UNIÓN
REVISTA IBEROAMERICANA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA
www.fisem.org/web/union

ISSN: 1815-0640
Número 35. Septiembre de 2013
páginas 115-134

Dinamización Matemática:

Actividades de aprendizaje usando elipsógrafos para apoyar el proceso de demostración en geometría analítica

José Carlos Cortés Zavala, Graciela Eréndira Núñez Palenius, Christian Morales Ontiveros

Resumen	En éste artículo se dan a conocer los resultados obtenidos al aplicar a ocho estudiantes de bachillerato dos actividades de aprendizaje de Geometría Analítica en las que se utilizan elipsógrafos (artefactos concretos). Las actividades tenían el objetivo de apoyar el proceso de demostración en Geometría Analítica, específicamente con el tema de Elipse. Se implementó una hoja de trabajo para cada elipsógrafo, las cuales guían a los estudiantes a través de instrucciones en la manipulación del Elipsógrafo y preguntas relacionadas con el artefacto de tal manera que descubran el modelo matemático inmerso en cada uno de los elipsógrafos y que a través de la exploración construyan una demostración matemática que les permita construir el concepto formal de Elipse. **Palabras clave:** Geometría Analítica, Elipsógrafos, Demostración Matemática.
Abstract	In this article are given to know results when applied to eight high school students two learning activities of analytical geometry in which elipsografos (specific artifacts) are used. Activities had the objective of supporting the process of demonstrating in analytical geometry, specifically with the theme of ellipse. Implemented a worksheet for each elipsografo, which guide students through instruction in the handling of the Elipsografo and questions relating to the appliance in such way that discovered the mathematical model immersed in each of the elipsografos and that the exploration to build a mathematical demonstration that allows them to build the formal concept of ellipse. **Keywords:** Analytical geometry, Elipsografos, mathematical proof.
Resumo	Neste trabalho são apresentados os resultados obtidos através da aplicação de oito estudantes do ensino médio de aprendizagem duas atividades de geometria analítica em elipsógrafos utilizados (artefatos de concreto). As actividades destinadas a apoiar o processo de demonstração de Geometria Analítica, especificamente com a questão da Ellipse. Implementamos uma planilha para cada elipsógrafo, que orientam os alunos por meio de instrução no manejo perguntas Elipsógrafo e afins, tais artefato descobrir o modelo matemático imerso em cada um dos elipsógrafos e através exploração de uma construção matemática que lhes permite construir formais conceito Ellipse. **Palavras-chave:** Geometria Analítica, Elipsógrafos, demonstração matemática.

1. Introducción

Para la realización de este trabajo utilizamos dos artefactos matemáticos que dibujan una elipse, a estos comúnmente se les denomina “Elipsógrafos”, el primero es el *Elipsógrafo de palancas y colisa de Inwards* y el segundo el *Elipsógrafo Antiparalelogramo articulado de Van Schooten.* En la Figura 1 se presenta (modelo concreto y virtual) el elipsógrafo de palanca y colisa de Inwards y en la figura 2. el Antiparalelogramo de Van Schooten; los cuales fueron construidos con material plástico (acrílico, modelo físico) y también con Geogebra (modelo virtual).

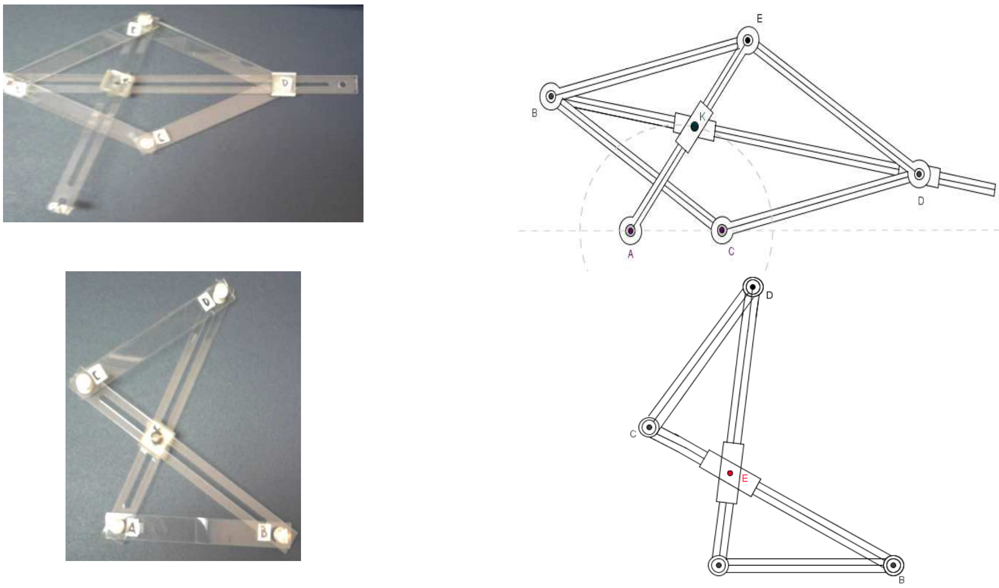


Figura 1 y 2. Elipsógrafo de palancas y colisa de Inwards construcción física y construcción virtual. Antiparalelogramo articulado de Van Schooten construcción física y construcción virtual.

Para cada uno de los artefactos se diseñó una hoja de trabajo, en la que a través de preguntas y de la manipulación del mismo se promovía el descubrimiento del modelo matemático inmerso en él. Las hojas de trabajo se presentaron a un grupo de ocho estudiantes de bachillerato, ellos formaron 4 equipos con dos integrantes cada equipo.

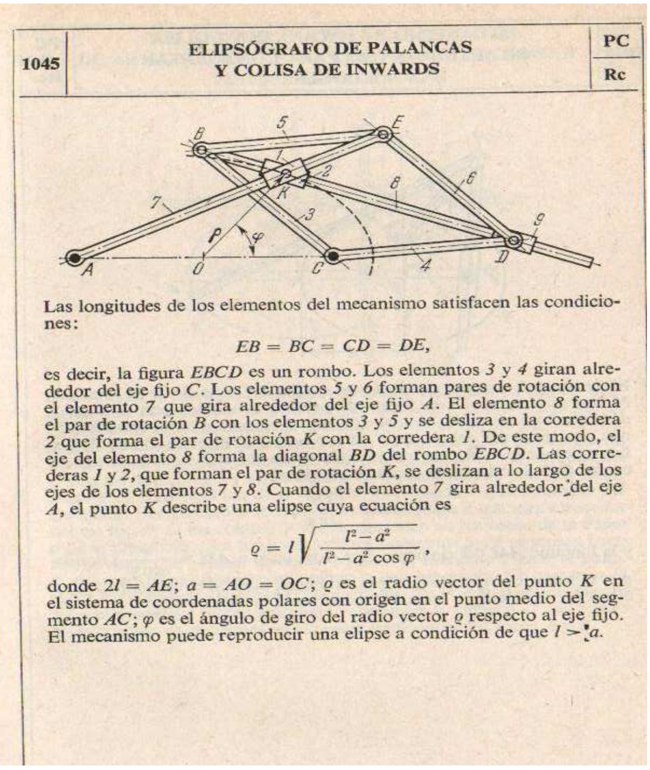
En este artículo se explica cómo se llevo a cabo la investigación cuando los estudiantes trabajaron con los artefactos concretos (construcciones físicas) y no con las construcciones virtuales y se exponen y analizan los resultados de uno de los equipos de estudiantes cuando trabajaron con el *Elipsografo de Palanca y Colisa de Inwards*.

2. Los Artefactos Matemáticos

Desde la época de los Griegos se han construido artefactos matemáticos para el trazado de las cónicas, en el libro “*Katalog matematischer und matematisch-physikalischer Modelle, Apparate und Instrum*ente” (Dyck, W. 1892) se menciona que Meneachmus (~380 - ~320 A.C.) tenía un dispositivo mecánico para construir cónicas; a Isidoro de Mileto quien tenía un instrumento para trazar una parábola [Dyck, p.58]. Posteriormente Leonardo Da Vinci (1452-1519) inventó un elipsógrafo con un movimiento invertido de la conexión fija, Albrecht Dűrer (1471-1528) utilizó dispositivos mecánicos para dibujar curvas. René Descartes (1596-1650) publicó su *Geometría* (1637) libro en el cual daba métodos geométricos para dibujar cada curva con algunos aparatos, y estos aparatos eran a menudo articulados. En el año de 1657, Van Schooten publicó su "*Exercitationum mathematicarum libri quinque*". Como el título sugiere, la obra se divide en cinco "libros" de un centenar de páginas cada uno. El libro I es una revisión bastante estándar de la aritmética y la geometría ordinaria. El libro II contiene construcciones con regla. En el Libro III, Van Schooten trata de reconstruir algunas de las obras de Apolonio en lugares geométricos. Este fue un importante tema de investigación de la época. El libro IV contiene la obra más conocida de Van Schooten. Su título es " *Orgánica conicarum sectionum* ", o "Los instrumentos de las secciones cónicas." La palabra "orgánica" está más estrechamente relacionada con el órgano como instrumento musical que a la "orgánica" de la Química o de la Agricultura. Como sugiere el título, el capítulo describe una variedad de bellos artefactos para la elaboración de las diferentes secciones cónicas.

En 1877 A. B. Kempe publicó el libro titulado *"How to Draw a Straight Line" (Como dibujar una línea recta),* allí menciona los trabajos de: J. Watt (1736-1819), J.J. Sylvester (1814-1897), Richard Roberts (1789-1864), P.L. Chebyshev (1821-1894), Harry Hart (1848-1920), William Kingdon Clifford (1845-1879), Jules Antoine Lissajous (1822-1880), Samuel Roberts (1827 - 1913), y Arthur Cayley (1821-1895) todos ellos relacionads con la utilización de artefactos matemáticos.

Iván Ivánovich Artobolevski, (1905 – 1977) recopiló en "*Les mécanismes dans la technique moderne*" (1975, Artobolevski) varios tipos de mecanismos tanto mecánicos como eléctricos; dentro de la recopilación aparecen varios artefactos mecánicos cuya finalidad era trazar algún tipo de curva cónica. La obra de Artobolevski está dividida en 6 tomos y es precisamente de esta obra de donde obtuvimos los modelos de los artefactos matemáticos. En ellos él realiza una pequeña descripción del funcionamiento ver figura 3.



1045	ELIPSÓGRAFO DE PALANCAS Y COLISA DE INWARDS	PC / Rc

Las longitudes de los elementos del mecanismo satisfacen las condiciones:

$$EB = BC = CD = DE,$$

es decir, la figura *EBCD* es un rombo. Los elementos *3* y *4* giran alrededor del eje fijo *C*. Los elementos *5* y *6* forman pares de rotación con el elemento *7* que gira alrededor del eje fijo *A*. El elemento *8* forma el par de rotación *B* con los elementos *3* y *5* y se desliza en la corredera *2* que forma el par de rotación *K* con la corredera *1*. De este modo, el eje del elemento *8* forma la diagonal *BD* del rombo *EBCD*. Las correderas *1* y *2*, que forman el par de rotación *K*, se deslizan a lo largo de los ejes de los elementos *7* y *8*. Cuando el elemento *7* gira alrededor del eje *A*, el punto *K* describe una elipse cuya ecuación es

$$\varrho = l\sqrt{\frac{l^2-a^2}{l^2-a^2\cos\varphi}},$$

donde $2l = AE$; $a = AO = OC$; ϱ es el radio vector del punto *K* en el sistema de coordenadas polares con origen en el punto medio del segmento *AC*; φ es el ángulo de giro del radio vector ϱ respecto al eje fijo. El mecanismo puede reproducir una elipse a condición de que $l > a$.

Figura 3. Hoja del libro "Los mecanismos de la técnica moderna"

Para cada uno de los artefactos utilizados previamente se realizó un estudio matemático más detallado, el cual se describirá en el siguiente apartado, con la finalidad de que, teniendo como base este estudio, se realizaran las preguntas que conforman las hojas de trabajo.

3. Marco Conceptual

Perspectivas teóricas y de prácticas alternativas complementarias en didáctica de las matemáticas propuestas por varios investigadores, (Mariotti et al 1997; Bartolini et al 2003, 2004; Bartolini 2007, Boero et al., 1996, 1997; Arzarello, Robutti 2004, Jill *et al* 2002), argumentan a favor de la introducción en el salón de clases de “contextos históricos de recreación de la experiencia científica”, en particular aquéllos que tienen que ver con la práctica de la geometría y que utilizan modelos mecánicos o articulados de máquinas para dibujar o trazar, como un medio de generación de ideas o nociones matemáticas complejas. Además, otros investigadores mencionan que “en sesiones de trabajo dirigido, los alumnos son capaces de desplegar recursos matemáticos que se desencadenan por medio de la comprensión de nociones” (Hoyos, Capponi y Génèves, 1998), lo anterior realizado en un trabajo colaborativo hará que se promueva la creatividad y el ingenio en los estudiantes. Es decir a través de la manipulación guiada de los artefactos se espera que el estudiante descubra el modelo matemático inmerso en el artefacto, esto permitirá la reversibilidad del conocimiento de acuerdo a la mencionado por Piaget (Piaget, 1950).

Seymour Papert (1982) señala tres aspectos en la utilización de los recursos en el aprendizaje:

1. Sirven como modelos, a los que las ideas matemáticas pueden asociarse.
2. Contribuyen a dotar a las matemáticas de una tonalidad afectiva positiva.
3. Vinculan el conocimiento formal de las matemáticas con el conocimiento corporal, con los esquemas sensorio-motores del estudiante.

Papert (idem) formula como un hecho fundamental del aprendizaje que "cualquier cosa es fácil si uno puede asimilarla a su propia colección de modelos" y menciona también “con la utilización de los recursos apropiados es más fácil crear condiciones, en las que puedan arraigar los modelos intelectuales”.

Por otro lado en una concepción constructivista del aprendizaje, las personas necesitan de experiencias y modelos sobre los que sustentar los conocimientos que adquieren y es mediante la manipulación, que los estudiantes adquieren una percepción más dinámica de las ideas. Una parte importante de esta investigación consistió en realizar la demostración matemática de cada uno de los artefactos utilizados, la cual guiaría para la elaboración de las preguntas de las hojas de trabajo, por tal razón a continuación se expone.

3.1 Demostración matemática del Elipsógrafo de palancas y colisa de Inwards.

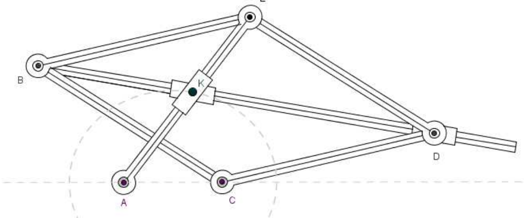


Figura 4 Elipsógrafo de palancas y colisa

Descripción:

Las longitudes de los segmentos del artefacto satisfacen que EB = BC = CD = DE, es decir, la figura EBCD es un rombo. Los puntos A y C se mantienen fijos (focos). El segmento BD es la diagonal del rombo. El punto K es la intersección entre la corredera 2 y 3. Cuando el segmento AE gira alrededor del punto fijo A, el punto K describe una elipse.

Existe una condición para que dicho artefacto pueda describir una Elipse. La 2 AE > AO (AO = OC) es decir, que la distancia entre los focos sea menor que el segmento AE.

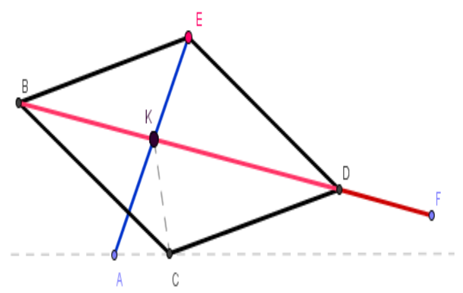


Figura 5. Modelo Elipsógrafo de Inwards

1. Por construcción sabemos que:

   BC = CD = DE =EB
2. La figura EBCD es un rombo.
3. Tracemos el segmento KC:
4. Los triángulos KDE y KDC son congruentes por LAL por tener:
   a. DE = DC (por construcción)
   b. KD lado común.
   c. Ángulo KDE = Ángulo KDC puesto. que BD es diagonal.
5. De la congruencia anterior podemos deducir que: KC = KE
6. Observemos que: AE = AK + KE

   AE = AK +KC (por ser KE ≅ KC)

   Pero AE es constante → AK + KC = Cte.
7. Por lo tanto se cumple la condición para que el punto *K* describa una elipse según su definición.

3.2. Demostración matemática del Antiparalelogramo articulado de Van Schooten.

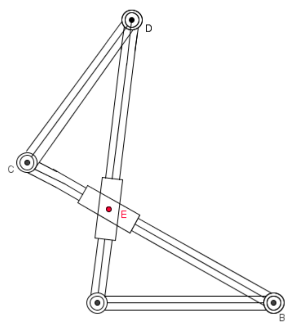
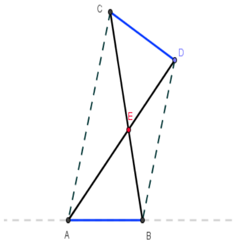
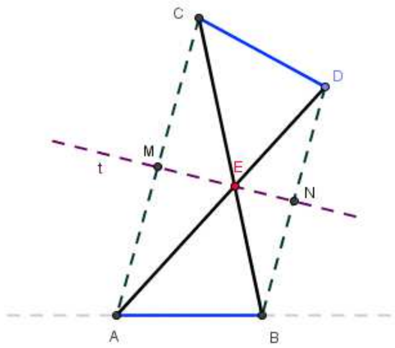


Figura 6. Elipsógrafo Articulado de Van Schooten

Descripción:

La base de este artefacto es el Antiparalelogramo ABCD. Cabe mencionarse que: AB = CD y AD = BC. Se dice que es Antiparalelogramo, puesto que en el movimiento, el artefacto sigue manteniendo la propiedad de no tener dos pares de lados paralelos. Los puntos fijos (focos), son los puntos A y B. Con la intersección de la corredera 1 y 2 obtenemos el punto E. Al mover el artefacto, el punto E tiene desplazamiento por los segmentos AD y BC, describiendo durante el movimiento una elipse.

 **Figura 7. Módelo del Elipsógrafo de Van Schooten**	Por construcción conocemos que: AB = CD AD = BC Ahora tracemos los segmentos CA y DB: Ahora tracemos el eje de simetría al cual llamaremos t: Sea M el punto de la intersección de t con CA y N el punto de la intersección entre t y BD:
 **Figura 8. Ejes de simetría del Elipsógrafo de Van Schooten**	Nótese que el trazo del eje de simetría tiene algunas implicaciones interesantes en nuestra figura como son las siguientes: t es perpendicular a BD y AC y los corta en su punto medio (mediatriz). t bisecta a los ángulos DEB y CEA. Ahora tenemos todo lo necesario para afirmar que ∆BEN es congruente con ∆DEN por el criterio LAL: EN es lado común. Angulo BNE = Angulo DNE (porque el eje de simetría es perpendicular a BD formando ángulos rectos). BN = ND (puesto que t bisecta a BD por ser eje de simetría). ∴ ∆BEN ≅ ∆DEN También ∆MEA es congruente con ∆MEC: EM lado común. Angulo CME = Angulo AME (porque el eje de simetría es perpendicular a BD formando ángulos rectos). CM = MA (puesto que t bisecta a AC por ser eje de simetría). ∴ ∆MEA ≅ ∆MEC De las dos congruencias anteriores obtenemos que el ∆AEB es congruente con ∆CED por el criterio LLL (ya que de las congruencias anteriores deducimos que EB ≅ ED y EA ≅ EC además de que por construcción conocíamos que AB ≅ CD). De allí vemos que: AE + EB = AE + ED = AD = cte. ∴ Se cumple la condición para que el punto *E* describa una elipse según su definición.

4.Metodología

La investigación se llevó a cabo en un ambiente de trabajo colaborativo, que incentiva la cooperación entre individuos para conocer, compartir y ampliar la información que cada uno tiene sobre el tema.

Es de carácter cualitativo, es decir las conclusiones y comentarios que se desprenden del análisis de datos obtenidos, no son producto de las relaciones numéricas que se puedan obtener de las hojas de trabajo aplicadas, sino emergen del análisis de las cualidades asociadas tanto a las preguntas de las hojas de trabajo, como a los comportamientos de los estudiantes en cada una de ellas.

En cada uno de los Elipsógrafos seleccionados se analizaron sus características y se realizó una demostración matemática, lo anterior permitió realizar las hojas de trabajo y definir lo que se esperaba lograr con ellas.

Las hojas de trabajo con las respuestas de los estudiantes, las videograbaciones realizadas durante el trabajo de cada uno de los equipos, así como las observaciones en el trabajo de campo, conforman el cuerpo de datos para llevar a cabo el estudio. El proceso que se siguió para implementar la investigación constó de seis etapas:

1. Selección de artefactos
2. Descripción y Demostración matemática de los artefactos
3. Construcción de los artefactos
4. Realización de las hojas de trabajo
5. Etapa de Aplicación
6. Análisis de los datos

De las seis etapas, las dos primeras ya han sido descritas en los incisos anteriores y de la tercera diremos que la construcción de los prototipos fue realizada con varios tipos de materiales (papel ilustración, Tireno, metal y acrílico). Las etapas 4, 5 y 6 se describen a continuación:

4.1 Realización de actividades didácticas

Se comenzó tomando en cuenta las características de cada artefacto así como su demostración matemática. A partir de allí se decidió que las hojas de trabajo deberían de consistir en una serie de preguntas que invitaran a los estudiantes a manipular cada artefacto, que conocieran cada parte que los conforma, que observaran las figuras que se formaban entre sus barras así como las longitudes de las mismas, también que verificaran su comportamiento mientras dicho artefacto tenía movimiento así como en estado inmóvil. Lo que se deseaba era que los alumnos, a partir de esa guía y de la manipulación del artefacto pudieran construir por sí mismos el concepto de elipse, deduciendo el modelo matemático involucrado en cada artefacto. De esta manera se hizo una actividad didáctica por cada artefacto.

A continuación se muestra, como ejemplo la hoja de trabajo correspondiente al Elipsógrafo de Palanca y Colisa de Inwards.

<u>HOJA DE TRABAJO PARA LA MANIPULACIÓN DEL ELIPSÓGRAFO DE PALANCAS Y COLISA DE INWARDS</u>

Integrantes del equipo: ___________________________________

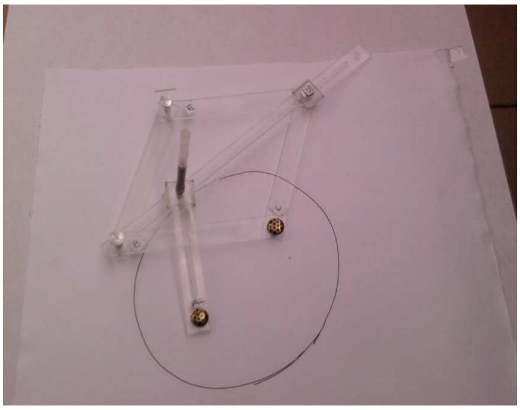
Nombre del equipo: ____________________________________

Grado: ______________

<u>Instrucciones:</u>

1) Se te proporcionará un artefacto, un lápiz, un pincelín y una regla.
2) El punto K es el punto de la intersección de los segmentos AE y BD.
3) Coloca el lápiz en el punto K, puesto que este es el punto que realiza el trazo.

4) Podrás mover el artefacto mediante el punto E o bien mediante el lápiz que se inserta en el punto K. Analiza con mucha atención el lugar geométrico trazado por el punto K, así como el movimiento en general del artefacto.
5) Puedes medir la longitud de los segmentos con la regla para contestar algunas de las preguntas que se te piden.
6) Responde las preguntas planteadas lo más detallado posible, haciendo uso de la manipulación del artefacto.
7) Al hacer referencia a un segmento, escríbelo de la siguiente forma. *AB* ()



Elipsógrafo de palancas y colisa de Inwards.

1. ¿De cuántas barras está conformado el artefacto? Escribe la longitud de cada una de ellas, nombrando a cada barra con los puntos de cada uno de sus extremos (por ejemplo barra AE).
2. Mueve el artefacto y observa sus diferentes puntos durante el movimiento.
   Cuando moviste el artefacto, ¿Cuáles fueron los puntos que se mantuvieron fijos?
3. Al mover el artefacto ¿Cuáles son los segmentos que no cambian de longitud durante el movimiento?
4. Mueve el artefacto y observa sus segmentos. ¿Cuáles fueron los segmentos que cambiaron su longitud durante el movimiento?
5. De los segmentos que cambiaron de longitud durante el movimiento, ¿Cuáles tienen la misma longitud entre ellos?
6. Mueve el artefacto y observa la figura formada por los segmentos BC, CD, DE y EB. ¿Qué figura se forma?, ¿qué características tiene dicha figura?
7. ¿El segmento BD, siempre pasa por la mitad del segmento CE? Justifica tu respuesta.
8. Deja fijo el artefacto y traza con tu pincelín el segmento KC. ¿Cómo son los triángulos KED y KCD entre ellos? Justifica tu respuesta.
9. Suma la distancia de los segmentos AK+KC. ¿A cuánto equivale la distancia AK+KC?, ¿Siempre se cumple la equivalencia en cualquier posición del artefacto? Justifica tu respuesta.
10. Auxiliándote de la respuesta de la pregunta 1, ¿Hay alguna barra del artefacto cuya longitud sea igual a la suma de AK + KC?, ¿cuál es dicha barra?
11. Acerca el punto A al punto C, mueve el artefacto y observa el trazo. Después coloca el punto A sobre el punto C, mueve el artefacto y observa el trazo. ¿Cómo se comportaron estos trazos en comparación con el primer trazo realizado en la actividad?
12. Reflexiona sobre tus respuestas de las preguntas anteriores y escribe con tus palabras la definición de Elipse.
13. <u>Solicita a tu coordinador el Anexo 1 para responder lo siguiente.</u>
    Explica si el instrumento cumple la definición de elipse y ¿por qué

4.2 Etapa de Aplicación

Las actividades didácticas desarrolladas fueron aplicadas primeramente en una prueba piloto dividida en dos sesiones. Auxiliándonos de los estudiantes se pretendía con esta prueba, afinar detalles, cambiar el orden de las preguntas de ser necesario, quitar o agregar alguna de ellas así como mejorar su redacción, etc.

Así finalmente haciendo las modificaciones pertinentes a las hojas de trabajo se hizo la prueba formal, la cual fue dividida en dos sesiones. Se contó con dos cámaras de video grabación en cada una de ellas. Primero se aplicó la actividad del Elipsógrafo de palancas y colisa de Inwards, ésta se llevó a cabo el día jueves 6 de Mayo del 2010, en el CBTIS 149 en Morelia Michoacán, con una duración aproximada de 150 minutos. En esta ocasión se realizó con ocho alumnos del cuarto semestre de la especialidad de Administración, cuatro hombres y cuatro mujeres. Se formaron cuatro equipos de dos integrantes cada uno, formados por un hombre y una mujer.

En la segunda actividad se aplico el Antiparalelogramo articulado de van Schooten, se llevó a cabo el día miércoles 13 de Mayo del 2010, en el mismo lugar donde se realizo la primera sesión con una duración aproximada de 120 minutos y con los equipos conformados en la sesión anterior.

4.3 Análisis de los datos

Se digitalizaron las hojas de trabajo de todos los equipos y se analizaron las mismas. Posteriormente se revisaron las notas de observación realizadas durante las actividades así como los videos de las mismas y la información obtenida de ellos se organizó en tablas que contenían columnas para el episodio, tiempo y explicación de los equipos. Esto nos permitió seleccionar los diálogos más importantes y luego rescatarlos para analizarlos más a fondo. Sin embargo, por ser muy extensa la información sólo se muestran algunas de las respuestas más relevantes.

5. Exposición de Resultados

5.1. Resultados de la hoja de trabajo del Elipsógrafo de palancas y colisa de Inwards

Los resultados que se muestran a continuación corresponden a las preguntas 6, 7, 11 y 12 de uno de los equipos formados. Se presentan los diálogos obtenidos a través de la videograbación y lo que respondieron los alumnos en la hoja de trabajo. Los diálogos corresponden al equipo formado por Gabriela (**Gabi**), Uriel (**Ur**) y el Profesor que coordino la actividad (**Prof**).

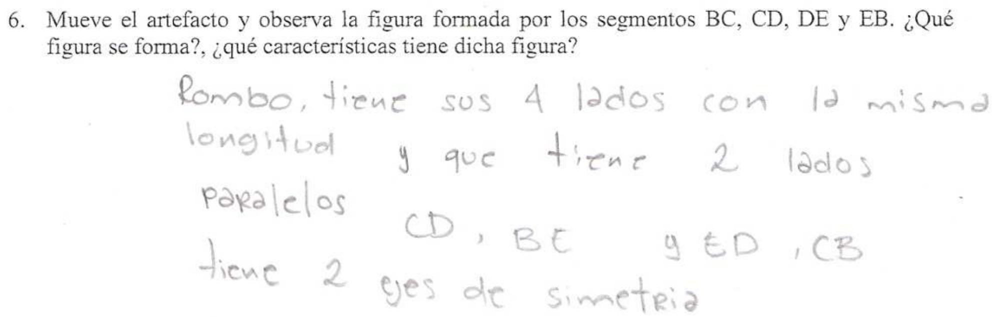
5.1.1. Dialogo 1

Participantes**:** Gabriela, Uriel (**Gabi**, **Ur**) y Profesor (**Prof**).

5.1.1.1. Introducción.

Los alumnos tratan de concluir la respuesta de las preguntas 6 y 7; la comienzan a escribir en sus hojas de trabajo. Después de se acerca el Profesor, les pide que digan la respuesta a dicha pregunta y les hace más preguntas al respecto.

- En la pregunta 6, se les pedía que observaran la figura formada por su artefacto cuando este estuviera fijo, que dijeran de qué figura se trataba así como algunas de sus características. Allí se dieron cuenta de que se trataba de un rombo y entre sus características mencionan que el rombo tiene dos ejes de simetría.

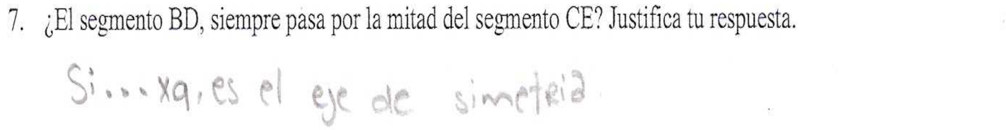


6. Mueve el artefacto y observa la figura formada por los segmentos BC, CD, DE y EB. ¿Qué figura se forma?, ¿qué características tiene dicha figura?

Rombo, tiene sus 4 lados con la misma longitud y que tiene 2 lados paralelos CD, BE y ED, CB
tiene 2 ejes de simetria

Figura 9. Respuesta de estudiantes a la pregunta 6

- La pregunta que tratan de responder en el diálogo que sigue es la 7 y dice lo siguiente: ¿El segmento BD, siempre pasa por la mitad del segmento CE? Justifica tu respuesta. Entonces, de la respuesta de la pregunta anterior, ellos ya se habían dado cuenta de que su rombo tenía dos ejes de simetría y que uno de ellos era el segmento BD y el otro eje lo era el segmento CE.



7. ¿El segmento BD, siempre pasa por la mitad del segmento CE? Justifica tu respuesta.

Si... xq, es el eje de simetria

Figura 10. Respuesta de estudiantes a la pregunta 7

Gabi:	*¿Por qué sería?*
Ur:	*Es un eje de simetría.*
Gabi:	*Es la diagonal… ¿así nada más, ¿BD es eje de simetría de CE?*
Ur:	*Pues sí, el punto K no cambiaría de distancia entre el EC también.*
Gabi:	*No influye, K no influye (señala el punto K), nada más te está preguntando de estos (señala los puntos D y B). Entonces porque es su eje de simetría... siempre va a ser su eje de simetría.*
Ur:	*Pues… sí.*
Prof:	*¿En que pregunta van?*
Gabi:	*En la siete.*
Prof:	*¿En la siete?, a ver ¿qué respondieron?*
Gabi:	*Que si porque EC es el eje de simetría (señala el segmento EC en su artefacto).*
Prof:	*¿Por qué?*
Gabi:	*Este… se supone que nosotros estamos tomando que es un rombo, ¿no?*
Ur:	*Rombo.*
Gabi:	*Entonces tiene dos ejes de simetría, lo que viene siendo este (señala el segmento CE) y viendo siendo este (señala el segmento BE).*
Ur:	*BD (corrigiendo a Gabi que había dicho BE).*
Gabi:	*Aja, este (señala el BD) y este (señala el CE). Entonces se supone que aquí, quedaría hacia la mitad si quedáramos en este (simula con sus manos que dobla el artefacto por CE). Entonces al doblarlo (ahora por BD) automáticamente me esta formando su eje de simetría… y es una figura que siempre lo va a tener allí y aquí (señala el segmento CE).*
Prof:	*¿Siempre en distintas posiciones se cumple que la distancia de C al segmento BD y de E a BD es la misma?*
Ur:	*Sí.*
Gabi:	*Cuando es un eje en el rombo sí porque sus cuatro lados son iguales.*
Prof:	*Ok sigan adelante…*

5.1.1.2 Conclusiones del dialogo 1.

Una buena observación al momento de tratar de responder la pregunta 6 les dio de inmediato la respuesta de la pregunta 7. De antemano ellos conocían que su rombo tenía dos ejes de simetría y de esa manera no dudaron en responder que BD siempre pasa por la mitad del segmento CE.

5.1.2 Dialogo 2.

Participantes: Gabriela, Uriel (**Gabi**, **Ur**) y Profesor (**Prof**).

5.1.2.1. Introducción:

En la pregunta 8 se espera que los estudiantes lleguen a que los triángulos que se les pide que comparen son congruentes y de allí puedan responder sin mucha dificultad las preguntas posteriores. Su enunciado dice lo siguiente: Deja fijo el artefacto y traza con tu "*pincelín*" el segmento KC. ¿Cómo son los triángulos KED y KCD entre ellos? Justifica tu respuesta.

Los alumnos tratan de responder la pregunta 8, donde **Gabi** menciona que los triángulos KED y KCD son congruentes. Ella trata de convencer a su compañero del por qué dichos triángulos son congruentes así como explicárselo también al profesor.

Gabi:	*¿Cómo son los triángulos QED?...pero si de este lado no se hace triángulo (señala los puntos mencionados).*
Ur:	*KED (corrigiendo a Gabi la cual dijo QED. Señala también los puntos).*
Gabi:	*Y KCD pero jamás me dijo que trazáramos este lado. Bueno se supone que son… ¡espera espera!, ¿cómo se llaman cuando son?... son congruentes. Son dos triángulos congruentes porque has de cuenta que…*
Ur:	*No, pero mira este lado está más chico (señalando el lado EK).*
Gabi:	*Pero por aquí va la línea esta, esta de aquí que parte de la línea de en medio, es la línea fija (traza el segmento KE). Entonces si marcas esto de aquí (segmento ED).*
	…(Trazan los triángulos KED y KCD con ayuda de su artefacto y de su pincelín).
Gabi:	*Este lo doblas y quedan iguales (simula doblar los triángulos KED y KCD por BD), entonces los dos triángulos son congruentes.*
Ur:	*No, es que no serían congruentes porque si comparáramos los triángulos quedarían así (señala que los triángulos no quedarían uno sobre otro).*
Gabi:	*Al levantarlos, los dos picos quedarían arriba, quedarían igual (con sus manos indica que dichos puntos se tocan).*
Ur:	*Sí pero, ¿qué te están diciendo? (refiriéndose a la pregunta).*
Gabi:	*Deja fijo el artefacto, ¿cómo son los triángulos KCD y KDE? (etiqueta los triángulos que previamente trazó). En este con este (indica los triángulos a comparar).*
Prof:	*¿Por qué me dices que son triángulos congruentes?*
Gabi:	*No me acuerdo como se dice cuando los dos son iguales, que están opuestos sólo por una diagonal.*
Prof:	*A ver, ¿este lado cómo es para los dos triángulos, el KD?*
Gabi:	*El KD es igual.*
Prof:	*¿Es igual para los dos?*
Gabi:	*Sí.*
Ur:	*Para los dos.*
Prof:	*¿Por qué?*

Ur:	*Porque mide lo mismo.*
Prof:	*Concéntrense sólo en el segmento KD, ¿qué pasa con KD?*
Gabi:	*Es la diagonal media.*
Prof:	*En estos dos triángulos ¿qué pasa con KD (señalo el segmento)?, ¿es igual?*
Gabi:	*Es un cateto de ambos.*
Prof:	*¿Cómo es el lado KC con el KE?*
Gabi:	*¿KC con KD?*
Ur:	*Con KE*
Gabi:	*Son… ¿cómo se dice?*
Prof:	*A ver ¿por qué no los mides?*
Ur:	*Son iguales*
Gabi:	*Mide 5 (CK), se supone que también mide 5 (KE)…son iguales (mide los segmentos). De CK y KE es igual también (afirmando). Por lo tanto quedaría que de C a D y de D a E…*
Ur:	*Deben de medir lo mismo.*
Gabi:	*Miden lo mismo (CD=DE), entonces los dos triángulos son iguales solamente que KD es un eje de simetría para los dos. Es el eje de simetría de una figura y es por eso que se forman dos triángulos.*
Prof:	*Por eso son ¿cómo me dijiste?*
Gabi:	*Congruentes…*

5.1.2.2 Observaciones

- **Gabi** usa su artefacto para trazar los triángulos KED y KCE. Remarca los lados de los triángulos con su pincelín por debajo del artefacto.

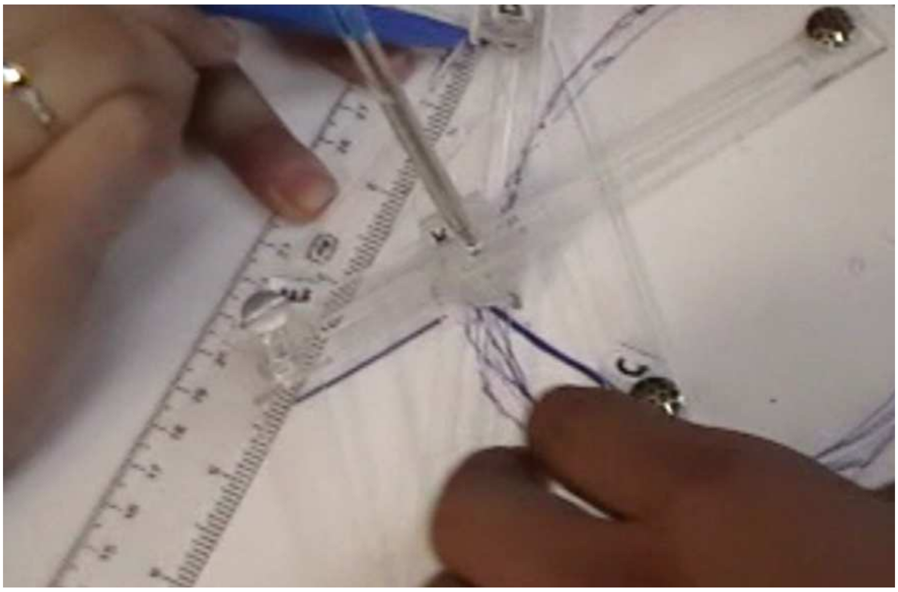


Figura 11. Integrantes del Equipo 3 remarcando los triángulos KED y KCE

- Una vez qué quedan remarcados los lados de sus triángulos opta por quitar su artefacto de la hoja de dibujo. Prefiere trabajar con los triángulos que dibujó previamente, etiquetando los puntos correspondientes con los que tenía el artefacto en dicha posición.

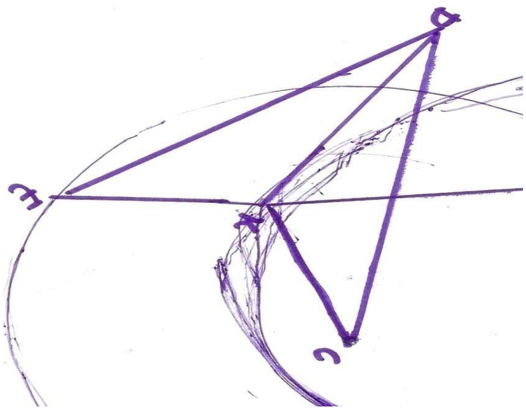
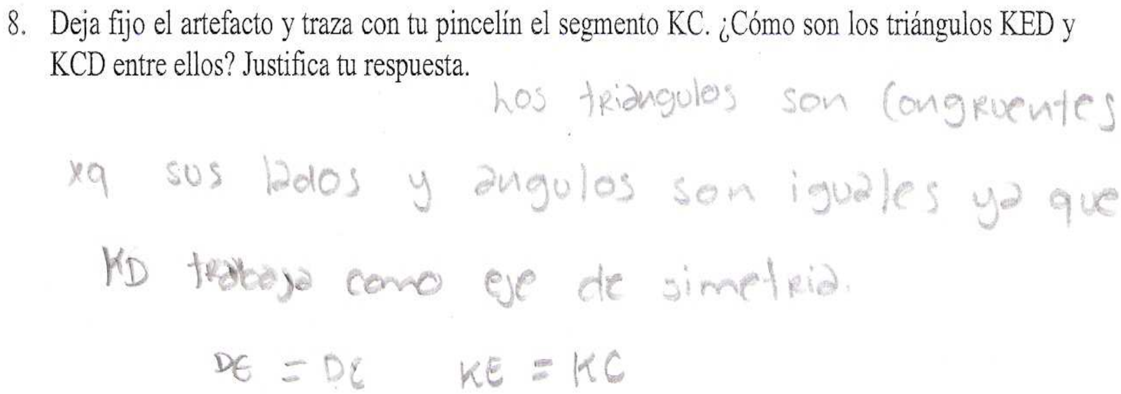


Figura 12. Triángulos remarcados y etiquetados en la hoja de dibujo del Equipo 3

- Los integrantes de este equipo sabían por su respuesta de la pregunta 7 que el segmento BD es un eje de simetría. Tratan de justificar que los triángulos KED y KCD son congruentes porque dicho segmento (BD) los separa y al doblarlos por allí los triángulos van a pegarse el uno con el otro. Al analizar las evidencias recabadas se deduce que intuitivamente trataban de responder de esa manera, al saber que la figura era un rombo, que tenía como ejes de simetría a los segmentos BD y EC y que ED y CD son barras del artefacto que miden lo mismo (esto lo conocieron en la respuesta de la primera pregunta). Además también conocían que el punto K se desplazaba sobre el segmento BD. Su razonamiento tuvo que ver con todo lo anterior y se dieron cuenta de que al medir lo mismo las barras ED y CD y saber que dichos segmentos cambiaban de longitud por estar conectados al punto K, los segmentos EK y CK cambiaban de la misma manera y podían medir lo mismo.
- Intuitivamente y por observación pudieron darse cuenta de que los segmentos EK y CK eran iguales, antes de sugerirles que midieran dichos segmentos Uriel respondió inmediatamente que dichos segmentos eran iguales, aún cuando **Gabi** media los segmentos, **Ur** seguía mencionando que deberían de medir lo mismo.
- Les costó mucho trabajo tratar de justificar su respuesta, aún cuando habían contestado bien las preguntas anteriores a esta.


8. Deja fijo el artefacto y traza con tu pincelín el segmento KC. ¿Cómo son los triángulos KED y KCD entre ellos? Justifica tu respuesta.

los triangulos son congruentes xq sus lados y angulos son iguales ya que KD trabaja como eje de simetria.

DE = DC   KE = KC

Figura 13. Respuesta escrita del Equipo 3 en sus hojas de trabajo.

5.1.2.3. Conclusiones del dialogo 2.

Los integrantes de dicho equipo conocen el término “congruencia” y saben en qué situaciones pueden utilizarlo, pero también, a través de la evidencia recabada se observó que no recuerdan los criterios de congruencia distintos al LLL, se deduce que esto ocurre ya que en la actividad los alumnos pueden medir los segmentos con regla.

5.1.3. Dialogo 3.

Participantes: Gabriela (**Gabi**), Uriel (**Ur**) y Profesor (**Prof)**.

5.1.3.1 Introducción:

Tratan de responder la pregunta 11 así que realizan los trazos realizados en dicha pregunta. Conforme los van realizando los trazos van haciendo una comparación entre ellos y comentan sus observaciones.

Gabi:	*Bueno ¿este cómo se mueve?, ¿respecto al primer trazo?, ¿cuál fue el primer trazo?*
Prof:	*El primero que hicieron en toda la actividad.*
Gabi:	*¿La cosa que nos quedó toda chueca?*
Prof:	*Aja, la chueca (risas).*
	…(Realizan el trazo segundo trazo sugerido)
Gabi:	*Aquí ya van como en un movimiento circular (refiriéndose al segundo trazo), si ¿no?*
Ur:	*A ver…estaba así (tratando de colocar el artefacto en los puntos donde lo fijaron para realizar el segundo trazo).*
Gabi:	*Observa el trazo (lee parte de la pregunta 11), entre más cerca están los dos puntos más circular es la figura ¿no? Entre más cerca están ambos puntos fijos más circular es la figura, porque cuando estaban separados como que hacían como una elipse.*
Ur:	*Sí.*
Gabi:	*Entonces cuando los fuimos acercando como que más redonda se va haciendo. Entonces como nos dice que pongamos luego A sobre C va a ser el mismo punto (refiriéndose a que A sobre C será solo un punto único), entonces solamente será como si tuviéramos un compás girando y entonces ya va a hacer un círculo.*
Ur:	*Ay, hace lo mismo (mientras realiza el tercer trazo con A sobre C).*
	… (Gabi escribe la pregunta y Ur termina de realizar el tercer trazo)

5.1.3.2 Observaciones

- La pregunta 11 es la siguiente: Acerca el punto A al punto C, mueve el artefacto y observa el trazo. Después coloca el punto A sobre el punto C, mueve el artefacto y observa el trazo. ¿Cómo se comportaron estos trazos en comparación con el primer trazo realizado en la actividad? La finalidad de esta pregunta es que los alumnos se den cuenta de cómo cambia la elipse cuando la distancia focal va siendo menor (de esta manera se afecta la excentricidad). No se planteó en las hojas de trabajo el otro extremo, es decir cuando los focos se alejan puesto que el artefacto es incapaz de realizar el trazo en dichas condiciones.
- Gabi se dio cuenta de que al colocar el punto A sobre el C el artefacto dibujaría una circunferencia (aunque ella menciona un círculo) aún sin realizar el trazo. Intuitivamente se dio cuenta de que el segmento AK funcionaba como un radio

al mantener fijo el punto A aunque no lo menciona y en cambio dice que el artefacto funciona en esas condiciones como un compás.

- En el diálogo pueden leerse algunas buenas ideas que tienen los integrantes de este equipo, y casi logran plasmar todo lo mencionado en el diálogo en sus hojas de trabajo.

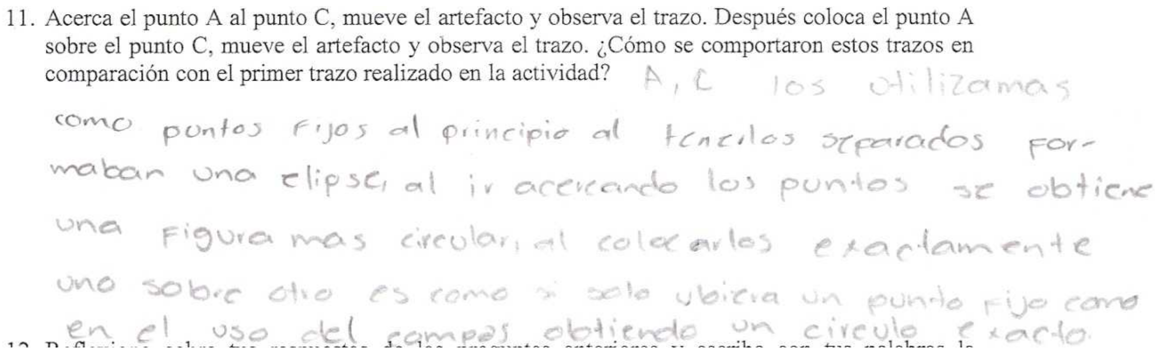

11. Acerca el punto A al punto C, mueve el artefacto y observa el trazo. Después coloca el punto A sobre el punto C, mueve el artefacto y observa el trazo. ¿Cómo se comportaron estos trazos en comparación con el primer trazo realizado en la actividad? A, C los utilizamos como puntos fijos al principio al tenerlos separados formaban una elipse, al ir acercando los puntos se obtiene una figura mas circular, al colocarlos exactamente uno sobre otro es como si solo ubicara un punto fijo como en el uso del compas obtiendo un circulo exacto.

Figura 14. Respuesta de estudiantes a la pregunta 11.

5.1.3.3. Conclusiones

A través de la observación del movimiento del artefacto, Gabi dedujo lo que sucedía cuando alejabas los puntos fijos o los acercabas aún sin realizar dichos trazos. El artefacto por sí solo y mediante su observación es capaz de brindar valiosa información para deducir características particulares de la figura que traza. De esta manera Gabriela puede asociar su experiencia moviendo el artefacto con los temas vistos en clase correspondientes a la elipse, en específico con esta pregunta puede llegar a redescubrir y asociar el concepto de excentricidad mediante sus observaciones.

5.1.4 Dialogo 4

Participantes: Gabriela (**Gabi**), Uriel (**Ur**) y Profesor (**Prof**).

5.1.4.1 Introducción

Tratan de responder la pregunta 12 con sus palabras. Revisan las respuestas de preguntas anteriores, mencionan lo que sucedía cuando movían el artefacto y mencionan algunos elementos de la elipse. El proceso es largo y lleno de cuestiones interesantes. Gabi menciona la definición de elipse a través de un hilo y a partir de eso trata de definir con su compañero lo que es la elipse. A través de mover el artefacto y mediante la observación de él trato de que los alumnos aclaren sus ideas y respondan de la mejor manera posible.

Gabi:	*Para formar una elipse necesitaremos dos puntos fijos.*
Ur:	*Sí.*
Gabi:	*Entonces la definición de elipse es…*
Ur:	*¿Te dice que pongas la definición?*
Gabi:	*Aja. Escribe con tus palabras la definición de elipse…*
	…(Pasan un tiempo prolongado pensando)
Ur:	*Pero dice que reflexiones sobre tus respuestas anteriores (las señala en sus hojas).*
Gabi:	*Y escribe con tus palabras la definición de elipse. Nosotros siempre estuvimos manejando los dos puntos, entonces cuando girábamos siempre…*
Ur:	*Cuando estaban más separados, salía más… ¿cómo se dice?...la elipse… ¿cómo se dice?*

Gabi:	*Ovaladita.*
Ur:	*Y si los acercábamos salía más …*
Gabi:	*Más circular se iba haciendo. Entonces es la distancia de entre dos… no… teniendo dos puntos fijos como referencia…*
Ur:	*Como nos hizo el maestro con el hilito.*
Gabi:	*Aja.*
Ur:	*¿Pero cómo se explica?*
Gabi:	*Pues es que se supone que tienes dos puntos fijos de referencia, uno fijo y otro en movimiento, porque teníamos este así (pone 2 lápices simulando que son los focos)… ¡nooo!, los dos estaban fijos. Tenemos esto aquí así ¿no? (dibuja dos puntos en su hoja de trabajo), entonces nosotros tenemos este punto que giraba, por ejemplo aquí (lo dibuja en medio de los dos puntos anteriores). Entonces como en el hilito, tienes un punto fijo y has de cuenta que tuvieras dos, entonces nada más… al girarlo esto se va haciendo como ondular (realiza el trazo de la elipse) y este también se va abriendo hacía acá y este se cierra hacia acá (señala el movimiento del trazo respecto al foco que toma como referencia) cuando este va acá este se abre hacía acá. Entonces tenemos tres puntos.*
Ur:	*¿Tres?*
Gabi:	*Sí. Dos fijos y uno en movimiento. Entonces, al mover el punto que está en medio de los dos, da forma a una figura elíptica (en su simulación el punto medio era el punto móvil y los puntos extremos los focos).*
Ur:	*¿Por qué?*
Gabi:	*Porque mientras aumenta de un lado del otro va disminuyendo.*
Ur:	*Sí, sí ponle que la distancia de uno aumenta mientras la distancia de otro disminuye*
Gabi:	*Pero le pongo lo de los 3 puntos ¿no? Que tenemos dos puntos fijos y uno en movimiento.*
	…(Piensan en voz baja)
Gabi:	*Es una figura geométrica en la que actúan dos puntos fijos llamados focos.*
Ur:	*Y al otro que tenemos, ¿cómo se le podría decir?*
Gabi:	*Y uno llamado… ¿vértice?, ¿cómo se llama el del centro?, ¿vértice?*
Ur:	*No… y uno… ¿cómo se le puede decir?*
Gabi:	*Y un punto en movimiento que va marcando… ah es que ¿cómo se le puede decir a un punto en movimiento?*
Ur:	*Pregúntale a Arturo.*
Gabi:	*Héctor, cuando teníamos la elipse ves que teníamos dos puntos fijos que eran los focos y teníamos cuando trazábamos con el hilito aquí (señala su dibujo), ¿cómo se llama el punto que queda en el hilito, el punto qué va marcando el recorrido?, ¿o nada más es un simple punto que marca el recorrido?*
Prof:	*Sí, es un punto.*
Gabi:	*Un punto a cualquier distancia marcando el recorrido que forma la elipse.*
Prof:	*Aja pero ¿cómo es ese punto?... a ver tienes tu hilo aquí y estos son tus focos (hago mi simulación en su hoja de dibujo)…pero si te fijas lo que hace este aparato (contrastando en artefacto con su definición de hilo)…*
Gabi:	*Este vendría siendo supongamos que el hilito que tenemos.*
Prof:	*Aja, tú me dices que este es él…*
Gabi:	*Estos eran nuestros puntos fijos. Has de cuenta que estos son nuestros focos, los dos puntos fijos (señala los puntos A y C en el artefacto fijo) entonces este lo estamos manejando como si fuera el hilito (el artefacto) que al girarlo va marcando nuestra forma de la elipse pero se encuentra respectivamente a una distancia de los focos.*
Prof:	*Aja, ¿y cómo es esa distancia?, ¿cómo es la suma, por ejemplo, de aquí a aquí es*

	una distancia (de K a A) y de aquí a aquí es la otra (de K a C)? Conforme lo gira (el artefacto) ¿qué pasa con esas distancias?
Gabi:	*Aumentan o disminuyen: aumentan de un lado y disminuyen de otro.*
Prof:	*Pero al final de todo ¿la suma es distinta en cada movimiento?*
Gabi:	*No, es la misma.*
Ur:	*Aja, es la misma.*
Gabi:	*Acuérdate que es la misma (recordándomelo).*
Prof:	*Exacto, es la misma porque están marcando KA y KC. Entonces lo que tú me dices es que esta es tu cuerda, este es el punto que dibuja en tu cuerda y estos son tus focos (señalo cada parte en el artefacto)…*

5.1.4.2 Observaciones

- En esta pregunta se espera que los alumnos retomen detalles de las preguntas anteriores y mediante la observación del artefacto puedan dar una definición de elipse que se aproxime a la definición formal de elipse como lugar geométrico.
- Algo notable fue que Uriel hubiera mencionado la definición de elipse a través de un hilo. Gabriela intentó dar una explicación de dicha definición primero auxiliándose de dos lápices y después rayando en su hoja de respuestas. En su segunda simulación lo que en otras palabras ella trata de explicarle a Uriel es que cuando jala de la cuerda con el lápiz, mientras lo mueve, uno de los segmentos de un punto de los que ella marcó (foco) al lápiz aumenta de longitud mientras el otro segmento (del otro punto o foco al lápiz) disminuía, y que si movía el lápiz en sentido contrario al primer movimiento ocurría lo contrario, es decir, el segmento que había disminuido de longitud ahora aumenta y el que aumentaba ahora disminuye.
- Algo muy importante y que ninguno de los dos integrantes de este equipo observó, tomó en cuenta o descubrió fue que el movimiento del artefacto era similar al de la definición de elipse por medio de una cuerda al que hicieron mención. De haberlo hecho hubieran respondido inmediatamente dicha pregunta.

Figura 15. Estudiantes trabajando en la pregunta 12.

- Después de eso los integrantes comenzaron a identificar lo puntos importantes de la elipse en su artefacto. Mencionaron que los puntos fijos A y B eran sus focos, que el punto móvil K es el que trazaba la elipse. A través de la observación del artefacto y del uso de algunas preguntas anteriores pudieron dar una definición de elipse, en función del artefacto.

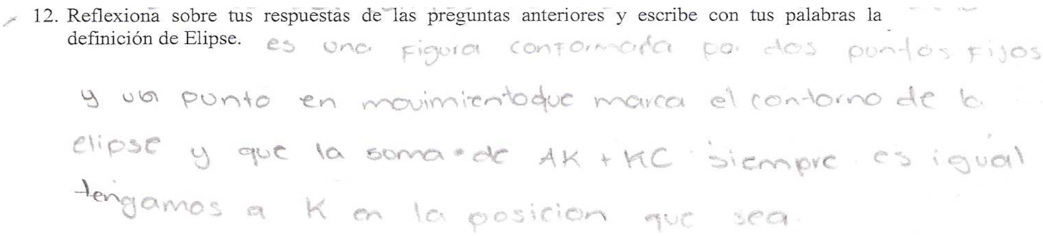

12. Reflexiona sobre tus respuestas de las preguntas anteriores y escribe con tus palabras la definición de Elipse. es una figura conformada por dos puntos fijos y un punto en movimientoque marca el contorno de la elipse y que la soma de AK + KC siempre es igual tengamos a K en la posicion que sea

Figura 16. Respuesta de estudiantes a la pregunta 12.

5.1.4.3. Conclusiones del dialogo 4.

Los alumnos fueron obteniendo información esencial a lo largo de toda la actividad. Fueron incapaces de entrelazar toda esa información para brindar la definición de elipse. Aún así, era suficiente que solo observaran sus respuestas de la pregunta 8 en adelante para dar una definición. En este caso, Gabriela y Uriel conocían la definición de elipse por medio de una cuerda y un lápiz, la cual tiene similitudes con el movimiento del artefacto. Una vez que lograron comparar su definición a través de una cuerda con el comportamiento del artefacto durante su movimiento lograron dar su definición de elipse.

6. Conclusiones Globales

El aprendizaje cooperativo es un enfoque de enseñanza, en el cual se procura utilizar actividades en las cuales es necesaria la ayuda entre estudiantes, ya sea en pares o grupos pequeños, dentro de un contexto enseñanza-aprendizaje. El aprendizaje cooperativo se basa en que cada estudiante intenta mejorar su aprendizaje y resultados, pero también el de sus compañeros.

Cabe mencionar que a los alumnos se les dificulta trabajar en equipo puesto que en ocasiones no pueden asimilar las opiniones de sus compañeros. En determinadas partes de las actividades así como en determinados equipos se observaron fragmentos de debate científico.

Para cada uno de los instrumentos, los estudiantes hicieron uso de recursos matemáticos como la utilización de representaciones algebraicas, lenguaje geométrico y transformación del lenguaje cotidiano al lenguaje matemático, como parte fundamental en la construcción del conocimiento.

Trabajar con instrumentos concretos en el aprendizaje es viable ya que, se observó que la mayoría de los estudiantes se motivan trabajando con ellos, es una dinámica muy distinta a la de una clase cotidiana, además el concepto en cuestión es construido por ellos mismos por lo que este puede ser más duradero.

En cuanto a la manipulación del artefacto, al principio les costó trabajo moverlo, lo cual se vio reflejado en sus trazos, los cuales quedaban muy chuecos. Después de realizar varios trazos, los alumnos obtenían práctica y las elipses les comenzaron a quedar bien. Un problema para los alumnos fue que en ocasiones se salían las tachuelas con las que se fijaban los puntos fijos (focos) y esto les perjudicaba en la estética de sus dibujos.

De acuerdo a los diálogos y respuestas que los integrantes del equipo hicieron, consideramos que ellos comprendieron cuál es modelo inmerso en el artefacto matemático, de hecho siguiendo el orden de las preguntas descritas se pudo constatar que los estudiantes pudieron seguir los pasos necesarios para llevar a cabo la demostración matemática, ahora bien posterior a este trabajo se les presentó a ellos la demostración matemática previamente realizada y se constato que ellos entendieron los pasas seguidos y cómo se llega a demostrar que el artefacto utilizado traza una elipse.

Bibliografía

Artobolevski, I. (1975). *Mecanismos en la técnica moderna.* Tomo 2, parte 1. Ed. Mir.

Arzarello, E, & Robutti, O. (*2004*). Approaching functions through motion experiments. Educational Studies in Mathematics, 57(3).

Bartolini, M. (2007) *Experimental mathematics and the teaching and learning of proof.* Research funded within the PRIN 2005019721 on "Meanings, conjectures, proofs: from basic research in mathematics education to curricular implications.

Bartolini, M. et al. (2004). *The MMLAB: a laboratory of geometrical instruments.* Comunicazione orale all'interno del minisimposio Applicazioni della Matematica all'industria culturale.

Bartolini, M. et al. (2003). *Learning Mathematics with tools.* U.M.I. (the association of school and university teachers of Mathematics), The paper is a part of the book that is presented at ICME.

Boero, P.; Garuti, R. and Mariotti, M. (1996). 'Some dynamic mental processes underlying producing and proving conjectures', *Proceedings of PME-XX, Valencia, vol. 2*, pp. 121-128.

Boero,P.; Pedemonte, B. & Robotti, E.: (1997). 'Approaching Theoretical Knowledge Through Voices and Echoes: a Vygotskian Perspective', *Proc. of PME-XXI, Lahti, vol. 2*, pp. 81-88.

Dennis, D. (1995). *Historical Perspectives for the Reform of Mathematics Curriculum: Geometric Curve Drawing Devices and Their Role in the Transition to an Algebraic Description of Functions*. PhD Dissertation, Cornell University.

Duval, R. (1995). *Semiosis et Penseé Humain*. Ed. Peter Lang S.A. 1995. Traducción Universidad del Valle, Instituto de Educación y Pedagogía 2001.

Dyck, W. (1994). *Katalog matematischer und matematisch-physikalischer Modelle, Apparate und Instrum*ente. Georg Olms Verlag, Zurich, New York.

Hoyos, V. (2006). *Funciones Complementarias de los artefactos en el aprendizaje de las transformaciones geométricas en la escuela secundaria.* Enseñanza de las Ciencias, 2006, 24(1), pp. 31–42.

Hoyos y Falconi. (2005). *Instrumentos y matemáticas: historia, fundamentos y perspectivas educativas*. Ed. UNAM.

Hoyos, V., Capponi, B. y Génevès, B. (1998). *Simulation of drawing machines on Cabri-II and its dual algebraic symbolization*, en *Proceedings of CERME1*. Alemania: Universidad de Osnabrueck.

Jill, Vincent, et al. (2002). *Mechanical linkages as bridges to deductive reasoning: a comparison of two environments.* PME 26. Pp 313-320.

Jorgensen, L. (1999). *Involving Midlle Students in Research Design.* Proceedings of CSCL99.

Kempe, A. (1877). *How to Draw a Straight Line.* London, England: Macmillan and Co.

Mariotti, M.A., Bartolini Bussi, M., Boero, P., Ferri, F. y Garuti, R. (1997). *Approaching Geometry Theorems in Contexts: From History and Epistemology to Cognition*, en *Proc. XXI PME Int. Conf.*, 1, pp.180-195, Finlandia: Lathi.

Papert, S (1982). *Alas para la mente. Galápago*. Buenos Aires. 1982.

Piaget, J. (1950). *Introducción a la Epistemología Genética. "El pensamiento matemático".* Buenos Aires: Paidós, 1975.

Schooten, F. Van (1657). *Exercitationum mathematicarum liber IV, sive de organica conicarum sectionum in plano descriptione.* Lugd. Batav ex officina J. Elsevirii.

Verillon, P. y Rabardel, P. (1995*). Cognition and Artefacts: A Contribution to the Study of Thought in Relation to Instrumented Activity.* European Journal of Psychology of Education*,* 10(1), pp. 77-101.

José Carlos Cortes Zabala. Profesor Investigador Facultad de Físico Matemáticas Universidad Michoacana, México; Presidente de AMIUTEM. Responsable de la Red Académica "Uso de la Tecnología para la enseñanza de las Matemáticas".
jcortes@umich.mx

Graciela Eréndida Nuñez Palenius. Profesora Investigador Facultad de Ing. Química Universidad Michoacana, México; Coordinadora de la Maestría "Enseñanza de las Ciencias.
erepalenius@hotmail.com

Christian Morales Ontiveros. Profesor Investigador Facultad de Físico Matemáticas Universidad Michoacana, México. **chrismora23@gmail.com**