

## Enseñanza de la Geometría en Secundaria. Caracterización de materiales didácticos concretos y habilidades geométricas

Silvia Villarroel, Natalia Sgreccia

### Resumen

En este trabajo se caracterizan los materiales didácticos concretos para enseñar Geometría en primer año de la Educación Secundaria (alumnos de 13 años de edad) y se reconocen habilidades geométricas que el uso de tales materiales permite desarrollar. Se identifican siete grandes grupos de materiales: modelos fijos 2D y 3D, rompecabezas geométricos, tangram, geoplano, transformaciones dinámicas, origami o papiroflexia y objetos del entorno real. Dependiendo de la intencionalidad didáctica, pueden a su vez identificarse nueve criterios de agrupamiento: cualidad, materia prima, disponibilidad, movilidad, dimensión, contenidos conceptuales, modelo de razonamiento, habilidades geométricas y versatilidad. Se concluye que una utilización especialmente pensada de materiales didácticos concretos puede favorecer el desarrollo de habilidades geométricas.

### Abstract

In this paper we characterize the didactical concrete materials for teaching Geometry in the first year of secondary school (pupils of 13 years old) and we recognize the geometrical skills that such materials allow to develop. Seven groups of materials are identified: 2D and 3D fixed models, geometrical puzzles, tangram, geoboard, dynamical transformations, origami and objects of the real environment. Depending on the didactical intention, it is possible to identify other nine criteria of grouping: quality, prime matter, availability, mobility, dimension, conceptual contents, model of reasoning, geometrical skills and versatility. We conclude that a specially thought use of didactical concrete materials may contribute to develop geometrical skills.

### Resumo

Neste trabalho se caracterizam materiais didáticos concretos para ensinar Geometria no primeiro ano do Ensino Médio (alunos de 13 anos de idade) e se reconhecem habilidades geométricas que o uso desses materiais permite desenvolver. São identificados sete grandes grupos de materiais: modelos fixos em 2D e em 3D, quebra-cabeças geométricos, tangram, geoboard, transformações dinâmicas, origami ou papiroflexia e objetos do ambiente real. Dependendo da intenção didática, podem se identificar nove critérios de agrupamento: qualidade, matéria-prima, disponibilidade, mobilidade, dimensão, conteúdos conceituais, modelo de raciocínio, habilidades geométricas e versatilidade. Conclui-se que uma utilização especialmente pensada de materiais didáticos concretos pode favorecer o desenvolvimento de habilidades geométricas

## 1. Introducción

En este artículo se presentan los materiales existentes en el mercado y aquellos que, sin ser comercializados, pueden realizar importantes aportes cuando se los utiliza en las clases de Geometría de 1° Año de la Educación Secundaria (alumnos de 13 años de edad). Además se identifican las habilidades geométricas que la utilización de dichos materiales puede favorecer a desarrollar.

Se pretende aportar al reconocimiento del potencial didáctico de los materiales didácticos concretos y propiciar así una difusión fundamentada de los mismos.

Cuatro son los conceptos teóricos clave a los que se hará referencia en este trabajo:

- Contenidos geométricos: A fin de organizar el tratamiento de los contenidos conceptuales citados en el Diseño Curricular Jurisdiccional vigente en Argentina (Ministerio de Educación de la provincia de Santa Fe, 1999) mediante el uso de materiales didácticos concretos, se consideran los siguientes: Posiciones entre rectas y planos; Sistemas de referencia para la ubicación de puntos en el plano; Cuerpos poliedros y redondos; Ángulos; Lugares geométricos -Circunferencia y círculo, Mediatriz y bisectriz, Alturas y medianas-; Polígonos; Transformaciones; Teorema de Thales; Semejanza.
- Habilidades geométricas: Según Hoffer (1981), las habilidades básicas que una buena enseñanza de la Geometría debería ayudar a desarrollar son clasificadas en cinco: Visuales; De comunicación; De dibujo y construcción; Lógicas o de razonamiento; De aplicación o transferencia.
- Materiales didácticos concretos: Se entiende por materiales didácticos concretos a todos aquellos objetos usados por el profesor o los alumnos en los procesos de enseñanza y aprendizaje de la Matemática con el fin de lograr ciertos objetivos específicos (Alsina, Burgués y Fortuny, 1988). Cabe aclarar que no se considerarán a los instrumentos de dibujo geométrico de uso elemental (regla, compás), ya que los mismos merecen un tratamiento en particular.
- Niveles de razonamiento geométrico y fases de enseñanza/aprendizaje: Van Hiele (1986) asocia el razonamiento geométrico con un proceso inductivo en cinco niveles, coherente con la construcción del espacio, cuyo respeto posibilita un aprendizaje significativo y gradual: 1. Visualización; 2. Análisis; 3. Deducción informal; 4. Deducción formal; 5. Rigor. Las fases de enseñanza/aprendizaje a las que alude este autor se refieren a las directrices para que los profesores puedan ayudar a sus alumnos a subir al siguiente nivel de razonamiento. Se trata de etapas en la graduación y organización de las actividades propuestas para tal fin y son cinco: 1. Información/Indagación; 2. Orientación dirigida; 3. Explicitación; 4. Orientación libre; 5. Integración.

## 2. Registro de materiales didácticos concretos

Metodológicamente, se realizó un recorrido por variadas fuentes de información provenientes de Iberoamérica. Para el procesamiento se construyeron tres dimensiones de análisis, cada una con tres categorías:

**Tabla 1. Dimensiones y categorías de análisis para el Registro de materiales didácticos concretos**

Dimensiones	Categorías
<b>Descripción del material.</b> Caracterización y composición del material	Características generales
	Variantes/Integrantes
	Construcción y accesibilidad
<b>Interés didáctico-matemático.</b> Aporte a la Educación Matemática que cada material puede realizar	Contenidos geométricos
	Habilidades geométricas
	Niveles de razonamiento geométrico y fases de enseñanza/aprendizaje
<b>Versatilidad del material.</b> Flexibilidad del material, su aplicación y/o adaptación a niveles más avanzados del aprendizaje	Adaptación a diversos contenidos geométricos
	Vinculación con otros ejes del área
	Uso en otros niveles de escolaridad

A continuación se detalla el *Registro de materiales didácticos concretos* identificado, abarcando siete grandes grupos de materiales. Para ejemplos de actividades para el aula sugerimos consultar Villarroel y Sgreccia (2011).

## 2.1. Modelos fijos 2D Y 3D

### 2.1.1. Descripción del material

#### Características generales:

Permiten acercarse a conceptos y habilidades geométricas mediante su carácter fijo o estático. Son considerados como referentes, en su correspondiente dimensión, permitiendo la incorporación de contenidos y las relaciones entre ellos. Favorecen la formación de representaciones mentales, facilitando la ejemplificación de las ideas matemáticas y permitiendo la modelización de situaciones u objetos del entorno.

#### Variantes/Integrantes:

a. *Bloques lógicos de Dienes* (Fig. 1): Se considera como su creador a William Hull (1882-1952) por ser el primero en utilizarlos, tal como lo reconociera el matemático húngaro Zoltan Paul Dienes (1916-...). Este último fue quien los difundió. Este material está compuesto por 48 piezas de diferentes figuras planas (cuadrados, triángulos equiláteros, círculos y rectángulos) de diferentes colores (rojo, azul y amarillo), grosor (grosso y delgado) y tamaño (grande y pequeño). Es conocido también con el nombre de bloques multibase.

b. *Cuerpos geométricos rígidos* (Fig. 2): Son modelos de cuerpos espaciales, como poliedros y redondos. Según el modo en que estén fabricados, es posible analizar diferentes propiedades, como por ejemplo en los cuerpos de plástico transparente o acrílico aparecen sus secciones planas.



Figura 1



Figura 2

### Construcción y accesibilidad:

Los Bloques lógicos pueden ser fabricados por el docente o los alumnos, en cartón o algún papel con bastante rigidez como la cartulina, también pueden ser construidos en madera o goma eva o conseguirse en el mercado de plástico o acrílico. Los cuerpos geométricos rígidos pueden conseguirse en madera, plástico, telgopor o acrílico. En el caso de no contar con ellos, pueden utilizarse objetos que estén al alcance del alumno, como latas de conserva, cajas de medicamentos, golosinas, etc., los cuales pueden utilizarse con los mismos fines. Por ello, tanto unos como otros son de muy fácil acceso.

### **2.1.2. Interés didáctico-matemático**

#### Contenidos geométricos:

*Bloques lógicos de Dienes:* Reconocimiento de figuras planas y sus elementos; Clasificación de los bloques de acuerdo a algún criterio específico; Establecimiento de relaciones entre las piezas; Comparación de áreas y perímetros; Relaciones de equivalencias de áreas y perímetros; Cubrimiento del plano mediante teselaciones.

*Cuerpos geométricos rígidos:* Presentación de los cuerpos espaciales más importantes; Estudio de las propiedades geométricas y sus relaciones: lados, ángulos, secciones, diagonales, etc.; Comparación de volúmenes; Construcción de desarrollos planos en papel; Estudio de las sombras de cuerpos sobre una pantalla empleando un foco luminoso; Armado de distintas clasificaciones; Obtención de nuevos poliedros a partir de poliedros dados, considerándose, por ejemplo, como vértices del nuevo poliedro los baricentros de las caras del poliedro dado; Análisis de las simetrías de cuerpos espaciales.

#### Habilidades geométricas:

Las *habilidades visuales* que desarrollan son: coordinación visomotora, percepción figura-fondo, constancia perceptual, percepción de la posición en el espacio y de relaciones espaciales entre objetos, discriminación visual y memoria visual.

Las *habilidades de dibujo y construcción* que fomentan son: representación de figuras o cuerpos, reproducción a partir de modelos dados, construcción sobre la base de datos dados en forma oral, escrita o gráfica.

Las *habilidades de comunicación* que promueve son: interpretación de información geométrica y socialización de dicha información, en forma oral o escrita.

Las *habilidades de razonamiento* que anima son: invención, imaginación e intuición de situaciones, así como exploración y descubrimiento de conceptos, regularidades y relaciones.

Las *habilidades de aplicación o transferencia* que promueve son: sensibilización geométrica, representación, descripción y explicación de ideas en términos geométricos, y análisis de representaciones geométricas.

#### Niveles de razonamiento geométrico y fases de enseñanza/aprendizaje:

Son de gran importancia en alumnos que se encuentran en el nivel 1 o 2, ya que durante su tránsito hacia niveles superiores necesitan referirse a imágenes visuales para, por ejemplo, caracterizar las figuras. Pueden utilizarse en las fases de información u orientación dirigida, ya que funcionan como ilustrativos de los conceptos, y su manipulación favorece la incorporación de conceptos y la exploración de los mismos.

### 2.1.3. Versatilidad del material

Adaptación a diversos contenidos geométricos: Favorecen principalmente el desarrollo de las nociones geométricas elementales y las propiedades básicas. No obstante, sin desmerecer tamaña importancia, presentan limitaciones para favorecer la incorporación de conceptos más complejos, como por ejemplo la interpretación o demostración de teoremas.

Vinculación con otros ejes del área: Existe vinculación con el eje Medidas al permitir, por ejemplo, el establecimiento de equivalencias entre áreas y perímetros o la comparación de volúmenes.

Uso en otros niveles de escolaridad: Debido a la simplicidad de sus características y a la importancia en la formación de las nociones básicas, pueden ser aplicados desde el nivel inicial, pasando por el nivel primario, pero no más allá de los primeros años de la escolaridad secundaria. Esto se debe a que su utilización no necesariamente favorece el desarrollo del pensamiento lógico formal.

## 2.2. Rompecabezas geométricos

### 2.2.1. Descripción del material

Características generales: Son figuras geométricas multidimensionales compuestas por la conjunción, sin superposición, de varias piezas (en una cantidad finita). Se pueden considerar distintos tipos de rompecabezas geométricos: *por unión* -dadas las piezas se compone una figura o un cuerpo- o *por disección* -implica cortar de manera específica para obtener otras-.

Variantes/Integrantes: Por la amplia variedad que existe de este tipo de materiales, se han considerado sólo algunos ejemplos. Además uno de ellos, el Tangram, incluido en el segundo tipo, se ha desarrollado en forma separada debido a la riqueza histórico-cultural que presenta, a la diversidad dentro de sí mismo que se puede encontrar y, por qué no decirlo, a su popularidad.

### 2.2.2. Rompecabezas geométricos por unión

a. *Poliominós y poliamantes* (Fig. 3): Son polígonos contruidos por la unión de cuadrados unitarios a lo largo de, por lo menos, uno de sus lados, de modo tal que no queden huecos en la estructura resultante. Se consideran poliominós diferentes a aquellos que no pueden obtenerse de otro dado, por rotación o reflexión. Los poliamantes se diseñan respetando las mismas propiedades que los anteriores pero utilizando en su construcción triángulos equiláteros.

b. *Rompecabezas de la T, de la H, de la casita o la cruz griega* (Fig. 4): Son de pocas piezas y sus formas son sencillas. Por ejemplo, en la Fig. 4 se pueden observar tres piezas convexas (un paralelogramo rectángulo, un triángulo isósceles y un pentágono irregular) y dos piezas cóncavas (un pentágono y un hexágono, ambos irregulares).

c. *Rompecabezas de las cuatro T* (Fig. 5): Está formado por cuatro piezas en forma de T, las cuales deben encajarse en dos recintos cuadrados de diferente tamaño. Las soluciones para el recinto de mayor tamaño son varias; en cambio, para el recinto menor existe sólo una solución.

d. *Rompecabezas de piezas idénticas* (Fig. 6): Dentro de este tipo se encuentran los conocidos con el nombre de IZZI e IZZI 2. El primero de ellos está formado por 64



piezas cuadradas, cada una de ellas divididas de diferente manera en regiones blancas y negras. El objetivo es ubicar las piezas dentro de un cuadrado de  $8 \times 8$  piezas, de modo tal que los bordes por los que se unen las piezas sean del mismo color: blanco toca blanco y negro toca negro. El IZZI 2 está compuesto por 12 piezas en forma de rombo, cada una de ellas divididas en cuatro regiones de diferente color (rojo, verde, amarillo y azul). El objetivo es formar un hexágono ubicando las 12 piezas de tal manera que los bordes por los que se unen sean del mismo color. Otros ejemplos de este tipo de rompecabezas son el Q-Pak, el cual está formado por 8 triángulos rectángulos isósceles, y el Crack formado por 4 cuadriláteros idénticos con un único ángulo recto. En estos últimos el objetivo es crear diferentes figuras geométricas, símbolos, etc., utilizando todas las piezas.

e. *Cubos y policubos* (Fig. 7): Por cubo se considera al correspondiente cuerpo geométrico de arista unitaria. En algunas ocasiones, presenta la posibilidad de encastrarlos dando origen a los policubos. Estos podrían considerarse como el equivalente en el espacio de los poliomínos. Pueden obtenerse como una sola pieza o bien por apilamiento de cubos unitarios.

Se pueden considerar diferentes colecciones de agrupaciones de cubos, entre ellas una de las más conocidas es el cubo Soma (Fig. 8), formado por siete agrupaciones (un tricubo y seis tetracubos), diseñado por el danés Piet Hein (1905-1997) en el año 1936. El objetivo de este rompecabezas es colocar las piezas de manera que todas juntas formen un cubo.

Otro rompecabezas muy famoso es el cubo de Rubik o cubo mágico (Fig. 9), inventado por el húngaro Ernő Rubik (1944-...) en 1974, el cual está formado por un conjunto (finito) de cubos. En el cubo típico cada una de sus seis caras está dividida en nueve partes iguales, lo que conforma 26 piezas ( $3 \times 3 \times 3 - 1$ , no hay pieza central), unidos por un mecanismo ubicado en el lugar de la pieza central, que permite cambiarlos de posición. En cada uno de los cubos que lo componen, las caras son de un color diferente (hay cubos que tienen más de una cara coloreada). Cuando el cubo de Rubik está resuelto (como el de la Fig. 9), cada cara está construida por partes de un único color.



Figura 3



Figura 4

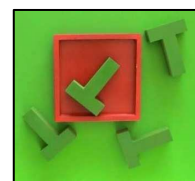


Figura 5

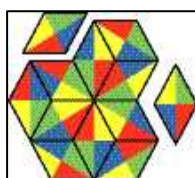


Figura 6



Figura 7



Figura 8

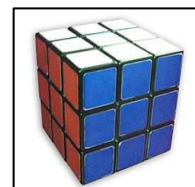


Figura 9

### 2.2.3. Rompecabezas geométricos por disección

a. *Demostraciones dinámicas* (Fig. 10): Las piezas colocadas de diferentes maneras demuestran un teorema. Por ejemplo, cuatro triángulos rectángulos idénticos de catetos  $b$ ,  $c$  e hipotenusa  $a$ , y tres cuadrados de lados respectivos  $a$ ,  $b$  y  $c$  permiten la demostración del teorema de Pitágoras.

b. *Rompecabezas de mosaicos de Van Hiele* (Fig. 11): Formado por siete piezas, cuatro de ellas son triángulos y las restantes tres son cuadriláteros. Todas ellas, dispuestas en su posición inicial, forman un rectángulo.

c. *Rompecabezas por cuadratura* (Fig. 12): Se considera como cuadratura a las divisiones que hay que realizar en una figura plana (por ejemplo, un polígono regular) de forma que, con las piezas obtenidas, pueda construirse un cuadrado. La cuadratura más conocida es la del triángulo equilátero, pero se pueden encontrar rompecabezas por cuadratura en base a pentágonos, octógonos y hexágonos.



Figura 10

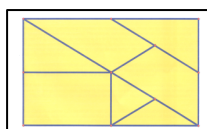


Figura 11

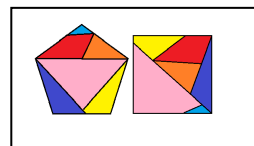


Figura 12

Construcción y accesibilidad: Dependiendo del uso que de los mismos se realice, los rompecabezas pueden fabricarse, por el docente o el alumno, en cartón, papel, cartulina, madera, goma eva; o bien, conseguirse en el mercado, fabricados de plástico.

### 2.2.4. Interés didáctico-matemático

Contenidos geométricos:

*Poliominós y poliamantes*: Generación de formas distintas a partir de un número fijo de piezas; Interpretación de formas compuestas, como desarrollos planos de poliedros; Estudio de polígonos semejantes, relaciones entre lados correspondientes y entre áreas; Clasificación de formas cóncavas y convexas; Determinación del número máximo de ángulos cóncavos y, por lo tanto, del número mínimo de ángulos convexos; Estudio de polígonos isoperimétricos y equivalentes; Algoritmo de cálculo de áreas a partir de la descomposición en formas más sencillas o por transformación en polígonos equivalentes; Resolución de problemas de recubrimiento o teselaciones del plano.

*Rompecabezas de la T, de la H, de la casita ó la cruz griega*: Identificación de figuras cóncavas y convexas; Multidireccionalidad, trascendiendo lo horizontal-vertical.

*Rompecabezas de las cuatro T*: Multidireccionalidad, trascendiendo lo horizontal-vertical; Cubrimiento del espacio.

*Rompecabezas de piezas idénticas*: Construcción de figuras simétricas y utilización de la simetría para resolver el rompecabezas; Resolución de problemas combinatorios; Cubrimiento del espacio.

*Cubos y policubos:* Construcción de poliedros equivalentes por superposición de cubos; Empaquetamiento del espacio con cubos o con diferentes policubos; Descripción aproximada de superficies; Generación combinatoria de formas hechas con un número fijo de cubos; Representaciones isométricas de distintas agrupaciones de cubos; Relación y conservación de área/volumen; Medida y cálculo de volúmenes aproximados empleando cubos; Experimentación de las distintas posiciones en el espacio y descripción de los movimientos generados; Trabajo con las proyecciones ortogonales y los planos de simetría; Estudio de las simetrías del cubo; Estudio de rotaciones espaciales y sus combinaciones.

*Demostraciones dinámicas:* Realización de demostraciones geométricas basadas en la equivalencia de áreas; Construcción de materiales para “demostrar” otras propiedades, como por ejemplo el cuadrado o cubo de un binomio.

*Rompecabezas de mosaicos de Van Hiele:* Generación de formas distintas a partir de un número fijo de piezas; Composición y descomposición de diferentes polígonos; Medición de áreas utilizando la pieza menor; Ordenamiento de piezas por áreas; Relaciones de adición y sustracción entre piezas; Composición de distintos polígonos, fijado un número de piezas, y observación de sus características; Realización de diferentes clasificaciones (figuras isoperimétricas, equisuperficiales, simétricas antisimétricas, etc.); Convexidad y concavidad de figuras; Estudio de figuras semejantes; Estudio de las relaciones de proporcionalidad entre piezas.

*Rompecabezas por cuadratura:* Relaciones de adición y sustracción entre piezas; Estudio de ángulos mediante la clasificación, comparación, ordenación, suma e igualdad; Generación de un cuadrado o el polígono del cual deriva (triángulo equilátero, pentágono, hexágono u octógono), a partir de la composición de diferentes piezas; Estudio de polígonos con igual área pero distinto perímetro.

Habilidades geométricas: Coinciden con las que pueden desarrollar los distintos tipos de Tangram (que se presentan más adelante), ya que los mismos están incluidos en este grupo de materiales.

Niveles de razonamiento geométrico y fases de enseñanza/aprendizaje: Pueden ser aplicados en los primeros tres niveles de razonamiento. Las actividades propuestas pueden adaptarse tanto a alumnos que manejen únicamente información visual (nivel 1) como a aquellos que empiezan a reconocer la presencia de propiedades geométricas en los objetos (nivel 2) o que comienzan a clasificar y a desarrollar un razonamiento más riguroso (nivel 3). Tienen dos propiedades: son estimuladores de la actividad intelectual y generadores de problemas debido a su carácter lúdico. Por ello, además de entretener, pueden ser utilizados por los docentes para: visualizar formas y propiedades contribuyendo a mejorar las representaciones mentales (fase 1), explorar las formas resolviendo actividades y problemas propuestos por el docente (fase 2), incrementar el vocabulario geométrico a través de la ejercitación de descripciones (fase 3), aplicar y combinar los conocimientos adquiridos para resolver nuevas actividades (fase 4) y probar propiedades geométricas y métricas encerradas en ellos mismos (fase 5).

### **2.2.5. Versatilidad del material**

Adaptación a diversos contenidos geométricos: Posibilita el tratamiento de varios contenidos geométricos, en su mayoría relacionados con el plano, aunque algunos



de ellos, como los cubos y policubos o el cubo Soma o de Rubik, pueden ser utilizados para abordar contenidos de la Geometría tridimensional.

Vinculación con otros ejes del área: Pueden establecerse vinculaciones con el eje: Estadística y Probabilidades al generar, por ejemplo, formas distintas a partir de un número fijo de piezas; Medidas al estudiar, entre otras cosas, los polígonos isoperimétricos o equisuperficiales; Números y Operaciones al realizar cálculos de, por ejemplo, áreas y volúmenes.

Uso en otros niveles de escolaridad: Este material puede ser utilizado en cualquier nivel, ya que los rompecabezas son fundamentales para el desarrollo de muchas habilidades, no solamente geométricas. Sin embargo, los que aquí se presentan están orientados a alumnos de los últimos años del nivel primario o que cursen el nivel secundario.

## 2.3. Tangram

### 2.3.1. Descripción del material

Características generales: Es un rompecabezas formado por un conjunto de piezas poligonales, conocidas con el nombre de tans, que se obtienen al diseccionar una figura plana. Su finalidad es la disposición de las piezas para formar diferentes siluetas. Tales figuras se conocen con el nombre de tangramas. Al hacerlo, las piezas no deben superponerse entre sí y deben utilizarse en su totalidad. Este rompecabezas es fundamentalmente planimétrico, exceptuando el caso particular del tangram espacial.

Variantes/Integrantes:

a. *Tangram Chino* (Fig. 13): Es muy antiguo, no se sabe con certeza quién lo creó pero se cree que es originario de China, donde se lo conoce con el nombre de “*Chi Chiao Pan*” que significa “juego de los siete elementos” o “tabla de la sabiduría”. También es conocido con el nombre de Tangram tradicional. Está formado por siete piezas: un cuadrado, cinco triángulos rectángulos de diferentes tamaños y un paralelogramo. Estas piezas se originan a partir de la disección de un cuadrado. Entre ellas existen algunas de distinta forma con la misma superficie, por ejemplo el cuadrado y el triángulo rectángulo mediano y/o el paralelogramo.

b. *Tangram de Fletcher* (Fig. 14): Está formado por siete piezas (dos cuadrados de distinto tamaño, cuatro triángulos rectángulos -dos a dos de igual tamaño- y un paralelogramo). Estas piezas se originan a partir de la disección de un cuadrado. Algunas de ellas, como por ejemplo el triángulo rectángulo grande y el cuadrado pequeño, tienen la misma superficie pero -claro está- distinta forma.

c. *CardioTangram* (Fig. 15): Su nombre se origina por la ubicación inicial en que se disponen las piezas, la cual tiene forma de corazón. Está compuesto por nueve piezas: un cuadrado, un triángulo rectángulo, un paralelogramo, un trapecio y cinco sectores circulares de diferentes tamaños (tres sectores circulares correspondientes a un ángulo recto y dos sectores circulares correspondientes a un ángulo de  $45^\circ$ ).

d. *Tangram hexagonal* (Fig. 16): Obtenido a partir de la disección de un hexágono regular, lo que da origen a su nombre. Está formado por seis piezas: dos rombos de distinto tamaño, dos triángulos equiláteros de diferente tamaño, un trapecio y un hexágono regular. Cada una de las piezas contiene una cantidad entera de veces al

triángulo de menor área. Este hecho puede ser utilizado como herramienta para su construcción.

e. *Tangram pentagonal* (Fig. 17): También conocido como pentagrama, debido a que sus piezas se originan por la disección de un pentágono regular. Está formado por siete triángulos: dos de ellos son congruentes entre sí, un triángulo isósceles y los demás son triángulos semejantes entre sí, dado que están contenidos entre rectas paralelas cortadas por dos secantes.

f. *Tangram triangular* (Fig. 18): Está formado por ocho piezas (dos triángulos equiláteros, dos rombos, tres trapecios isósceles y un hexágono regular), que resultan de hacer cortes especiales en un triángulo equilátero. Tiene la particularidad de que todas sus piezas son de diferente tamaño. A pesar de ello, todas contienen una cantidad entera de veces al triángulo equilátero de menor tamaño. Este hecho puede ser utilizado como herramienta para su construcción.

g. *Tangram de Lloyd* (Fig. 19): Se obtiene a partir de la disección de un cuadrado en cinco piezas (un cuadrado, un triángulo rectángulo, un triángulo escaleno, un trapecio y un polígono cóncavo). Se puede observar que todas sus piezas tienen diferente forma y tamaño. El nombre se debe a su inventor, el estadounidense Samuel Lloyd (1841-1911).

h. *Tangram pitagórico* (Fig. 20): Se construye por una disección de un rectángulo de 4 x 5 unidades. Este procedimiento da origen a siete piezas: dos triángulos rectángulos de igual tamaño, cuatro trapecios rectángulos (dos de los cuales son congruentes entre sí) y un pentágono.

i. *Tangram de Brügner* (Fig. 21): Se forma por la disección de un rectángulo en tres triángulos rectángulos semejantes. Fue diseñado de manera tal que se optimice la cantidad de polígonos convexos que puedan construirse. Por ello se lo conoce con el nombre de tangram mínimo. Fue inventado por el alemán Georg Brügner en 1984. Su creador mostró que con las tres piezas que lo forman es posible construir 16 polígonos convexos, mientras que con las siete piezas del tangram tradicional (chino) sólo pueden formarse 13 figuras convexas.

j. *Stomachion* (Fig. 22): Conocido también como *Loculus Archimedi* -el cuadrado o caja de Arquímedes (287 a.C.-212 a.C.)-, en honor a su creador, aunque no es seguro que él lo haya creado, o también como *Syntemachion*. Consiste en la disección de un cuadrado en 14 piezas poligonales: once triángulos, dos cuadriláteros y un pentágono.

k. *Tangram ovoide* (Fig. 23): Es conocido, también, con el nombre de *ovotangram* o *tangram del huevo*. Se origina a partir de la disección de un ovoide. Está compuesto por nueve piezas: dos triángulos isósceles curvos -se llama triángulo isósceles curvo a aquel que tiene dos lados rectos iguales y el tercero es un arco de circunferencia cuyo centro es el vértice opuesto a dicho lado-, dos triángulos rectángulos curvos, dos triángulos rectángulos grandes y uno pequeño, y dos trapecios curvos.

l. *Tangram espacial* (Fig. 24): Es la representación en tres dimensiones del tangram chino en una de las caras (y su opuesta) de un cubo. Está formado por siete prismas rectos (cinco de base triangular y dos de base cuadrangular), originados por cortes ortogonales del cubo sobre una de sus caras.

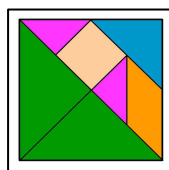


Figura 13

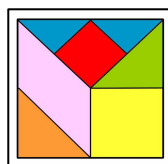


Figura 14

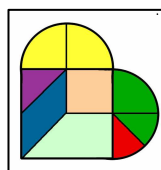


Figura 15

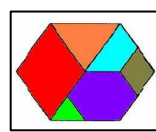


Figura 16

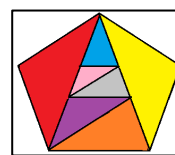


Figura 17

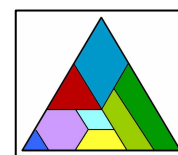


Figura 18

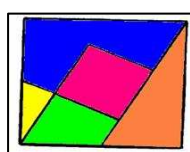


Figura 19

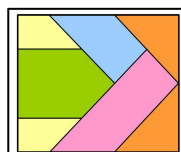


Figura 20

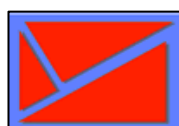


Figura 21

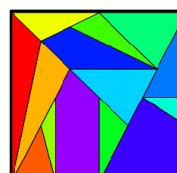


Figura 22

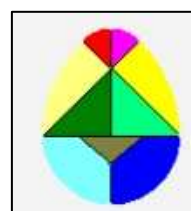


Figura 23

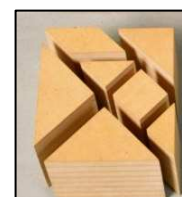


Figura 24

Construcción y accesibilidad: Para construirlos, se requieren conocimientos geométricos básicos y pueden emplearse diversos materiales, como ser: madera, plástico, cartón, cartulina, papel, goma eva. Debido a esto, puede ser fabricado por el docente y/o los alumnos a muy bajo costo.

### 2.3.2. Interés didáctico-matemático

Contenidos geométricos:

*Tangram Chino y Tangram de Lloyd:* Comprobación del teorema de Pitágoras.

*CardioTangram:* Composición y descomposición de diferentes polígonos o figuras circulares; Estudio de las nociones de radio, diámetro, cuerda y ángulos en el círculo.

*Tangram pentagonal:* Comprobación de relaciones con el número de oro.

*Tangram de Brügner:* Estudio de figuras semejantes, especialmente de triángulos; Estudio del número de oro a través de las relaciones que se dan entre las piezas.

*Tangram ovoide:* Cálculo de área y perímetro de figuras sencillas, considerando entre ellas figuras circulares.

*Tangram espacial:* En este caso se pueden trabajar todas las nociones comunes a los demás, pero considerando su ampliación a la tercera dimensión. Particularmente, es posible la comprobación del teorema de Pitágoras en tres dimensiones.

Habilidades geométricas:

Las *habilidades visuales* que permite desarrollar son: coordinación visomotora, percepción figura-fondo, constancia perceptual o de forma, tamaño y posición; percepción de la posición en el espacio y de relaciones espaciales entre objetos, discriminación y memoria visual.

Las *habilidades de dibujo y construcción* que promueve son: reproducción y construcción a partir de modelos y datos dados en forma oral, escrita o gráfica.

Las *habilidades de comunicación* que fomenta son las relacionadas con la interpretación y socialización de información geométrica.

Las *habilidades de razonamiento* que anima son: invención, imaginación e intuición de situaciones, exploración y descubrimiento de conceptos y regularidades.

Las *habilidades de aplicación o transferencia* que promueve son: indagación de propiedades de modelos y conceptos, representación, descripción y explicación de distintos fenómenos físicos mediante modelos geométricos.

Niveles de razonamiento geométrico y fases de enseñanza/enseñanza: Puede implementarse con alumnos cuyo razonamiento se encuentre en los niveles 1, 2 y 3. Los alumnos pueden, por ejemplo, percibir figuras geométricas en su totalidad, descubrir las partes que las forman, usar las representaciones gráficas como una forma de verificar deducciones o teoremas, como el teorema de Pitágoras.

Debido a la gran cantidad de variantes que presenta el Tangram, puede ser utilizado en varias fases. Por ejemplo, durante la fase de información puede usarse, entre otras cosas, para introducir vocabulario; en la fase de orientación dirigida los alumnos pueden explorar conceptos y propiedades y en la de explicitación pueden expresar e intercambiar observaciones realizadas mediante su manipulación.

### 2.3.3. Versatilidad del material

Adaptación a diversos contenidos geométricos: Permite el tratamiento de varios contenidos geométricos: posiciones de rectas, ángulos, polígonos, simetrías, congruencia y semejanza de figuras, teorema de Pitágoras, poliedros, circunferencia y círculo, etc. Si bien la mayoría de las variantes corresponden a representaciones en el plano (existe sólo un tangram en tres dimensiones -el espacial-), su utilización favorece el trabajo en ambas dimensiones debido a que pueden trabajarse los mismos conceptos convenientemente.

Vinculación con otros ejes del área: Tiene gran vinculación con el eje Medida ya que posibilita el tratamiento de conceptos tales como perímetro, área y volumen. También puede vincularse con el eje Números y Operaciones debido a que permite el estudio de números racionales e irracionales.

Uso en otros niveles de escolaridad: Puede ser aplicado en los últimos años de la escolaridad primaria y en los primeros años de la escolaridad secundaria. En niveles educativos posteriores, la utilización de este material didáctico es relativa, ya que su empleo no promueve el suficiente rigor que se requiere en tales niveles.

## 2.4. Geoplano

### 2.4.1. Descripción del material

Características generales: Tablero de madera o material similar de forma cuadrada en el que se distribuye una cierta cantidad de clavos de cabeza plana, clavados parcialmente y equidistantes entre sí. Se acompaña con bandas elásticas de distintos tamaños y colores. La variedad de colores ayuda a diferenciar líneas, permite superponer e inscribir figuras, señalar ejes de simetría, etc. Además supone una motivación para los alumnos. La diversidad de tamaños de las bandas es imprescindible, ya que pueden utilizarse varias bandas para cada representación o bien formar la figura con una sola banda. Algunas veces puede usarse hilo o algún material similar que no se estire, por ejemplo, para construir distintos polígonos con perímetro constante.

Variantes/Integrantes: La disposición de los clavos puede ser en forma (Fig. 25):

- a. *Cuadrada u ortogonal*: geoplano cuadrado u ortogonal.
- b. *Triangular o isométrica*: geoplano triangular o isométrico.
- c. *Circular*: geoplano circular.



Figura 25

Construcción y accesibilidad: Puede ser confeccionado por el docente y los alumnos bajo la supervisión de un adulto. Su costo es relativamente económico y para llevar a cabo dicha construcción se ponen en juego conocimientos matemáticos. También pueden construirse geoplanos en papel. Estos son mallas o tramas puntuales ortogonales, isométricas o circulares sobre las que se realizan trazos uniendo los distintos puntos en lápiz negro, lápices de colores y/o lapicera. En estos últimos, al realizar un trazo no puede ser modificado rápidamente como sí lo permiten las bandas elásticas o los hilos, en el de madera, por lo cual esta característica se presenta como una desventaja de los geoplanos de papel. Sin embargo, puede suplirse proveyendo a los alumnos de varios ejemplares en los cuales puedan realizar sus construcciones y así poder compararlas.

#### 2.4.2. Interés didáctico-matemático

##### Contenidos geométricos:

*Geoplano cuadrado u ortogonal*: Cálculo de la distancia entre dos puntos; Utilización de coordenadas cartesianas enteras; Gráficas; Diseño y obtención de mosaicos a partir de uno dado; Comprobación del teorema de Pitágoras y del de Thales

*Geoplano Triangular o Isométrico*: Estudio de poliedros; Identificación de caras, aristas y vértices; Representación bidimensional de cuerpos desde distintas perspectivas; Estudio de polígonos que incluyen ángulos (interiores o exteriores) de  $60^\circ$ , especialmente de triángulos equiláteros y hexágonos; Cálculo de la distancia entre dos puntos; Utilización de coordenadas cartesianas enteras; Gráficas; Diseño y obtención de mosaicos a partir de uno dado; Comprobación del teorema de Pitágoras y del de Thales

*Geoplano Circular*: Estudio de circunferencia y círculo; Identificación de radio, diámetro, cuerdas, rectas tangentes y secantes; Determinación de circunferencias interiores, exteriores, tangentes y secantes; Identificación de ángulos en una circunferencia: centrales, inscritos y semi-inscritos; Estudio de polígonos inscritos, circunscriptos y estrellados; Determinación de la congruencia de polígonos y figuras circulares.

##### Habilidades geométricas:

Las *habilidades visuales* que desarrollan son: coordinación visomotora, percepción figura-fondo, constancia perceptual o de forma, tamaño y posición, percepción de la posición en el espacio, percepción de relaciones espaciales entre objetos, discriminación visual.

Las *habilidades de dibujo y construcción* que fomenta son: reproducción a partir de modelos dados y construcción de figuras que cumplan determinadas propiedades.



Las *habilidades de comunicación* que anima son: interpretación y socialización de información geométrica, al otorgar significado a los conceptos y describir los procedimientos geométricos realizados.

Las *habilidades de razonamiento* que desarrolla son: invención, imaginación e intuición de situaciones así como exploración y descubrimiento de conceptos, regularidades y relaciones.

Las *habilidades de aplicación o transferencia* que promueve son: interrogación, representación, descripción y explicación, así como análisis de representaciones.

Niveles de razonamiento geométrico y fases de enseñanza/aprendizaje: Puede ser utilizado por alumnos que se encuentren en los niveles 1 y 2 de razonamiento geométrico. Esto se debe a que mediante su utilización, el alumno podrá aprender vocabulario geométrico, identificar determinadas formas dentro de un conjunto y reproducirlas. Además podrá reconocer, informalmente, las propiedades esenciales de las figuras mediante la observación y la experimentación con dicho material.

Si bien este material puede utilizarse durante la fase de información, se considera más provechoso que el alumno investigue por sí mismo los contenidos, por lo cual se recomienda su uso durante las fases de orientación dirigida y orientación libre. Además, favorece la manipulación de los conceptos y la aplicación de los mismos, por lo que puede ser utilizado en la fase de explicitación.

### **2.4.3. Versatilidad del material**

Adaptación a diversos contenidos geométricos: Permite el abordaje de gran cantidad de contenidos geométricos: segmentos, poligonales, ángulos, polígonos, isometrías planas, congruencia y semejanza de figuras, teorema de Pitágoras, poliedros, circunferencia y círculo, polígonos inscritos y circunscriptos, etc. Sin embargo, su uso es particularmente importante en el estudio del plano, ya que solamente el geoplano isométrico permite el abordaje de conceptos relacionados con el espacio.

Vinculación con otros ejes del área: Tiene gran vinculación con el eje Medidas por permitir trabajar los conceptos de perímetro y área. Además se lo puede relacionar con el eje Funciones al posibilitar la ubicación de puntos en el plano cartesiano.

Uso en otros niveles de escolaridad: Es de gran aplicabilidad en el nivel inicial, la escolaridad primaria y en los primeros años de la escolaridad secundaria. Su uso es limitado en niveles educativos posteriores, ya que no necesariamente favorece la profundización/formalización de los contenidos.

## **2.5. Transformaciones dinámicas**

### **2.5.1. Descripción del material**

Características generales: Permiten una aproximación a conceptos y habilidades geométricas relacionadas especialmente con el pasaje de la segunda dimensión (el plano bidimensional) a la tercera dimensión (el espacio tridimensional) mediante el carácter dinámico que los caracteriza. Las figuras geométricas pueden encontrar en estos materiales un buen medio de representación y así recuperar el aprendizaje del espacio tridimensional y de la vinculación entre dimensiones, cuya enseñanza suele relegarse en el nivel secundario.

Variantes/Integrantes:

a. *Poliformas* (Fig. 26): Piezas de cartón o plástico en forma de polígonos regulares de igual lado. Las piezas se pueden engarzar lado con lado haciendo coincidir los vértices por medio de cinta adhesiva y sujetando las pestañas que contienen con bandas elásticas o por medio de adecuados diseños de entrantes y salientes en los correspondientes lados de las piezas.

b. *Varillas de mecano* (Fig. 27): Barras de metal, madera o material similar, con agujeros equidistantes y de diferentes longitudes. Se acompaña de tornillos con tuerca llamados “gancho mariposa”; bandas elásticas que pueden ser de diferentes colores e hilo de distintas longitudes.

c. *Retículas* (Fig. 28): Colección de barras y nudos para conectarlas. El material puede ser plástico, madera o metal. Los nudos pueden ser elásticos, de plástico, alambre, fijos de metal o madera con conectores apropiados para recibir las barras.

d. *Desarrollos planos* (Fig. 29): Cartulina, papel vegetal, cartón o cualquier papel consistente de color uniforme en el cual puedan representarse los desarrollos de los distintos cuerpos geométricos. Para su armado es necesario utilizar goma de pegar o bien, si presentan pestañas, bandas elásticas.



Figura 26



Figura 27



Figura 28

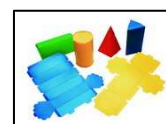


Figura 29

Construcción y accesibilidad: Aunque para la construcción de estos materiales no se requieren materiales costosos o de difícil acceso, debido a los usos que de ellos se hacen, se recomienda adquirir los que se ofrecen en el mercado, excepto en el caso de los desarrollos planos, cuya construcción involucra contenidos geométricos específicos. Para el tratamiento de algunos contenidos, como por ejemplo la clasificación de polígonos, las varillas de mecano pueden ser fabricadas, por el alumno o el docente, en cartón o papel.

### 2.5.2. Interés didáctico-matemático

Contenidos geométricos:

*Poliformas:* Generación de todos los posibles ángulos poliédricos cuyas caras son polígonos regulares iguales; Generación de todos los poliedros con caras y vértices congruentes; Comprobación experimental de su existencia; Análisis de sus posibles desarrollos planos; Generación combinatoria de formas poliédricas hechas con más de un tipo de pieza; Clasificación según familias de simetrías; Iniciación en procesos inductivos y deductivos; Descubrimiento de relaciones entre caras, vértices y aristas; Generación de poliedros semirregulares a partir de truncamientos sucesivos de cubos; Validación de la existencia de poliedros convexos ensayando diferentes teorías numéricas; Soluciones de la ecuación de Euler:  $C + V - A = 2$ ; Medidas y cálculos de ángulos diedros y ángulos de las caras.

*Varillas de mecano:* Estudio de las condiciones fundamentales de construcción de los distintos polígonos; Comprobación de propiedades como la rigidez del triángulo y la deformabilidad de los otros polígonos; Clasificación de polígonos y relaciones entre ellos; Estudio de las características de las figuras: lados, diagonales, alturas,

ángulos interiores y exteriores; Construcción de polígonos isoperimétricos; Área máxima y mínima.

*Retículas:* Construcción de estructuras de poliedros; Visualización de sus relaciones estructurales; Análisis de su estabilidad, rigidez, resistencia, etc.; Diseño de diferentes tipos de mallas enfatizando su rigidez y capacidad de cubrir amplios espacios; Interpretación y diseño de distintos tipos de grafos conectados que representen situaciones reales.

*Desarrollos planos:* Obtención de modelos de cuerpos espaciales a partir de desarrollos planos; Estudio de los posibles desarrollos planos de un cuerpo sencillo: cubo, ortoedro, pirámide triangular, etc.; Obtención de desarrollos planos a partir de modelos estáticos de cuerpos sencillos; Condiciones que ha de reunir una serie de polígonos adosados para que se pueda construir con ellos un cuerpo espacial; Relación entre el número de aristas, vértices y caras de un poliedro cualquiera.

#### Habilidades geométricas:

Las *habilidades visuales* que desarrollan son: coordinación visomotora, percepción figura-fondo, constancia perceptual o de forma, tamaño y posición, percepción de la posición en el espacio, percepción de relaciones espaciales entre objetos, discriminación y memoria visual.

Las *habilidades de dibujo y construcción* que animan son: representación de figuras o cuerpos, reproducción a partir de modelos dados, construcción sobre la base de datos dados en forma oral, escrita o gráfica.

Las *habilidades de comunicación* que fomentan son: interpretación y socialización de información geométrica.

Las *habilidades de razonamiento* que animan son: invención, imaginación e intuición de situaciones, exploración y descubrimiento de conceptos, regularidades y relaciones.

Las *habilidades de aplicación o transferencia* que promueven son: sensibilización geométrica, interrogación, representación, descripción y explicación de ideas en términos geométricos, además del análisis de representaciones.

Niveles de razonamiento geométrico y fases de enseñanza/aprendizaje: Pueden ser usados por alumnos que se encuentren o transiten por los niveles 1 y 2. Adquieren particular importancia en este segundo nivel, ya que los estudiantes pueden descubrir que las figuras están formadas por partes y que están dotadas de propiedades, además pueden describir cada una de sus partes y utilizar sus propiedades para clasificarlas, etc. De esta manera, aunque la utilización de estos materiales no les permita la deducción ni el establecimiento de relaciones entre las propiedades, colaboran en la formación del razonamiento necesario para superar este estadio y alcanzar uno superior.

El docente puede utilizar cualquiera de estos materiales para orientar a sus alumnos en las diferentes fases. Esto se debe a que su utilización le posibilita obtener información importante respecto al dominio de los conceptos involucrados y al empleo del vocabulario asociado. Además le ayuda a introducir a sus alumnos en el estudio específico, ya sea guiándolos o en forma libre. Le permite favorecer en sus alumnos la integración de los nuevos aprendizajes a su red de conocimientos.

### 2.5.3. Versatilidad del material

Adaptación a diversos contenidos geométricos: Al igual que los demás materiales concretos analizados, permite el desarrollo de muchos contenidos geométricos. En este caso es importante destacar la posibilidad que brindan cada una de las variantes de relacionar el plano con el espacio, contribuyendo al desarrollo de la noción espacial de los objetos y a la modelización de los mismos.

Vinculación con otros ejes del área: Puede establecerse vinculación con el eje Medidas, al favorecer el desarrollo de conceptos tales como el cálculo del área máxima y mínima en polígonos isoperimétricos o la medida de ángulos diedros, entre otros. También favorece el desarrollo del pensamiento combinatorio, con lo cual se relaciona con el eje Estadística y Probabilidades.

Uso en otros niveles de escolaridad: El carácter dinámico de este material ofrece la posibilidad de utilizarlo a partir del segundo ciclo del nivel primario; ya que requiere de cierto desarrollo en la motricidad para realizar las construcciones; y puede ser utilizado hasta los primeros años de la Escuela Secundaria. Su aplicabilidad en niveles superiores es limitada, pues el dinamismo que favorece y la colaboración al desarrollo de las habilidades mencionadas, no promueve el rigor requerido en niveles más avanzados del conocimiento.

## 2.6. Origami o papiroflexia

### 2.6.1. Descripción del material

Características generales: Es una técnica, o bien un conjunto de técnicas, que permite obtener y representar figuras y cuerpos de diversa complejidad a través del empleo y doblado de papel. Su nombre surge de las palabras oru (doblar) y kami (papel). Esta técnica, en el mundo hispano, es conocida también con el nombre de Papiroflexia. Su origen es múltiple y poco preciso, pero la mayoría de los autores coinciden en centrarlo en Oriente, a comienzos de la era cristiana. En Europa y en América se introdujo hace relativamente pocos años tomando un gran impulso en el siglo pasado.

Variantes/Integrantes: Existen diferentes criterios para la clasificación de las distintas modalidades de Origami. Uno de ellos tiene en cuenta la finalidad del mismo (artístico, educativo, recreativo, etc.); la forma del papel utilizado (papel completo o tiras de papel); la cantidad de piezas implicadas (tradicional o modular); las reglas que utiliza (permitir o no cortes y pegado, usar más de una pieza, etc.).

Otro criterio está relacionado con el método utilizado en esta técnica y la manera en que se obtienen las producciones, dando origen a distintos modelos:

a. *Modelos sin cortes de papel* (Fig. 30): Se denomina también Origami puro o tradicional. Se usan las llamadas “bases clásicas” y únicamente a partir del pliegue como herramienta se obtienen las formas. No se utilizan cortes ni pegados, lo que ocasiona algunas dificultades cuando el desarrollo es muy complicado, ya que el espesor de algunos dobleces puede resultar excesivo, perdiendo así cierta calidad final.

b. *Modelos con cortes de papel* (Fig. 31): Para realizar modelos más complejos o con mayor cantidad de detalles, pueden realizarse algunos cortes al papel. Es muy común realizar desarrollos con cortes cuando se desean lograr detalles tales como

orejas, colas o piernas, o marcar ojos, por ejemplo. Pueden considerarse dos motivos principales por los cuales realizar cortes al papel original: crear nuevas opciones o posibles creaciones y evitar la complejidad que en ocasiones puede acarrear un determinado modelo usando solamente el plegado.

c. *Modelos con apoyo de materiales adicionales* (Fig. 32): Se utilizan materiales adicionales para variar la forma final del modelo, entre los que se incluyen: adhesivo, grapas, sistemas eléctricos para poner en movimiento algún modelo, etc.

d. *Modelos multi-capas* (Fig. 33): Dos ó más hojas de materiales distintos o de colores diferentes se doblan juntas, para crear efectos especiales de capas separadas en el modelo final. Resulta muy usual este modelo en el desarrollo de flores, por ejemplo, ya que se obtiene muy fácilmente el efecto buscado.

e. *Modelos multi-hoja* (Fig. 34): Constan de dos o más hojas, plegadas por separado, que se unen en el modelo final. Cada hoja está destinada a una parte distinta del modelo y sigue diferente desarrollo de doblado. Esas hojas pueden llegar a ser distintas, en cuanto al tipo y/o tamaño.

f. *Modelos desarrollados a partir de módulos* (Fig. 35): Conocido también como Origami Modular. A diferencia del anterior, los desarrollos seguidos en cada pieza unidad o módulo son los mismos para cada una de ellas. Es decir, se obtienen los mismos módulos a partir de cada una de las hojas utilizadas. Una vez realizados estos desarrollos en cada módulo, se unen para alcanzar el producto final. Resultan muy utilizados en la obtención de desarrollos geométricos.

g. *Modelos decorados* (Fig. 36): El papel puede ser decorado antes o después del desarrollo y creación del modelo. Resulta frecuente en los modelos de este tipo utilizar papel de un color de un lado y blanco del otro.

h. *Modelos con técnica de encorvado* (Fig. 37): Entre estas técnicas se incluyen la de mojado del papel (originada por Yoshizawa) y la del moldeado mojando pasta de papel, entre otras. El efecto logrado en el modelo final simula una escultura.

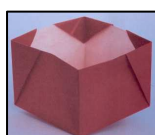


Figura 30

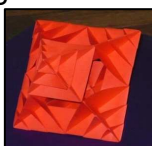


Figura 31

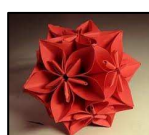


Figura 32



Figura 33



Figura 34

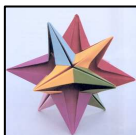


Figura 35



Figura 36



Figura 37

Construcción y accesibilidad: Por tratarse de una técnica, se debe considerar que es necesario conocer los métodos y bases que utiliza. Por ello es preciso destinar cierto tiempo a la adquisición de las destrezas necesarias en el plegado. El recurso indispensable para poner en práctica esta técnica es el papel. El que se comercializa para la papiroflexia es fino y colorido, se parece al papel satinado, pero más liviano. Es algo costoso y no es muy fácil de conseguir. Sin embargo, para uso educativo, se pueden emplear hojas de distintos tipos de papeles que se encuentren al alcance de los alumnos, cuyos tamaños, colores y grosor pueden variar; hasta pueden utilizarse



hojas de desecho. Con esta consideración se puede decir que este material/técnica es muy accesible.

### 2.6.2. Interés didáctico-matemático

Contenidos geométricos: Aunque existen muchas modalidades de Origami, las más utilizadas con fines didácticos, son la “a”, la “f” y, en menor medida, la “b”. Todas ellas, de un modo u otro, posibilitan la: Ubicación en el espacio, distancias, giros y ángulos con relación a uno mismo y a otros puntos de referencia; Identificación y clasificación de figuras geométricas; Estudio de las figuras geométricas y sus elementos (vértices, lados, diagonales, ejes de simetría, etc.); Reconocimiento de regularidades y simetrías; Estudio de simetrías planas (respecto a un punto o a una recta); Estudio de lugares geométricos (mediatriz, bisectriz, cónicas); Proporcionalidad y semejanza de figuras; Estimación de medidas mediante el cálculo de perímetros, áreas y volúmenes; Reconocimiento de puntos y rectas notables del triángulo; Estudio de los cuerpos geométricos y sus elementos; Descomposición de un poliedro en cuerpos más pequeños; Nociones de paralelismo y perpendicularidad; Recubrimiento del plano mediante teselaciones y del espacio mediante el apilamiento de cuerpos.

#### Habilidades geométricas:

Las *habilidades visuales* que propicia son: coordinación visomotora, percepción figura-fondo, constancia perceptual o de forma, tamaño y posición, percepción de la posición en el espacio, percepción de relaciones espaciales entre objetos, discriminación y memoria visual.

Las *habilidades de dibujo y construcción* que pueden desarrollarse giran en torno a: representación de figuras o cuerpos (el plegado de figuras y cuerpos), reproducción a partir de modelos dados, construcción sobre la base de datos dados.

Las *habilidades de comunicación* que fomenta son: interpretación y socialización de información geométrica.

Las *habilidades de razonamiento* que anima son: invención, imaginación e intuición de situaciones, exploración y descubrimiento de conceptos, regularidades y relaciones.

Las *habilidades de aplicación o transferencia* que promueve son: interrogación, representación, descripción y explicación de ideas en términos geométricos, y análisis de representaciones.

Niveles de razonamiento geométrico y fases de enseñanza/aprendizaje: Permite su aplicación a alumnos que se encuentren en cualquiera de los tres primeros niveles de razonamiento. Es decir que, programando actividades que vayan aumentando su complejidad y disponiendo del tiempo suficiente, es posible llevar a que los alumnos, inicialmente en un nivel 1, alcancen el nivel 2. No obstante, es particularmente fructífera su aplicación en alumnos que se transcurran por los niveles de descubrimiento de propiedades de las figura y de razonamiento informal sobre ellas.

La flexibilidad que caracteriza a este material posibilita la planificación de una amplia variedad de actividades. Estas actividades pueden utilizarse no sólo para brindar información o explicitar conceptos, sino también para favorecer la comprensión de dichos conceptos y la deducción de sus propiedades y relaciones a partir de la orientación libre o dirigida e incluso pueden plantearse actividades de integración.

Todo esto hace de esta técnica un material muy valioso en el cual, tanto el docente como el alumno, pueden encontrar el apoyo necesario para transitar cada nivel de razonamiento. Además, este material resulta ser el medio ideal para fomentar la imaginación y estimular la creatividad de los alumnos, por lo cual el docente no debe limitar tan importante cualidad y dejar que el alumno explore su riqueza expresiva.

### 2.6.3. Versatilidad del material

Adaptación a diversos contenidos geométricos: Posibilita el abordaje de una amplia variedad de contenidos geométricos referidos tanto del plano como del espacio, encontrando este último, un medio muy efectivo para su interpretación.

Vinculación con otros ejes del área: Pueden establecerse vinculaciones con el eje Medida ya que las nociones de perímetro, área y volumen están permanentemente abordadas. No debe olvidarse el importante componente artístico que tiene esta técnica, con lo cual es fundamental la vinculación con el área Artística.

Uso en otros niveles de escolaridad: Cumple un papel importantísimo en el campo de la educación a cualquier nivel: primario, secundario e incluso como apoyo de ciertas disciplinas a nivel universitario, pues reúne las cualidades indispensables desde el punto de vista pedagógico y por supuesto matemático.

## 2.7. Objetos del entorno real

### 2.7.1. Descripción del material

Características generales: La observación del entorno natural, artístico o tecnológico ofrece inmensas posibilidades para el estudio de la Geometría (Caro y Breccia, 2009). En dicha observación se sientan las primeras experiencias visuales y muchos contenidos geométricos tienen en esas imágenes su interpretación. La visita, la búsqueda, el descubrimiento del entorno permite re-significar la realidad que nos rodea. Por ello, este conocimiento activo motiva no sólo su descripción sino que, además, permite incidir en ella para su transformación.

Variantes/Integrantes: Los objetos que podemos encontrar en nuestro entorno son tantos y provenientes de tan diversas realidades que resulta imperioso realizar una partición. Esta división tiene como objeto ordenar el estudio y no es para nada la única posible, sino más bien una entre tantas otras. Además permite nombrar algunos ejemplos de materiales que se incluyen bajo cada uno de los entornos considerados. La clasificación adoptada está basada en la propuesta por Alsina, Burgués, Fortuny (1988):

a. *Entorno natural* (Fig. 38): Ha sido fuente de estudio e inspiración de la actividad humana. A los orígenes mismos de la Geometría hay que buscarlos en las situaciones y problemas de este entorno. El estudio de los hechos y elementos naturales desde una perspectiva geométrica, además de tener un intrínseco interés cultural, tiene un enorme interés pedagógico para motivar la enseñanza y el aprendizaje de la Geometría. Se puede hablar en este sentido de una fenomenología didáctica tal como la define el profesor Hans Freudenthal (1905-1990). Se considera dentro de este entorno al: Reino vegetal (árboles, arbustos, flores, paisajes, etc.); Reino animal (seres vivos en general.); Reino mineral (minerales, rocas, etc.); Cosmos (planetas, sistema planetario).

b. *Entorno artificial* (Fig. 39): El hombre ha desarrollado ciertos contenidos geométricos para tener un mayor control y explicación de los fenómenos naturales. Con este fin, ha desarrollado toda una tecnología para ayudarle en su acomodación al entorno. La Geometría ha proporcionado el contenido formal haciéndose presente en el diseño y uso de instrumentos cotidianos, en el funcionamiento de máquinas, en las estructuras de puentes, cubiertas, edificios, etc. Sólo por nombrar algunos ejemplos:

b.1. *Espejo y mira o réflex* (Fig. 40): Los espejos, planos o curvos, son superficies pulidas. La mira o réflex está construida por una pieza rectangular de metacrilato translúcido de color rojo sostenida por soportes laterales.

b.2. *Caleidoscopios* (Fig. 41): Existen muchos tipos de caleidoscopios:

- *Caleidoscopios diédricos o libro de espejos*: Dos espejos planos iguales unidos por un borde lateral mediante una tira de cinta adhesiva, que se abren como las hojas de un libro. Se dispone, además, de un semicírculo graduado para medir diferentes aberturas entre ambos espejos. Como variante, uno de los espejos puede tener dos agujeros para poder mirar por detrás situando el otro espejo paralelo.

- *Caleidoscopios triédricos o clásicos*: Tres espejos rectangulares formando ángulos entre sí de  $(60^\circ, 60^\circ, 60^\circ)$ ,  $(60^\circ, 30^\circ, 90^\circ)$   $(45^\circ, 45^\circ, 90^\circ)$ .

- *Caleidoscopios poliédricos*: Tres espejos adecuadamente inclinados formando diferentes pirámides: ortoédrica, tetraédrica, octaédrica e icosaédrica.

b.3. *Papel y cartulina* (Fig. 42): Papeles y cartulinas de cualquier color uniforme, papel charol, papel vegetal en diferentes tamaños, formas y grosores. El uso que se tendrá en cuenta es para cortar, doblar y pegar entre uno mismo o varios de ellos. En este apartado no se lo considera como soporte de escritura y dibujo.

b.4. *Mapas* (Fig. 43): Mapas de rutas de una región, provincia o país; guía urbana de una ciudad o mapas para colorear; plano-guía de colectivos, trenes, etc.

b.5. *Rejas* (Fig. 44): Armazones metálicos (de alambre u otro material flexible) describiendo cuadrículas, tramas rectangulares, triangulares, etc., semiesferas provistas de semimeridianos y semiparalelos. Los armazones pueden estar provistos de focos puntuales de luz que permitan proyectar sobre pantallas las sombras obtenidas.

b.6. *Diarios y revistas*: Diferentes publicaciones periódicas impresas como diarios, revistas que sean de fácil acceso.

b.7. *Fotografías*: Toda clase de fotografías, tomadas personalmente por el docente y/o alumnos o bien imágenes de objetos, paisajes o lugares extraídas de libros, enciclopedias, etc. Las fotografías pueden ser del mismo objeto o paisaje desde diferentes lugares y en distintos tamaños.

c. *Entorno artístico*: El caso del arte y la Geometría es un ejemplo de verdadero entendimiento mutuo, ya que cada parte ha realizado contribuciones fundamentales a la otra. La Geometría le ha dado al arte y a la arquitectura los elementos básicos para su desarrollo: formas y figuras, métodos para trazarlas o edificarlas y sistemas de representación (perspectivas, planos, etc.). Aunque debemos reconocer que, el componente geométrico es sólo una dimensión entre muchas otras como el color, la textura, la luz, etc. Por otro lado, el arte ha motivado la ampliación del conocimiento

geométrico, sugiriendo problemas que han dado lugar a nuevos contenidos. Las geometrías descriptiva y proyectiva son un fiel ejemplo de esta idea. Dentro de este grupo se puede considerar a las pinturas, esculturas y arquitecturas, actuales y antiguas, esparcidas a lo largo del mundo y pertenecientes a distintas culturas.



Figura 38



Figura 39



Figura 40



Figura 41



Figura 42



Figura 43

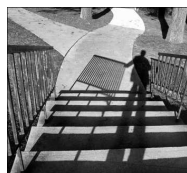


Figura 44



Figura 45



Figura 46



Figura 47

Construcción y accesibilidad: Las nociones de construcción y accesibilidad se entrecruzan. Esto se debe a que no se piensa en la construcción específica de estos materiales para el uso educativo, sino más bien en el acceso directo a los mismos provenientes del entorno en el cual nos desenvolvemos.

### 2.7.2. Interés didáctico-matemático

#### Contenidos geométricos:

a. *Entorno natural:* Permite por ejemplo: Observación directa y/o visualización de formas y figuras, trayectorias, perfiles, secciones, proyecciones; Recolección y análisis de datos para la realización de distintas clasificaciones u ordenamientos; Mediciones directas e indirectas de todo tipo de magnitudes; Estudio de semejanza de figuras; Estudio de las simetrías del plano; Identificación de diferentes sistemas de referencias y ubicación de puntos y/o objetos en el espacio.

b. *Entorno artificial:*

b.1. *Espejo y mira o réflex:* Utilización de este dispositivo como instrumento de dibujo geométrico, que puede sustituir en parte a la regla y el compás para realizar diversas construcciones geométricas; Estudio experimental del concepto de mediatriz, bisectriz, eje y plano de simetría; Comprobación de las leyes de reflexión y la inversión de la imagen izquierda-derecha.

b.2. *Caleidoscopios:*

- Caleidoscopios diédricos o libro de espejos: Generación de polígonos regulares. Estudio de relaciones entre ángulos y ejes de simetría y número de lados; Generación combinatoria de configuraciones y diseños simétricos, mediante la

visualización de imágenes múltiples; Observación de la propia forma de uno mismo o cualquier objeto al situarlo delante de un libro de espejos en diferentes posiciones; Reproducción de diferentes tipos de simetrías planas, por ejemplo, ver frisos con los dos espejos paralelos.

- Caleidoscopios triédricos o clásicos: Construcción visual de diferentes tipos de mosaicos; Estudio visual y gráfico de las diferentes y sucesivas operaciones de simetría (reflexiones) que generan los mosaicos regulares y semirregulares; Estudio de traslaciones.

- Caleidoscopios poliédricos: Visualización de los diferentes tipos de simetrías espaciales; Generación de sólidos regulares o semirregulares a partir de una de las partes equivalentes mínimas en que se puede dividir su superficie; Simulación gráfica de los efectos calidoscópicos a partir de una esfera triangularizada; Composiciones sucesivas de reflexiones especulares; Grupos de simetría espacial; Grado o cantidad de simetría de un objeto.

b.3. *Papel y cartulina*: Estudio de rectas, ángulos y las relaciones entre ellos; Ilustración de conceptos como: suma de ángulos de un triángulo, intersección de alturas, área, intersección de bisectrices o mediatrices, etc.; Representación de identidades notables; Construcción de polígonos y, por repetición o combinación, generación de mosaicos; Estudio de movimientos en el plano y la construcción de frisos; Estudio de los siete tipos de frisos y los diferentes tipos de mosaicos; Construcción de poliedros; Obtención de áreas equivalentes; Trazado de rectas paralelas y/o perpendiculares a una dada; Trazado de mediatrices o bisectrices; Construcción de polígonos haciendo uso de sus características, por ejemplo, de un cuadrado mediante las diagonales que son ejes de simetría.

b.4. *Mapas*: Planteo y resolución de toda una serie de problemas cotidianos y que pueden tener interés interdisciplinario; Reconocimiento y uso de la escala del mapa/guía. Cálculo de distancias y comparación de distancias reales y en línea recta; Resolución de situaciones de topología combinatoria o de grafos: itinerarios equivalentes, itinerario más corto entre dos puntos dados, conexiones, caminos entre dos o más puntos, colorear con cuatro colores cualquier mapa de forma que zonas con frontera común tengan colores diferentes; Cálculos combinatorios y su aplicación real en el estudio de horarios, enlaces y frecuencias de, por ejemplo, medios de transporte.

b.5. *Rejas*: Estudio de las afinidades del plano. Análisis de las propiedades que se mantienen invariantes en este tipo de transformaciones; Estudio de las proyectividades del plano (la semejanza como caso particular) y sus invariantes; Estudio de las proyecciones obtenidas sobre una pantalla, mediante la utilización de un foco artificial de luz y la interposición de rejillas con diferentes tipos de tramas.

b.6. *Diarios y revistas*: Descubrimiento de formas planas y espaciales; Estudio de las transformaciones de tipo afín y proyectivas en los dibujos y fotografías; Realización de cálculos de todo tipo: longitudes, superficies, volúmenes, estadísticos, etc.; Estudio de la proporcionalidad mediante la comparación de las alturas de las letras de títulos, subtítulos, etc., áreas de las columnas y anuncios, etc.; Estudio de datos estadísticos (del tiempo, deportivos, de la Bolsa, etc.).

b.7. *Fotografías*: Estudio de la proporcionalidad entre elementos reales y/o sus fotografías; Análisis de deformaciones ópticas y de ángulos visuales; Observación



de fotografías para motivar el tratamiento de distintos temas geométricos; Resolución de diferentes problemas relacionados con la proporcionalidad del objeto y su imagen, como por ejemplo, dada una medida de la longitud en la realidad calcular otras medidas a partir de una fotografía del objeto/lugar, etc.; Estudio de las proyecciones y sus efectos, como por ejemplo, analizar qué tipo de líneas se deforman y cómo y cuáles no.

c. *Entorno artístico*: En cualquiera de sus manifestaciones, posibilita el tratamiento de, por ejemplo: Estudio de ángulos -elementos, representación, medida, clasificaciones y operaciones-; Estudio de las posiciones entre rectas, entre rectas y planos y entre planos; Reconocimiento de la proporción áurea y el número de oro; Identificación, reconocimiento y estudio de las diversas figuras planas y espaciales; Identificación de diferentes sistemas de referencias y ubicación de puntos y/o objetos en el espacio; Estudio y clasificación de las simetrías del plano; Identificación de los siete tipos de frisos y los diferentes tipos de mosaicos; Estudio de cónicas y cuádricas; Identificación de la perspectiva lineal.

Habilidades geométricas: La observación del entorno real para su estudio desde el punto de vista de la Geometría permite el desarrollo de grandes habilidades, como son: pensar matemáticamente, argumentar, representar y comunicar, resolver, usar técnicas matemáticas e instrumentos, y modelizar. Además de, por supuesto, visualizar el espacio en cualquiera de sus presentaciones (micro, meso, macro y cosmo-espacio). Por ello, es posible desarrollar todo tipo de habilidades desde las visuales y comunicativas, pasando por las de dibujo y construcción hasta las de razonamiento y de aplicación o transferencia.

Niveles de razonamiento geométrico y fases de enseñanza/aprendizaje: Permite su aplicación en alumnos que se encuentren, principalmente, en los tres primeros niveles de razonamiento. Así, mediante el uso de alguna de las variantes de este material, el alumno que presenta características del nivel de reconocimiento encontrará el apoyo necesario para, por ejemplo, empezar a reconocer propiedades geométricas más que físicas y de este modo pasar al nivel siguiente: de análisis. De igual modo, el alumno que se encuentra en este nivel puede empezar a desarrollar la capacidad de razonamiento riguroso reconociendo que unas propiedades pueden deducirse de otras. De este modo, con la correspondiente adaptación de las actividades, es posible acompañarlo en el desarrollo de su pensamiento geométrico.

En todas las fases es posible utilizar los objetos del entorno real, ya que su gran diversidad permite la realización de variadas actividades. Algunas de ellas pueden ser dirigidas por el docente con el objeto de proveer información, o bien que los alumnos puedan explorar los conceptos resolviendo propuestas del docente, que puedan intercambiar experiencias expresándose con vocabulario específico, también los alumnos pueden aplicar y combinar los conocimientos adquiridos y por último adquirir una visión general de los contenidos.

### **2.7.3. Versatilidad del material**

Adaptación a diversos contenidos geométricos: Debido a la gran cantidad de variantes que son consideradas dentro de este material es posible tratar muchos contenidos geométricos referidos tanto del plano como del espacio. Esta última dimensión encuentra en este material un medio muy efectivo para su interpretación.

Vinculación con otros ejes del área: Pueden establecerse vinculaciones con todos los ejes del área. Por ejemplo, con el eje Estadística y Probabilidades y con eje Funciones al analizar gráficos estadísticos y funciones presentes en diarios y revistas o resolver cálculos estadísticos, con el eje Medidas al abordar temas como perímetro, área y volumen de diferentes objetos y realizar cálculos relacionados a ellos, con lo cual estaría vinculándose con el eje Números y Operaciones. Además, es preciso mencionar la importante vinculación con otras áreas del conocimiento como, por ejemplo, la Artística, la de la Lengua.

Uso en otros niveles de escolaridad: Se caracteriza fundamentalmente por su versatilidad y gran aplicabilidad, con lo cual puede ser utilizado en cualquier nivel, desde el inicial, pasando por el nivel primario, el secundario y convenientemente adaptado puede ser utilizado hasta en el nivel universitario.

### 3. Comentarios finales

A partir de una mirada holística-interpretativa del Registro de materiales didácticos concretos, emergieron *nueve criterios de agrupamiento* (Tabla 2). Estos criterios surgen, por un lado, para dar respuesta a una completa caracterización de los materiales didácticos concretos analizados y, por otro lado, para responder a diferentes demandas que muchos docentes presentan relacionadas con posibilidades específicas de interés.

**Tabla 2. Criterios y categorías de agrupamiento de materiales didácticos concretos**

Criterios	Categorías
Cualidad	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Objeto tangible</li> <li>• Técnica</li> </ul>
Materia prima	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Papel</li> <li>• Cartón, cartulina, madera, plástico, acrílico, goma eva, telgopor</li> <li>• Otros recursos</li> </ul>
Disponibilidad	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Construcción artesanal</li> <li>• Adquisición en comercios</li> <li>• Observación directa</li> </ul>
Movilidad	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Dinámico</li> <li>• Estático</li> </ul>
Dimensión	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Bidimensión</li> <li>• Tridimensión</li> <li>• Bidimensión-tridimensión</li> </ul>
Contenidos conceptuales	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Es posible abordar todos los contenidos geométricos prescriptos con algún material</li> </ul>
Modelo de razonamiento	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Se propician distintos niveles de razonamiento y fases de enseñanza/aprendizaje</li> </ul>
Habilidades geométricas	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Todos los materiales identificados favorecen el desarrollo de las cinco habilidades geométricas</li> </ul>
Versatilidad	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Aplicabilidad a los diferentes ejes del área de Matemática</li> <li>• Aplicabilidad a otras áreas de conocimiento</li> <li>• Adaptación a los distintos niveles de escolaridad</li> </ul>

Cabe destacar que lo anterior está estrechamente vinculado con las intenciones didácticas con que se utilizan los materiales didácticos concretos dentro de la actividad sugerida al alumnado y el aporte que el docente puede realizar al respecto.

Consideramos que contar con este tipo de conocimiento (caracterización de materiales didácticos concretos y habilidades geométricas que pueden desarrollarse mediante su uso) favorece la competencia profesional del profesor en Matemática, ya que nutre su espectro de alternativas didácticas y andamios para el aprendizaje al enseñar Geometría.

### **Bibliografía**

- Alsina, C., Burgués, C. y Fortuny, J. (1988). *Materiales para construir la Geometría*. Madrid: Síntesis.
- Caro, P. y Breccia, M. (2009). La Geometría nos rodea. *Revista Iberoamericana de Educación Matemática UNIÓN* [en línea], 17, 85-95. Recuperado el 10/10/2011 de [http://www.fisem.org/web/union/revistas/17/Union\\_017\\_011.pdf](http://www.fisem.org/web/union/revistas/17/Union_017_011.pdf).
- Hoffer, A. (1981). Geometry is more than Proof. *Mathematics Teacher*, 74, 11-18.
- Ministerio de Educación de la Provincia de Santa Fe. (1999). *Diseño Curricular Jurisdiccional para la EGB3 Área Matemática*. Santa Fe: Ministerio de Educación.
- Van Hiele, P. (1986). *Structure and Insight. A Theory of Mathematics Education*. Nueva York: Academic Press.
- Villarroel, S. y Sgreccia, N. (2011). Materiales didácticos concretos en Geometría en primer año de Secundaria. *Revista de Didáctica de las Matemáticas NÚMEROS* [en línea], 78, 73-94. Recuperado el 1 de noviembre de 2011, de [http://www.sinewton.org/numeros/numeros/78/Articulos\\_04.pdf](http://www.sinewton.org/numeros/numeros/78/Articulos_04.pdf).

**Silvia Villarroel** es Profesora Titular en el área de Física en la Escuela de Enseñanza Media N° 498 de General Gelly, Profesora Interina en el área de Matemática en la Escuela de Enseñanza Media N° 227 de Máximo Paz y Tutora Académica en el área Matemática de la Escuela de Enseñanza Media N° 353 de Sargento Cabral. Tiene los títulos de Profesora de Matemática y Física y Licenciada en Enseñanza de la Matemática.

**Natalia Sgreccia** es Profesora Adjunta en el área Educación Matemática en la Facultad de Ciencias Exactas, Ingeniería y Agrimensura de Universidad Nacional de Rosario y Becaria doctoral del Consejo Nacional de Investigaciones Científicas y Técnicas. Tiene los títulos de Profesora de Enseñanza Media y Superior en Matemática y Magíster en Didácticas Específicas. [nataliasgreccia@gmail.com](mailto:nataliasgreccia@gmail.com).