UNIÓN
REVISTA IBEROAMERICANA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA

Diciembre de 2012, Número 32, páginas 135-146
ISSN: 1815-0640

Dinamización Matemática

Estrategias para resolver problemas con fracciones de fracciones

Fernando Mejía Rodríguez

Resumen

Si la resolución de problemas juega un papel importante en la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas, y las fracciones cuestan trabajo comprender; entonces, los profesores debieran ser los primeros en saber cómo resolver problemas que tengan que ver con el uso de fracciones. Este artículo muestra las diversas estrategias empleadas por algunos profesores mexicanos de educación básica, cuando resolvieron un problema de fracciones de fracciones.

Abstract

If problem solving plays an important role in mathematics' teaching and learning, and fractions are hard to understand; so, teachers should be the first to know how to solve problems related to the use of fractions. This paper shows a variety of strategies used by some basic-education mexican teachers, when they solved one fractions of fractions problems.

Resumo

Se a resolução de problemas desempenha um papel importante de ensino e aprendizagem da matemática, frações e difícil de entende; então, os professores devem ser os primeiros a saber como resolver os problemas que têm a ver com o uso de frações. Esta pesquisa mostra as várias estratégias empregadas por alguns professores mexicanos de educação básica, quando resolveu um problema de frações de frações.

1. Introducción

En este mundo globalizado, una consecuencia es la rendición de cuentas que ha permeado en distintos ámbitos de la sociedad, y la educación no podía pasar desapercibida. Existe un programa para evaluar los sistemas educativos, llamado PISA (Programa para la Evaluación Internacional de los Estudiantes). El grado de desempeño de PISA en matemáticas está clasificado en seis niveles de complejidad, el más alto es el seis y el menor el uno. Los resultados del porcentaje de alumnos en cada nivel de desempeño en matemáticas de PISA 2009 (*Tabla 1*), los publicó la OCDE (2010, 221) y México no salió bien librado, porque la mayoría de los alumnos de 15 años de edad estaban ubicados en los niveles inferiores; al igual que en las evaluaciones de los años anteriores.

Tabla 1. PISA 2009 Matemáticas

Inferior al 1	Nivel 1	Nivel 2	Nivel 3	Nivel 4	Nivel 5	Nivel 6
21.9	28.9	28.3	15.6	4.7	0.7	0.0

En México existe ENLACE (Evaluación Nacional del Logro Académico en Centros Escolares), que se realiza cada año. Los resultados de ENLACE 2010 (*Tabla 2*) que los publica la Secretaría de Educación Pública (SEP, 2010, 5) en cuanto al porcentaje de alumnos de secundaria en matemáticas, y se ratifica que los alumnos siguen en los niveles más bajos.

Tabla 2. ENLACE 2010 Matemáticas

Insuficiente	Elemental	Bueno	Excelente
52.6	34.7	10.5	2.2

Se retoman estas dos evaluaciones porque se aplican al final de la escuela secundaria en México, una vez que se concluye la educación obligatoria y que ya se cubrió la educación básica, nivel en que trabajan los profesores que formaron parte en este estudio. La educación básica en este país inicia con el jardín de niños donde asisten alumnos de entre 4 y 5 años de edad, posteriormente acuden a la escuela primaria con duración de seis años de los 6 a los 12 años de edad, para finalmente cursar la escuela secundaria que dura tres años de entre 13 y 15 años de edad.

Las dos evaluaciones evidencian la realidad del sistema educativo mexicano, y estos resultados muestran que algo está pasando y no se está haciendo del todo bien, por tanto es de interés de políticas educativas, de investigadores, de profesores, de padres de familia, y toda la sociedad, estudiar estos resultados y mejorarlos.

La intención del presente artículo no es evaluar al profesor, descalificarlo o juzgarlo; más bien es rescatar el trabajo que hacen los profesores de educación básica, mostrar las estrategias que emplean cuando resuelven un problema de fracciones, que como consideran Behr et al (1993); de León y Fuenlabrada (1996); Newstead y Murray (1998); y Charalambous y Pitta-Pantazi (2005); enseñarlas y aprenderlas ha sido tradicionalmente problemático.

2. Investigaciones relacionadas

Dienes (1972) puntualiza que el conocimiento de las fracciones no es adquirido de manera espontánea como los números naturales. A lo que Streefland (1986) llama distractores-N, que es cuando se usan reglas aritméticas de números naturales y se está trabajando con fracciones. El reto que representan las fracciones en educación matemática es alto, de acuerdo a Hilton (1983) y Usiskin (1979). Existen diversas investigaciones relacionadas a las fracciones en la educación matemática, como la de Kerslake (1986) quien señala el papel que juegan las fracciones en el desarrollo del pensamiento de los niños, la de López y Elosua (2002) quienes analizan los componentes cognitivos implicados en la suma y resta de fracciones, la de Pearn y Stephens (2004) quienes corroboran la inexactitud para localizar una fracción en la recta numérica, la de Brizuela (2005) que identifica las dificultades que tienen los niños para conceptualizar los números fraccionarios, la de Yanik, Helding y Baek (2006) que colocan a un grupo de alumnos dos problemas para ubicar fracciones en la recta numérica y finalmente la de Fandiño (2007) que narra la historia de las fracciones y hace un recuento de las investigaciones hechas desde 1960 al 2007.

Entonces, el presente artículo describe las estrategias de solución que emplean los profesores de educación básica para resolver problemas que involucren el uso de fracciones dentro de otras fracciones.

Kantowski (1980, 195) menciona que un problema es una situación para la cual el individuo que la confronta, no tiene algoritmo que le garantizará una solución. El conocimiento relevante de la persona debe juntarse en una nueva manera para resolver el problema. La tendencia internacional de enseñar la matemática en la escuela compatible con Singapur, es resolviendo problemas; por eso es necesario establecer la diferencia que existe entre aprender a resolver problemas y aprender a través de la resolución de problemas. Davis (1992, 237) describe al proceso de aprendizaje a través de la resolución de problemas como sigue:

> En lugar de iniciar con ideas "matemáticas" y entonces "aplicarlas", debemos empezar con problemas o tareas, y como un resultado del trabajo en estos problemas los niños se quedarán con un residuo de "matemáticas" – argumentamos que las matemáticas es lo que sobra después de que se ha trabajo con problemas –. Rechazamos la noción de matemáticas "aplicadas", por el motivo de que inicie con las matemáticas y entonces busque de qué manera puede usarlas.

De la misma manera, Murray, H., Olivier, A. & Human, P. (1998, 169) afirman:

> El aprendizaje ocurre cuando los estudiantes intentan resolver problemas para los cuales no tienen métodos de rutina. Los problemas entonces vienen antes de la enseñanza de un método de solución. El maestro no debe interferir con los estudiantes mientras están tratando de resolver el problema, los estudiantes son guiados a comparar sus resultados con los demás; discutir el problema, etc.

Existen algunos problemas donde se puede utilizar según Kaput y Sims-Knight (1983) traducciones algebraicas de diversos sistemas (tablas, enunciados, funciones, figuras geométricas, etc.), pero una de las dificultades para resolver el problema no es puramente matemático; sino que está conectado íntimamente con la lingüística natural, aprendida desde la niñez; a lo que MacGregor y Stacey (1993) nombran como interferencia del lenguaje natural.

Polya (1945) enuncia las cuatro etapas para resolver problemas matemáticos: comprender el problema; diseñar un plan; aplicarlo; y revisar la solución. Por otra parte, Dienes (1972, 8) dice

> […] Una fracción puede ser, o bien la descripción de un estado de cosas, o bien una orden, es decir, el resultado de la orden de ejecución de una operación. Dos tercios, puede significar que describimos las dos terceras partes de una cosa cualquiera y con ello indicamos un estado de cosas. Por otra parte podemos decir: "tómense dos tercios de la cosa, sea cual fuere ésta" y con ello indicamos una orden.

Kieren (1980) presenta una categorización de la expresión a/b como cociente, operador, razón y medida; agrega parte-todo dentro de las cuatro anteriores. Freudenthal (1983) define a la fracción como fracturador, porque corta o divide algo en determinado número de partes iguales y relacionar las partes y el todo con una fracción. Piaget, Inhelder y Szeminska (1981, 302) señalan que:

> La noción de una fracción depende de dos relaciones fundamentales: la relación de la parte al todo (que es intensiva y lógica), y la relación de parte a parte, donde los tamaños de todas las otras partes de un todo sencillo son comparadas con la parte inicial

Además agregan que las características de una fracción son las siguientes: hay un todo divisible, el cual está compuesto de elementos separables; una relación la cual es extensiva o métrica, esto implica un número determinado de partes; la subdivisión es exhaustiva, no hay residuo; relación fija entre el número de partes en la que el todo continuo está siendo dividido y el número de intersecciones; el concepto de una fracción aritmética implica subdivisión cuantitativa, donde todas las partes son iguales; las partes en que se divide el todo, pueden ser consideradas como un todo y entonces subdividirse posteriormente; y si el área del todo se divide en fracciones, la suma de todas las áreas de las fracciones equivale al área del todo original.

De los dos últimos puntos, Freudenthal (1983) considera a las longitudes y áreas como los medios naturales para visualizar magnitudes en la enseñanza de fracciones. Figueras, Filloy y Valdemoros (1987) muestra una investigación de lo difícil que puede ser para los alumnos comprender el uso de estos dos puntos, pero para que el alumno le dé sentido al uso de fracciones de fracciones necesita razonar con tres diferentes niveles de unidades (unidades de unidades de unidades) y tener la habilidad de dividir recursivamente las unidades (Olive, 1999). Lo que se pretende en este estudio, lo logra Olive y Vomvoridi (2006) cuando muestran cómo un alumno llamado Tim llega a la conclusión de manera gráfica de que la mitad de un tercio es un sexto.

3. Estrategias para resolver problemas

Por estrategias cognitivas básicamente se entiende un conjunto de operaciones mentales manipulables; es decir, “secuencias integradas de procedimientos o actividades que se eligen con el propósito de facilitar la adquisición, almacenamiento o utilización de la información” (Pozo, 1990, 201); o como “las actividades u operaciones mentales seleccionadas por un sujeto para facilitar la adquisición del conocimiento” (Beltrán, 1998, 205).

Los problemas, son recursos didácticos que generan incertidumbre en los alumnos, Morin (1999, 46) puntualiza que la educación del futuro debe poner atención en las incertidumbres relacionadas con el conocimiento: “En efecto, hay dos vías para enfrentar la incertidumbre de la acción. La primera es la plena conciencia de la apuesta que conlleva la decisión; la segunda el recurso a la estrategia” (Morin, 1999, 49); “Toda crisis es un incremento de las incertidumbres […], hay que inventar estrategias para salir de la crisis” (Morin, 2003, 117); y “[…] la estrategia se impone siempre que sobreviene lo inesperado o lo incierto, es decir, desde que aparece un problema importante” (Morin, 2003, 118).

Una vez consciente de la incertidumbre, hay que asumir el riesgo; de no poder resolverlo adecuadamente; de cometer un error. En fin, Giddens (2000, 35) dice: “Riesgo no es igual a amenaza o peligro. El riesgo se refiere a peligros que se analizan activamente en relación a posibilidades futuras”; “La aceptación del riesgo, con todo, es también condición de excitación y aventura” (Giddens, 2000, 36); y “[…] una raíz de la palabra *riesgo* en el original portugués significa *atreverse”* (Giddens, 2000, 48).

Pero este término de estrategia, también es trabajado desde la complejidad por Morin (1999, 50)

> La estrategia debe prevalecer sobre el programa. El programa establece una secuencia de acciones que deben ser ejecutadas sin variación en un entorno estable; pero desde que haya modificación de las condiciones exteriores el

> programa se bloquea. En cambio, la estrategia elabora un escenario de acción examinando las certezas y las incertidumbres de la situación, las probabilidades, las improbabilidades. El escenario puede y debe ser modificado según las informaciones recogidas, los azares, contratiempos u oportunidades encontradas en el curso del camino. Podemos, dentro de nuestras estrategias, utilizar secuencias cortas programadas, pero para todo aquello que se efectúe en un entorno inestable e incierto, se impone la estrategia; ésta debe privilegiar tanto la prudencia como la audacia y si es posible las dos a la vez. La estrategia puede y debe efectuar compromisos con frecuencia. ¿Hasta dónde? No hay respuesta general para esta pregunta, es más, hay un riesgo que puede ser el de la intransigencia que conduce a la derrota o el de la transigencia que conduce a la abdicación. Es en la estrategia que siempre se plantea, de manera singular en función del contexto y en virtud de su propio desarrollo, el problema de la dialógica entre fines y medios.

Una referencia obligada a consultar es la de los estándares de la NCTM (2000, 54):

> De las muchas descripciones de estrategias para resolver problemas, una de las más conocidas puede encontrarse en el trabajo de Polya (1957). Estas estrategias, frecuentemente citadas, incluyen: utilizar diagramas, buscar patrones, considerar todas las posibilidades, probar con valores o casos determinados, trabajar marcha atrás, tantear y comprobar, crear un problema equivalente y crear un problemas más sencillo.
>
> Cuando los alumnos llegan a los niveles medios, deberían ser diestros en reconocer cuándo es apropiado usar diversas estrategias y ser capaces de decidir cuándo y cómo usarlas. En la escuela secundaria, deberían tener acceso a una gama amplia de estrategias, saber decidir cuál usar y ser capaces de adaptar e inventar otras.
>
> Las primeras experiencias de los niños con las matemáticas tienen lugar a través de la resolución de problemas. A medida que experimentan con una más amplia variedad de problemas, necesitan diferentes estrategias. Tienen que llegar a ser conscientes de estas estrategias a medida que se presenta la necesidad de emplearlas.
>
> […] ninguna estrategia se aprende de una vez para siempre; las estrategias se aprenden con el paso del tiempo, se aplican en contextos particulares, y llegan a ser más refinadas, elaboradas y flexibles según se van utilizando en problemas de complejidad creciente.

Fan y Z*h*u (2007) enlistan 17 estrategias para resolver problemas:

1. Actúalo
2. Cambia tu punto de vista
3. Dibuja un diagrama
4. Adivina y revisa
5. Razonamiento lógico
6. Busca un patrón
7. Elabora suposiciones
8. Elabora una lista
9. Elabora una tabla
10. Replantea el problema
11. Simplifica el problema

12. Resuelve parte del problema
13. Piensa en un problema relacionado
14. Usa un modelo
15. Usa una ecuación
16. Usa concepto antes-después
17. Trabaja de reversa

Esta última es la lista más completa que he encontrado hasta el momento, aunque existen muchas más, caben en este listado. Dichas estrategias no son excluyentes, ni tampoco se pueden aplicar todas al mismo problema. Existen algunos problemas que se pueden resolver por unas estrategias, por otras no; pero por esas que no se ocuparon, se pueden resolver otros problemas diferentes. También está el caso que se puedan emplear dos estrategia al mismo tiempo, o incluso tres o más estrategias simultáneas.

En este artículo se muestra el uso de las diferentes estrategias en acción, se tomó un problema de fracciones de fracciones y se observan diferentes caminos para poder resolver el mismo problema. Cuando no es posible seguir unos pasos establecidos para resolver problemas generales, surgen las estrategias que de manera personal se van construyendo.

4. Metodología

El estudio desarrollado es de tipo descriptivo. El objetivo no es evidenciar a ningún profesor, ni a ninguna escuela. Por tanto se mantendrá en anonimato el nombre de los profesores y de la institución escolar. Sólo se puede decir que las estrategias recabadas se juntaron en un diplomado impartido a profesores de educación básica en el norte del Estado de México, con un grupo de 28 profesores: 5 de jardín de niños, 14 de primaria y 9 de secundaria.

El material a analizar sólo es el de tipo individual, que contestaron de forma escrita cada uno de los profesores durante una hora. Se recogió el material para que no alteraran su respuesta, posteriormente se trabajó en grupos pequeños de tres profesores, y al final en plenaria se revisaron las diferentes vías de solución.

El problema analizado fue del tipo Canguro; que son exámenes internacionales con origen en España para desarrollar la creatividad e ingenio de los estudiantes. Para este caso, se obtuvo del Examen eliminatorio estatal de la olimpiada mexicana de matemáticas de 2008, que es de nivel Cadete; es decir, para jóvenes que estudian en México desde tercer grado de Secundaria, hasta segundo año de Bachillerato. Personalmente, he trabajado este problema con alumnos de secundaria y con profesores de educación básica; es interesante, porque es un reto para quienes los resuelven por primera vez y además se puede llegar a la solución de distintas formas.

Se eligió el reactivo 12 del examen hecho por la UNAM (2008), que es el siguiente:

> La figura muestra el esquema de un río que se va dividiendo. Empieza en el punto A; luego se divide en dos ramas, la primera se lleva 2/3 del agua y la otra el resto. Después la primera rama se divide en tres, una de ellas toma 1/8 del

agua de esa rama, otra toma 5/8 y la otra rama, que lleva el sobrante, se une con la segunda rama original. ¿Qué proporción del río llega al punto B?

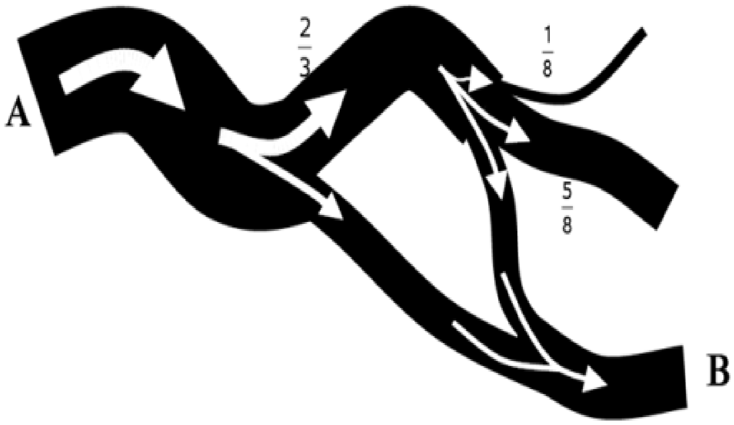

Figura 1

5. Análisis

Ahora damos paso a la descripción de las estrategias de solución, que emplearon los profesores de educación básica a la hora de resolver el problema antes citado, retomadas de la lista de Fan y Zhu (2007).

1. Estrategia actúalo.

$$\frac{2}{8}+\frac{1}{3}=\frac{6+8}{24}=\frac{14}{24}=\frac{7}{12}$$

Esta manera impulsiva de resolver el problema es incorrecta, porque no alcanzan a ver que los 2/8 en realidad no son de A, sino de los 2/3 de A. La mayoría de los profesores (86%) contestó de la forma anterior, posteriormente al hacerlos reflexionar, surgieron mucho más estrategias correctas, como las que se muestran a continuación.

2. Estrategias: cambia tu punto de vista, razonamiento lógico, replantea al problema y piensa en un problema relacionado.

Ahora al analizar que los 2/8 no son del punto A, cada alumno piensa en cómo tratar de resolverlo ahora en forma distinta a la planteada originalmente. Se tiene que hacer ahora un razonamiento lógico, pero para que éste tenga fruto, primero se deberá replantear el problema, ya sea resolviendo una parte del problema, pensando en un problema muy parecido resuelto con anterioridad, o ingeniándoselas para llegar a la respuesta correcta.

2.1. Estrategia adivina y revisa

Si por A pasan 30 litros, 20 litros se van por la rama de arriba, y 10 litros por la rama de abajo; posteriormente en la rama de arriba que llevaba 20 litros se reparten en tres ramas, cada rama lleva… No se puede dividir entre ocho, entonces otro número al inicio por A.

Se prueba ahora que por A pasan 24 litros, en la rama de arriba se quedan 16 litros y por la rama de abajo sólo 8 litros, de la rama de arriba, la primer rama llevará 2 litros, la segunda 10 litros y la última 4 litros. Por lo tanto se suman estos últimos 4 litros con la primer rama de abajo que lleva 8 litros, para dar un total de 12 litros, de un total de 24 litros iniciales que pasaron por A, entonces la respuesta es de la mitad de la cantidad que pasa por A, llega a B.

2.2. Estrategia dibuja un diagrama

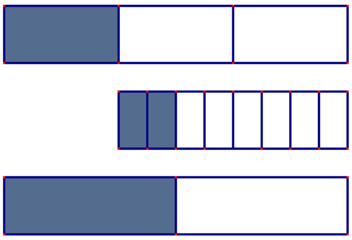

Fig. 2. Estrategia dibuja un diagrama

Como se puede observar (*Fig. 1*), primero se parte el entero en tres partes iguales y se sombrea la región que pasa directo a la rama B que es un tercio (rectángulo de arriba); después las dos terceras partes sobrantes se dividen en ocho partes iguales, sólo dos de ellas se sombrean porque son las que llegarán a la rama B (rectángulo del medio); ahora se unen las dos áreas (sombreadas en el rectángulo de arriba y en el rectángulo del medio), quedando la mitad del rectángulo original (rectángulo de abajo).

2.3. Estrategia resuelve parte del problema

$$\left(\frac{2}{8}\right)\left(\frac{2}{3}\right)=\frac{4}{24}=\frac{1}{6}$$

Por la tercera rama, donde fluye 2/8 de las dos terceras partes de A, en realidad está circulando 1/6 de A. Ahora sólo resta sumar 1/6 con 1/3.

$$\frac{1}{6}+\frac{1}{3}=\frac{1+2}{6}=\frac{3}{6}=\frac{1}{2}$$

2.4. Estrategia trabaja de reversa

Si ahora empezamos por B, pensando que salen 6 litros, se puede obtener de sumar 5+1, 4+2, 2+4, 1+5, 3+3. Después de probar los posibles resultados, nos damos cuenta que 4 y 2; es decir, 4 litros resultan de la rama de abajo que en realidad es 1/3 de A, de la rama de 2/8 salen 2 litros, por lo tanto entran a A 4+8 que son 12 litros. De ahí que si salen 6 litros y entraron 12 litros, la proporción que sale por B con respecto a A es de la mitad.

2.5. Estrategia elabora suposiciones

La tercera parte de A pasa directo a B. Luego de A, sus dos terceras partes se dividen en ocho y se toman 2, entonces en realidad cada tercera parte se divide en cuartos, pero A se tendría que dividir en 12 partes iguales, tomar 2 y quedar 2/12 o lo que es lo mismo 1/6 de A.

Así sólo hay que sumar 1/3 y 1/6, si convertimos los tercios a sextos, nos quedan 2, y sumamos el otro sexto, resultan tres sextos y simplificando da la mitad.

2.6. Estrategia usa una ecuación

$$B=\left(\frac{2}{3}A\right)\left(\frac{2}{8}\right)+\frac{A}{3} \qquad B=\frac{A}{6}+\frac{A}{3} \qquad B=\frac{A}{2}$$

Se iguala B con una expresión en función de A, se simplifica el segundo miembro de la ecuación y se tiene que B es igual a la mitad de A. Estrictamente hablando lo de arriba no es una ecuación porque no está igualado a cero, pero es una expresión algebraica que puede caer en esta estrategia, así como el uso de ecuaciones lineales, de ecuaciones cuadráticas, de sistemas de ecuaciones lineales con dos o tres incógnitas, entre otras.

Para terminar esta sección, se colocarán un diagrama (*Fig. 2*) que muestre todas las estrategias empleadas para resolver el anterior problema de fracciones de fracciones, por algunos profesores mexicanos de educación básica.

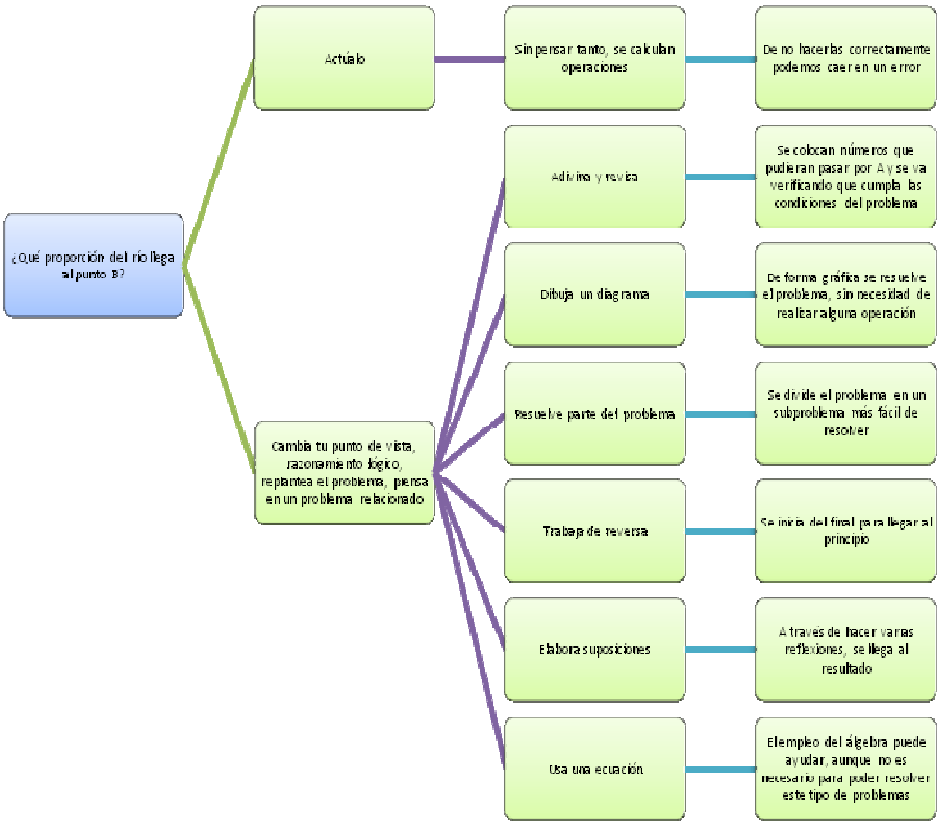

Figura 2. Estrategias para resolver un problema de fracciones de fracciones

Conclusiones

- Se mostró que un problema puede ser resuelto por diferentes caminos, que cada uno de ellos implica una o varias estrategias.
- Las estrategias no son excluyentes entre sí.
- Las 17 estrategias no son una lista terminada, que pueden existir más y que no es necesario aprenderse los nombres, sino manejarlas.
- Sería importante tener una formación docente en matemáticas, enfocada en la resolución de problemas y en las estrategias para resolverlos.
- No existe la receta de cómo enseñara a resolver problemas, tampoco la receta de cuáles estrategias emplear para resolver un problema.
- No existe una estrategia mejor o peor, depende del problema y de cada persona.

- Cada persona va desarrollando sus propias estrategias, y de hacerlo conscientemente se podría aumentar el desempeño en tareas matemáticas y ajenas a las matemáticas también.
- Las 17 estrategias pueden servir para analizar la resolución de problemas matemáticos.
- Las "estrategias", en general –no las 17 abordadas en el artículo- podrían ayudar a resolver no sólo problemas matemáticos, sino de la vida cotidiana donde ya no intervienen, aparentemente las matemáticas.
- Finalmente, creo que para ser un buen profesor de matemáticas es necesario tener distintos tipos de conocimientos, como lo marca Shulman (1987) que se requieren de siete: conocimiento del contenido; conocimiento pedagógico general; conocimiento del currículum; conocimiento del contenido pedagógico; conocimiento de los estudiantes y sus características; conocimiento de los contextos educativos; y conocimiento de las finalidades educativas, propósitos y valores. Pero definitivamente, el principal es el conocimiento del contenido; de nada sirve saber sobre didáctica o los contenidos del currículum, que son necesarios, sí; pero el que no se puede evitar es el dominio del contenido matemático escolar. Hay que leer, hay que investigar, pero sobre todo como profesor de matemáticas, hay que resolver problemas; así podremos "dejar" que los alumnos construyan sus objetos matemáticos, una vez que se tiene cierto dominio del contenido matemático y se conoce además una variedad de estrategias para resolver problemas.

Bibliografía

Behr, M., Harel, G., Post, T. y Lesh, R. (1993). Rational Numbers: Toward a Semantic Analysis-Emphasis on the Operator Construct. En T. P. Carpenter, E. Fennema, y T.A. Romberg, (Eds.), *Rational Numbers: An Integration of Research* (pp. 13-47). NJ: Lawrence Erlbaum.

Beltrán, J. (1998). *Estrategias de aprendizaje*. En V. Santiuste, y J. Beltrán (Comp.) *Dificultades de aprendizaje* (pp. 201-240). Madrid: Síntesis

Brizuela, B. (2005) Young children's notations for fractions. *Educational Studies in Mathematics*. DOI: 10.1007/s10649-005-9003-3

Charalambous, Ch. y Pitta-Pantazi, D. (2005). Revisitins a theoretical model on fractions: implications for teaching and research. En Chick, H. y Vincent, J. (Eds.). *Proceedings of the 29th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education, Vol. 2*, pp. 233-240. Melbourne: PME.

Davis, R. (1992). Understanding "understanding". En: *Journal of Mathematical Behavior, 11,* 225−241.

De León, H. y Fuenlabrada, I. (1996). Procedimientos de solución de niños de primaria en problemas de reparto. *Revista Mexicana de Investigación Educativa*. 1(2), 268-282.

Dienes, Z. (1972). Fracciones. Barcelona: Teide.

Fan, L. y Zhu, Y. (2007). Representation of problem-solving procedures: A comparative look at China, Singapore, and US mathematics textbooks. *Educational Studies in Mathematics*. 66, 61-75.

Fandiño, M. (2007). Fractions: conceptual and didactic aspects. *Acta Didactica Universitatis Comenianae*. 7, 81-115. Consultada el 10 de febrero de 2011 en <http://www.ddm.fmph.uniba.sk/ADUC/files/Issue7/05Pinilla.pdf>

Figueras, O.; Filloy, E.; y Valdemoros, M. (1987). Distorsiones que obstruyen la construcción del concepto de fracción. *Memorias de la primera reunión centroamericana y del Caribe sobre formación de profesores e investigación en matemática educativa*. México: Cinvestav, pp. 159-164.

Freudenthal, H. (1983). *Fenomenología didáctica de las estructuras matemáticas*. México: Cinvestav

Giddens, A. (2000). *Un mundo desbocado. Los efectos de la globalización en nuestras vidas*. España: Taurus.

Hilton, P. (1983). Do we still need to teach fractions? En Zweny, M.; Green, T.; Kilpatrick, J.; Pollak, H.; y Suydam, M. (Eds.). *Proceedings of the fourth International Congress on Mathematical Education*. Boston: Birkhauser, pp. 37-41.

Kantowski, M. (1980). Some thoughts on Teaching for Problem Solving. En Krulik, S. y Reys, R. (Eds.). *Problem solving in school mathematics.* Reston: National Council of Teachirs of Mathematics, pp. 195-203.

Kaput, J. y J., Sims-Knight, (1983). Errors in Translations to algebraic equations: roots and implications. *Focus on Learning Problems in Mathematics. 5*(3 y 4), 63-78.

Kerslake, D. (1986). *Fractions. Childrens' error and strategies*. Reino Unido: NFER-Nelson.

Kieren, T. (1980). The rational number constructs. Its elements and mechanisms. En Kieran, T. (Ed.) *Recent Research on Number Learning.* Columbus: ERIC/SMEAC, pp. 125-149.

Lim, K. (2008). *Students' mental acts of anticipating: Foreseeing and predicting while solving problems involving algebraic inequalities and equations.* Alemania: VDM Verlag.

López, A. y Elosua, P. (2002). Formulación y validación de un modelo logístico lineal para la tarea de adición y sustracción de fracciones y números mixtos. *Psicothema*. 14(4), 802-809.

MacGregor, M. y K. Stacey, (1993). Cognitive models underlying students' formulation of simple linear equations. *Journal for Research in Mathematics Education.* EUA: NCTM, 24(3), 217-232

Morin, E. (1999). *Los siete saberes necesarios para la educación del futuro.* Francia: UNESCO.

Morin, E. (2003). *Introducción al pensamiento complejo*. España: Gedisa.

Murray, H., Olivier, A. & Human, P. (1998). Learning through problem solving. En: A. Olivier & K. Newstead (Eds.) *Proceedings of the Twenty-second International Conference for the Psychology of Mathematics Education*. Stellenbosch: Sudáfrica. MacGregor, M. y K. Stacey, (1993). "Cognitive models underlying students' formulation of simple linear equations", en: *Journal for Research in Mathematics Education.* EUA: NCTM, *24*(3), 217-232

NCTM (2000). *Principles and Standards for School Mathematics.* E.U.A.: NCTM.

Newstead, K. y Murray, H. (1998). Young students' constructions of fractions. En Olivier, A. Newstead, K. (Eds.). *Proceedings of the Twenty-second International Conference for the Psychology of Mathematics Education.* Vol. 3. Stellenbosch, Sudáfrica, pp. 295-302.

OCDE (2010). *PISA 2009 results: what students know and can do. Students performance in reading, mathematics and science (Volume I).* doi: 10.1787/9789264091450-en

Olive, J. (1999). From fractions to rational numbers of arithmetic. A reorganization hypothesis. *Mathematical Thinking and Learning, 1*(4), 279-314.

Olive, J. y Vomvoridi, E. (2006). Making sense of instruction on fractions when a student lacks necessary fractional schemes. The case of Tim. *Journal of Mathematical Behavior. 25*, 18-45.

Pearn, C., y Stephens, M. (2004). Why you have to probe to discover what Year 8 students really think about fractions. En Putt, I.; Faragher, R; y McLean, M. (Eds.). *Mathematics education for the third millennium: Towards 2010 (Proceedings of the 27th annual conference of the Mathematics Education Research Group of Australia)*, pp. 430-437.

Piaget, J.; Inhelder, B. y Szeminska, A. (1981). *The child´s conception of Geometry.* New York, Londrés: Norton & Company

Polya, G. (1945). How to solve it. Princeton: Princeton University Press.

Pozo, I. (1990) Estrategias de aprendizaje. En C. Coll, A. Marchesi y J. Palacios (Comp.), *Desarrollo psicológico y educación. Psicología de la Educación* (pp. 199-224). Madrid: Alianza.

SEP (2010). Evaluación Nacional del Logro Académico en Centros Escolares. Educación Básica. *Boletín informativo.* México: SEP. Disponible en internet en: <http://enlace.sep.gob.mx/ba/docs/boletin_enlaceba2010.pdf>

Shulman, L.S. (1987). Knowledge and teaching: Foundations of the new reform. *Harvard Educational Review*, *57*, 1-22.

Streefland, L. (1986). Rational analysis of realistic mathematics education as a theoretical source for psychology. Fractions as a paradigm. *European Journal of Psychology of Education. 1*(2), 67-83.

UNAM (2006). *Canguro Matemático Mexicano 2006. Nivel Olímpico.* México: UNAM. Consultado el 7 de febrero de 2011 en: < http://ichi.fismat.umich.mx/omm/recursos/canguro/previos/olimpico06.pdf>

UNAM (2008). *Examen Eliminatorio Estatal de la Olimpiada Mexicana de Matemáticas 2008*. México: UNAM. Consultado el 7 de febrero de 2011 en: < http://ichi.fismat.umich.mx/omm/recursos/canguro/previos/olimpico08.pdf>

Usiskin, Z. (1979). The future of fractions. *Arithmetic Teacher*. *27*(5), 18-20.

Yanik, H.; Helding, B. y Baek, J. (2006). Students' difficulties in understanding fractions as measures. En Alatorre, S.; Cortina, J.; Sáiz, M.; y Méndez, A. (Eds.) *Proceedings of the 28th annual meeting of the North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education.* Mérida, México: Universidad Pedagógica Nacional. pp. 323-325.

Fernando Mejía Rodríguez. Profesor de matemáticas (México). Maestro en Ciencias de la Educación (Instituto Superior de Ciencias de la Educación del Estado de México). Actualmente estudiante de tiempo completo del programa de Doctorado en Ciencias de la Educación. Este artículo se deriva del proyecto de investigación “Estrategias de profesores de matemáticas en secundaria para resolver problemas” para optar por el grado de Doctor en el ISCEEM.. fdo2004@yahoo.com