UNIÓN
REVISTA IBEROAMERICANA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA

ISSN: 1815-0640
Número 57. Diciembre 2019
Páginas 107-120

http://www.fisem.org/www/index.php
https://union.fespm.es/index.php/UNION

La intervención de la modelización matemática en el proceso de restauración de un edificio histórico

Giuliana María Romiti, María Florencia Cruz, Ana María Mantica

Fecha de recepción: 16/07/2019
Fecha de aceptación: 20/01/2020

Resumen	El objetivo de este trabajo es estudiar como futuros profesores en matemática, en interacción con pares, utilizan conceptos y formulan y validan conjeturas en el dominio de la geometría plana en el marco de un proceso de modelización mediado por *GeoGebra.* A partir del análisis realizado se aprecia que los estudiantes vivencian el proceso de modelización matemática. Apelan a conceptos geométricos disponibles y formulan y validan conjeturas en función de propiedades matemáticas y del contexto propuesto. A su vez, logran construcciones en *GeoGebra*, apoyadas generalmente en propiedades, que hacen visibles y reflejan las ideas en juego. **Palabras clave**: Modelización; *GeoGebra;* Futuros docentes.
Abstract	This research aims to study how pre-service teachers in mathematics, through peer interaction, use concepts, validate and formulate conjectures in the plane geometry domain, within a modeling process mediated by *GeoGebra*. From the analysis is evident that the students experience the mathematical modeling process. They appeal to available geometrical notions and formulate and validate their conjectures in regard with mathematical properties and the proposed context. In addition, they achieve constructions in *GeoGebra* supported by properties, making them visible and reflecting their ideas. **Keywords**: Modeling; *GeoGebra*; pre-service teachers.
Resumo	O objetivo deste trabalho é estudar como futuros professores de matemática, em interação com pares, utilizam conceitos, formulam e validam conjecturas no domínio da geometria plana no marco de um processo de modelagem mediado pelo *GeoGebra.* A partir da análise feita, percebe-se que os alunos vivenciam o processo de modelação matemática. Eles recorrem a conceitos geométricos disponíveis e formulam e validam conjecturas em função de propriedades matemáticas do contexto proposto. Ao mesmo tempo, eles conseguem construções no GeoGebra, geralmente apoiadas em propriedades, que tornam visíveis e refletem as ideias em jogo. **Palavras-chave:** Modelação; GeoGebra; Professores futuros.

1. Introducción

Las propuestas de enseñanza deben permitir a los alumnos formar o mejorar las habilidades que, como miembros de una sociedad, necesitan para intervenir y tomar decisiones. Diversos investigadores reconocidos en el ámbito de la educación matemática tanto a nivel nacional como internacional señalan la necesidad de que futuros profesores en instancias de formación tengan la posibilidad de vivir experiencias de modelización matemática en los diferentes dominios de esta disciplina (Blomhøj, 2004; Esteley 2014; Villarreal, Esteley y Smith, 2018; Cruz, Scaglia y Esteley, 2018). En particular, considerando la enseñanza de la geometría escolar Itzcovich (2007) afirma que uno de los objetivos es iniciar a los estudiantes en el modo de pensar propio del saber geométrico, pero también identificar a la escuela como el espacio de creación, transformación y conservación de la geometría.

Teniendo en cuenta el valor formativo del trabajo con modelización matemática en el dominio geométrico se diseña una propuesta en la que se emplea el software de geometría dinámica (SGD) *GeoGebra* para llevar a cabo con futuros profesores en matemática. Diversas investigaciones ponen de manifiesto la importancia de la mediación de tecnologías digitales, en este caso un SGD, en el marco de procesos de modelización matemática, entre ellos, Villarreal (2012) y Esteley (2014).

Atendiendo las cuestiones mencionadas se considera positivo que se enfrente a futuros docentes a situaciones de modelización matemática mediadas por SGD. Las mismas permiten poner en juego tareas matemáticas como la formulación y validación de conjeturas y así lograr la interacción por parte de los estudiantes favoreciendo el empleo de propiedades que los acercan a un trabajo geométrico más formal.

En este marco se realiza una investigación con estudiantes de profesorado en matemática de la Universidad Nacional del Litoral de Santa Fe, Argentina. La selección de los sujetos de estudio responde, entre otras cuestiones, a necesidades educativas que tiene Argentina en la actualidad. Asimismo, documentos regulatorios actuales manifiestan que es necesario el uso de las tecnologías digitales en las aulas de todos los niveles del sistema educativo, la vivencia de experiencias de modelización matemática, el análisis y puesta en juego de procesos de formulación y validación de conjeturas, entre otros (Núcleos de Aprendizajes Prioritarios, 2011; Proyecto de mejora para la formación inicial de profesores para el nivel secundario. Áreas: Biología, Física, Matemática y Química, 2010).

Atendiendo a las cuestiones brevemente descriptas, se propone como objetivo de este trabajo estudiar como futuros docentes, en interacción con pares, utilizan conceptos y formulan y validan conjeturas en el dominio de la geometría plana en el marco de un proceso de modelización mediado por el SGD *GeoGebra.*

2. Marco teórico

En el objetivo de esta investigación se pone el foco en la interacción entre temáticas reconocidas actualmente de interés en el ámbito de la educación matemática. Se apela a la idea de proceso de modelización matemática como abordaje pedagógico, Blomhøj (2004) sostiene que la modelización matemática puede:

> ser vista como una práctica de enseñanza que coloca la relación entre el mundo real y la matemática en el centro de la enseñanza y el

> aprendizaje, y esto es relevante para cualquier nivel de enseñanza. Las actividades de modelización pueden motivar el proceso de aprendizaje y ayudar al aprendiz a establecer raíces cognitivas sobre las cuáles construir importantes conceptos matemáticos (p.1)

El autor considera que un modelo matemático es "una relación entre ciertos objetos matemáticos y sus conexiones, por un lado, y por el otro, una situación o fenómeno de naturaleza no matemática" (Blomhøj, 2004, p.2). Blomhøj y Højgaard Jensen (2003) afirman que para utilizar estos modelos se deben recorrer seis subprocesos que componen al proceso de modelización: formular una tarea en la que se identifiquen características del mundo real, sistematizar los objetos relevantes de la situación de modo que posibilite una representación matemática, escribir en lenguaje matemático, emplear métodos matemáticos que permitan obtener conclusiones respecto de la situación a analizar, interpretar los resultados en función de los datos iniciales y validar el modelo. Este proceso no es lineal, ya que cada subproceso puede introducir cambios en otro.

En esta investigación se pone atención en la formulación y validación de conjeturas, en el marco del proceso de modelización matemática antes mencionado. Itzcovich (2007) entiende la formulación de conjeturas como:

> […] la producción de una sospecha, de un parecer, producto de una experiencia de trabajo. Es decir, confluyen en ella exploraciones, ensayos y errores, el uso de los datos conocidos y saberes disponibles que permiten establecer una afirmación con cierto margen de certeza. (p.17)

La validación, según dicho autor, es una parte fundamental del trabajo matemático que "involucra la responsabilidad de hacerse cargo, mediante argumentos matemáticos, de los resultados que se obtienen. Es decir, poder encontrar razones que permitan explicar y comprender por qué pasa lo que pasa" (p. 18)

Las tecnologías digitales median los procesos de enseñanza y de aprendizaje de la matemática y particularmente los escenarios de modelización matemática. Se presentan en primera instancia, como referentes, autores que estudian las particularidades que implica el trabajo con software de geometría dinámica. En segunda instancia, se exponen aportes respecto a tecnologías digitales en general y a las influencias que las mismas pueden presentar en instancia de interacción entre estudiantes.

Arcavi y Hadas (2000) sostienen que la importancia del uso de SGD se debe a que con el mismo se potencian los siguientes aspectos: visualización, experimentación, sorpresa y retroalimentación. El software permite realizar construcciones y la visualización de las mismas da indicios de invariantes que potencian la formulación y validación de conjeturas. A su vez, los cambios en la construcción que permiten obtener múltiples ejemplos, casos no convencionales o extremos favorecen la experimentación. Los autores sostienen que la sorpresa surge cuando se presenta una diferencia entre las predicciones que esperan los estudiantes y lo que devuelve el software. La retroalimentación es proporcionada por el ambiente cuando surgen estas diferencias que motivan al estudiante a verificar y demostrar.

A su vez, Healey (2000) categoriza las construcciones realizadas con un SGD en blandas y robustas. Las blandas son construcciones que se realizan de manera empírica por los estudiantes y las propiedades que se ponen en juego se construyen a "ojo", mientras que las robustas se valen de definiciones y propiedades geométricas y su uso potencia el comienzo de una prueba. Según esta autora, una de las ventajas de realizar una construcción con el software es que una vez finalizada la misma se puede reconstruir quedando de manifiesto las propiedades utilizadas, lo cual potencia la validación.

Por otra parte, González Fernández (2016) afirma que existen investigadores que consideran que las tecnologías digitales inhiben el debate entre pares, dado que los estudiantes pueden encontrarse inmersos en las pantallas de sus dispositivos electrónicos. Este autor afirma que las tecnologías digitales no son un fin en sí mismo, sino que son parte de un entramado de elementos en el que intervienen docentes, estudiantes, metodologías empleadas, recursos, tiempo, espacio entre otros. El uso que se haga de los recursos tecnológicos requiere de una planificación previa en los procesos de enseñanza y de aprendizaje "estableciendo las modalidades de interacción con los recursos y con los demás agentes implicados, ya sea el docente o el grupo de iguales, en el desarrollo de los mismos" (p. 18)

Respecto a la interacción entre pares, Quaranta y Wolman (2003), resaltan la importancia de la misma especialmente en la resolucion de problemas. Dado que la resolucion del problema en forma conjunta potencia el debate entre los estudiantes para buscar juntos soluciones.

> "Este proceso requiere tener en cuenta lo que dicen otros compañeros, las sugerencias que hacen, explicitar y justificar las elecciones, provocando intercambios cuya riqueza radica en que posibilitan tomar conciencia sobre algun aspecto no considerado del problema, reformularlo, descubrir nuevos aspectos, cuestionar otros, etc." (p.195)

Según las autoras a pesar de la riqueza de las interacciones existen ciertas limitaciones como que un alumno asuma el rol de lider y los demás acepten sus afirmaciones sin cuestionamiento o que alguno esté en desacuerdo con las propuestas de los demás sin dar argumentos matematicos al respecto.

3. Metodología

Con la intención de responder al objetivo de este estudio se realiza una investigación cualitativa interactiva basada en una recolección de datos en los escenarios naturales (McMillan y Schumacher, 2005). Se utiliza la modalidad de estudio de casos, destacando diferencias sutiles, secuencia de acontecimientos y la globalidad de situaciones (Stake, 2007).

Los sujetos de estudio son futuros profesores que cursan la asignatura Taller de Geometría del Profesorado en Matemática de la Facultad de Humanidades y Ciencias de la Universidad Nacional del Litoral. Los datos se recogen en el segundo cuatrimestre del año 2017 durante una clase de dos horas reloj. La asignatura se encuentra en el tercer año del plan de estudio de la carrera, por lo cual los estudiantes cursaron previamente dos asignaturas en la que se abordan contenidos geométricos, una del plano y una del espacio (Geometría Euclídea Plana y Geometría Euclídea Espacial). En este contexto la asignatura se vuelve un espacio de síntesis en la que se refuerzan contenidos abordados previamente y el trabajo con las herramientas informáticas de geometría dinámica.

Se propone esta experiencia en grupos de tres estudiantes, dado que se considera que la interacción es un factor que potencia la producción matemática.

Sadovsky (2005) remarca la importancia de la interacción en instancias de trabajo matemático, ya que permite construir argumentos con los cuales respaldar o refutar las decisiones propias o ajenas. Se conforman dos grupos de trabajo.

Se registra la información a través de grabaciones de audio y video, con el consentimiento de los participantes. También se recuperan los archivos con las construcciones en *GeoGebra,* de los cuales se obtienen los protocolos de construcción. Según Gutiérrez (2005) la importancia que tiene la utilización del software de geometría dinámica en las investigaciones radica en la posibilidad de revisar la construcción en el archivo, es decir, ver el paso a paso que realizan los estudiantes desde el comienzo hasta el final. De este modo, es posible corroborar si se trata de construcciones geométricas creadas siguiendo propiedades. La elección del software *GeoGebra* se toma en base a que es libre, de código abierto y utilizado habitualmente por los alumnos.

La actividad de construcción tiene la finalidad de indagar, investigar o reconocer las propiedades de las figuras y la capacidad de impactar en los procesos cognitivos que permiten hacer explicitas las características y propiedades del objeto geométrico que se está trabajando, más allá del dibujo que se utilice para representarlo. Las tareas de construcción incitan a una exploración, que pone de manifiesto la idea de que en geometría ver y dibujar no son suficientes.

La tarea con la que se trabaja está inspirada en una situación real en la que se debieron cambiar las baldosas de un piso debido a una fisura de un caño. Las baldosas tienen un diseño especial y actualmente no se fabrican. A partir de estas afirmaciones se diseña la siguiente tarea:

En la iglesia del Carmen de la ciudad de Santa Fe se produjo un hundimiento en el piso por una fisura de un caño de fibrocemento de la cloaca en el centro de la nave principal. Esto supone cambiar el caño en el tramo afectado. En ese tramo el caño se encuentra paralelo a la pared.

Figura 1. Noticia diario El Litoral 18/10/17

Llaman al plomero que manifiesta que por compromisos asumidos no puede comenzar con la reparación en forma inmediata pero informa que como máximo romperá 1m² de piso.

La reparación del piso supone el cambio total de las baldosas afectadas. Las baldosas son las que se muestran en la figura 2 y son cuadradas de 20 cm de lado. Si una baldosa se rompe en parte debe ser reemplazada por completo. Debido a que el modelo de baldosas dejó de fabricarse y que se pretende realizar el arreglo en el menor tiempo posible, se contrata a un especialista, antes que el plomero comience su trabajo. Se le solicita efectuar el diseño de la reparación teniendo en

Figura 2. Foto del piso de la iglesia del Carmen

cuenta la cantidad de baldosas necesarias para cubrir el metro cuadrado de pozo que romperá cómo máximo el plomero.

- *Representa a tu criterio el pozo que realizará el plomero.*
- *Realiza en una misma ventana de GeoGebra el diseño del pozo y el cubrimiento del mismo con las baldosas a reemplazar a fin de estimar el número de baldosas necesarias para realizar la reparación del piso.*
- *Realiza un bosquejo del diseño de la baldosa en GeoGebra.*

4. Análisis

Para realizar un análisis en profundidad se presenta en este artículo el trabajo realizado por uno de los grupos participantes. Se identifica a las alumnas que participan de la tarea como Diane, Cata y Manu, para preservar el anonimato de las mismas. Se analiza cada paso que efectúan teniendo en cuenta el marco teórico y otros autores que se hace necesario retomar para responder al objetivo de este estudio. El análisis se organiza en tres apartados, en el primero se presenta el debate que llevan a cabo las alumnas en torno a las dimensiones del pozo, en el segundo la construcción con el SGD de la representación del pozo y en el tercero el diseño en el SGD de la baldosa.

4.1 Debate de las estudiantes respecto a las dimensiones del pozo

Para comenzar a resolver la tarea las alumnas leen con detenimiento el enunciado. La primera en conjeturar es Diane que considera la representación del metro cuadrado como un cuadrado de un metro de lado.

D: ¿Cómo es el pozo acá?, ¿un metro por un metro? (…) Esto es 20 y esto es 20 (…)[1] [Hace referencia a la longitud de los lados de la baldosa][2]*. Entonces esta distancia va a ser la misma que esta, entonces de acá a acá hay que ver cuánto va a romper. ¿Se entiende?* [La estudiante trabaja sobre la imagen de las baldosas que se entrega con la tarea]

C: Si, si.

M: ¿Y por qué tiene que ser en forma de cuadrado y no hacer directamente así digamos? (…) Sí, es un metro cuadrado. Pero no dice que tiene que ser cuadrado el pozo, entonces podría ser cualquier figura.

Se aprecia la influencia del estereotipo del metro cuadrado utilizado habitualmente en el aula, libros de textos, entre otros. Se destaca que es probable que dicho caso particular haya sido empleado como ejemplo en la enseñanza del concepto de metro cuadrado, lo cual influye en el grado de comprensión de las estudiantes (Guillén, 2000). Aspectos similares se señalan en Mantica, Götte y Dal Maso (2005) al trabajar con el concepto del centímetro cuadrado. Respecto a interacciones, en este caso, Cata acepta el planteo de su compañera pero Manu lo cuestiona, poniendo a prueba la conjetura de Diane (Quaranta y Wolman, 2003)

C: Estaba releyendo por las dudas se me había escapado algo… el caño está paralelo a la pared, así.

---

[1] Los diálogos se expresan en variedad dialectal del español rioplatense.
[2] Entre corchetes se presentan las aclaraciones por parte de los investigadores de las transcripciones de los audios.

D: Entonces el caño esta así, ¿entendés?, a lo largo, entonces se rompe y tendría que ser a lo largo, tampoco necesitamos un cuadrado.

M: No, puede ser una circunferencia tranquilamente.

D: Decime, ¿qué constructor rompe en circunferencia el piso? Contame, no, no, ¡pará!

M: Yo cuando excavo voy cavando en círculo.

D: No, para mi tiene que ser o rectangular o cuadrado.

Cata vuelve a leer una de las condiciones establecidas en la tarea que abre la discusión entre Manu y Diane. En este punto piensan que no están bien encaminadas y que es necesario volver a leer la actividad para comprenderla mejor y analizar los pasos a seguir, esto es lo que Schoenfeld (2001) denomina “autorregulación”.

La intervención de Manu direcciona la discusión respecto a la posición del caño en la nave central. Esto permite cuestionar un aspecto que no se había tenido en cuenta, abre la posibilidad de la discusión acerca de las diferentes formas posibles en que se puede considerar 1 metro cuadrado. Permite avanzar con respecto a las nociones que se ponen en juego en la tarea y discutir acerca del contexto, esto se considera un factor positivo en el debate (Quaranta y Wolman, 2003) y permite franquear la concepción inicial estereotipada sobre el metro cuadrado.

Esta interacción contribuye a que cada uno de los actores pueda presentar y defender sus proposiciones, sean estas verdaderas o falsas. En este caso, las alumnas rechazan la conjetura del círculo como posible diseño del pozo, siendo que la misma en realidad es una opción correcta, que habría que validar si en el contexto resulta adecuado.

Se aprecia que las alumnas consideran relevante la forma del pozo y proponen un primer modelo matemático que es el cuadrado. A partir de la interacción y de considerar el contexto del mundo real, validando con los datos iniciales, descartan este modelo. Proponen nuevos modelos posibles como el rectángulo y el círculo. Esto permite afirmar que las estudiantes han transitado tres de los subprocesos que plantea Blomhøj (2004): la sistematización, la traducción de objetos y relaciones al lenguaje matemático y la validación.

C: Llaman al plomero y dice que como máximo romperá un metro cuadrado de piso.

M: Entonces si el caño corre así va a ser un rectángulo a lo sumo.

D: Bueno, hacemos un rectángulo entonces. ¿Cuánto tendría que medir ese rectángulo?

M: Un metro cuadrado.

D: La medida digo yo.

M: Para mí, el caño es largo y angosto.

La conversación entre Diane y Manu permite hacer visible la influencia del contexto en el modelo del rectángulo. Al cuestionarse sobre las dimensiones del rectángulo entran también en juego las dimensiones del caño, y se establece una relación entre ambas, donde al parecer las del rectángulo vendrían a depender de las del caño. Blomhøj (2004) plantea al respecto que es importante que la modelización este guiada por el problema de la vida real. Es entonces, que el modelo del rectángulo propuesto ahora será uno que se adapte mejor a la forma del caño. En este momento es posible apreciar que las estudiantes se encuentran en el subproceso de sistematización, donde seleccionan objetos relevantes como las dimensiones y posición del caño (Blomhøj, 2004).

Modelizan la posible representación del pozo con un rectángulo teniendo en cuenta los datos de la problemática del mundo real disponibles y posteriormente validan este modelo. De este modo se aprecia que atraviesan los subprocesos de empleo de métodos matemáticos, interpretación y evaluación de resultados (Blomhøj, 2004).

D: El tema es que tenemos que ver cuánto tiene que medir, ¿cuánto tiene que medir para que sea un metro cuadrado?
M: Yo te podría decir un montón de medidas, depende del espesor del caño.
D: No, no, ya fue, ¿para qué querés el caño?
M: Pide un metro cuadrado como máximo, base por altura.
C: Sin valores fijos es, pero no sé.
M: Y bueno, definimos a y b de tal manera que la multiplicación dé siempre 1.

Retomando el diálogo de las alumnas se visualiza que consideran importante para construir el modelo (rectángulo) el diámetro del caño. No obstante, cuando continúan la discusión parece que descartan esta condición, ya que sólo ponen atención en las medidas que debe tener el rectángulo para tener un metro cuadrado de área.

En relación a los subprocesos de Blomhøj (2004) nuevamente las estudiantes se encuentran sistematizando, dado que ponen especial atención al espesor del caño y sin embargo lo descartan. Esto se aprecia posteriormente cuando realizan la representación en SGD.

M: No, estoy pensando porque a mí se me metió la idea que había que romper un determinado número de baldosas pero si no tenés el grosor [se refiere al diámetro del caño] *del caño no podés saber. Dice que se quiere finalizar el arreglo en el menor tiempo posible, la idea sería que rompa lo menos posible.*
D: No porque si son 5 albañiles…
C: Claro depende la cantidad de albañiles que va a usar. Lo que quieren es estimar, dependiendo de la reparación, la cantidad de baldosas que van a usar.

En el fragmento anterior se puede observar que las estudiantes consideran relevantes relaciones que no se especifican en la tarea, como ser la cantidad necesaria de albañiles para realizar el arreglo o la variable tiempo que sí aparece en la tarea. La relación cantidad de albañiles y tiempo no guardan relación estricta de proporcionalidad, dada las características de este tipo de tareas. No las consideran de total relevancia a la hora de resolverla, por lo que posteriormente son descartadas.

D: (…) ¿Cómo sabemos que este rectángulo tiene un metro cuadrado?
C: Por eso cuando definamos tenemos que ponerle valores que nos den seguro. (…) Bueno tenemos que poner eso con deslizadores.
M: Ingreso…. ¿Qué valores puede tomar a?
D: De 0,0 a 1.
C: No, ¿por qué?
*D: Y porque 1*1 es 1, pero si ya usas 2, dos por algo ya te da más de uno.*
M: No, dos por ½ te da uno. Bueno pongámosle hasta 50, no es mucho.
D: Ah… también.

C: Y b va a depender de a… y ahora haces un rectángulo.

Las estudiantes comienzan la construcción del diseño del pozo en el SGD *GeoGebra*. Debaten sobre el modo correcto de realizarla para que el área del rectángulo sea de un metro cuadrado.

Cata plantea que se debe emplear un deslizador en la construcción, Diane afirma que el mismo varía entre 0 y 1, puesto que el producto de un número mayor que 1 por cualquier número real no puede dar como resultado 1. Se aprecia que la interacción es un factor de progreso, dado que a partir de la misma Diane logra superar esta concepción errónea. Los errores pueden ser el detonante del análisis y reflexión de los conocimientos empleados, a su vez, permiten un avance al exigir una justificación de por qué se da determinada respuesta. (Quaranta y Wolman, 2003).

Se pone de manifiesto, además, que a pesar de estar trabajando en la pantalla de la computadora con un software determinado la situación planteada lleva a que las estudiantes mantengan un debate por el uso de una herramienta que implica cuestiones propias de los números decimales. (González Fernández, 2016)

4.2 Empleo del SGD en el diseño del pozo

En este apartado se considera solamente el protocolo de construcción y los videos de la puesta en común dado que los audios de las interacciones entre Diane, Cata y Manu no resultan significativos por estar plagados de expresiones tales como "este", "aquel" y no se comprende a qué punto, segmento, recta, etc., hacen referencia.

Las alumnas comienzan realizando la cuadricula en *GeoGebra* y la recta m que representa el caño de fibrocemento, sobre esto trabajan para construir el rectángulo. Realizan un deslizador "a" y escriben en la barra de entrada un valor "b = 1/a". A continuación toman un punto G y realizan una recta n que pasa por él y es perpendicular al caño. Además una circunferencia con centro en dicho punto y de radio b/2. Determinan las intersecciones entre la circunferencia y n y con ellas realizan dos rectas (p y q) perpendiculares a n. Sobre uno de estos puntos crean una circunferencia de radio a/2 y buscan las intersecciones con la recta p, los puntos K y J. Por último, realizan dos perpendiculares a p por dichos puntos y mediante las intersecciones con q y la herramienta "polígono", logran la construcción que se presenta en la figura 3.

A medida que varía el deslizador se modifican las dimensiones del rectángulo. Debido a que las alumnas emplean diversos conceptos geométricos para realizar la construcción, la misma resiste el movimiento y conserva el área solicitada. Se aprecia que realizan una construcción robusta, basada en propiedades geométricas, que soporta el arrastre (Healey, 2000).

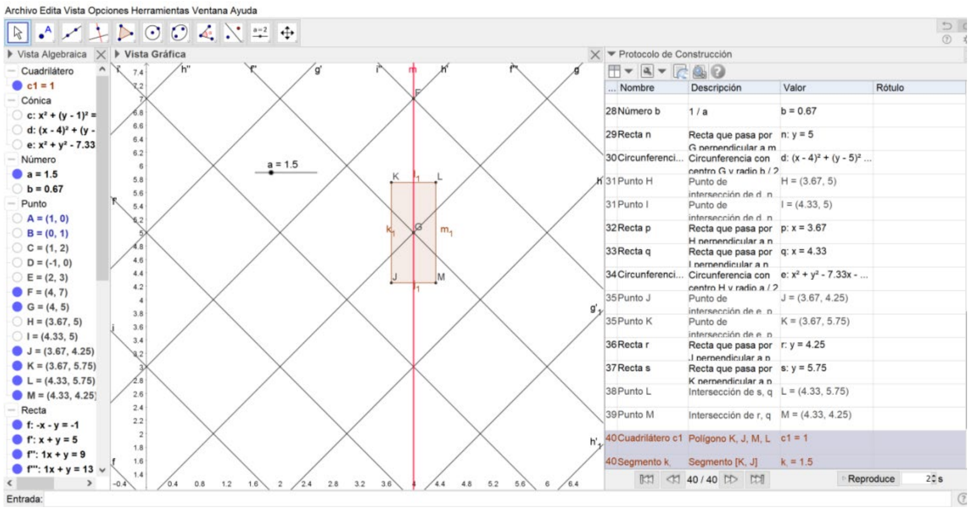

Figura 3. Representación del pozo presentada por los estudiantes

Con respecto a los subprocesos que plantean Blomhøj y Højgaard Jensen (2003), las estudiantes emplean métodos matemáticos e interpretan los resultados obtenidos en función de los datos iniciales al modelizar la situación con un rectángulo con distintos valores para el ancho y el largo y área constante de 1m^2. Por último, validan el modelo en función del contexto de la situación al hacer referencia a la influencia de las dimensiones del caño en la elección del rectángulo.

El hecho de utilizar el deslizador permite a las alumnas visualizar en términos de Arcavi y Hadas (2000) una pluralidad de rectángulos, colaborando así con la elaboración de conjeturas y la resolución del problema. Además esto constituye una experimentación siguiendo la línea de estos autores, ya que permite obtener múltiples ejemplos con facilidad.

Se aprecia que la escala de la cuadricula que utilizan las alumnas no se corresponde con las dimensiones del rectángulo. Las alumnas se percatan de esta situación en la puesta en común en la que comentan que la escala que utilizaron es 20 cm = $\sqrt{2}$ unidades de *GeoGebra.* Por lo que, según su construcción, necesitarían romper como máximo 6 baldosas. Frente a esta afirmación el grupo clase afirma “lo mínimo que habría que romper son 25 baldosas”. Aquí la discusión entre pares, nuevamente, se convierte en un factor de progreso que permite superar el error evidenciado en la producción de Diane, Cata y Manu quienes detectan que el mismo proviene de no considerar la escala empleada en la representación del SGD.

4.3 Empleo del SGD en el diseño de la baldosa.

Las alumnas comienzan la construcción del cuadrado que representa la baldosa utilizando la cuadricula que ofrece el *GeoGebra* marcando los cuatro vértices del cuadrado (A, B, C, D) de un modo arbitrario y a “ojo”, es decir no se utilizan las propiedades de la figura que se intenta construir, por lo que se obtiene una construcción blanda (Healey, 2000)

Figura 4. Diseño de baldosa

Para realizar un cuadrado en el vértice D consideran que su diagonal es $\frac{1}{6}$ de la diagonal BD del cuadrado ABCD y apelando a las medianas del triángulo AED (siendo E punto medio de BD) y el teorema de Thales se obtiene el punto J. A través de una simetría central de J con centro en E, obtienen J'. Con el trazado de rectas paralelas obtienen los cuatro cuadrados ubicados en cada uno de los vértices A, B, C, D, posteriormente con la herramienta polígono los determinan. A partir de esto emplean las herramientas: rectas paralelas, rectas por dos puntos, segmentos, intersección de dos rectas, simetrías centrales y polígono y obtienen el diseño buscado. La construcción final no soporta el arrastre a pesar de que el diseño se realiza basado en propiedades geométricas.

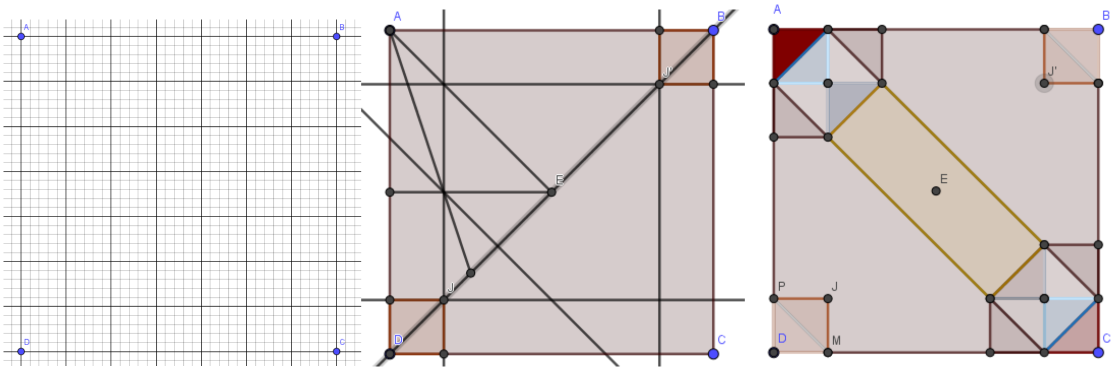

Figura 5. Diseño de la baldosa, paso a paso, presentado por las estudiantes

En instancias de debate colectivo las investigadoras intentan mover la figura y esto no es posible. Las alumnas manifiestan que para comenzar la construcción fijaron cuatro puntos de la cuadricula que son los vértices del cuadrado. Al quitar la condición de puntos fijos a los vértices del cuadrado y arrastrar uno de ellos la figura obtenida se deforma y generan en los alumnos una sorpresa (Arcavi y Hadas, 2000). Parece desconcertante que esa figura que construyeron aplicando propiedades se desarme. El tiempo disponible no fue suficiente para lograr una retroalimentación, por lo que se les aclaró de forma oral que la construcción se deforma debido a que no se parte de un cuadrado construido siguiendo propiedades geométricas, es decir parten de una construcción blanda (Healey, 2000).

5. Conclusiones

Respecto al diseño del pozo, se aprecia que las estudiantes, en un primer momento parten de la representación del metro cuadrado como un cuadrado de un metro de lado. Posteriormente sugieren que también es posible el uso de un círculo, finalmente proponen un rectángulo, ya que es el que más se asemeja a la forma del caño. En este sentido, cabe destacar que ponen en juego conceptos disponibles y buscan un modelo apropiado al contexto de la tarea. Las alumnas pasan por varios de los subprocesos que plantean Blomhøj y Højgaard Jensen (2003), sistematización, traducción de objetos y relaciones al lenguaje matemático, empleo de métodos matemáticos, interpretación y validación. No pasan por el primer subproceso, formulación del problema, ya que el mismo queda a cargo de los investigadores por cuestiones de tiempo disponible, sin embargo, se destaca que sería interesante realizar este tipo de experiencias con futuros profesores en matemática.

El empleo del SGD potencia algunas cuestiones, entre ellas: permite construir diversas formas poligonales (cóncavas o convexas) que representen un metro cuadrado. Particularmente posibilita la construcción dinámica de un rectángulo a partir de la cual se barren muchas posibilidades con una única construcción. Cabe señalar que, el SGD presenta desventajas, por ejemplo, no permite realizar figuras no poligonales de un metro cuadrado con mucha facilidad. La construcción del diseño del pozo realizada en el software *GeoGebra* por las alumnas responde a una construcción robusta, que da cuenta del empleo de propiedades y conceptos geométricos (Healey, 2000).

Se evidencia en el análisis que las alumnas no tienen en cuenta la escala utilizada para las dimensiones de la cuadricula y el pozo, este error lleva a las mismas a estimar un número equivocado de baldosas necesarias para cubrirlo. A través de la discusión logran superarlo y se entiende la misma como un factor de progreso en el sentido planteado por Quaranta y Wolman (2003).

En estas estudiantes avanzadas del profesorado en matemática es habitual la realización de construcciones con *GeoGebra*. Disponen de las propiedades geométricas de los polígonos y las emplean generalmente para formular y validar conjeturas. En el diseño de la baldosa se emplean propiedades y logran una construcción que representa la baldosa real. Sin embargo, la misma es blanda, dado que construyen un cuadrado a ojo tomando puntos de la cuadricula. Es decir, parten de una construcción que no soporta el arrastre y, por tanto, a pesar de emplear luego propiedades y conceptos geométricos, la construcción final es blanda (Healey, 2000).

La tarea propuesta efectivamente logra potenciar los aspectos del trabajo con el software que plantean Arcavi y Hadas (2003). Como se menciona en el análisis la posibilidad de realizar construcciones dinámicas favorece, en la construcción del diseño del pozo, la visualización y experimentación por parte de las estudiantes. Sin embargo, las mismas no realizan el arrastre sobre la construcción final de la baldosa, con el fin de corroborar las conjeturas y visualizar el sin número de imágenes que pueden obtener a partir de una construcción. Se presenta una sorpresa en las estudiantes cuando la profesora mueve la figura construida y se observa que no soporta el arrastre. No se produce una retroalimentación entre el SGD y el trabajo realizado por las estudiantes por cuestiones de tiempo. Las investigadores deciden explicar las razones por las cuales dicha figura no soporta el arrastre, si bien se considera que no es el mejor de los escenarios.

La experiencia se corresponde con lo afirmado por González Fernández (2016), puesto que no se toma el uso del software como un fin en sí mismo, sino que forma parte de un todo en el que se entrecruzan docentes, estudiantes, SGD, metodología, espacio y tiempo. Luego del análisis realizado se puede concluir que el uso de las tecnologías digitales no impide, en este caso particular, que se generen debates entre los integrantes del grupo. El diseño de la tarea, pautado con la intensión de llevar a los alumnos a interactuar, cumple su objetivo y genera debates interesantes entre los jóvenes que permiten avanzar en la producción matemática en juego. Al solicitar el trabajo en grupos de tres con una sola computadora necesariamente se comparten y enfrentan los puntos de vista de cada uno para resolver la tarea. Esto obliga a los estudiantes a no quedar absortos en la pantalla de su computadora desconectándose de sus pares.

La puesta en común con el grupo clase permite además enfrentar los resultados obtenidos con los de otros grupos, logrando así reconocer errores y defender las conclusiones propias. Tanto en las interacciones grupales como en las generadas en la puesta en común se aprecia que, las mismas, son un factor de progreso que permiten avanzar en la producción matemática que ponen en juego en la tarea (Quaranta y Wolman, 2003).

En general, cabe destacar las estudiantes identifican características del mundo real, reconocen en el problema objetos relevantes que les permiten una representación matemática de la situación empleando lenguaje y métodos matemáticos. De este modo obtienen un resultado de la situación y lo interpretan en función de los datos iniciales para luego validar el modelo obtenido en función de la situación propuesta en la tarea (Blomhøj y Højgaard Jensen, 2003). En este sentido, se aprecia en esta experiencia la vivencia de un auténtico proceso de modelización matemática.

Bibliografía

Arcavi, A y Hadas, N. (2000). El computador como medio de aprendizaje: ejemplo de un enfoque. International Journal of Computers for Mathematical Learning, 5, 25-45.

Blomhøj, M. (2004). Mathematical modelling- A theory for practice. En Clarke,B.; Clarke,D.; Emanuelsson, G.; Johnansson,B.; Lambdin, D.; Lester,F.; Walby, A.; y Walby, K. (Eds.), International Perspectives on Learning and Teaching Mathematics. National Center for Mathematics Education, 145-159. National Center for Mathematics Education de la Univesidad de Gothenburg: Suecia

Blomhøj, M. y Højgaard Jensen, T. (2003). Developing mathematical modelling competence: Conceptual clarification and educational planning. Teaching mathematics and its applications, 22 (3), 123-139.

Cruz, M.F., Scaglia, S. & Esteley, C. (2018). La construcción de definiciones geométricas. En Di Franco, N. (Ed.), VII Reunión Pampeana de Educación Matemática, 42- 47. Universidad Nacional de la Pampa: Santa Rosa

Esteley, C. (2014). Desarrollo profesional en escenarios de modelización matemática: Voces y Sentidos. Córdoba: Filosofía y Humanidades/UNC.

González Fernández, A. (2016) Implicaciones de las tecnologías digitales en los procesos de enseñanza- aprendizaje de las matemáticas. España: Universidad de Extremadura.

Guillén, G. (2000). Sobre el aprendizaje de conceptos geométricos relativos a los sólidos. Ideas erróneas. Enseñanza de las Ciencias, 18 (1), 35-53.

Gutiérrez, A. (2005) Aspectos metodológicos de la investigación sobre aprendizaje de la demostración mediante exploraciones con software de Geometría dinámica. Noveno Simposio de la Sociedad Española de Educación Matemática. España: Universidad de Córdoba.

Healy L. (2000). Identifying and explaining geometrical relationship: interactions with robust and soft Cabri constructions En Nakahara, T. y Koyama,M. (Eds.), Proceedings of the 24th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education. (1) 103-117. Hiroshima University: Hiroshima.

Itzcovich, H. (2007) La matemática escolar. Buenos Aires: Aique.

Mántica, A., Dal Maso, M. y Götte, M. (2005). Un Camino para la Comprensión del Concepto de Área. Yupana, 1(2), 25-40.

McMillan, J y Schumacher, S. (2005). Investigación educativa. Una introducción conceptual. Madrid: Addison Wesley Longman.

Ministerio de Educación Ciencia y Tecnología. (2011). NAP. Tercer ciclo. Recuperado el 12 de marzo de 2019, de https://www.educ.ar/recursos/110570/nap-secundaria-matematica

Ministerio de Educación. (2010). Proyecto de mejora para la formación inicial de profesores para el nivel secundario. Áreas: Biología, Física, Matemática y Química. Recuperado el 12 de marzo de 2019, de https://cedoc.infd.edu.ar/upload/Matematica.pdf

Quaranta M., Wolman S. (2003) Discusiones en las clases de matemática. Qué, para qué y cómo se discute. En Panizza, M. (comp.) Enseñar matemática en el Nivel Inicial y el primer ciclo de la EGB. Análisis y propuestas. 189-243. Buenos Aires: Paidós.

Sadovsky, P (2005). La teoría de las situaciones didácticas. En Alagia, A.; Bressan, A. y Sadovsky, P. Reflexiones teóricas para la Educación Matemática. 13-68. Libros del Zorzal: Buenos Aires.

Schoenfeld, A. (2001). La enseñanza del pensamiento matemático y la resolución de problemas. En Resnik, L. y Klopfer, L. (comp) Currículo y cognición. 141-170. Aique: Buenos Aires.

Stake, R. (2007). Investigación con estudio de casos. Madrid: Morata.

Villarreal, M. (2012). Tecnologías y educación matemática: necesidad de nuevos abordajes para la enseñanza. Virtualidad, Educación y Ciencia, 3 (5), 73-94.

Villarreal, M., Esteley, C. y Smith, S. (2018). Pre-service teachers' experiences within modelling scenarios enriched by digital technologies. ZDM, 50, 327–341.

Primer autor: Romiti, Giuliana María
Profesora en matemática egresada de la Facultad de Humanidades y ciencias de la Universidad Nacional del Litoral. Actualmente realiza una adscripción en investigación en la misma institución. Ha participado como expositora en congresos y jornadas nacionales sobre enseñanza de la matemática.

Segundo autor: Cruz, María Florencia
Profesora en matemática en la Facultad de Humanidades y Ciencias de la Universidad Nacional del Litoral (UNL). Especialista docente de nivel superior en enseñanza de la matemática en la educación secundaria. Realiza su tesis de doctorado en Ciencias de la Educación gozando una beca doctoral otorgada por la UNL en temas referidos a la enseñanza de la matemática.

Tercer autor: Mantica, Ana María
Profesora en la Facultad de Humanidades y Ciencias de la Universidad Nacional del Litoral, en el profesorado en Matemática. Magister en Didácticas Específicas, mención en matemática. Docente investigadora en temas referidos a la enseñanza de la matemática en distintos niveles del sistema educativo.