REVISTA IBEROAMERICANA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA

Junio de 2012, Número 30, páginas 151-158
ISSN: 1815-0640

El rincón de los problemas

Uldarico Malaspina Jurado
Pontificia Universidad Católica del Perú
umalasp@pucp.edu.pe

Resolviendo y creando problemas con profesores de educación básica

Problema

Claudia construye cuadrados en fila, usando palitos de madera del mismo tamaño, de modo que para cada lado de un cuadrado usa un palito. Las figuras que va construyendo las ubica en fila, como se muestra a continuación

Figura 1 **Figura 2** **Figura 3** **Figura 4**

Encontrar, con tres razonamientos diferentes, una expresión general que permita determinar el número de palitos de madera que tiene la figura que ocupa el lugar n en la secuencia.

Este problema lo propuse en un curso-taller recientemente realizado en este mes de junio, por iniciativa de su alcalde, con 21 profesores de primaria y 15 de secundaria en Pomahuaca, un distrito de la provincia de Jaén, del departamento de Cajamarca, en la selva alta del norte del Perú, rodeado por cerros de la cadena occidental de los andes. La experiencia fue sumamente interesante tanto académica como humanamente, pues desde las 2 y 30 p.m. del viernes 8 hasta el domingo 10 a las 12 y 30 p.m. compartimos con entusiasmo 16 horas en sesiones de trabajo muy participativas. Compartí la conducción del taller con Estela Vallejo Vargas, bachiller en Matemáticas y alumna de posgrado de la Pontificia Universidad Católica del Perú. Trabajamos muchos problemas, poniendo énfasis en la creación de éstos, por su importancia en la actividad docente al enseñar y aprender matemáticas. Un 50% del tiempo estuvo dedicado a las funciones afines y el otro 50% a la divisibilidad[1].

En este artículo, comparto con los lectores de UNION la experiencia académica de la mañana del sábado 9. Durante 4 horas, con una pausa de 15 minutos, desarrollamos una dinámica en cinco fases que describo a continuación. Ciertamente, en todas las fases hubo un acompañamiento de parte de los conductores del taller, contribuyendo a aclarar dudas y estimulando ideas de los(as) profesores(as) participantes.

Fase 1. *Presentación de la situación y trabajo individual*.

Repartimos una hoja en la que se presenta la situación descrita en la primera parte del problema enunciado al inicio de este artículo y se pide desarrollar individualmente tres actividades:

[1] Tema tratado por Estela Vallejo en su tesis de Maestría en Enseñanza de las Matemáticas.

a) Julio afirma: "Claudia ha usado 13 palitos de madera en la figura 4 entonces en la figura 8 usará el doble; o sea 26 palitos de madera". La proposición expresada por Julio ¿es verdadera o falsa?¿Por qué?
   Detalla de manera escrita tu respuesta, a partir de las regularidades que hayas encontrado o de las operaciones que hayas hecho.

b) ¿Cuántos palitos de madera usará Claudia al construir la figura 25? ¿Por qué?

c) ¿Cuántos palitos de madera usaría Claudia al construir la figura 548? ¿Por qué?

Las actividades van llevando a la búsqueda de regularidades y al descubrimiento de un patrón al relacionar el número que indica la posición de una figura en la secuencia de figuras con el número de palitos que se usen para su construcción, pasando de una "generalización próxima" a una "generalización lejana"[2].

<u>Fase 2</u>. Trabajo grupal con actividades de mayor dificultad e ideas para crear problemas.

Pedimos que se constituyan en grupos de a lo más cuatro profesores (solo excepcionalmente de cinco profesores) y repartimos otra hoja, en la que se pide desarrollar las siguientes actividades:

1. Comparar y discutir las respuestas dadas por los integrantes del grupo en las actividades individuales.
2. Determinar qué lugar en la fila ocuparía la figura que construya Claudia con 517 palitos de madera. Justificar.
3. Encontrar, con tres razonamientos diferentes, una expresión general que permita determinar el número de palitos de madera que tiene la figura que ocupa el lugar *n* en la secuencia.
4. Mostrar gráficamente cómo cambia el número de palitos de madera conforme cambia el número de orden de la figura.
5. Hacer actividades similares a las anteriores, considerando que los palitos de madera que se cuentan en cada figura **son sólo los del perímetro de la figura.**
6. Proponer actividades similares a las propuestas con esta situación, considerando triángulos, pentágonos u otras figuras de forma poligonal. Dar la solución correspondiente.

Notar que la actividad 2 induce a pensar en el "problema inverso", en relación a la característica de los problemas de la parte individual; la actividad 3 es la que aparece en el problema enunciado al inicio de este artículo y pide explícitamente una formalización de las observaciones hechas – del patrón encontrado – para resolver los problemas anteriores; más aún, lleva a pensar en razonamientos diferentes para obtener tal formalización. La actividad 4 lleva a usar una representación gráfica de la función que define la relación entre el número de la figura y el número de palitos; y las actividades 5 y 6 dan ideas para crear nuevos problemas.

[2] Expresiones que usa García Cruz, J. (1999) La generalización en un tipo particular de sucesiones aritméticas: los problemas de generalización lineal. *Números*, 38 pp. 3-20

Los grupos, voluntariamente, expusieron los resultados de sus discusiones y hubo socialización de ideas.

Fase 3. Trabajo grupal para crear un problema que será resuelto por otro grupo.
Repartimos una hoja, denominada A, en la que se explicita el objetivo de imaginar una situación similar a las que se han presentado con las secuencias de figuras geométricas e inventar y resolver un problema de matemáticas para alumnos de educación básica. Se pide que se describa una situación, que se escriba el texto de un problema, que se especifique el nivel y grado al que va orientado el problema que se crea, que se escriba una solución del problema, y que se escriban dos comentarios a la experiencia de crear un problema de matemáticas.

Repartimos también otra hoja, denominada B, en la que cada grupo debe copiar el texto del problema creado. Hay un espacio destinado a la solución del problema, pero éste debe ser llenado por otro grupo que será determinado al azar. En la hoja B, además, hay un espacio para que el grupo que resuelva el problema escriba sus comentarios y sugerencias sobre el problema que le tocó resolver.

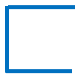
Fase 4. Trabajo grupal para resolver el problema que inventó otro grupo
Un integrante de cada grupo escogió al azar una hoja B y la llevó a su grupo para resolver el problema en ella escrito.

Fase 5. Exposición de los problemas resueltos por los grupos.
Los grupos, también seleccionados al azar, expusieron los problemas que resolvieron e hicieron sus comentarios y sugerencias referidos a tal problema.

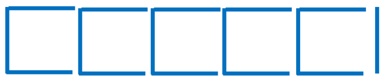
Comentarios

1. El entusiasmo y la participación de los(as) profesores(as) fue muy grande, tanto por el clima de confianza que se había generado como porque percibían que las dificultades a las que se enfrentaban eran alcanzables y aplicables a estudiantes de primaria y de secundaria.
2. Las actividades individuales *a* y *b* fueron correctamente resueltas por todos los participantes. En la actividad *c* hubo algunos errores operativos. Lo importante es que se había percibido el patrón: el número correspondiente al lugar que ocupa la figura en la secuencia es igual al número de cuadrados que tiene tal figura y conociendo tal número, su número de palitos se determina multiplicando ese número por 3 y luego sumándole 1.
3. La actividad grupal 2 fue resuelta dividiendo 517 entre 3. La profesora de primaria que resolvió en la pizarra dijo que el cociente de 517 entre 3, o sea 172, corresponde al número de cuadrados que tendría la figura, pues se podrían armar 171 cuadrados completos y uno con solo 3 palitos, pero que siendo el residuo 1, tal palito lo usaría para cerrar y obtener el último cuadrado.
   Un profesor de secundaria resolvió la ecuación $3n + 1 = 517$ y obtuvo $n = 172$.
4. En la actividad grupal 3, todos coincidieron en que "la fórmula" es $3n + 1$, y ésta fue obtenida por razonamiento inductivo, observando que el número de palitos de una figura a la siguiente siempre se incrementa en 3. Les resultó sorprendente y motivador que se pidan tres razonamientos diferentes. Explicamos que con lo que habían hecho ya teníamos uno y sugerimos que piensen en argumentos geométricos, observando cuidadosamente cómo construyen las figuras de la secuencia.

Una profesora de primaria – que no era de las más jóvenes – explicó que, por ejemplo, en la figura 4 usaba 4 palitos en la parte de arriba, otros cuatro palitos en la parte de abajo y 5 palitos para ir armando los cuadraditos. Así usaba en total 4 + 4 + 5 = 13. Tomamos este argumento para la figura *n* y entonces, en diálogo con los(as) profesores(as), concluimos que deberíamos usar *n* palitos arriba (formando una fila horizontal), *n* palitos abajo (formando otra fila paralela a la formada por los *n* palitos anteriores) y *n* + 1 palitos (verticales) para armar los cuadrados; así, en total deberíamos usar *n* + *n* + (*n* + 1) palitos, que es lo mismo que decir 3*n* + 1 palitos. Se advirtió que este resultado coincide con "la fórmula obtenida" por razonamiento inductivo algebraico.
Teniendo claro el razonamiento geométrico expuesto a partir de la idea de la profesora de primaria, invitamos a pensar en otro razonamiento geométrico, siempre observando cómo construyen las figuras de la secuencia. Una profesora de secundaria nos dijo que, por ejemplo la figura 5 la formaba con 5 estructuras de 3 palitos cada una, de la forma



más un palito adicional para cerrar la última de estas estructuras y tener el último cuadrado.



Así usaba 3x5 + 1 palitos; es decir 16 palitos. En consecuencia la figura *n*, de *n* cuadrados, se podía construir poniendo una a continuación de otra *n* estructuras de la forma descrita, más un palito para cerrar el último cuadrado; en consecuencia, la figura *n* tiene 3*n* + 1 palitos.

Así obtuvimos, participativamente, tres razonamientos diferentes que nos conducen a la misma expresión algebraica, 3*n* +1, para el número de palitos de la figura *n* (o de la figura de la secuencia, que tiene *n* cuadrados).

Les comenté que hay por lo menos un razonamiento geométrico más. No lo expuse y despertó su curiosidad, como espero que también la despierte en los amigos lectores de este artículo.

5. La actividad 4 – que busca una representación gráfica de la función, que podemos llamar *p*, que hace corresponder al número de orden *n* de la figura el número de palitos 3*n* + 1; es decir, la función *p*(*n*) = 3*n* + 1 – no fue desarrollada por grupo alguno. Consideramos que una razón para ello fue el no haber usado la palabra función en el texto de la actividad, pues al hacer explícita la función, varios profesores de secundaria, de la especialidad de matemáticas, advirtieron que se trataba de graficar tal función, aunque no tomaron en cuenta que la gráfica no es una recta, por tomar la variable independiente solamente valores naturales a partir de 1. Esto lleva a reflexionar una vez más sobre la importancia de internalizar el concepto de función a partir de observaciones y experiencias, más allá del manejo formal de funciones ya explícitas en forma algebraica.

6. Las actividades grupales 5 y 6 las trabajaron en cada grupo y tuvimos conversaciones con los integrantes de los grupos, pero ya no hubo tiempo de hacer socializaciones. Más aún, las omitimos, teniendo en cuenta la *fase 3* de este taller particular.

7. La *fase 3* fue de intensa actividad y pudimos percibir que en los ocho grupos habían comprendido cómo determinar el número de palitos que tiene la figura *n*, en una secuencia formada por filas de polígonos "pegados" por uno de sus lados. Cuatro grupos crearon problemas con secuencias de triángulos y un grupo con secuencias de hexágonos. Los otros tres grupos no crearon problemas con secuencias de polígonos. Uno de ellos fue sobre conteo de triángulos, cuadrados y rectángulos; otro de secuencias de "pirámides" formadas por ladrillos; y el restante de secuencias de "pirámides" de círculos.

   A continuación copio los textos de los problemas creados por algunos de los grupos:
   <u>*Grupo 8*</u>
   Este grupo estuvo integrado por cuatro profesores de primaria y uno de secundaria (no de la especialidad de matemáticas).

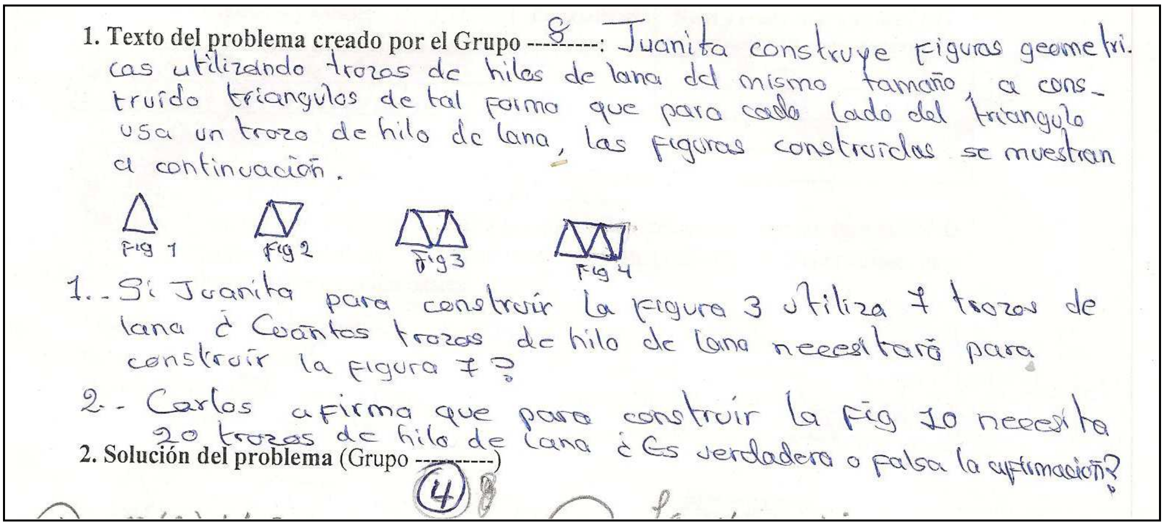

1. Texto del problema creado por el Grupo 8: Juanita construye figuras geometricas utilizando trozos de hilos de lana del mismo tamaño, a construido triangulos de tal forma que para cada lado del triangulo usa un trozo de hilo de lana, las figuras construidas se muestran a continuación.

Fig 1 Fig 2 Fig 3 Fig 4

1.- Si Juanita para construir la figura 3 utiliza 7 trozos de lana ¿Cuantos trozos de hilo de lana necesitará para construir la figura 7?

2.- Carlos afirma que para construir la Fig 10 necesita 20 trozos de hilo de lana ¿Es verdadera o falsa la afirmación?

2. Solución del problema (Grupo 4)

Figura 1. Problema creado por el Grupo 8

Lo copiado es lo que escribieron en su hoja B. Manifestaron que el problema lo podrían aplicar con alumnos de tercer grado de primaria. Ellos resolvieron la parte 1 del problema considerando explícitamente que tendrían 4 palitos arriba, 3 palitos abajo y8 palitos oblicuos. También escribieron la expresión 2n + 1, como "fórmula general" del número de palitos. Al Grupo 4 le tocó resolver este problema y lo hicieron usando esta expresión general y ambas partes fueron correctamente respondidas.
Consideramos un buen trabajo de creación y presentación del problema en el contexto del taller.

<u>*Grupo 7*</u>
Este grupo estuvo integrado por cuatro profesores de primaria.

1. Texto del problema creado por el Grupo 7:

Roberto construye figuras exagonales con palitos de chupete del mismo tamaño en forma consecutiva y en fila. ¿Cuántos palitos de chupete necesita para construir la figura N° 28.?

6 11 16 21

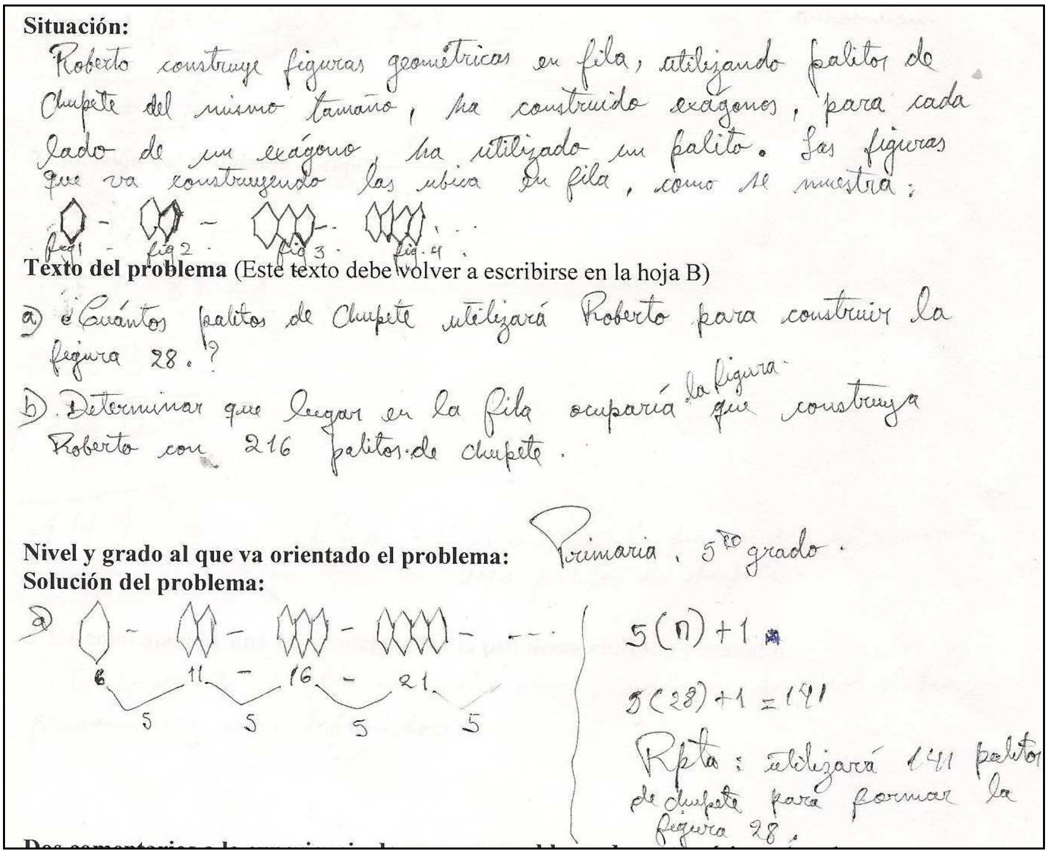
fig 1 fig 2 fig 3 fig 4 ...

5 5 5 5

$\boxed{5n+1}$

Figura 2. Problema creado por el Grupo 7

El texto copiado en la Figura 2, escrito por el Grupo 7 en su hoja B, no es exactamente el mismo que el que escribieron en su hoja A. La explicación que dieron fue el apuro y algunas discrepancias sobre el nivel educativo en el que lo aplicarían. Consideramos importante copiar también el texto que escribieron en su hoja A.



Situación:

Roberto construye figuras geométricas en fila, utilizando palitos de chupete del mismo tamaño, ha construido exágonos, para cada lado de un exágono ha utilizado un palito. Las figuras que va construyendo las ubica en fila, como se muestra:

fig 1 - fig 2 - fig 3 - fig 4 ...

Texto del problema (Este texto debe volver a escribirse en la hoja B)

a) ¿Cuántos palitos de chupete utilizará Roberto para construir la figura 28.?

b) Determinar que lugar en la fila ocuparía la figura que construya Roberto con 216 palitos de chupete.

Nivel y grado al que va orientado el problema: Primaria, 5to grado.

Solución del problema:

a) 6 - 11 - 16 - 21

5 5 5 5

$5(n)+1$

$5(28)+1=141$

Rpta: utilizará 141 palitos de chupete para formar la figura 28.

Figura 3. Problema creado por el Grupo 7(Hoja A)

En esta hoja (A) consideraron bien la situación, pero no la incluyeron en el espacio destinado al texto del problema. Advirtieron que tenían que hacerlo en su hoja B para que pueda ser entendido y resuelto por otro grupo, pero al hacerlo, “por el apuro” y ciertos puntos de vista diferentes – como me dijeron – escribieron parte de la solución y ya no consideraron la parte *b* que pensaron ponerla inicialmente.

Más allá de los detalles expuestos líneas arriba, consideramos que hubo un buen trabajo de creación del problema en el contexto del taller.

Grupo 4

Este grupo estuvo integrado por tres profesores de primaria y un profesor de secundaria, de la especialidad de matemáticas. Tuvieron una idea interesante, usando círculos, que fue más allá de secuencias de polígonos en línea "pegados" por una arista. No quisieron abandonar la idea y les tomó buena parte del tiempo encontrar el patrón y resolver el problema que estaban creando. Finalmente, resolvieron el problema, pero - según manifestaron - esta preocupación y el tiempo que resultó corto, hizo que olvidaran poner la pregunta del problema en su hoja B, como se muestra a continuación.

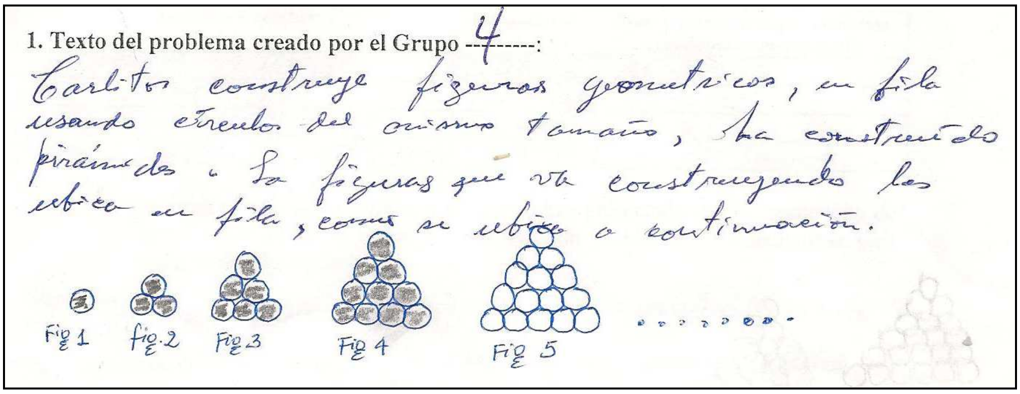

1. Texto del problema creado por el Grupo 4:
Carlitos construye figuras geométricas, en fila usando círculos del mismo tamaño, ha construido pirámides. La figuras que va construyendo las ubica en fila, como se ubica a continuación.
Fig 1 Fig 2 Fig 3 Fig 4 Fig 5

Figura 4. Problema creado por el Grupo 4 (Hoja B)

El grupo 8, al que le tocó resolver este problema, no lo hizo por no tener tal pregunta en la hoja B que recibieron.

A continuación copio la versión del problema que tenían en la hoja A

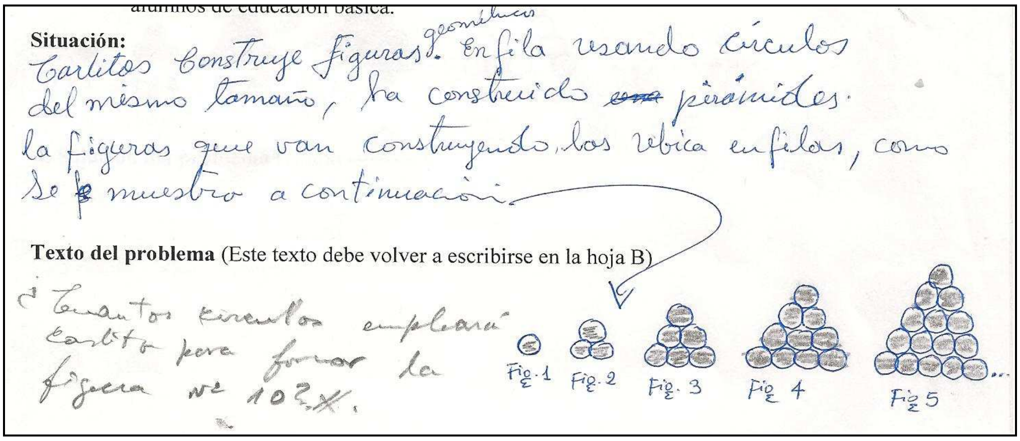

Situación: Carlitos Construye figuras geométricas en fila usando círculos del mismo tamaño, ha construido ~~una~~ pirámides. la figuras que van construyendo, los ubica en filas, como se muestra a continuación.
Texto del problema (Este texto debe volver a escribirse en la hoja B)
¿Cuantos circulos empleará Carlitos para formar la figura Nº 10?
Fig 1 Fig 2 Fig 3 Fig 4 Fig 5

Figura 5. Problema creado por el Grupo 4 (Hoja A)

Más allá de los detalles expuestos líneas arriba, consideramos que hubo un buen trabajo de creación del problema. Es una muestra clara de que el espíritu creativo lleva a situaciones de gran entusiasmo y a tocar aspectos que pueden ir más lejos de las ideas iniciales. Este problema resultó muy similar al que presentó el grupo 3 (de los ladrillos) y fue una oportunidad para aclarar conceptos relacionados con la suma de los elementos de una progresión aritmética.

8. En la *fase 4* todos los grupos resolvieron los problemas creados y escritos en las hojas B, salvo el grupo 8, que debió resolver el problema creado por el grupo 4. Por razones de tiempo solo pudieron exponer algunos grupos en la *fase 5*, pero fue una excelente ocasión de intercambiar opiniones, ideas y métodos de resolución de problemas

9. Todos los comentarios a la experiencia de crear problemas fueron positivos. A continuación transcribimos algunos:
   - *"Crear problemas es divertido y didáctico, utilizando juegos y material concreto"*
   - *"Contribuye a la familiarización y participación de profesores y alumnos"*
   - *"Potencia las capacidades de creación y resolución de problemas"*
   - *"Es interesante, nos permite despertar nuestra capacidad creativa"*
   - *"Permite utilizar el método inductivo y el deductivo"*
   - *"Ayuda a distinguir los niveles de dificultad para crear los problemas para los distintos grados"*

   En conversaciones fuera del aula, varios profesores nos comentaron que varios de ellos tenían a su cargo aulas con alumnos de primaria de diversos grados y que encontraban particularmente útil la creación de problemas y el trabajo en grupos para sus tareas docentes en este tipo de aulas.

10. La experiencia realizada muestra que es importante y posible desarrollar la competencia de crear problemas en los profesores de educación básica. Evidentemente, esta importancia es para profesores de todos los niveles educativos y será sumamente interesante desarrollar un taller similar con profesores de nivel superior y particularmente con formadores de formadores. Hay instituciones educativas, sobre todo de nivel superior, en las que es usual crear problemas para evaluar – generalmente solo adaptando problemas de otras fuentes – pero se pone poco énfasis en crear problemas para ayudar a aprender.

11. La creación de problemas es un tema de investigación con diversas facetas, como parte de la enseñanza y del aprendizaje. El taller realizado con profesores en Pomahuaca nos brinda valiosos elementos de reflexión y nos confirma que la experiencia misma de crear problemas lleva a descubrir y profundizar aspectos del objeto matemático que se está tratando, a plantearse nuevas preguntas y a aclarar conceptos y proposiciones relacionados con objetos afines.