

## Dificultades en la formulación de hipótesis estadísticas por estudiantes de Psicología

Osmar Darío Vera; Carmen Díaz; Carmen Batanero

### Resumen

En este trabajo, analizamos las respuestas dadas por un grupo de 224 alumnos de la Licenciatura en Psicología de la Universidad de Huelva a una pregunta abierta en la que tienen que plantear las hipótesis dentro de un problema de contraste estadístico de hipótesis. Usando como marco teórico el Enfoque Ontosemiótico de la cognición matemática, se analizan las prácticas matemáticas implícitas en las respuestas, así como los objetos y procesos matemáticos utilizados, para descubrir los conflictos semióticos que producen respuestas inadecuadas. Como resultado se presenta una clasificación de diferentes conflictos semióticos relacionados con los objetos que intervienen en el planteamiento de las hipótesis estadísticas.

### Abstract

In this paper, we analyze the responses by 224 Psychology students from the University of Huelva, Spain, to an open-ended question, where they need to set the hypotheses in a statistical test problem. Using the Onto-semiotic Approach to mathematical cognition we analyze the mathematical practices implicit in the responses to discover the semiotic conflicts that produce inadequate responses. As a result we present a classification of different semiotic conflicts related to objects that intervene in setting the statistical hypotheses.

### Resumo

Neste trabalho, analisamos as respostas dadas por um grupo de 224 alunos da Licenciatura em Psicologia da Universidade de Huelva a uma pergunta aberta na qual tem que plantear as hipóteses dentro de um problema de contraste estatístico de hipóteses. Usando como marco teórico o Enfoque Ontosemiótico da cognição matemática, se analisam as práticas matemáticas implícitas nas respostas, assim como os objetos e processos matemáticos utilizados, para descobrir os conflitos semióticos que produzem respostas inadequadas. Como resultado se apresenta uma classificação de diferentes conflitos semióticos relacionados com os objetos que intervêm na exploração das hipóteses estatísticas.

## 1. Introducción

La inferencia estadística ha jugado un papel destacado en diversas ciencias humanas, en especial en Educación y Psicología, que basan sus investigaciones en datos recogidos en muestras de poblaciones mayores, a las que quieren extender sus conclusiones. Sin embargo, el uso e interpretación de la estadística en estas investigaciones no son siempre adecuados, como se muestra en diversas revisiones (por ejemplo, en Harlow, Mulaik y Steiger, 1997; Ares, 1999; Borges, San Luis, Sánchez, y Cañadas, 2001; Batanero y Díaz, 2006).

Estos errores también se producen en estudiantes universitarios (ver, por ejemplo, Birnbaum, 1982; Vallecillos, 1994 o Krauss y Wassner, 2002), aunque la mayor parte de la investigación que analiza estos errores en alumnos universitarios se centra en la comprensión del concepto de nivel de significación  $\alpha$ . Como se indica en Harradine, Batanero y Rossman (2011), la comprensión de la inferencia estadística requiere el aprendizaje de tres elementos interrelacionados: (a) el proceso de razonamiento; (b) los conceptos asociados y (c) los cálculos relacionados. Pero, mientras la realización de los cálculos asociados con los contraste de hipótesis es hoy día muy sencilla, gracias al software estadístico, la enseñanza de los conceptos y el razonamiento inferencial es mucho más compleja, lo que explica las muchas dificultades descritas en el uso de la inferencia.

En particular, en lo que se refiere al contraste de hipótesis, un punto clave es la comprensión del concepto de hipótesis y la diferenciación entre hipótesis nula y alternativa y entre sus propiedades. El correcto planteamiento de las hipótesis es el primer paso para realizar un contraste, pues un fallo en el planteamiento inicial de las mismas puede derivar en un error en la elección del contraste adecuado, del estadístico pertinente, de las regiones críticas y de aceptación y finalmente una decisión errónea sobre el rechazo o aceptación de la hipótesis.

En este trabajo abordamos este punto, mediante un estudio cualitativo del planteamiento de hipótesis que un grupo de 224 estudiantes de Psicología españoles, después de haber seguido un curso de inferencia, realiza para resolver un problema de contraste estadístico elemental. Apoyándonos en nociones teóricas del enfoque onto-semiótico (Godino y Batanero, 1998; Godino, 2002; Godino, Batanero y Font, 2007), realizamos un análisis semiótico de las respuestas abiertas a dichas tareas, clasificándolas e identificando diferentes conflictos semióticos relacionados con el reconocimiento del campo a que pertenece el problema planteado, la comprensión de las propiedades de las hipótesis y la confusión entre algunos objetos matemáticos que intervienen en un contraste. Con ello completamos las investigaciones previas y proporcionamos información de utilidad para el profesor que le ayudará a planificar la enseñanza del tema.

A continuación presentamos los fundamentos del trabajo, el método, resultados y discusión. Se finaliza con unas reflexiones sobre la enseñanza de la inferencia.

## 2. Fundamentos del trabajo

### *Antecedentes*

Como hemos indicado, los principales errores relacionados con la comprensión del contraste de hipótesis se refieren al nivel de significación  $\alpha$ . La interpretación incorrecta más extendida de este concepto es cambiar los términos de la probabilidad condicional en la definición del nivel de significación  $\alpha$  (probabilidad de rechazar la hipótesis nula siendo cierta), interpretándolo como la probabilidad de que la hipótesis nula sea cierta, habiendo tomado la decisión de rechazarla (Birnbaum, 1982; Vallecillos, 1994; Lecoutre, 2006; Lecoutre, Lecoutre y Poitevineau, 2001; Haller y Kraus, 2002). El mismo intercambio de condicional se hace en la interpretación del valor  $p$  (probabilidad de obtener un valor igual o más extremo al

dado, si la hipótesis es cierta) que se interpreta como probabilidad de que la hipótesis sea cierta si se obtuvo el valor dado del estadístico.

Esta interpretación incorrecta del nivel de significación y el  $p$ -valor se une, normalmente, a la confusión entre significación estadística y significación práctica, que implica significación estadística más un efecto experimental (diferencia del valor del parámetro en función de una cierta variable experimental) suficientemente elevado. Aunque la significación práctica, si el tamaño de muestra es suficiente, suele ir unida a la significación estadística, sin embargo podemos encontrar datos estadísticamente significativos con un pequeño efecto experimental, siempre que tomemos una muestra grande (Lecoutre, 1999).

Otro error de interpretación del  $p$ -valor es pensar que este valor indica la probabilidad de que el valor obtenido del estadístico se deba al azar, aunque esto no es cierto en general (Batanero, 2000). Por ejemplo, una diferencia significativa de las medias de un grupo experimental y otro de control puede ser debida a un tratamiento particular, pero también un grupo puede estar formado por individuos más inteligentes o con mejores medios. Otra confusión consiste en creer en la conservación del valor del nivel de significación cuando se realizan contrastes consecutivos en el mismo conjunto de datos (Moses, 1992).

Respecto al concepto de hipótesis un primer error es confundir la hipótesis de investigación con una de las hipótesis estadísticas (bien con la nula o con la alternativa). Chow (1996) analiza la diferencia entre ellas: Mientras que la hipótesis de investigación suele ser amplia y referirse a un constructo inobservable (por ejemplo, que el rendimiento de los estudiantes es diferente en dos grupos), la hipótesis *estadística*, hace referencia a una población de sujetos, descrita mediante un modelo matemático que se especifica por uno o varios parámetros. A pesar de esta diferencia, cuando encuentran un resultado significativo, algunos investigadores piensan que el resultado se puede extrapolar directamente a la hipótesis de investigación (Chow, 1996). En el ejemplo, supondría que si se rechaza que la puntuación media de los dos grupos de estudiantes en la prueba de rendimiento es igual, se podría deducir que el rendimiento (en general) de uno de los grupos es mayor que el del otro. Esto podría no ser cierto, puesto que la prueba usada de rendimiento podría favorecer a uno de los grupos y si se utilizase otra prueba diferente los resultados podrían variar.

Otro error frecuente entre alumnos e investigadores es la confusión entre las hipótesis nula y alternativa (Vallecillos, 1994). En el ejemplo, la hipótesis alternativa sería que la media de la distribución de puntuaciones en una prueba de rendimiento de uno de los grupos será mayor que la del otro. La hipótesis nula o de no efecto es la negación de la hipótesis alternativa (en el ejemplo, que la puntuación media obtenida en la prueba de rendimiento de los dos grupos es la misma). De acuerdo a Batanero (2000), la hipótesis nula se plantea para ser rechazada, mientras que la alternativa sería la negación de la anterior. La hipótesis nula se supone cierta y la distribución muestral del estadístico de contraste se determina aceptando que la hipótesis nula es cierta; cosa que no ocurre con la alternativa. A pesar de todas estas diferencias, Vallecillos (1994), en su trabajo en una amplia muestra de estudiantes de distintas especialidades ( $n=436$ ) encontró un 13% aproximadamente

de alumnos que confunden la hipótesis nula con la alternativa al plantear las hipótesis en problemas sencillos.

Vallecillos (1994) también encontró que aproximadamente un 20% de los estudiantes de su muestra no saben si la hipótesis del contraste se refiere al parámetro de la población o bien al estadístico muestral. Mientras que el parámetro de la población (por ejemplo la media de una distribución normal) es un valor constante y desconocido, el correspondiente estadístico (en el ejemplo, la media de una muestra tomada de dicha población) es conocido (pues obtenida la muestra se puede calcular) pero variable (ya que diferentes medias de la misma población pueden dar lugar a valores ligeramente distintos de las medias muestrales). Algunos estudiantes confunden estos dos conceptos, por lo que a veces plantean sus hipótesis utilizando el estadístico muestral, a pesar de que no tiene sentido plantear una hipótesis sobre un valor ya conocido (en el ejemplo, conocemos la media de la muestra).

Vallecillos en su trabajo planteó un problema abierto a los estudiantes de su muestra, encontrando que sólo el 26% de los participantes plantea correctamente las hipótesis. La autora describe los dos errores citados, pero no profundiza más en otros tipos de error en el planteamiento de hipótesis o en sus posibles causas. Por otro lado, realiza también una entrevista a 7 estudiantes considerados brillantes por sus profesores, indicando que todos ellos conciben el concepto de hipótesis como una afirmación sujeta a confirmación. Comprenden que las hipótesis nula y alternativa son complementarias pero tienen diferente papel en el contraste. Finalmente, aunque todos admiten en la entrevista que la hipótesis se debe referir a un parámetro, algunos de ellos plantean la hipótesis en función del estadístico muestral. Este error se describe asimismo en las investigaciones de Vallecillos y Batanero (1997) y es reportado en Castro Sotos et al. (2007).

Interesados por estos resultados y por el hecho de que la comprensión y correcto planteamiento de las hipótesis en un contraste es un requisito necesario para finalizar e interpretar correctamente todo el procedimiento, el objetivo de este trabajo es ahondar un poco más en la comprensión de este tema por parte de los estudiantes. Más concretamente, y utilizando el marco teórico que se describe a continuación, queremos analizar con mayor profundidad los posibles planteamientos incorrectos de las hipótesis en un problema de contraste elemental.

### *Marco teórico*

En este trabajo nos basamos en ideas teóricas propuestas en el enfoque onto-semiótico (Godino y Batanero, 1998; Godino, Batanero y Roa, 2005; Godino, Batanero y Font, 2007) en los que se sugiere que el significado de los objetos matemáticos o estadísticos (por ejemplo, los conceptos de hipótesis nula y alternativa) es una entidad compleja, en la que intervienen los siguientes tipos de objetos matemáticos primarios:

- *Situaciones-problemas*, de donde surge el objeto: El concepto de hipótesis estadística surgirá de problemas de comparación de dos o más poblaciones, de estimación de parámetros o de toma de decisiones.

- *Lenguaje*: términos, expresiones, notaciones, gráficos que se usan en el trabajo matemático (por ejemplo los símbolos usados para denotar los parámetros  $\mu, \sigma$  o los usados para hipótesis nula  $H_0$  y alternativa  $H_1$ )
- *Conceptos*: por ejemplo, población y muestra, estadístico y parámetro, región crítica y de aceptación.
- *Propiedades*: por ejemplo, que las hipótesis nula y alternativa son complementarias o que las hipótesis se formulan en función del parámetro.
- *Procedimientos*; como los requeridos para construir las regiones críticas y de aceptación.
- *Argumentos*: usados para justificar o explicar a otra persona las proposiciones y procedimientos.

Para un objeto matemático (en este caso la hipótesis estadística) Godino y colaboradores diferencian entre significado institucional y personal. El significado institucional incluye las prácticas matemáticas que una institución de enseñanza intenta transmitir al estudiante, mientras que el significado personal estaría formado por las prácticas matemáticas adquiridas por el estudiante, alguna de las cuáles podrían no coincidir con las pretendidas en la institución.

En las prácticas matemáticas se requiere un uso continuo del lenguaje matemático, pues los objetos matemáticos son inmateriales. Godino y Batanero (1998) señalan que, en las prácticas matemáticas, intervienen objetos ostensivos (símbolos, gráficos, etc.) y no ostensivos (que evocamos al hacer matemáticas), que son representados en forma textual, oral, gráfica o simbólica. En el trabajo matemático los símbolos (significantes) remiten a entidades conceptuales (significados). Estas representaciones tienen mucha importancia para facilitar la enseñanza y el aprendizaje, pero a veces causan dificultades en los estudiantes. Godino, Batanero y Font (2007) toman de Eco (1995) la noción de función semiótica como una "correspondencia entre conjuntos", que pone en juego tres componentes:

- Un plano de expresión (objeto inicial, considerado frecuentemente como el signo);
- Un plano de contenido (objeto final, considerado como el significado del signo, esto es, lo representado, lo que se quiere decir, a lo que se refiere un interlocutor);
- Un criterio o regla de correspondencia (esto es un código interpretativo que relaciona los planos de expresión y contenido).

Esta idea de función semiótica destaca el carácter esencialmente relacional de la actividad matemática y sirve para explicar algunas dificultades y errores de los estudiantes. Godino, Batanero y Font (2007) denominan *conflicto semiótico* a las interpretaciones de expresiones matemáticas por parte de los estudiantes que no concuerdan con las que el profesor trata de transmitir. Los autores indican que estos conflictos semióticos producen equivocaciones en los estudiantes, que no son debidos a falta de conocimiento, sino a una interpretación incorrecta de expresiones matemáticas.

En este trabajo utilizaremos el método de análisis semiótico propuesto por estos autores, para analizar las respuestas incorrectas de los estudiantes de Psicología en el planteamiento de hipótesis estadísticas. Este análisis consiste en la identificación de las prácticas matemáticas de los estudiantes al tratar de plantear las hipótesis, así como de los objetos y procesos matemáticos implicados. Como resultado se identificarán algunos conflictos semióticos de estos estudiantes, que se producen al realizar una función semiótica no adecuada desde el punto de vista institucional.

### 3. Método

La muestra estuvo formada por 224 alumnos de segundo año de la Licenciatura en Psicología de la Universidad de Huelva (edades comprendidas en su mayor parte entre los 19 y 20 años). Los datos fueron recogidos en dos cursos académicos sucesivos (2009-2010 y 2010 – 2011) dentro de la asignatura Análisis de Datos 2. Los estudiantes habían cursado el primer año la asignatura de Análisis de Datos 1 (que recoge conceptos elementales de estadística descriptiva y probabilidad) y en la asignatura de Análisis de Datos II se impartieron conceptos de muestreo, estimación de intervalos de confianza y contraste de hipótesis sobre medias y proporciones, así como análisis de varianza. Los estudiantes participantes estaban habituados a resolver problemas de contraste de hipótesis.

Como parte de una evaluación de la asignatura se les propuso el problema presentado en la Figura 1. La finalidad de la pregunta es evaluar la comprensión del estudiante de los conceptos de hipótesis nula y alternativa y su competencia para identificar las hipótesis adecuadas en esta situación. Para ello han de identificar la población y muestra en este problema, el parámetro poblacional y el estadístico de contraste, interpretar el enunciado para decidir si se trata de un contraste unilateral ó bilateral y finalmente escribir sus hipótesis usando la notación adecuada.

*Problema:* Se sabe por diversos trabajos de investigación que los niños de seis años tienen una velocidad lectora media de 40 palabras por minuto, con varianza igual a 16. Un profesor quiere saber si los niños de su clase se sitúan o no en la media de palabras por minuto. Para ello mide la velocidad de lectura en los 25 niños de su clase, obteniendo una media de 43 palabras por minuto.  
Define las hipótesis estadísticas adecuadas para realizar este contraste

Figura 1. Tarea planteada a los estudiantes de la muestra

Los estudiantes resolvieron la tarea por escrito e individualmente, sin poder consultar sus apuntes. Recogidos los datos, se llevó a cabo un análisis cualitativo en que, mediante un proceso cíclico e inductivo se compararon las respuestas semejantes entre sí, para llegar a una categorización. El proceso se repitió varias veces, y fue revisado independientemente por los tres autores del trabajo, discutiendo los casos de desacuerdo para mejorar la fiabilidad del proceso.

En primer lugar, se clasificaron las respuestas recogidas como correctas, e incorrectas. Dentro de las incorrectas se han diferenciado dos grandes categorías: aquellas respuestas en que las hipótesis se establecen en función del parámetro de la población; y aquellas en las que las hipótesis se plantean en función del estadístico muestral, pues quisimos diferenciar estos dos tipos de respuestas, encontradas por Vallecillos (1994) en su trabajo. A continuación, dentro de las respuestas incorrectas se diferenciaron diversas categorías, teniendo en cuenta la

confusión entre contraste unilateral o bilateral, la confusión entre un contraste sobre un único parámetro y un contraste de comparación de dos parámetros y otros tipos de errores.

En lo que sigue presentamos estas categorías, mostrando y comentando un ejemplo en cada una de ellas. Para las respuestas correctas y algunas de las incorrectas, se muestra con detalle el análisis semiótico (que se realizó para todas las categorías pero que no se incluye en este trabajo por razones de espacio). En dicho análisis semiótico, utilizado, por ejemplo, en Godino, Font, Wilhelmi y Arrieche (2009), se reconstruye el proceso de razonamiento matemático que ha seguido el alumno para dar la respuesta, detallando las principales funciones semióticas establecidas por el alumno, como parte de dicho proceso y resaltando cuáles de dichas funciones semióticas son incorrectas (desde el punto de vista institucional), poniendo de manifiesto un conflicto semiótico del estudiante. Se hace una reconstrucción algo menos profunda del proceso de razonamiento seguido en el resto de las respuestas, destacando asimismo, los conflictos semióticos. Finalmente presentamos y discutimos los resultados.

#### 4. Resultados y discusión

##### *Análisis semiótico de las respuestas correctas*

*C. Hipótesis bien planteadas y notación correcta.* En esta categoría el alumno plantea las hipótesis nula y alternativa correctas para un contraste bilateral sobre la media de la población. En la Tabla 1 se muestra un ejemplo de esta categoría desarrollado por uno de los estudiantes y se detalla un análisis semiótico. Observamos del análisis, que el estudiante interpreta correctamente el enunciado del problema traduciendo su enunciado, que presenta una situación de investigación, a un enunciado estadístico, identificando correctamente los datos dados en el problema. Reconoce que se trata de un problema de contraste sobre un único parámetro en una población y logra definir correctamente las hipótesis estadísticas nula y alternativa que surgen de la tarea. Ello implica una diferenciación entre los conceptos de población y muestra, así como los de parámetro y estadístico, y la elección del parámetro adecuado sobre el cual se plantean las hipótesis (la media poblacional).

Por otro lado, es capaz de diferenciar en el enunciado del problema el valor hipotético de la media poblacional que se quiere contrastar (40 palabras por minuto) y el dato dado sobre el valor la media de la muestra en el estudio (43 palabras en los 25 niños de la clase). También sabe discriminar que se trata de una prueba bilateral, para lo cual ha de interpretar la frase del enunciado “quiere saber si los niños de su clase se sitúan o no en la media” como equivalente a que se desea saber si se puede admitir que la media de la población es o no diferente del valor hipotético, sin indicación del signo de la diferencia. El alumno discrimina el diferente papel que juegan en el contraste la hipótesis nula y alternativa (mientras que la hipótesis nula se plantea para ser rechazada, el interés del investigador es apoyar la hipótesis alternativa); reconoce que el conjunto de valores del parámetro en la hipótesis nula y la alternativa han de cubrir el espacio paramétrico (por tanto han de ser complementarias) y en el contraste bilateral, la hipótesis nula es puntual. Finalmente

muestra competencia en el uso de la notación matemática, tanto para las hipótesis nula y alternativa, la media poblacional y los símbolos de igualdad y desigualdad.

**Tabla 1. Análisis semiótico de una respuesta correcta**

Expresión	Contenido
$H_0 \equiv \mu_1 = 40$ $H_1 \equiv \mu_1 \neq 40$	<ul style="list-style-type: none"> <li>- El alumno lee el enunciado (proceso de interpretación) e identifica correctamente que el parámetro a contrastar es la media poblacional (particulariza al problema los conceptos de parámetro, población y media poblacional).</li> <li>- Identifica correctamente el valor hipotético del parámetro (particularización de un concepto).</li> <li>- Identifica el problema como contraste de hipótesis sobre una media (reconoce un tipo de problema y las prácticas matemáticas necesitadas en su solución).</li> <li>- Reconoce en la situación un contraste bilateral (reconoce un subtipo dentro del tipo de problemas anterior).</li> <li>- Traduce la expresión “se sitúan en la media” a notación matemática <math>\mu = 40</math> (proceso de interpretación y cambio de representación; particularización del concepto “igualdad matemática”).</li> <li>- Traduce la expresión “no se sitúan en la media” a notación matemática <math>\mu \neq 40</math> (proceso de interpretación y cambio de representación; particularización del concepto “desigualdad matemática”).</li> <li>- Discrimina entre hipótesis nula y alternativa (reconoce las propiedades matemáticas asociadas y las particulariza a la situación).</li> <li>- Expresa las hipótesis en notación adecuada (particularización de un concepto y proceso de representación).</li> <li>- Reconoce que hipótesis nula es puntual (aplica una propiedad); lo expresa mediante la igualdad (proceso de representación)</li> <li>- Reconoce que la hipótesis nula es la contraria a la que el investigador quiere probar (propiedad).</li> <li>- Reconoce que la hipótesis nula y alternativa son complementarias; por ello plantea la hipótesis alternativa mediante una desigualdad que excluye el valor de la hipótesis nula.</li> </ul>

Como observamos en el análisis semiótico, el estudiante ha de poner en relación diferentes conceptos, propiedades y procedimientos (población, muestra, estadístico, parámetro), así como aplicarlos, mediante un proceso de particularización al contexto del problema. Debe realizar procesos matemáticos de interpretación (del enunciado y datos), reconocimiento (de conceptos matemáticos y sus propiedades), particularización (de dichos conceptos, propiedades o procedimientos a la situación del enunciado) y expresión matemática (de las hipótesis, los valores hipotéticos del parámetro en cada una de ellas, la igualdad y desigualdad. Este análisis sugiere también la complejidad de un proceso que es aparentemente simple nos servirá para explicar los errores de los estudiantes, que se producen por fallos en la interpretación del enunciado, falta de reconocimiento de objetos o procesos o fallos de particularización o expresión matemática.

### *Respuestas incorrectas que plantean las hipótesis sobre el parámetro poblacional*

Seguidamente se describen las respuestas que, siendo incorrectas, muestran la discriminación entre parámetro y estadístico, discriminación que no es sencilla según Schuyten (1991). Los errores encontrados dentro de este grupo de estudiantes se producen porque (a) se confunde el contraste unilateral y bilateral; (b)

en lugar de plantear un problema de contraste de la media en una única población, se plantea un contraste de comparación de dos medias en poblaciones diferentes; o (c) las dos hipótesis no cubren el espacio paramétrico.

11. *Plantea las hipótesis sobre la media de la población, pero define un contraste unilateral.* En esta categoría hemos clasificado a todos los estudiantes que emplean una prueba de hipótesis de tipo unilateral (de una sola cola), tanto si toman la hipótesis alternativa a la derecha como hacia la izquierda de la nula. Estos alumnos usan simbología adecuada tanto para la hipótesis nula como para la alternativa, el parámetro elegido es el correcto, y el valor sobre el cual se basa la conjetura también es correcto. En la Tabla 2, se muestra un ejemplo de este tipo de respuesta. Aunque el alumno reconoce el parámetro y lo diferencia del estadístico, no interpreta correctamente el enunciado, y aparece un primer conflicto, pues no relaciona adecuadamente la expresión “igual o distinto a la media” como expresión verbal de un contraste bilateral y las correspondientes hipótesis. Ello le lleva a considerar una prueba unilateral derecha, aunque utiliza igualdad para la hipótesis nula, es decir, reconociendo que tiene que ser puntual. También establece el sentido de la hipótesis alternativa de acuerdo a los datos, es decir, reconoce que esta hipótesis es la que le interesa al investigador probar, lo que indica que comprende la lógica del contraste, basada en la refutación de la hipótesis nula (Batanero, 2000). Otro conflicto latente en esta respuesta es no comprender que las hipótesis nula y alternativa han de ser complementarias y cubrir el espacio paramétrico.

**Tabla 2. Análisis semiótico de un ejemplo de contraste unilateral**

Expresión	Contenido
$H_0 \equiv \mu_1 = 40$	<ul style="list-style-type: none"> <li>- Al igual que en la categoría C, el alumno lee el enunciado e identifica correctamente que el parámetro a contrastar es la media poblacional; también identifica correctamente el valor hipotético del parámetro y el problema como contraste de hipótesis sobre una media</li> <li>- Discrimina entre hipótesis nula y alternativa; reconoce asimismo que hipótesis nula es puntual, expresándolo mediante la igualdad</li> <li>- Expresa las hipótesis en notación adecuada (particularización de un concepto y proceso de representación).</li> <li>- Reconoce que la hipótesis nula es la contraria a la que el investigador quiere probar (propiedad).</li> </ul>
$H_1 \equiv \mu_1 > 40$	<ul style="list-style-type: none"> <li>- Aparece un <i>conflicto</i> de interpretación del enunciado al no traducir la expresión “no se sitúan en la media” a notación matemática <math>\mu \neq 40</math>. Esto lleva a proponer un contraste unilateral, (fallo al reconocer el campo de problemas)</li> <li>- Sin embargo reconoce que la hipótesis alternativa es la que interesa probar al investigador, pues establece la desigualdad en el sentido de los datos (particularización de una propiedad)</li> <li>- Un segundo <i>conflicto</i> es no reconocer que la hipótesis nula y alternativa son complementarias (fallo en reconocer una propiedad)</li> <li>- Expresa las dos hipótesis, la igualdad y desigualdad en notación adecuada (conceptos y proceso de expresión)</li> </ul>

12. *Plantea hipótesis sobre la diferencia de dos medias poblacionales, bilateral.* En esta categoría están los estudiantes que, habiendo dado una notación correcta tanto a la hipótesis nula como la alternativa, han especificado la prueba de hipótesis como si tuviesen que comparar dos medias poblacionales, con una prueba bilateral, aunque sólo hay una población en los datos. Han usado como parámetros la media

poblacional para cada una de las poblaciones supuestas. Un ejemplo se presenta y analiza en la Tabla 3. En dicho ejemplo, el alumno realiza una interpretación incorrecta del enunciado, asumiendo que existen dos poblaciones, la hipotética y aquella de donde se tomó la muestra de alumnos. El alumno confunde una parte (muestra) con la población que es un todo. En este sentido podemos recordar la opinión de White (1980) acerca de la dificultad que tienen algunos investigadores para identificar la población bajo estudio al aplicar la inferencia. Por otro lado, si el enunciado correspondiese a la diferencia de medias en dos poblaciones, se debieran haber dado datos sobre dos muestras diferentes; pero el alumno no es capaz de reconocer que sin estos datos no podría resolverse el problema. En esta conducta se observa una práctica que, de acuerdo a Díaz (2007), es errónea y consiste en fijar las hipótesis después de recoger los datos, pues se toma como hipótesis un valor obtenido a partir de los datos. La autora indica que en estos casos el nivel de significación real del estudio podría no corresponder al nivel fijado.

Asociado al conflicto anterior, el estudiante confunde también el estadístico (media muestral) con un parámetro (media de una segunda población). Este resultado apoya lo expuesto por Schuyten (1991), quien indica que los estudiantes confunden los diversos planos en que se aplica un mismo concepto en inferencia (en el problema, el concepto de media, se aplica en dos planos diferentes: la media muestral y la poblacional). Como consecuencia de todo lo anterior, el alumno confunde el campo de problemas, planteando un contraste de hipótesis sobre la diferencia de dos medias. La notación al plantear estas hipótesis sería adecuada, y el alumno también discrimina la hipótesis nula como puntual y la hipótesis alternativa como aquella que quiere probar. Además, el conjunto de valores supuesto en las dos hipótesis cubren el espacio paramétrico, es decir, las hipótesis son complementarias.

**Tabla 3. Análisis semiótico de un ejemplo de contraste de comparación de dos medias**

Expresión	Contenido
$H_0 \equiv \mu_1 = \mu_2$	<ul style="list-style-type: none"> <li>- El alumno realiza una interpretación incorrecta del enunciado, asumiendo que existen dos poblaciones, la hipotética y aquella de donde se tomó la muestra de alumnos (proceso incorrecto de interpretación).</li> <li>- Un primer <i>conflicto</i> es la confusión entre población y muestra, tomando la muestra de niños de la clase como una segunda población (confusión de conceptos).</li> <li>- Otro <i>conflicto</i> relacionado con el anterior consiste en confundir la media muestral que es un estadístico con una segunda media poblacional, que sería un parámetro (discriminación inadecuada de conceptos).</li> </ul>
$H_1 \equiv \mu_1 \neq \mu_2$	<ul style="list-style-type: none"> <li>- Todo ello causa un nuevo <i>conflicto</i> al confundir el contraste adecuado (contraste sobre una media) con otro inadecuado (contraste de diferencia de medias de dos poblaciones) (confusión de campo de problemas).</li> <li>- El alumno discrimina la hipótesis nula como puntual y la hipótesis alternativa como aquella que quiere probar. Plantea asimismo hipótesis complementarias que cubren el espacio paramétrico (particularización correcta de propiedades y discriminación de conceptos).</li> <li>- La notación para las hipótesis y la igualdad /desigualdad sería adecuada (expresión y particularización de conceptos).</li> </ul>

*13. Plantea la hipótesis como de diferencia de dos medias poblacionales, unilateral.* En esta categoría hemos reunido a los estudiantes que habiendo usado notación correcta tanto para la hipótesis nula como la alternativa, han establecido

hipótesis como si se tratara de una prueba de dos medias poblacionales, contraste unilateral. Un ejemplo correspondiente a esta categoría sería el siguiente:

$$H_0 \equiv \mu_1 \geq \mu_2$$

$$H_1 \equiv \mu_1 < \mu_2$$

En este ejemplo, cuyo análisis semiótico no reproducimos, pues es muy similar al de la categoría I2, aparecen los conflictos ya señalados (confusión de la muestra con una segunda población hipotética, del estadístico y parámetro y en consecuencia del campo de problemas). Se añade un conflicto que ya apareció en la categoría I1, y es la interpretación incorrecta que lleva a la selección de un contraste unilateral (en lugar de bilateral). En este ejemplo, sin embargo, las hipótesis planteadas son complementarias y se cubre el espacio paramétrico.

14. Se plantea una hipótesis alternativa puntual, y por tanto no se cubre el espacio paramétrico. En esta categoría agrupamos a los estudiantes que plantean hipótesis puntuales, tanto para la nula, como para la alternativa. Un ejemplo se presenta y analiza en la Tabla 4. Aunque el estudiante interpreta correctamente el enunciado, en relación con la hipótesis nula, identificando que se refiere a la media de la población, así como el valor hipotético y usado la notación adecuada para la hipótesis nula y alternativa, presenta diferentes conflictos. En primer lugar ha escogido un valor puntual en la hipótesis alternativa y, por tanto, no llega a cubrir el espacio paramétrico al establecer ambas hipótesis, que no son complementarias. Por otro lado, toma como valor de la hipótesis alternativa el valor de la media muestral; por tanto no reconoce una propiedad: que las hipótesis se plantean en función de los parámetros y no de los estadísticos. Subyacente a este podría haber una confusión entre media muestral y media poblacional (o bien en forma más general, entre estadístico y parámetro), confusión ya descrita por Schuyten, 1991.

**Tabla 4. Análisis semiótico de un ejemplo con hipótesis alternativa puntual**

Expresión	Contenido
$H_0 \equiv \mu = 40$ $H_1 \equiv \mu = 43$	<ul style="list-style-type: none"> <li>- Al igual que en la categoría C1, el alumno lee el enunciado e identifica correctamente que el parámetro a contrastar es la media poblacional; también identifica correctamente el valor hipotético del parámetro y el problema como contraste de hipótesis sobre una media.</li> <li>- Plantea la hipótesis nula, con notación adecuada, reconociendo que es la contraria a la que el investigador quiere probar (particularización de una propiedad; proceso correcto de representación).</li> <li>- Aparece una interpretación errónea del enunciado al no traducir la expresión “no se sitúan en la media” a notación matemática <math>\mu \neq 40</math>. Ello lleva a un <i>conflicto</i> en la identificación de la hipótesis alternativa.</li> <li>- Asume que el valor dado de la media muestral es el valor hipotético bajo la hipótesis alternativa; aunque reconoce que dicha hipótesis es la que interesa probar al investigador. Ello le lleva a plantear una hipótesis alternativa puntual (<i>conflicto</i> en un proceso de interpretación)</li> <li>- Otro <i>conflicto</i> es no reconoce que las hipótesis se plantean en función de los parámetros y no de los estadísticos (particularización incorrecta de una propiedad)</li> <li>- Podría haber un <i>conflicto</i> subyacente entre población y muestra o estadístico-parámetro (conflicto en la confusión de conceptos)</li> <li>- Otro <i>conflicto</i> es no reconocer que la hipótesis nula y alternativa son complementarias (fallo en reconocer una propiedad)</li> </ul>

15. *Plantea la hipótesis nula y alternativa mediante intervalos no disjuntos*, que, además no cubren el espacio paramétrico. Un ejemplo en esta categoría, cuyo análisis semiótico no incluimos, por ser muy similar a la I4 es, el siguiente:

$$H_0 \equiv \mu > 40$$

$$H_1 \equiv \mu \geq 43$$

Estos estudiantes han identificado correctamente que se trata de un contraste sobre la media de una única población, pero no reconocen que la hipótesis nula ha de ser puntual. Por otro lado, toman como valor de la hipótesis alternativa el valor de la media muestral; por tanto no reconocen que las hipótesis se plantean en función de los parámetros y no de los estadísticos. Como hemos indicado, esto puede implicar la confusión descrita por Schuyten (1991) entre media muestral y media poblacional (o bien en forma más general, entre estadístico y parámetro). No identifican que se trata de un contraste bilateral; pues se plantea la hipótesis alternativa usando únicamente los valores mayores que uno hipotético. Más aún, aparece un nuevo conflicto no presente en las categorías anteriores, pues usa la misma dirección en la desigualdad en las hipótesis nula y alternativa, lo que implica, por un lado, que dichas hipótesis no son complementarias y por otro, que no se cubre el espacio paramétrico. La notación utilizada por el estudiante es correcta.

16. *Confunde la variable al identificar la hipótesis*. Incluimos a continuación un ejemplo, en el cuál el alumno reconoce que se trata de un problema de contraste sobre la media de la población y más aún que se trata de un contraste bilateral, pues establece sus hipótesis nula y alternativa en forma complementaria, siendo la hipótesis nula puntual y cubriendo el espacio paramétrico:

$$H_0 \equiv \mu = 6$$

$$H_1 \equiv \mu \neq 6$$

El estudiante usa la notación adecuada para ambas hipótesis, pero confunde la variable de interés en el estudio, pues proponen un contraste sobre la edad de los alumnos en la muestra (fallo en el proceso de interpretación del enunciado). Por otro lado, el alumno no perciba que la edad de los alumnos es un dato constante en el problema; por tanto no necesita ser contrastado. Puesto que la edad media es un estadístico muestral, de nuevo aparece el conflicto consistente en confundir parámetro y estadístico (o población y muestra).

### *Categorías de respuestas incorrectas que usan explícitamente la media muestral en el planteamiento de las hipótesis*

Otra serie de respuestas plantea las hipótesis directamente en base a la media muestral. Este error fue descrito por Vallecillos (1994) en su estudio, así como en Vallecillos y Batanero (1997). Aunque en algunas categorías anteriores (I4, I6) resaltamos que los alumnos podrían tener esta confusión, en las que siguen los estudiantes la muestran en forma explícita, al usar conscientemente la notación correspondiente a la media muestral en el establecimiento de sus hipótesis. A continuación describimos algunas categorías en este apartado.

17. *Plantea como hipótesis la igualdad entre media muestral y poblacional, usando un test bilateral* (ver ejemplo y análisis en Tabla 5). En esta categoría hemos

clasificado a los estudiantes que al establecer las hipótesis estadísticas igualan la media poblacional ( $\mu$ ) a la muestral ( $\bar{x}$ ), usando explícitamente el símbolo correcto de la media muestral. El estudiante ha interpretado el enunciado, identificando correctamente que se trata de una prueba bilateral sobre el parámetro media ( $\mu$ ). Plantea una hipótesis nula puntual y una alternativa complementaria, que en conjunto cubren el espacio paramétrico. Por tanto discrimina las propiedades de estas dos hipótesis, eligiendo, además, como alternativa la que desea probar. Sin embargo, no es capaz de identificar el valor hipotético del parámetro a partir del enunciado (43) y establece la hipótesis como igualdad o desigualdad con la media muestral. No queda claro de la respuesta si el alumno ha identificado o no el valor numérico particular que se proporciona en la tarea para la media muestral (43). En todo caso, no tiene sentido hipotetizar que la media de la población sea exactamente igual a la obtenida en la muestra, pues, por un lado, la media muestra es una variable aleatoria, y la respuesta del estudiante implica que la concibe como constante (no reconocimiento de una propiedad). Por otro lado, al considerar la media muestral como constante, podría no percibir la distribución muestral del estadístico, un concepto importante para comprender la inferencia según Harradine, Batanero y Rossman (2011). El alumno usa una notación adecuada al plantear sus hipótesis.

**Tabla 5. Análisis semiótico de ejemplos en la categoría I7**

Expresión	Contenido
$H_0 \equiv \mu = \bar{x}$ $H_1 \equiv \mu \neq \bar{x}$	<ul style="list-style-type: none"> <li>- El alumno lee el enunciado (proceso de interpretación) e identifica correctamente que el parámetro a contrastar es la media poblacional (particulariza al problema los conceptos de parámetro, población y media poblacional).</li> <li>- Identifica el problema como contraste de hipótesis sobre una media (reconoce un campo de problema).</li> <li>- Reconoce en la situación un contraste bilateral (reconoce un subtipo dentro del campo de problemas anterior).</li> <li>- <i>Conflicto</i> al no identificar el valor hipotético del parámetro (particularización de un concepto).</li> <li>- <i>Conflicto al plantear la hipótesis como igualdad entre la media poblacional y la muestral.</i> Puede encubrir otro <i>conflicto</i> consistente en no apreciar la variabilidad de la media muestra, es decir, el hecho de que es una variable aleatoria y no una constante. Además, aparece la confusión entre media muestral y poblacional.</li> <li>- Discrimina entre hipótesis nula y alternativa (reconoce las propiedades matemáticas asociadas y las particulariza a la situación).</li> <li>- Expresa las hipótesis en notación adecuada (particularización de conceptos y proceso de representación).</li> <li>- Reconoce que hipótesis nula es puntual (aplica una propiedad); lo expresa mediante la igualdad (proceso de representación); asimismo reconoce que la hipótesis nula es la contraria a la que el investigador quiere probar (propiedad) y que las hipótesis son complementarias.</li> </ul>

18. *Plantea como hipótesis la igualdad entre media muestral y poblacional, usando un test unilateral.* Un ejemplo en esta categoría, muy similar a la anterior (por lo que no repetimos el análisis semiótico) es el siguiente:

$$H_0 \equiv \mu \geq \bar{x}$$

$$H_1 \equiv \mu < \bar{x}$$

Como en la categoría I7, el alumno explícitamente establece las hipótesis estadísticas comparando la media poblacional ( $\mu$ ) a la muestral ( $\bar{x}$ ). El estudiante ha interpretado el enunciado, identificando correctamente que se trata de una prueba sobre el parámetro media ( $\mu$ ). Plantea también una hipótesis nula y una alternativa complementaria, que en conjunto cubren el espacio paramétrico, eligiendo, además, como alternativa la que desea probar. Tampoco identifica el valor hipotético del parámetro a partir del enunciado, ni queda claro de la respuesta si el alumno ha identificado o no el valor numérico particular de la media muestral (43). Presenta por tanto los conflictos consistentes en considerar la media muestral como constante y no apreciar su distribución. Además se une el conflicto señalado en otras categorías de confundir el campo de problemas (contraste bilateral con unilateral). El alumno usa una notación adecuada al plantear sus hipótesis.

*I9. Plantea como hipótesis la igualdad de la media de la muestra con el valor hipotético del parámetro en la población.* Esta categoría reúne varios de los conflictos ya señalados en la I7 e I8, por lo que no repetimos el análisis semiótico. Un ejemplo es el siguiente:

$$H_0 \equiv \bar{x} = 40$$

$$H_1 \equiv \bar{x} \neq 40$$

Como en las categorías I7 e I8, el alumno utiliza correcta y explícitamente el símbolo de la media muestral ( $\bar{x}$ ) al establecer sus hipótesis. El estudiante ha interpretado el enunciado, identificando que se trata de una prueba sobre la media, pero no sabemos si discrimina o no la media muestral (estadístico) de la poblacional (parámetro), es decir, el conflicto del estudiante podría ser únicamente notacional y no conceptual, aunque esto no podemos deducirlo de su respuesta. El estudiante ha reconocido que se trata de un contraste bilateral y plantea una hipótesis nula y una alternativa complementaria, que en conjunto cubren el espacio paramétrico, eligiendo, además, como alternativa la que desea probar. Ha reconocido correctamente el valor hipotético del parámetro a partir del enunciado, aunque, como hemos indicado, no queda claro si lo asigna realmente al parámetro o al estadístico. El alumno usa una notación adecuada al plantear sus hipótesis.

*I10. Plantea la hipótesis como contraste de diferencia de dos medias muestrales.* Esta categoría tiene relación con la I2 (pues el alumno identifica incorrectamente el campo de problemas como comparación de dos medias) y con las I7 a I9 (pues explícitamente usa la notación de media muestral). No realizamos en consecuencia el análisis completo de la categoría, sino sólo un comentario resumido de las diferencias con las anteriores. Un ejemplo es el siguiente:

$$H_0 \equiv \bar{x}_1 = \bar{x}_2$$

$$H_1 \equiv \bar{x}_1 \neq \bar{x}_2$$

Como en la categoría I2, el estudiante interpreta incorrectamente, del enunciado, que tiene que comparar dos medias. Identifica correctamente que se trata de una prueba bilateral. Posiblemente, como en I2, el alumno asume

incorrectamente que existen dos poblaciones, la hipotética y aquella de donde se tomó la muestra de alumnos. Por lo cual muestra la confusión ya señalada de población y muestra (estadístico y parámetro) y no reconoce que con los datos del problema no se puede realizar un contraste de comparación de dos medias. Además, se une el conflicto señalado en las categorías I7, I8 e I9 consistente en establecer las hipótesis estadísticas en base a la media muestral ( $\bar{x}$ ). En consecuencia podría presentar los conflictos consistentes en considerar la media muestral como constante y no apreciar su distribución o bien podría simplemente tratarse de un conflicto notacional. La notación al plantear estas hipótesis sería adecuada, y el alumno también discrimina la hipótesis nula como puntual y la hipótesis alternativa como aquella que quiere probar. Además, las hipótesis son complementarias.

En la Tabla 6 presentamos las frecuencias y porcentajes de respuestas en cada una de las categorías. Observamos que la respuesta más frecuente es plantear correctamente las hipótesis estadísticas, habiendo sido estos estudiantes, por tanto capaces de interpretar el enunciado, identificar el campo de problemas, reconocer el valor hipotético del parámetro y escribir las hipótesis adecuadas con una notación correcta. No obstante, este grupo supone sólo un 33% de los estudiantes, lo que es preocupante, pues este primer apartado va a condicionar el resto del problema.

**Tabla 6. Frecuencias (y porcentajes) de respuestas para cada categoría**

Parámetro usado para definir la hipótesis	Categorías	Frecuencia	%
Media Población	C. Correctas	74	33
	I1. Contraste unilateral	13	5,8
	I2. Diferencia medias poblacionales. Bilateral	23	10,3
	I3. Diferencia medias poblacionales. Unilateral	5	2,2
	I4. Hipótesis alternativa puntual	17	7,7
	I5. Intervalos no disjuntos	2	1
Media muestral	I6. Confusión en variable	1	0,4
	I7. Compara media poblacional y muestral. Bilateral	33	14,7
	I8. Compara media poblacional y muestral. Unilateral	3	1,3
	I9. Compara media muestral con valor hipotético	9	4
	I10. Diferencia entre dos medias muestrales	1	0,4
	I11. No relacionadas con la tarea	6	2,7
	Sin responder	37	16,5
	Total	224	100,

Se han clasificado a las respuestas incorrectas relacionadas con la tarea en dos grandes grupos. En primer lugar, hemos considerado las respuestas incorrectas en las que el estudiante usa el parámetro poblacional para establecer las hipótesis estadísticas (27,4% de estudiantes). Estos estudiantes comprenden que las hipótesis se plantean en términos de parámetros, discriminando adecuadamente los conceptos de estadístico y parámetro. Un segundo grupo de estudiantes (23,1%) no

realiza esta discriminación y usan el estadístico muestral al establecer las hipótesis, mostrando el error señalado por Schuyten (1991).

Un 19,2% de estudiantes no responde el problema o da respuestas no relacionadas (por ejemplo, indica que no se conoce la varianza de la población, pero no plantea hipótesis) y el porcentaje total de alumnos que plantea incorrectamente las hipótesis es 50,5%. Este porcentaje es algo mayor al obtenido por Vallecillos (1994) en una pregunta sobre el planteamiento de la hipótesis (41,9% de respuestas incorrectas), aunque en la muestra de la autora se incluían estudiantes de varias especialidades, en algunas de las cuáles (matemáticas, informática) la formación de los alumnos podría ser mayor. En todo caso el porcentaje de respuestas incorrectas es demasiado alto y podría ser decisivo a la hora de la resolución del problema.

En el análisis semiótico llevado a cabo, se han explicado las respuestas incorrectas en términos de conflictos semióticos, que, de acuerdo a nuestro marco teórico aparecen cuando un estudiante asigna a una expresión u objeto matemático un significado personal que no está de acuerdo con el significado institucional que el profesor trata de transmitir. Más en concreto se han encontrado los siguientes conflictos:

#### *Conflictos de reconocimiento del campo de problemas*

- *Confusión entre contraste unilateral y bilateral* (que aparece en las categorías I1, I3, I5, I8). Un 10,3% de los estudiantes presenta este conflicto, que implica no reconocimiento del campo de problemas que sería adecuado para su solución (contraste bilateral sobre la media de una población). Ello es debido a no haber sido capaz de interpretar correctamente la frase “se sitúan o no sobre la media”, dada en el enunciado en lenguaje coloquial y representarla en un lenguaje simbólico. Es decir, no se establece correctamente la correspondencia entre la frase dada y el contraste pedido.
- *Reconocer incorrectamente el problema como un contraste de comparación de dos medias* (que aparece en las categorías I2, I3, I10), presente en el 12,9% de los estudiantes. El alumno asume que existen dos poblaciones, la hipotética y aquella de donde se tomó la muestra de alumnos sin reconocer que, para resolver dicho problema se debieran haber dado datos sobre dos muestras diferentes. Pensamos que en este conflicto interviene la dificultad que según White (1980) se tiene para identificar la población bajo estudio al aplicar la inferencia.

#### *Conflictos de reconocimiento de propiedades de las hipótesis*

- *Conflicto al plantear una hipótesis alternativa puntual* (que aparece en la categoría I4) con un total de 7,7% de respuestas. En esta conducta subyace una confusión entre los diferentes papeles que en el contraste estadístico juegan las dos hipótesis, pues la hipótesis alternativa se debe plantear como negación de la nula, y ser complementarias, cubriendo el espacio paramétrico para poder tomar una decisión.
- *Conflicto al definir hipótesis no complementarias*, que, por tanto, como en el caso anterior no cubren el espacio paramétrico y podrían llevar a no poder tomar una decisión (que aparece en las categorías I4, I5; en total 8,7% de respuestas).

- *Dos estudiantes plantean hipótesis disjuntas (I5), y por tanto no reconocen que una hipótesis ha de ser negación de la otra. En este caso, tampoco se podría tomar una decisión adecuada pues hay valores comunes para ambas hipótesis. Observamos que en ninguno de estos tres últimos conflictos podría cumplirse el principal objetivo de un contraste de hipótesis que según Valera, Sánchez, Marín y Velandrino (1998) es tomar una de las dos siguientes decisiones: o aceptar la hipótesis nula (sin llegar a confirmar el postulado establecido en la alternativa) o bien rechazar la hipótesis nula, aceptando la alternativa.*
- *Plantear las hipótesis en función del estadístico muestral (un 28,6% de estudiantes en las respuestas I4, I6, I7, I8, I9, I10), no reconociendo que el estadístico es una variable aleatoria y por tanto, tiene una distribución de probabilidad asociada.*

#### *Conflictos de confusión de otros objetos que intervienen en el contraste*

- *Confusión entre el estadístico muestral y el parámetro correspondiente a la media poblacional (que aparece en las categorías I2, I3, I4, I6, I9 e I10; en total 25%, de los estudiantes de la muestra). Vallecillos (1994) encontró que un 18,7% confunde parámetro muestral con parámetro poblacional (11,1% en nuestro caso).*
- *Asociada a la anterior, y en las mismas categorías el alumno podría confundir una parte (muestra) con la población que es un todo, lo que apoya la sugerencia de Schuyten (1991) de que los estudiantes confunden los diferentes planos de uso de un mismo concepto en estadística. Desde el punto de vista de nuestro marco teórico, el error se produce por un proceso de generalización indebido.*

#### *Otros*

- *Un alumno realiza una interpretación incorrecta del enunciado, confundiendo la variable que está siendo contrastada (I6). En este caso, el dato sobre la edad de los alumnos, que de hecho no es necesario para resolver el problema ha ocasionado una confusión al estudiante. Por la baja frecuencia este conflicto no es importante, aunque sugiere la dificultad de interpretación del enunciado del problema, incluso para estudiantes universitarios.*

Es un dato interesante contar con muy pocos alumnos de la muestra que no contestan el ítem, sólo del 16,5%, mientras que la investigación de Vallecillos no lo hace un 32% de la muestra. Esta diferencia de porcentajes podría deberse a una mejor enseñanza o bien a que en nuestro caso el cuestionario se pasó en una situación de examen, para asegurarnos que los estudiantes habían estudiado a fondo el tema.

## Conclusiones

En nuestro trabajo no se ha presentado la confusión entre hipótesis nula y alternativa que Vallecillos (1994; 1999) encontró un 13% aproximadamente de alumnos en su estudio. Sin embargo si hemos encontrado alumnos que plantean hipótesis alternativas puntuales o hipótesis que en su conjunto no cubren el espacio paramétrico, de modo que si hay coincidencia con la autora citada en que los alumnos confunden algunas propiedades de las hipótesis nula y alternativa, aunque no las hayan intercambiado entre sí en nuestra investigación.

Una de los conflictos que se presenta en mayor número de respuestas es la confusión entre estadístico y parámetro, así como no reconocer que el estadístico es una variable aleatoria. Como indican Harradine, Batanero y Rossman (2011), el concepto de distribución muestral es mucho más abstracto que los de distribución de una población o de una muestra, por lo que suelen ser muy difícil de comprender para los estudiantes. Esta debiera ser un punto para insistir en la enseñanza de la inferencia. Siguiendo la sugerencia de estos autores, sería importante animar a los estudiantes a razonar sobre los comportamientos hipotéticos de más de una muestra tomadas de la misma población (usando poblaciones conocidas por los estudiantes). Estas conjeturas podrían contrastarse con actividades que involucren la toma repetida de muestras aleatorias, utilizando alguna de las muchas aplicaciones interactivas disponibles en Internet.

Otra dificultad que se han mostrado al plantear las hipótesis son identificar la población bajo estudio al aplicar la inferencia (White, 1980). Hagod (1970) indica que este es un punto oscuro para muchos estudiantes, pues en los estudios descriptivos no se precisa el uso de la inferencia y en los casos prácticos de muestreo aleatorio repetido (como en control de calidad) la pertinencia de la inferencia es clara. Sin embargo lo habitual es tomar una única muestra y generalizar a una población (universo hipotético) que no está claramente definida; se trataría de la población que se obtendría al repetir ilimitadamente la investigación en las mismas condiciones temporales, culturales, sociales, y cognitivas. Otro problema ya analizado por Vallecillos (1994). se plantea a la hora de diferenciar entre contrastes unilaterales y bilaterales.

En resumen, el presente trabajo aporta nueva información para apoyar la necesidad de revisar la enseñanza de la inferencia estadística y más concretamente, en lo relativo al planteamiento de hipótesis estadísticas, un punto al cuál no se ha prestado la debida atención. Además de que, en sí mismos, estos errores son fundamentales, provocan dificultades a la hora de proseguir con la tarea. Por ejemplo, el hecho de plantear una hipótesis unilateral en lugar de una bilateral hará que las regiones de aceptación y de rechazo estén mal construidas y por tanto, la decisión que tome el alumno en cuanto a la aceptación o rechazo de las hipótesis sea incorrecta. Sería entonces necesario ayudar a los estudiantes en su construcción del razonamiento inferencial, comenzando con el planteamiento de actividades informales de inferencia, como propone Rossman (2008) antes de iniciar el aprendizaje formalizado de los contrastes de hipótesis. Esperamos en consecuencia que nuestros resultados contribuyan a la mejora de la enseñanza del tema y animen a otros investigadores a proseguir analizando las dificultades de los estudiantes en la inferencia estadística.

### Agradecimientos:

Proyecto EDU2010-14947 (MCINN-FEDER) y grupo FQM126 (Junta de Andalucía).

### Referencias

- Ares, V. M. (1999). La prueba de significación de la «hipótesis cero» en las investigaciones por encuesta. *Metodología de Encuestas*, 1, 47-68.
- Batanero, C. (2000). Controversies around the role of statistical tests in experimental research. *Mathematical Thinking and Learning*, 2 (1-2), 75-98.

- Batanero, C. y Díaz, C. (2006). Methodological and didactical controversies around statistical inference. *Actes du 36ièmes Journées de la Société Française de Statistique* [CD-ROM]. Paris: Société Française de Statistique.
- Birnbaum, I. (1982). Interpreting statistical significance. *Teaching Statistics*, 4, 24–27.
- Borges, A., San Luis, C., Sánchez, J. A. y Cañadas, I. (2001). El juicio contra la hipótesis nula: muchos testigos y una sentencia virtuosa. *Psicothema*, 13 (1), 174-178.
- Castro Sotos, A. E., Vanhoof, S., Van den Nororgate, W., Onghena, P.(2007). Student's misconceptions of statistical inference: A review of the empirical evidence form research on statistical education. *Educational Research Review*, 2 (2), 98-113.
- Chow, L. S. (1996). *Statistical significance: Rational, validity and utility*. London: Sage.
- Díaz, C. (2007). *Viabilidad de la enseñanza de la inferencia bayesiana en el análisis de datos en psicología*. Universidad de Granada.
- Eco, U. (1979). *Tratado de semiótica general*. Barcelona: Lumen
- Godino, J. D. (2002). Un enfoque ontológico y semiótico de la cognición matemática. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 22(2/3), 237-284.
- Godino, J. D. y Batanero, C. (1998). Funciones semióticas en la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas. En I. Vale y J. Portela (Eds.), *Actas del IX Seminário de Investigaçao em Educaçao Matemática (SIEM)* (pp. 25-45). Guimaraes: Associação de Professores de Matemática.
- Godino, J. D. Batanero, C. y Font, V. (2007). The onto-semiotic approach to research in mathematics education. *ZDM. The International Journal on Mathematics Education*, 39(1-2), 127-135.
- Godino, J. D., Batanero, C. y Roa, R. (2005). An onto-semiotic analysis of combinatorial problems and the solving processes by university students. *Educational Studies in Mathematics*, 60 (1), 3-36.
- Godino, J. D., Font, V., Wilhelmi, M. R. y Arrieche, M. (2009). ¿Alguien sabe qué es un número?. *UNIÓN, Revista Iberoamericana de Educación Matemática*, 19, 34-46.
- Hagod, M. J. (1970). The notion of hypothetical universe. En D. E. Morrison y R. E. Henkel, (Eds.), *The significance tests controversy: A reader* (pp. 65 – 79). Chicago: Aldine.
- Haller, H. y Krauss, S. (2002). Misinterpretations of significance: A problem students share with their teachers? *Methods of Psychological Research*, 7(1), 1–20.
- Harlow, L.L., Mulaik, S.A. y Steiger, J. H. (1997). *What if there were no significance tests?* Mahwah. NJ: Lawrence Erlbaum.
- Harradine, A., Batanero, C., y Rossman, A. (2011). Students' and teachers' knowledge of sampling and inference. En C. Batanero, G. Burrill y C. Reading (Eds.). *Teaching statistics in school mathematics- Challenges for teaching and teacher education. A Joint ICMI/IASE Study*. New York: Springer, en prensa.
- Krauss, S.y Wassner, C. (2002). How significance tests should be presented to avoid the typical misinterpretations. In B. Phillips (Ed.), *Proceedings of the Sixth International Conference on Teaching Statistics*. Cape Town: International Statistical Institute and International Association for Statistical Education. Online: [www.stat.auckland.ac.nz/~iase/publications](http://www.stat.auckland.ac.nz/~iase/publications).

- Lecoutre, B. (1999). Beyond the significance test controversy: Prime time for Bayes? *Bulletin of the International Statistical Institute: Proceedings of the Fifty-second Session of the International Statistical Institute* (Tome 58, Book 2) (pp. 205 – 208). Helsinki: International Statistical Institute.
- Lecoutre, B. (2006). Training students and researchers in Bayesian methods for experimental data analysis. *Journal of Data Science*, 4, 207-232.
- Lecoutre, B., Lecoutre, M. P., y Pointevineau, J. (2001). Uses, abuses and misuses of significance tests in the scientific community: Won't the Bayesian choice be unavoidable? *International Statistical Review*, 69, 399-418.
- Moses, L. E. (1992). The reasoning of statistical inference. In D. C. Hoaglin y D. S. Moore (Eds.), *Perspectives on contemporary statistics* (pp. 107-122). Washington, DC: Mathematical Association of America.
- Rossmann, A. (2008). Reasoning about informal statistical inference: One statistician's view. *Statistics Education Research Journal*, 7(2), 5-19. Online: [www.stat.auckland.ac.nz/serj/](http://www.stat.auckland.ac.nz/serj/).
- Schuyten, G. (1991). Statistical thinking in psychology and education. En D. Vere-Jones (Ed.). *Proceeding of the Third International Conference on Teaching Statistics* (pp. 486-490). Voorburg, The Netherlands: International Statistical Institute.
- Valera, A., Sánchez, J., Marín, F. y Velandrino, A.P. (1998). Potencia estadística de la Revista de Psicología General y Aplicada (1990-1992). *Revista de Psicología General y Aplicada*. 51 (2).
- Vallecillos, A. (1994). *Estudio teórico-experimental de errores y concepciones sobre el contraste estadístico de hipótesis en estudiantes universitarios*. Tesis Doctoral. Universidad de Granada.
- Vallecillos, A. y Batanero, C. (1997). Conceptos activados en el contraste de hipótesis estadísticas y su comprensión por estudiantes universitarios. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 17, 29–48.
- White, A. L. (1980). Avoiding errors in educational research. En R. J. Shumway (Ed.), *Research in mathematics education* (pp. 47 – 65). Reston, Va: National Council of Teachers of Mathematics.

**Osmar Darío Vera**, Licenciado en Matemáticas por la Universidad de Buenos Aires, Magister en Estadística por la Pontificia Universidad Católica de Chile y Master en Didáctica de las Matemáticas por la Universidad de Granada. Ha sido becado por la Fundación Carolina en Argentina, para realizar su tesis doctoral en la Universidad de Granada sobre la comprensión de conceptos de inferencia.

**Carmen Díaz** Licenciada en Psicología en la Universidad de Granada y Doctora en Psicología (Metodología de las Ciencias del Comportamiento) por la Universidad de Granada, España. Profesora del área de Metodología de las Ciencias del Comportamiento en la Universidad de Huelva.  
Trabaja en la línea de investigación de didáctica de la estadística, publicando artículos en torno a la comprensión de la probabilidad condicional e inferencia bayesiana en revistas de ámbito nacional e internacional.

**Carmen Batanero** Licenciada en Matemáticas en la Universidad Complutense de Madrid y Doctora en Matemáticas (Estadística) por la Universidad de Granada, España. Profesora de Didáctica de las Matemáticas en la Universidad de Granada. Ha publicado libros dirigidos al profesorado y artículos en diferentes revistas de educación matemática. Es miembro del Comité Ejecutivo de ICMI (International Comisión on Mathematical Instruction y fue Presidenta de IASE (International Association for Statistical Education). Ha coordinado la organización del VII Congreso Internacional sobre Enseñanza de la Estadística, ICOTS-7. Fue editora de la revista Statistics Education Research Journal.

