

El rincón de los problemas

Uldarico Malaspina Jurado
 Pontificia Universidad Católica del Perú
umalasp@pucp.edu.pe

Creando problemas para educación primaria

Problema

Margarita, por su cumpleaños, necesita comprar cierta cantidad de botellas de jugos, para ello cuenta con S/. 45,00. En la bodega de su barrio cada botella de jugo cuesta S/. 1,50, pero si las compra en la tienda mayorista la docena le cuesta S/. 15,00. ¿En qué tienda le conviene comprar a Margarita las botellas de jugo para su cumpleaños? ¿Por qué?

Este problema fue propuesto por una alumna del octavo ciclo de estudios de la licenciatura en educación primaria, del Instituto Pedagógico Nacional Monterrico (IPNM)¹ de Lima. Fue la respuesta a un pedido más amplio sobre creación de problemas, al inicio de un taller con 39 alumnas, como parte de la investigación que vengo realizando sobre creación de problemas de matemáticas y la importancia de poner énfasis en estimular y desarrollar esta competencia en los profesores de primaria, para que éstos, a su vez, la incentiven a sus alumnos y la usen como una forma de aprendizaje activo. Consideramos tres casos y este problema corresponde al primero, en el que les presenté dos situaciones y les pedí que escojan una de ellas para inventar un problema relacionado con tal situación. A continuación copio parte del texto con el que hice este pedido:

En cada uno de los siguientes casos, usa creativamente los conocimientos que tienes para **inventar** un problema que contribuya a que los alumnos de primaria aprendan el o los conceptos matemáticos correspondientes. En el primer caso se te presentan dos situaciones concretas y debes escoger **solo una de ellas** para inventar el problema relacionado con tal situación; en el segundo se te indica un tema específico; y en el tercero se te deja amplia libertad para crear el problema, con la única restricción que la respuesta final de tal problema creado sea un número determinado. En todos los casos, debes **escribir resumidamente la solución del problema que inventes**.

1. Escoge una de las siguientes situaciones para crear un problema relacionado con tal situación

Situación 1: En la bodega del barrio, el precio de cada botella de jugo es de S/. 1,50 y en una tienda mayorista venden el mismo producto sólo por docenas, a S/. 15,00 la docena.

¹ Mi agradecimiento a la gran acogida de autoridades, profesoras y profesores del IPNM y a la entusiasta participación de sus alumnas para apoyar estas exploraciones didácticas.

Situación 2: Juan recibe como premio un terreno rectangular y la posibilidad de precisar las dimensiones de tal terreno, con la única condición de tener un perímetro de 56 metros.

De 39 alumnas, 36 escogieron la situación 1 y la mayoría propuso problemas relacionados con la conveniencia de comprar un determinado número de botellas de jugo, teniendo en cuenta la diferencia de precios en la bodega y en la tienda mayorista. A continuación copio tres interesantes problemas en esta línea

Prob. 1. En la bodega del barrio, Carlitos compró 12 botellas de jugo a S/. 1,50 cada una. Su amiga María también necesitaba comprar 12 botellas de jugo, pero ella fue a la tienda mayorista, donde la docena de botellas de jugo cuesta S/. 15,00. ¿Quién gastó más? ¿Por qué?

Prob. 2. Mario desea comprar 18 botellas de jugo para su fiesta. En la bodega de su casa el precio de cada botella es de S/. 1,50 y en una tienda mayorista venden el mismo producto solo por docenas, a S/. 15,00 la docena. Si Mario desea gastar lo menos posible ¿cuál es la compra que debe realizar?

Prob. 3. Pedro compra en la bodega del barrio 7 botellas de jugo para el almuerzo y para la cena compra 5 botellas más. ¿Cuánto hubiera ahorrado si compraba todas las botellas de jugo en la tienda mayorista?

El mismo pedido de crear problemas lo hice también a profesores de primaria en ejercicio, en el distrito de Pomahuaca². De 16 profesores, 7 escogieron la situación 1 y 9 la situación 2. A continuación copio el texto del problema de una de las profesoras, en referencia a la situación 1:

Prob 4. Juan compra jugos en una bodega a S/. 15,00 la docena de botellas y por unidad las vende a S/. 1,50 cada botella. ¿Cuánto gana en cada docena de jugos?

También, por iniciativa propia, algunos profesores del IPNM propusieron problemas referidos a la situación 1. Uno de los profesores elaboró con la información dada una pequeña situación familiar motivadora y propuso un problema que a continuación resumo. El texto completo, con su solución, está escaneado en el anexo.

Prob. 5. Si usualmente compro botellas de jugo por S/. 1,50 y tengo la posibilidad de comprarlas por docenas a S/. 15,00 la docena, ¿cuántas docenas debo comprar para generarme un ahorro de S/. 18,00?

A continuación me referiré más en detalle al problema propuesto al inicio de este artículo. A la información dada en la situación 1, la autora le ha añadido lo que en economía se denomina una “restricción de presupuesto” (Margarita dispone de S/. 45,00), que es frecuente en la vida diaria. Lo que pide es determinar en qué tienda conviene comprar las botellas de jugo, con la cantidad disponible de dinero. Con la cantidad de dinero que se da como dato en el problema, la solución parece obvia para un adulto; más aún al mencionarse explícitamente una tienda mayorista y al ser

² En el número anterior hay mayores referencias sobre la experiencia didáctica en Pomahuaca.

45 un múltiplo de 15, que es el precio en nuevos soles de la docena de botellas en tal tienda. Lo interesante es que la autora del problema pide una justificación de la respuesta y para dar una justificación objetiva, el niño de primaria tendrá que hacer cálculos y comparaciones, como lo hace la autora del problema en su solución del mismo (ver escaneado en anexo).

El enfoque del problema se presta para considerar otros casos de dificultad ligeramente mayor, con cantidades disponibles de dinero que no sean múltiplos de 15 y sin hacer la pregunta como una búsqueda de una de dos alternativas (así da implícitamente la información que comprar en una de las tiendas es más conveniente que comprar en la otra), sino como la búsqueda de una “combinación óptima” de posibilidades. Por ejemplo, considerando una cantidad disponible de 70 nuevos soles. De esta manera, el problema podría entenderse como uno de optimización: el de maximizar la cantidad de botellas que se puede comprar con una cantidad disponible de dinero, teniendo las dos posibilidades descritas. En términos formales, para una ilustración de sus potencialidades, para un nivel superior, podríamos tener el problema

Maximizar $(x + y)$

Sujeto a:

$$15x + 18y \leq 70$$

x, y enteros no negativos,

donde x e y representan docenas de botellas de jugo a los precios S/.15 y S/. 18 respectivamente (en la bodega, la docena resulta a S/. 18)

La solución puede ilustrarse gráficamente; inclusive brinda la oportunidad de usar software matemático dinámico. Es claro que la solución óptima, en el contexto del problema, será $x = 4$, $y = 0$ (comprar solo 4 docenas en la tienda mayorista) y emplear el dinero sobrante (S/. 10) para comprar 6 botellas en la bodega. Así se compran en total 54 botellas. Es interesante notar que gráficamente se puede ver otras soluciones al problema formal enunciado, en cuanto a número total de docenas (4), pero que no permiten adquirir 54 botellas de jugo en total.

En el problema 2 hay también una situación de optimización, pues en ella, se busca minimizar el gasto para la compra de un determinado número de botellas de jugo, teniendo las dos alternativas. Resulta interesante la creación de problemas de optimización, siendo problemas creados libremente por estudiantes que no han sido orientados a poner énfasis en problemas de optimización desde la primaria. Esto abona a favor de la afirmación de la presencia de muchas situaciones de optimización en la vida diaria y a la existencia de una intuición optimizadora, a la que me he referido en artículos anteriores.

Al analizar cada uno de los problemas propuestos encontraremos las posibilidades que brindan para emplear diversos objetos matemáticos: adiciones, multiplicaciones, divisiones, sustracciones, ecuaciones, inecuaciones, gráficas en el plano, etc. Ciertamente, todo esto sin restringirse a sus potencialidades didácticas para alumnos de primaria sino pensando también en la formación matemática de los

profesores y de los futuros profesores de los niños de primaria, como en el análisis que hicimos del problema inicial.

Comentarios

En la hoja que repartí pidiéndoles los problemas, también había un espacio para que escriban algún comentario libre o simplemente tres palabras relacionadas con la experiencia de crear problemas de matemáticas. Las palabras más frecuentes fueron “creatividad”, “interesante”, “contexto”, “razonamiento”, “motivación”, “imaginación” y “entretenimiento”. Asimismo, todos los comentarios revelan que valoran positivamente la experiencia, nueva para todos. Algunos de ellos son:

“También se puede utilizar con los niños para que ellos mismos creen sus propios problemas y así se diviertan y comprendan mejor el tema desarrollado”

“Dinámica importante que se debería realizar a diario, como tarea docente”

“Es muy importante, ya que algunas veces no se toma en cuenta el contexto en que vive el niño”

Los seis problemas expuestos – cuatro de futuras profesoras, uno de una profesora de primaria en ejercicio y uno de un formador de formadores – así como las palabras y comentarios en torno a la experiencia, son una muestra clara más de que existe un gran potencial para crear problemas y nos hace ver lo importante que puede resultar para nuestros niños que estimulemos a los profesores su capacidad de crear problemas de matemáticas, para que ellos a su vez la estimulen en sus clases.

Al trabajar creando problemas de matemáticas, es muy importante el análisis de los problemas creados por los alumnos, pues brinda valiosa información sobre su creatividad y la forma en que ellos manejan la información y los conceptos matemáticos en situaciones concretas, lo cual permite hacer ajustes en los procesos de enseñanza y aprendizaje. Todo esto es particularmente importante en los cursos de formación y capacitación de profesores, por el efecto multiplicador a los alumnos, y por ello es útil manejar algunos criterios de análisis, como:

- Manejo de la información
- Consistencia matemática
- Claridad en el texto
- Calidad de la dificultad

Ciertamente, este análisis debe complementarse con el análisis de las correspondientes soluciones de los problemas creados.

En el Diseño Curricular Nacional de Educación Básica Regular (DCN) del Perú, vemos, con agrado, que se considera la actividad creativa de los alumnos en diversas áreas; en particular, en el área de matemáticas para primaria, encontramos párrafos que van en la línea de poner énfasis en la creación de problemas, a los cuales parece que no se le está dando la debida importancia en los planes de formación y capacitación de profesores de primaria y de secundaria:

“La capacidad para plantear y resolver problemas, dado el carácter integrador de este proceso, posibilita la interacción con las demás áreas curriculares coadyuvando al desarrollo de otras capacidades; asimismo, posibilita la conexión de las ideas matemáticas con intereses y experiencias del estudiante.

El desarrollo de estos procesos exige que los docentes planteen situaciones que constituyan desafíos para cada estudiante, promoviéndolos a observar, organizar datos, analizar, formular hipótesis, reflexionar, experimentar empleando diversos procedimientos, verificar y explicar las estrategias utilizadas al resolver un problema; es decir, valorar tanto los procesos matemáticos como los resultados obtenidos.” (p. 187)

Evidentemente, la capacidad de crear problemas que tengan los profesores, contribuirá fuertemente a estimular y desarrollar la capacidad creativa de sus alumnos. Es tarea de los formadores de los futuros profesores y de los profesores en ejercicio tener planes y propuestas en esta línea. A continuación algunas ideas a tener en cuenta:

- Seleccionar adecuadamente las situaciones sobre las cuales se pedirá crear problemas de matemáticas.
- Crear problemas en grupo.
- Proponer problemas con dificultades graduadas
- Compartir y analizar los problemas creados en torno a una situación dada, desde un punto de vista matemático y didáctico.
- Seleccionar y afinar objetivos para proponer problemas.

Otros problemas en torno a la situación 1

En las experiencias que he desarrollado, al imaginar una situación o recogerla de la realidad para proponerla, he tenido el cuidado de previamente crear personalmente varios problemas en torno a ella, considerando diversos niveles de dificultad, como una manera de examinar el “potencial didáctico”, tanto de la situación como de los posibles problemas. Así, en torno a la situación 1, considerada en este artículo, con el propósito de suscitar discusión, pensé en el siguiente problema:

En una bodega venden botellas de jugo a S/. 1,50 cada una y en una tienda mayorista venden las botellas de jugo solo por docenas, a S/. 15,00 cada docena. Si necesito comprar 35 botellas para llevar a una actividad del Colegio y solo tengo la posibilidad de comprarlas en estos lugares ¿cuál es la manera de hacer la compra para gastar lo menos posible?

Experimenté con dos alumnos y en ambos casos, la respuesta fue comprar dos docenas en la tienda y las 11 botellas faltantes en la bodega. Así el gasto total en nuevos soles es de $2 \times 15 + 11 \times 1,50 = 46,50$.

Sin embargo, al comprar tres docenas en la tienda mayorista, el gasto total es de 45 nuevos soles, que evidentemente es menor que 46,50. Es verdad que se compra una botella más, pero se gasta menos y se cumple el objetivo de tener las 35 botellas. Esto invita a pensar en la posibilidad de crear problemas similares y a plantearse la pregunta de carácter más general ¿en qué casos se gasta menos

comprando más de lo que se necesita? Una interesante ocasión para las conjeturas y para el ensayo y error inteligente.

Un amigo, Jorge Tipe, con gran experiencia creando problemas, ante mi pedido de que proponga un problema en torno a la situación 1, propuso el siguiente:

El director de un colegio tiene que comprar varias docenas de jugo en botella para un evento que va a organizar. Él ha averiguado que en la bodega cerca del colegio cada botella la venden a S/ 1,50 y que en el mercado mayorista solamente venden los jugos por docena, y la docena cuesta S/ 15,00. Como no dispone de mucho tiempo para la compra, si va al mercado mayorista tendría que ir y regresar en taxi, para lo cual gastaría S/ 8,00 de ida y S/ 8,00 de vuelta. ¿A partir de cuántas docenas le sale más barato ir al mercado mayorista que hacer la compra en la tienda?

Le comenté que problema similar lo había usado para introducir el estudio de las funciones lineales y afines en la universidad y que la intersección de las gráficas de las funciones correspondientes permitía dar fácilmente la respuesta.

Podría ser interesante que el problema planteado por Jorge, los niños de primaria lo resuelvan elaborando un cuadro comparativo con columnas como las siguientes:

Número de docenas (n)	Gasto por compra en la bodega ($18n$)	Gasto por compra en el mercado mayorista ($15n + 16$)

Al preguntarle a Jorge cómo había pensado la solución del problema, me dijo que considerando que en cada docena en la tienda mayorista se ahorra S/. 3,00, pero que al haber un gasto fijo de S/. 16,00 por transporte, el número de docenas debe ser tal que supere este gasto fijo, para lo cual se requiere por lo menos 6 docenas. Evidentemente, este razonamiento es el que subyace si se resuelve, para valores enteros de n , la inequación

$$18n > 15n + 16.$$

Todo esto muestra una vez más, cómo la actividad de crear problemas lleva a pensar en nuevas situaciones de carácter más general, a entrelazar diversos razonamientos, a pensar en diversas formas de resolver un problema y a practicar inteligentemente el ensayo y error. Evidentemente, es una forma dinámica de enriquecer la formación matemática del docente y de los alumnos.

Las experiencias muestran que crear problemas contribuye a reforzar e interrelacionar lo aprendido, aplicándolo creativamente a situaciones concretas, con una perspectiva propia. Más aún, ayuda a ir tomando conciencia de manera natural que la matemática está en continua expansión, que no todos los problemas están escritos en los libros, ni todos los problemas están resueltos. Crear problemas contribuirá a que el alumno sienta que es posible colaborar a esa continua expansión de la matemática. Estimular esta capacidad, acompañada con la de resolver problemas, puede hacer percibir mejor la belleza de la matemática y su didáctica, y sentir que es posible contribuir a crear “obras de arte” en la matemática.

Anexo

Problema inicial

Texto del problema:
Margarita por su cumpleaños necesita comprar cierta cantidad de botellas de jugo, para ello cuenta con \$/4.500. En la bodega de su barrio cada botella de jugo le sale a \$/1.50, pero si lo compra en la tienda mayorista la docena le cuesta \$/15.00 ¿En qué tienda le conviene comprar a Margarita las botellas de jugo para su cumpleaños? ¿Por qué?

Breve solución del problema

<u>Bodega del barrio</u>	<u>Tienda Mayorista</u>
C/botella → \$/1.50	Cada 12 → \$/15.00
↳ \$/45 ⇒ 30 botellas de jugo	↳ \$/45 ⇒ 36 botellas de jugo

Rpta: Le conviene comprar en la tienda mayorista porque obtiene mayor cantidad de botellas de jugo para su cumpleaños que en la bodega de su barrio.

Problema 5

Texto del problema:
Miguel Ángel Papá de Rodrigo y Camila de 7 y 8 años respectivamente llega a casa y les pregunta a sus hijos: ¿Desean ir al cine uno de estos días? responden Síiii-- ¡les cuento dijo el papá, al regresar del trabajo observe un letrero donde decía "OFERTA, OFERTA"; LA docena de Jugo cuesta a solo \$/15.00" y claro yo les compro una botellita a cada uno que me cuesta \$/1.50 ¿? si compro por docena podemos ahorrar me dije y con ello podemos irnos al cine. ¿si compro ¿cuantas docenas tendré que comprar para ahorrar el costo de la entrada al cine? Sabiendo que cada entrada cuesta \$/6.00.

Breve solución del problema

Resolución

ahorro x docena = \$/3.00
gasto x docena comprando en la bodega
 $1.5 \times 12 \text{ días} = 18$
costo de una docena = \$/15
ahorro = $\frac{18}{3} = 6$

Rodrigo 1 doc 1 doc	Camila 1 doc 1 doc
↓ ↓	↓ ↓
3 3	3 3
6 soles	6 soles

Papá
1 doc 1 doc
↓ ↓
3 3
6 soles

El papá decide que comprar = 6 docenas y 6 docenas

