UNIÓN
REVISTA IBEROAMERICANA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA

Junio de 2012, Número 30, páginas 81-100
ISSN: 1815-0640

# O ensino do conceito de número: uma leitura com base em Davydov

**Josélia Euzebio da Rosa, Ademir Damazio**

## Resumo

O presente artigo analisa as proficuidades ao inserir as proposições de Davydov escola brasileira. Delimita-se ao ensino do conceito de número, com o envolvimento de quarenta e oito estudantes - entre cinco e sete anos - do primeiro e segundo ano do ensino fundamental. Foca-se o desenvolvimento, pelos alunos, de um sistema de tarefas, com base nos princípios davydovianos de que, desde a entrada da criança na escola, o ensino do número deve contemplar a idéia de medida, isto é, de número real, sem tricotomizar as significações aritméticas, geométricas e algébricas. Evidenciou-se que os estudantes desenvolvem raciocínios que expressam a inter-relação das três significações mencionadas, organizados num movimento que segue do geral ao particular, próprio do pensamento teórico numérico.

## Abstract

The present article analyzes the usefulness of inserting propositions of Davydov, in a Brazilian school. The study is delimited by the teaching of number concepts for fifty students - between five and seven years old- from the first and second years of primary education. It was focused on the development of a task system by students based on Davydov's principles who claims that from the very early years of children in school, the teaching of number must include the idea of measurement of actual number, without using the trichotomy of arithmetic, geometric and algebraic and their meanings. It is highlighted that students develop reasoning that expresses the interrelation of the three meanings mentioned, and it is organized in a movement that runs from general to particular which is peculiar to theoretical thinking

## Resumen

El presente artículo analiza las ventajas al incorporar las propuestas de Davydov en una escuela brasileña. Se delimita a la enseñanza del concepto de número, con la participación de cuarenta y ocho estudiantes - entre cinco y siete años - de primer y segundo año de enseñanza fundamental. Se enfatiza el desenvolvimiento, en los estudiantes, con base en los principios davydovianos de que, desde la entrada del niño en la escuela, la enseñanza del número debe contemplar la idea de medida - de número real - sin tricotomizar la áreas aritméticas, geométricas y algebraicas. Se evidenció que los estudiantes desenvuelven raciocinios que expresan la interrelación de las tres áreas mencionadas, organizadas en un movimiento que sigue de lo general a lo particular, propio del pensamiento teórico numérico.

## 1. A necessidade do estudo e sua base teórica

Um olhar para os documentos oficiais - por exemplo, os Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN) - sobre a organização do ensino da Matemática, em nosso país (Brasil), observamos que a sequência adotada distingue nitidamente os conceitos em: aritméticos, geométricos e algébricos. O foco maior para álgebra é dado, inicialmente, na 6ª série/7º ano do Ensino Fundamental[1] e aprofunda-se na 7ª série/8º ano do Ensino Fundamental (Gil & Ruth, 2008). Desse modo, durante cinco anos, aos alunos é dada a oportunidade de desenvolver predominantemente o pensamento aritmético.

Também é visível que o primeiro contato com a Matemática no contexto escolar é com o conceito de número a partir da contagem de objetos discretos. Nesse sentido, vale citar estudos e proposições de ensino (kami, 1999; Fayol, 1996; Ceryno, 2001) que dão às crianças que iniciam na Matemática a noção numérica com enfoque na correspondência biunívoca.

Assim, a ideia corrente nessas literaturas é de que as significações algébricas e geométricas do referido conceito são adiadas para os anos escolares posteriores. Há, inclusive, uma desconexão como se fossem elementos de ciências distintas (khidir, 2006).

Tal tricotomia ainda se estabelece como algo natural e imutável na Educação Matemática brasileira. No entanto, entre outros pesquisadores, Damazio, juntamente com seus colaboradores, tem estudado as possibilidades de superação da referida tricotomia no processo de elaboração conceitual em situação escolar[2]. (Damazio, Colares e Pereira, 2005. e.g.)

O entendimento da referida separação, que ocorre nos sistemas de ensino escolares, remete-nos ao processo de evolução do próprio conhecimento científico matemático. Cita-se o conceito de número, objeto da presente investigação no âmbito do seu ensino que, com o tempo, adquiriu além da significação aritmética, a geométrica e a algébrica. Atualmente, é na inter-relação de tais acepções organizadas em um movimento conceitual e pedagógico orientado do geral para o particular, do abstrato para o concreto, que está a sua ideia central (Davydov, 1982).

Para Aleksandrov (1976), a aritmética e a geometria não só se aplicam uma à outra, como também, são fontes de métodos específicos, ideias e teorias gerais. Para medir o comprimento de um objeto adota-se certa unidade e se calcula quantas vezes é possível repetir a operação: o primeiro passo (aplicação) é de caráter geométrico, o segundo (cálculo) é de caráter aritmético.

Medir é o meio pelo qual duas entidades diferentes podem ser comparadas em termos numéricos. De acordo com Freudenthal (1975), na vida cotidiana, nenhum aspecto do número é tão importante quanto o de medida de grandezas. Para esse autor, no ensino, desde o início, pelo menos um modelo de grandeza deve ser considerado: o comprimento, “que é a mais matemática das grandezas e um dos conceitos fundamentais da geometria” (Freudenthal, 1975, p. 211). O comprimento é contextualizado, matematicamente, na reta numérica.

A tricotomia entre as significações aritméticas, algébricas e geométricas, presente na organização atual do Ensino de Matemática, constitui em elemento motivador da pesquisa geradora do presente artigo, que procurou estudar o seguinte

[1] O Ensino Fundamental, tanto no Brasil quanto na Rússia é de nove anos. As crianças iniciam por volta de seis anos de idade e concluem por volta dos quinze anos.
[2] Tais estudos estão sendo realizadas no interior do Grupo de Pesquisa em Educação Matemática: Uma Abordagem Histórico-Cultural (GPEMAHC) da Universidade do Extremo Sul Catarinense (UNESC). Contato do grupo: gpemahc@unesc.net

problema: Quais as proficuidades de se considerar as proposições de Davydov para a introdução do ensino do conceito de número nos dois primeiros anos da educação escolar em um contexto brasileiro? Desse problema, desdobra-se outro questionamento: qual o movimento conceitual e pedagógico proposto por Davydov? E, por extensão, as seguintes perguntas de pesquisa: quais significações matemáticas são contempladas e como elas são inter-relacionadas? E, quais as possibilidades dessa proposta no processo de ensino e aprendizagem?

O respaldo teórico para a produção de possíveis respostas aos questionamentos anteriores ou levantamento de novas perguntas é buscado em Vasili Vasilievich Davydov[3]. O referido pesquisador e seus colaboradores, adeptos a teoria histórico-cultural, elaboraram e desenvolveram em sala de aula uma proposta de Ensino de Matemática que é recomendada, ainda hoje, pelo Ministério da Educação e Ciência da Federação Russa para o desenvolvimento em instituições de ensino daquele país (Editora Vita-Press, 2010). Além disso, é referência no cenário mundial, em países como Ucrânia, Cazaquistão, Noruega, França, Alemanha, Holanda, Canadá e Japão. É também investigado nos Estados Unidos, conforme Schmittau e Morris (2004) e Schmittau, (2005). Nesses locais, são produzidas pesquisas que também acenam para a potencialidade das contribuições do sistema em questão para o processo de ensino e aprendizagem.

No presente estudo, foram consideradas as obras de Davydov em espanhol, traduzidas diretamente do russo por Marta Shuare (Davídov, 1987; Davídov e Markova, 1987; Davidov, 1988; Davydov, 1982), em inglês (Davydov, 1988; Davydov, 1999), o livro didático para o primeiro ano do ensino fundamental, elaborado por Davidov, Gorbov, Mikulina e Savieliev (Давыдов et al, 1997) e as orientações metodológicas para o livro didático elaboradas pelo mesmo grupo de colaboradores e continuadores do sistema de Davydov, tais como Gorbov, Mikulina e Savieliev (ГОРБОВ et al, 2008). As obras em russo foram traduzidas para o português, por solicitação do GPEMAHC, por Elvira Kim[4]. O GPEMAHC, além de assumir a revisão e edição de imagens das traduções, também desenvolve pesquisa sobre o desenvolvimento da referida proposta de ensino em escolas da Rede Municipal de Educação de Criciúma, Estado de Santa Catarina, Brasil.

A Proposta de Ensino proposto por Davydov e seus colaboradores supera o divórcio existente entre a aritmética, a álgebra e a geometria no ensino da Matemática Escolar. Em concordância com Vigotski (2000), Davydov (1982) diz que o domínio da álgebra eleva ao nível superior o pensamento matemático, o que possibilita uma visão mais livre, mais abstrata e generalizada. A álgebra liberta o pensamento da criança da prisão das dependências numéricas concretas e o eleva a um nível mais generalizado.

Para Davydov (1982, p. 109), o ensino que segue o movimento da aritmética para a álgebra corresponde às “etapas fundamentais da história empírica” da Matemática. Ou seja: “no princípio os números eram o objeto fundamental (aritmética), depois as transformações idênticas e as equações (álgebra), mais tarde veio o cálculo diferencial e integral (análise Matemática), seguida das operações de conjuntos e as estruturas Matemáticas” (Davydov, 1982, p. 109-110).

[3] No decorrer do texto é adotada a grafia Davydov. Porém, nas citações e referências, adota-se a mesma escrita de autoria da obra.
[4] Professora de nacionalidade russa. Atualmente leciona a disciplina de Russo na Universidade Federal do Paraná, Brasil.

A história do desenvolvimento da ciência, diz Davydov, testemunha que, o aparecimento de algumas ideias não acontece como simples ampliação dos conhecimentos e maior precisão dos conceitos, mas a reestruturação de toda a ciência dada que se renova como sistema integral. Assim, a proposta é que “a estruturação das disciplinas devem considerar este momento transcendental do desenvolvimento das ciências, cujos fundamentos se estudam na escola” (Davydov, 1982, p. 107).

No entanto, Davydov (1988) chama a atenção que a apresentação da história de um conceito não é suficiente para que os estudantes atinjam o nível de pensamento teórico. Sua sugestão é que o professor, na elaboração do conjunto de tarefas a ser desenvolvida pelos alunos para a apropriação de um conceito matemático, coloque-os em atividade, considere a sua gênese, a origem, o que não significa reproduzir o processo empírico da história. Davydov (1982, 1988, 1998) é enfático ao se referir que o papel da educação escolar é tornar a criança contemporânea de sua época e a referência desse trabalho são os conceitos científicos.

Em seus trabalhos, Davydov procurou confirmar, experimentalmente, a tese de Vigotski que a educação das crianças determina o caráter de seu desenvolvimento psíquico (Davidov, 1988). Portanto, a peculiaridade inédita de sua proposta para a educação está no movimento oposto ao sugerido pelas atuais propostas de ensino. Ou seja, promover, desde o primeiro ano escolar, o desenvolvimento do pensamento teórico por meio da apropriação dos conceitos científicos. Isso implica em uma mudança transcendental do conteúdo e dos métodos de ensino. O foco é para o estágio mais desenvolvido da ciência.

No que diz respeito ao ensino da Matemática, Davydov (1982 e 1998) estabelece como uma das suas funções primordiais o desenvolvimento do pensamento teórico, de forma que ultrapasse os limites da aritmética para o desenvolvimento do pensamento algébrico. Seu argumento é de que a aritmética tem fortes vínculos com o conhecimento empírico e, como tal, no processo ensino e aprendizagem, cria obstáculos para o desenvolvimento do pensamento teórico-matemático.

Desse modo, uma das singularidades da proposta de ensino de Davydov está no objetivo que estabelece para a educação escolar: desenvolver o pensamento teórico em detrimento do pensamento empírico. Este tem sua importância na vida cotidiana; porém, obstaculiza o caminho quando se pretende que o estudante compreenda os conceitos científicos e desenvolva o pensamento teórico (Davýdov, 1982). No entanto, o enfoque teórico não pode ser identificado como abstrato e o empírico como concreto. As relações entre ambos são bem mais complexas e exigem maior aprofundamento.

O conhecimento empírico pode ser elaborado por meio da comparação de objetos e das suas representações, o que permite separar neles as propriedades iguais, comuns. Nessa distinção, separa-se a propriedade geral, que permite catalogar objetos individuais/soltos em uma determinada classe formal, independentemente, de eles estarem ou não relacionados entre si (Davídov e Markova, 1987; Davydov, 1982). Por exemplo, no ensino do conceito de número, é proposto que os estudantes separem figuras de dois corações, duas estrelas e dois quadrados e extraiam a propriedade comum desses grupos, a quantidade dois (2).

Na base do conhecimento empírico se encontra a observação, que reflete só as propriedades externas dos objetos e, por isso, se apóia totalmente nas representações visuais. Formalmente, a propriedade geral e as particulares dos objetos são colocadas em um mesmo plano. A concretização do conhecimento empírico consiste na seleção de ilustrações e exemplos. O meio indispensável para fixar o conhecimento empírico é a palavra – termo (Davídov e Markova, 1987 e Davydov, 1982).

O conhecimento teórico, por sua vez, surge a partir da análise do papel e da função que cumpre certa relação entre as coisas, dentro do sistema desmembrado/desarticulado. Busca-se a relação, simultaneamente, real e especial como base genética de outras manifestações do sistema. Esta relação atua como forma geral ou essencial do todo reproduzido mentalmente. O conhecimento teórico, que surge com base na transformação dos objetos, reflete suas relações e enlaces internos (Davídov & Markova, 1987; Davydov, 1982).

Durante a reprodução do objeto em forma de conhecimento teórico, o pensamento sai dos limites das representações sensoriais, se fixa na conexão entre a relação geral e suas manifestações particulares. A concretização do conhecimento teórico requer sua conversão em uma teoria desenvolvida por via da dedução e explicação das manifestações particulares do sistema, a partir de sua fundamentação geral (Davídov e Markova, 1987; Davydov, 1982).

Assim, a fundamentação geral do conceito de número, de acordo com Davydov (1982), surge a partir do estudo das grandezas. Desse modo, o objetivo/finalidade principal do sistema de Matemática proposto por Davydov e seus colaboradores é que, ao finalizar o ensino fundamental, o estudante tenha formado uma concepção autêntica e completa do número real[5], cuja base é o conceito de grandeza. Ou seja, os números naturais e reais são um aspecto particular de um objeto matemático mais geral, o conceito de grandeza, conforme apresentamos na sequência.

## 2. Uma síntese da proposta de Davydov para o ensino do conceito de número

Na proposta de ensino de Davydov, as tarefas orientam o estudante para a apropriação das relações gerais de um determinado conceito matemático e, gradativamente, segue para as suas manifestações mais específicas e particulares. Davýdov (1982, p. 431-441) traduz seus pressupostos para o processo de ensino e de aprendizagem da Matemática, especificamente, para o conceito de número. Este, ao ser concebido em seu teor teórico de número real com a noção de medida, é apresentado no conjunto de tarefas como uma relação multiplicativa, isto é, na forma $\frac{a}{c} = n$ (*n* é qualquer número, *c* é a medida de qualquer objeto que se inclui *n* vezes em *a*). Para tanto, estabelece três etapas, a seguir sintetizadas.

**Primeira etapa:** a criança não tem contato com a contagem e nem com os algarismos. Primeiro, elas "assimilam com bastante detalhe os conhecimentos sobre grandezas" (Davydov, 1982, p. 431). Elas destacam nos objetos e figuras os parâmetros das grandezas (massa, volume, área, comprimento, etc.), além de

[5] Em Davídov, 1988, p. 185 há um erro de tradução, está escrito número natural em vez de número real.

estabelecer comparações entre uma e outra grandeza, com a especificação de igualdade ou desigualdade das mesmas. As crianças anotam "os resultados da comparação mediante fórmula literal, quer dizer, mediante a forma geral de representação de relações entre qualquer grandeza" (p. 431), conforme a figuras 1 2.

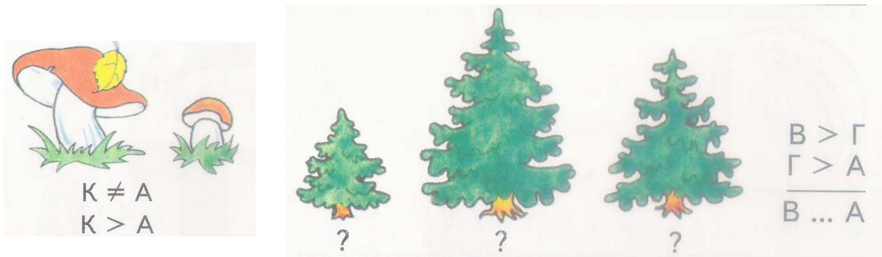



**Figura 1: resultado da comparação entre grandezas mediante fórmula literal**

**Segunda etapa:** Consiste em ensinar as crianças a anotarem as variações das grandezas com sinais de adição e subtração (figura 2).

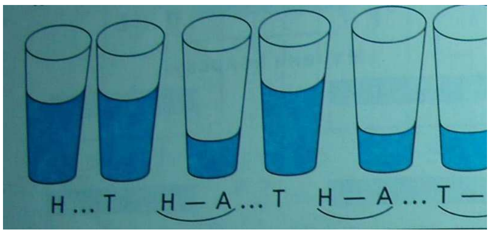
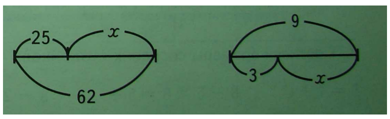



**Figura 2: variações das grandezas**

Esses conhecimentos permitem que elas resolvam "os mais diversos problemas relacionados com a necessidade de considerar o momento de 'equilíbrio' e as condições de sua manutenção" (Davydov, 1982, p. 432). No terceiro mês do primeiro ano escolar as crianças estudam os métodos de passar da desigualdade para a igualdade e da igualdade para a desigualdade, ou seja, "aprendem a formar e escrever equações" (Figura 3) (Davydov, 1982, p. 433). Por exemplo, "se $a < b$, da desigualdade cabe passar para a igualdade: $a + x = b$. O sentido de variação das grandezas se determina pelas condições do problema (se $a > b$, $a - x = b$) quando se requer igualar $a$ em relação a $b$" (idem).




$25 + x = 62$ e $9 = 3 + x$

**Figura 3: formação e escrita de equações**

**Terceira etapa:** O número é introduzido como caso particular de representação das relações gerais entre grandezas, ou seja, quando se toma uma delas como unidade de medida de cálculo da outra. O número é visto na reta numérica, onde também são, inicialmente, realizadas as operações fundamentais. Desse modo, o número é concebido como um conceito em movimento: tem seu lugar geométrico, pode ser representado genericamente e cada um deles tem uma relação determinada com os demais. Com base no ensino experimental, Davydov afirma que os "estudantes da primeira série passam a usar os conceitos anteriormente considerados inatingíveis para as crianças desta faixa etária” (Давыдов et al., 1997, p. 02).

## 3. A perspectiva de Davydov do ensino de número no contexto escolar

A partir das proposições de Davydov, apresentadas anteriormente, elaboramos um sistema de tarefas com os mesmos princípios da proposta de ensino do referido autor, e desenvolvemos em sala de aula numa escola localizada na região metropolitana de Curitiba, Estado do Paraná, Brasil. A escolha da escola ocorreu pela sua abertura às pesquisas sobre novas alternativas para o processo de ensino e aprendizagem. Em 2009, ano que fora realizada a pesquisa existia uma indefinição, no sistema educacional brasileiro, no que diz respeito ao início da sistematização conceitual, se deveria ter início no primeiro ou no segundo ano escolar. Isso ocorreu pelo prolongamento do Ensino Fundamental de oito para nove anos. Por isso, a pesquisa envolveu quarenta e oito estudantes dos referidos anos escolares, com idade que oscilava entre cinco e sete anos, no período regular das aulas.

Desde o início, a atenção em cada tarefa foi para que não se dispersasse da prioridade de atribuir ao conceito de número, as significações algébricas, geométricas e aritméticas. Na análise, o foco foi para as possibilidades dessas significações se inter-relacionarem no processo de ensino e aprendizagem do conceito de número. Por extensão, centramos nas proficuidades de se antecipar o processo de apropriação de tais significações para o primeiro ano do Ensino Fundamental, que normalmente, no sistema escolar brasileiro, acontece em anos escolares bem mais avançados.

Estudar um objeto de pesquisa dessa natureza exigiu uma série de precauções, uma vez que, o contexto era de uma atividade educativa com desdobramentos em atividade de ensino, executada pelas professoras; atividade de estudo, compartilhada pelas crianças; como também, da atividade de pesquisa, cuja responsabilidade era de um dos pesquisadores que se fez presente durante todo o desenvolvimento do sistema de tarefas.

Embora tenha suas especificidades, cada uma delas, requer centralidade de um tipo de sujeito na sua execução (estudante, professora e pesquisadora), mesmo assim, elas constituem uma “unidade”, que, segundo Triviños (1995) é característica do desenvolvimento das formações. Esses papéis definidos historicamente, trazem, portanto, posicionamentos contrários, mas têm existência movida por dependência de um em relação ao outro, apesar das peculiaridades essenciais de cada um. Há, pois, nessa relação dialética um movimento em que atividades se coexistem pela semelhança ou identidade de uma necessidade que as impulsionam: aprendizagem de conteúdos matemáticos e, nesse caso, o número.

Mas, o movimento e a unidade não ocorrem somente entre as três atividades mencionadas, pois o sistema educacional estabelece, na atividade, um local para suas execuções: a escola. Por isso, ela foi a referência inicial de aproximação para posteriormente, ocorrer o contato com os professores e com os estudantes. Sem perder de vista essa estrutura hierárquica é que ao chegarmos à escola, apresentamos o projeto à diretora e às pedagogas, que permitiram a apresentação aos professores. As incumbências no processo de pesquisa não são lineares, o que requer explicitações no primeiro contato. Assim foi combinado e acordado, que uma delas, o estudo do sistema de tarefas, durante as horas atividades que os professores dispunham para planejamento curricular estabelecido pela própria escola, nas quintas-feiras. Também ficou estabelecido que o desenvolvimento do estudo em sala de aula contaria com a parceria professoras/pesquisadora/crianças. Foram nove aulas em cada turma com a duração de, aproximadamente, uma hora e meia cada. O grupo do primeiro ano foi composto por vinte e cinco estudantes, entre cinco e seis anos de idade; e, o grupo do segundo ano por vinte e três estudantes, com idades de seis e sete anos.

O sistema de tarefas foi amplamente discutido, nas reuniões de estudo, para que a participação da pesquisadora e professoras, em sala de aula, ocorresse numa relação de igualdade e de reflexões. A adesão espontânea, por parte das professoras, foi uma manifestação de compromisso e interesse pelo estudo que contribuiu decisivamente para um envolvimento movido por reflexões no estudo dos pressupostos teóricos da proposta de Davydov, quanto ao sistema de tarefas, e, no planejamento do seu material objetal. Nesses momentos, observamos manifestações de entendimento do caráter inovador daquele que estava em estudo e em proposição.

Entretanto, essas compreensões não eram vistas como surpresa, mas como expressão de compromisso, uma vez que elas poderiam ser acomodadas por desânimo, pela não familiarização com o ensino do conceito de número com idéias de medida, com a preocupação de desenvolvimento do pensamento teórico. Ou seja, elas estavam diante de desafios a superar para que diante dos estudantes se apresentassem com a mesma segurança de quando adotavam a proposta convencional.

No processo de execução das tarefas, por parte dos estudantes, procurávamos ficar atentos à identificação de suas dificuldades, para planejar novas tarefas ou reorganizá-las com o intuito de garantir as formas mais elaboradas do pensamento conceitual. Essa produção constitui-se em momentos de esforços e apropriações que subsidiavam as orientações necessárias às crianças.

As análises se pautaram, empiricamente, nos procedimentos das crianças, registrados por meio de filmagens e, posteriormente, transcritos. Vale salientar que a inserção na sala de aula tinha uma base teórica que fundamentou não só a elaboração do sistema de tarefas de ensino, quanto à análise dos dados, qual seja: a teoria de Davydov. Para tanto, uma de suas orientações observadas é de que o processo de elaboração do conceito de número, pela criança, ocorre a partir do estudo das relações entre grandezas. Por extensão, se apresentam as significações aritméticas, geometrias e a algébricas.

A primeira etapa do sistema de tarefas, elaborado a partir das orientações de Davydov para a presente pesquisa, consistia na análise do material objetal, com a identificação de suas diferentes características e relações.

O material apresentado aos estudantes era composto por dez recortes de cartolina, conforme mostra a figura 4, com as seguintes medidas: recorte **A**: 3 cm x 3 cm; recorte **B**: 3 cm x 6 cm; recorte **C**: 3 cm x 9 cm; recorte **D**: 3 cm x 12 cm; recorte

**E**: 3 cm x 15 cm; recorte **F**: 3 cm x 18 cm; recorte **G**: 3 cm x 21 cm; recorte **H**: 3 cm x 24 cm; recorte **I**: 3 cm x 27 cm; recorte **J**: 3 cm x 30 cm.

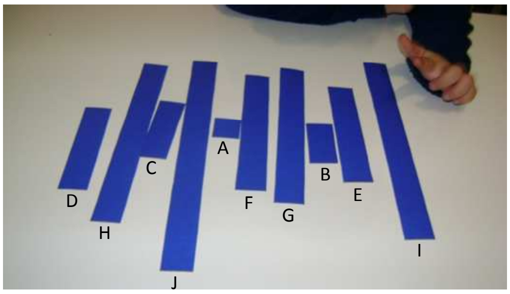



**Figura 4: material apresentado aos estudantes**

Em momentos anteriores à pesquisa as professoras titulares haviam abordado os conceitos de quadrado e retângulo, o que levou todas as crianças, de posse do material, adotarem a mesma denominação para os recortes.

Diante dessa denominação equivocada, as crianças foram orientadas a identificar a tridimensionalidade dos recortes e suas diferentes grandezas (comprimento da altura, da largura, da espessura e área das superfícies). Por isso, nas reflexões com as crianças, a atenção voltou-se para a necessidade da indicação de que não se tratavam de quadrados e de retângulos, pois tais figuras geométricas, que são bidimensionais, se apresentam nas faces dos recortes. Esses, por sua vez, apresentam três dimensões. A conclusão inicial das crianças tinha o seguinte teor: não dá para pegar um quadrado ou um retângulo na mão e sim um recorte, cujas faces apresentem as referidas formas. Em contraposição, se recorreu as orientações de Davydov, referente ao conceito teórico de quadrado. Nesse nível de escolaridade, extrapola-se a referida síntese, inicia-se com a ideia de linha quebrada fechada composta por quatro segmentos de retas interligados por quatro pontos dispostos em uma determinada posição.

A análise do próprio material requereu a reflexão sobre alguns conceitos que, a primeira vista, não estavam relacionados ao conceito de número, mas eram fundamentais uma vez que na metodologia adotada a gênese do referido conceito surge a partir das relações entre grandezas. O uso da expressão "dá para pegar na mão" era manifestação de que a atenção fosse redobrada para atender tripla necessidade. A primeira, que se evitasse a apresentação brusca de uma linguagem que não fosse tão distante daquela conhecida pela criança. A segunda, para atender as possibilidades intelectuais da criança. Ou conforme Vigotski (2000), estar no nível da zona de desenvolvimento imediato (ZDI), caracterizada pelas condições prospectivas de apropriação de novas significações. A terceira, pela oportunidade de explicitação de conceitos das grandezas, fundamentais ao conceito de número, de acordo com a perspectiva teórico-metodológica adotada. Isso ocorre com a identificação e inter-relação entre as diferentes dimensões: bidimensional e tridimensional.

Nesse momento, a análise dos estudantes volta-se para identificação de que cada recorte tem as seguintes características: seis faces, o comprimento da altura e da largura varia dependendo da posição (horizontal ou vertical) e o comprimento da espessura que era constante. Inicialmente, para se referir às áreas das bases, as crianças utilizavam expressões de seu vocabulário cotidiano: “parte de cima” e “parte de baixo”. Como forma de aquisição da linguagem conceitual científica, passamos a nomeá-las, respectivamente, de base superior e inferior, o que foi aceito sem objeção pelas crianças.

Feita essas orientações, as crianças identificaram dois parâmetros de grandeza (comprimento e área) e estabeleceram relações do tipo “maior”, “menor” e “igual” sem o uso do número. Utilizaram apenas os termos *mais curto, mais longo, maior que, menor que e igual a*.

Nessa etapa, para que a comparação incidisse nas grandezas e não nos recortes, as crianças foram orientadas para explicitação da grandeza em referência ao estabelecer a comparação, por exemplo, um recorte é maior que outro pelo comprimento da altura e não apenas, um recorte é maior que o outro. Tal orientação atende o propósito de Davydov de que o conceito de número surja, no processo de ensino e aprendizagem, a partir do estudo das grandezas apresentadas objetalmente, e não a partir de objetos em si.

Vale ressaltar que Davydov propõe o movimento do pensamento conceitual que segue do geral para o particular. O geral, por sua vez, é as diversas relações entre as grandezas representadas algébrica e geometricamente. O particular é o ponto de chegada, expresso no valor da medida da grandeza por meio de um número, ou seja, em sua significação aritmética. O referido valor é o resultado de uma lei elaborada com base nas relações gerais.

Nesse movimento, ainda no âmbito geral, ocorre a segunda etapa do sistema de tarefas que se caracteriza pela representação literal das grandezas, isto é, por meio de letras e suas relações por meio de símbolos. Para tanto, os estudantes organizaram os recortes, sobre a mesa, com adoção dos seguintes critérios: do menor para o maior e do maior para o menor, tendo como referência o comprimento da altura e base constante. Durante a execução, apenas um estudante precisou de nossa ajuda que, com algumas orientações, concluiu a tarefa, conforme a figura 5.

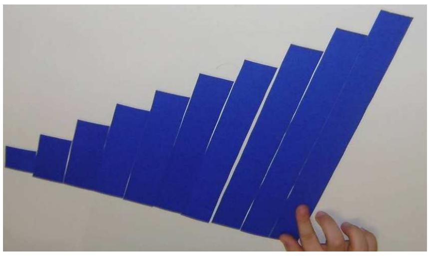


**Figura 5: organização dos recortes do menor para o maior**

Na sequência, propusemos aos estudantes que atribuíssem uma letra minúscula para representar a grandeza (área) de cada recorte. Combinamos que seguiríamos a sequência dos recortes, ou seja, de *a* até *j*. Em seguida comparamos as grandezas utilizando os símbolos propostos por Davydov. Os estudantes conheciam os termos maior, menor, igual e diferente, apresentamos, então, os seguintes símbolos: >, <, = e ≠. Desse modo, os símbolos são introduzidos para contribuir com o registro das comparações de um tipo especial de característica do material: a grandeza.

Combinamos com as crianças que os recortes seriam organizados verticalmente (Figura 6), que ao nos referir à área da base utilizaríamos simplesmente o termo base e para a área da face maior o termo área. O diálogo, a seguir, ocorreu no segundo ano entre a professora (**P**) e uma estudante (**M)** com sete anos, durante a comparação dos recortes **B (**3 cm x 6 cm) e **C** (3 cm x 9 cm).

**Figura 6: Recortes B e C**

> **M: -** *É igual*. **P: -** *O que é igual*? **M: -** *a base*. **P: -** *Como você descobriu*. **M: -** *Coloquei um sobre o outro*. **P: -** *Agora compare pela altura*. **M: -** *Diferentes*. **P: -** *Como você sabe que eles são diferentes pela altura*? **M: -** *Eu coloquei um sobre o outro*. **P: -** *Qual é maior*? **M: -** *O recorte C*. **P: -** *Tem outro jeito de descobrir qual é mais alto*? **M: -** *Tem, colocando um ao lado do outro*. **P: -** *E qual tem a área maior*? (M coloca um recorte ao lado do outro). **M: -** *O recorte C*. **P: -** *Por que*? **M: -** *O recorte C tem mais espaço para pintar.* **P: -** *Como você chegou a essa conclusão*? **M: -** *Eu coloquei um ao lado do outro*. **P: -** *E tem outra forma de verificar qual é maior na área da superfície*? (M sobrepõe os recortes). **M: -** *Colocando um sobre o outro.*

A estudante **M** executava, concomitantemente, a tarefa na forma verbal e escrita (no quadro negro), conforme figura 7:

| BASE | ALTURA | AREA |
|---|---|---|
| $b = c$ | $b < c$ e $c > b$ | $b < c$ e $c > b$ |

**Figura 7: Produção escrita da estudante M**

Vale esclarecer que a representação com letras maiúsculas refere-se aos recortes e as letras minúsculas às grandezas (comprimento e área). Para Slovin e Venenciano (2008) essa primeira utilização de letras, proposta por Davydov, expressa o geral do pensamento conceitual em detrimento de quantidades específicas. Desse modo, de acordo Angle (2009), é que se introduz de forma significativa os elementos da álgebra abstrata. Para **M**, o *b* e o *c* representavam uma determinada grandeza, representada objetalmente nos recortes B e C.

Nessa etapa, as crianças: destacaram algumas grandezas (área, comprimento), fizeram comparações, determinaram a igualdade e desigualdade, designaram os objetos por letras maiúsculas e as grandezas por letras minúsculas, bem como, anotaram os resultados da comparação por meio de letras e símbolos. Além disso, as orientações possibilitaram para que as crianças percebessem que não bastava indicar a igualdade ou desigualdade das grandezas, mas era necessário nomeá-las. Além disso, elas se dedicaram à distinção e uso dos sinais "maior" e "menor", uma vez que são semelhantes apenas voltados para lados opostos. Outra conclusão dos estudantes foi que o registro de comparação pode começar por qualquer das duas grandezas, porém, ao se tratar da relação "maior – menor", o sinal muda.

Com base na segunda etapa proposta por Davydov, apresentamos algumas tarefas cujo teor era a passagem da desigualdade para a igualdade e vice-versa por meio da adição e subtração. Como forma de explicitar alguns resultados dos procedimentos dos estudantes, destacamos o diálogo, ocorrido no primeiro ano, entre a professora **P** e a estudante **E** (6 anos), ao analisarem os recortes **D** (3cm x 12cm) e **E** (3cm x 15cm)**:**

**Figura 8: Recortes D e E**

**P: -** *O que você vai fazer para ficar na mesma altura?* **Colegas: -** *Ah, quem não sabe*. (Em silêncio, **E** coloca o recorte **A** sobre o recorte **D**). **P: -** *Pessoal, ficou na mesma altura?* **Colegas: -** *Sim.* **P: -** *Como você registra o que você fez*? (**E** escreve a seguinte afirmação: *a + d = e*.) **P: -** *Por que você usou esse sinal* (+)? **E: -** *Porque eu juntei a altura do A com a Altura do B.* **P: -** *E esse sinal* (=), *você usou por quê?* **E: -** *Porque ficou igual na altura quando eu coloquei o A.*

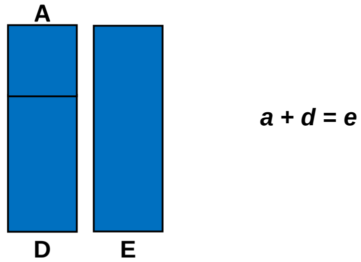



**Figura 9: movimento realizado por E**

Todas as crianças de ambos os anos escolares estabeleceram as relações corretamente e adotaram a mesma representação na forma literal. Por isso, a proposição subseqüente foi a tarefa de realização do movimento inverso, por meio da ideia de subtração. Objetalmente, os estudantes cortaram do recorte **E** uma parte igual ao comprimento da altura do recorte **A** e a equação formada foi: *e – a = d*.

No início, os estudantes precisavam manipular os recortes para resolver tarefas propostas. Porém, com o desenvolvimento das demais tarefas, aos poucos, deixavam os recortes sobre a mesa e apenas os observavam, para, posteriormente, apresentar a representação escrita da igualdade.

Na sequência, propomos aos estudantes uma tarefa para ser realizada individualmente, com figuras impressas, conforme a figura 10.

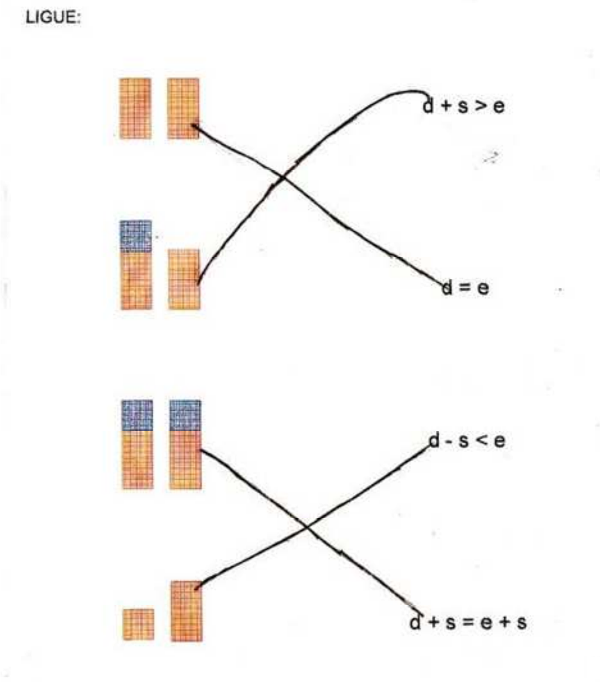



**Figura 10: tarefa impressa**

As crianças deveriam desenvolver a tarefa anterior considerando a altura ou a área das figuras. Após todos concluírem, solicitamos que explicassem como pensaram para desenvolvê-la. A seguir, apresentaremos o diálogo entre a professora **P** e o estudante **J** do segundo ano (7 anos):

> **J: -** *Eu vi que tem duas figuras do mesmo tamanho, e aqui* ***d*** *igual a* ***e****. Como lá são do mesmo tamanho, então eles são iguais.* **P: -** *E depois?* **J: -** *Depois eu já sabia qual era* ***d*** *e qual era* ***e****, e eles tinham a mesma altura. Mais o* ***s****, aí ficou maior que* ***e****.* **P: -** *E aí, como que você continuou?* **J: -** Depois *eu fiz esse* (último). **P: -** *Como que você pensou esse?* **J: -** O **d** e o ***e*** *são do mesmo tamanho. O* ***d*** *cortou, fica* ***d*** *menos* ***s*** *menor que* ***e****.* **P: -** *Esse que cortou é do tamanho de qual figura?* **J: -** *Do* ***s****. Depois só sobrou esse.* **P: -** *Mas como que você pensa esse?* **J: -** *O* ***s*** *e o* ***s*** *são do mesmo tamanho,* ***d*** *mais* ***s*** *é igual* ***e*** *mais* ***s****.*

As interações que promovemos com os estudantes, mediadas pelo objeto de conhecimento, foram fundamentais para que as ideias fossem elaboradas para aquela tarefa apresentada. As crianças transitaram em princípios próprios do pensamento algébrico como: igualdade, equivalência e transitividade.

De acordo com Davídov (1988), os modelos expressos por letras, conforme apresentados nas tarefas anteriores, desempenham um importante papel na formação dos conceitos matemáticos. Eles unem o sentido abstrato com a concretização objetal. A abstração da relação matemática pode ser produzida só com ajuda das fórmulas expressas por meio de letras. Porém, nelas se fixam os resultados das ações realizadas real ou mentalmente com os objetos. As representações espaciais, no caso anterior às figuras impressas, por terem uma grandeza visível, permitem que as crianças realizem transformações reais, cujos resultados não só podem ser supostos como também observados. O diálogo anterior expressa a capacidade da criança para avaliar as relações abstratas dos objetos. Desse modo, confirma a afirmativa de Davydov quando este diz que, ao mudar os métodos e o conteúdo de ensino, as crianças são capazes de pensar abstratamente antes do que normalmente é previsto pelos sistemas tradicionais (1988).

Na elaboração do sistema de tarefas, o objetivo definido, com apoio em Davidov (Davydov, 1988 e Davidov, 1988), foi a apropriação da experiência socialmente elaborada (conhecimentos e capacidades) que supõe a formação, nos estudantes de menor idade, de abstrações e generalizações, características do pensamento teórico. Para tanto, as tarefas indicam os princípios dos conhecimentos de caráter geral e abstrato que precederam aqueles mais particulares e concretos que serão introduzidas na terceira etapa. Desse modo, o movimento parte da base universal para as manifestações particulares, ou seja, ascende do abstrato ao concreto. Vale ressaltar que até o final dessa segunda etapa ainda não fora introduzidas as particularidades da contagem, o que ocorre na sequência.

Nessa terceira etapa é inserida a quantificação. As tarefas não enfatizam mais os procedimentos de comparação direta das grandezas. Para resolvê-las, é necessário a mediação de uma unidade de medida. Nesse caso, o princípio comparativo é: A busca de quantas vezes a unidade de medida cabe naquilo que está sendo medido, o que leva à criança determinar a relação múltipla universal a ser modelada.

Com base na terceira etapa da proposta de Davydov, aos estudantes foi proposto que dividissem cada recorte em pedacinhos iguais à unidade *a*, ou seja, o recorte A**.** E, também, verificassem quantos, desse recorte, seria possível fazer com os demais. Em conformidade com os procedimentos dos estudantes, foi apresentada a notação escrita, acompanhada de ampla discussão com eles. O foco incidia na identificação da quantidade de unidade em cada recorte na comparação, conforme figura 11.

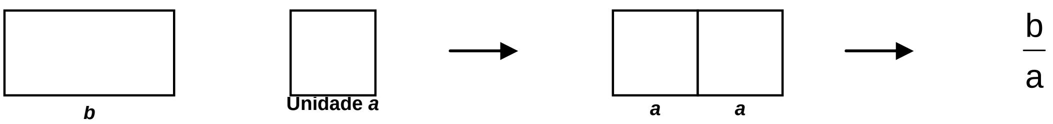



**Figura 11: quantificação a partir da inter-relação entre as significações aritméticas, algébricas e geométricas.**

A área *b* corresponde à medida da superfície maior do recorte **B.** Por sua vez, a unidade *a* medida da superfície maior do recorte **A**. Observa-se que essa unidade coube duas vezes na superfície do recorte **B**, ou seja, a área com medida *b*, dividida em pedacinhos iguais ao *a* (unidade de medida), é igual a *dois*. Tal afirmação é traduzida na seguinte notação: $\frac{b}{a} = 2$. Nesse procedimento, as significações geométricas (comparação entre as áreas), algébricas (modelo genético do conceito de número: $\frac{a}{c} = n$) e aritméticas (resultado da medida: 2) constituem um todo indissociável.

O mesmo procedimento foi realizado com todos os recortes, cujos resultados foram traduzidos, conforme as igualdades a seguir:

$$J:\ \frac{j}{a}=10,\qquad I:\ \frac{i}{a}=9,\qquad H:\ \frac{h}{a}=8,\qquad G:\ \frac{g}{a}=7,\qquad F:\ \frac{f}{a}=6,$$

$$E:\ \frac{e}{a}=5,\qquad D:\ \frac{d}{a}=4,\qquad C:\ \frac{c}{a}=3,\qquad B:\ \frac{b}{a}=2,\qquad A:\ \frac{a}{a}=1$$

Observa-se que, na proposta de Ensino de Davydov, de acordo Slovin e Venenciano (2008), o número é expressão da relação entre uma unidade de medida escolhida e uma grandeza.

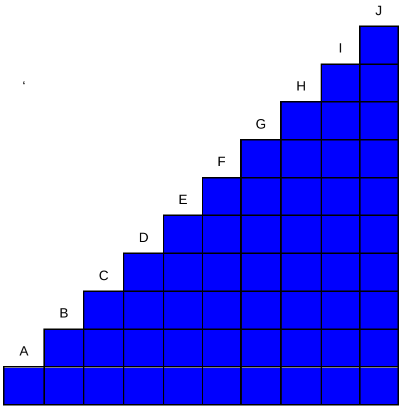
Todos os estudantes do segundo ano realizaram a ação proposta de traçar as unidades em cada recorte sem manifestar dificuldades. Entretanto, no primeiro ano, pois, alguns estudantes se equivocaram por subdividir a superfície a ser medida em tamanhos menores ou maiores que a unidade (*a*). Porém, eles percebiam o erro, ao comparar com o resultado dos colegas.

A partir da análise de quantas vezes a medida dada está contida na superfície a ser comparada, surge o modelo (formulado por letras) do processo, isto é, o resultado da diferenciação da relação múltipla: $\frac{a}{c}=n$. De acordo com Davydov (1982), esta fórmula geral do modelo possibilita que as crianças identifiquem qualquer relação múltipla particular.

A modelação ligada ao caráter visual é amplamente utilizada pela didática tradicional e reflete apenas as propriedades externamente observáveis. Porém, na Proposta de Ensino de Davídov, o caráter visual tem um conteúdo específico, por expressar as relações e as vinculações essenciais ou internas dos objetos e fenômenos. Diferentemente da didática tradicional, em que o visual concreto reflete apenas as propriedades externamente observáveis.

Os números naturais são abstrações que surgiram, historicamente, como contagem de coleções de objetos, isto é, de grandezas discretas. No entanto, as necessidades atuais da vida diária demandam a medição de grandezas contínuas. Para satisfazer as necessidades básicas relativas às medições, os números naturais se tornaram insuficientes, uma vez que raramente uma unidade de medida cabe um número exato de vezes naquilo que é medido. Surge, então, o número racional que é o quociente $\frac{\mathrm{P}}{\mathrm{Q}},\ Q \neq 0$, de dois números inteiros. O sistema dos números racionais contém todos os inteiros e todas as frações e é suficiente para fins práticos que envolvem medições (EVES, 2007). Por essa razão matemática, no sistema de Davydov, a gênese para os números naturais é a mesma dos racionais.

No contexto dessa base epistemológica é que os estudantes desenvolveram as tarefas que tinham como referência análise do material, movidos pela relação de comparação unidade/recortes. Eles concluíram, empiricamente, que o material organizado do maior para o menor ou do menor para o maior ‘formava uma escada’. Porém, avançaram em termos conceituais em relação à conclusão anterior, pois perceberam que: “seguindo a ordem do menor para o maior, cada novo recorte é mais alto um ***a***". E "seguindo a ordem do maior para o menor, cada novo recorte é mais baixo um ***a***". Com orientação e discussão sobre as dúvidas, cada estudante elaborou sua síntese, conforme figura 12, no verso de cada recorte correspondente.




$J = a + a + a + a + a + a + a + a + a + a = 10a$

$I = a + a + a + a + a + a + a + a + a = 9a$

$H = a + a + a + a + a + a + a + a = 8a$

$G = a + a + a + a + a + a + a = 7a$

$F = a + a + a + a + a + a = 6a$

$E = a + a + a + a + a = 5a$

$D = a + a + a + a = 4a$

$C = a + a + = 3a$

$B = a + a= 2a$

$A = a = 1a$

**Figura 12: Síntese do processo de quantificação**

Conforme mencionado, a gênese para os números naturais e racionais é a mesma. Portanto, o ponto de partida é essa origem comum, o geral, para o posterior estudo das particularidades, nesse caso, o número natural. Cada sucessor é maior que seu antecessor em uma unidade, como também, cada antecessor é menor que seu sucessor em uma unidade.

Seguindo a orientação de Davydov, na sequência, aos estudantes é proposta a tarefa de uma construção geométrica específica: a reta numérica. Para tal, foi apresentada uma reta, desenhada em cartolina, que eles analisaram com base nas seguintes condições: ponto inicial, direção e unidade (unidade *a*).

Inicialmente eles localizaram, na reta, a medida do comprimento da altura de cada recorte. Com base em experiências anteriores com o ensino da medida e em resultados de pesquisa (Fritzen, 2011), a atenção voltou-se para possíveis equívocos de algumas crianças de começar o processo de medição, em vez do zero, a partir da unidade ou do início da cartolina em que a reta estava desenhada. O que não aconteceu, pois consideraram o zero como referência inicial, conforme figura 13.

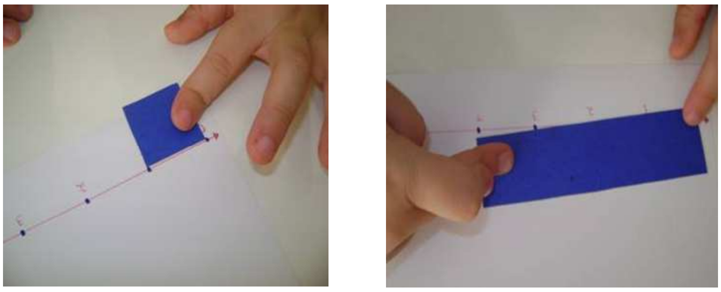


**Figura 13: Medição dos recortes na reta numérica**

Mesmo assim, tiveram que justificar a adoção de tal critério, ao que expressaram explicações similares a que segue: do *zero* ao *um* era *um a*, por isso, começar do *zero*, para não deixar um *a* para trás.

A formulação de tal síntese é decorrente do trabalho com as grandezas, em especial o comprimento, que contribuiu para que os estudantes não cometessem o equívoco conceitual ou dúvidas do ensino tradicional, qual seja: iniciar do um; do zero; quando se tratava do início da reta numérica e da régua.

Na continuidade, os recortes foram medidos também com a régua. Inicialmente a ideia de que na régua o resultado da medição era outro gerou polêmica. As crianças concluíram que na reta, naquele momento utilizada como régua de papel, possuía as medidas maiores, exatamente três vezes. Ou seja, cada unidade da reta numérica media três centímetros.

Observa-se que a maioria das tarefas tinha algo em comum: a ênfase na grandeza comprimento. Isso se justifica por ser a unidade básica mesmo quando se trata da medição de comprimentos, áreas,... isto é, desempenha um papel importante nas aplicações da matemática (Eves, 2007, p. 493).

## Considerações finais

No decorrer do texto, foi exposto as etapas fundamentais para introdução do conceito de número como a inter-relação das significações aritméticas, algébricas e geométricas, a partir das proposições de Davydov. No início, a abordagem voltou-se às várias relações entre as grandezas e suas propriedades. Por meio da ação objetiva, as crianças reproduziram a base geral do conceito de número: a relação entre uma unidade de medida e uma grandeza, que é a forma geral de obtenção de qualquer número inteiro e fracionário. (Davydov, 1982).

O sistema de tarefas contemplava o desenvolvimento de raciocínios matemáticos complexos que requeriam que as crianças realizassem a reflexão no plano discursivo com auxílio das fórmulas literais. As manifestações e procedimentos dos estudantes são credenciais que remetem a Davydov ao dizer que a modificação substancial do conteúdo do ensino pode adiantar a transição ao nível das operações formais para muito antes dos 11 ou 12 anos, como prevê outras correntes teóricas. (Davydov, 1988; Davidov, 1988).

Com a execução do sistema de tarefas, o pensamento da criança percorreu, de forma orientada, o movimento de ascensão do abstrato ao concreto e do geral para o particular. Inicialmente as crianças não tiveram contato com os números e suas representações simbólicas. Em vez disso, estabeleceram comparações entre grandezas de forma geral, que estabelecia a inter-relação das significações algebricas e geométricas. Só mais tarde, atribuiam um valor numérico (significação aritmética) para a medida da grandeza.

O estudo dos números a partir das grandezas contribuiu para que as crianças realizassem a medida dos comprimentos de forma independente e sem erros. Tal constatação confirma outro princípio de Davydov (1982) de que, ao se apropriar da essência do conceito e de seu núcleo geral, a criança se orienta conceitualmente, e de forma autônoma, na realização de outras situações em que o conceito apreendido anteriormente for necessário. Portanto, se diferente do ensino que propicia apenas exemplos particulares do conceito, em que, ao se deparar com uma situação nova, a criança exclama: ainda não sei fazer desse tipo! (Davydov, 1982).

Uma síntese referente a presente pesquisa é a hipótese da possibilidade de desenvolvimento do pensamento teórico de número desde o primeiro ano do Ensino Fundamental. Para tanto, no seu ensino, faz-se necessário ultrapassar os limites das significações aritméticas, com predomínio do pensamento empírico, no ensino para ater-se, também, nas significações algébricas e geométricas.

Vale reafirmar que o estudo foi um primeiro esforço de desenvolver as proposições de Davydov em citação escolar brasileira. Por isso, algumas limitações se apresentam, pois na oportunidade, o sistema de tarefas apresentado aos estudantes foi elaborado com base nas leituras dos textos teóricos do referido autor e do livro didático. Atualmente, ao dispormos das "orientações para o uso do livro didático" produzidas pelos colaboradores de Davydov é que tivemos acesso ao sistema de tarefas e seus respectivos objetivos pormenorizadamente.

## Referências

Aleksandrov, A. D. (1976). Visión General de la Matemática. In Aleksandrov A. D. et al. (ed.) La Matemática: su contenido, métodos y significado, 17-91. Alianza Universidade: Madrid.

Angle, D. (2009). Should Children Learn Math by Starting with Counting? MMA. http://www.maa.org/devlin/devlin_01_09.html Recuperado 15 de setembro de 2010,

Ceryno, E. (2001). Número e dinheiro. (Dissertação de mestrado, Universidade do Estado de Santa Catarina, 2001).

Damazio, A., Colares, C. B., & Pereira, I. S. (2005). A busca da superação da tricotomia álgebra/aritmética/geometria no processo de elaboração conceitual. In Fórum Nacional de Educação. (2 ed.) Formação, Trabalho e Educação, 1-15. ULBRA: Canoas.

Davydov, V. (1988). La enseñanza escolar y el desarrollo psíquico: investigación teórica y experimental. Editorial Progresso: Moscú.

Davídov, V. V. (1987). Análisis de los principios didácticos de la escuela tradicional y posibles principios de enseñanza en el futuro próximo. En Shuare, M. (ed.) La psicología Evolutiva y pedagógica en la URSS, 143-155. Editorial Progresso: Moscú.

Davídov, V. V., & Markova. A. (1987). El desarrollo del pensamiento en la edad escolar. En La psicología Evolutiva y pedagógica en la URSS, 173-174. Editorial Progresso: Moscú.

Davydov, V. V. (1998). Renovación de la educación y el desarrollo mental de los alumnos. Revista de Pedagogia, 403, 197-199.

Davydov, V. V. (1988a). Learning activity in the Younger school-age period. En Soviet Education "Problems of developmental teaching", 3-47. M. E. Sharpe: New York.

Davydov, V. V. (1988b). Problems of the child's Mental Development. En Soviet Education "Problems of developmental teaching", 44-97. M. E. Sharpe: New York.

Davydov, V. V. (1988c). The Basic Concepts of contemporary Psychology. En Soviet Education "Problems of developmental teaching", 3-43. M. E. Sharpe: New York.

Davydov, V. V. (1982). Tipos de generalización en la enseñanza. Editorial Pueblo y Educación: Habana.

Davydov, V. V. (1990). Types of generalization in instruction: Logical and psychological problems in the structuring of school curricula. National Council of Teachers of Mathematics: Reston, VA.
Davydov, V. V. (1999). What is real learning activity? En Hedegaard, M., Lompsher, J. (Eds.) Learning activity and development. Aarhus University Press: Aarhus.
Davydov, V.V. (1998). La renovación de la educación y el desarrollo mental de los alumnos. Revista de Pedagogía, 403, 197-199.
Eves, H. (2004). Introdução à história da Matemática. Editora da UNICAMP: São Paulo.
Fayol, M. (1996). A criança e o número: da contagem a resolução de problemas. Artes Médicas: Porto Alegre.
Fritzen, K. R. (2011). Estudo do sistema conceitual de trigonometria no Ensino Fundamental: Uma leitura Histórico-Cultural. (Dissertação de mestrado, Universidade do Extremo Sul Catarinense, 2011).
Freudenthal, H. (1975). Mathematics as an Educational Task. Reidel: The Netherlands.
Gil, K. H., & Ruth, P. (2008). Repensando as dificuldades dos alunos na aprendizagem de álgebra. In Borges, R. M. R., Rocha Filho, J. B., Basso, N. R. S. [org.]. Avaliação e interatividade na educação básica em ciências e Matemática, 115-127. Edipucrs: Porto Alegre.
Kamii, C. (1999). A criança e o número. (26 ed.) Papirus: São Paulo.
Khidir, K. S. (2006). Aprendizagem da álgebra: uma análise baseada na teoria do ensino desenvolvimental de Davídov. (Tese de doutorado, Universidade Católica de Goiás, 2006). 103.
Schmittau, J., & Morris, A. (2004). The development of algebra in Davydov's elementary curriculum. The Mathematics Educator. Recuperado em outubro de 2010, de math.nie.edu.sg/ame/matheduc/tme/tmeV8_1/Schmittau.pdf
Schmittau, J. (2005). The development of algebraic thinking: A Vygotskian perspective. International Review of Mathematics Education, 37, 16-22. Recuperado novembro de 2010 http://www.emis.de/journals/ZDM/zdm051i.html
Slovin, H., & Linda, V. (2008). Succes in algebra. Paper presented at the PME, 32. Recuperado em setembro de 2010, de http://www.pme32-na30.org.mx/about.htm
Triviños, A. N. S. (2008). Introdução à pesquisa em ciências sociais: a pesquisa qualitativa em educação. Atlas: São Paulo.
Vigotski, L. S. (2000). A construção do pensamento e da linguagem. Martins fontes: São Paulo;
Vita-press, E. (2010). Rússia. http://www.vita-press.ru. Recuperado agosto de 2010,
Горбов С, Ф, et al, (2008). Обучение математике. En 1 класс: Пособие для учителей начальной школы (Система Д.Б.Эльконина – В.В. Давыдова). 2-е ида., перераб. - М.:ВИТА-ПРЕССб.
Давыдов, В. В. О. et al. (1997). Математика, 1-Kjiacc. En Mockba: Mнpoc.

**Josélia Euzebio da Rosa**. Doutoranda do PPGE da Universidade Federal do Paraná com bolsa do CNPq. Integrante dos seguintes grupos de pesquisa: Grupo de Pesquisa em Educação Matemática: Uma Abordagem Histórico-Cultural (GPEMAHC) e Grupo de Estudos e Pesquisa Sobre a Atividade Pedagógica (GEPAPe).
**joselia.euzebio@yahoo.com.br**

**Ademir Damazio.** Professor do PPGE da Universidade do Extremo Sul Catarinense – UNESC. Integrante dos seguintes grupos de pesquisa: Grupo de Pesquisa em Educação Matemática: Uma Abordagem Histórico-Cultural (GPEMAHC) e Grupo de Estudos e Pesquisa Sobre a Atividade Pedagógica (GEPAPe). Endereço: Universidade do Extremo Sul Catarinense – UNESC.: add@unesc.net