UNIÓN
REVISTA IBEROAMERICANA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA

Junio de 2011, Número 26, páginas 153-158
ISSN: 1815-0640

El rincón de los problemas

Uldarico Malaspina Jurado

Pontificia Universidad Católica del Perú
umalasp@pucp.edu.pe

Regiones con cónicas

Problema

Una semielipse con su eje mayor forman una región convexa R_1, y un arco simétrico de parábola con una cuerda perpendicular a su eje de simetría, forman una región convexa R_2. Si la cuerda de la parábola coincide con el eje mayor de la semielipse, que mide 100 cm, y el arco de parábola es tangente a la semielipse en un extremo de su semieje menor, que mide 30 cm, ¿cuál de las regiones tiene mayor área?

Es probable que este problema nos haga pensar inmediatamente en el cálculo integral o en buscar fórmulas para calcular el área de la región que encierra una elipse y la región que encierra un arco de parábola con una cuerda perpendicular a su eje de simetría. Sin embargo, con esos recursos sería un problema rutinario de aplicación, donde la mayor atención está en la integración, en lo operativo. Resulta más interesante proponerlo de una manera menos formal, en un contexto arquitectónico, y a estudiantes que no conozcan aún el cálculo integral. A continuación una propuesta experimentada con alumnos:

> *En el espacio que queda entre la parte superior del marco de una puerta y el techo, hay un rectángulo de 30 cm de altura y 1 metro de largo. Para este espacio se quiere diseñar una ventana ornamental cuyo borde superior sea un arco simétrico tangente al lado superior del rectángulo y cuyos extremos coincidan con los extremos del lado mayor del rectángulo. Carlos propone que el arco sea una semielipse y María propone que sea un arco de parábola. ¿Con cuál de las propuestas ingresará más luz por la ventana?*

Con este enunciado, el problema fue propuesto en un curso de matemática básica a alumnos del primer ciclo de estudios universitarios de ingeniería, con conocimientos de geometría analítica, pero sin conocimientos de cálculo integral. Un 87% respondió correctamente, aunque no todos justificaron adecuadamente. El problema resulta interesante en este nivel de conocimientos, pues lleva a usar con creatividad los recursos propios de la geometría analítica para resolverlo. Los comentarios y reflexiones que hacemos, examinando fundamentalmente argumentaciones y procedimientos en las soluciones de los alumnos, dan elementos para pensar en cambios en nuestra manera de enseñar y para hacer un estudio y análisis más profundo sobre la enseñanza y aprendizaje de la geometría analítica; en particular de las cónicas.

Evidentemente, hay que graficar las curvas y un primer paso importante es elegir convenientemente la ubicación de los ejes coordenados para facilitar las ecuaciones correspondientes y los cálculos a que haya lugar, lo cual no suele ser frecuente en los problemas, pues generalmente se dan las ecuaciones ya establecidas, aunque no es así como se encuentran los problemas en la realidad.

Ubicando los ejes de coordenadas cartesianas de modo que el origen coincida con el punto medio del eje mayor de la semielipse – que es el centro de la elipse correspondiente – tenemos que la ecuación cartesiana de la elipse es

$$\frac{x^2}{50^2}+\frac{y^2}{30^2}=1$$

y en consecuencia la ecuación de la semielipse del problema es

$$y=\frac{3}{5}\sqrt{2500-x^2} \qquad (1)$$

Por otra parte, la ecuación de la parábola es fácilmente obtenible, pues es de la forma

$$y=ax^2+30$$

para algún valor negativo de *a* (se abre hacia abajo) y tal valor se determina considerando que pasa por el punto (50; 0). Así,

$$0 = a.(2500) + 30,$$

de donde $a=-\frac{3}{250}$ y en consecuencia

$$y=-\frac{3}{250}x^2+30 \qquad (2)$$

Las gráficas de (1) y (2) deben hacerse para $x\in[-50;50]$ y en un mismo sistema de coordenadas. Nos preguntamos

¿La semielipse está más arriba que el arco de parábola?

¿El arco de parábola está más arriba que la semielipse?

¿Cabe otra posibilidad?

Al esbozar las gráficas usando un software como el Derive, se obtiene lo que se muestra en la figura 1, en la cual el trazo azul corresponde a la semielipse y el trazo rojo al arco de parábola:

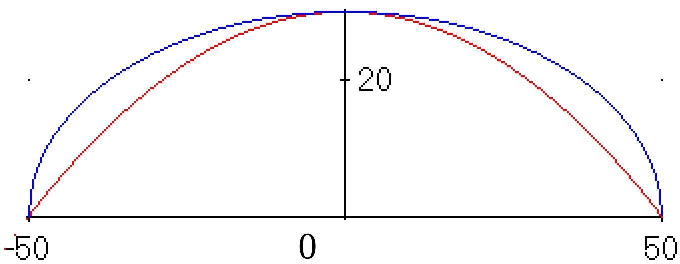

Figura 1

Observando la figura queda claro que ingresará más luz por la ventana con arco de semielipse; sin embargo, al no disponer del recurso informático, queda la duda si la gráfica es así o si la parábola está más arriba que la semielipse. Cabe mencionar que en la prueba aplicada, un 87% de los alumnos intuyó esta ubicación de las gráficas, pero solo un 58% de ellos dio una argumentación correctamente encaminada para justificarla. Encontramos tres tipos de argumentación:

a) Comparación de ordenadas de puntos con la misma abscisa

Los alumnos que calcularon los valores de y_P y de y_E de los puntos (30; y_P) y (30; y_E) correspondientes a la parábola y a la semielipse, obtuvieron

$$y_P = 19{,}2$$
$$y_E = 24$$

La siguiente figura ilustra la situación.

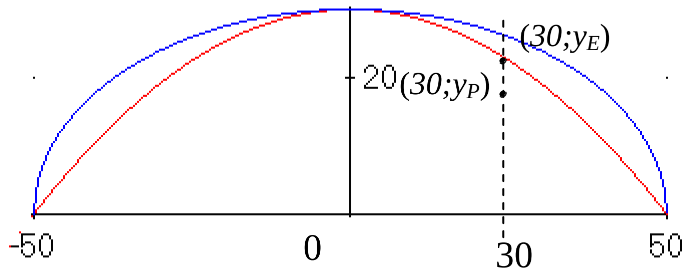

Figura 2

Siendo $y_E > y_P$, concluyeron que los puntos de la semielipse están más arriba que los puntos de la parábola.

b) *Comparación de abscisa y ordenada de puntos de la parábola y de la semielipse que también están en la recta de pendiente* 1 *que pasa por el origen.*

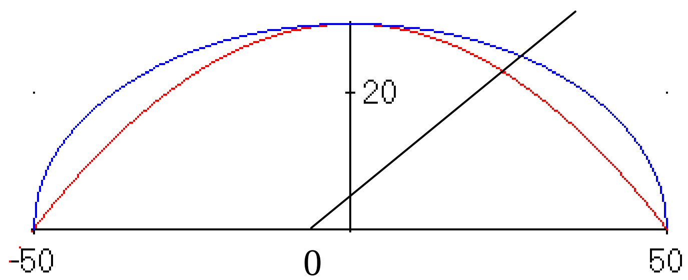

Figura 3

El punto de intersección de la recta con la parábola es (23,42; 23,42) y el punto de intersección de la recta con la semielipse es (25,72; 25,72). Comparando los valores de las respectivas abscisas y ordenadas, concluyeron que el punto de intersección con la semielipse está más alejado del origen que el punto de intersección con la parábola (Figura 3) y en consecuencia que la gráfica de la semielipse está por encima de la gráfica de la parábola.

c) Verificación de que puntos de la semielipse no se encuentran en la región determinada por la parábola

Especificaron que los puntos (*x; y*) de la región determinada por la parábola cumplen con la condición

$$y \leq -\frac{3}{250}x^2 + 30$$

Al escoger el punto de la semielipse, con abscisa 40; es decir, el punto (40; 18), verificaron que tal punto no cumple la desigualdad anterior, pues para $x = 40$ el segundo miembro es 10,8, que evidentemente no es mayor o igual que 18. Con esta información, concluyeron que los puntos de la semielipse no pueden estar en la región determinada por la parábola y en consecuencia el arco de parábola debe estar debajo de la semielipse.

En verdad, este tipo de justificación es una variación formal de la justificación del tipo (*a*).

Comentarios y reflexiones

1. Examinar las soluciones que los alumnos dan a este problema nos permite ver cómo interrelacionan sus registros verbales, geométricos y algebraicos. Es tarea nuestra, como docentes, estimular que el tránsito entre estos registros se produzca fluida y adecuadamente. Por otra parte, brinda la oportunidad de reflexionar sobre la enseñaza y el aprendizaje de temas de geometría analítica al examinar en las soluciones de los alumnos las diversas expresiones verbales, gráficas y simbólicas; definiciones y conceptos; procedimientos; proposiciones y argumentos. En el marco teórico del enfoque ontosemiótico del conocimiento y la enseñanza de las matemáticas, diríamos que se prevé gran riqueza de información en el análisis de las configuraciones cognitivas de las soluciones de los alumnos. En este artículo estamos poniendo énfasis en el análisis de las argumentaciones y procedimientos.
2. La experiencia realizada muestra deficiencias en las argumentaciones expuestas en las soluciones dadas al problema. En todos los casos se pasa del análisis de un caso particular a una afirmación general, sin hacer mención a que el caso que analizan es representativo de un caso general por el comportamiento de las curvas en el intervalo considerado. Para las argumentaciones (*a*) y (*c*) habría que aclarar que la situación será similar para puntos de abscisa $x \in]-50; 0[\cup]0; 50[$ y para la justificación (*b*) que la situación será similar si se consideran rectas de ecuación $y = mx$, con $m \in]0; +\infty[$
3. Ningún alumno resolvió simultáneamente las ecuaciones de la parábola y de la semielipse para mostrar que solamente tienen tres puntos comunes: el de tangencia (en el vértice de la parábola) y los extremos del eje mayor de la semielipse. Este procedimiento complementaría bien las argumentaciones del tipo (*a*) y (*b*), pues la existencia de puntos en los que la relación de desigualdad de las ordenadas, o de las abscisas y ordenadas, no fuera la misma que la encontrada en (*a*) y (*b*), obligaría a la existencia de un nuevo punto de intersección de las gráficas, lo cual es imposible.

4. Ningún alumno consideró para su argumentación de que el arco de parábola está por debajo del arco de elipse, que esto se puede ver intuitivamente como una consecuencia del hecho que la semielipse es tangente a las rectas verticales que pasan por cada extremo de su eje mayor, pero la parábola es secante a tales rectas en esos puntos. Esto se percibe al tratar de dibujar adecuadamente estos arcos en el contexto descrito. Ciertamente, al estudiar cónicas se tratan también casos de rectas tangentes a ellas, pero usualmente se quedan en ejercicios con más énfasis en enfoques operativos. En general, el estímulo de la intuición matemática no suele estar entre las prioridades en la mayoría de clases de matemáticas, en los diversos niveles educativos; en particular al tratar las cónicas.

5. Es importante que en cursos de precálculo se enfatice el estudio de regiones en el plano limitadas por arcos de cónicas y segmentos de rectas, por la relevancia que esto tiene en el cálculo integral. Además, es una manera de mostrar aplicaciones y utilidad de los procedimientos de resolución de inecuaciones de segundo grado. Una muestra de que este es un aspecto al que no se le brinda mucha atención es que al resolver el problema propuesto, ningún estudiante intentó mostrar que la gráfica de la parábola está por debajo de la semielipse examinando la inecuación $-\frac{3}{250}x^2+30\leq\frac{3}{5}\sqrt{2500-x^2}$. Haciendo las operaciones correspondientes, se encuentra que esta inecuación se cumple para $-50\leq x\leq 50$.

6. Ningún alumno obtuvo la ecuación de la parábola considerando una traslación de 30 unidades hacia arriba del gráfico de una función cuadrática de la forma $y = ax^2$, con $a < 0$, que, como lo hemos visto, lleva muy fácilmente a la función especifica para el problema, dada en (2). Todos usaron la forma típica para parábolas $(x-h)^2=4p(y-k)$ y muchos calcularon – innecesariamente – el valor de *p*. Esto nos hace pensar en la importancia de vincular las parábolas que tienen eje focal vertical, con las funciones cuadráticas.

7. El análisis de las argumentaciones dadas por los alumnos al resolver este problema, nos hace reflexionar una vez más sobre la importancia de enfatizar el paso de lo particular a lo general o de encontrar lo general en lo particular, considerando aspectos usualmente poco explicitados al estudiar las cónicas: la continuidad de las curvas; su carácter estrictamente creciente o estrictamente decreciente en determinados intervalos; y en general su vinculación con las funciones. Si bien es cierto que estos temas se tratan formalmente en los cursos de cálculo diferencial, es importante mencionarlos y tenerlos en cuenta a nivel intuitivo. Muchas veces los temas de geometría analítica resultan muy tomados por lo operativo, contribuyendo poco a aspectos formativos de un pensamiento matemático más profundo.

8. Para terminar, menciono tres hechos llamativos encontrados en las soluciones dadas por los alumnos:

   a. El uso de fórmulas para el cálculo del área de la región encerrada por la semielipse $(\frac{1}{2}\pi ab)$, donde *a* y *b* son las longitudes de los semiejes de la elipse; y del área de la región encerrada por un arco de parábola y una cuerda perpendicular a su eje de simetría $(\frac{2}{3}cd)$, donde *c* es la longitud de la cuerda y *d* es la distancia del vértice a la cuerda. (El alumno decía "2/3 del área del rectángulo", refiriéndose al rectángulo de lados *c* y *d*, que podríamos decir que circunscribe al arco de parábola). Reconozco que no conocía la segunda fórmula y para verificarla tuve que calcular la integral definida correspondiente. Me llamó la atención que alumnos de primer ciclo universitario conozcan estas fórmulas y considero que este hecho confirma el énfasis que se da a lo operativo y memorístico en muchos centros de estudios preuniversitarios.

b. La confusión de varios alumnos al considerar que la cuerda de longitud 100 cm perpendicular al eje focal de la parábola (o sea el eje mayor de la semielipse) es el lado recto de la parábola. Considero que esto es una llamada de atención al cuidado que debemos tener al definir el lado recto de la parábola y a la importancia que debemos dar a su distinción explícita de otras cuerdas paralelas a él.

c. Un alumno, luego de hallar las ecuaciones de la elipse y de la parábola, respondiendo a la pregunta de cuál de las ventanas – con arco parabólico o con arco elíptico – dejará pasar más luz, afirmó "*con la elipse, pues tiene 2 focos sobre la ventana, con lo cual se concentrará más luz*". Este hecho nos recuerda el cuidado que debemos tener en la enseñanza cuando en los constructos matemáticos usamos palabras del lenguaje cotidiano.