

Interpretaciones del signo igual. Un estudio de libros de texto.

Mónica Ramírez García; Purificación Rodríguez Marcos

Resumen

El aprendizaje del significado de los símbolos matemáticos y en concreto, el signo igual, es muy importante para poder comprender multitud de expresiones aritméticas y algebraicas. Existen numerosos estudios que ponen de relieve que los estudiantes tienen grandes dificultades a la hora de captar su significado. Este artículo recoge una revisión de algunos de estos estudios que muestran las interpretaciones y usos del signo igual de los estudiantes, así como posibles causas de una comprensión incompleta de este signo y cómo se puede desarrollar una interpretación relacional del signo a través del pensamiento relacional. Además, presenta el estudio de la revisión de algunos libros de texto de matemáticas del primer ciclo de Educación Primaria, para establecer el modo y los contextos en los que se presenta el signo igual a los estudiantes en los primeros cursos.

Abstract

Learning of the meaning of the mathematical symbols and in concrete, the equal sign, it is very important to be able to understand multitude of arithmetical and algebraic expressions. There exist numerous studies that emphasize that the students have big difficulties at the moment of catching his meaning. This article gathers a review from some from these studies that show the interpretations and uses of the equal sign of the students, as well as possible reasons of an incomplete understanding of this sign and how it is possible to develop a relational interpretation of the sign across the relational thinking. Besides, it presents the study of the review of some books of text of mathematics of the first cycle of Primary Education, to establish the way and the contexts in which one presents the equal sign to the students in the first courses.

Resumo

A aprendizagem do significado dos símbolos matemáticos e, em concreto, o signo igual, é muito importante para poder compreender multidão de expressões aritméticas e algebraicas. Existem numerosos estudos que põem de relevo que os estudantes têm grandes dificuldades à hora de captar seu significado. Este artigo recolhe uma revisão de alguns destes estudos que mostram as interpretações e usos do signo igual dos estudantes, bem como possíveis causas de um entendimento incompleta deste signo e como se pode desenvolver uma interpretação relacional do signo através do pensamento relacional. Ademais, apresenta o estudo da revisão de alguns livros de texto de matemáticas do primeiro ciclo de Educação Primaria, para estabelecer o modo e os contextos nos que se apresenta o signo igual aos estudantes nos primeiros cursos.

1. Introducción

En matemáticas los signos y los símbolos tienen una gran importancia, ya que el lenguaje matemático los utiliza continuamente. Un signo es cualquier cosa, acción

o suceso que, por una relación natural o convencional, evoca a otra o la representa (Moliner, 2007). Si tomamos como definición de símbolo un tipo de signo en el cual la relación con el objeto al que se refiere es arbitraria y se ha determinado por convenciones, encontraremos que la mayoría de los signos matemáticos son símbolos porque su significado se ha establecido por convenciones.

El aprendizaje de las Matemáticas implica forzosamente el manejo y comprensión de los símbolos matemáticos. Al ser signos con significados convencionales los alumnos encuentran dificultades en su aprendizaje.

Uno de los objetivos del currículum es aprender el significado de los símbolos matemáticos, lo que no quiere decir que los estudiantes adquieran los significados correctos de estos signos, y como consecuencia aparece el fracaso en esta materia. Uno de los signos al que los estudiantes no le dotan de un significado completo y es especialmente importante es el signo igual.

El aprendizaje del significado de los símbolos matemáticos y en concreto el del signo igual, es vital para poder comprender multitud de expresiones aritméticas y algebraicas. Numerosos estudios han puesto de relieve que incluso los estudiantes de secundaria tienen grandes dificultades a la hora de captar su significado. Teniendo en cuenta esto, en este trabajo realizaremos una revisión de algunas investigaciones anteriores para mostrar qué significados y qué usos le dan los escolares, establecer por qué es tan importante adquirir un significado completo del signo igual, cuál es el significado relacional que tiene este signo y cómo se puede desarrollar mediante una pedagogía basada en el pensamiento relacional. A continuación presentaremos el estudio que hemos desarrollado, que constituye la primera parte de un proyecto más amplio que tendrá como objetivo la elaboración de la Tesis Doctoral. En concreto, revisaremos algunos libros de texto, de distintos niveles educativos, para establecer el modo y los contextos en los que se presenta el signo igual a los estudiantes de primer ciclo de primaria.

2. Marco Teórico

2.1. Aritmética y Álgebra

En los últimos años, muchos investigadores han intentado analizar las causas del alto fracaso escolar en Matemáticas, lo que les ha llevado a construir programas de enseñanza para conseguir mejorar el aprendizaje. Una de las áreas más problemáticas de las Matemáticas es el Álgebra. En efecto, muchos estudiantes de secundaria muestran una preparación insuficiente cuando se introduce esta asignatura.

La enseñanza tradicional tiende a separar la Aritmética del Álgebra. El aprendizaje de la Aritmética se basa en la fluidez de cálculo sin preocuparse de que los alumnos capten las propiedades y relaciones de los números y de las operaciones. Se da por hecho que las adquieren de forma inductiva con la práctica masiva de operaciones aritméticas. El Álgebra se introduce posteriormente según el currículum. El NCTM (2000) distingue varias componentes del Álgebra: comprensión de patrones, relaciones entre cantidades y funciones, la representación de relaciones matemáticas, el análisis de situaciones y estructuras matemáticas utilizando símbolos algebraicos, el uso de modelos matemáticos para representar y comprender relaciones cuantitativas, y el análisis del cambio. El Álgebra se introduce cuando se considera que los alumnos han adquirido las habilidades aritméticas necesarias, sin ocuparse de la conexión entre Aritmética y Álgebra.

Muchos estudiantes de secundaria muestran una preparación insuficiente cuando se introduce el Álgebra. Una de las ideas como solución a este problema es la propuesta Early-Algebra (Molina, 2006), que está basada en la integración de modos de pensamiento algebraico en las matemáticas escolares, permitiendo enriquecer la actividad matemática de estos niveles. Trata de desarrollar los aspectos algebraicos que posee el niño y utilizar representaciones que permitan a los alumnos operar a un nivel de generalidad más alto.

En Estados Unidos, el NCTM (2000) ha mostrado apoyo a la propuesta Early-Algebra proponiendo una reforma en la enseñanza de la Aritmética para que los conceptos y las destrezas de Aritmética de la escuela elemental estén mejor coordinadas con la enseñanza del Álgebra. Más concretamente, esta reforma consiste en un cambio curricular, que aboga por la introducción del Álgebra desde los primeros años de la educación primaria. Este cambio curricular favorece el desarrollo conceptual y la coherencia de las Matemáticas desde los primeros cursos escolares. Brevemente, la idea central de este cambio es trabajar con actividades que faciliten la transición entre la Aritmética y el Álgebra, poniendo especial énfasis en las estructuras que subyacen a las operaciones aritméticas y sus propiedades y no tanto, en el aspecto del cálculo (Molina, 2006). El objetivo final es promover el pensamiento algebraico junto con el aritmético, para facilitar el aprendizaje con comprensión. Aprender Aritmética no consiste solo en la memorización de cientos de hechos numéricos y procedimientos para llevar a cabo algoritmos de resolución de operaciones aritméticas, sino en adquirir una serie de conceptos que permitan desarrollar estrategias para hacer cálculos aritméticos. En otras palabras, implica que los alumnos interioricen propiedades y relaciones que se encuentran implícitas en la estructura de la aritmética. Autores como Carpenter et al. (2003) muestran la viabilidad de la propuesta de pensamiento algebraico temprano, su puesta en práctica por los docentes y las distintas concepciones y capacidades del pensamiento algebraico en los niños.

Una de las dificultades que se han encontrado es la comprensión del signo igual. El estudio que aquí presentamos se centra en la comprensión del signo igual que adquieren los niños durante su escolarización. Veremos que si se adquiere un significado correcto del signo igual, se puede alcanzar con más seguridad el objetivo de trabajar el razonamiento algebraico.

2.2. Usos e interpretaciones del signo igual en los niños

En los últimos 20 años, las investigaciones muestran que el significado del signo igual que adquieren los estudiantes desde los primeros cursos de escolarización es incompleto, interpretándolo como una invitación a hacer algo, es decir, operar sobre los números más que un símbolo relacional. Con niños de edades correspondientes a Educación Primaria tenemos algunas investigaciones realizadas como las de Behr, Erlwanger y Nichols (1980), Morris (2003), Carpenter et al. (2003) que ponían de manifiesto que los niños consideran el signo de igualdad como un operador, en vez de un símbolo relacional. Como operador el signo igual se interpreta como una instrucción para realizar una operación aritmética. Esta interpretación operacional está relacionada con el hecho de que el signo se lea únicamente de izquierda a derecha, lo que significa que se ha de operar siempre sobre los dígitos que están a la izquierda y que la respuesta se ha de situar a la derecha del signo. Para adquirir un significado más completo del signo igual, debería interpretarse como un signo bidireccional, que se pueda leer tanto de izquierda a

derecha o de derecha a izquierda. El signo igual representa la relación 'de equivalencia numérica'. En igualdades numéricas simboliza la equivalencia numérica entre las expresiones que se encuentran en los dos lados del signo igual (Molina, 2006). Esta autora observó cuatro significados del signo igual en niños de tercero de primaria: 'operador', 'indicador de una acción', 'similitud numérica' y 'equivalencia numérica' (p. 436). La autora confirma que a pesar de que el significado de equivalencia numérica es el adecuado para resolver todas las igualdades utilizadas, los niños utilizan en cada situación el significado que da sentido a la igualdad o sentencia numérica que se presenta. De aquí concluye que hay 3 niveles de comprensión del signo igual. El primer y menos completo sería el nivel de comprensión operacional de los niños en los que utilizan el significado de operador y expresión de una acción. Un segundo nivel no estable, en el que en algunas situaciones empieza aparecer el significado de equivalencia numérica. Y por último, el nivel de comprensión avanzado en el que se hace uso del significado de equivalencia numérica, aunque en sentencias con operaciones en el lado izquierdo utilizan el significado operador y en sentencias con operaciones en el lado derecho, utilizan el significado expresión de acción. El significado similitud numérica se mostraba de forma puntual.

Con estudiantes con edades correspondientes a Educación Secundaria que trabajan con expresiones algebraicas tenemos trabajos como los de Knuth (2005, 2006), Essien & Setati (2006) y Hunter (2007), en los que un gran porcentaje de los alumnos mostraban una interpretación operacional del signo igual y además, se comprobó que el éxito en la resolución de ecuaciones algebraicas estaba asociada a la interpretación que tenían dichos alumnos del signo igual.

Una de las causas a las que se atribuye la interpretación inadecuada del signo igual, es la experiencia que tienen los niños en la escuela con los contextos que encuentran en los libros y las explicaciones del maestro. Parece importante buscar contextos que conlleven a los estudiantes una comprensión relacional del signo igual. En esta línea, McNeil & Alibali (2005) comprobaron que el contexto en el que se presentaban operaciones en ambos lados del signo igual activaba la interpretación relacional del signo igual. En un trabajo posterior, McNeil et al. (2006) plantearon contextos no estándares, del tipo $8 = 8$, o $7 = 3 + 4$, y comprobaron que son también más efectivas que las ecuaciones 'operación igual respuesta' para activar la comprensión relacional del signo igual.

McNeil et al. (2006) examinaron libros de texto de cuatro editoriales distintas para ver en qué contextos de los anteriormente evaluados aparece el signo igual. En concreto, evaluaron libros de texto de 6-8 grado, comúnmente utilizados en Estados Unidos. El contexto 'operaciones en ambos lados del signo igual' aparecía en una proporción muy pequeña en todos los libros. Los contextos no estándares sí aparecían frecuentemente en todas las editoriales, pero el más habitual era 'operación igual resultado'. En resumen, el análisis de los textos mostró que no están bien orientados para despertar una interpretación relacional del signo igual.

La experiencia de los niños en contextos que contienen el signo igual no es únicamente la que observan en los libros de texto. Hay otros factores como es la presentación de los profesores, los contextos que utilizan para plantear actividades e intentar transmitirles los conocimientos. En el trabajo de Seo & Ginsburg (2003) estudiaron los contextos de los libros de textos y los contextos que utilizaba el profesor de un aula con niños de 7 y 8 años para finalmente recoger la interpretación

que tenían estos niños del signo igual. Como en el caso anterior, el análisis de texto mostró una mayoría de contextos que implicaban una acción con operaciones aritméticas y por lo tanto implicaban una interpretación operacional del signo igual. El profesor de grupo era consciente del insuficiente significado que le dan los niños al signo igual si sólo se trabaja contextos de resolución de operaciones aritméticas, y planteó distintas situaciones como comparación de números, equivalencia de unidades de medida, y equivalencia de moneda. Se encontró que los niños tenían una interpretación operacional en contextos aritméticos que implicaban realizar una operación, pero en situaciones de medida y equivalencia de monedas, los niños si daban un significado relacional al signo igual. Al intentar relacionar las dos situaciones explicaban que era distinto en cada una de las situaciones. Se concluyó que no basta con plantear distintos contextos para ver los distintos significados del signo igual. Se debería haber trabajado la conexión de esos significados, es decir, las distintas interpretaciones que se tienen en diferentes contextos puede funcionar en un mismo contexto, es decir, la interpretación relacional que indica la misma cantidad funciona también en el contexto $2 + 3 = 5$, que habitualmente implica “el resultado”.

2.3. Desarrollo del pensamiento relacional. La igualdad como relación

Una de las ideas como solución a este problema es la propuesta Early-Algebra (Molina, 2006), que está basada en la integración de modos de pensamiento algebraico en las matemáticas escolares, permitiendo enriquecer la actividad matemática de estos niveles. Trata de desarrollar los aspectos algebraicos que posee el niño y utilizar representaciones que permitan a los alumnos operar a un nivel de generalidad más alto. En Estados Unidos, el NCTM (2000) ya mostró apoyo a esta propuesta proponiendo una reforma en la enseñanza de la Aritmética para que los conceptos y las destrezas de Aritmética de la escuela elemental estén mejor coordinadas con la enseñanza del Álgebra. Este cambio curricular favorece el desarrollo conceptual y la coherencia de las Matemáticas desde los primeros cursos escolares. Brevemente, la idea central de este cambio es trabajar con actividades que faciliten la transición entre la Aritmética y el Álgebra, poniendo especial énfasis en las estructuras que subyacen a las operaciones aritméticas y sus propiedades y no tanto, en el aspecto del cálculo (Molina, 2006). El objetivo final es promover el pensamiento algebraico junto con el aritmético, para facilitar el aprendizaje con comprensión. En otras palabras, implica que los alumnos interioricen generalidades (principios, propiedades, relaciones) que se encuentran implícitas en la estructura de la Aritmética. Autores como Carpenter et al. (2003) muestran la viabilidad de basar la instrucción de la Aritmética en el pensamiento relacional, que consiste en examinar las expresiones en su totalidad y utilizar las relaciones entre ellas.

2.4. Objetivos de la investigación

El objetivo principal de este trabajo es realizar una revisión de algunos libros de textos de Matemáticas de Primer Ciclo de Educación Primaria, para ver en qué contextos encuentran nuestros alumnos el signo igual al comienzo de su formación.

3. Marco experimental

3.1. Materiales

La revisión se realizó con los libros de texto de primer ciclo de Educación Primaria de cuatro editoriales utilizadas en los Centros de Educación Primaria de la Comunidad de Madrid (Tabla 1).

Tabla 1: Editoriales y proyectos de los libros de texto analizados.

Editorial	Proyecto	Curso	Año
Vicens Vives	Mundo de Colores	1º y 2º	2008, 2009
Anaya	Salta a la vista	1º y 2º	2007
SM	Trampolín	1º y 2º	2007
Bruño	Lapiceros	1º y 2º	2008

Se utilizarán los libros de texto de cuatro de las editoriales utilizadas en los Centros de Educación Primaria de la Comunidad de Madrid. Para ello, seleccionamos los últimos proyectos o series que se han editado en cada una de las editoriales (ver Tabla 1) y como ya hemos mencionado, el estudio se centrará en Primer Ciclo de Primaria.

3.2. Procedimiento

Realizaremos un estudio descriptivo para ver los contextos en los que aparece el signo igual. Basándonos en los estudios previos (McNeil et al., 2006, Seo & Ginsburg, 2003) hemos elaborado una clasificación de los posibles contextos en los que puede aparecer el signo igual.

Contextos aritméticos

1. Contexto aritmético canónico: 'Operación igual resultado' ($a + b = c$).
2. Contextos aritméticos no canónicos. Incluye varios:
 - a. Operaciones en ambos lados del signo igual. $a + b = c + d$
 - b. 'Resultado igual operación': $a = b + c$

Contextos no aritméticos

1. Comparación de números; $a = a$.
2. Contextos de medida: p.e.: 1 metro = 10 decímetros.
3. Contextos de equivalencia de monedas: 1 euro = 100 céntimos.
4. Contexto del sistema numérica decimal: 400 unidades = 4 centenas.
5. Otros contextos no aritméticos.

Esta clasificación separa los contextos aritméticos de los no aritméticos. El análisis de los contextos no aritméticos permitirá estudiar si existen situaciones en los libros de texto en las que los niños tienen la oportunidad de dar un significado relacional al signo igual (i.e.; el de medida y la equivalencia de monedas como vimos anteriormente en el trabajo de Seo y Ginsburg). Los contextos aritméticos ayudarán a su vez a deducir si los libros de texto favorecen un sentido operacional o relacional al signo igual en situaciones aritméticas. Por ejemplo, como vimos en el trabajo de McNeil (2006), el contexto 'operaciones a ambos lados del signo igual' ayuda a dar un sentido relacional.

Teniendo en cuenta que en una misma página de un libro pueden aparecer distintas expresiones y por lo tanto, distintos contextos del signo igual, hemos analizado por separado cada una de esas situaciones. Del mismo modo, si en un ejercicio se repite varias veces, hemos tomado todas y cada una de esas veces porque incluso dentro de cada ejercicio puede variar el contexto.

3.3. Resultados y Análisis

Los resultados muestran que el signo igual se utiliza en contextos aritméticos con más frecuencia que en contextos no aritméticos (ver Tabla 2). Todas las

editoriales utilizan el signo igual en más de un 90% de las ocasiones en expresiones aritméticas. Sólo en la editorial Anaya no alcanza este porcentaje en segundo curso, que como veremos más adelante, se debe al gran uso de las relaciones de equivalencia del sistema numérico decimal. En todas las editoriales disminuye levemente la utilización de los contextos aritméticos en segundo curso, excepto en la editorial Bruño, aunque las diferencias entre primero y segundo en todos los casos son pequeñas.

Tabla 2: Porcentaje de contextos aritméticos y no aritméticos.

<i>Curso</i>	<i>Libro de Texto (Editorial)</i>	<i>Contexto Aritmético</i>	<i>Contexto no Aritmético</i>
1	Vicens Vives – Mundo de Colores	97,58	2,42
	Anaya – Salta a la vista	93,03	6,97
	SM – Trampolín	95,85	4,15
	Bruño – Lapiceros	95,63	4,37
2	Vicens Vives – Mundo de Colores	96,84	3,16
	Anaya – Salta a la vista	86,26	13,74
	SM – Trampolín	94,63	5,37
	Bruño - Lapiceros	96,76	3,24

En el Primer ciclo de Primaria se introducen las operaciones aritméticas, la suma y la resta en el primer curso, y la multiplicación y en algunos casos la división en el segundo curso. Por lo tanto, se puede observar en todas las editoriales listados de actividades en las que aparece el contexto canónico ‘operación igual resultado’ con alguna de las cantidades como incógnita.

Comenzaremos nuestro análisis por los contextos aritméticos y a continuación los no aritméticos.

3.3.1. Contextos Aritméticos

En la Tabla 3 se recoge los porcentajes de cada uno de los contextos aritméticos por curso y editorial. El contexto operación igual resultado es con diferencia el más frecuente. La editorial Vicens Vives destaca por la utilización del signo igual en esta forma en los dos cursos, seguida de la editorial SM.

Tabla 3: Porcentajes de los distintos contextos aritméticos.

	<i>SM</i>		<i>ANAYA</i>		<i>BRUÑO</i>		<i>VICENS VIVES</i>	
	<i>1º</i>	<i>2º</i>	<i>1º</i>	<i>2º</i>	<i>1º</i>	<i>2º</i>	<i>1º</i>	<i>2º</i>
Operación = resultado	93,43	86,58	84,43	69,53	61,88	85,98	96,54	96,67
Operación								
ambos								
lados(*)								
misma operación	1,39	0	0	3,43	0	2,88	0	0
distinta operación	0	6,88	0	8,58	0	0	0	0
TOTAL	1,38	6,88	0	12,02	0	2,88	0	0
Resultado = Operación	1,04	1,18	8,61	4,72	33,75	7,91	1,04	0,18

(*) En el contexto operación en ambos lados hemos separado las situaciones en las que las operaciones que aparecían a ambos lados eran del mismo tipo (i.e., las dos sumas), o si eran de distintos tipo (i.e., una suma y la otra multiplicación).

En general, parece que dicho contexto disminuye de primer curso a segundo excepto en la Editorial Bruño. El porcentaje del contexto canónico en primer curso es menor debido a la aparición del signo igual en el contexto no canónico resultado

igual operación en las últimas páginas que se relaciona con el cálculo mental (ver Figura 1). El ejercicio de la forma $5 = 4 + ?$ utiliza el signo igual, y sin embargo, los ejercicios del tipo $1 + 2$ no lo utilizan, por lo que, aunque aparecía con más frecuencia la expresión $a \pm b$, al no estar presente el signo igual, se dispara el porcentaje del contexto que tiene la operación a la derecha.

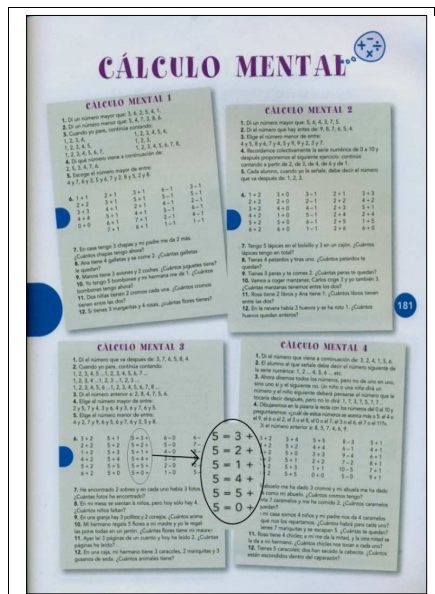


Figura 1: Páginas con ejercicios de cálculo mental del libro de primero de Ed. Bruño.

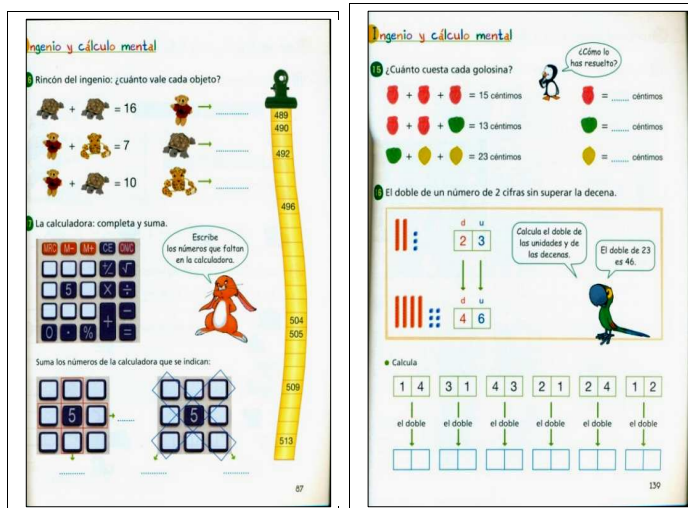


Figura 2: Contextos aritméticos canónicos con imágenes en la editorial Vicens Vives

El uso del signo igual en la calculadora también se ha incluido en este contexto. Cuando realizamos un cálculo marcamos la operación y seguidamente el signo igual como indicador de buscar el resultado, lo que implica un contexto operacional para el signo igual. Este uso se puede encontrar en los dos cursos de la editorial Vicens Vives y en el segundo curso de la editorial Bruño.

En un número mínimo de ocasiones aparecen expresiones de la forma operación igual resultado utilizando objetos como sumandos (ver Figura 2). Por ejemplo, en la editorial de Vicens Vives utilizan un objeto que será una incógnita a la que habrá que darle un valor. O incluso, hay una actividad (ver Figura 2) en la que parece tres igualdades con varias figuras en los sumandos, en las que hay que averiguar el valor de todas las figuras, como en un sistema de ecuaciones algebraicas.

El hecho de que hayamos encontrado un alto porcentaje de páginas en los libros de texto en las que aparece el signo igual en la forma aritmética canónica coincide con lo visto en los trabajos anteriores. McNeil et al. (2006) encontraron que el contexto más frecuente era el contexto operación igual resultado, que coincide con lo aquí obtenido.

Un contexto importante para adquirir una interpretación relacional del signo igual según los estudios previos es el que tiene operaciones en ambos lados del signo igual (p.372) (ver tabla 3). De nuevo encontramos que este contexto aparece un número muy bajo de veces, a pesar de ser el contexto que más favorece la adquisición de un significado relacional del signo según McNeil et al. (2006), entre otros.

Señalar en este punto que en el segundo curso se introducen las tablas de multiplicar, y la gran mayoría de los contextos con operaciones a ambos lados del signo igual eran del tipo 'a + a + a + a = 4 x a'. Las editoriales Vicens Vives y Bruño explican las tablas de multiplicar exponiendo en una igualdad la suma reiterada con el resultado (p.e., 3 + 3 + 3 = 6) y en otra igualdad el producto (p.e., 3 x 2 = 6) como se puede ver en la siguiente figura, por lo tanto el contexto con operaciones diferentes en ambos lados del signo igual no aparece.

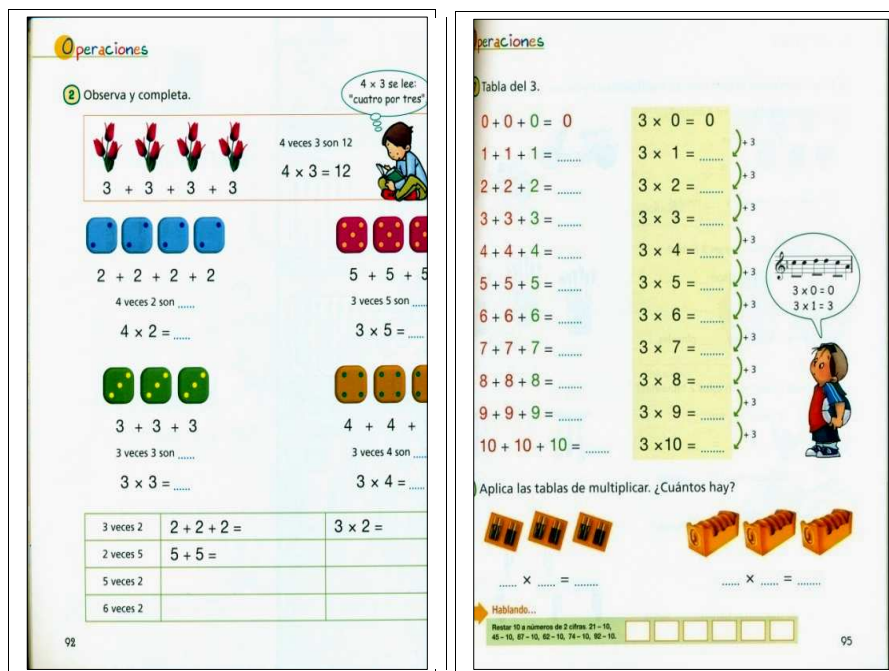


Figura 3: Multiplicación en Vicens Vives.

Sin embargo, las editoriales Anaya y SM utilizan la igualdad entre la suma reiterada y el producto del número de veces que se suma el número (Figura 4). Por esta razón el porcentaje de apariciones de este contexto es mayor.

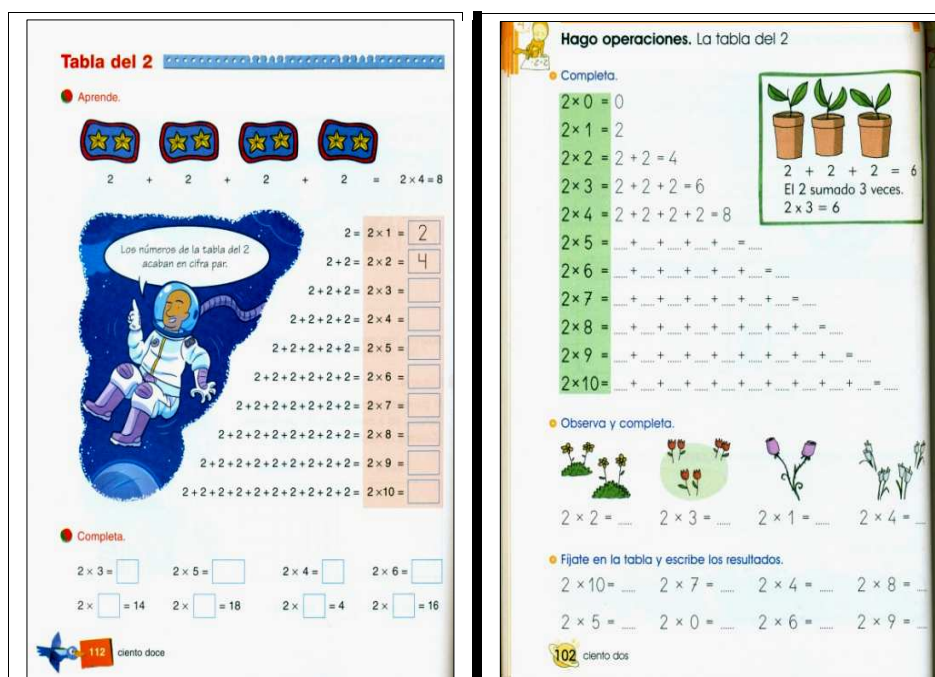


Figura 4: Multiplicación en Anaya y SM

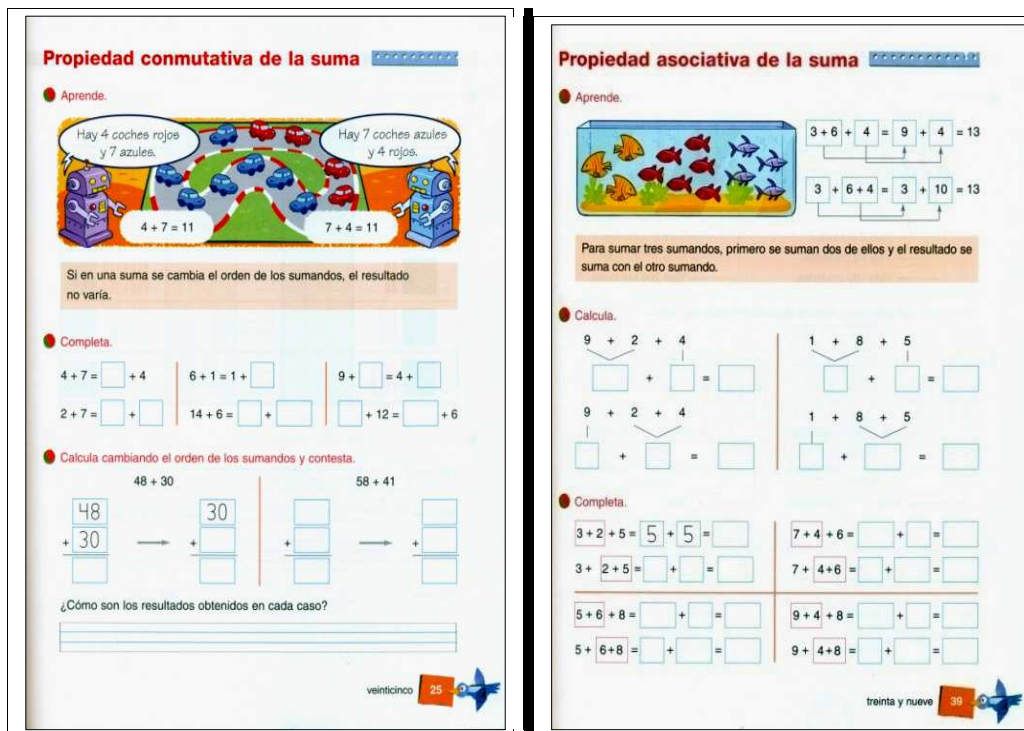


Figura 5: Propiedades conmutativa y asociativa en Ed. Anaya.

La editorial Anaya y SM recurre también al contexto operaciones en ambos lados del signo igual' en la definición de las propiedades conmutativa y asociativa (ver figura 5).

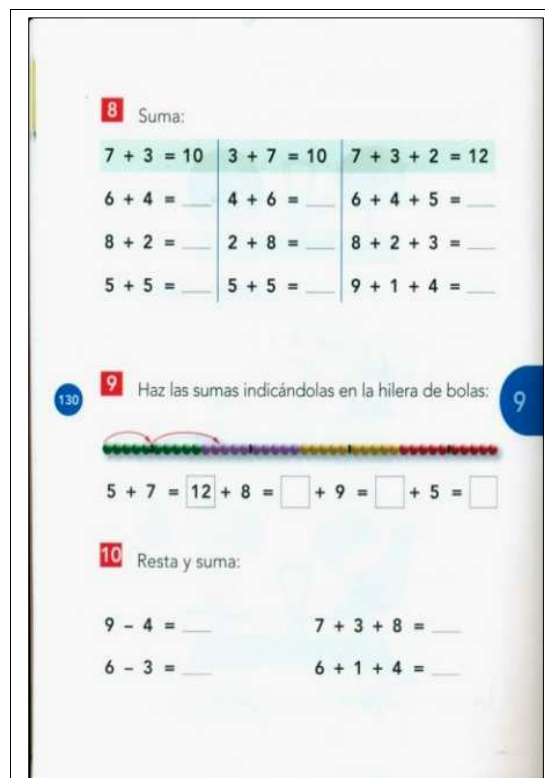


Figura 6: Concatenación de 'operación igual resultado' en 1º de Ed. Bruño.

En la Editorial Bruño aparece en dos ocasiones una expresión clara de utilización unidireccional del signo igual (figura 6). Este contexto no lo podemos considerar como operación en ambos lados del signo igual ya que en la sentencia $5 + 7 = 12 + 8 = _ + 9 = _ + 5 = _$, el signo igual no significa que el valor de la operación de la izquierda sea igual al valor de la operación de la derecha. Lo que realmente se está utilizando es el contexto operación igual resultado concatenado varias veces.

Otro de los contextos que más favorecen interpretación relacional del signo igual es el contexto aritmético resultado igual operación según lo anterior (ver tabla 3). Todas las editoriales no superan un 10% de este tipo de contextos excepto la editorial Bruño. Como hemos comentado, el libro de primero de la editorial Bruño presenta un porcentaje más alto que el resto de las editoriales en el contexto resultado igual operación. Esto es debido a la presentación de unas actividades para ejercitar el cálculo mental en las últimas páginas de libro, aparecen ecuaciones del tipo ' $a = b + _$ '. (Figura 1).

El resto de editoriales utiliza este contexto para descomponer números en decenas y unidades, es decir, en actividades de descomposición del sistema numérico decimal.

En resumen, en los contextos aritméticos, el que más aparece en todos los libros de texto es la forma 'operación igual resultado' (McNeil et al., 2006, p. 372), que lleva a una interpretación operacional según hemos visto en el marco teórico.

3.3.2. Contextos no aritméticos

Por lo que se refiere a los contextos no aritméticos, Seo & Ginsburg (2003) concluyeron que este tipo de contextos ayudaba a los niños a construir un significado de equivalencia numérica del signo igual. En la siguiente tabla se pueden observar los porcentajes en los que aparece el signo igual en ese contexto, respecto al total en cada libro.

Como se puede observar, en ninguno de los libros analizados los porcentajes son altos. El más destacado es el de la editorial Anaya, en segundo curso, en el apartado correspondiente al Sistema Numérico Decimal.

Tabla 4: Porcentaje de los distintos contextos no aritméticos respecto al total.

Curso	Libro de texto	Comparación	Medida	Monedas	Sistema decimal	Otros
1	Vicens Vives – Mundo de Colores	1,04	0	0	1,04	0
	Anaya – Salta a la vista	0	0	0	3,69	3,28
	SM – Trampolín	3,46	0	0	0,69	0
2	Bruño – Lapiceros	0,63	0	3,75	0	0
	Vicens Vives – Mundo de Colores	0	0,35	0,18	1,93	0,70
	Anaya – Salta a la vista	0,29	2,58	0,29	10,44	0,14
	SM – Trampolín	0,17	2,01	0,17	3,02	0
	Bruño - Lapiceros	0,36	0,72	1,44	0,36	0,36

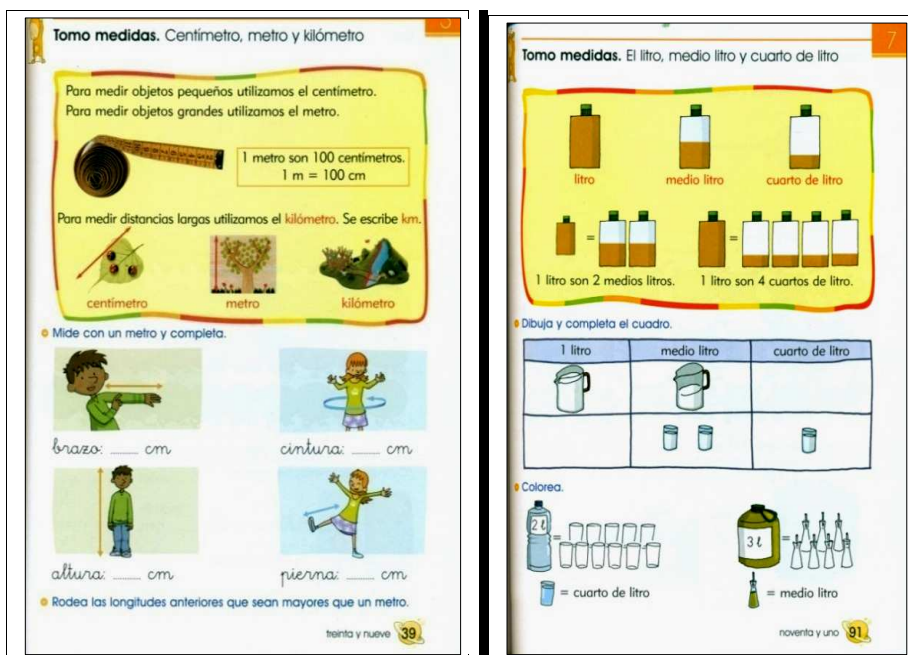


Figura 7: Medida en 2º de SM.

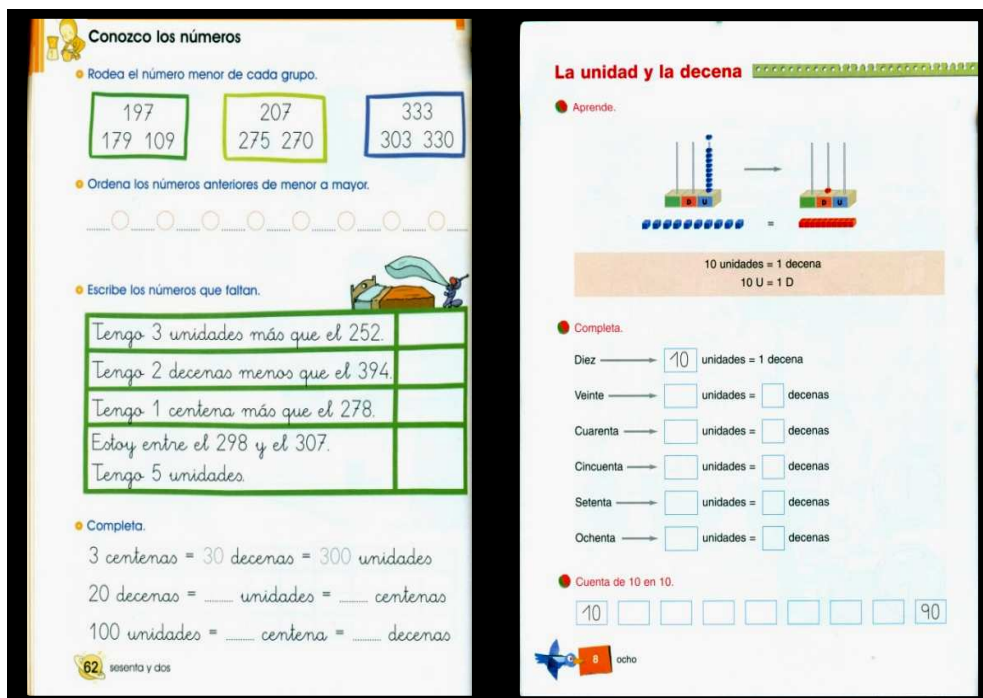


Figura 8: Sistema decimal en 2º de SM y Anaya.

En la Editorial SM, la primera aparición del signo igual se produce en el contexto no aritmético, simplemente define los signos = y \neq para comparar cantidades sin operaciones aritméticas. En Bruño y Vicens Vives también proponen algunas actividades para diferenciar las relaciones de igualdad, mayor que y menor que. Estas actividades las englobamos en el contexto de comparación y, como podemos observar en la tabla 7, obtienen un porcentaje muy bajo.

Los contextos no aritméticos relacionados con la medida, apenas aparecen y tan solo se muestran algunos ejemplos con gráficos e imágenes que representa estas unidades y sus equivalencias (Figura 7).

La equivalencia de monedas tampoco suele estar presente y la única referencia se produce en la editorial Bruño.

Con respecto al Sistema Numérico Decimal, las equivalencias expresadas en unidades, decenas y centenas resultan escasas (ver, figura nº 8). En el libro de segundo curso de la editorial Anaya aparecen con un porcentaje de poco más del 10% equivalencias de cantidades expresadas en unidades, decenas y centenas. Las demás editoriales no superan ninguna un 3,7% en ninguno de los cursos. Este contexto debe ser habitual en los libros de primer ciclo pues es cuando se introduce el concepto de decena, centena y millar.

Por último, aparecen igualdades del tipo $a = 1$. Estos los clasificamos en 'otros contextos no aritméticos'.

4. Conclusiones

Los resultados obtenidos reiteran los resultados de los estudios previos, ya que la mayoría de las veces en las que aparece el signo igual en los libros de texto se produce en contextos aritméticos. Profundizando en estos contextos, los estudiantes del primer ciclo de Educación Primaria encuentran el signo igual en el contexto aritmético 'operación igual resultado' mucho más frecuentemente que en los demás. Como hemos visto en la primera parte de nuestro trabajo, este contexto favorece el significado de operador del signo igual lo que les impide alcanzar una comprensión completa de la relación que representa dicho signo. Por el contrario, los contextos en los que aparecen las operaciones en ambos lados del signo igual o la operación al lado derecho apenas están presentes. Sin embargo, en los trabajos de McNeil et al. (2006) hemos tenido ocasión de ver que son estos contextos los que ayudan a los estudiantes a adquirir una interpretación relacional del signo igual. Por lo tanto, los contextos aritméticos presentes en los libros de texto conllevan a un significado operacional del signo igual.

También hemos observado que hay muy pocos contextos no aritméticos como la equivalencia de monedas, medida y comparación de cantidades, que según los trabajos de Seo & Ginsburg (2003) ayudan a percibir ese significado de relación de equivalencia numérica que tiene el signo igual.

Hemos encontrado incluso un uso indebido del signo igual en el que se concatenan varios cálculos aritméticos, lo que como vimos en los trabajos de Berh et al. (1980) conlleva a un uso unidireccional del signo igual y por tanto, una vez más un significado incorrecto del signo igual.

Como conclusión, los contextos que encontramos en los libros del primer ciclo de primaria favorecen una interpretación operacional del signo igual, lo que podría implicar una dificultad a la hora de adquirir un significado equivalencia numérica del signo igual. Esta comprensión como operador que parece provocar los libros de texto en primero de Primaria corre peligro de obstaculizar el aprendizaje de un significado más completo si no se expone a los alumnos a situaciones más variadas de uso del signo igual. Una instrucción basada en contextos que dan una imagen de operador del signo igual puede suponer problemas a la hora de extender su significado.

En los estudios previos hemos visto que basando el aprendizaje de la aritmética en el pensamiento relacional de tal forma que veamos las expresiones como una totalidad y intentemos trabajar las relaciones entre las cantidades que hay a un lado y otro del signo, podríamos alcanzar un aprendizaje más próximo al pensamiento algebraico. Trabajar sobre una variedad de expresiones aritméticas más amplia centrando la atención en las relaciones y propiedades de las cantidades y operaciones podría ayudar a adquirir una comprensión completa del signo igual.

No obstante, la información que llega a los niños no depende sólo de los libros de texto. En la instrucción las actividades planteadas por el profesor y otros materiales complementarios que se utilizan en el aula, pueden mostrar otra imagen diferente del signo.

En trabajos posteriores, comprobaremos si en los cursos sucesivos los contextos que aparecen en los libros de texto siguen reforzando el sentido operacional del signo o por el contrario, se presentan contextos que favorezcan una interpretación relacional. Además, analizaremos los materiales complementarios de aula y las actividades que proponen los profesores. El conjunto de todos estos factores dará una información más completa de la presencia del signo igual en la instrucción de las Matemáticas, y así poder intervenir en la enseñanza de la aritmética.

Bibliografía

- Behr, M. J., Erlwanger, S., y Nichols, E. (1980). How Children View the Equals Sign. *Mathematics Teaching*, 92, 13-15.
- Carpenter, T.P., Franke, M. L., y Levi, L. (2003). *Thinking Mathematically: Integrating Arithmetic and Algebra in Elementary School*. Portsmouth, England: Heinemann.
- Carpenter, T.P., Levi, L., Franke, M. L. y Zeringue, J. K. (2005). Algebra in Elementary School: Developing Relational Thinking. *ZDM*. 37(1), 53-59.
- Essien, A. y Setati, M. (2006). Revisiting the Equal Sign: Some Grade 8 and 9 Learners' Interpretations. University of the Witwatersrand, Johannesburg, South Africa. *African Journal of Research in SMT Education*, 10(1), 47-58.
- Hunter J. (2007). Relational or Computational Thinking: Students Solving Open number Equivalence Problems. En J. Watson & K. Beswick, *Mathematics: Essential Research, Essential Practice 1*, (pp. 421-429). Massey University: MERGA.
- Knuth, E.J., Alibali, M.W., McNeil, N.M., Weinberg, A. y Stephens, A.C. (2005). Middle School Students' Understanding of Core Algebraic Concepts: Equivalence & Variable. *ZDM* 37(1), 68-76.
- Knuth, E.J., Stephens, A.C., McNeil, N.M., Alibali, M.W. (2006). Does Understanding the Equal Sign Matter? Evidence from Solving Equations. *Journal for research in Mathematics Education* 37(4), 297-312.
- McNeil, N.M. y Alibali, M.W. (2005). Why Won't You Change Your Mind? Knowledge of Operational Patterns Hinders Learning and Performance on Equations. *Child Development*, 76(4) 883-899.
- McNeil, N.M., Grandau, L., Knuth, E.J., Alibali, M.W., Stephens, A.C., Hattikudur, S. et al. (2006). Middle-School students' understanding of the Equal sign: The Books They Read can't Help. *Cognition and Instruction*, 24(3), 367-385.
- Molina, M. (2006). *Desarrollo de pensamiento relacional y comprensión del signo igual por alumnos de tercero de educación primaria*. Tesis doctoral. Granada:

- Departamento de Didáctica de la Matemática, Universidad de Granada.
Disponibile en <http://cumbia.ath.cx:591/pna/Archivos/MolinaM072822.PDF>.
- Molina, M. (2009). Una propuesta de cambio curricular: integración del pensamiento algebraico en educación primaria. *PNA*, 3(3), 135-156.
- Moliner, M. (2007). *Diccionario de uso del Español*. Madrid: Editorial Gredos.
- Morris, A. K. (2003, Spring Edition). The Development of Children's Understanding of Equality and Inequality Relationships in Numerical Symbolic Contexts. *Focus on Learning Problems in Mathematics*, 25(2), 18-51.
- National Council of Teachers of Mathematics (2000). *Principles and standards for school mathematics*. Reston, VA: Autor.
- Seo K.H., Ginsburg, H.P (2003). "You've Got to Carefully Read de Math Sentence...": Classroom Context and Children's Interpretations of the Equal Sign. En A. J. Baroody y A. Dowker (Eds), *The development of arithmetic concepts and skill: constructing adaptive expertise* (pp. 161, 178). Mahwah NJ: Lawrence Erlbaum Associates.

Anexo: Libros de Texto analizados

- Fernández, B., Santaolalla, E., Monzó, A., Ferrandíz, B., Salomó, X. (2007). *Matemáticas. 2º Primaria. Proyecto Trampolín*. Madrid: España-Ediciones SM-FSM.
- Ferrero, L., Martín, M. G., Jiménez, M. C. (2007). *Matemáticas 1: primaria, primer ciclo. Proyecto Salta a la vista*. Madrid: GRUPO ANAYA.
- Ferrero, L., Martín, M. G., Jiménez, M. C. (2007). *Matemáticas 2: primaria, primer ciclo. Proyecto Salta a la vista*. Madrid: GRUPO ANAYA.
- Fraile, J. (2008). *Matemáticas 1. Primer ciclo. Primer Curso. Mundo de Colores*. Madrid: Vicens Vives.
- Fraile, J. (2009). *Matemáticas 2. Primer ciclo. Segundo Curso. Mundo de Colores*. Madrid: Vicens Vives.
- Santaolalla, E., Monzó, A., Ferrandíz, B., Salomó, X. (2007). *Matemáticas. 1 Primaria. Proyecto Trampolín*. Madrid: España-Ediciones SM-FSM.
- Torra, M. (2008). *Matemáticas 1. Educación Primaria, Primer Ciclo. Lapiceros*. Madrid: Bruño.
- Torra, M. (2008). *Matemáticas 2. Educación Primaria, Primer Ciclo. Lapiceros*. Madrid: Bruño.

Mónica Ramírez García: Profesora de Didáctica de las Matemáticas en el Centro Superior de Estudios Universitarios La Salle, de la Universidad Autónoma de Madrid.
mramirez@lasallecampus.es

Purificación Rodríguez Marcos: Profesora en el Departamento de Psicología Evolutiva y de la Educación de la Universidad Complutense de Madrid. p.marcos@psi.ucm.es

