UNIÓN
REVISTA IBEROAMERICANA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA

Marzo de 2012, Número 29, páginas 23-34
ISSN: 1815-0640

Construyendo funciones derivadas

José Carlos Cortés Zavala

Resumen

En el siguiente artículo se propone un acercamiento gráfico-numérico para realizar gráficas de las funciones derivadas. Para ello se introducen las ideas de pendientes de líneas secantes y pendientes de líneas tangentes tanto en forma numérica como gráfica, y a partir de estas ideas iniciar la construcción de la gráfica de la función derivada. El que esto escribe diseño y desarrollo un software de apoyo a la introducción de estas ideas. Para abordar la temática se exponen ideas teóricas y una exposición de lo propuesto en el software.

Abstract

The following article presents a graphical-numerical approach for graphics functions under.This will introduce the ideas of outstanding drying lines and slopes of tangent lines both numerically and graphically, and from these ideas begin construction of graph of the derivative function. The writer designed and developed software to support the introduction of these ideas. To address the issue presents theoretical ideas and a statement of what is proposed in the software.

Resumo

O seguinte artigo apresenta uma abordagem gráfica numérica para funções de gráficos abaixo. Isto irá introducir as ideias do saldo de secagem linahas e pistas de retas tangentes de forma numérica e gráfica, ea partir dessas idéias começar a construção do gráfico da função derivada. O escritor projetou e desenvolveu um software para apoiar e introdução dessas idéias. Para resolver o problema apresenta idéias teóricas e uma declaração de que é proposto no software

1. Introducción

Es común la confusión didáctica que se genera en los estudiantes de cálculo diferencial entre el concepto de derivada y el de función derivada. Ello se debe a que por un lado se realiza una explicación geométrica sobre el concepto de derivada y se extrapola esta información, sin mediar una explicación, para el cálculo de funciones derivadas, lo cual por lo general es a través de aplicación de algoritmos (fórmulas de derivación), En Font (2000) se pone de manifiesto la gran complejidad semiótica que conlleva el paso de la derivada en un punto a la función derivada. De acuerdo con Neus y Font (2003) el análisis de los textos que realizó le permitió afirmar que, en general, sus autores no son conscientes de la dificultad de este paso o bien no le prestan la atención que se merece. Diverso investigadores han señala esta problemática de abordar la enseñanza de la derivada y de la función derivada a través de un proceso puramente algebraico Font (2008) menciona "*Las nociones de derivada en un punto y de función derivada son tradicionalmente difíciles de* *comprender para muchos de los alumnos de bachillerato. Las dificultades se encuentran precisamente en las definiciones de estas nociones usando límites, y no tanto en la aplicación de las reglas formales o en el uso de las fórmulas"*. Dentro de los actividades desarrolladas en esta investigación se realizó una entrevista a profesores que imparten el curso de cálculo diferencial en bachillerato en relación a determinar que conocimientos previos son necesarios en los estudiantes de bachillerato para que entiendan el concepto de derivada; Todos los profesores respondieron que es necesario que los estudiantes tengan un muy buen dominio del álgebra, ya que sin ello no entenderán el concepto de derivada.

Esta respuesta generalizada deja en evidencia que el proceso algebraico es el más importante en su forma de enseñanza.

Por otro lado, varios investigadores señalan la importancia de introducir el concepto de derivada a través del uso de razones de cambio y a partir de esto podemos introducir el concepto de función derivada.

En este artículo expondremos un acercamiento numérico y gráfico que permite visualizar la derivada de un punto y que permitirá construir la función derivada. Para ello iniciamos relatando la importancia de graficar funciones utilizando la graficación de incremento de variables y la graficación de razón de cambio; de esta manera se introduce de forma intuitiva, el concepto de derivada y de función derivada.

Basado en esta idea se diseñó y desarrolló un software, denominado "Funciones y Derivadas"[1] Cortés (2002). En él se incorporaron actividades que resaltan aspectos relacionados con diferencias, incrementos y razón de incrementos desde un punto de vista gráfico y numérico, tomando como base ideas visuales y que sirven de apoyo para la construcción del concepto de derivada y función derivada.

2. Marco Teórico

Hughes (1990) observó que muchos estudiantes calculan algebraicamente las derivadas de diversas funciones, pero no son capaces de determinar, en una gráfica, en qué lugares la función tiene derivada positiva y en cuales negativa. Además, la autora nota que pocas veces se utiliza un acercamiento numérico para enseñar este concepto. Confrey (1993) indica que la presencia de tablas numéricas puede (1) iluminar la conexión funcional de los valores contenidos en ellas y (2) la presentación algebraica. Scher (1993) realizó un estudio sobre la utilización de múltiples representaciones para conceptualizar la derivada. Él concluye que existe la necesidad de promover el uso de tales representaciones para que el estudiante obtenga un entendimiento adecuado de los conceptos del cálculo, menciona, por ejemplo, que "la noción de razón de cambio debe ser accesible para todos los estudiantes" (Scher, 1993, p. 16). Por su parte Cortés et al. (Cortés et al. 2005) hacen una propuesta basada en un acercamiento numérico para introducir el concepto de función derivada.

El tratamiento numérico y gráfico es usado poco. Propuestas como la de Duval (1988, 1993 y 1995), Confrey (1993), Scher (1993), Mejía (1997), Hitt (2002) y Pluvinage (2005) mencionan la importancia, que tiene para el aprendiz, el manejo

[1] "Funciones y Derivadas" es un software libre que puede ser obtenido de la dirección http://fismat.umich.mx/~jcortes

gráfico y numérico. Los aspectos numéricos, gráficos y algebraicos son representaciones de los objetos matemáticos y cada uno de ellos presenta cierto tipo de información del objeto, además permiten cierto tipo de actividades cognitivas en el sujeto. Cuando solamente se usa un tipo de representación se corre el riesgo, como lo menciona Duval (1988), de confundir al objeto con la representación, por lo que este investigador, propone el uso de múltiples representaciones de un objeto.

3. Exposición de la Propuesta

El planteamiento se ubica dentro de la teoría de sistemas semióticos de representación (Duval 1988, 1993 y 1995), ya que el software permite la manipulación de diferentes representaciones relativas a diferentes registros de representación, además de motivar las tareas de conversión entre representaciones; es decir, permite el tratamiento de representaciones en cada uno de los registros y conversión entre representaciones.

Se introducen las ideas de incrementos de variables tanto en forma numérica como gráfica. En la siguiente sección vamos a mostrar la forma en que se presenta la información para resaltar las ideas de incrementos de variables y la de razón de cambio.

3.1 Incrementos de Variables

En el tema de **Incrementos de variables** de forma numérica, estos se hacen explícitos a partir de una tabla que contiene 4 filas tal y como se muestra en la figura 1. El objetivo es introducir numéricamente esta noción ya que de acuerdo a los datos encontrados en una experimentación realizada no es fácil que los estudiantes comprendan la noción de incremento de variables. También se realiza la graficación de *x* y *y* como un punto, el *incremento de x* en forma horizontal (en el software se asigna el color amarillo) y *el incremento de y* de forma vertical (en el software se asigna el color verde) (ver figura 2).

Inc. x		1	1	1	1	1	1	1
x	0	1	2	3	4	5	6	7
y	4.	6.	36.	118.	276.	534.	916.	1446.
Inc. y		2	30	82	158	258	382	530

Figura 1

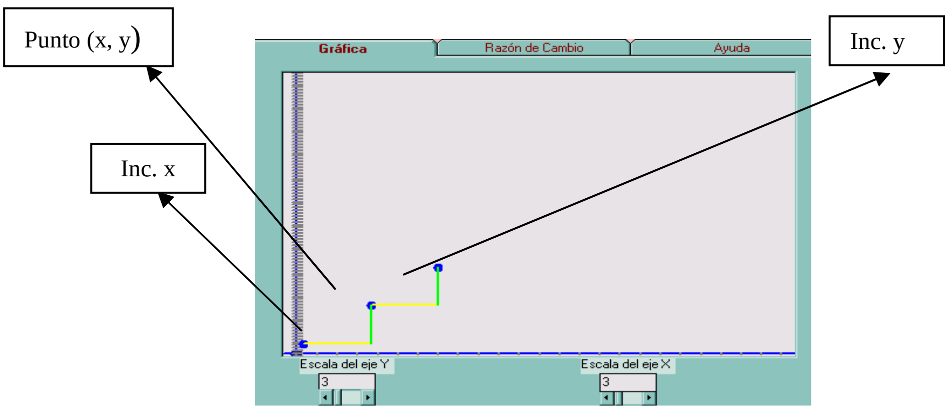


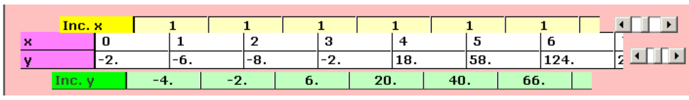
Figura 2

3.2. Razones de cambio

El acercamiento numérico y gráfico al concepto de **Razón de Cambio** se realiza a través del llenado de tablas de valores y de su reflejo en la construcción de graficas (para una mayor profundidad ver Cortés 2010). A través de este acercamiento se introduce la pendiente de una recta como la razón de incrementos, es decir, se da significado a lo que representa una razón de cambio. La opción **Razón de Cambio** se aborda como el cociente de dos incrementos, con este resultado se va llenando una tabla de valores la cual representará una nueva función que hemos denominado "*función razón de cambio*".

Por ejemplo, al seleccionar la función cúbica $f(x) = x^3 - 2x^2 - 3x - 2$ se generan los siguientes datos (figuras 3 a 12).

Datos correspondientes a la tabla de valores cuando se tiene un *incremento en x* de 1:



Inc. x	1	1	1	1	1	1	
x	0	1	2	3	4	5	6
y	-2.	-6.	-8.	-2.	18.	58.	124.
Inc. y	-4.	-2.	6.	20.	40.	66.	

Figura 3

Datos correspondientes a la gráfica de los puntos generados en la tabla anterior:

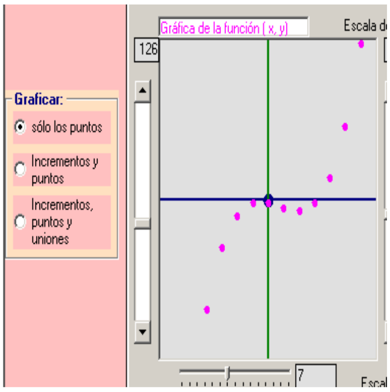


Figura 4

Datos correspondientes a la gráfica de los puntos y su unión a través de los incrementos

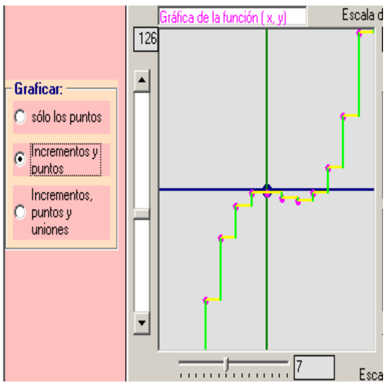


Figura 5

Datos correspondientes a la grafica de los puntos generados, su unión a través de los incrementos y su unión a través de una línea recta

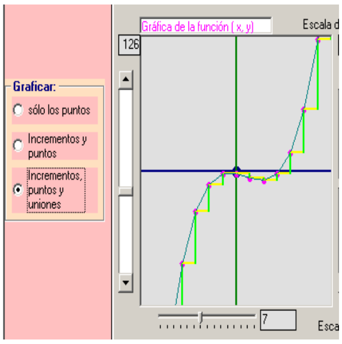


Figura 6

Datos correspondientes a la tabla en la que llenan los datos de la razón de cambio.

x	0	1	2	3	4	5	6
R. Cambic	-4	-2	6	20	40	66	

Figura 7

Datos correspondientes a la graficación de los puntos generados en la tabla de la razón de cambio y unidos por rectas.

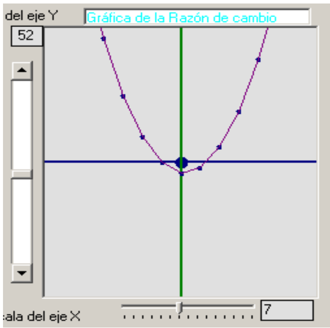


Figura 8

Datos correspondientes a la tabla de valores cuando se tiene un *incremento en x* de 0.7

Inc. x	.7	.7	.7	.7	.7	.7	
x	-.3	.4	1.1	1.8	2.5	3.2	3.9
y	-1.307	-3.456	-6.389	-8.048	-6.375	0.688	15.199
Inc. y	-2.149	-2.933	-1.659	1.673	7.063	14.511	2

Figura 9

Datos correspondientes a la gráfica de los puntos generados al tener un *incremento de x* de 0.7, su unión a través de los incrementos y su unión a través de una línea recta.

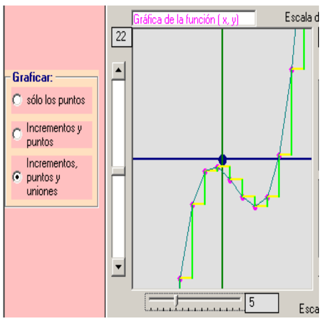


Figura 10

Datos correspondientes a la tabla de valores cuando se tiene un *incremento de x* de 0.7

Inc. x	.4	.4	.4	.4	.4	.4
x	-.6	-.2	.2	.6	1	1.4	1.8
y	-1.136	-1.488	-2.672	-4.304	-6.	-7.376	-8.048
Inc. y	-0.352	-1.184	-1.632	-1.696	-1.376	-0.672	

Figura 11

Datos correspondientes a la graficación de los puntos generados al tener *incremento de x* de 0.4, su unión a través de los incrementos y su unión a través de una línea recta.

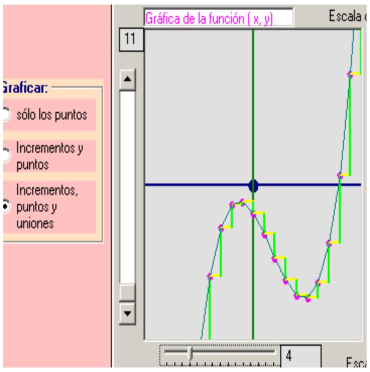


Figura 12

Se puede observar en las figuras 6, 10 y 12 que la unión de dos puntos se realiza a través de: *incremento de x* (línea horizontal), *incremento de y* (línea vertical) y *la unión directa* (línea entre los dos puntos, ver Figura 13), esto forma un triángulo en cada unión y podemos observar que, en este caso particular hay una variación de la pendiente en cada triángulo.

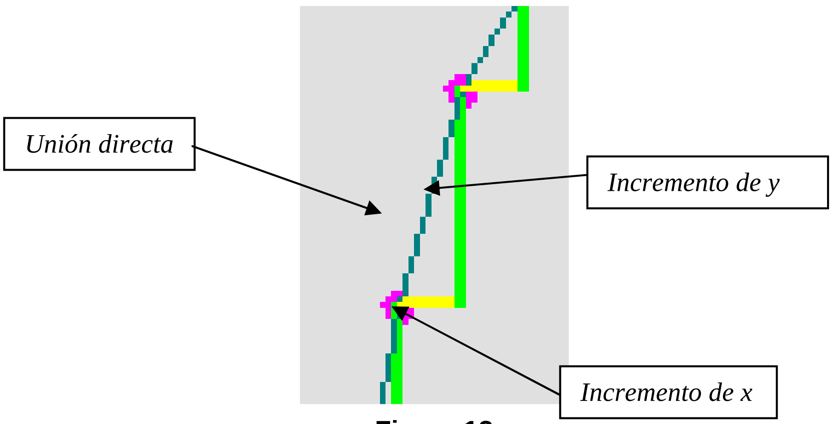


Figura 13

La Figura 7 representa una tabla de valores que es construida a través de obtener la pendiente de cada uno de los triángulos formados. Está tabla de valores representa una nueva función que denominamos "*Función Razón de cambio*" y viene dada por la relación $Funcion\_razon\_cambio = \frac{\Delta y}{\Delta x}$, cada punto de esta nueva función representa la razón de cambio (o pendiente) entre dos puntos de la función original; son representados gráficamente en la figura 8. En la Figura 9 y 11 se representa la tabla de valores de la función original cuándo se tiene un *incremento de x* diferente de 1.

3.3. Graficación de la pendiente de la secante y de la pendiente de la tangente

A través de un ejemplo se explica la graficación de la función razón de cambio y de la función derivada.

Grafica de la función original $f(x) = x^3 - 2x^2 - 3x - 2$

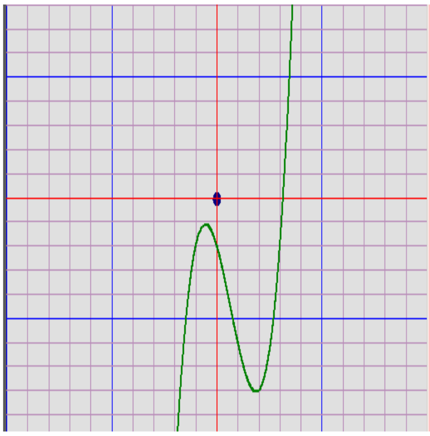


Figura 14

Línea secante, el valor de su pendiente es 3.4970

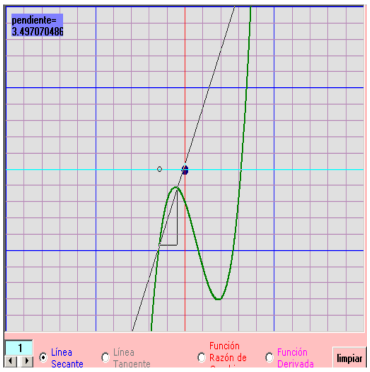


Figura 15

Línea secante, el valor de su pendiente es 1.0878

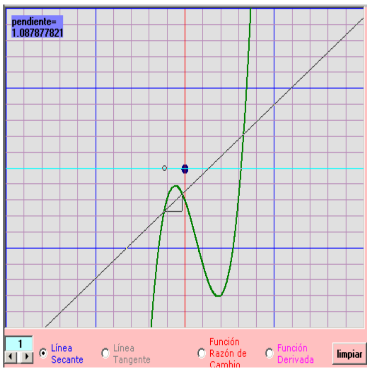


Figura 16

Línea secante, el valor de su pendiente es -2.5280

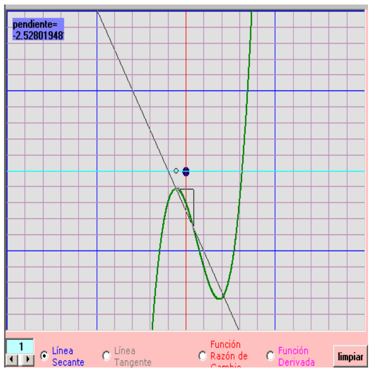


Figura 17

Tabla de los diferentes valores de la pendiente de la línea secante cuando variamos la *x* y mantenemos fijo el *incremento de la x*

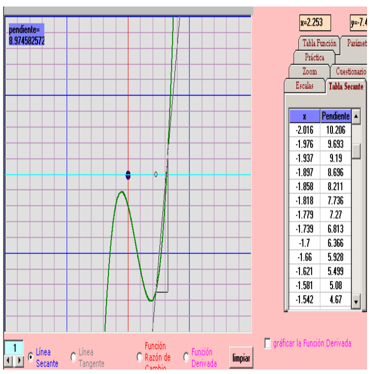


Figura 18

Grafica a través de puntos de los valores de la tabla de la pendiente de la línea secante, cada punto de la gráfica representa (*x, pendiente de la línea secante*)

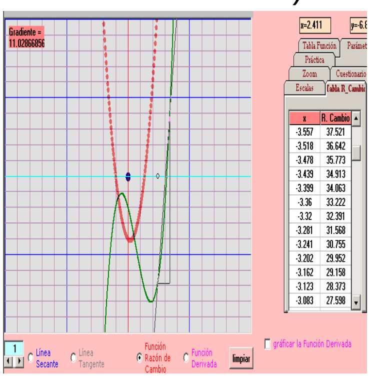


Figura 19

Línea tangente, el valor de su pendiente es 4.6802

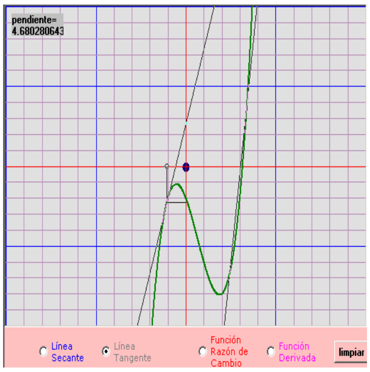


Figura 20

Línea tangente, el valor de su pendiente es -0.6970

Figura 21

Línea tangente, el valor de su pendiente es -1.8224

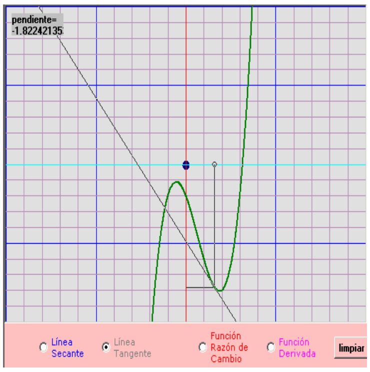


Figura 22

Tabla de los diferentes valores de la pendiente de la línea tangente cuando variamos la *x*

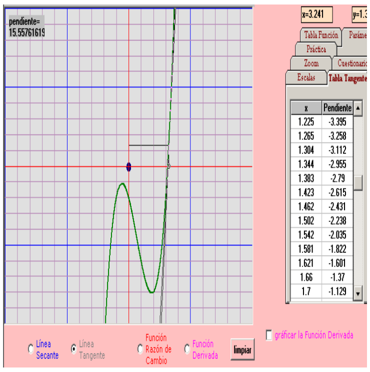


Figura 23

Grafica a través de puntos de los valores de la tabla de la pendiente de la línea tangente, cada punto de la gráfica representa (*x, pendiente de la línea tangente*)

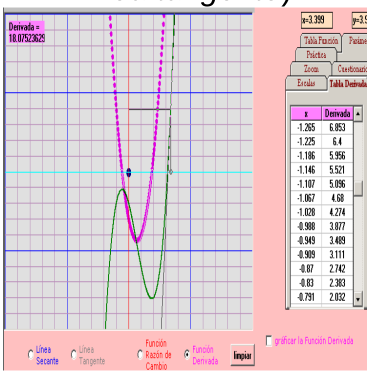


Figura 24

Gráfica de la función razón de cambio que está representada por (*x, pendiente de la línea secante*) cuando el *incremento de la x* es 1 y gráfica de la función derivada que es (*x, pendiente de la línea tangente*)

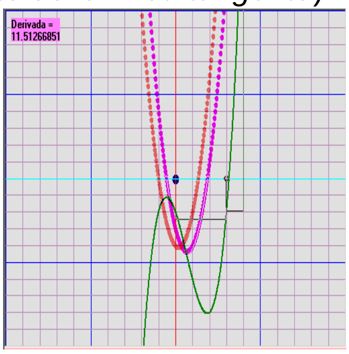


Figura 25

4. Experimentación

4.1. Escenario de la experimentación

La experimentación se practicó con cinco estudiantes de bachillerato durante doce horas, repartidas en cuatro sesiones como parte de una experimentación piloto Núñez (2006). Se trabajó en una sala equipada con tres computadoras, un pizarrón y dos cámaras de video. Se formaron tres equipos de trabajo (dos con dos estudiantes y uno de uno) y cada uno de ellos trabajó en una computadora con el software desarrollado. En la primera sesión se dio una instrucción sobre la navegación en el paquete, para que en las sesiones siguientes el estudiante navegara libremente los contenidos permitidos en el software. El instructor se desempeñó básicamente como un observador pero podía intervenir para contestar algunas preguntas cuando le eran requeridas o para hacer preguntas que propiciaran que los estudiantes encontraran por sí mismos la estrategia correcta.

4.2 La selección de los alumnos

Los estudiantes que participaron en está experimentación piloto, cursaban el 4 semestre de bachillerato en el “Colegio Novel”, la selección de estudiantes se hizo de la siguiente manera: tres estudiantes que cursan el bachillerato en el área de Físico-matemático y dos del área de Económico-Administrativo. Un estudiante con buen desempeño escolar, dos que tienen regular desempeño escolar y dos alumnos con bajo desempeño académico, de acuerdo con las calificaciones reportadas a lo largo de sus estudios.

5. Análisis de la experimentación en relación con los contenidos presentados

El análisis de esta experimentación se centrará en explicar con base en las videograbaciones y evidencia escrita, si las ideas de: Incremento de una variable, razón de cambio, línea secante, línea tangente, función razón de cambio y función derivada fueron entendidas por los estudiantes.

5.1. En Incrementos

- Las diferencias con las que ellos venían trabajando, aquí se denotaron como “incrementos”.
- Observaron que en la gráfica se formaban “escaleras” con los incrementos (lado horizontal incremento de posición y lado vertical incremento de valor).
- Redefinieron lo que ellos llamaban “la constante“, que en realidad es la razón de cambio dos veces, en el nivel I como $\frac{Inc.Valor}{IncPos}$, y en el nivel III como $\frac{IncY}{IncX}$.

5.2. En razón de cambio

- Ahora redefinen “su constante” como Razón de Cambio y se define como $R.C. = \frac{IncY}{IncX} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$
- Con la anterior formulación descubren que la Razón de cambio es lo mismo que la pendiente en una línea recta.
- Las “escaleras” que observaron en incrementos ahora ven que se forman “triángulos”.

- Descubren que los "triángulos" están formados por dos lados (que no pertenecen a la función) que son: los *incrementos* x (lado horizontal) e *incremento* y (lado vertical).
- Se les pide que observen con cuidado las gráficas de la función y de la razón de cambio (para las opciones función lineal, función cuadrática y función cúbica), que las analicen y comenten que es lo que ven y Vanesa responde:
- Entre una y otra tiene un grado menos, es decir si yo saco la derivada, por ejemplo de x^3 es $3.x^2$, de x^2 es $2x$, y de $4.x$ es 4.
- Descubren entonces por qué la razón de cambio en una función lineal es constante y en una función cuadrática o cúbica no lo es constante.
- Observando las graficas basan esta diferencia en el "recorrido de y" (incremento de y), ya que no es igual en todos los "triángulos" que tiene la gráfica de la función.

5.3 En tratamiento grafico

- Se les pide que observen la diferencia que hay entre una línea secante y una línea tangente.
- Karla observa que la línea secante toca dos puntos de la gráfica de la función y la línea tangente toca un solo punto de la gráfica de la función.
- Cindy observa que en una línea secante se forman "triángulos" y en la línea tangente se forman "cuadrados" (líneas que van a los ejes coordenados y dan las coordenadas del punto).
- Se pide observar la función razón de cambio y la función derivada de una función cúbica y que me digan qué diferencia tienen.
- Vanesa responde que las dos son parábolas.
- Cindy complementa, que además, una está recorrida respecto a la otra. Que una cruza el "origen" (vértice) de la otra.
- Por último todos juntos hacen una conclusión:
- El deslizamiento de una gráfica con respecto de la otra se debe al *incremento de* x, ya que en la razón de cambio ese incremento es igual a uno (para el ejercicio que tenemos).
- Además, en la función derivada este incremento tiende a cero (se les había pedido una sesión anterior que investigaran cual era la definición de la derivada de una función).

6. Resultados y Conclusión

Dentro del desarrollo de la presente experimentación se detectó que la idea de incremento de una variable no es entendida fácilmente por los estudiantes, lo cual dificulta entender la razón de cambio y por supuesto el concepto de derivada. A través del uso del software y de la intervención del profesor, la idea de incrementos de variables fue entendida por los estudiante, así como lo que es una razón de cambio y como se va construyendo una función derivada.

Se comprobó que por medio del uso de tablas de valores de funciones es posible que los estudiantes entiendan el concepto de diferencias e incrementos de variables, así mismo el uso de la gráficación de incrementos para delinear la gráfica de la función permitirá que el estudiante entienda lo que es una razón de cambio.

Utilizando a su vez la razón de cambio podrán construir una nueva función y a partir de ella, los educadores pueden introducir la función derivada.

Bibliografía

Cortés C. (2002). Desarrollo de software para la enseñanza del cálculo diferencial. Tesis de doctorado. Cinvestav-IPN. México,

Cortés et al (2005). Software para la enseñanza de la derivada. *Reflexiones sobre el aprendizaje del cálculo y su enseñanza*. México: Morevallado

Cortés, C. (2010). *Graficando los incrementos de las variables como apoyo a la construcción del concepto de función derivada.* Investigaciones y Propuestas. México: Ed. AMIUTEM. En prensa.

Confrey, J. (1993). *A constructivist research programme towards the reform of mathematics educations.* (Introduction to symposium for the Annual Meeting of American Education Research Association).

Duval R. (1988) Graphiques et equations: l'Articulation de deux registres. *Anales de Didactique et de Sciences Cognitives* 1(1988) 235-253. Traducción: Gráficas y ecuaciones: la articulación de dos registros. En *Antología en Educación Matemática* (Editor E. Sánchez). Departamento de Matemática Educativa del Cinvestav-IPN, México.

Duval R. (1993) Registres de représentation sémiotique et fonctionnement cognitif de la pensée. *Annales de Didactique et de Science Cognitives* 5(1993) 37-65. Traducción: Registros de representación semiótica y funcionamiento cognitivo del pensamiento. En *Investigaciones en Matemática Educativa II* (Editor F. Hitt). Grupo Editorial Iberoamérica.

Duval R. (1995) *Sémiosis et pensée humaine: Registres sémiotiques et apprentissage intellectuels.* Peter Lang, Suisse.

Font, V. (2000). Procediments per obtenir expressions simbòliques a partir de gràfiques. Aplicacions a les derivades. Tesis doctoral, Universidad de Barcelona.

Font (2008). Rappesentazioni attivate nel calcolo Della derivata, in G. Arrigo (ed.) *Atti del Convegno di didáctica Della matematica 2008* (13-24). Alta Scuola Pedagogica: Locarno, Suiza.

Hitt F. (2002) *Funciones en contexto*. Editorial Pearson Educación. México.

Hughes, D.(1990). Visualization and Calculus Reform. In *Visualization in Teaching and Learning Mathematics: A Project (MAA notes #19)*. Walter Zimmerman and Steven Cunningham, eds. Washington DC: Mathematical Association of America, 1-8.

Mejía, H.(1997). Geometría Analítica, Gráficas y Tablas. *Octavo seminario nacional de calculadoras y computadoras en educación matemática* Universidad de Sonora1997. 315-322.

Neus, I y Font, V. (2003). Significados institucionales y personales de la derivada. conflictos semióticos relacionados con la notación incremental. *Proceddings de XIX Jornadas del SI-IDM*. Córdoba.

Nuñez, E. (2007). Investigación de ambientes interactivos tecnológicos para el aprendizaje de las matemáticas. Tesis de Doctorado, Universidad Autónoma del Estado de Morelos.

Pluvinage F. (2005) Reflexiones sobre la recta numérica al servicio del cálculo en *Reflexiones sobre el aprendizaje del cálculo y su enseñanza*. México: Morevallado

Scher, D. (1993). Students' Conceptions of the Derivative across Multiple Representations. *Mathematics.*

José Carlos Cortés Zavala: Profesor Investigador de la Facultad de Físico Matemáticas de la Universidad Michoacana; Presidente de la Asociación Mexicana de Investigadores para el Uso de la Tecnología en la Enseñanza de las Matemáticas (AMIUTEM) cortes.zavala.carlos@gmail.com