REVISTA IBEROAMERICANA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA

www.fisem.org/web/union

ISSN: 1815-0640
Número 37. Marzo de 2014
páginas 57-70

# Una clase de teoría de grupos usando progresiones aritméticas, geométricas y matrices cuadradas de orden impar

**Joseph Francisco, Thais Arreaza, Edilmo Carvajal**

Fecha de recepción: 3/04/13
Fecha de aceptación: 5/12/13

| | |
|---|---|
| **Resumen** | La estructura de grupo es una noción importante en el aprendizaje del Álgebra. Con ella comienza la abstracción característica de todo sistema axiomático de la matemática. Este documento muestra una clase de grupo abeliano tomando en cuenta progresiones y matrices cuadradas de orden impar. Se utiliza este tipo de matrices porque al realizar ciertas operaciones con todos los elementos de la matriz, se obtiene su elemento central. Los autores siguen una secuencia lógica de pasos que facilitan la enseñanza y aprendizaje del tema tratado.<br>**Palabras clave**: Enseñanza del álgebra, estructuras algebraicas, grupo. |
| **Abstract** | The group structure is an important concept in learning algebra. With this feature abstraction begins all axiomatic system of mathematics. This document shows a class of abelian group considering progressions and odd-order square matrices. Use these matrices to perform certain operations because all the elements of the matrix returns its central element. The authors follow a logical sequence of steps that facilitate the teaching and learning of the subject.<br>**Keywords**: teaching algebra, algebraic structures, groups |
| **Resumo** | A estrutura do grupo é um conceito importante em aprender álgebra. Com essa abstração característica começa todo o sistema axiomático da matemática. Este documento mostra uma classe de grupo abeliano considerando progressões e estranha ordem matrizes quadradas. Usar estas matrizes para efectuar certas operações, porque todos os elementos da matriz de volta o seu elemento central. Os autores seguem uma seqüência lógica de passos que facilitam o ensino ea aprendizagem do sujeito.<br>**Palavras-chave** Álgebra de ensino, estruturas algébricas, grupo. |

## 1. Introducción

En la enseñanza de la matemática emergen situaciones que obstaculizan el aprendizaje de los contenidos propios de esta disciplina. Un aspecto característico del álgebra, es el alto nivel de abstracción en sus conceptos básicos, las dificultades conceptuales que esta rama representa para los estudiantes es significativa. En el Instituto Pedagógico de Caracas (IPC), en la asignatura Estructuras Algebraicas, ubicada en el cuarto semestre de la carrera de profesor de matemáticas se introducen los contenidos referentes al concepto de grupo. La noción de grupo se encuentra presente en muchas de las ramas de la matemática y, es necesario que los estudiantes manipulen las propiedades de dichos elementos, por esta razón deben tener consolidados algunos conocimientos previos, entre los cuales podemos señalar: la aritmética (manejo de sus operaciones y propiedades); nociones de conjuntos; sistemas numéricos (números reales y números complejos); transformaciones geométricas (traslaciones, rotaciones y reflexiones); álgebra matricial; nociones de cálculo (funciones, sucesiones, progresiones), entre otras. En los libros de textos sugeridos para este curso, se pueden ver ejemplos relacionando la noción de grupo con: matrices, propiedades aritméticas de los sistemas numéricos, nociones de cálculo, geometría, pero nos llama la atención que no lo hacen con las progresiones aritméticas o geométricas.

Específicamente en el curso de Estructuras Algebraicas los ejemplos trabajados son abstractos. La estructura de grupo es un sistema axiomático básico y fundamental de la matemática. No es fácil lograr que el estudiante adquiera rigurosidad, que generalice, que discrimine entre un concepto u otro, o entre varias operaciones realizadas sobre el mismo conjunto. Para que el estudiante demuestre que un conjunto cualquiera con una ley de composición interna definida sobre él, es un grupo, debe comprobar los axiomas de grupo y manejar los conocimientos previos antes señalados.

En este trabajo, veremos cómo relacionar matrices y progresiones aritméticas y geométricas a través de la noción de grupo abeliano. Los ejemplos y contraejemplos propuestos permitirán que los participantes aprendan a identificar si un conjunto con una ley de composición definida sobre él, es un grupo abeliano o no. Además, se incluyen "notas", donde los autores basados en su experiencia docente en el área de álgebra dan sugerencias de los aspectos que se deben enfatizar para facilitar la enseñanza y aprendizaje del tema tratado. Se presentan curiosidades relativas al calendario, los meses del año se pueden considerar como una de las matrices descritas en este trabajo.

La organización del artículo es como sigue: en la sección 2, se repasan los conceptos de ley de composición, ley de composición interna, definición de progresiones y se introduce la definición de grupo y de grupo abeliano; en la sección 3, se dan los pasos necesarios para probar que un conjunto con una ley de composición interna es un grupo y se hacen comentarios a cada uno de estos pasos; en la sección 4, se da un ejemplo de grupo utilizando un conjunto de matrices cuyos elementos se forman utilizando progresiones aritméticas; en la sección 5, se da otro ejemplo de grupo, pero utilizando un conjunto de matrices cuyos elementos se forman utilizando progresiones geométricas y; finalmente, se dan conclusiones y la bibliografía.

## 2. Grupos y progresiones

**Definición 1**: Una ley de composición interna (binaria) sobre un conjunto A, que denotaremos por *, es una regla que asocia a dos elementos x, y de A un elemento de A, que notamos por x*y.

**Ejemplo 1**: La suma usual de números naturales es una ley de composición interna binaria. Aquí, A=N y dados m, n números naturales tenemos m*n=m+n es un número natural.

Para un conjunto A y una ley de composición interna * resulta interesante comprobar si satisface alguna de las siguientes propiedades:

i) Elemento neutro: Un elemento y en el conjunto A es llamado elemento neutro bajo * si para cualquier elemento x de A se tiene x*y=x=y*x.

ii) Elemento inverso: Un elemento z en el conjunto A es el inverso bajo * de un elemento x en A si se tiene x*z=y=z*x, donde y es el elemento neutro de i).

iii) Asociativa: La operación * satisface la propiedad asociativa, si para cualesquiera x, y, z en A se cumple (x*y)*z=x*(y*z).

iv) Conmutativa: La operación * satisface la propiedad conmutativa, si para cualesquiera x, y en A se cumple x*y=y*x.

**Nota1**:

- Cuando existen los elementos neutro e inverso en un conjunto para una ley de composición interna estos son únicos.

- La existencia de elementos neutro e inverso depende del conjunto A y la ley de composición interna *. Puede darse el caso que para un conjunto A y dos leyes de composición interna sobre A se tengan distintos elementos neutro e inverso.

- La existencia de elemento inverso depende de la existencia de elemento neutro, es decir, primero se debe garantizar la existencia de elemento neutro para luego garantizar la existencia de elemento inverso (en la comprobación, seguir este orden es importante).

**Definición 2**: Si un conjunto A, y una ley de composición interna * sobre A satisfacen las propiedades i), ii) y iii) decimos que (A,*) es un grupo, y si además satisface la propiedad iv), decimos que (A,*) es un grupo abeliano o conmutativo.

**Definición 3**: Una progresión aritmética es una sucesión en la que cada término, después del primero, se obtiene agregando al término anterior una cantidad constante llamada razón de la progresión. En una progresión aritmética se tiene:

$$a_n=a_1+(n-1)r,$$

siendo $a_n$ el término n-ésimo, $a_1$ es el primer término y r es la razón de la progresión.

**Definición 4**: Una progresión geométrica es una sucesión en la que cada término, después del primero, se obtiene multiplicando al término anterior por una cantidad constante llamada razón de la progresión. En una progresión geométrica se tiene:

$$a_n=a_1r^{(n-1)}$$

siendo $a_n$ el termino n-ésimo, $a_1$ es el primer termino y r es la razón de la progresión.

Si la sucesión tiene un número finito de términos se dice que la progresión es finita.

## 3. Pasos para comprobar si (A,*) es un grupo:

**p1**. Establecer los elementos que conforman el conjunto A sobre el cual se va a trabajar, es decir, el estudiante debe estar claro en cuales elementos forman el conjunto A, cuales son las características que comparten estos elementos y que permiten distinguir para un objeto dado si pertenece o no al conjunto A.

**p2.** Establecer la ley de composición (binaria) entre elementos del conjunto. El estudiante debe entender lo que hace la ley de composición con un par de elementos del conjunto A, en esta parte es necesario que tome elementos específicos y aplique la ley de composición definida. Es decir, debe tener dominio operacional sobre los elementos del conjunto dado y la ley de composición interna definida.

**Nota 2**: Estos dos pasos son los que representan mayor inconveniente a los estudiantes al momento de comprobar si para un conjunto dado y una ley de composición interna definida sobre éste se tiene una estructura de grupo. A este punto los estudiantes no reconocen y no saben operar con los elementos del conjunto.

**p3**. Probar que la ley de composición es una ley de composición interna, es decir, probar que la operación es cerrada (si consideramos dos elementos de un conjunto al aplicar la ley de composición sobre estos elementos se produce un elemento del conjunto, en otras palabras, el elemento obtenido al aplicar la ley de composición interna es un elemento de la misma naturaleza de los elementos tomados inicialmente).

**p4**. Probar la existencia de elemento neutro en el conjunto dado bajo la ley de composición definida.

**p5.** Probar la existencia de elemento inverso en el conjunto dado bajo la ley de composición definida.

**p6**. Verificar que los elementos del conjunto dado bajo la ley de composición interna dada cumplen la propiedad asociativa.

**Pasos para comprobar si (A,*) es un grupo abeliano:**

Todos los anteriores y además:

**p7**. Verificar que los elementos del conjunto dado bajo la ley de composición interna dada cumplen la propiedad conmutativa.

A continuación, ilustramos los pasos descritos anteriormente para comprobar si (A,*) es un grupo, para ello trabajaremos en un conjunto A formado por matrices relacionadas con progresiones aritméticas o geométricas.

## 4. Trabajando la noción de grupo con matrices y progresiones aritméticas

Estamos interesados en definir una ley de composición relacionada con la suma de números complejos, la suma usual de matrices y las progresiones aritméticas.

### 4.1. El conjunto MC3

### p1 Estableciendo el conjunto con el que se va a trabajar:

Las matrices que vamos a tratar en las secciones siguientes son matrices cuadradas, es decir, de tamaño nxn y también se pueden llamar matrices de orden n. Consideremos las matrices de orden 3:

$$A=\begin{pmatrix} a & a+b & a+2b \\ a+c & a+b+c & a+2b+c \\ a+2c & a+b+2c & a+2b+2c \end{pmatrix}$$

cuyos elementos en sus filas y columnas son progresiones aritméticas de razón $b$ y $c$ respectivamente, con $a$ como el elemento en la posición (1,1) y con $a,b,c$ números complejos. A estas matrices las notamos por $M_3(a,b,c)$ ya que estos elementos las caracterizan completamente. Al conjunto formado por estas matrices lo notaremos por $MC_3$. Se tiene que cada matriz de $MC_3$ es un elemento del conjunto de las matrices de orden 3 con entradas en los números complejos, el cual denotaremos como $Mat_3(C)$.

**Ejemplo 2**:

1. Considere la matriz $M_3(1,-1,3)$ de manera que

$$M_3(1,-1,3)=\begin{pmatrix}1 & 0 & -1\\ 4 & 3 & 2\\ 7 & 6 & 5\end{pmatrix}$$

   Observe que $M_3(1,-1,3)$ es una matriz que cumple con las propiedades que definen $MC_3$.

2. Considere la matriz $M_3(-\frac{1}{2},-1,\frac{1}{2})$ de manera que:

$$M_3(-\tfrac{1}{2},-1,\tfrac{1}{2})=\begin{pmatrix}-\frac{1}{2} & -\frac{3}{2} & -\frac{5}{2}\\ 0 & -1 & -2\\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{3}{2}\end{pmatrix}$$

   Además, las matrices $MC_3$ tienen la siguiente propiedad: Si consideramos la suma de los elementos de la matriz $M_3(a,b,c)$ se tiene:
   a+a+b+a+2b+a+c+a+2c+a+b+c+a+2b+c+a+2c+b+a+2b+2c=9a+9b+9c=9(a+b+c) y luego si dividimos este resultado entre el cuadrado del orden de la matriz da como resultado a+b+c, el elemento que ocupa la posición (2,2) de la matriz $M_3$(a, b, c).

3. Para la matriz $M_3$(1,-1,3) se tiene 0+1+2+3+4+5+6+7-1=27 que dividido entre el cuadrado del orden de la matriz da 3 y es el elemento que ocupa la posición (2,2) de la matriz dada.

4. Los elementos de la matriz $M_3(-\frac{1}{2},-1,\frac{1}{2})$ son fracciones. Sumando los elementos tenemos $-\frac{1}{2}+(-\frac{3}{2})+(-\frac{5}{2})+0+(-1)+(-2)+\frac{1}{2}+(-\frac{1}{2})+(-\frac{3}{2})=-\frac{9}{2}+(-3)+(-\frac{3}{2})=-9$ y dividiendo este resultado entre el cuadrado del orden de la matriz se tiene -1.

5. Algunas de las matrices $M_3$(a,b,c) se pueden interpretar como partes del calendario de un mes cualquiera. Consideremos la matriz $M_3$(1,1,7), es decir, la matriz

$$M_3(1,1,7)=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 8 & 9 & 10\\ 15 & 16 & 17\end{pmatrix}$$

Revisando el calendario del mes de septiembre del año 2013 y comparándolo con la matriz anterior se observa que los elementos de la matriz $M_3$(1,1,7) están ubicados en la esquina superior izquierda de dicho mes.

Consideremos el conjunto $MB_3$ como el conjunto de las matrices de orden 3 que cumple que al sumar todos sus elementos y dividirlos por el cuadrado del orden de la matriz da el elemento central.

Se debe tener cuidado en pensar que los conjuntos $MB_3$ y $MC_3$ son iguales. El conjunto $MC_3$ está contenido en el conjunto $MB_3$, sin embargo, $MB_3$ no está contenido en $MC_3$.

El siguiente ejemplo muestra una matriz en la que el elemento de la posición (2,2) es el resultado de sumar todas las entradas de la matriz y luego dividirlo entre el cuadrado de su orden, pero sus elementos no siguen progresiones aritméticas en sus filas y columnas.

**Ejemplo 3**: En la matriz: $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 3 & 0 \end{pmatrix}$

la suma de sus elementos da 9 que dividido entre $3^2$ da 1, el elemento en la posición (2,2), pero no es una de las matrices $M_3(a,b,c)$ para algunos $a,b,c \in$ C.

### p2 y p3 Definiendo la ley de composición y probando que es una ley de composición interna:

Consideremos ahora la matriz $M_3(d,e,f) = \begin{pmatrix} d & d+e & d+2e \\ d+f & d+e+f & d+2e+f \\ d+2f & d+e+2f & d+2e+2f \end{pmatrix}$

Al sumar las matrices $M_3(a, b, c)$ y $M_3(d, e, f)$ se obtiene la matriz $M_3(a+d, b+e, c+f)$. En efecto,

$$M_3(a,b,c)+M_3(d,e,f)=\begin{pmatrix} a & a+b & a+2b \\ a+c & a+b+c & a+2b+c \\ a+2c & a+b+2c & a+2b+2c \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} d & d+e & d+2e \\ d+f & d+e+f & d+2e+f \\ d+2f & d+e+2f & d+2e+2f \end{pmatrix}$$

$$M_3(a,b,c)+M_3(d,e,f)=\begin{pmatrix} (a+d) & (a+d)+(b+e) & (a+d)+2(b+e) \\ (a+d)+(c+f) & (a+d)+(b+e)+(c+f) & (a+d)+2(b+e)+(c+f) \\ (a+d)+2(c+f) & (a+d)+(b+e)+2(c+f) & (a+d)+2(b+e)+2(c+f) \end{pmatrix}$$
$$= M_3(a+d, b+e, c+f)$$

Observe que al sumar dos matrices del conjunto $MC_3$, el resultado es de nuevo una matriz del conjunto $MC_3$. De aquí, tenemos que la suma de matrices de la forma $M_3(a,b,c)$ es cerrada.

**Ejemplo 4**:

1. La suma de las matrices $M_3(1,-1,3)$ y $M_3(-\frac{1}{2},-1,\frac{1}{2})$ es la matriz

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{3}{2} & -\frac{7}{2} \\ 4 & 2 & 0 \\ \frac{15}{2} & \frac{11}{2} & \frac{7}{2} \end{pmatrix}$$

es decir, la matriz $M_3(\frac{1}{2},-2,\frac{7}{2})$.

2. Si consideramos las matrices

$$M_3(-\tfrac{1}{2},-\tfrac{1}{2},\tfrac{1}{2}) = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & -1 & -\frac{3}{2} \\ 0 & -\frac{1}{2} & -1 \\ \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad M_3(\tfrac{1}{3},-\tfrac{1}{3},\tfrac{1}{2}) = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & 0 & -\frac{1}{3} \\ \frac{5}{6} & \frac{1}{2} & \frac{1}{6} \\ \frac{8}{6} & 1 & \frac{4}{6} \end{pmatrix}$$

la suma de estas dos matrices es la matriz: $M_3(-\frac{1}{6},-\frac{5}{6},1) = \begin{pmatrix} -\frac{1}{6} & -1 & -\frac{11}{6} \\ \frac{5}{6} & 0 & -\frac{5}{6} \\ \frac{11}{6} & 1 & \frac{1}{6} \end{pmatrix}$

### p4 Obteniendo el elemento neutro bajo la ley de composición interna definida:

Del trabajo que hemos realizado con matrices en álgebra lineal tenemos que la matriz nula de orden 3 es la matriz $0_3$=$M_3$(0,0,0). Es decir,

$$M_3(0,0,0)=\begin{pmatrix}0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$$

y satisface la propiedad que $M_3$(0,0,0)+$M_3$(a,b,c)=$M_3$(a,b,c) para cualquier matriz $M_3$(a,b,c).

### p5 Obteniendo el elemento inverso bajo la ley de composición interna definida:

Para la matriz $M_3$(a,b,c) consideramos la matriz $M_3$(-a,-b,-c). Es decir,

$$M_3(-a,-b,-c)=\begin{pmatrix}-a & -a-b & -a-2b\\ -a-c & -a-b-c & -a-2b-c\\ -a-2c & -a-b-2c & -a-2b-2c\end{pmatrix}$$

con la propiedad que $M_3$(a,b,c)+$M_3$(-a,-b,-c)=$M_3$(0,0,0)=$0_3$.

Además, se tiene $M_3$(-a,-b,-c)= -$M_3$(a, b, c).

### p6 y p7 Comprobando las propiedades asociativa y conmutativa para la ley de composición interna definida:

Observe que la ley de composición interna definida es la suma usual de matrices de orden 3, de la cual sabemos que satisface las propiedades asociativa y conmutativa.

De lo anterior, tenemos la siguiente

**Proposición 1:** El conjunto $MC_3$={$M_3$(a,b,c) $\in$ $Mat_3$(C)} junto con la suma usual de matrices de orden 3 es un grupo abeliano.

### 4.2. El conjunto MC4

Consideremos ahora el caso particular de las matrices cuadradas de orden 4, cuyos elementos siguen progresiones aritméticas tanto en filas como en columnas. ¿Se cumplirá que la suma de los elementos de la matriz dividido entre el cuadrado de su orden da el elemento de la posición central de la matriz?

A continuación trabajaremos el siguiente

**Ejemplo 5**: Sea la matriz de orden 4: $\begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 4\\ 8 & 9 & 10 & 11\\ 15 & 16 & 17 & 18\\ 22 & 23 & 24 & 25\end{pmatrix}$

cuyos elementos en sus filas y columnas son progresiones aritméticas. A esta matriz la denotamos $M_4$(1,1,7) como en el caso de las matrices de orden 3. Observe que en esta matriz, cuyo orden es par, no se obtiene un elemento central como sucede en el caso de las matrices de orden 3.

Una curiosidad acerca de este ejemplo es que revisando el calendario del mes de septiembre y la anterior matriz observamos que los elementos de $M_4(1,1,7)$ están ubicados en la esquina superior izquierda de dicho calendario.

De lo anterior, podemos afirmar que en las matrices cuadradas cuyos elementos en sus filas y columnas son progresiones aritméticas y su orden es par, no se cumplen las propiedades trabajadas en $M_3(a,b,c)$.

### 4.3 El conjunto MC5

A continuación invitamos a los participantes a comprobar que para las matrices $M_5(a,b,c)$, se satisfacen las propiedades probadas en las matrices $M_3(a,b,c)$. Sería conveniente comprobar mediante una generalización, que dichas propiedades están presentes en las matrices $M_n(a,b,c)$ para n impar.

### 4.4 Generalizando: MCn, con n impar

Una de las etapas cruciales en álgebra es la generalización de situaciones particulares.

### Matrices de la forma Mn(a,b,c), con n impar.

En lo que sigue trabajaremos con la descripción general de las matrices $M_n(a,b,c)$.

En vista que las matrices $M_n(a,b,c)$ siguen progresiones aritméticas tanto en filas como en columnas, se tiene que la posición i, j de dichas matrices está dada por a+(j-1)b+(i-1)c. De manera que consideremos matrices $M_n(a,b,c)=(m_{ij})$ donde $m_{ij}=a+(j-1)b+(i-1)c$ con i=1,2,…, n, y j=1,2,…, n con n entero positivo impar y a,b,c $\in$ C.

Al conjunto de matrices $M_n(a,b,c)$ lo denotaremos por $MC_n$ en analogía con el caso de la matrices de orden 3. Una vez que tenemos una expresión para las matrices $M_n(a,b,c)$ probaremos que la suma usual de matrices es una ley de composición interna sobre el conjunto $MC_n$.
A continuación probaremos que sumando los elementos de la matriz $M_n(a,b,c)$ con n entero positivo impar, y dividiendo este resultado entre el cuadrado del orden de la matriz nos da la posición central de ésta. Para la matriz $M_n(a,b,c)$ la posición central esta dada por $m_{\frac{n+1}{2}\frac{n+1}{2}}$.

$$\frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n}\ \sum_{j=1}^{n} m_{ij} = \frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n}\ \sum_{j=1}^{n} a+(j-1)b+(i-1)c = \frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n} na+\frac{n(n+1)}{2}b-nb+n(i-1)c$$

$$=\frac{1}{n^2}\left[\ n^2a+\frac{n^2(n+1)}{2}b-n^2b+\frac{n^2(n+1)}{2}c-n^2c\ \right]=\frac{1}{n^2}\left[\ n^2(a+\frac{(n-1)}{2}b+\frac{(n-1)}{2}c)\ \right]\ n \text{ es impar}$$

$$= m_{\frac{n+1}{2}\frac{n+1}{2}}$$

Consideremos la matriz $M_n(e,f,h)=(n_{ij})$ donde $n_{ij}=e+(j-1)f+(i-1)h$ con i=1,2,…, n, j=1,2,…, n con n entero positivo impar y e,f,h$\in$ C.

Tenemos que:

$$M_n(a,b,c)+M_n(e,f,h)= (m_{ij})+(n_{ij}) = (m_{ij}+n_{ij})= (a+(j-1)b+(i-1)c+e+(j-1)f+(i-1)h)=$$
$$((a+e)+(j-1)(b+f)+(i-1)(c+h))= M_n(a+e,b+f,c+h).$$

Es fácil probar que la matriz $0_n(0,0,0)$ es el elemento neutro de $MC_n$, y para la matriz $M_n(a,b,c)$ se tiene la matriz $M_n(-a,-b,-c)=-M_n(a,b,c)$ como elemento inverso.

La asociatividad y conmutatividad se siguen de la suma usual de matrices de orden n. De lo que hemos hecho hasta el momento tenemos la siguiente

**Proposición 2:** Las matrices $M_n(a,b,c)$, n entero positivo impar, con la suma usual de matrices es un grupo abeliano con elemento neutro $0=0_n(0,0,0)$, y para la matriz $M_n(a,b,c)$ se tiene la matriz $M_n(-a,-b,-c)=-M_n(a,b,c)$ como elemento inverso.

El siguiente corolario es inmediato:

**Corolario 1:** Las matrices $M_n(a,b,c)$, n entero positivo impar, con la suma usual de matrices es un subgrupo del grupo de las matrices de orden n, n entero positivo impar, bajo la suma usual de matrices.

**Nota 3**: Comenzamos trabajando el caso particular de matrices de ordenes 3, 4 y 5 para luego pasar a generalizar los resultados obtenidos en el caso de matrices de orden n. Este proceso de lo particular a lo general se omite con frecuencia en los libros de texto que involucran el tema de grupos. También suele pasar en los ejemplos y ejercicios aplicados por los docentes en los cursos de álgebra abstracta. Para muchos estudiantes resulta un inconveniente que la mayoría de textos omitan las pruebas en casos particulares que orientarían la prueba en el caso general. Esta es una actividad que debe realizar el docente en su trabajo con los estudiantes y estos a su vez en su trabajo individual con el fin de obtener material concreto que facilite el proceso de generalización tan frecuente en estas asignaturas.

## 4.5 Multiplicación usual de matrices sobre el conjunto de las matrices MC3

Veamos que sucede en el caso de las matrices $MC_3$ con la multiplicación usual definida sobre ellas. De álgebra lineal sabemos multiplicar estas matrices. Para tal fin consideremos los siguientes casos particulares

$$M_3(-2,-1,1)=\begin{pmatrix}-2 & -3 & -4\\ -1 & -2 & -3\\ 0 & -1 & -2\end{pmatrix} \text{ y } M_3(3,1,-1)=\begin{pmatrix}3 & 4 & 5\\ 2 & 3 & 4\\ 1 & 2 & 3\end{pmatrix}$$

el producto de estas dos matrices es la matriz

$$\begin{pmatrix}-16 & -25 & -34\\ -10 & -16 & -22\\ -4 & -7 & -10\end{pmatrix}$$

Notamos que:

i) Al sumar los elementos de la matriz no se cumple la propiedad que define las matrices $M_3(a,b,c)$, es decir, las filas y columnas de la matriz no son progresiones aritméticas de una razón dada, ni tampoco la suma de todos sus elementos dividida entre el orden de la matriz al cuadrado es el término central.

ii) Esta matriz no corresponde a la matriz $M_3(-6,-1,-1)$.

Por tanto, bajo el producto usual de matrices dicha operación no es una ley de composición interna en $MC_3$.

## 5. Trabajando la noción de grupo con matrices y progresiones geométricas

Ahora estamos interesados en definir una ley de composición relacionada con la multiplicación de números complejos, las progresiones geométricas y las matrices cuadradas de tamaño impar.

En la parte anterior de este escrito vimos que las matrices de la forma $M_3(a,b,c)$ no conservan las propiedades que la definen cuando se considera el producto usual de estas matrices. En lo que sigue introducimos un conjunto de matrices y una operación que preserva las propiedades que lo definen.

### p1 Estableciendo el conjunto con el que se va a trabajar:

1. Consideremos las matrices de orden 3:

$$A = \begin{pmatrix} a & ab & ab^2 \\ ac & abc & ab^2c \\ ac^2 & abc^2 & ab^2c^2 \end{pmatrix}$$

es decir, las matrices cuyos elementos en sus filas y columnas siguen progresiones geométricas de razón b y c respectivamente, con elemento a en la posición (1,1), donde $a,b,c \in$ C. A estas matrices las notamos por $P_3(a,b,c)$ ya que estos elementos las caracterizan completamente. Al conjunto de todas las matrices $P_3(a,b,c)$ lo notaremos por $P_3$, es decir, $P_3=\{P_3(a,b,c) \mid a,b,c \in C\}$.

**Ejemplo 6**:
1. Considere la matriz $P_3(2,-1,3)$ de manera que

$$P_3(2,-1,3) = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 2 \\ 6 & -6 & 6 \\ 18 & -18 & 18 \end{pmatrix}$$

Las matrices $P_3(a,b,c)$ tienen la siguiente propiedad: Si consideramos el producto de los elementos de la matriz $P_3(a,b,c)$ se tiene $a^9b^9c^9=(abc)^9$ donde abc es el elemento de la matriz $P_3(a,b,c)$ en la posición (2,2) después de calcular la raíz novena de este producto.

Consideremos el conjunto $PB_3$ como el conjunto de las matrices de orden 3 que cumplen que al multiplicar todos sus elementos y calcular su raíz novena da el elemento central..

Se debe tener cuidado en que los conjuntos $PB_3$ y $P_3$ son iguales. Podríamos demostrar que el conjunto $P_3$ esta contenido en $PB_3$, sin embargo $PB_3$ no esta contenido en $P_3$. Veremos a continuación que no toda matriz en la que el elemento de la posición (2,2) sea el resultado de multiplicar todas las entradas de la matriz, sus elementos siguen progresiones geométricas en sus filas y columnas. El siguiente ejemplo nos lo muestra.

**Ejemplo 7**: La matriz $A = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 2 & \frac{1}{3} \\ 3 & 1 & \frac{1}{4} \\ 5 & 4 & \frac{1}{5} \end{pmatrix}$ satisface la propiedad anterior, pero A no es una de las matrices $P_3(a,b,c)$ para algunos $a,b,c \in$ C.

## p2 y p3 Definiendo la ley de composición y probando que es una ley de composición interna:

Consideremos ahora la matriz

$$P_3(d,e,f)=\begin{pmatrix} d & de & de^2 \\ df & def & de^2 f \\ df^2 & def^2 & de^2 f^2 \end{pmatrix}$$

Definiendo la operación * entre las matrices $P_3(a,b,c)$ y $P_3(d,e,f)$ de la siguiente manera:

$$\begin{pmatrix} a & ab & ab^2 \\ ac & abc & ab^2c \\ ac^2 & abc^2 & ab^2c^2 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} d & de & de^2 \\ df & def & de^2 f \\ df^2 & def^2 & de^2 f^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ad & ad(be) & ad(be)^2 \\ ad(cf) & ad(be)(cf) & ad(be)^2(cf) \\ ad(cf)^2 & ad(be)(cf)^2 & ad(be)^2(cf)^2 \end{pmatrix}$$

De esto queda claro que $P_3(a,b,c)*P_3(d,e,f)=P_3(ad,be,cf)$

## p4 Obteniendo el elemento neutro bajo la ley de composición interna definida:

El elemento neutro para esta operación es la matriz de orden 3 donde cada entrada es 1, es decir,

$$1_3 = P_3(1,1,1) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

y satisface la propiedad que $P_3(1,1,1)* P_3(a,b,c)=P_3(a,b,c)=P_3(a,b,c)*P_3(1,1,1)$ para cualquier matriz $P_3(a,b,c)$.

## p5 Obteniendo el elemento inverso bajo la ley de composición interna definida:

Para garantizar que la matriz $P_3(a,b,c)$ tenga una matriz $P_3(e,f,g)$ tal que $P_3(a,b,c)*P_3(e,f,g)=P_3(1,1,1)=P_3(e,f,g)*P_3(a,b,c)$ basta imponer la condición $a,b,c \in C^*$. En este caso se tiene además que $P_3(e,f,g)=P_3(a^{-1},b^{-1},c^{-1})$. Como la matriz anterior $P_3(e,f,g)$ es única la notaremos por $P_3^{-1}(a,b,c)$ de donde $P_3^{-1}(a,b,c)=P_3(a^{-1},b^{-1}, c^{-1})$.

La condición colocada anteriormente de que $a,b,c\in C^*$ se debe a que para matrices como

$$P_3(2,0,3) = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 6 & 0 & 0 \\ 18 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

no existe una matriz $P_3(a,b,c)$ con $a,b,c\in C$ tal que $P_3(2,0,3)*P_3(a,b,c)=P_3(1,1,1)$, pues en caso de existir tal matriz al realizar la operación * sobre estas matrices y hacer la igualación elemento a elemento se tendría, 0=1.

En vista de lo presentado, es necesario considerar otro conjunto y en lugar de considerar el conjunto $P_3$ utilizaremos el conjunto $PC_3= \{P_3(a,b,c) \in Mat_3(C^*)\}$ para asegurar que todo elemento tiene elemento inverso. Además, la ley de composición interna con que se trabaja en este conjunto es la misma de $P_3$ , al igual que el elemento neutro.

## p6 y p7 Comprobando las propiedades asociativa y conmutativa para la ley de composición interna definida:

Observe que la ley de composición interna definida depende del producto usual de números complejos del cual sabemos que satisface las propiedades asociativa y conmutativa.

De lo anterior tenemos la siguiente

**Proposición 3:** Si consideramos el conjunto $PC_3= \{P_3(a,b,c) \in Mat_3(C^*)\}$ tenemos que $PC_3$ es un grupo abeliano bajo la operación *, con elemento neutro la matriz $P_3(1,1,1)$ y para la matriz $P_3(a,b,c)$ se tiene $P_3^{-1}(a,b,c)=P_3(a^{-1},b^{-1},c^{-1})$ como elemento inverso.

En álgebra lineal, pudimos calcular el determinante de una matriz cuadrada. ¿Cuál es el determinante de la matriz $P_3(a,b,c)$?

$$\det P_3(a,b,c) = \det\begin{pmatrix} a & ab & ab^2 \\ ac & abc & ab^2c \\ ac^2 & abc^2 & ab^2c^2 \end{pmatrix} = a(ab)(ab)^2 \det\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ c & c & c \\ c^2 & c^2 & c^2 \end{pmatrix} = 0$$

Utilizando propiedades conocidas de los determinantes: i) extraer un escalar de una columna no altera el valor del determinante; ii) el determinante de una matriz con dos columnas iguales es nulo.

**Nota 4:** Tenemos una matriz que es invertible bajo la ley de composición interna * cuyo determinante es nulo.

A continuación, invitamos a los participantes a comprobar que para las matrices $P_5(a,b,c)$, se satisfacen las propiedades probadas en las matrices $P_3(a,b,c)$.

Podemos afirmar que en las matrices cuadradas cuyos elementos en sus filas y columnas son progresiones geométricas y su orden es par, no se cumplen las propiedades trabajadas en $P_3(a,b,c)$. Sin embargo, para las matrices $P_3(a,b,c)$ y $P_5(a,b,c)$ si se cumplen. Sería conveniente comprobar mediante una generalización, que dichas propiedades están presentes en las matrices $P_n(a,b,c)$ para n impar.

## Generalizando:

En lo que sigue haremos la generalización de las anteriores situaciones particulares.

## Matrices de la forma Pn(a,b,c), con n impar.

En lo que sigue trabajaremos con la descripción general de las matrices $P_n(a,b,c)$. En vista que las matrices $P_n(a,b,c)$ siguen progresiones geométricas tanto en filas como en columnas, se tiene que la posición i, j de dichas matrices esta dada por $ab^{j-1}c^{i-1}$. De manera que consideremos matrices $P_n(a,b,c)=(m_{ij})$ donde $m_{ij}= ab^{j-1}c^{i-1}$ con $i=1,2,\ldots, n$, y $j=1,2,\ldots, n$ con n entero positivo impar y $a,b,c\in C^*$.

Al conjunto de matrices $P_n(a,b,c)$ lo denotaremos por $PC_n$ en analogía con el caso de la matrices de orden 3. Una vez que tenemos una expresión para las matrices $P_n(a,b,c)$ probaremos que la operación * es una ley de composición interna sobre el conjunto $PC_n$.

Consideremos la matriz $P_n(e,f,h)=(n_{ij})$ donde $n_{ij}=ef^{j-1}h^{i-1}$ con i=1,2,…, n, j=1,2,…, n con n entero positivo impar y $e,f,h\in C^*$. Tenemos que $P_n(a,b,c)*P_n(e,f,h)= (m_{ij})*(n_{ij})=$ $= (m_{ij}n_{ij})=(ab^{j-1}c^{i-1}ef^{j-1}h^{i-1})=((ae)(bf)^{j-1}(ch)^{i-1})=P_n(ae,bf,ch)$. Es fácil, probar que la matriz $P_n(1,1,1)$ es el elemento neutro de $PC_n$, y para la matriz $P_n(a,b,c)$ con $a,b,c\in C^*$ se tiene la matriz $P^{-1}_n(a,b,c)=P_n(a^{-1},b^{-1},c^{-1})$ como elemento inverso. La asociatividad y conmutatividad de las matrices $P_n(a,b,c)$ con $a,b,c\in C^*$ se siguen de la asociatividad y conmutatividad del producto de números complejos.

Finalmente, probaremos que la multiplicación de los elementos de la matriz $P_n(a,b,c)$ con n entero positivo impar, es igual a tomar el elemento de la posición central y elevarlo a la $n^2$. Para la matriz $P_n(a,b,c)$ la posición central esta dada por $m_{\frac{n+1}{2}\frac{n+1}{2}}$.

Multiplicando los elementos de la matriz $P_n(a,b,c)=(m_{ij})$ donde $m_{ij}=ab^{j-1}c^{i-1}$ con i=1,2,…,n, y j=1,2,…,n, n entero positivo impar y $a,b,c\in C^*$ (recuerde que esta condición se considera para garantizar la existencia del elemento inverso) se tiene:

$$\prod_{i=1}^{n}\prod_{j=1}^{n} m_{ij} = \prod_{i=1}^{n}\prod_{j=1}^{n} ab^{j-1}c^{i-1} = \prod_{i=1}^{n} a^n b^{\frac{n(n+1)}{2}} b^{-n} c^{n(i-1)} = a^{n^2} b^{\frac{n^2(n+1)}{2}} b^{-n^2} c^{\frac{n^2(n+1)}{2}} c^{-n^2}$$

$$\prod_{i=1}^{n}\prod_{j=1}^{n} m_{ij} = (ab^{\frac{(n-1)}{2}} c^{\frac{(n-1)}{2}})^{n^2} = (m_{\frac{n+1}{2}\frac{n+1}{2}})^{n^2} \quad \text{n es impar}$$

De lo anteriormente expuesto tenemos la siguiente

**Proposición 4:** Las matrices $P_n(a,b,c)=(n_{ij})$ donde $n_{ij}=ab^{j-1}c^{i-1}$ con i,j=1,2,…,n, n entero positivo impar y $a,b,c\in C^*$, con la operación * es un grupo abeliano con elemento neutro $1=P_n(1,1,1)$, para la matriz $P_n(a,b,c)$ se tiene $P_n^{-1}(a,b,c)=P_n(a^{-1},b^{-1},c^{-1})$ como elemento inverso.

**Nota 5:** Las matrices $P_n(a,b,c)$ con $a,b,c\in C^*$ son matrices invertibles bajo la ley de composición interna *, pero su determinante es nulo. Es decir, para las matrices $P_n(a,b,c)$ con $a,b,c\in C^*$ no se tiene la caracterización de matrices invertibles a través del determinante resultado que es válido cuando la ley de composición interna es la multiplicación usual de matrices.

## Conclusiones

Basados en la experiencia como docentes de estos cursos, los autores recomiendan la secuencia llevada en el desarrollo de este artículo. Al inicio de este tema tan abstracto como lo es la noción de grupo, el docente puede guiar los pasos que deben cumplir los estudiantes para comprobar que un conjunto con una ley de composición interna definida sobre él, es un grupo.

En este trabajo se va de situaciones particulares a situaciones generales para que los estudiantes puedan ir obteniendo progresivamente el grado de rigurosidad y generalidad que conlleva el álgebra abstracta.

Los autores utilizan las matrices y las progresiones para trabajar el tema de grupos, pues consideran que son nociones que el estudiante ha manejado en cursos anteriores y que no involucran un nivel alto de complejidad, buscando de esta manera introducir el concepto de grupo con elementos que son conocidos para ellos.

## Bibliografía

Herstein, I. N. (1976). *Álgebra moderna. Grupos, anillos, campos y teoría de Galois.* Trillas, México.

Bell, E. T. (1996*). Historia de las Matemáticas.* Fondo de Cultura Económica. México.

Fraleigh, J.B. (1987). *Álgebra Abstracta.* Addison-Wesley Iberoamericana. Argentina

**Joseph Francisco**. Licenciado en Educación Mención Matemática de la Universidad Central de Venezuela. Cursante de la Maestría en Educación mención Enseñanza de la Matemática de la Universidad Pedagógica Experimental Libertador (UPEL). Profesor Instructor Contratado del Departamento de Matemáticas y Física de la UPEL. Área de investigación centrada en Historia de las Matemáticas y de la Educación Matemática. josep.francisco@gmail.com

**Thais Arreaza**. Egresada del Instituto Pedagógico de Caracas (IPC) en la especialidad de Matemáticas. Magister en Educación mención Enseñanza de la Matemática, por la Universidad Pedagógica Experimental Libertador (UPEL). Profesora Asistente, Coordinadora del Programa de Matemática y Jefa de la Cátedra de Álgebra del Departamento de Matemáticas y Física, en el IPC. Coordinadora del Programa Cooperativo de Formación Docente, en la Escuela de Matemática de la Universidad Central de Venezuela (UCV). También ha publicado artículos sobre Investigación e Innovación en Educación Matemática. thais_arreaza@yahoo.com

**Edilmo Carvajal**. Licenciado en Matemáticas por la Universidad Nacional de Colombia y magíster en Matemáticas por la Universidad Central de Venezuela (UCV). Profesor Instructor Contratado del Departamento de Matemáticas y Física de la Universidad Pedagógica Experimental Libertador. Profesor Instructor del Departamento de Matemáticas y Estadística de la Escuela de Administración y Contaduría (UCV). Ha publicado artículos en álgebra. qedcarvajal@gmail.com