UNIÓN
REVISTA IBEROAMERICANA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA

ISSN: 1815-0640
Número 61. Abril 2021
Páginas 1-17

www.fisem.org/web/union

Situación de contraejemplo y su utilidad en la actividad de enseñanza de la Matemática

Edgardo Locia Espinoza, Armando Morales Carballo, Héctor Merino Cruz, Efrén Marmolejo Vega

Fecha de recepción: 2/12/2019
Fecha de aceptación: 15/02/2021

Resumen	En este artículo se reportan los resultados de un estudio exploratorio acerca de la noción de *situación de contraejemplo* y sobre los usos didácticos que un grupo de profesores de Matemáticas en servicio atribuye al contraejemplo. El trabajo fue sustentado teórica y metodológicamente por los aportes de la noción y utilidad del contraejemplo en los procesos de enseñanza – aprendizaje, lo que posibilitó dos diseños de exploración. Del análisis de las producciones, se identificó que los profesores tienen un conocimiento intuitivo de los usos didácticos del contraejemplo y los perciben en función de su inserción en un contexto. **Palabras clave**: Contraejemplo, refutación, validación, enseñanza.
Abstract	In this paper we report the results of an exploratory study about the notion of counterexample situation and about the didactic uses that a group of mathematics teachers attribute to the counterexample. This research was theoretically and methodologically supported by the contributions of the notion and utility of the counterexample in the teaching - learning processes, which allowed two exploration designs. From the analysis of the results was identified that the teachers have an intuitive knowledge of the didactic uses of the counterexample and perceive them according to their insertion in a context. **Keywords**: Counterexample, refutation, validation, teaching.
Resumo	Neste artigo relatamos os resultados de um estudo exploratório sobre a noção de contraexemplo e sobre os usos didáticos que um grupo de professores de matemática em serviço atribui ao contraexemplo. O trabalho foi apoiado teoricamente e metodologicamente pelas contribuições da noção e utilidade do contraexemplo nos processos de ensino - aprendizagem, que permitiram dois desenhos de exploração. A partir da análise das produções, identificou-se que os professores possuem um conhecimento intuitivo dos usos didáticos do contraexemplo e os percebem de acordo com sua inserção em um contexto. **Palavras-chave:** Contra-exemplo, refutação, validação, ensino.

1. Introducción

Los trabajos que reportan Arnal-Bailera & Oller-Marcén (2017), Lee, (2016), Lozano (2015), Stylianou, Chae, & Blanton (2006) coinciden en que uno de los principales problemas por los cuales tanto estudiantes como profesores presentan dificultades para la demostración en Matemáticas, recae en las dificultades sobre la argumentación y la prueba, y esto repercute en la comprensión de conceptos y sus definiciones, las propiedades y las relaciones lógicas entre las partes que estructuran la axiomática matemática.

En particular, las investigaciones relativas a la demostración en la enseñanza de la matemática reportadas por Arsac (1988), Antibi (1988), Hersh (1993) y Mitchell (1996) sostienen que, si bien es cierto que en Matemáticas el concepto de demostración es fundamental, hay muchos estudiantes, e incluso profesores, que no alcanzan a entender por qué los matemáticos dan a la demostración un estatus privilegiado, otros no identifican entre argumentos empíricos y argumentos deductivos. En particular, se ha identificado que en los profesores existe dificultad para aplicar correctamente definiciones, teoremas y fórmulas, confunden entre condiciones necesarias y suficientes, utilizan conclusiones no verificadas que con frecuencia resultan falsas.

En el campo de la Matemática, si se asume la *ley del tercero excluido* se posibilitan dos herramientas para poner a prueba la verdad de una afirmación: se demuestra, y con ello se establece que es verdadera, o se exhibe un contraejemplo para refutarla. Sin embargo, según Arsac (1987), este principio no es "natural" en el razonamiento que se utiliza fuera de las matemáticas, lo que constituye una fuente de dificultades para el desarrollo del razonamiento matemático en los estudiantes. A pesar de que el uso sistemático de contraejemplos para refutar afirmaciones no se encuentra presente en el proceso de enseñanza, los trabajos que reportan Morales (2008) y Locia (2000) establecen que una buena comprensión de los mecanismos de validación debe necesariamente pasar por un análisis cuidadoso del funcionamiento de las refutaciones, en general, y de la utilización de los contraejemplos, en particular.

Desde el punto de vista puramente matemático, el contraejemplo tiene un estatus bien definido. Cuando se aborda esta noción en el ámbito de la lógica, se propone un enunciado lógico cerrado del tipo $\forall x, p(x)$. Para demostrar su invalidez, se tiene que demostrar, por la ley del tercero excluido, que el enunciado $\neg(\forall x, p(x))$ es verdadero, es decir, se debe producir un x_0, tal que $\neg p(x_0)$. Así, la *regla del contraejemplo* se enuncia en los siguientes términos: *para demostrar que un enunciado de carácter universal es falso, es suficiente con exhibir un contraejemplo* (Arsac & Mante, 1997).

Con este antecedente, en este trabajo se indagó sobre la concepción didáctica acerca del contraejemplo en un grupo de quince de profesores en servicio de nivel secundaria, preuniversitario, universitario y en formación. En particular, se exploró sobre las siguientes concepciones:

1. Los profesores reconocen los contraejemplos solo cuando están completa y formalmente presentes en las condiciones estándar que hemos identificado: *In extenso*: si un enunciado cerrado del tipo $\forall x, p(x)$ es propuesto, los alumnos deben declarar su invalidez $\neg(\forall x, p(x))$, producir un x_0, tal que $\neg p(x_0)$ e indicar que esto demuestra aquello.

2. Los profesores reconocen los contraejemplos en situaciones más amplias, menos rigurosas e incompletas, lo que demostrará una concepción didáctica diferente de la concepción lógica.

2. Elementos teóricos-metodológicos

2.1 Identificación del objeto contraejemplo

Consideremos y analicemos la definición dada por Kleene:

> "Una fórmula F del cálculo de predicados no es válida exactamente si F es *falsable* en el sentido siguiente: existe un dominio no vacío D y una asignación en D de los parámetros de F que da el valor $\mathfrak{f}$ (falso). Tal asignación será llamada asignación *falsificante* para F en D y F será llamada falsable en este D […]
> El sistema formado por este D y esta asignación podrá ser designado como constituyendo un contraejemplo a F.
> Remplazando $\mathfrak{f}$ por $\mathfrak{t}$ (verdadero) obtenemos las nociones de *satisfacible*, de asignación que satisface, […] y de ejemplo". (Kleene, 1967, p. 284).

1. Se observa inmediatamente que el término "contraejemplo" no está definido como un término del cálculo de predicados, ni incluso de la teoría de modelos del cálculo de predicados. Se trata de un término "metalingüístico", intermediario entre el lenguaje del constructor y el lenguaje construido. Remite a cierta organización de un conjunto de fórmulas del cálculo de predicados constituido en elemento de "demostración".
2. En esta definición se dice que un contraejemplo es una pareja (D, δ) formada de un dominio D y de una asignación δ (es decir una *n*-tupla de valores de los parámetros de F), pero de hecho para que esta pareja sea un ejemplo o un contraejemplo, es necesario remitirla al argumento F: por consecuencia (D, δ, F) forman un contraejemplo si $\delta \epsilon D$ y si $\delta(F)$ toma el valor $\mathfrak{f}$ y un ejemplo si $\delta \epsilon D$ y si $\delta(F)$ toma el valor $\mathfrak{t}$. La formulación cotidiana en Matemáticas se transforma en "δ es el contraejemplo de F en el dominio D". En este caso el uso pone el acento sobre la asignación δ, que se transforma en "el contraejemplo", mientras que los otros dos términos son relegados al segundo plano como condiciones e incluso se funden en el contexto.
3. En lógica, la noción de contraejemplo solo aparece en la teoría de modelos. Ahí la validez de fórmulas se examina por medio de las asignaciones de sus variables a diversos dominios. En la teoría de la demostración esta noción no aparece. Lo que podría corresponderle sería la producción de dos enunciados cerrados contradictorios tales como $\forall x, p(x)$ y $\neg(\forall x, p(x))$, es decir $\exists x, \neg p(x)$. Pero x no se "exhibe" puesto que no hay dominio de realización a considerar y el vocabulario de los "ejemplos" no tiene entonces objeto.

   Sin embargo, en la práctica matemática, sobre todo a nivel elemental, los lenguajes y los métodos de las dos teorías son utilizados simultáneamente (el concepto de consecuencia válida se confunde con el de deducción, por ejemplo).

4. En la definición de Kleene, solo las fórmulas F que no son formalmente cerradas pueden ser el objeto de un contraejemplo, puesto que deben poseer al menos una asignación δ en al menos un dominio D. Ahora bien, el contraejemplo va de hecho a utilizarse para refutar la validez de fórmulas cerradas. Es decir, si se da una fórmula cerrada cualquiera P del cálculo de predicados y un dominio D, este dominio determina las asignaciones posibles de algunos de los parámetros de P. Consideremos el predicado F (deberíamos decir $F(P)$) obtenido al suprimir en P los cuantificadores relativos a esos parámetros. Es este F el que es susceptible de recibir ejemplos y/o contraejemplos en D.

2.2 Los contraejemplos en la construcción del conocimiento matemático

2.2.1 Las heurísticas del descubrimiento matemático. El trabajo de Polya

En sus estudios sobre las heurísticas del descubrimiento matemático, G. Polya trata la cuestión de las estrategias para llegar a nuevos conocimientos (Polya, 1958). Afirma que, si bien es cierto que las Matemáticas acabadas, presentadas bajo una forma definitiva, parecen puramente demostrativas al comportar solo teoremas y demostraciones, no sucede lo mismo para las Matemáticas en gestación. En la construcción de conocimientos matemáticos nuevos, es necesario combinar las observaciones y fiarse de las analogías. Es necesario intentar llegar a conjeturas y adivinar sus demostraciones. Polya analiza, a partir de ejemplos concretos, las estrategias de búsqueda basadas en los procesos de inducción, analogía, generalización y particularización y dice que tales procesos son casos particulares de un tipo de razonamiento muy utilizado en Matemáticas: el *razonamiento plausible*. El esquema de tal razonamiento es el siguiente: se llega a una conjetura A (que se cree que es verdadera) y a partir de A se puede deducir una afirmación B. Si B es falsa es inmediato que A es falsa. Pero si B es verdadera, entonces la confianza en que A sea verdadera aumenta, A se vuelve más plausible.

Aunque los trabajos de Polya no estén centrados en la utilización de contraejemplos en matemáticas, lo que es importante subrayar es el procedimiento que propone, basado en las interacciones entre el ensayo y el error para conjeturar y probar. La detección de un error, de una contradicción o de una omisión es bienvenida como un paso importante en la construcción de la prueba.

2.2.2 La lógica del descubrimiento matemático. El trabajo de Lakatos

El libro de I. Lakatos (Lakatos, 1976) es una notable presentación del funcionamiento del contraejemplo en la lógica del descubrimiento matemático. El autor presenta la metodología del descubrimiento matemático mediante la lógica de pruebas y refutaciones, a través de un debate ficticio entre un profesor y sus alumnos en una clase en la que se discute la conjetura de Euler. Esta conjetura pretende establecer una relación entre el número de caras, el número de aristas y el número de vértices de un poliedro. Es conveniente mencionar que las etapas de este debate son reales: son todas aquellas por las cuales pasaron los matemáticos en la búsqueda de una prueba definitiva del teorema de Euler.

La conjetura de Euler y propuesta de una prueba. El análisis que Lakatos lleva a cabo sobre la lógica del descubrimiento matemático comienza con la búsqueda de una relación entre el número V de vértices, el número A de aristas y el número C de caras de un poliedro, análoga a la que existe entre el número V de vértices y el número A de lados de un polígono, es decir $V = A$. Después de varios ensayos y errores uno de los participantes en el debate presenta al grupo la conjetura de Euler: En todo poliedro $V - A + C = 2$.

A falta de una prueba definitiva, Lakatos muestra cómo se puede someter una conjetura a lo que él llama "un experimento mental" o "cuasi experimento", caracterizado fundamentalmente por la descomposición de la conjetura primitiva en subconjeturas o lemas que abren nuevas instancias de crítica y de contrastación. Así, el experimento mental al que es sometida la conjetura de Euler consta de los siguientes lemas o subconjeturas (esta prueba está inspirada en aquella dada por Cauchy en 1813 (Cauchy, 1813)):

1. Se aplana un poliedro quitando una de sus caras. Nos remitimos así a establecer $V - A + C = 1$ para un grafo plano.

2. Se triangula el gráfico plano trazando diagonales en las caras que no son triángulos. En esta operación se agrega, en cada paso, una cara y una arista a la vez, por lo tanto $V - A + C$ permanece constante;

3. Se eliminan, uno por uno, los triángulos con la ayuda de una de las dos operaciones siguientes: Eliminar un lado o eliminar dos lados y un vértice. Así, si $V - A + C = 1$ antes de una de las dos operaciones, entonces $V - A + C = 1$ después. Al final de este procedimiento, queda solo un triángulo para el cual $V - A + C = 1$, por lo tanto puede pretenderse que la conjetura queda probada.

Los contraejemplos y la dialéctica de la prueba y la refutación. A partir de esta prueba, Lakatos ilustra el funcionamiento de la Matemática desde la formulación de conjeturas, hasta la confirmación o refutación de las mismas. Narra cómo van apareciendo ejemplos que no encajan con la conjetura o con la prueba (contraejemplos), mostrando su función de falsación o refutación. El criterio de rigor que da Lakatos es que, si ningún contraejemplo viene a refutar la conjetura o su prueba, esta (la conjetura) debe ser aceptada como verdadera. Llama *contraejemplo global* a aquel contraejemplo que refuta la conjetura y *contraejemplo local* a aquel que refuta su prueba (o alguno de sus lemas). Un contraejemplo local tiene características que hacen que la prueba no sea válida para ese caso, pero que sin embargo verifica la proposición conjeturada. Estos refutan uno de los lemas, sin refutar la conjetura; critican la prueba puesto que en dicho ejemplo no se cumple una propiedad que se suponía válida. Lo que queda refutado es un lema implícito y por tanto, la prueba. Por otra parte, la presencia de contraejemplos globales del teorema produce un conflicto entre el concepto, la conjetura y su prueba. Este conflicto involucra a la conjetura o a la prueba, y puede resolverse de distintas maneras, incluso ajustando la definición del concepto o determinando el abandono de la conjetura. Un contraejemplo global puede ser al mismo tiempo local, es decir, refutar un lema (o subconjetura) de la prueba; puede ser que este solo refute a la conjetura, es decir, que sea global pero no local. Este caso es tratado de una manera especial por Lakatos. Todo esto permite establecer distintos métodos de trabajo con el objetivo de la validación. Según estos métodos, los contraejemplos pueden llevar respectivamente a tratar de revisar la conjetura, los términos en ella implicados o su prueba: Método de la rendición, de exclusión de monstruos, de ajuste de monstruos, de exclusión de excepciones, y de incorporación de lemas.

Lakatos muestra así, cómo el debate sobre las demostraciones incompletas o las primeras tentativas de demostración de un resultado, es uno de los elementos preponderantes del progreso en el descubrimiento matemático. Sobre todo, cuando las supuestas demostraciones comportan implícitos, recurren a la evidencia ("lemas ocultos"), utilizan nociones que no están definidas totalmente, donde es posible que se disimulen errores y contradicciones. Es justamente la existencia de estos errores y de estas contradicciones la que es productiva. El hecho de superarlas se transforma en fuente de progreso. La presentación de un contraejemplo para poner en evidencia una contradicción puede conducir a interrogarse sobre la prueba buscando los "lemas ocultos" que dan lugar al contraejemplo. Así, en la interacción de la prueba y del contraejemplo, este último no solo sirve para poner en evidencia el error, sino que conduce a retomar ideas de objetos definidos implícitamente (los cuales en vista de las necesidades de su utilización estaremos obligados a precisar poco a poco para explicitar sus definiciones), y a darse cuenta de las diversas significaciones de los términos que se utilizan para expresar las demostraciones.

2.2.3. El papel de los contraejemplos en la producción de conocimientos matemáticos

Lakatos señala que los contraejemplos juegan un papel mucho más importante en la búsqueda de resultados en Matemáticas que lo que nos hace creer su lugar en la presentación clásica (axiomática) de estos mismos resultados. Se ha identificado cómo, en su proyecto de oponer las características de las Matemáticas hechas con las de la actividad matemática, el contraejemplo juega el papel de un revelador. Le permite mostrar que la dialéctica de la investigación no está bien representada por el orden y por los medios de la exposición clásica y de la demostración.

Más precisamente, Lakatos muestra el papel motor de las tentativas de prueba y de las refutaciones en la elaboración de una teoría matemática y el papel de los contraejemplos en esta dialéctica. Su modelación del debate a propósito de la conjetura de Euler permite comprender bien los diferentes empleos del contraejemplo como medio de control de la validez de las conjeturas, las demostraciones, las condiciones de validez, como medio de elegir definiciones, entre otros, y esta modelación muestra también cómo, progresivamente, el proceso de matematización esconde y elimina estos contraejemplos por: relegación de excepciones, incorporación de lemas, entre otros.

Una vez que el trabajo de construcción está terminado, el andamiaje de los contraejemplos desaparece del texto; este solo puede ser restablecido -al menos en parte- por el lector, como actividad de interrogación y de comprensión del texto. Esta restauración, evidentemente es muy parcial.

2.2.4. El papel de los contraejemplos en la Didáctica de las Matemáticas

Distinguimos en la enseñanza de las Matemáticas una doble necesidad. Por una parte, la necesidad de comunicar inmediatamente como una herencia (y por lo tanto como un texto) los conocimientos matemáticos de una época. Por otra, la necesidad de hacerlos producir, al menos en parte, como resultante de una actividad humana en la cual se quiere iniciar a los alumnos. Desde este punto de vista, el aporte de Lakatos es de una importancia capital.

De lo anterior, podemos en efecto deducir que:

- Si los procesos de producción matemática por los alumnos deben parecerse (aunque sea en lo mínimo) a los utilizados por los matemáticos, entonces no se parecerán mucho a los textos por los cuales las Matemáticas se manifiestan a ellos y a sus profesores.

- Por consecuencia, provocar, manejar e interpretar actividades matemáticas de los estudiantes, exigirá de sus profesores dos tipos de conocimientos irreductiblemente muy diferentes, uno relativo a los textos, el otro relativo a los conocimientos matemáticos.

Es necesario subrayar que esta diferencia es inherente a las Matemáticas reales, formadas de textos y de actividades y que ella no debe casi nada a la Psicología, incluso si esta última se encarga de mostrar la necesidad de la actividad en el aprendizaje y la comprensión de los textos, así como la existencia y el papel de los procesos cognitivos. La diferencia no podrá por lo tanto ser reducida, incluso ni por dispositivos psicológicos.

2.2.5 Los contraejemplos en el contexto escolar

En el campo de la enseñanza-aprendizaje de la Matemática se han desarrollado trabajos relativos a la formulación de conjeturas y al empleo del contraejemplo para el tratamiento de conceptos, propiedades y relaciones matemáticas, entre los que podemos mencionar los reportados por Weber (2009), Komatsu (2010), Ko & Knuth (2013), Giannakoulias, Mastorides, Potari, & Zachariades (2010), Komatsu, Jones, Ikeda & Narazaki (2017), García & Morales (2013), Klymchuk, (2010), Zazkis & Chernoff (2008), Huang (2014). Se se ha identificado que estás investigaciones están centradas en los estudiantes, profesores en servicio y en formación, y en estudiantes de posgrados. En cada una de ellas, se pone de manifiesto que el contraejemplo es una herramienta didáctica que favorece los procesos de validación y comprensión del conocimiento matemático.

Del análisis de los estudios reportados en los trabajos anteriormente citados, respecto al uso del contraejemplo; identificamos las siguientes implicaciones metodológicas: 1) Permite estimular el razonamiento en los estudiantes del cómo y el porqué de los procesos que se siguen para llegar a conclusiones, y disminuir los procedimientos memorísticos y algorítmicos de aprendizaje: esta implicación se identificó en los trabajos de investigación centrados en el alumno en los niveles escolares (primaria, secundaria, bachillerato, licenciatura y posgrado) al tratar contenidos específicos de la Matemática tales como: aritmética, álgebra, geometría, teoría de números, cálculo y análisis, entre otras; 2) Permite la estructuración funcional de los razonamientos lógico-matemáticos: esta implicación fue identificada en las propuestas relacionadas con el estudio de la prueba y la producción del contraejemplo para la validación de resultados; 3) Favorece la reflexión de los estudiantes en aspectos esenciales de las Matemáticas, al poner de manifiesto la importancia de las reglas, principios, teoremas y propiedades asociadas a los objetos matemáticos: esta implicación fue identificada en la actividad del alumno, del profesor y del profesor en formación; 4) Permite identificar a través del proceso constructivo del conocimiento las características y propiedades básicas e invariantes de los objetos matemáticos: esta implicación se identificó a partir de propuestas de contraejemplos que favorecieron la refutación de conjeturas sobre definición de conceptos de objetos matemáticos en temas concretos de aritmética, geometría, álgebra, cálculo, teoría de números, entre otras; 5) Revela conceptos erróneos, y obliga a prestar atención a cada detalle del proceso mejorando la comprensión de los conceptos y propiedades matemáticas: esta implicación se identificó al concebir el contraejemplo en su connotación semántica y su uso como herramienta didáctica para favorecer los procesos de validación; y en dicho proceso, la refutación mediante la propuesta de contraejemplos fue fundamental.

En las secciones anteriores hemos visto que, en Matemáticas, la palabra contraejemplo tiene un significado y un estatus bien definido y que su papel en la construcción del conocimiento matemático a través de la dialéctica de la prueba y la refutación es de una gran importancia a pesar de que, una vez que las teorías matemáticas han sido terminadas y presentadas de una manera axiomática, los contraejemplos desaparecen completamente de los textos matemáticos. Consideramos que este hecho debe tener consecuencias en la enseñanza: por ejemplo, los profesores propondrán problemas y solicitarán a sus alumnos demostraciones y razonamientos que se parecerán a los textos matemáticos y que, por lo tanto, subutilizarán y ocultarán el papel de los contraejemplos. De esta manera el contraejemplo no será un objeto de enseñanza. Sin embargo, como en sus propios razonamientos, los profesores utilizan a veces los contraejemplos, exigirán también de sus alumnos su uso espontáneo y por lo tanto la noción tendrá un perfil difuso.

3. Método

El trabajo es de tipo descriptivo con carácter interpretativo, como se estableció antes. Nos propusimos explorar cómo perciben los profesores la noción de contraejemplo y cuál es el papel que juega esta noción en su enseñanza. Esta fue una primera aproximación al estudio del funcionamiento del contraejemplo en el contexto escolar.

Cabe señalar que no se llevó a cabo la validación de los cuestionarios de modo explícito, ya que el planteamiento que se hizo en cada cuestionario surgió en el contexto de los seminarios a los que asistió un grupo de 15 profesores en servicio de distintos niveles (secundaria, preuniversitario, universitario) y en formación, y en el que se discutieron problemas sobre la enseñanza de la Matemática y de su dominio, en los niveles indicados, y en ese marco emergió el planteamiento acerca del contraejemplo y de sus usos. Tal proyecto se desarrolló en la Facultad de Matemáticas de la Universidad Autónoma de Guerrero y estuvo coordinado y dirigido por los autores de esta investigación.

3.1. Primer cuestionario. De este primer cuestionario, se planteó a los profesores la siguiente pregunta: Según usted, ¿qué se entiende por situación de contraejemplo?

Precisiones: Este cuestionario fue propuesto a 3 grupos: uno de 3, otro de 5, y un tercer grupo de 7 profesores que participaban en el seminario. Se les pidió responder a la pregunta espontáneamente porque lo que interesaba era saber cuál es la primera idea que les viene a la mente cuando piensan en la noción de situación de contraejemplo. Ningún límite de tiempo fue impuesto pero la mayor parte de los participantes tomaron entre 10 y 15 minutos para responder.

Respuestas que produjeron los profesores

Hemos agrupado las respuestas que produjeron los profesores en diferentes patrones según el tipo de funcionalidad que los autores otorgan a los contraejemplos. En específico, hemos agrupado las respuestas en las categorías: Lógica, ¿implicación verdadera?, efecto de sorpresa, necesidad de las hipótesis, ampliación de conjunto.

Lógica: En la categoría lógica agrupamos todas las respuestas que ponían el acento sobre el aspecto del contraejemplo en tanto que método de demostración de la falsedad de una afirmación. Desde nuestra visión, consideramos que esto corresponde a la situación estándar de la definición lógica del contraejemplo.

Concepciones del contraejemplo que emergieron

- *Se trata de una situación que permite mostrar un ejemplo que pone en evidencia la falsedad de una afirmación.*
- *Es una manera de demostrar que un razonamiento es erróneo*
- *Es cuando se puede probar que una afirmación (o una propiedad) es falsa con la ayuda de un ejemplo.*

Aplicación de la concepción anterior

- *Los múltiplos de 3 son los números que terminan en 0, 3, 6 o 9. Contraejemplo: 12 es un múltiplo de 3 pero no termina en 0, 3, 6, o 9. Ahora bien, 43 termina en 3 pero no es un múltiplo de 3.*

¿Implicación verdadera?: En esta categoría se agrupan las respuestas cuya idea principal de contraejemplo es la de poner en evidencia la falsedad de una afirmación bajo forma de implicación.

Situaciones que emergieron

- *Una situación en la que se quiere mostrar que la proposición* $(A \Longrightarrow B)$ *es falsa: se busca un objeto tal que* A *y no-*B.
- *Se está en una situación de contraejemplo cuando aquello que se nos pide demostrar es falso.*

Se cita entonces un ejemplo en el cual los datos son verdaderos con una conclusión que no es la que fue propuesta.

Efecto de sorpresa: Son respuestas en las que el autor da a los contraejemplos la virtud de producir cierta sorpresa en el momento de poner en evidencia la falsedad de un enunciado que previamente pudo haberse creído verdadero. Estas respuestas se caracterizan por la utilización de expresiones tales como “creer verdadera una afirmación”, “pensar que un enunciado es verdadero”, etc.

Respuestas de los profesores

- *Situación en la cual se prueba, por la consideración de un ejemplo, que un enunciado que pudiera creerse verdadero, es falso.*
- *Hacer buscar un ejemplo que va al contrario de lo que parece admitido en el momento presente.*
- *Una situación de contraejemplo permite contradecir una verdad aparente*.

Necesidad de las hipótesis: Se trata de respuestas en las que la función principal del contraejemplo es la de poner a prueba que ninguna de las hipótesis de un teorema dado es superflua, es decir, las hipótesis son todas necesarias.

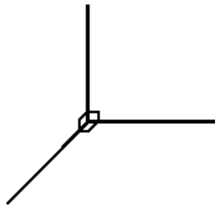
Respuestas de los profesores

- *Una "situación" (teorema en general) estando perfectamente demostrado a partir de hipótesis ($H_1, H_2, \ldots, H_n$) mostrar por un ejemplo que si una de las hipótesis no se cumple, el teorema no es verdadero, el ejemplo en cuestión es entonces un contraejemplo.*
- *Es una situación que muestra que cuando una de las hipótesis de un teorema no se cumple, la conclusión puede ser falsa*.

Ampliación de conjunto: En esta categoría la idea principal es de poner en evidencia, por medio de un ejemplo, la falsedad de una afirmación que es producida ampliando el dominio de aplicación de un teorema o de un resultado previamente establecido. El ejemplo dado por uno de los participantes puede ayudarnos a comprender mejor esta idea.

Ejemplo

- *En geometría del espacio, los alumnos piensan que, como en el plano, si dos rectas son perpendiculares a una misma tercera entonces son paralelas. El contraejemplo*:



Reflexiones en torno a la clasificación de los tipos del contraejemplo

- Las categorías no son excluyentes las unas de las otras, ya que ciertas respuestas dadas por los profesores encuestados comportan aspectos de dos o más categorías mencionadas antes. El criterio de clasificación que hemos seguido en estos casos es el de clasificarlas respecto a la idea que, en nuestra opinión, era la más fuerte. Así, el ejemplo de respuesta dado en la categoría "ampliación de conjunto" la idea más fuerte es la de transferir un resultado válido para la geometría del plano a un resultado "más general" relacionado con la geometría del espacio. Sin embargo, esta respuesta comporta también aspectos relativos a las categorías "efecto de sorpresa" (la expresión "…los alumnos piensan que…") y de "¿implicación verdadera?" (el enunciado bajo la forma "si… entonces …").

- Desde el punto de vista matemático la categoría "necesidad de las hipótesis" es equivalente a la categoría "ampliación de conjunto". En efecto, cada vez que se suprime una de las hipótesis de un teorema se extiende su dominio de aplicación y, recíprocamente, cada vez que se generaliza un resultado (ampliación de conjunto), los elementos a los cuales se quiere aplicar la propiedad en cuestión satisfacen un número más pequeño de condiciones (hipótesis). Pero del punto de vista didáctico estas dos categorías conciernen a dos maneras diferentes de hacer funcionar un contraejemplo.

- Es importante señalar que ninguno de los profesores que han realizado este cuestionario mencionó el lenguaje conjuntista, es decir la utilización de los contraejemplos para permitir poner en evidencia la falsedad de una afirmación relativa a la inclusión de un conjunto en otro, es decir: ¿es cierto que $A \subset B$?

Resultados cuantitativos

En la tabla siguiente, se presentan los resultados cuantitativos de este primer cuestionario:

Tipos de contraejemplo	Lógica	¿Implicación verdadera?	Efecto de sorpresa	Necesidad de las hipótesis	Ampliación de conjunto
Número de respuestas	4	3	4	1	1

Tabla 1. Número de respuestas dadas por los profesores y su clasificación en las categorías identificadas.

Como se observa en la Tabla 1, 13 profesores produjeron respuestas y estas se clasificaron en algunos de los tipos identificados. Cabe destacar que se identificaron otras dos categorías, las cuales se denominaron "incómodo" y "diversos". La primera se refiere a la respuesta de un profesor que ha manifestado explícitamente que estaba incómodo por la yuxtaposición de los términos "situación" y "contraejemplo". Al respecto, el profesor explicó:

> *El término situación, me vuelve confusa esta expresión. Yo conozco: demostración por contraejemplo, citar un contraejemplo, etc. pero no situación de contraejemplo*.

Un profesor solamente está en esta rúbrica, sin embargo, para la mayoría de los profesores, "situación de contraejemplo" tiene un significado.

En la clasificación de "diversos" se ubicó la siguiente respuesta:

> *Para demostrar algo. Se encuentra un ejemplo concreto que muestra lo contrario.*
> *¿Podemos llamar a esto una situación de "contra"-ejemplo* (sic)*?*
> *"El hombre es mortal"*
> *"Dios es inmortal" (¿Citas o definiciones?)*
> *"Dios se hizo hombre" (Posición de la iglesia católica)*
> *¿Conclusión?*

A pesar del aspecto lógico del contraejemplo, no se pueden soslayar las otras ideas que la expresión "situación de contraejemplo" evoca en los profesores. Es el "efecto de sorpresa" que está en igualdad de importancia con el aspecto lógico.

3.2. Segundo cuestionario. Hemos considerado que las respuestas dadas por los profesores al primer cuestionario revelaban usos diferentes del contraejemplo desde el punto de vista didáctico. Quisimos precisar con otro cuestionario si podíamos, por diversas formulaciones de un mismo problema, identificar estos diferentes usos de la noción de contraejemplo. Este cuestionario comporta tres partes

3.2.1. Primera parte. Para cada uno de enunciados siguientes, diga si corresponde a una situación de contraejemplo:

<table>
<tr><td colspan="3">1. Encontrar un múltiplo de 1240 que no sea un múltiplo de 2480</td></tr>
<tr><td>SÍ</td><td>NO</td><td>NO SÉ</td></tr>
<tr><td colspan="3">2. Considere la propiedad verdadera siguiente:
"Si un número es múltiplo de 2480, entonces es un múltiplo de 1240".
¿Es verdadera la recíproca de esta afirmación?</td></tr>
<tr><td>SÍ</td><td>NO</td><td>NO SÉ</td></tr>
</table>

3. ¿Existe un múltiplo de 1240 que no sea múltiplo de 2480?		
SÍ	NO	NO SÉ
4. Mostrar que el conjunto de los múltiplos de 1240 no es igual al conjunto de los múltiplos de 2480.		
SÍ	NO	NO SÉ

3.2.2 Segunda parte. Si puede, explique sus respuestas a las preguntas anteriores.

3.2.3. Tercera parte. En el caso en el que, según usted, varios enunciados correspondan a una situación de contraejemplo, indique: aquel que corresponda más a una situación de contraejemplo y aquel que corresponda menos a una situación del tipo indicado.

Precisiones: Este cuestionario fue propuesto a los profesores que habían respondido al test del parágrafo precedente. Para la primera parte, se les recordó que no era necesario responder los ejercicios presentados en cada enunciado, sino que había que responder a la pregunta planteada al inicio, encerrando, en cada caso, la respuesta útil. Ningún límite de tiempo se impuso, pero la mayoría de las personas tomaron alrededor de 20 minutos para responder.

Análisis a priori de la primera parte

Enunciado 1. La respuesta que esperamos para esta pregunta es NO. No se considera este problema como una situación de contraejemplo porque no comporta explícitamente un enunciado conjetural. Cuando la solicitud es encontrar un número con ciertas características, se asume que este número existe. De hecho, más que un contraejemplo, lo que se pide es encontrar un ejemplo de algo.

Enunciado 2. Se considera que este enunciado constituye una situación de contraejemplo. Lo que se pide es responder a una pregunta sobre la veracidad de una frase afirmativa (la recíproca de una propiedad verdadera). Al inicio no se sabe si esta afirmación es verdadera o falsa pero su falsedad puede demostrarse con la exhibición de un contraejemplo. La respuesta esperada es entonces SÍ.

Enunciado 3. En este caso, como en el anterior, se trata también de una conjetura. Aquí, lo que es conjeturado es la existencia de un número que satisface dos propiedades. Es decir, no se trata de una conjetura universal. Por lo tanto la situación a la cual da lugar, no es una situación de contraejemplo. La respuesta esperada es NO.

Enunciado 4. Se trata de un problema a demostrar (terminología utilizada por Polya (1958)). Un problema del cual se conoce la respuesta. Lo que hay que demostrar es la existencia de un número que satisface ciertas condiciones. En este caso particular, el problema es equivalente al problema presentado en el enunciado 1, la existencia puede demostrarse dando un ejemplo particular. Le respuesta esperada es entonces NO. Así, desde la visión de los autores del trabajo, el único enunciado que corresponde a una situación de contraejemplo es el enunciado 2.

Resultados cuantitativos de la primera parte. Se presentan los resultados de la primera parte en la tabla siguiente:

	Enunciado 1	Enunciado 2	Enunciado 3	Enunciado 4
Respuestas				
NO	80% (12)	7% (1)	47% (7)	20% (3)
SÍ	13% (2)	86% (13)	40% (6)	73% (11)
NO SÉ	7% (1)	7% (1)	13% (2)	7% (1)

Tabla 2. Respuestas a la primera parte del segundo cuestionario.

El número que está entre paréntesis en cada una de las celdas es el número de respuestas que han sido clasificadas en los diferentes tipos de contraejemplo.

Análisis de las respuestas

▪ La tabla muestra que los enunciados 1 y 2 han planteado menos dificultad para ser clasificados por los profesores. Esto significa que hay muy pocas dudas, por parte de los profesores, sobre el hecho de que el enunciado 1 no representa una situación de contraejemplo. De la misma manera, como previmos, aparece muy claramente que el enunciado 2 representa, para la mayoría de los profesores, una situación de contraejemplo.

▪ En el enunciado 3, las opiniones son verdaderamente muy compartidas. Es tal vez porque el enunciado está planteado en forma de conjetura que encontramos cierto titubeo por parte de los profesores para definir una posición uniforme. Esto parece indicar que, en casos de este tipo, las nociones de ejemplo y contraejemplo no son verdaderamente diferenciadas.

▪ El enunciado 4 obtuvo el número más grande de respuestas “SÍ”.

Antes de hacer hipótesis sobre los orígenes de estas respuestas, vamos a analizar las justificaciones dadas en la segunda parte del cuestionario.

Segunda parte

Acerca de las respuestas: 2 de 15 personas interrogadas no dieron explicación alguna, una no establece diferencia alguna entre los cuatro enunciados (este profesor respondió “SÍ” para los 4 enunciados), 2 señalan que, para ellos es “intuitivo” o “evidente”, 4 profesores escriben algo, pero no hay explicación.

Algunas descripciones que realizaron los profesores

- *Yo no entiendo bien qué se entiende por situación de contraejemplo* (este profesor responde “NO SÉ” salvo para el enunciado 1 para el cual su respuesta es “NO”).
- *Yo no encuentro situación de contraejemplo en el sentido en el que yo lo entiendo, sino preguntas con respuestas a encontrar* (este profesor responde “NO” a los dos primeros enunciados, “SÍ” a los dos otros).
- *El contraejemplo serviría para responder a una pregunta expresada de manera general. Él niega el enunciado de una propiedad general.*
- *Yo hago la diferencia entre ejemplo y contraejemplo.*
- *Yo respondo “SÍ” cuando se trata de mostrar que una propiedad no es verdadera (siendo la pregunta 4 la misma que la 2).*

- *Un contraejemplo no está formulado de manera universal.*
- *¿El enunciado está ligado o no a un contexto?*
- *Me parece que yo hablo de contraejemplo cuando se enuncia una frase afirmativa y que una pregunta acerca de su veracidad se plantea, como en 2. Es por lo tanto contradecir una afirmación, exhibiendo un contraejemplo.*

Análisis

Solo seis profesores proponen verdaderamente una explicación. Sin embargo, solo un profesor responde "NO SÉ" para los enunciados 1, 2, 4 y dos para el enunciado 3. Parece entonces que la mayor parte de respuestas se apoyan esencialmente sobre la experiencia de los profesores. Esta segunda parte del cuestionario no permitió identificar la razón de las elecciones de las argumentaciones de los profesores interrogados.

Tercera parte

En las tablas siguientes se presentan los resultados:

Enunciado 1	Enunciado 2	Enunciado 3	Enunciado 4	No supo
2	9	0	1	3

Tabla 3. Corresponden más a una situación de contraejemplo

Enunciado 1	Enunciado 2	Enunciado 3	Enunciado 4	No supo
3	1	0	4	7

Tabla 4. Corresponden menos a una situación de contraejemplo

Análisis

La Tabla 3 confirma que, para el enunciado 2, la tendencia es clara: los profesores lo sitúan a la cabeza en la categoría "situación de contraejemplo". El enunciado 3, para el cual las opiniones eran compartidas en la parte 1 del cuestionario, no recoge aquí ningún sufragio. Teniendo en cuenta el número importante de respuestas "NO SÉ", la Tabla 4 no proporciona informaciones importantes.

4. Conclusiones de la investigación

De acuerdo al trabajo presentado y a los resultados obtenidos, establecemos las siguientes conclusiones principales: Los profesores tienen un conocimiento al menos intuitivo de los usos didácticos de los contraejemplos y los perciben en función de su inserción en un contexto, tal y como se reflejó en los datos cuantitativos; la mayoría de ellos no está en posibilidad de precisar qué es una situación de contraejemplo, pero tiene una idea de ello y puede decir si una situación dada lo es o no; para algunos la diferencia entre ejemplo y contraejemplo no es clara. Las respuestas encontradas al responder el primer cuestionario favorecieron una primera clasificación de las situaciones de contraejemplo.

5. Reflexiones finales

- En la actividad matemática profesional los contraejemplos tienen un papel muy importante. Sin embargo este rol no se encuentra presente en la presentación axiomática de los conocimientos.

- El sesgo así introducido en la transposición didáctica de las Matemáticas, tiene consecuencias en la enseñanza en la que los contraejemplos tienen un rol modesto, poco representativo del que tienen en la actividad matemática profesional. Así los contraejemplos son métodos de razonamiento más que objetos de enseñanza.

- La clasificación generada acerca de las situaciones de contraejemplo, puede ser el punto de partida para trabajos futuros en la dirección de considerar los contraejemplos como herramienta didáctica.

- Actualmente se encuentra en desarrollo la capacitación y actualización del grupo de profesores con los que se trabajó la exploración que se reporta en este trabajo, y en particular se trabajan los proyectos: el papel de los contraejemplos en los procesos de construcción de definiciones matemáticas y estudio de la variación de las funciones en el que se utiliza el contraejemplo como una herramienta didáctica. Estas actividades toman como base la clasificación generada en este trabajo, y se pretende aportar herramientas al profesor para su formación y para su actividad de enseñanza en los niveles educativos indicados.

Bibliografía

Antibi, A (1988). *Etude sur l'enseignement de méthodes de démonstration. Enseignement de la notion de limite: reflexions, propositions*. PhD thesis, Toulouse. Universidad Paul Sabatier.

Arnal-Bailera, A. y Oller-Marcén, A. M. (2017). Formación del Profesorado y Demostración Matemática. Estudio Exploratorio e Implicaciones. *Bolema,* 31, 57,135-157. Recuperado de http://www.scielo.br/pdf/bolema/v31n57/0103-636X-bolema-31-57-0135.pdf

Arsac, G (1987). L'origine de la démostration: essai d'épistemologie didactique. *Recherches en didactique des mathématiques,* 8(3): 267-312.

Arsac, G (1988). Les recherches actuelles sur l'apprentisage de la démonstration et les phénoménes de validation en France. *Recherches* en didactique des mathématiques, 9(3): 247-280.

Arsac, & Mante, M (1997). Situations d'initiations au raisonnement déductif. *Educational Studies in Mathemtics*, 33 (1): 247-280.

Cauchy, L. A. (1813). Recherche sur les polyèdres - premier mémoire. *Journal de l'École Polytechnique '9'*. 66-86.

García, O. y Morales, L. (2013). El Contraejemplo como Recurso Didáctico en la Enseñanza del Cálculo. *Revista Iberoamericana de Educación Matemática,* 13, 161-175. Recuperado de http://www.fisem.org/www/union/revistas/2013/35/archivo14.pdf

Giannakoulias, E., Mastorides, E., Potari, D., & Zachariades, T. (2010). Studing teachers' mathematical argumentation in the contexto of refuting students invalid claims. *The Journal of Mathematical Behavior,* 29, 160-168. Recuperado de https://www.sciencedirect.com/science/article/abs/pii/S0732312310000386

Huang, Ch. (2014). Engineering students' generating counterexample of calculus concepts. *Global Journal of Engineering Education,* 16(2), 93-97 Recuperado de http://www.wiete.com.au/journals/GJEE/Publish/vol16no2/06-Huang-C-H.pdf

Hersh, R. (1993). Proving is convincing and explaning. *Educational studies in Mathematics*, 2(4): 389-399.

Kleene, S. (1967) *Logique mathématique*. Amsterdam. North-Holland Publishing Company.

Klymchuk, S. (2010). Counterexamples in Cálculus. *Mathematical Association of América. Resource Materials.* United States of América.

Ko, W. & Knuth, E. J. (2013). Validating Proofs and Counterexamples Across Content Domains: Practices of Importance for Mathematics Majors. *The Journal of Mathematical Behavior,* 32, 20-35. Recuperado de https://www.sciencedirect.com/science/article/abs/pii/S0732312312000363

Komatsu, K. (2010). Counter-examples for Refinement of Conjectures and Proofs in Primary School Mathematics. *The Journal of Mathematical Behavior, 29(1), 1-10.* Recuperado de https://www.sciencedirect.com/science/article/abs/pii/S0732312310000040

Komatsu, K., Jones, K., Ikeda, T., & Narazaki, A. (2017). Proof validation and modification in secondary school geometry. *The Journal of Mathematical Behavior.* 47, 1-15. Recuperado de https://www.sciencedirect.com/science/article/abs/pii/S0732312316300980

Lakatos, I. (1976). *Preuves et refutations: essai sur la logique de la decouverte mathématique*. Herman, París.

Lee, K. (2016). Students' proof schemes for mathematical proving and disprovong of propositions. *The Journal Mathematical Behavior,* 41, 26-44. Recuperado de https://www.sciencedirect.com/science/article/abs/pii/S0732312315300134

Locia, E. (2000). *Les contre-exemples dans l'enseignement des mathematiques.* Tesis doctoral no publicada, Universidad Paul Sebatier. Touluse, Francia.

Lozano, M. D. (2015). Argumentación abductiva y prueba en problemas de geometría analítica utilizando geogebra. *Tercer Coloquio de Doctorado, Departamento de Matemática Educativa, Cinvestav.* México.

Mitchell, T. (1996). On examples, counterexamples, and proof by example. *General Economics and Teaching 9607001, University Library of Munich,* Germany.

Morales, A. (2008). *El papel que juega el contraejemplo en la construcción de las definiciones en matemáticas: El caso de la función convexa.* Tesis inédita de Maestría. Universidad Autónoma de Guerrero, México.

Polya, G (1958). *Les mathématiques et le raisonnement plausible*. París. Gauthier-Villar.

Stylianou, D., Chae, N., & Blanton, M. (2006). Students' proof schemes: a closer look at what characterizes students' proof conceptions en Alatorre*, S., Cortina, J.L., Sáiz, M., & Méndez, A. (Eds.). Proceedings of the TwentyEighth Annual Meeting of the North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education. Mérida, Mexico: Universidad Pedagógica Nacional.* 2, 54-60.

Weber, K. (2009). How Syntactic Reasoners can Develop Undertstanding, Evaluate Conjetures, and Generate Counterexamples in Advanced Mathematics. *The Journal of Mathematical Behavior, 28,* 200-208. https://www.sciencedirect.com/science/article/abs/pii/S073231230900039X

Zazkis, R. & Chernoff, E. (2008). ¿What Makes a Counterexample Exemplary? *Educational Studies in Mathematics, 68,* 195-208.

Autores:

Locia Espinoza Edgardo. Profesor Titular de la Facultad de Matemáticas de la Universidad Autónoma de Guerrero, México. Licenciado y Master en Matemática Educativa, Doctor en Didáctica de la Matemática por la Universidad Paul Sabatier (Toulouse III). Email: lociae999@hotmail.com

Morales Carballo Armando. Profesor Titular de la Facultad de Matemáticas de la Universidad Autónoma de Guerrero, México. Licenciado en Matemáticas: Área Enseñanza de la Matemática y Computación, Maestría y Doctorado en Ciencias con Especialidad en Matemática Educativa. Miembro del Sistema Nacional de Investigadores (SNI), México. Email: armando280@hotmail.com

Merino Cruz Héctor. Profesor Titular de la Facultad de Matemáticas de la Universidad Autónoma de Guerrero. Licenciado en Matemáticas: Área Enseñanza de la Matemática y Computación, Maestría y Doctorado en Matemáticas. Miembro del Sistema Nacional de Investigadores (SNI), México. Email: hmerinoc@gmail.com

Marmolejo Vega Efrén. Profesor Titular de la Facultad de Matemáticas de la Universidad Autónoma de Guerrero. Licenciado en Matemática Educativa, Maestría y Doctorado en Ciencias con especialidad en Matemática Educativa. Email: efrenmarmolejo@yahoo.com