



Las construcciones con GeoGebra como medio para resignificar las propiedades de las Figuras

Julia Edith Corrales

Resumen

Este artículo presenta una experiencia de clase con GeoGebra 3.2, desarrollada con alumnos que ingresan a la Formación Docente, está centrada en resignificar definiciones de las figuras, a partir de una secuencia de problemas de geometría que implican la puesta en funcionamiento de propiedades; como medio para anticipar y establecer la necesidad de ciertos resultados, identificando nuevas relaciones entre sus elementos que permitan argumentar la existencia y unicidad de los objetos desde una exploración dinámica.

Abstract

This article presents an experience of class with Geogebra 3.2 developed with students who enter to the Educational Formation, is centred in re-meaning definitions of the figures, from a sequence of problems of geometry that includes the setting in functioning of the property; as a way to anticipate and to establish the necessity of certain results, identifying new relations between their elements that allow to argue the existence and uniqueness of the objects from a dynamic exploration.

Resumo

Este artigo apresenta uma experiência de classe com GeoGebra 3.2, desenvolvida com alunos que ingressam à Formação Docente. Seu objetivo em resignificar definições das figuras, a partir de uma sequência de problemas de geometria que implicam a posta em funcionamento de propriedades; como médio para antecipar e estabelecer a necesarieda de certos resultados, identificando novas relações entre seus elementos que permitam argumentar a existência e unicidad dos objectos desde uma exploração dinâmica

Introducción

En el equipo de Formación Docente de la Universidad de la Patagonia Austral (UNPA) Unidad Académica de Caleta Olivia, Santa Cruz, Argentina, se vienen realizando diversas acciones para relevar como vive y se articula el uso de las TIC`S con la enseñanza y aprendizaje en matemática.

La clase diseñada corresponde a un proyecto de acciones con alumnos de la Formación Docente para identificar los tipos de problemas, técnicas, nociones, propiedades, argumentos y lenguajes que les son propios al hacer geométrico desde el uso de distintos programas informáticos, aquí se presentaran situaciones que fueron planificadas por la autora al final de un curso para trabajar con el programa GeoGebra 3.2 dentro de una materia optativa (Taller de reflexión sobre el hacer matemático) que forma parte del plan de Formación de Profesores de Matemática.

Como participante del Proyecto de Investigación denominado “Estudio y Análisis epistémico-cognitivo sobre cómo se articula el saber geométrico que circula en el Nivel Medio con la Formación Docente Inicial” que se desarrolla en la UNPA es donde se inscribe el diseño de estas actividades que forman parte de un estudio más complejos sobre el saber geométrico, que tiene entre otros estos dos objetivos: -Estudiar el presente de la geometría en el Nivel Medio y en la Formación de Profesores y –Relevar como vive y se articulan las nuevas tecnologías con la enseñanza de la Geometría en el Nivel Medio.

En esta experiencia se trabajó con el GeoGebra 3.2, programa útil para explorar propiedades y con posibilidades de diferentes procesos para construir una misma actividad, así como también sugerir contraejemplos para verificar la falsedad de algunas proposiciones, la posibilidad de controlar la validez del procedimiento, armar conjeturas desde la exploración dinámica y otras que se han registrados durante los diferentes momentos de acción con los alumnos. Algunas de las actividades el año anterior se habían trabajado en forma estática (lápiz y papel).

Los distintos programas son una herramienta muy importante tanto para los estudiantes como para los profesores y es fundamental que estos últimos conozcan las bondades y los límites de los mismos para que luego puedan tomar decisiones a la hora de integrarlos a sus clases, desde una postura fundamentada acerca de que tipos de problemas o actividades plantear, anticipando la gestión y el uso del recurso cuando se pretenden determinados objetivos para abordar un conocimiento.

1. Presentación de lo planificado con GeoGebra 3.2

El planteo de estas actividades se inscribe en un proyecto más general que es “El estudio de las figuras y los cuerpos”, a través de actividades que impliquen la puesta en funcionamiento de propiedades como medio para explorar, anticipar y establecer que ciertos resultados emerjan necesariamente.

Fueron elegidas con la intencionalidad de construir la elaboración de nuevas propiedades, de nuevas relaciones, de nuevos conceptos.

Este recorte consistió en la selección de situaciones, que secuenciadas y usando la herramienta que nos ofrece el GeoGebra 3.2, a partir de la exploración dinámica se estudien los significados de las definiciones y propiedades puestas en juegos de algunas figuras geométricas.

2. Experiencia

2. 1. Objetivos:

- Indagar propiedades y nuevas relaciones de las figuras que permitan hacer explícitas las características de los significados que portan sus definiciones.
- Resignificar definiciones de los contenidos involucrados en cada actividad.
- Identificar propiedades y características de las figuras para que los alumnos puedan desplegar prácticas argumentativas en el camino hacia la producción de las demostraciones.

2.2. Contenidos:

- Paralelogramo: Construcción de paralelogramos dados algunos de sus elementos.
- Triángulos: Construcción de Triángulos dados dos o tres elementos.
- Rombos: Construcción de rombos dados algunos de sus elementos.
- Lugar Geométrico.
- Existencia y unicidad de las soluciones de las actividades.
- Criterios de Congruencia de las figuras.

2.3. Cronograma de actividades

Estas actividades se desarrollaron en seis clases de 2hs cada una, incluyendo la evaluación.

Los alumnos estaban familiarizados con el uso del programa desde otro espacio que cursan, un taller de alfabetización Informática para la Formación Docente, donde se apropian de los comandos básicos de algunos programas como Cabri y GeoGebra 3.2.

En las tres primeras clases en forma individual se construyeron y exploraron las tres primeras actividades, registrando las propiedades involucradas, determinando si los datos son suficientes para generar lo solicitado y anticipando que otros elementos y condiciones se pueden poner en juego para la construcción de dicha figura. Formular y validar las conjeturas sobre existencia y unicidad de las figuras involucradas.

En la cuarta clase, se trabaja sobre la exhaustividad de la construcción, ver las limitaciones del programa ante ciertos procedimientos de construcción, y poder reflexionar bajo que condiciones de conjeturar si emerge o no la existencia de esa construcción.

Se trabaja en una práctica reflexiva después de cada actividad, partiendo de la socialización de las construcciones y registros realizados en relación a explicitar las propiedades puestas en acción, para que mediante una dialéctica entre los alumnos mediados por la gestión docente se discutan las conjeturas y se llegue a algunas certezas y nuevas preguntas.

2.4. Actividades propuestas:

Las actividades propuestas fueron extraídas de distintos libros (Itzcovich,2005,pp.19-22) y artículos de revistas (SUMA 39,2002,pp.13-25) en las que se plantean para trabajar a partir de construcciones con lápiz y papel, el objetivo para la docente es poder trabajar a-posteriori en el análisis de los diferentes emergentes de los sistemas de prácticas de años anteriores y de este sistema que se genera con el recurso del GeoGebra 3.2, para caracterizar si estas actividades son o no nuevos problemas a partir de esta propuesta dinámica.

Actividad N° 1: Construir un paralelogramo en el cual un lado mida 6 cm. y otro lado mida 4 cm. ¿Habrá un solo paralelogramo que cumpla estas condiciones?

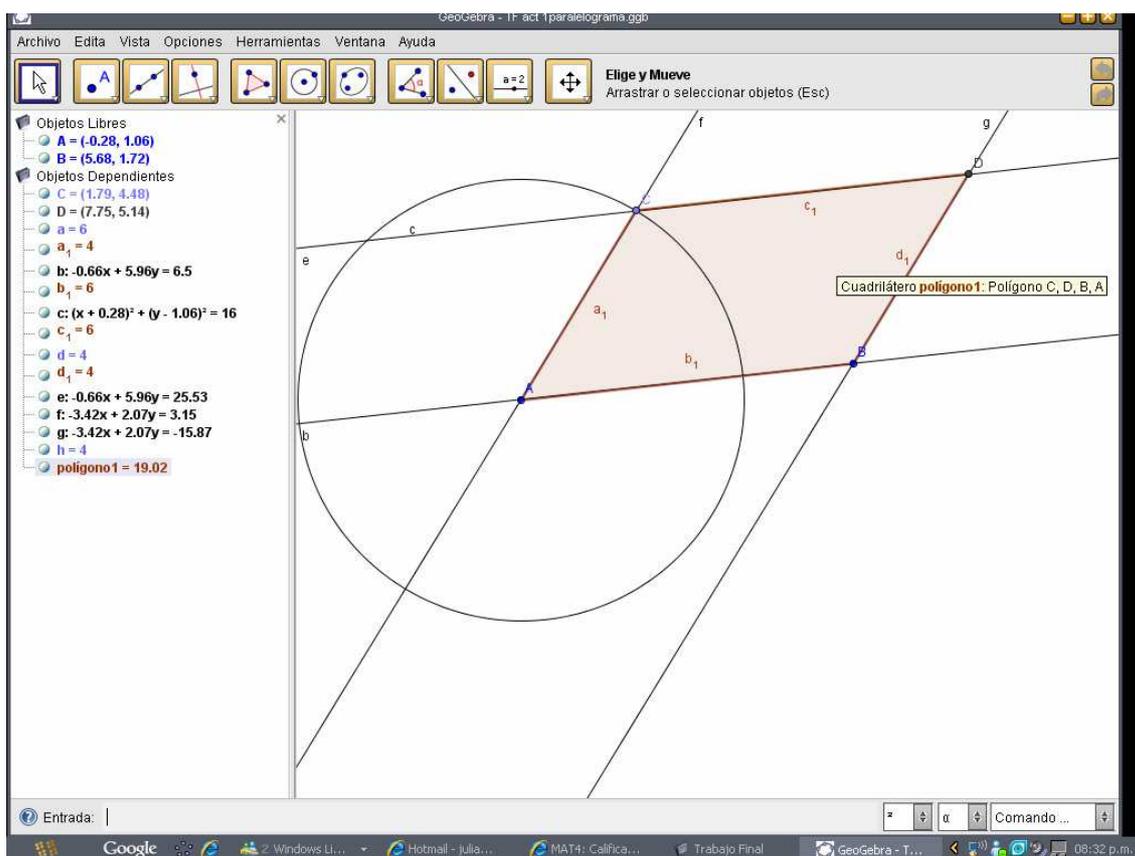


Figura 1

Discusión para esta actividad:

- ¿Es suficiente considerar solamente los lados para caracterizar un paralelogramo?
- ¿Qué podríamos agregar a estos datos?
- ¿Para obtener cuántos paralelogramos?
- ¿Podríamos caracterizarlos mediante alguna propiedad a los paralelogramos obtenidos?

Nuevas preguntas a partir de esta actividad vinculada a la existencia o no de la construcción. Si se modifica la posición de uno de los lados, se obtiene otro paralelogramo que cumple las mismas condiciones:

- ¿Cómo hacer para indicar que se pueden construir muchos paralelogramos?
- ¿Se podrán construir todos? ¿Cuántos son?
- ¿Cómo registro cuáles son los posibles, bajo alguna condición? ¿Cuál?

Otras posibles preguntas para plantear: Si se cambia el ángulo,

- ¿Qué otros elementos del paralelogramos se modifican?
- ¿Cuáles se mantienen?

Esto fue importante porque se promovió con los alumnos discutir acerca de la construcción, las decisiones del uso de tal o cual relación, el reconocimiento de unicidad o no y poder conjeturar al ir barriendo todos los paralelogramos que se pueden construir.

Actividad N° 2: Construir un triángulo ABC, dado las longitudes del lado su altura y su mediana.

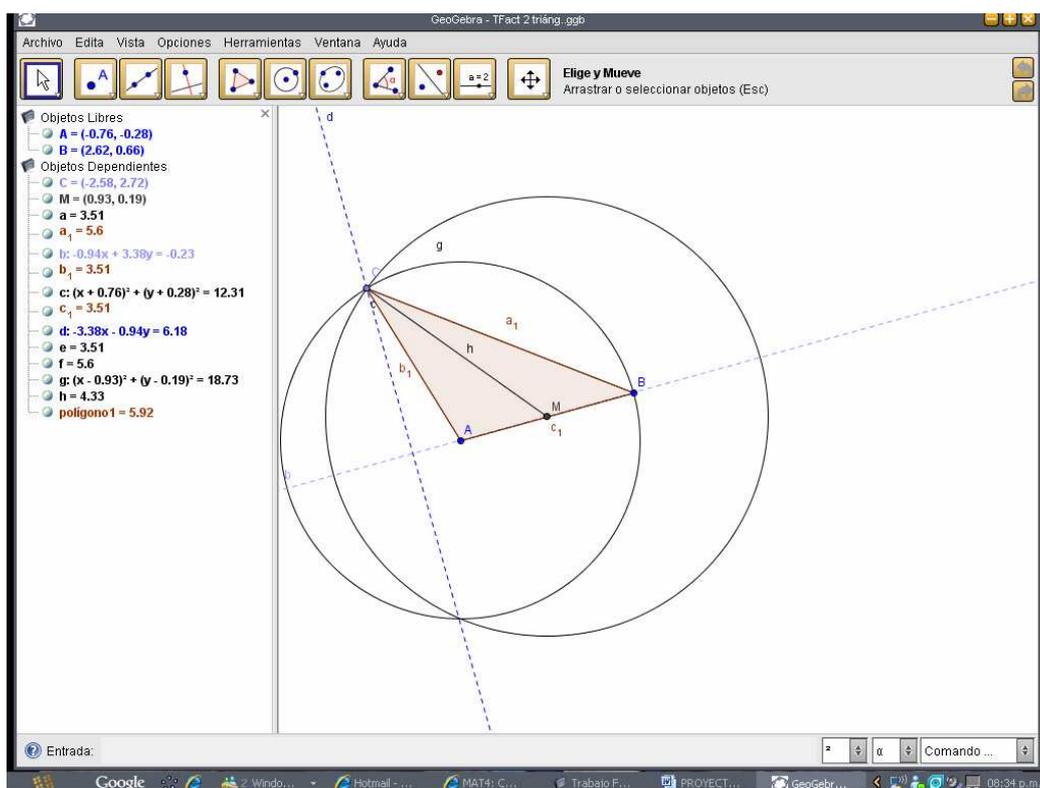


Figura 2

Actividad N° 3: Construir un triángulo ABC, dado las longitudes del lado y la longitud de la altura respecto a este y la mediana respecto al lado

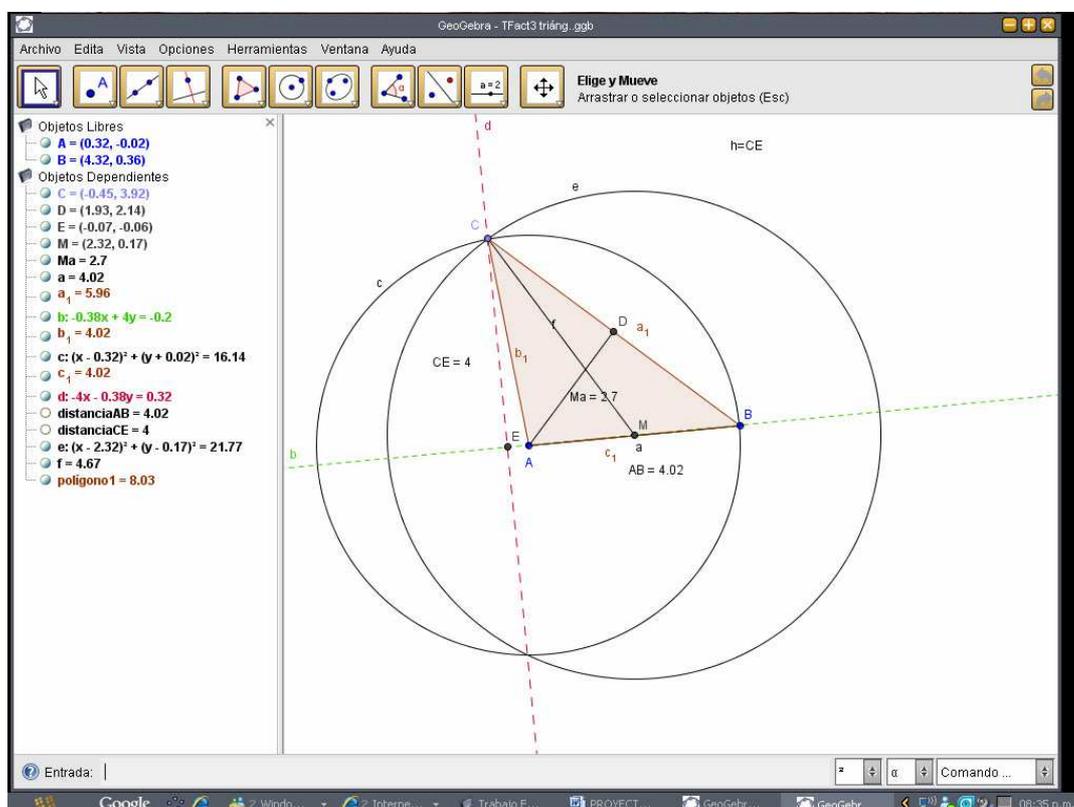


Figura 3

Actividad Nº 4: Construir un rombo que tenga dos vértices en los puntos (0,0) y (2,3), sabiendo que otro de los vértices está situado sobre el eje de las x.

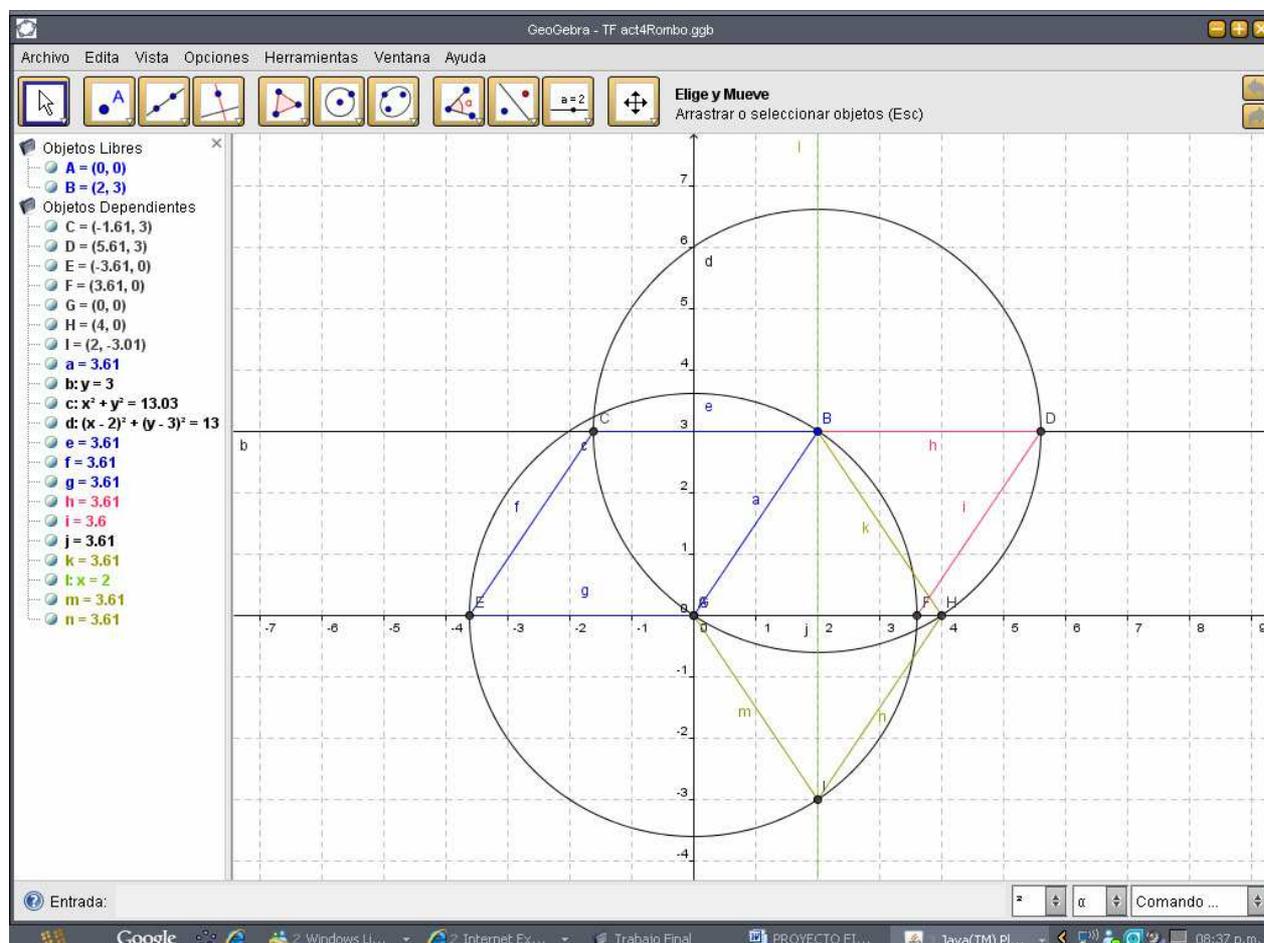


Figura 4

Algunas cuestiones que se debieran tener en cuenta, para conjeturar acerca de la unicidad o no de la construcción y las condiciones mínimas que garantizan la existencia:

- ¿Qué propiedades se ponen en juego para construir?
- ¿Si modificamos la posición de algunos de los elementos se obtiene otra figura que cumpla las mismas condiciones?
- ¿Qué nuevas preguntas y relaciones a partir de la exploración se abren?
- ¿Es posible a través de la exploración conjeturar y validar?
- ¿Cuáles son los objetos geométricos que emergen, puedes caracterizarlos?

Actividades de evaluación:

1. Construir un triángulo ABC, dado las longitudes del lado y la longitud de la mediana respecto al lado BC y AB.

2. Construir y luego establecer algunas conjeturas sobre las relaciones puestas en juego y encontrar argumentos que justifiquen lo realizado en las construcciones.

- Construir un paralelogramo en el cual un lado mida 8cm, otro lado mida 4cm y la altura correspondiente al lado de 8cm sea de 3cm-¿La construcción es la única posible?
- Construir un paralelogramo en el cual un lado mida 7 cm., otro lado mida 3cm y la altura correspondiente al lado de 7cm sea de 4cm. ¿La construcción es la única?

3. Práctica de la estudiante Karina de algunas de las actividades propuestas:

Problema 1:

Datos:

- ✓ Lado AB mide 6 cm.
- ✓ Lado AC mide 4 cm.

Tabla. 1: Pasos de Construcción:

Nº	Nombre	Definición	Comando	Álgebra
1	Punto A			$A = (3.04, 5.64)$
2	Punto B	Punto en Circunferencia[A, 6]	Punto[Circunferencia[A, 6]]	$B = (8.975, 4.762)$
3	Segmento a	Segmento [A, B]	Segmento[A, B]	$a = 6$
4	Punto C	Punto en Circunferencia[A, 4]	Punto[Circunferencia[A, 4]]	$C = (2.805, 9.633)$
5	Segmento b	Segmento [A, C]	Segmento[A, C]	$b = 4$
6	Recta c	Recta que pasa por C paralela a a	Recta[C, a]	$c: 0.878x + 5.935y = 59.639$
7	Recta d	Recta que pasa por B paralela a b	Recta[B, b]	$d: -3.993x - 0.235y = -36.958$
8	Punto D	Punto de intersección de c, d	Interseca[c, d]	$D = (8.741, 8.755)$
9	Número distanciaCA	Distancia de C a A	Distancia[C, A]	$\text{distanciaCA} = 4$
10	Texto TextoCA	Nombre[C] + (Nombre[A]) + "\, = \, " + distanciaCA	Nombre[C] + (Nombre[A]) + "\, = \, " + distanciaCA	$\text{TextoCA} = "CA \, = \, 4"$
11	Número distanciaAB	Distancia de A a B	Distancia[A, B]	$\text{distanciaAB} = 6$
12	Texto TextoAB	Nombre[A] + (Nombre[B]) + "\, = \, " + distanciaAB	Nombre[A] + (Nombre[B]) + "\, = \, " + distanciaAB	$\text{TextoAB} = "AB \, = \, 6"$
13	Ángulo α	Ángulo entre B, A, C	Angulo[B, A, C]	$\alpha = 101.78^\circ$
14	Ángulo γ	Ángulo entre A, C, D	Angulo[A, C, D]	$\gamma = 78.22^\circ$

Respuesta:

No hay un único paralelogramo con esas condiciones. Si tomamos como punto de referencia el \overline{AC} este varía de 0° a 90° generándose distintos paralelogramos, ya que, si bien las medidas de los lados son únicas, los ángulos varían.

1. El ángulo de un paralelogramo no puede medir 0° ni tampoco 180° , porque por propiedad de ángulos consecutivos de un paralelogramo sabemos que estos son suplementarios, entonces si esto pasara quedarían los puntos a, b, c, d alineados.
2. Al hacer variar el BAC, varían también los otros ángulos por propiedad de los ángulos de un paralelogramo.
3. Por propiedad de los ángulos opuestos de un Paralelogramo, los \widehat{BAC} y \widehat{ACD} son congruentes, por lo tanto, existen paralelogramo distintos cuando el \widehat{BAC} varía.

Si un alumno contesta luego de su exploración: *Son todos los paralelogramos que se ven moviendo el punto C el cual genera una circunferencia.*

Como lo emergente de este Ejercicio son los Paralelogramos Congruentes, preguntaría ¿Cómo son los paralelogramos si tomamos primero el \widehat{BAC} de 60° cuanto medirían sus otros ángulos? y ¿Que pasaría si el \widehat{BAC} mide 120° ?

¿Qué haría un alumno ante este cuestionamiento tuyo?

Anticipaciones:

Haría un razonamiento de tipo deductivo: poniendo a funcionar las propiedades que relacionan los ángulos del paralelogramo. *“si este ángulo mide 60° entonces el consecutivo mide 120° , y así los dos son iguales (paralelogramos)”*.

Pondrían las medidas en los ángulos y jugar con las medidas.

Construir los dos en simultáneo.

¿Cuál sería la micro teoría emergente de este problema?

Desde la reflexión compartida:

Observación:

A la hora de construir con el Geogebra se debe tener en cuenta en la OPCIÓN-REDONDEO, para saber con qué margen de error se trabaja.

Observación:

Se debe trabajar con error de redondeo mayor a 1 decimal para no caer en un Absurdo.

Nuevo problema para trabajar:

A nuestros futuros alumnos del secundario: ¿los haríamos construir? O ¿le daríamos el boceto en un archivo ya construido para explorar?

Problema 2 (a) de la Evaluación

Datos:

- ✓ Lado AB mide 8 cm., su altura h mide 3 cm.
- ✓ Lado AC mide 4 cm.

Tabla. 2: Pasos de Construcción:

Nº	Nombre	Definición	Comando	Álgebra
1	Punto A			$A = (6.8, 4.86)$
2	Punto B	Punto en Circunferencia[A, 8]	Punto[Circunferencia[A, 8]]	$B = (14.79, 5.18)$
3	Segmento a	Segmento [A, B]	Segmento[A, B]	$a = 8$
4	Recta b	Recta que pasa por A perpendicular a a	Perpendicular[A, a]	$b: -7.99x - 0.32y = -55.91$
5	Circunferencia c	Circunferencia con centro A y radio 3	Circunferencia[A, 3]	$c: (x - 6.8)^2 + (y - 4.86)^2 = 9$
6	Punto C	Punto de intersección de c, b	Interseca[c, b]	$C = (6.92, 1.86)$
6	Punto D	Punto de intersección de c, b	Interseca[c, b]	$D = (6.68, 7.86)$
7	Circunferencia d	Circunferencia con centro A y radio 4	Circunferencia[A, 4]	$d: (x - 6.8)^2 + (y - 4.86)^2 = 16$
8	Recta e	Recta que pasa por D paralela a a	Recta[D, a]	$e: -0.32x + 7.99y = 60.67$
9	Punto E	Punto de intersección de d, e	Interseca[d, e]	$E = (4.04, 7.75)$
9	Punto F	Punto de intersección de d, e	Interseca[d, e]	$F = (9.32, 7.96)$
10	Segmento f	Segmento [A, E]	Segmento[A, E]	$f = 4$
11	Recta g	Recta que pasa por B paralela a f	Recta[B, f]	$g: -2.89x - 2.76y = -57.09$
12	Punto G	Punto de intersección de e, g	Interseca[e, g]	$G = (12.03, 8.07)$
13	Segmento h	Segmento [A, F]	Segmento[A, F]	$h = 4$
14	Recta i	Recta que pasa por B paralela a h	Recta[B, h]	$i: -3.1x + 2.52y = -32.84$
15	Punto H	Punto de intersección de e, i	Interseca[e, i]	$H = (17.32, 8.28)$

Respuestas:

En la construcción tengo lo siguiente:

- El segmento AD mide 3 cm., es altura con respecto al lado AB, que mide 8 cm.
- Los segmentos AD y AB son perpendiculares pues AD es la altura.
¿Cómo son los paralelogramos AFHB y EABG?

Problema 2 (b):

Datos:

- ✓ Lado AB mide 7 cm, su altura h mide 4 cm.
- ✓ Lado AC mide 3 cm.

Tabla 4: Pasos de Construcción:

Nº	Nombre	Definición	Comando	Álgebra
1	Punto A			$A = (8.8, 6.56)$
2	Circunferencia c	Circunferencia con centro A y radio 3	Circunferencia[A, 3]	$c: (x - 8.8)^2 + (y - 6.56)^2 = 9$
3	Circunferencia d	Circunferencia con centro A y radio 4	Circunferencia[A, 4]	$d: (x - 8.8)^2 + (y - 6.56)^2 = 16$
4	Punto B	Punto en Circunferencia[A, 7]	Punto[Circunferencia[A, 7]]	$B = (15.8, 6.56)$
5	Segmento a	Segmento [A, B]	Segmento[A, B]	$a = 7$
6	Punto C	Punto en c	Punto[c]	$C = (7.36, 9.19)$
7	Segmento b	Segmento [A, C]	Segmento[A, C]	$b = 3$
8	Punto B'	B rotado por el ángulo 90°	Rota[B, 90° , A]	$B' = (8.8, 13.56)$
9	Ángulo α	Ángulo entre B, A, B'	Angulo[B, A, B']	$\alpha = 90^\circ$
10	Semirrecta e	Semirrecta que pasa por A, B'	Semirrecta[A, B']	$e: x = 8.8$
11	Punto D	Punto de intersección de d, e	Interseca[d, e]	$D = (8.8, 10.56)$
12	Punto E	Punto de intersección de c, e	Interseca[c, e]	$E = (8.8, 9.56)$
13	Recta f	Recta que pasa por B paralela a b	Recta[B, b]	$f: -2.63x - 1.44y = -51.02$
14	Recta g	Recta que pasa por C paralela a a	Recta[C, a]	$g: y = 9.19$
15	Punto F	Punto de intersección de f, g	Interseca[f, g]	$F = (14.36, 9.19)$
16	Punto G	Punto de intersección de g, e	Interseca[g, e]	$G = (8.8, 9.19)$
17	Número distanciaAG	Distancia de A a G	Distancia[A, G]	$\text{distanciaAG} = 2.63$
18	Texto TextoAG	Nombre[A] + (Nombre[G]) + "\, = \, " + distanciaAG	Nombre[A] + (Nombre[G]) + "\, = \, " + distanciaAG	TextoAG = "AG \, = \, 2.63"

Respuestas:

Con tales condiciones no existe ningún paralelogramo ya que la altura es mayor al lado consecutivo AB .

Si tengo como datos:

- Un lado y los ángulos adyacentes a este, genero infinitos paralelogramos.
- Dos lados y un ángulo, genero un único paralelogramo. (no necesariamente el comprendido)

- Dos lados y la altura correspondiente al mayor de ellos, y la altura menor al otro lado, genero un único paralelogramo.
- Dos lados, no genero un único paralelogramo, infinitos. Todos aquellos que puedo generar al hacer variar la amplitud del ángulo comprendido (entre esos dos lados) entre $(0, 90)$.
- Un ángulo, un lado y su altura, genero un único paralelogramo. (explorarlo)

Pensándolo desde el geogebra: me generan un único paralelogramo si tengo como datos aquellos elementos constitutivos que no sean dependientes, por ejemplo, teniendo la medida de un ángulo como dato este me da en consecuencia cuanto miden los otros tres ángulos, pero para que sea único el paralelogramo construido debo tener la longitud de los lados como dato también. Ya que los ángulos me generan un lugar geométrico.

Si tuviera la longitud de un lado, la de la altura correspondiente a ese lado y un ángulo, la medida del otro lado depende de estos datos (va a ser única...); porque la intersección de la paralela al lado que tengo y la circunferencia que posee como radio la altura dada me determina los vértices que me faltan para construir el paralelogramo.

Es decir, pensar en un único paralelogramo es pensar en realidad en qué elementos son invariantes a la hora de construir y cuales son los dependientes o aquellos que son invariantes pero si tengo determinados datos pasan a ser consecuencia “de”.

Este juego de buscar invariantes y relaciones con el geogebra en particular, desde mi experiencia, veo una dificultad a la hora de pensar que preguntar para que se visualice ese invariante y a la hora de ver que es lo que quiero que emerja al tener “todo” es complicado.

4. Conclusiones

El desarrollo de estas clases nos ha permitido retomar algunos conceptos básicos de la geometría con los alumnos y al equipo docente pensar los problemas didácticos que plantea el trabajo geométrico desde un entorno dinámico, sobre todo deliberar sobre cuáles son las razones que subyacen para elegir problemas con este programa, la intencionalidad didáctica se articula con los procesos de producción de los alumnos en un entorno dinámico si se tiende a buscar una relación entre exploraciones y demostraciones, ¿cuáles serían algunos criterios para elegir problemas en este entorno?

El GeoGebra 3.2 es un programa de entorno analítico, que nos ha planteado un nueva pregunta ¿cómo se relaciona o puede interactuar con las construcciones Euclidianas? y la producción de conocimiento geométrico, en este caso con alumnos que ya se habían enfrentado a este tipos de actividades en forma estática también nos enfrenta a otro interrogante ¿Tienden desde la exploración a una actitud generalizadora que “abona” estos procesos? ¿Cuál es el juego de las interacciones que se deben promover en la clase?, desde la intencionalidad del docente, desde las prácticas reflexivas que intercambios se propician y que actividades se priorizan para lograr los objetivos propuestos.

Bibliografía

- Iltzcovich, Horacio (2005) Iniciación al estudio didáctico de la Geometría. De las construcciones a las demostraciones. Libros del Zorzal, Bs As. Argentina.
- Gascón, Josep (2002), Geometría sintética en la ESO y analítica en el Bachillerato. ¿Dos mundos completamente separados? SUMA 39,pp.13-25
- Carrillo A. y Llamas I. (2009) Geogebra. Mucho más que geometría dinámica- Alfaomega Grupo Editor-México

Julia Edith Corrales. Profesora en Matemática, docente en diferentes niveles educativos. Coordinadora regional y capacitadora del Programa de Fortalecimiento de Escuelas Técnicas (Fund-YPF) en el área matemática en las provincias de Santa Cruz y Chubut. Docente del Dpto. de Matemática de la Universidad Nacional de la Patagonia Austral sede Caleta Olivia. Coodirectora del proyecto de investigación "*Estudio y Análisis epistémico-cognitivo sobre cómo se articula el saber Geométrico que circula en el Nivel Medio con la Formación Inicial*" julia_corrales@hotmail.com

