui en détermine le contenu (ci-dessus 1.2). Mais l'intérêt principal de la notion de registre est de permettre d'analyser l'activité mathématique à partir de la distinction de deux grands types de transformation de représentation sémiotique : les conversions et les traitements. *Les conversions sont nécessaires chaque fois qu'il est nécessaire de mobiliser simultanément, ou en alternance, au moins deux registres*. Cela est le cas dans la géométrie enseignée au primaire et au collège. On mobilise à la fois le langage pour définir les concepts et la visualisation des propriétés et des objets dans des figures construites instrumentalement. Cela est, aussi, le cas pour l'étude des fonctions. Elle mobilise à la fois les graphes cartésiens et l'écriture d'équations, et aussi le langage. Et ce n'est là que le début d'une longue liste d'exemples. Mais la situation la plus révélatrice est la résolution de problème, à tous les niveaux de l'enseignement.

On peut ainsi affirmer qu'en mathématiques, même si les démonstrations sont des traitements effectués dans un seul registre de représentation, on pense et on travaille en mobilisant au moins deux registres de représentations, et non pas un seul.

2. La conversion des représentations est-elle le premier obstacle à la compréhension en mathématiques?

La première exigence cognitive pour comprendre en mathématique est de pouvoir utiliser au moins deux représentations d'un même objet (ci-dessus 1.1), sans jamais confondre l'objet lui-même avec les contenus respectifs des deux représentations (1.2). Cela signifie qu'il faut toujours pouvoir reconnaître le même objet dans les deux représentations. Autrement dit, si une seule des deux représentations est donnée, *il faut pouvoir penser spontanément à substituer l'autre représentation à celle qui est donnée.* Ce simple geste intellectuel est le préalable à toute résolution de problème. Car pour pouvoir commencer à chercher, il faut d'abord convertir les représentations initiales des données du problème, présentées dans un registre, en représentations d'un autre registre qui va permettre de travailler et d'avancer vers la solution.

Or l'obstacle majeur à la conversion des représentations tient au fait qu'il n'y a rien de commun entre les contenus des représentations de deux registres différents. Autrement dit pour pouvoir reconnaître que deux représentations réfèrent au même objet et peuvent être substituées l'une à l'autre selon le principe d'équivalence sémantique *salva veritate* (Frege), il n'y a pas d'autre possibilité que de *reconnaître une correspondance terme à terme entre les contenus de ces représentations de deux registres différents*. Par exemple, si la langue et les figures géométriques sont les deux registres utilisés, il faut reconnaître la correspondance entre certaines *unités discursives de sens d'un énoncé* (définition, théorème) et *certaines unités figurales de la configuration géométrique*. Si l'écriture symbolique de relations et la langue sont les deux registres utilisés, il faut reconnaître la correspondance entre certaines unités de sens d'un énoncé et *toutes les unités symboliques d'une équation (lettres, signes d'opérations et de relation)*. Si l'écriture symbolique de relations et le registre des graphiques cartésiens sont les deux registres utilisés, il faut pouvoir reconnaître la correspondance entre chacune des unités de sens d'une équation, ou d'une inéquation, et *les différentes valeurs visuelles* d'une droite, d'une courbe, etc.

2.1. Comment observer les difficultés liées à la conversion des représentations?

Les difficultés venant de la non reconnaissance d'un même objet dans des représentations dont les contenus sont différents ne sont jamais réellement remarquées. Car les données recueillies viennent de l'observation du travail des élèves lors du déroulement d'une séquence didactique, ou des productions obtenues pour résoudre des problèmes, ou encore des résultats globaux à des questionnaires d'évaluation. *Autrement dit, le cadre mis en place pour recueillir des données est organisé en fonction de connaissances mathématiques à acquérir*. Les difficultés liées à la conversion des représentations, sont alors interprétées comme des difficultés ou des erreurs concernant un concept mathématique.

Pour observer les difficultés qui sont directement liées à la conversion de représentations, nous avons élaboré un questionnaire uniquement constitué de tâches de reconnaissance (Duval 1988). Les variations des items étaient des variations systématiques du contenu d'une représentation (les différentes positions possibles d'une droite sur un plan cartésien) et il s'agissait de choisir, parmi plusieurs équations données, celle qui correspondait à chaque position. *Cette tâche de reconnaissance ne demandait aucun traitement mathématique.* Toutes les variations de contenu correspondaient à des oppositions visuelles de position par rapport à trois facteurs. Il n'y a avait ni calcul à faire pour choisir l'équation correspondante, ni à dire s'il s'agissait ou non d'une fonction. Les échecs ont été massifs et récurrents, même après un enseignement sur les fonctions. Depuis ce travail, la multiplication des observations et des enquêtes ont confirmé l'importance et la généralité du ce phénomène de non reconnaissance. Il touche tous les aspects des mathématiques enseignées du primaire à la première année de l'université (Duval 2006a, 2006b).

La conversion des représentations sémiotiques est l'obstacle majeur et primordial à franchir pour pouvoir comprendre et apprendre en mathématiques. Aussi bien à travers les réactions des élèves que dans leurs productions, cet obstacle se manifeste de deux manières différentes. La première est l'incapacité à reconnaître dans l'une des deux représentations — un énoncé, une équation, une figure, un graphique, etc. — les unités à mettre en correspondance avec celles de l'autre représentation. Et cela conduit *à un blocage et à un abandon rapide de toute activité de recherche pour résoudre un problème,* ou à des errreurs révélant des confusions ininterprétables. La deuxième manière, et c'est la plus fréquente, est une fausse reconnaissance des unités discursives, figurales ou symboliques à mettre en correspondance. *Cette fausse reconnaissance est d'autant plus prégnante qu'elle serait en réalité une bonne reconnaissance si l'on était pas dans le domaine des mathématiques!* Et cela conduit à des erreurs systématiques et récurrentes que l'on retrouve à tous les niveaux de l'enseignement. Les fausses reconnaissances, tant qu'elles persistent, rendent incompréhensible toute explication mathématique, et elles rendent de plus en plus difficile tout réel progrès dans l'apprentissage des mathématiques.

Les deux exemples les plus frappants concernent la reconnaissance des unités figurales dans une figure géométrique, c'est à dire la visualisation géométrique, et la reconnaissance des unités discursives de sens dans les énoncés de problèmes, c'est à dire l'utilisation du langage en mathématiques. Les unités figurales qui sont d'emblée reconnues à l'exclusion de toutes les autres dans les figures géométriques, sont les unités 2D qui s'imposent en fonction des lois gestaltistes de la reconnaissance des formes, ou les unités figurale 3D. Et cela bloque l'articulation cognitive des figures avec les énoncés mathématiques, y compris les énoncés de problème. De même, les unités discursives qui s'imposent dans la compréhension d'un énoncé sont d'abord des mots, et non pas les syntagmes ou les phrases. Ainsi les mots « gagner » et « perdre » ont-ils un sens propre qui les associe d'emblée aux opérations d'addition et de soustraction. Et cela conduit à des fausses reconnaissances systématiques dans la plupart des problèmes additifs, ainsi que les résultat de l'enquête de G. Vergnaud (1976) et les recherches ultérieures sur cette question l'ont mis en évidence.

2.2. Comment faire franchir l'obstacle de la conversion des représentations?

Le problème n'est jamais posé de cette manière dans les recherches didactiques. Car, comme nous le verrons plus loin, l'enseignement est organisé en fonction d'une liste mathématique de concepts et de procédures à acquérir. Et toutes les innovations didactiques s'inscrivent dans le cadre de cette organisation avec, pour objectif, de faire acquérir l'un ou l'autre de ces concepts. Mais bien que l'obstacle majeur de la conversion des représentations ne soit reconnu comme tel, différentes stratégies didactiques sont adoptées et, souvent, combinées pour le contourner.

— La multireprésentation des objets mathématiques. Elle consiste à faire associer d'emblée plusieurs représentations d'un même objet. Le développement des nouvelles technologies a donné le moyen de faire passer presqu'instantanément et automatiquement d'un registre de représentation à un autre. Il suffit d'utiliser les commandes du menu des instructions qui sont propres au logiciel utilisé.

— La recherche de la meilleure représentation pour les élèves. Elle conduit à privilégier les représentations iconiques comme les images et les schémas utilisant des flèches, parce que voir donne un accès aux objets qui est à la fois plus rapide et plus riche en informations que toute explication verbale.

— L'utilisation d'une connaissance mathématique dans la réalité. Elle consiste à partir de situations réelles ou concrètes dans lesquelles l'utilisation de la propriété ou de la procédure mathématique que l'on veut enseigner s'avère indispensable pour résoudre les problèmes qu'on peut rencontrer dans cette situation.

— Une organisation du travail en classe selon le modèle développemental d'apprentissage. Il s'agit de mobiliser tous les types d'activités que chaque individu met successivement en œuvre lorsqu'il à cherche à s'approprier quelque chose de nouveau : tout d'abord faire ou manipuler par tâtonnements successifs, puis formuler ce qu'il fait ou ce qu'il observe, enfin contrôler les résultats de son action et valider la démarche suivie pour les obtenir. Naturellement, il s'agit de trouver le problème adapté à la propriété ou à la procédure que l'on veut introduire. Car c'est sur la résolution de ce problème que ces différents types d'activités vont être sollicités pour faire prendre progressivement conscience du concept mathématique utilisé.

Aucune de ces stratégies n'aide véritablement les élèves à franchir l'obstacle de la conversion des représentations sémiotiques, c'est à dire à prendre conscience de la manière de travailler qui est propre aux mathématiques et à se l'approprier personnellement. Les problèmes de non reconnaissance resurgissent régulièrement bien après l'enseignement. Et les passages d'un cycle d'enseignement à un autre, du primaire au collège, puis du collège au Lycée, se révèlent être des ruptures totales dans les exigences mathématiques de ce qui est attendu des élèves. Un des exemples les plus spectaculaires concerne, en géométrie, la manière de voir les figures et le type de preuve. Les élèves doivent passer d'une utilisation empirique des figures dans le primaire à une utilisation qui serait exclusivement déterminée par les hypothèses du problème à résoudre! Ce qui, dans les deux cas, est complètement étranger à la manière mathématique de voir les figures géométriques et ce qui est aussi contre éducatif (Duval 2005, 2014).

Dans toutes ces stratégies didactiques, en effet, le point cognitivement crucial de la conversion des représentations en mathématiques reste complètement ignoré.

Car, bien évidemment, les élèves ont à reconnaître, parmi toutes les représentations avec lesquelles ils sont conduits à travailler, celles qui se rapportent au concept mathématique à découvrir. Autrement dit, ils doivent reconnaître les correspondances terme à terme qui existent entre les unités constituant les contenus respectifs d'un large spectre de représentations: images, schémas, figures géométriques, graphiques, expression linguistique, expression littérale, etc. Comment peuvent-ils apprendre à maîtriser ce jeu sémio-cognitif à la fois complexe et toujours différent?

Il faut construire des situations d'apprentissage dans lesquelles les élèves puissent comparer des variations de contenu des représentations dans un registre A, avec les variations correlatives de contenu des représentations dans un registre B. C'est la seule manière pour apprendre à discerner les unités à mettre en correspondance et devenir capable de reconnaître rapidement si deux représentations quelconques étant données respectivement dans deux registres, elles sont, ou ne sont pas, deux représentation équivalentes d'un même objet. Autrement dit, la méthode utilisée pour construire un questionnaire de tâches de reconnaissance permet également de constuire des situations d'apprentissage. Mais une telle méthode ne peut être facilement utilisée qu'entre des registres monofonctionnels, c'est à dire des registres dont les traitements sont des algorithmes (Duval 2006 b, p. 110).

Les langues naturelles et toutes les figures sont des registres multifonctionnels. Tous les traitements faits dans ces registres, c'est à dire les raisonnements et l'exploration heuristique de transformations de figures, ne sont pas algorithmisables. Et c'est ce qui fait la difficulté de leur utilisation dans l'enseignement. Aussi, pour que les élèves puissent apprendre à passer de ces registres à des registres où les traitements sont algorithmisables, il est nécessaire de recourir à des représentations auxilaires. Cela s'impose par exemple avec tous les énoncés de problème comme les problèmes additifs ou les problèmes de mise en équation. En ce qui concerne les problèmes additifs, il existe maintenant une littérature considérable avec des propositions très différentes de représentations auxilaires pour favoriser la compréhension de ces problèmes: des images représentant des collections d'objets, les schémas ternaires de Vergnaud, la droite numérique, etc. *La principale question que le recours à ces représentations auxiliaires soulève est celle de leur pertinence cognitive* pour apprendre à convertir les données d'un problème. Car, pour être réellement utiles, elle doivent rendre visibles une double correspondance: celle entre les unités discursives de l'énoncé et les unités figurales de la représentation auxiliaire, d'une part, et celle entre les unités figurales et les unités symboliques d'une égalité numérique, d'autre part. Autrement dit, les représentations auxiliaires doivent montrer à la fois comment sélectionner les informations pertinentes dans l'énoncé et comment les organiser en une égalité numérique. Les expériences faites par R. Damm ont montré que seules des représentations bi-dimensionnelles remplissaient ces deux conditions et permettaient à de jeunes élèves de comprendre et de résoudre tous les problèmes additifs (Duval 2011 b, p. 128-129).

2.3. Quelle théorie permet de rendre compte du fonctionnement cognitif sous-jacent à l'activité mathématiques?

Pour prendre en compte les difficultés d'apprentissage de la grande majorité des élèves, les recherches sur l'enseignement des mathématiques ont du recourir à des théories cognitives, et non pas seulement à des théories pédagogiques. Ainsi, entre les années 1960 et 1980, l'épistémologie génétique de Piaget a été la référence théorique absolue pour justifier et organiser une réforme profonde de l'enseignement des mathématiques, aussi bien dans les contenus que dans les méthodes. Une expression la résumait: «la construction des concepts». Mais il s'est avéré que le constructivisme ne couvrait ni tous les aspects des processus d'apprentissage ni d'ailleurs tous les aspects de l'activité mathématique. On a alors fait appel à d'autres théories. Celle de Vygotski, à partir des années 1980. Son analyse fonctionnelle des rapports entre la pensée et le langage permettait d'expliquer l'importance des interactions sociales en classe, et sa notion de « zone proximale de développement » soulignait le rôle de l'enseignant. Ensuite, à partir des années 1990, pour justifier l'importance à donner aux signes (et non plus seulement aux concepts et au langage) lorsqu'il s'agit d'introduire l'algèbre, et également pour insister sur le rôle des images et des schémas dans l'acquisition des connaissances mathématiques, on s'est tourné vers la sémiotique de Peirce. Naturellement, aucune de ces théories ne pouvant couvrir la diversité et la complexité d'un enseignement des mathématiques du primaire à l'université, d'autres théories ont été avancées. D'où la question du choix d'une théorie ou, plus exactement, du critère de choix d'une théorie cognitive.

On peut partager toutes les théories cognitives en deux grands types, en fonction du statut épistémologique qu'elles reconnaissent aux mathématiques par rapport aux autres domaines de connaissance. Ou bien les mathématiques sont un type de connaissance comme les autres, et alors l'acquisition de connaissances en mathématiques relève des mêmes processus cognitifs que ceux mobilisés dans tous les autres domaines de connaissance. Ou, au contraire, les mathématiques sont une connaissance épistémologiquement différente des autres, et alors on se trouve face la question suivante: *quels processus cognitifs spécifiques faut-il développer pour entrer dans la manière de penser et de travailler en mathématiques?*

Toutes les théories cognitives utilisées jusqu'à présent dans les recherches sur l'enseignement des mathématiques reposent sur l'idée que les mathématiques sont épistémologiquement une connaissance comme les autres et qu'elles s'apprennent donc comme les autres connaissances. Ce sont des théories générales qui ont été élaborées en dehors de toute analyse de l'activité mathématique et du développement historique des connaissances mathématiques. Elles ont pour caractéristique commune de méconnaître le paradoxe cognitif des mathématiques et d'ignorer l'obstacle de la conversion des représentations (ci-dessus, 1.2 et 2.1). Et c'es aussi le cas de la sémiotique de Peirce et toutes les théories qui s'en inspirent.

Mais en mathématiques on travaille pas et on ne pense pas de la même manière que dans les autres disciplines (ci-dessus, 1.4). En outre, l'obstacle de la conversion des représentations se révèle irréductible à toute analyse de l'activité mathématique en termes de concepts mathématiques et d'application de concepts mathématiques. Il suffit, par exemple, d'inverser l'ordre de conversion des représentations dans toutes les tâches de reconnaissance pour voir des chutes spectaculaires de réussite (Duval 2005 b, p. 123). Le statut épistémologique à part des mathématiques oblige à reconnaître que les mathématiques mobilisent un fonctionnement cognitif différent de celui qui est spontanément mobilisé dans les autres domaines de la connaissance. *En ce sens les mathématiques constituent le lieu privilégié pour une toute autre analyse du fonctionnement cognitif de la pensée* *et de sa créativité.* C'est dans cette perspective que nous avons commencé à élaborer la théorie des registres de représentation.

3. Qu'est-ce comprendre en mathématiques ? Deux points de vue opposés et irréductibles l'un à l'autre.

L'activité mathématique n'apparaît du tout de la même manière quand on la regarde du point de vue mathématique ou, au contraire, du point de cognitif c'est à dire comme une activité de transformations de représentations sémiotiques qui sont effectuées dans des registres totalement différents. Bien évidemment, le seul point de vue qui compte est le point de vue mathématique. Car on ne peut comprendre les mathématiques qu'en faisant des mathématiques, ne fût-ce que de façon rudimentaire. Et, pour les mathématiciens et presque tous les didacticiens des mathématiques, regarder les mathématiques du point de vue cognitif c'est ne plus faire de mathématiques et donc ne pas se donner les moyens de comprendre. Mais lorsqu'on veut enseigner mathématiques à tous élèves, le point de vue cognitif s'impose de manière incontournable. Car il concerne la manière de penser et de travailler en mathématiques, indépendamment des concepts et des connaissances à utiliser ou à appliquer. Pour montrer l'opposition et la nécessité de ces deux points de vue, nous allons prendre trois questions cruciales pour l'organisation de l'enseignement des mathématiques et pour leur apprentissage par les élèves.

3.1 Quels sont les critères de compréhension?

D'un point de vue mathématique, les deux critères de compréhension sont l'exactitude du résultat obtenu et la justification du résultat obtenu. Pour les tâches qui demandent seulement la mise en œuvre d'un algorithme simple, comme un calcul avec les entiers, le premier critère est suffisant. En revanche, le second critère devient très vite nécessaire comme en géométrie où il est nécessaire de dire les propriétés qui «expliquent» comment on parvient à la solution d'un problème et pourquoi «ça marche», ou encore pourquoi d'autres réponses «ne peuvent pas marcher» même lorsqu'elles apparaissent perceptivement évidentes. Plus généralement, la compréhension doit répondre à l'exigence épistémologique de preuve qui est commune à toute connaissance scientifique. En ce sens, le critère de justification, qui implique évidemment le critère de réussite, est le critère essentiel de compréhension. Mais, en mathématiques, la justification ne se limite pas au fait de mentionner la bonne propriété. *Elle doit entraîner un changement de conviction*. Et losrqu'on met les élèves en situation de le vivre, ce changement est pour eux une véritable expérience intellectuelle et déclenche une prise de conscience de la manière de penser propre aux mathématiques (Duval 1991, p. 237-238 ; 2011 a, p. 39).

D'un point de cognitif, le critère de compréhension est la reconnaissance immédiate d'un même objet dans des représentations dont les contenus n'ont rien de commun. Cette reconnaissance est la condition qui permet de changer de registre, en substituant à une représentation donnée une représentation totalement différente (ci-dessus 2.1). Ce critère de reconnaissance doit être pris au sens fort. *La reconnaissance d'un même objet, quand on change de registre de représentation, doit se faire dans les deux sens de conversion,* et non pas dans un seul, celui qui est habituellement privilégié par l'enseignement. Pour les fonctions, par exemple, on va habituellement de l'écriture algébrique d'une équation au graphe, en faisant tracer ce graphe. Mais cette pratique privilégie une appréhension locale des points d'intersection au détriment d'une appréhension globale des valeurs visuelles du graphe. *Or la reconnaissance doit couvrir les variations possibles du contenu visuel des graphes.* Autrement dit, le critère cognitif de reconnaissance porte sur un ensemble de représentations différentes possibles, et non pas sur les quelques situations typiques étudiées en classe en relation avec le concept enseigné. Rien n'est plus révélateur d'une méprise sur les objectifs et les apports de l'éducation mathématique, et sur son échec, que l'argument que nous avons souvent entendu dans la bouche des enseignants et dans celle des élèves: «cela n'a pas été vu en classe». Cet argument est la négation même du premier critère psychologique de réussite d'un apprentissage: le transfert à des situations entièrement nouvelles.

La question des critères de compréhension oblige à s'interroger sur les pratiques d'évaluation et sur l'élaboration des questionnaires d'évaluation en mathématiques. Les «réussites» enregistrées correspondent-elles à une compréhension et donc une acquisition qui va faciliter d'autres acquisitions? Ou, au contraire, masquent-elles une incompréhension qui va conduire ultérieurement à des échecs et des difficultés croissantes de compréhension? La valeur diagnostique et pronostique des évaluations dépend du critère de compréhension qui a déterminé le choix des tâches pour élaborer un test d'acquisition. Le plus souvent, ce critère est uniquement l'exactitude du résultat obtenu. Car le deuxième critère mathématique s'avère difficile à utiliser, les enseignants et les chercheurs étant souvent réduits à relever dans les productions des élèves, la présence de quelques mots pris comme indicateurs de compréhension. *En revanche, le critère cognitif n'est presque jamais pris en compte.*

3.2. Quelles sont les connaissances de base à acquérir: les concepts ou les gestes propres à la manière de travailler en mathématiques?

D'un point de vue mathématique, les connaissances mathématiques sont les définitions et les théorèmes qui établissent les propriétés d'objets mathématiques tels que les nombres, les fonctions, les types de relations (métriques, projectives, affines, topologiques) relatives à l'espace et aux objets dans l'espace, etc. Elles permettent de justifier de nouveaux résultats mathématiques et de résoudre des problèmes pratiques à partir de données enregistrées dans des situations réelles. Mais le point essentiel, ici, est que *les connaissances mathématiques sont toujours DES PROPOSITIONS que l'on peut CONDENSER DANS DES MOTS,* mots qui deviennent simultanément des termes mathématiques et des concepts! Les concepts mathématiques ne résultent pas d'un processus d'abstraction comme pour tous les concepts empiriques, mais d'un travail lent et complexe de construction, qui passe par l'élaboration de définitions, par une exploration heuristique conduisant à des conjectures et par la démonstration de ces conjectures. Mais, du point de vue mathématique, il n'est pas possible de faire des mathématiques sans utiliser et donc sans acquérir des concepts mathématiques. Sinon on le fait de façon très rudimentaire et sans aucun développement possible, comme dans toutes les cultures qui n'ont pas disposé d'un système d'écriture!

Du point de vue cognitif, l'acquisition de connaissances mathématiques dépend de la reconnaissance d'un même objet dans au moins deux représentations différentes, puisque les objets mathématiques ne sont pas accessibles empiriquement. Mais elle dépend aussi des transformations des représentations en de nouvelles représentations à l'intérieur d'un même registre. Or chaque registre offre des possibilités spécifiques de transformation que les autres registres n'offrent pas. Ainsi les traitements propres aux figures géométriques consistent en des réorganisations visuelles des formes perçues et, surtout, dans leur déconstruction dimensionnelle (Duval 2011 b, p. 89-90). Avec les écritures algébriques, les traitements consistent en des réorganisations d'écriture, soit d'une expression soit de l'équation par déplacement de termes d'un membre à l'autre. Pour la langue naturelle, les transformations commencent, au degré zéro d'organisation discursive, avec les différentes opérations verbales possibles pour désigner un objet, etc. (Duval 2011b, p.78-80). Les conversions et les traitements propres à chaque registre constituent ce qu'on pourrait appeler les gestes intellectuels du travail mathématique. Les connaissances mathématiques de base à acquérir sont d'abord ces gestes intellectuels nécessaires pour comprendre la construction de ce qui est maintenant condensé en «concepts».

L'opposition entre ces deux points de vue sur les connaissances mathématiques à acquérir se traduit, par exemple, dans les questions suivantes. Faut-il introduire les représentations graphiques *à partir de la notion de fonction linéaire* ou, au contraire, faut-il faire développer la coordination entre l'écriture d'équations très simples du premier degré et les variations de position d'une droite sur deux axes, *avant même d'introduire la notion de fonction?* Dans l'enseignement primaire faut-il faire d'abord travailler sur la décomposition visuelle de surfaces, concaves ou convexes, en réseaux de droites avant d'introduire les notions de lignes, de droite, de points, de parallélisme, ou, au contraire, ces notions sont-elles nécessaires (Duval et Godin 2005)? Plus généralement, est-ce que la compréhension en mathématiques présuppose le développement, chez les élèves, de la coordination des registres de représentation sémiotique ou, au contraire, est-ce l'acquisition de concepts mathématiques qui permet aux élèves de changer de registre de représentation, d'apprendre à voir aussi bien les graphiques cartésiens que les figures géométriques, à utiliser les propriétés mathématiques, etc.?

3.3 Les problèmes: apprendre à les résoudre ou apprendre à les poser?

La résolution de problèmes est l'activité mathématique par excellence. L'un des apports les plus significatifs des recherches didactiques est d'en avoir fait la situation principale d'apprentissage des mathématiques. Et le seul moyen de montrer l'utilité et l'importance des mathématiques est de proposer des problèmes réels que l'application de connaissances enseignées va permettre de résoudre. Tout cela est devenu comme la règle d'or didactique. Mais la résolution de problème reste une boîte noire pour la très grande majorité des élèves. Et c'est là que se révèle, de manière souvent brutale, l'incompréhension profonde et durable des élèves. Les recherches sur la résolution de problème sont innombrables, qu'il s'agisse des problèmes additifs, des multiplicatifs, de mise en équations et des problèmes de géométrie. Mais toutes laissent dans l'ombre la question peut-être la plus importante: qu'est-ce qu'un problème mathématique, ou plus exactement qu'est-ce qu'un problème dans l'enseignement des mathématiques?

Du point de vue mathématique, les problèmes donnés dans l'enseignement des mathématiques ne sont plus des problèmes pour la recherche mathématique. Ce sont *des problèmes construits* dans le but de faire acquérir ou de faire utiliser une propriété ou une procédure mathématique déterminée. *Il y a donc une procédure de construction qui permet de générer tous les types de problèmes possibles pour* *l'utilisation d'une propriété ou d'une procédure mathématique*. Son principe est simple. On part de la description complète du traitement mathématique élémentaire correspondant à une propriété ou à une procédure*, et on* effectue les différentes suppressions de données possibles de manière à ce que les données restantes permettent de retrouver les données supprimées. On obtient ainsi, à partir de la description complète d'un traitement mathématique élémentaire, plusieurs descriptions minimales qui correspondent à tous les problèmes possibles résolubles à l'aide de cette propriété ou de cette procédure (Duval 2013). Le choix d'une situation concrète, comme d'ailleurs le choix de la valeur des données (par exemple, des petits ou des grands nombres pour les problèmes additifs et multiplicatifs) devient alors secondaire, même si cela est souvent considéré comme deux variables didactiques importantes.

Du point de vue cognitif, la difficulté fondamentale dans la résolution de problème est la reconnaissance de la propriété ou de la procédure à utiliser. Trouver c'est reconnaître. Dans les problèmes additifs et multiplicatifs, la reconnaissance porte sur le choix de l'opération à effectuer. Dans les problèmes de géométrie, la reconnaissance est beaucoup plus complexe, à la fois pour des questions de reconnaissance visuelle des unités figurales pertinentes et pour le choix plus grand des propriétés possibles (théorème des milieux, théorème de Thalès, théorème de Pythagore, etc.). En outre, l'analyse cognitive montre que les conversions de représentations requises pour résoudre un problème sont beaucoup plus complexes que celles requises pour construire le problème qui est donné à résoudre (Duval 2013). Et pour les problèmes réels à résoudre à l'aide de propriétés géométriques, il faut en plus mobiliser, explicitement ou implicitement, une schématisation intermédiaire qui montre le rapport entre la situation réelle et la figure géométrique qui en est une modélisation mathématique (Duval 2011b, p. 95-96). Autrement dit, comment peut-on apprendre à reconnaître les connaissances mathématiques à utiliser pour résoudre un problème, si on ne sait pas comment construire un problème et, surtout, si on n'a pas exploré tous les types de problèmes qu'une propriété mathématique déterminée permet de résoudre?

La question que soulève l'opposition de ces deux points de vue est d'autant plus cruciale qu'il y a un partage institutionnel des rôles entre les enseignants et les élèves. Ce sont les enseignants, les auteurs de manuels ou les experts qui construisent les problèmes, et ce sont les élèves qui doivent les résoudre. Comment s'étonner alors que la résolution de problème reste une boîte noire pour la grande majorité des élèves ? Comment s'étonner que les connaissances mathématiques apprises soient destinées à rester des connaissances mortes ou inutiles pour tous ceux qui ne suivront pas des filières scientifiques? D'un point de vue cognitif, on ne peut pas apprendre à résoudre des problèmes, et donc à savoir utiliser des connaissances mathématiques, si on n'apprend pas comment on construit les problèmes à résoudre. Ces deux types d'activité sont inséparables. Apprendre à construire des problèmes qui puissent être résolus mathématiquement implique évidemment l'organisation de tâches spécifiques (Duval 2013).

Cette opposition entre le point de vue mathématique et le point de vue cognitif vient de ce que *l'activité mathématique a deux faces.* L'une est *la face exposée.* Elle est centrée sur les objets, leurs propriétés, les algorithmes et les méthodes de résolution. L'autre est *la face cachée*. Elle concerne les manières de voir, de raisonner, de définir, de sauter d'une représentation à l'autre avec des objets qui sont uniquement accessibles par les représentations sémiotiques que l'on produit. Cette face est cachée parce qu'elle cesse d'être remarquée lorsqu'on commence à comprendre en mathématiques. Mais elle reste irréductible à la face exposée des mathématiques. *Car la manière de «faire des mathématiques» est indépendante des objets avec lesquels on travaille.* Elle est transversale à tout contenu mathématique enseigné. En ce sens, *les méthodes de résolution*, comme les méthodes de démonstration, relèvent de la face exposée des mathématiques, et non pas du type de fonctionnement cognitif qui est requis pour savoir comment «faire», ou quoi «faire», en mathématiques pour comprendre, chercher et trouver.

4. Les deux faces de l'activité mathématique sont-elles prises en compte dans l'enseignement et dans les recherches didactiques?

Avec cette question, on retrouve tous les débats et toutes les prises de position sur les contenus mathématiques à enseigner ou à ne plus enseigner, sur les outils didactiques à utiliser (matériel, logiciels), sur le type de problème à donner aux élèves, sur le choix des théories, sur la fiabilité des évaluations ou sur celle de l'analyse des productions verbales des élèves, etc. Aussi est-il nécessaire de subdiviser cette question en trois autres questions, pour mettre en évidence des éléments de réponse.

4. 1. Quels sont les objectifs de l'enseignement des mathématiques pour tous les élèves jusqu'à 15 ou 16 ans?

Cette question se pose évidemment à l'échelle du système éducatif d'un pays. Et elle est généralement examinée de manière séparée pour l'école primaire et pour le collège. Car ce ne sont pas évidemment ni les mêmes connaissances de base qui vont définir les objectifs pour chacun de ces deux cycles d'enseignement, ni les même « experts » qui vont être consultés pour chacun de ces deux cycles. Mais, dans ces deux cycles, les objectifs sont déterminés du seul point de vue mathématique. Cela apparaît dans *la décomposition des connaissances de base en concepts (propriétés et algorithmes)* et dans *l'organisation d'une progression d'acquisition* sur les quatre ou cinq années du cycle. Prenons l'un des objectifs du collège: la résolution des équations et leur utilisation pour résoudre des problèmes.

La méthode de décomposition mathématique de cette connaissance de base, qui est en réalité un complexe de connaissances, consiste à expliciter les connaissances mathématiquement prérequises pour résoudre et utiliser les équations. C'est un processus *top down* que nous avons représenté dans le schéma ci-dessous par des flèches en petit pointillé. Le schéma ne représente que la première décomposition en prérequis. En réitétant ce processus de décomposition on obtient, pour les algorithmes, les règles de priorité opératoire, la distributivité de la multiplication par rapport à l'addition, la notion d'opposé ou d'inverse d'un nombre. Et pour le statut de l'équation et la signification du signe «=», on obtient les notions d'identité, de nombre de solution, de variable (et non plus d'inconnue), etc.

Finalement le terme ultime de cette décomposition *top down* est l'introduction de lettres, *ce qui est le seul prérequis mathématique commun à la résolution d'équations et à l'utilisation d'équations pour résoudre des problèmes* (Duval 2011 c). Ainsi l'objectif global d'acquisition à la fin du collège est découpé en une suite d'objectifs locaux à atteindre chaque année en classe, sur toute la durée du collège.

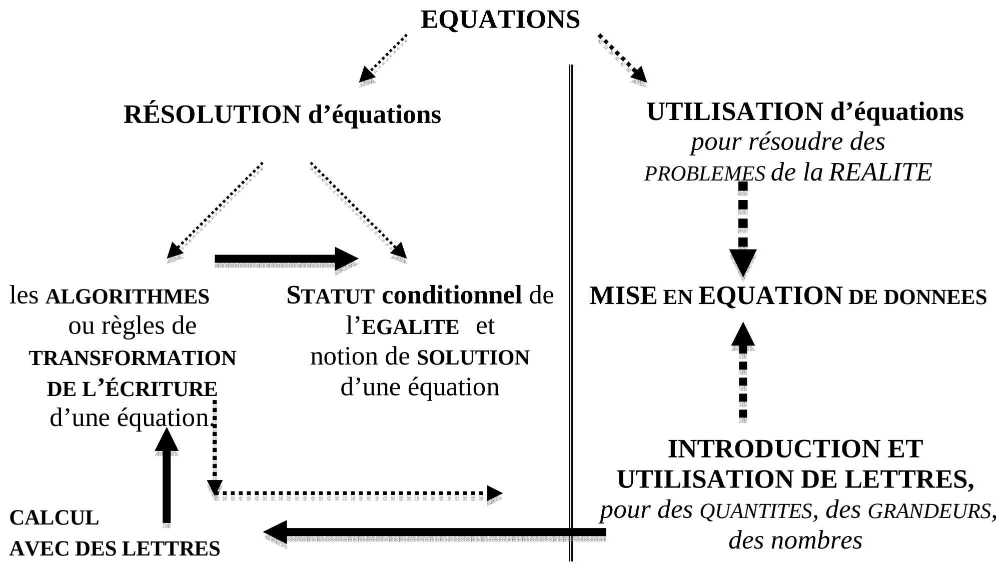


Figure 2. Analyse *top down* d'une connaissance de base et organisation *bottom up* de son enseignement sur la durée d'un cycle.

L'organisation de la progression de l'enseignement se fait en suivant l'ordre inverse, *bottom up*, de la décomposition en prérequis mathématiques (les flèches en traits pleins sur le schéma). Autrement dit, l'ordre d'apprentissage est défini du seul point de vue mathématique. Quand on décrit l'apprentissage comme une «construction de connaissances», on demande en réalité aux élèves une *RE-construction* de connaissances en partant des prérequis les plus élémentaires ou les plus simples *mathématiquement parlant!*

On commence donc par l'introduction des lettres et du calcul littéral. Et là ce qui est simple devient une source d'équivoques durables, étant donné qu'une lettre peut avoir des statuts différents et qu'elle doit servir à la fois pour la désignation directe de quelque chose et pour la désignation fonctionnelle d'autre chose. En réalité, l'introduction des lettres est celle implicite d'opérations discursives de désignation différentes les unes des autres, et d'un jeu varié de conversions, c'est à dire de substitutions possibles, comme on peut le voir dans le tableau ci-dessous.

CHIFFRES	LETTRES	MOTS *(interface verbale, souvent muette ou oubliée, entre chiffres et lettres)*
UN nombre	**Redésignation directe** par une lettre	Désignation directe ou Désignation indirecte par micro-description
UNE LISTE OUVERTE de nombres	**Condensation** en une lettre **Balayage des éléments** d'un ensemble de nombres	Désignation directe du **type nom propre** pour un ensemble de nombres ou pour un type de grandeur: vitesse, temps, aire..
DES LISTES dont la génération des nombres est corrélée	**Désignation fonctionnelle** par ***une combinaison opératoire lettre-chiffre:*** «2n +1» **Balayage** d'un ensemble de nombres	**Désignation directe d'une propriété** des nombres: « impair » **Désignation indirecte** par une micro-description (souvent relative à une quantité ou une grandeur)

Figure 3. Variations des objets désignés et des opérations de désignation impliqués dans l'introduction d'une lettre[1].

[1] Ce tableau a été élaboré dans un travail, en cours, avec F. Pluvinage, sur les entrées mathématiques et l'entrée cognitive dans l'algèbre élémentaire au collège.

Il suffit de regarder la seule colonne des lettres pour constater qu'il ne peut pas y avoir de réelle compréhension pour les élèves, si on ne leur fait pas d'abord prendre conscience des différents emplois possibles d'une lettre et de ses conversions avec les nombres (écriture décimale) et avec l'expression verbale de propriétés mathématiques, de termes physique ou des mots du langage quotidien.

En outre, les lettres sont souvent introduites dans le cadre de la résolution de problèmes. Ce qui exige, évidemment, une mise en équations des données. Et là c'est une autre source d'embarras pour les élèves. *Car il n'y a pas de méthode pour mettre en équations.* Celle qui est répétée comme un refrain dans les manuels, depuis plus d'un siècle, est aussi vague que la description du plan à suivre pour composer une dissertation. Elle exige le recours à des représentations auxiliaires bidimensionnelles dont l'utilisation ne dépend d'aucun concept ni d'aucune connaissance mathématique (Duval 2002).

4.2 Qu'est-ce qui détermine le choix d'une théorie d'apprentissage pour l'organisation du travail en classe?

Tout d'abord, *le travail en classe est organisé en fonction de l'acquisition des concepts* qui ont été institutionnellement fixés comme objectifs locaux d'acquisition pour le niveau de la classe. Le temps consacré à l'acquisition des différents concepts sera donc une ou deux séances par semaine, sur une période de temps excédant rarement quatre ou cinq semaines. Et c'est à cette brève échelle de temps que les séquences didactiques visant l'acquisition d'un concept sont organisées. Dans ce cadre instutionnel, qui échappe totalement à l'enseignant et auquel il doit se soumettre, deux facteurs vont déterminer le choix d'une théorie d'apprentissage.

Le premier facteur est la prise en compte du degré de complexité du concept mathématique enseigné. Un des moyens d'analyse de la complexité des concepts est l'histoire de son émergence et de son développement. Le deuxième facteur est que la théorie soit une théorie de la formation des concepts concernant tous les domaines de la connaissance. Et cela explique les recours successifs au théories constructivistes, empiristes, pragmatiques de l'apprentissage (ci-dessus 2.3). Car *on attend de ces théories importées qu'elles puissent être appliquées localement* pour organiser une séquence didactique dont le but est, la compréhension et l'acquisition des concepts, quels qu'ils soient. Ainsi, à l'échelle d'une année et à celle d'un cycle d'enseignement, la progression dans l'acquisition des connaissances est organisée comme une suite d'acquisition de concepts entre lesquels la très grande majorité n'arrive pas à voir de rapports. On pourrait parler d'un apprentissage « en miettes».

Dans le choix d'une théorie de la formation des concepts, ni le paradoxe cognitif des mathématiques ni l'équivocité épistémologique du terme concept (ci-dessus 3.2) ne sont réellement pris en compte.

4.3. Quel est le point de vue privilégié dans les recherches sur l'enseignement des mathématiques, celui des enseignants ou celui des élèves?

Depuis plus d'une trentaine d'années, la formation des enseignants s'est imposée comme la préoccupation majeure de toutes les politiques d'éducation, et tout particulièrement en mathématiques. Parallèlement, il y a la demande des futurs enseignants, ou des enseignants, sur «quoi faire» en classe pour que leurs élèves comprennent les concepts qu'ils ont à enseigner. C'est dans ce contexte que l'organisation de séquences d'activités et la manière de gérer le passage d'une type d'activité à l'autre sont devenues l'objet principal des recherches en didactique des mathématiques.

Tout le travail d'observation est alors fait pour tester une séquence d'activités visant l'un des objectifs locaux de l'année. Comment les élèves participent-ils aux différentes tâches proposées? Comment l'enseignant prend il en compte ce que les élèves font et ce qu'ils expliquent? Les données recueillies sont alors les interactions orales avec l'enseignant et avec les autres élèves. C'est ce type de données qu'on utilise pour dire si le travail en classe a bien marché et, donc, si les élèves ont acquis ce qui leur a été enseigné. *Teaching/learning.* Il est révélateur que les deux mots soient maintenant toujours employés ensemble, comme si la compréhension des mathématiques par les élèves dépendait uniquement de la manière de les enseigner. Or le problème que soulève l'organisation des séquences d'activités est que chacun des types d'activité formant la séquence didactique recouvre plusieurs tâches cognitivement hétérogènes. La formulation est déjà, implicitement ou explicitement, dans la phase d'action.

Toutes les observations que l'on peut faire sur le choix des objectifs de l'enseignement des mathématiques, sur l'organisation de l'enseignement à l'échelle d'un cycle et sur l'organisation du travail en classes convergent vers la même conclusion. La face cachée des mathématiques, c'est à dire la manière de penser et de travailler qui est propre aux mathématiques, n'à aucune place dans l'enseignement des mathématiques au primaire et au collège. Il nous a fallu d'ailleurs la collaboration active d'enseignants qui nous ont accueilli dans leurs classes pour que nous puissions faire des observations d'élèves sur de longues périodes, et qui ont aussi accepté d'organiser des expériences marginales. C'est sur la base de cette collaboration, sur le terrain, avec les enseignants et leurs élèves, et aussi dans des discussions ouvertes et régulières avec des mathématiciens, que nous avons pu élaborer la théorie des registres de représentation.

Conclusion

L'objectif prioritaire de l'enseignement des mathématiques doit être de faire entrer les élèves dans la manière de penser et de travailler qui est propre aux mathématiques. C'est la condition cognitive pour comprendre en mathématiques et savoir comment utiliser dans les situations de la réalité les connaissances enseignées. Pour atteindre cet objectif, des activités spécifiques doivent être élaborées en fonction des variables cognitives qui correspondent aux manières mathématiques de voir, de désigner, de définir, de raisonner que chacun des registres de représentation permet de mettre en œuvre. La reconnaissance spontanée d'un même objet dans des représentations différentes est le tout premier seuil à franchir pour ne pas se trouver très vite perdu dans n'importe quelle activité mathématique donnée en classe.

La théorie des registres de représentation oblige à s'interroger sur la manière unilatérale dont l'enseignement des mathématiques est organisé dans l'enseignement primaire et au collège. Tout y est fait, en définitive, du point de vue mathématiques, car tout y est centré sur les acquisitions successives de concepts et sur les procédures associées à ces concepts. La théorie des registres vise, au contraire, à analyser ce que nous avons appelé la face cachée des mathématiques, celle qui n'a plus aucun intérêt lorsqu'on est passé de l'autre côté du miroir, c'est à dire lorsqu'on on a commencé à penser et à travailler un peu comme le font les mathématiciens.

La théorie des registres n'est pas une théorie générale et close. Elle est d'abord un outil pour analyser les activités et les problèmes élaborés pour l'enseignement ainsi que les productions des élèves. Mais, surtout, elle ouvre de nouveaux champs de recherche sur la visualisation en géométrie, sur l'articulation entre langage et visualisation, sur la manière d'introduire l'algèbre, et sur une autre approche de la résolution de problème.

La théorie des registre se place résolument du point de vue des élèves, de l'incompréhension sourde et persistante qu'ils ressentent dans l'apprentissage des mathématiques, et non pas du point de vue des enseignants. Le point de vue des élèves est important pour la formation des enseignants. Car, dans la réalité quotidienne des classes, les enseignants se trouvent face à une situation complexe, qui vient de l'inadéquation fréquente entre la séquence planifiée et ce que les élèves font réellement, et aussi de la grande diversité entre les élèves d'une même classe. Les enseignants doivent alors, comme des médecins en consultation, diagnostiquer les incompréhensions récurrentes qui se cachent sous des erreurs locales ou sous des blocages, et trouver les tâches ou les exercices qui vont aider les élèves à les dépasser.

Je teminerai par la réflexion qu'un élève de 13 ans m'avait faite, il y a plus de quarante ans, dans la période alors enthousiaste de la réforme des mathématiques. Cette réfléxion m'est souvent revenue à l'esprit, car elle exprime parfaitement le problème de la compréhension des mathématiques: «Les mathématiques, Monsieur, ce n'est pas logique!».

Références

Duval R., (1988). Graphiques et Equations: l'articulation de deux registres, in *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives*, n°1, 235-255. (Traduction en portugais: Gráficos e equações: a articulação de dois registros. http://www.periodicos.ufsc.br/index.php/revemat).

Duval R. (1991) Structure du raisonnement déductif et apprentissage de la Démonstration, *Educational Studies in Mathematics*. n°22/3, 233-261.

Duval R. (2002). L'apprentissage de l'algèbre et le problème cognitif de la désignation des objets *Actes des Séminaires SFIDA-13 à SFIDA-16*, Volume IV 1901-2001 (p.67-94) (Ed. J.Ph. Drouhard et M . Maurel) IREM de Nice.

Duval R., (2005). Les conditions cognitives de l'apprentissage de la géométrie : développement de la visualisation, différenciation des raisonnements et coordination de leurs fonctionnements. *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives*, n° 10, 5-53.

Duval R., (2006a). Un tema crucila en la educacion matematica: la habilidad para cambiar el registro de representacion. *La Gaceta de la RSME*. Vol.9. 9.1 pp.143-168.

Duval R. (2006b). The cognitive analysis of Problems of comprehension in the learning of mathematics. In a A Saenz-Ludlow, and N.Presmeg (Eds.), *Semiotic perspectives on epistemology and teaching and learning of mathematics, Sépcial issue, Educational Studies in Mathematics, 61, 103-131*

Duval R., (2006c). Quelle sémiotique pour l'analyse de l'activité et des productions mathématiques ? *Relime*, Numero Especial pp. 45-81. Clame.

Duval R., (2011a). Preuves et preuve: les expériences des types de nécessité qui fondent la connaissance scientifique. *Du mot au concept. Preuve,* 33-68. Grenoble: Presses Universitaires

Duval R., (2011b). *Ver e ensinar a Matematica de outra forma. (I) Entrar no modo matemacico de pensar: os registros de representacoes semioticas.* Sao Paolo: Proemeidtora.

Duval R., (2011c). Dois olhares opostos sobre os pontos críticos do ensino de álgebra no ensino fundamental. *SIEMAT 3*. 23 Juin 2011 Sao Paolo. In T. M. M. Campos; U. D'Ambrosio; V. Y. Kataoka; M. Karrer; R. N. de Lima; S. H. A. A. Fernandes. *Proceedings of the III Seminário Internacional de Educação Matemática - SIEMAT*

Duval R., (2013). Les problèmes dans l'acquisition des connaissances mathématiques: apprendre comment les poser pour devenir capable de les résoudre? https://periodicos.ufsc.br/index.php/revemat

Duval, R. Godin M., (2005). Les changements de regard nécessaires sur les figures. *Grand*, *76*, 7-27.

Vergnaud G., Durand C., (1976). Structures additives et complexité psychogénétique. *Revue française de de pédagogie*, 36, 28-43.