UNIÓN
REVISTA IBEROAMERICANA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA

Diciembre de 2012, Número 32, páginas 105-122
ISSN: 1815-0640

Algunas consideraciones teóricas polémicas sobre los problemas matemáticos

Manuel Capote Castillo

Resumen

En este trabajo se analizan los puntos de vista del autor en cuanto al concepto de problema matemático y su estructura, así como en qué consiste una situación problemática. También se establece qué tipo de configuración psicológica es la solución de un problema y qué se entiende por resolver un problema.

Abstract

In this paper the author's points of view are analyzed about the mathematic problem concept and its structure, as well as what a problematic situation is. Likewise it establishes the kind of psychological configuration the solution of one problem is and what solving problem is.

Resumo

Neste trabalho o ponto de vista do autor é analisado sobre o conceito de problema matemático e a sua estrutura, assim como em que consiste uma situação problemática. Igualmente estabelece que tipo de configuração psicológica é a solução dum problema, e o que entende-se por a resolução dum problema.

1. Introducción

Hoy en día es aceptado de forma casi unánime, que el trabajo con los problemas, en particular el proceso de solución, es una de las principales tareas de la enseñanza de la Matemática. Sin embargo, esta concepción no siempre fue históricamente admitida. No fue hasta el año 1945 que aparece un importante libro sobre la resolución de problemas: "How to solve it?" escrito por George Polya, el destacado matemático húngaro. En esta obra, por primera vez, se ilustra un camino didáctico hacia la enseñanza de la resolución de problemas, que este autor había estado gestando un cuarto de siglo antes. En ella Polya redescubre, desarrolla la **heurística** y hace referencia a un grupo de estrategias que deben constituir una herramienta fundamental en la enseñanza de la resolución de problemas.

A pesar de la relevancia del texto mencionado y del vacío que el mismo llenó, sus ideas no comenzaron a tener una influencia generalizada hasta la década de los 80 del siglo XX. En parte, esto se debió como señalan Schoenfeld (1985) y Campistrous (1999) porque estas estrategias no son fáciles de enseñar y requieren para ello de una preparación especializada en el campo de la Matemática que la mayor parte de los maestros no poseen.

¿Qué necesidad histórica y social provocó la inclusión de la solución de problemas en el lugar que merecía en los currículos de la educación matemática en diferentes países del orbe?

Precisamente, como consecuencia de la Revolución Científica Técnica (RCT) surgida a mediados del siglo XX, se produjo y continuará ocurriendo en el mundo, una acumulación acelerada de la información y la introducción en ascenso de la computación. Lo anterior ha provocado que la función de la escuela haya tenido que cambiar a una fase cualitativamente superior: **enseñar a aprender,** y que en estos momentos se ha transformado en: **aprender a aprender**, para que el futuro ciudadano pueda enfrentar los retos que la contemporaneidad le depara. A partir de lo planteado hasta aquí, se puede inferir que existe un acuerdo general en aceptar la idea de que el objetivo básico de la educación matemática debería ser que los alumnos aprendan Matemática a partir de la resolución de problemas.

¿Cómo se ha interpretado este propósito a lo largo de los años? Según Stanic y Kilpatrick (1989), la solución de problemas ha tenido múltiples y a veces contradictorios significados a través de los años. Este término ha compartido diferentes puntos de vista de: qué es la educación, qué es la instrucción, qué es la Matemática y por qué se debe enseñar Matemática en general y la solución de problemas en particular.

Primer significado: resolver problemas como contexto.

Desde esta concepción, los problemas son utilizados como vehículos al servicio de otros objetivos curriculares, jugando cinco roles principales:

- *Como una justificación para enseñar matemática*: son incluidos en la enseñanza algunos problemas relacionados con la vida cotidiana para mostrar el valor de la matemática.
- Como medio p*ara proveer especial motivación a ciertos temas*: los problemas son frecuentemente usados para introducir temas, con la intención implícita o explícita de que favorecerán el aprendizaje de un determinado contenido.
- *Como actividad recreativa*: justifican que la Matemática puede ser "divertida" y que hay usos entretenidos para los conocimientos matemáticos.
- *Como medio para desarrollar nuevas habilidades*: se cree que, cuidadosamente secuenciados y estructurados, los problemas pueden contribuir a la formación y desarrollo de nuevas habilidades en los aprendices.
- *Como práctica*: Se enseña determinado procedimiento o técnica a los estudiantes y luego se presentan problemas donde sea preciso aplicarlo de manera reiterada. Se ha comprobado que la mayoría de las tareas matemáticas en la escuela caen en esta categoría.

Sin embargo, en cualquiera de estas cinco formas, la resolución de problemas no es vista como una meta u objeto de enseñanza en sí misma, sino como una vía para el logro de otros objetivos: resolver las tareas que han sido propuestas.

Segundo significado: resolver problemas como habilidad.

La mayoría de los desarrollos curriculares que ha habido bajo el término resolución de problemas a partir de la década de los 80 son de este tipo. La resolución de problemas en este caso es vista como una de tantas habilidades a ser enseñadas en el currículo, que en cierta medida se aprende por imitación. Primero, se le plantean a los escolares **problemas rutinarios** (habilidad que a su vez, es adquirida a partir del aprendizaje de conceptos y habilidades matemáticas básicas) y después serán capaces de resolver **problemas no rutinarios** como una habilidad de nivel superior.

Es importante señalar, las concepciones pedagógicas y epistemológicas que subyacen en esta segunda interpretación son precisamente las mismas que las señaladas en el significado anterior.

Tercer significado: resolver problemas es un arte: “hacer matemática".

Consiste en considerar que el trabajo de los matemáticos es resolver problemas y que la Matemática realmente consiste en problemas y sus soluciones.

Aunque la posición oficial de las autoridades educaciones de la mayoría de los países se aproximan mucho a este último significado, todavía en los salones de clases no se materializa en toda sus potencialidades.

A partir de la década de los 80 del siglo XX se han publicado en el mundo muchos libros y artículos relacionados con la solución de problemas; sin embargo, aún se aprecia en ellos la no existencia de consenso en aspectos tales como qué es un problema, cuál es su estructura, qué se diferencia un problema de una situación problemática. Por otra parte, tampoco hay acuerdo en cuanto a lo que se comprendería por el proceso de solución de un problema y mucho menos si este es una: actividad de estudio, habilidad, capacidad o competencia.

Precisamente, el propósito de este artículo es presentar y analizar las posiciones teóricas del autor sobre estas cuestiones polémicas que han existido durante años en la didáctica de la solución de problemas. Es por ello, no se incluyen experiencias de trabajo con estudiantes.

2. Desarrollo

2.1 Concepto de problema. Su estructura. Situación problemática

La palabra **problema** procede del griego y significa: tarea, ejercicio o pregunta teórica o práctica que exige solución. Sin embargo, este vocablo tiene en la actualidad múltiples acepciones, en dependencia de la esfera del conocimiento en que se trate y de la posición teórica e ideológica que se asuma.

Según Majmutov (1983) *“Toda actividad del hombre se relaciona directamente con la solución consecutiva de problemas*” (p. 67). Así es como regularmente se emplea la palabra “problema” para designar **cuestiones no resueltas.**

Desde el punto de vista científico conviene precisar las distintas connotaciones del referido concepto:

- como <u>categoría de la lógica dialéctica</u> consiste en que éste refleja la existencia de una **contradicción dialéctica** en el **objeto** a conocer. ”*El problema determina la actividad investigativa de búsqueda del hombre, encaminada al descubrimiento de un conocimiento nuevo o a la aplicación de uno conocido a una situación nueva. El problema es una forma subjetiva de expresar la necesidad de desarrollar el conocimiento científico*” (Majmutov, 1983, p. 58)

- como categoría psicológica refleja las **contradicciones** dentro del **proceso del conocimiento** del **objeto** por el **sujeto**. De acuerdo con Rubinstein (1966) es la causa primaria del pensamiento*: "El proceso del pensar arranca de una situación problémica"* (p. 109). Establece una diferencia entre la situación problémica y el propio problema; la primera es la que presenta elementos desconocidos, poco claros o explícitos, mientras que en el segundo el sujeto tiene conciencia de lo buscado. Por su parte el psicólogo cubano A. Labarrere (1987) plantea que en todo problema interviene "*la actividad psíquica del sujeto*" (p. 6). Más adelante agrega que: *"todo genuino problema se experimenta o percibe por el sujeto que lo resuelve como carencia de medios para llegar a un fin (...) hace surgir en aquel que lo resuelve determinadas necesidades y motivos que lo impulsan a acometer la solución* (...) *un problema es intransferible"* (p. 6-7). En otro texto más cercano en el tiempo señala: *"...es determinada situación en la cual existen, nexos, relaciones, cualidades de entre los objetos que no son accesibles directa e indirectamente a la persona. Un problema es toda situación en la cual hay algo oculto para el **sujeto**, que éste se esfuerza por hallar"* (Labarrere, 1996, p. 6).
- como concepto matemático, diferentes autores han dado sus criterios. Por ejemplo:

George Polya (1976), uno de los matemáticos que han sido fundadores de la didáctica de la resolución de problemas, al respecto señala: *"un problema significa buscar conscientemente con alguna acción apropiada para lograr una meta claramente concebida pero no inmediata de alcanzar"* (p. 11).

Lev Fridman (1995) indica que un problema: "*consiste en alguna exigencia, requerimiento o pregunta para la cual se necesita encontrar la respuesta, apoyándose en y tomando en cuenta las condiciones señaladas en el problema"* (p. 13)

F. Lester (1985) define problema como *"una situación en donde a un individuo o grupo se le exige realizar una tarea para la cual no existe un algoritmo fácil y accesible que determine completamente el método de solución"* (p. 287) Al mismo tiempo asume que debe existir el "deseo" por parte del individuo o el grupo de realizar la tarea.

Esta definición es consistente con otras dadas por: Brownell (1942); Duncker (1945); Hendereson y Pringy (1953); Kinsella (1970); Bourre, Ekstrand y Dominowski (1971); Newell y Simon (1972); Resnick y Glaser (1976), entre otros.

Para A. H. Shöenfeld (1993) problemas son *"aquellas cosas que son verdaderamente problémicas para las personas que trabajan en ellas, se asume que estas personas no tienen a mano un procedimiento de rutina para la solución"* (p. 121).

En Cuba también han existido un grupo de pedagogos, matemáticos e investigadores que le han dedicado tiempo al estudio de los problemas matemáticos. A continuación se citarán a algunos de ellos, que por su relevancia han tenido mayor divulgación:

El pedagogo pinareño J. Elpidio Pérez Somozza (1930) empleó parte de su labor docente a escribir sobre la metodología de la Matemática en la escuela primaria. En su obra más significativa en este sentido expresó: *"cualquier dificultad* *que se le presente al niño, capaz de provocar en él un esfuerzo de su inteligencia con el fin de darle solución, es un problema"* (p. 28). A continuación puntualiza: *"Cuando esas dificultades se refieren a hechos cuantitativos que están dentro del círculo de la experiencia, los intereses por medio de números, tendremos un problema aritmético escolar*" (p. 28).

Los destacados pedagogos, matemáticos e historiadores: Luis J. Davidson y Raimundo Reguera (1987), han señalado que: *"un problema representa una verdadera situación nueva"* (p. 1).

En la bibliografía de A. F. Labarrere (1988) destinada a esta temática se puede encontrar la siguiente definición: *"Un problema es toda situación en la cual, dada determinadas condiciones (más o menos precisa), se plantea determinada exigencia (a veces más de una). Esta exigencia no puede ser cumplida o realizada directamente con la aplicación inmediata de procedimientos y conocimientos asimilados, sino que se requiere la combinación, la transformación de estos en el curso de la actividad que se denomina solución*. *Todo verdadero problema se caracteriza porque exige que aquel que lo resuelve, el alumno en nuestro caso, comprometa de una forma intensa su actividad cognoscitiva..."* (p. 1-2)

En los últimos años, los matemáticos e investigadores Luis A. Campistrous y Celia Rizo (1996) han dirigido el grupo "Aprende a resolver problemas aritméticos" del Proyecto TEDI (Técnicas de Estimulación del Desarrollo Intelectual) auspiciado por el Instituto Central de Ciencias Pedagógicas de Cuba (ICCP). Estos pedagogos han planteado que: *"Se denomina problema a toda situación en la que hay un planteamiento inicial y una exigencia que obliga a transformarlo. La vía para pasar de la situación o planteamiento inicial a la nueva situación exigida tiene que ser desconocida y la persona debe querer hacer la transformación"* (p. IX-X).

M. J. Llivina (1999) propuso una definición que tiene como concepto superior el de ejercicio matemático. Así indica: "*Un ejercicio es un problema si y solo si la vía de solución es desconocida por la persona"* (p. 48)

Las anteriores conceptualizaciones no se contradicen, sino más bien se complementan.

A partir de la sistematización de las definiciones anteriores y tomando como base fundamental la ofrecida por Campistrous-Rizo e incluyendo una cuarta condición, se asume aquí la siguiente conceptualización:

Un **problema,** como concepto **didáctico - matemático** se caracteriza por las siguientes condiciones:

1. Ser un planteamiento donde aparece una **exigencia** que obliga a partir de una **situación inicial** buscar una vía de solución para obtener una **situación final.**
2. La **vía** para pasar de la **situación inicial** a la **situación final** es desconocida para el **resolutor.**
3. La persona debe **querer** hacer la transformación.
4. Ajuste a la **realidad** de los elementos estructurales y/o **relaciones lógicas** entre los mismos.

La primera condición la cumple todo ejercicio matemático, mientras que la segunda nos indica que no existe un **algoritmo** predeterminado que permita darle solución. Desde el punto de vista didáctico se aprecia el carácter individualizado de su tratamiento: lo que para un alumno es un problema para otro no lo es. La tercera condición refleja el aspecto **afectivo-motivacional** de esta tarea. Por otra parte, la cuarta nos señala que el problema debe ajustarse a la realidad que describe; por ejemplo, si en el texto se hace referencia al peso de diversas personas las cifras que allí aparecen deben concordar con esta situación concreta. Esta última condición es muy importante para preparar a los estudiantes de manera que ellos sean capaces de formular problemas.

La posición que se ha asumido aquí de considerar que todo problema es un ejercicio que cumple determinadas condiciones adicionales, no es compartida por algunos autores; por ejemplo, Kantowski (1981) señala:

"Un problema es una situación que difiere de un ejercicio en que en un problema el resolutor no tiene un procedimiento o un algoritmo con el cual ciertamente conduciría a la solución" (p. 113)

La justificación para haber aceptado este punto de vista de considerar un ejercicio matemático como un concepto superior al de problema, consiste en que la frontera entre ambos conceptos es movediza; es decir, que es relativa la ubicación de una determinada situación en uno u otro concepto.

Por ejemplo, la siguiente tarea: "**El dividendo es 6.428 y el divisor es 2. ¿Cuál es el cociente?"** En la mayoría de los casos se acostumbra denominar esta situación como un **ejercicio** (con texto matemático); sin embargo, la primera vez que se le propone a los escolares ellos no conocen un procedimiento o algoritmo para hallar este cociente y por tanto, constituye en esta oportunidad un verdadero problema, si ellos sienten la necesidad de efectuar el cálculo correspondiente.

Por otra parte, en muchos libros de texto la siguiente situación es considerada un **problema oral**: "**Teresa tiene 13 años y su hermana el doble; al adicionar las edades de ambas se tiene la edad de su tío. ¿Cuántos años tiene su tío?"**

Ahora bien, si después de proponer este tipo de **problema**, se indican situaciones similares a esta de forma reiterada, entonces este deja de ser un problema pues se convierte en una rutina, o sea en un ejercicio.

De lo anterior se infiere que para determinar si un ejercicio es un problema hay que contextualizar el momento en que este se propone, tener en cuenta el propio contenido matemático que se involucra, el tipo de alumno que debe resolverlo, entre otros factores. Retornando a la definición establecida, la primera condición se pudiera representar así:

Figura 1

En este gráfico se aprecia como la **exigencia** obliga a partir de una **situación inicial** (cierta información que se brinda) buscar una **vía de solución** (desconocida por el resolutor: quien resuelve el problema) para poder llegar a la **situación final** (la respuesta). Pero para que este proceso sea efectivo, es importante que el individuo (en nuestro caso el escolar) desee resolverlo.

Es bueno aclarar que se está asumiendo aquí el concepto de problema en su acepción más amplia. Es por ello que se van a considerar como **elementos estructurales** los que aparecen en la caracterización: **exigencia, situación inicial (SI)** y **situación final (SF).**

En todo problema siempre hay una **exigencia** (al igual que en todo ejercicio matemático), que viene dada por una pregunta o una orden que es la que debe ser contestada por el resolutor del problema.

Todo problema posee **situaciones iniciales** (SI) que son las informaciones o los datos parciales o totales que se ofrecen para que el problema pueda ser resuelto. Hay que tener en cuenta que algunas veces se brindan datos adicionales, que no son necesarios para resolverlo y en otros, no se ofrece toda la información requerida.

Por otra parte, la **situación final** (SF) es la respuesta o la solución del ejercicio que puede o no ser conocida por el resolutor. En muchos casos debe ser encontrada aplicando una adecuada vía de solución, en otros se conoce la misma y la función del resolutor es descubrir dicha vía que debe conducir a encontrar esta solución.

Ejemplo 1*:*

El papá de Joaquín debe hacer una instalación eléctrica en su casa, para lo cual necesita aproximadamente 2 m. de cable. Él dispone de pedazos de cables: tres de 75 cm. cada uno, uno con 1 m. 9 cm. y otro con 55 cm. ¿Cuáles de ellos debe empatar para desperdiciar la menor cantidad posible de material?

En este caso la **situación inicial** está conformada por todos los datos o informaciones que se ofrecen y que deben ser tenidas en cuenta para resolver el problema: necesita **2 m de cable** aproximadamente; dispone de pedazos: **tres de 75 cm. cada uno, uno con 1 m. 9 cm. y uno con 55 cm.**

La **exigencia** viene dada por la pregunta que hay que contestar: **¿Cuáles de ellos debe empatar para desperdiciar la menor cantidad posible de material?**

En cuanto a la **situación final** no aparece explícitamente, o sea es la respuesta que el resolutor debe encontrar para contestar el interrogante formulado.

Ejemplo 2*:*

Fundamentar que: En todo paralelogramo se cumple que sus ángulos opuestos son iguales.

La **situación inicial** consiste en la información que se ofrece y con la cual se debe trabajar: **cualquier paralelogramo.**

La **exigencia** viene dada por la orden que se da: **Fundamentar.**

La **situación final** aquí si se ofrece explícitamente: **ángulos opuestos iguales**.

En esta oportunidad la misión del resolutor consiste en buscar las propiedades, relaciones y conceptos que le permita realizar la fundamentación solicitada.

Resulta de interés el estudio que hace Borasi, R. (1986) sobre los elementos estructurales de un problema:

(a) **La formulación del problema:** la definición explícita de la tarea que debe ser ejecutada.

(b) **El contexto del problema:** la situación en la cual el problema está enmarcado.

(c) **El conjunto de solución(es)** que pudieran ser consideradas aceptables para el problema dado.

(d) **Los métodos** que pudieran ser empleados para alcanzar la solución.

Estas cuestiones más bien son elementos que se deben tener en cuenta al resolver un problema por la trascendencia que tienen en este proceso, pero no son los elementos estructurales internos de un propio problema.

Las anteriores posiciones teóricas tienen un enfoque eminentemente didáctico; sin embargo, existen situaciones de la vida real y de la propia Matemática, que no se ajustan a la caracterización dada sobre el concepto de problema que se ha asumido aquí.

Si se tiene presente que la principal misión de la escuela, como institución que debe cumplir un encargo social, es preparar al sujeto para la vida, entonces, además de los problemas con las características que se han terminado de exponer, se deben proponer a los escolares situaciones que se acerquen mucho más a la práctica social y también a los métodos de la propia Matemática, como ciencia.

A estas tareas escolares se les pudieran denominar **situaciones problemáticas,** que se caracterizarían por:

Ser un planteamiento donde aparece una **exigencia** que obliga a partir de una **situación inicial** buscar una vía de solución para obtener una **situación final**, pero tanto la exigencia como la situación inicial son incompletas, imprecisas o ambiguas, mientras que la situación final, en general, es aproximada o no única.

Como consecuencia de este comportamiento, el resolutor para resolverla debe proceder a:

(a) Explorar el contexto para adquirir información adicional que le permitiría reformular el planteamiento inicial para resolverlo.

(b) Aplicar diversos métodos y estrategias para obtener la solución que, por supuesto, dependerá de la reformulación realizada.

(c) En algunos casos, es conveniente confrontar la solución obtenida con el planteamiento original para comprobar la pertinencia de esta.

Durante este proceso, el resolutor debería ser capaz de convertir la situación problemática en un problema. Esto lo lograría al efectuar el primer paso, o sea, al explorar el contexto, adquirir la información necesaria y reformular el planteamiento original.

Como se ha señalado, estas situaciones pueden ser tomadas de la vida real o de la ciencia Matemática. Cada una de ellas tiene sus peculiaridades que la distinguen una de la otra.

Un ejemplo de la primera situación pudiera ser el que sigue: "*La familia Fernández quiere colocar losas en el piso de la sala de su casa. Para ello necesitan estimar la cantidad de losas que deben adquirir*"

Al explorar el contexto el resolutor buscaría la información adicional requerida para poder formular el problema asociado correspondiente; en esta oportunidad deberá determinar, en primer lugar, el tipo de losa que esta familia desea colocar, los precios que estas tienen y las posibilidades económicas para comprarlas; en segundo lugar, valorar la posibilidad real de determinar el área de la superficie de la sala y en tercer lugar puntualizar si lo que quieren saber es solo la cantidad de losas o también el importe de la compra.

Si se logra recopilar esta información entonces estará en condiciones favorables para la formulación de un problema, que pudiera ser similar al siguiente: "*La familia Fernández quiere colocar losas en el piso de la sala de su casa que tiene una superficie que mide 12 m^2. Cada losa tiene forma cuadrada con 150 cm^2 de área. ¿Cuántas losas como estas ellos necesitan para cubrir el suelo de esta habitación? ¿Cuánto dinero tendrán que invertir en esta comprar si se sabe que cada losa cuesta $ 5.65?*"

Ahora resulta relativamente fácil resolver este problema, ya que si el escolar domina los procesos o algoritmos de: conversión de unidades de superficie, la división y la multiplicación entre expresiones decimales, no tendría dificultades para resolverlo.

Desde el punto de vista didáctico, resulta oportuno que este tipo de situaciones sean tomadas, la mayoría de las veces, del propio entorno de los escolares y que estos participen de forma protagónica en la búsqueda de toda la información requerida en el propio escenario de la situación problemática. Esto contribuiría notablemente a que ellos aprecien el vínculo entre los conocimientos escolares que se imparten en la escuela y su verdadera aplicación en la práctica cotidiana. También durante todo este proceso los escolares profundizarán en la propia búsqueda de métodos, estrategias y recursos para obtener las soluciones, así como la propia evaluación de las seleccionadas, de manera que se ajusten a cada planteamiento. Este modo de proceder, además incentivaría la motivación por el aprendizaje de la Matemática y de los propios contenidos de esta disciplina que pudieran estar involucrados en cada una de las situaciones que se les propongan. Tampoco se puede ignorar el estrecho nexo que existe entre la solución y la formulación de problemas.

Sea, ahora la situación problemática tomada de la ciencia Matemática: "*Se sabe que el <u>producto</u> de dos números naturales consecutivos es siempre divisible por dos. ¿Se mantendrá esta misma propiedad si en el teorema anterior se sustituye el <u>producto</u> por una <u>suma</u>?*"

Aquí el resolutor tendría que explorar el contexto y buscar la información complementaria para poder hacer alguna conjetura y después probarla o refutarla. En esta ocasión se preguntaría ¿será la suma de dos números naturales consecutivos siempre divisible por dos? Para afirmar o negar tal pregunta, deberá ensayar con algunos casos particulares, por ejemplo: 2 + 3 = 5 (NO); 3 + 4 = 7 (NO), 4 + 5 = 9 (NO); … A partir de este proceso inductivo el escolar descubría que todas las sumas son números impares, luego ya puede decir que la afirmación es negativa, ya que NO siempre es divisible por dos. Le quedaría la duda si nunca se cumple la propiedad conjeturada. Ahora seguiría un proceso deductivo al trabajar con variables. Se tendría que (n) + (n + 1) = 2n + 1 que siempre es un número impar.

De esta forma ha demostrado el siguiente teorema que se puede considerar como un problema. "*La suma de dos números naturales consecutivos es siempre un número impar*", o su equivalente: "*La suma de dos números naturales consecutivos nunca es divisible por dos*".

Es indiscutible que el planteo de tales situaciones contribuye a: desarrollar el pensamiento de los escolares, acercarlo a los propios métodos y procedimientos de la Matemática como ciencia, en particular con los métodos inductivos y deductivos, colocar al escolar en el rol de un "investigador" al tener que hacer conjeturas, hipótesis, suposiciones, así como a confirmar o refutar determinada proposición. Todo ello redundará además, a perfeccionar el dominio del propio lenguaje de la Matemática, sus conceptos, definiciones, teoremas, propiedades, etc. Si este tipo de ejercicios es manejado con cautela e inteligencia por el propio docente, deberá motivar a los propios estudiantes no tan solo por el estudio de esta disciplina, si no también por los propios métodos matemáticos para la obtención de los conocimientos en esta ciencia.

2.2 La resolución de problemas: ¿actividad de estudio, habilidad, capacidad o competencia?

El concepto **actividad** como **categoría psicológica**, según González V. et al (1995) son aquellos procesos mediante los cuales el individuo respondiendo a sus **necesidades** se relaciona con la realidad, adoptando determinada actitud ante ella. La premisa básica de la actividad es la **necesidad**, que refleja el estado de carencia del individuo activando al sujeto a su satisfacción; esta condición interna del sujeto, cuando se encuentra con el objeto que es potencialmente capaz de satisfacerla, se convierte en algo capaz de orientar y regular la actividad en cuestión; de esta manera ha encontrado su **motivo**, que es el reflejo psíquico del objeto que satisface la necesidad.

Ahora bien, toda actividad se realiza mediante **acciones** que son procesos subordinados a **objetivos** o **fines conscientes** y, en **operaciones** que son formas mediante las cuales la acción transcurre en dependencia de las **condiciones** en que se debe alcanzar el objetivo.

En particular, la **actividad de estudio** debe ser la actividad rectora en la edad escolar temprana. Según Davídov, V. (1988) los **conocimientos teóricos** constituyen simultáneamente su **contenido** y su **necesidad.** Mediante el planteamiento de diversas tareas el escolar encuentra los verdaderos motivos.

Por otra parte, se acepta que una **habilidad** es una forma de asimilación de la actividad de la personalidad donde el sujeto demuestra que domina determinado **sistema de acciones** (psíquicas o prácticas) que le permite una regulación **racional** de la actividad con la ayuda de conocimientos y hábitos que posee. Mientras que el **hábito** es otra forma de asimilación de la actividad, pero donde el sujeto debe dominar un **sistema de operaciones automatizadas** para la realización de diversas acciones.

Los hábitos y las habilidades constituyen formas diferentes en que se expresa la asimilación de la actividad en el plano ejecutor.

Otro concepto psicológico muy relacionado con el de habilidades y hábitos, y también polémico en cuanto a su conceptualización, es el de **capacidades** que en forma breve se pudiera considerar como las formaciones psicológicas de la personalidad que son condiciones para realizar con éxito determinados tipos de actividad.

Las **capacidades** revelan la **dinámica** (rapidez, facilidad, profundidad, precisión, originalidad, constancia y calidad) con que se adquieren, asimilan y aplican un conjunto de conocimientos, habilidades y hábitos. Se pudiera decir que las capacidades nos indican **cómo** un individuo realiza cierta actividad.

Hoy en día se está empleado el término de **competencias**, como un escalón superior al de capacidades. Para los autores que defienden este término, lo diferencian de las capacidades, en que plantean que un sujeto tiene **capacidades** cuando posee **potencialidades** para el desempeño exitoso de cierta tarea, mientras que es **competente** cuando ha desarrollado determinadas capacidades, pero las desempeña de **manera eficiente**, movilizando todos sus recursos para ello.

Es decir, que las capacidades y las competencias expresan de forma diferente la dialéctica entre lo potencial y lo real: la **capacidad** es **potencialidad** que puede llegar o no a convertirse en realidad, o sea a materializarse, mientras que la **competencia** es **realidad actualizada**, y se manifiesta en un comportamiento concreto, mediante la acción.

Luego, desde el punto de vista didáctico se debe trabajar para que **resolver** problemas sea una verdadera **actividad de estudio** por el fuerte **componente motivacional** que lleva implícito este concepto psicológico. Sin embargo, en el **plano ejecutor**, la **resolución**, por la propia complejidad y diversidad de las acciones que se deben instrumentar, se puede considerar en un **estadio inicial** como **habilidad;** posteriormente mediante un **proceso integrador** se convertirían en **capacidad** y, finalmente se debe aspirar a que se transforme en una **competencia** mediante un **trabajo sistemático e intencional** por parte de los docentes.

Retomando el concepto de competencia y por ser la máxima aspiración a la que debemos alcanzar en el plano pedagógico, desde el punto de vista operativo resulta funcional asumir la siguiente definición:

Las **competencias** son **configuraciones psicológicas** predominantemente cognitivas, conformadas funcionalmente por tres dimensiones: una **procesal**, otra **operacional o instrumental** y otra **motivacional**, que garantizan el **éxito y la eficiencia** en el **desempeño** de una determinada **actividad.**

De acuerdo con Castellanos, D. y Córdova, M. D. (1995) y Córdova, M. D. (1997) estas dimensiones se descomponen en las siguiente sub-dimensiones e indicadores:

A. Dimensión procesal: comprende los procesos psíquicos que intervienen en la actuación del sujeto; sensopercepción, memoria, imaginación y pensamiento. Se descompone en dos sub-dimensiones:

A.1 Calidad procesal: expresa la caracterización cualitativa de las acciones intelectuales y de los procesos sobre cuya base estos transcurren. Los indicadores (Córdova, M. D. 1997) que permiten medir esta vienen dados por:

♦ **Independencia**: Es la posibilidad de cada sujeto de seguir una línea propia de pensamiento y modos de procesamientos autónomos. Está relacionada con los diferentes niveles de ayuda y con el tipo de orientación que cada sujeto necesita para ejecutar las acciones que le garantizan el éxito de la actividad.

♦ **Originalidad**: Se manifiesta por la cantidad de ideas y opiniones inusuales, no comunes, que el sujeto puede ofrecer y generar ante un hecho, situación o fenómeno.

♦ **Fluidez**: Se expresa en el número de ideas o producciones que el sujeto pueda generar o utilizar en un contexto determinado.

♦ **Flexibilidad**: Se refiere a la variedad de recursos que el sujeto es capaz de emplear en las situaciones que enfrente, en su posibilidad de generar diferentes modos de contemplar un fenómeno; en la posibilidad de modificar el rumbo de la actividad intelectual cuando la situación lo requiera.

♦ **Elaboración**: Se evidencia en la posibilidad para producir gran cantidad de riqueza de detalles en el análisis de una idea o de una situación dada, de llevar esta hasta las últimas consecuencias. De esta forma logra desarrollar la actividad, clarificarla, perfeccionarla, descubriendo en ese proceso deficiencias que sirven de base para re-elaboraciones.

♦ **Logicidad**: Se manifiesta en la posibilidad de seguir un orden lógico, sin saltos arbitrarios, en la dinámica del procesamiento de determinada información.

♦ **Profundidad**: Se refiere a las posibilidades de penetrar en la esencia de los hechos, los fenómenos y las situaciones, buscando generalizaciones, leyes y regularidades; se tiende a buscar lo relevante haciendo abstracción de lo no significativo.

♦ **Productividad:** Se comprende como el equilibrio relativo entre la velocidad del procesamiento de la información para ejecutar la actividad, la relativa independencia con que se realiza y la calidad del resultado obtenido, o sea, es la optimización de recursos para la ejecución de la actividad prevista.

A.2 Metacognición: Cualquier tipo de manifestación de los conocimientos del sujeto acerca de sus propios conocimientos relativos a determinada actividad; así como el control de su ejecución, a través del autoconocimiento, autocontrol, autoevaluación y la autovaloración. Se utilizan como indicadores los que siguen:

♦ **Metaconocimiento:** Consiste en el conocimiento y la conciencia que el sujeto tiene de sus propios conocimientos para poder ejecutar de manera exitosa una determinada actividad. Esto incluye el autoconocimiento de las potencialidades y debilidades en el dominio de estrategias, técnicas, etc. para ejecutar las acciones u operaciones. En los estilos propios de trabajo, sus preferencias y sus posibilidades intelectuales. El grado de conciencia de pre-requisitos, condiciones, exigencias y obstáculos involucrados acerca de la tarea que realiza.

♦ **Control ejecutivo**: Está dado por el dominio y uso efectivo de la planificación, supervisión, corrección, comprobación, evaluación y los procesos que caracterizan el control y autorregulación de la actividad que se realiza el sujeto.

B. Dimensión operacional o instrumental: Concierne al desarrollo y las particularidades de las bases de conocimientos y del sistema de acciones generales y particulares con que los sujetos deben funcionar y que deben desarrollar. Se incluyen dos sub-dimensiones:

B.1 Bases de conocimientos: Es la manifestación de los conocimientos del sujeto con relación al entorno en el cual realiza su actuación. Se puede medir mediante los siguientes indicadores:

♦ **Volumen:** Entendido como la riqueza de conocimientos sobre una o más áreas, fundamentalmente el nivel de conocimientos generales que posee el sujeto.

♦ **Especialización**: Considerado como el nivel de profundidad y solidez de la información que se posea en un área determinada, dado por las características cuantitativas y por la posibilidad de penetrar en nexos multilaterales que captan las leyes y núcleos esenciales de un campo del saber o en una esfera de la actividad.

♦ **Organización**: Comprendida como el nivel de estructuración y sistematización de los conocimientos, para poder relacionar nuevos sistemas de informaciones con los viejos, y el consecuente poder de los mismos para ser utilizados en realizar transferencias y generar nuevas hipótesis e información a partir de la existente.

B.2. Sistema de acciones intelectuales: Está vinculada con cualquier manifestación de las ejecuciones del sujeto en los marcos de su actuación mediante acciones, operaciones, habilidades, hábitos, entre otros. Los indicadores en este caso dependerán de la actividad intelectual que se debe realizar.

C. Dimensión motivacional: Se engloban en ella las particularidades de los procesos motivacionales que *estimulan, sostienen y dan una dirección* a la actividad que llevan a cabo los sujetos y que condicionaran su expresión como auto-perfeccionamiento y auto-educación. Comprende las siguientes sub-dimensiones:

C.1 Motivaciones predominantemente intrínsecas: se sustenta en la implicación e interés personal por el propio contenido de la actividad que realiza el sujeto, y en la satisfacción y los sentimientos de realización personal que experimenta al instrumentarla.

C.2 Sistema de autovaloraciones y expectativas positivas: Un aprendiz competente y eficaz tiene una autoestima positiva sobre la actividad que realiza y esto conlleva a la existencia de expectativas positivas de confianza y seguridad en la obtención de logros y éxitos en este proceso, y por tanto, cuando se presenten obstáculos sabrá esforzarse y perseverar para vencerlos.

2.3 La solución de problemas aritméticos como importante competencia

Aunque no existe consenso entre los didactas de la Matemática en distinguir entre resolver y solucionar un problema; en general, se considera que la **resolución** de un problema consiste en hallar la solución del mismo, o sea, determinar la respuesta correcta; mientras que la **solución** de un problema es el conjunto de operaciones o transformaciones que se han de efectuar para hallar la respuesta del mismo.

Para algunos autores como Fridman, L.M. (1995) y Labarrere, A. (1987) la **esencia** en la **solución** de un problema verbal, desde el punto de vista matemático, consiste en la **construcción** de su **modelo matemático**.

Se entiende como **modelo matemático,** para este tipo de problemas, la construcción de un sustituto de este tipo de ejercicio, donde se reproducen determinadas condiciones o relaciones matemáticas esenciales del problema que permiten realizar en él ciertas transformaciones, como si fueran hechas en el problema original.

La construcción del modelo matemático actúa como el **tránsito** del lenguaje cotidiano o común (texto original del problema), a un lenguaje estrictamente matemático (modelo del problema).

Por tanto, **construir el modelo matemático** coincide con lo que usualmente denominamos **determinar la vía de solución** del problema.

Ahora bien, construir el modelo matemático, desde mi punto de vista, es la parte fundamental en la solución del problema matemático, pero después de realizado éste, es preciso ejecutar lo planteado, es decir, efectuar los cálculos, las operaciones, las diferentes transformaciones, entre otras, que permiten tener acceso a la respuesta. Además, se debe encontrar la respuesta **correcta.**

Es por ello, se debe aspirar tanto a **encontrar la vía de solución** como de **hallar la respuesta correcta.** Por tanto, se aceptará en este artículo los términos **solución** y **resolución** de problemas como sinónimos.

Por otra parte, la **modelación gráfica** puede o no utilizarse en la construcción del modelo matemático; ello dependería de las características, tanto del problema como del resolutor. En caso de emplearse puede ser el único modelo a realizar o puede complementar a otro tipo de modelación abstracta.

A continuación se ejemplificarán con los siguientes problemas lo que se ha terminado de afirmar:

Ejemplo: "*Se distribuyen 475 pollos diariamente durante 5 días. Si se deben distribuir 2700 pollos*. *¿Cuántos pollos faltan por distribuir*?" (tomado del libro de texto de Matemática 3er. Grado, p. 135)

En este problema se describe en el lenguaje común un hecho: la distribución de pollos.

Lo **conocido** en el mismo es: la cantidad de pollos que se distribuyen diariamente: 475; la cantidad de días en que son distribuidos los pollos: 5 y la cantidad total de pollos que se deben distribuir: 2 700.

Lo **desconocido** y que se debe hallar es: la cantidad de pollos que faltan por distribuir.

Pudiera ocurrir que un alumno necesite, para comprender mejor el problema, utilizar la **modelación gráfica**, en particular la **lineal.** En este caso dibujaría lo siguiente:

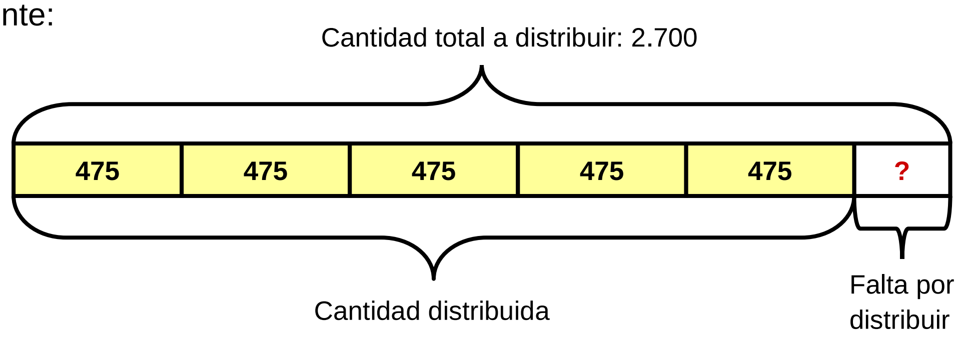

Figura 2

Con el apoyo de este modelo y con la aplicación de los significados prácticos de la multiplicación y la sustracción se deben efectuar las operaciones.

$$2\,700 - (475 \times 5) = ?$$

Precisamente esta expresión es el **modelo matemático** del problema que permite hallar la solución correcta.

Se puede apreciar que el modelo gráfico es un complemento de apoyo para obtener el modelo matemático que permite resolver el problema.

En este caso se ha usado un **modelo aritmético** para resolverlo.

Ejemplo: "*Un cuaderno es cuatro veces tan caro como un lápiz. Este es 75 ¢ más barato que el cuaderno. ¿Cuánto cuesta cada uno*?"

<u>Primera vía</u>: Es posible que a algunos alumnos les resulte difícil comprender este texto, entonces pudieran utilizar la **construcción de un modelo gráfico** para lograrlo:

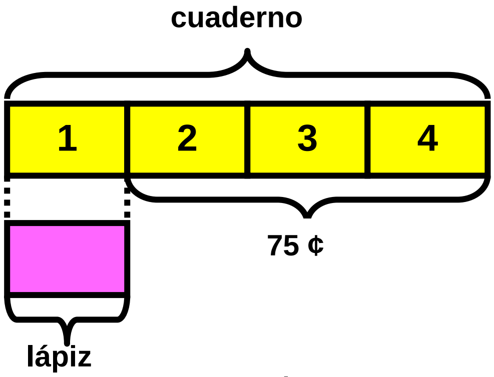

Figura 3

Este modelo lineal con rectángulos permite a los escolares plantearse el **modelo aritmético** para resolver el problema:

(75 : 3) x 4 = a (precio del cuaderno) **a – 75 = b** (precio del lápiz)

Segunda vía: Si el alumno domina la solución de ecuaciones lineales de primer grado pudiera plantearse el siguiente modelo:

Sea x: precio del lápiz

4x: precio del cuaderno

Luego **4x – x = 75**

Tercera vía: Si se utiliza la **modelación tabular** con el apoyo del **tanteo inteligente** se construiría la siguiente tabla:

Tabla 1

PRECIO		DIFERENCIA
LÁPIZ	CUADERNO	
10 ¢	40 ¢	30 ¢
20 ¢	50 ¢	60 ¢
25 ¢	100 ¢	75 ¢

El **tanteo inteligente** se manifiesta en que sean capaces de descubrir que cada vez que **aumenta 10 ¢ el lápiz, la diferencia aumenta en 30** ¢: luego si el **aumento es de 5 ¢ la diferencia aumentará en 15 ¢.**

En esta oportunidad el empleo de la **modelación gráfica** sirvió, tanto para comprender el problema como para descubrir la vía de solución y simultáneamente de resolverlo.

De lo anterior se infiere que la **construcción** del **modelo matemático** está en correspondencia con determinado **análisis del problema.** Por supuesto, este análisis depende de preparación matemática del resolutor así como del tipo de actividad cognoscitiva que despliegue.

Diversos autores señalan que la **principal dificultad** en la elaboración de los modelos matemáticos de los problemas, radica en que muchas veces al alumno le resulta difícil representarse las relaciones implicadas o contenidas en el texto y expresarlas con el grado de abstracción que involucra dicho modelo.

Precisamente es por ello, que en este acto es donde el escolar debe desplegar una mayor actividad cognoscitiva. Esto tiene particular importancia en el plano didáctico pues en este componente, es donde se debe prestar una especial atención en la labor del maestro.

Conclusiones

En los conceptos de **problema** y **situación problemática** asumidos prevalece el **componente didáctico**, por la importancia que este tiene en el proceso de enseñanza aprendizaje de la solución de problemas. Esto se manifiesta con mayor énfasis en la cuarta condición establecida en la caracterización de un problema: que se ajusten a la **realidad** los elementos estructurales y/o **relaciones lógicas** entre estos. Sirve de fundamental condición previa para la formulación de problemas.

Los docentes deben aspirar a que sus estudiantes siempre sientan necesidad de resolver los problemas que ellos le proponen, por lo que este proceso se convertiría en una **actividad de estudio** para los resolutores; mediante la aplicación de determinadas acciones desarrollarían la **habilidad** correspondiente, que poco a poco adquirirían la **capacidad** pertinente y finalmente por la realización de un trabajo sistemático e intencional serían alumnos **competentes** en la solución de problemas.

Una de las metas a alcanzar por los estudiantes al enfrentarse a un problema matemático sería determinar la respuesta correcta (**resolución del problema**) pero para ello, primeramente deberían ejecutar un conjunto de transformaciones (**solución del problema**). La esencia de este proceso y resultado es construir el **modelo matemático** que permitiría **determinar la vía de solución** para luego realizarla, hasta encontrar su solución.

Bibliografía

Blum y Ness (1991). *What are Mathematical Problems?* [en línea] Recuperado el 25 de abril de 2009, de http://www2.hmc.edu/www_common/hmnj/hoosain.pdf

Borasi, R. (1986). *On the nature of problems.* Educational Studies in Mathematics, 17, 125-141.

Campistrous, L. (1999). *Didáctica y resolución de problemas.* Pedagogía`99, C. Habana.

Campistrous, L. y C. Rizo (1996). *Aprende a resolver problemas aritméticos.* Editorial Pueblo y Educación, C. Habana.

Capote, M. (2003). *Una estructuración didáctica para la etapa de orientación en la solución de problemas aritméticos con texto en el primer ciclo de la escuela primaria.* Tesis doctoral, Pinar del Río, Cuba.

Capote, M. (2005). *La etapa de orientación en la solución de problemas aritméticos para la escuela primaria.* Editorial Pueblo y Educación. C. Habana.

Castellanos, D y M. D. Córdova (1995). *Hacia una comprensión de la inteligencia*. En Selección de lecturas: La inteligencia un acercamiento a su comprensión y estimulación, Ediciones Varona, CESOFTE, La Habana.

Charnay, R. (1988). *Aprender (por medio de) la resolución de problemas. Didáctica de las matemáticas. Aportes y reflexiones*. Buenos Aires: Paidos.

Córdova, M. D. (1997). *La estimulación intelectual en situaciones de aprendizaje.* Tesis doctoral, ISP "Enrique J. Varona", C. Habana.

Davidov, V. V. (1988). *La enseñanza escolar y el desarrollo psíquico.* Editorial Progreso, Moscú.

Davidson, L.J. [Et Al] (1987). *Problemas de Matemática Elemental 1.* Editorial Pueblo y Educación, La Habana.

Fridman, L. M. (1995). *Metodología para resolver problemas de Matemáticas.* Grupo Editorial Ibero América S.A. México.

González, F. (1998). *Metacognición y Tareas Intelectualmente Exigentes: El caso de la Resolución de Problemas Matemáticos*. Zetetiké, *6 (*9), 59 – 87

González, V. [Et Al] (1995). *Psicología para educadores.* Editorial Pueblo y Educación, La Habana.

Kantowski, M. G. (1981). Problem Solving En Fennema E. (Ed.) Mathematics Education Research: Implications for 80´s, Reston, Va, 111-126.

Krulik, S., Rudnik, K.; (1980). *Problem solving in school mathematics*. National Council of Teachers of Mathematics. Virginia: Year Book, Reston.

Labarrere, A. (1987). *Bases psicopedagógicas de la enseñanza de la solución de problemas matemáticos en la escuela primaria.* Editorial Pueblo y Educación, La Habana.

Labarrere, A. (1988). *Cómo enseñar a los alumnos de primaria a resolver problemas.* Editorial Pueblo y Educación, La Habana.

Labarrere, A. (1996). *Pensamiento: Análisis y autorregulación de la actividad cognoscitiva de los alumnos.* Editorial Pueblo y Educación, C. Habana.

Lester, F. (1985). *Research on Mathematical Problem Solving*, Indiana University Press, EEUU.

Llivina, M. (1999). *Una propuesta metodológica para contribuir al desarrollo de la capacidad para resolver problemas matemáticos.* Tesis doctoral, Instituto Superior Pedagógico: “Enrique José Varona”, C. Habana, Cuba.

Majmutov, M. I. (1983). *La enseñanza problémica.* Editorial Pueblo y Educación, La Habana.

Pérez, Somozza, J. E. (1930). *Metodología de la Aritmética Elemental.* Cultural S.A., La Habana.

Polya, G. (1976). *Cómo plantear o resolver problemas.* Editorial Trillas, México.

Rubinstein, S. L. (1966). *El proceso del pensamiento.* Editorial Universitaria, La Habana.

Santos Trigo, L. M. (1997). *Principios y métodos de la resolución de problemas en el aprendizaje de las matemáticas*. Grupo Editorial Iberoamérica, México.

Schoenfeld, A (1985). Mathematical Problem Solving. New York: Academic Press.

Schoenfeld, A. H. (1993). *Resolución de problemas. Elementos para una propuesta en el aprendizaje de la Matemática.* Cuadernos de Investigación, No. 25, México, D.F.

Stanic, G. & Kilpatrick, J. (1989). *Historicall perspectives on problem solving in the mathematics curriculum*. En R. Charles & Silver (Eds.). The teaching and assessing of mathematical problem solving*,* 1-22 Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.

Manuel Capote Castillo. Pinar del Río 1945, doctor en Ciencias Pedagógicas y Profesor Titular de Matemática y su Didáctica. Departamento de Primaria, Facultad Educación Infantil, Universidad de Ciencias Pedagógicas, Pinar del Río, Cuba. Líneas de investigación: Estudio de los problemas matemáticos y Didáctica de la Matemática para la Educación Primaria. **mcapote@ucp.pr.rimed.cu**