REVISTA IBEROAMERICANA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA

Marzo de 2011, Número 25, páginas 73-88
ISSN: 1815-0640

Razonamiento algebraico en educación primaria: Un reto para la formación inicial de profesores

Walter F. Castro G.; Juan Díaz Godino; Mauro Rivas Olivo

Resumen

En este trabajo se realiza un estudio exploratorio sobre las competencias de análisis didáctico de dos grupos de futuros maestros. Se comenta su desempeño en el análisis de dos tareas, en el contexto del diseño de una Unidad Didáctica sobre el razonamiento algebraico elemental. La diversidad exhibida por los dos grupos de futuros maestros, al hacer los análisis epistémicos, se vincula con la necesidad de reforzar el estudio de este tipo de tareas en la formación inicial de maestros.

Abstract

On this paper, an exploratory study is presented on two pre-service groups didactic analysis' competencies. Their performance on two math exercises is commented while designing a Didactic Unit on elementary algebraic reasoning. The diversity in their analysis is shown, and it is linked to the need to reinforce the study of this type of tasks in the education of preservice teachers

Resumo

Neste trabalho realiza-se um estudo exploratorio sobre as concorrências de análise didáctica de dois grupos de futuros mestres. Comenta-se seu desempenho na análise de duas tarefas, no contexto do desenho de uma Unidade Didáctica sobre o razonamiento algebraico elementar. A diversidade exibida pelos dois grupos de futuros mestres, ao fazer as análises epistémicos, vincula-se com a necessidade de reforçar o estudo deste tipo de tarefas na formação inicial de maestros.

1. Introducción

Diversas investigaciones y propuestas curriculares recomiendan la incorporación del razonamiento algebraico elemental en los distintos niveles de educación primaria (Kaput, 2000; Davis, 1985; Vergnaud, 1988). Kaput (2000) hizo una propuesta denominada "algebra for all", en la que sugiere promover el álgebra como facilitadora de una mejor comprensión de las matemáticas en lugar de ser inhibidora. Esta propuesta de Kaput se ha llamado la "algebrización del currículo", la misma ha generado una visión ampliada sobre el álgebra escolar.

En esta línea de ideas, en el ámbito de la formación inicial de maestros, resulta natural plantearse la cuestión: ¿Qué tipo de formación debe ser ofrecida a los maestros en formación inicial para que puedan reconocer tanto el carácter algebraico de las tareas matemáticas, como promover el razonamiento algebraico en los niños?

En este trabajo presentamos algunos resultados iniciales de un proyecto de investigación en curso, orientado hacia el estudio de los problemas que plantea la formación en razonamiento algebraico elemental y su didáctica para futuros maestros de educación primaria. Es una investigación en la que se indaga sobre el desarrollo del "conocimiento matemático para la enseñanza" (MKT[1]) (Ball, Thames y Phelps, 2008; Hill, Ball y Schilling, 2008), en la formación inicial de profesores, en relación con el razonamiento algebraico elemental. En este sentido, por medio de la realización de tareas de análisis didáctico[2] se busca desarrollar tres de las formas de conocimiento matemático para enseñar propuestas por Ball y colaboradores, a saber: (1) conocimiento común del contenido: conocimiento matemático del currículo escolar; (2) conocimiento especializado del contenido: es el utilizado por el profesor en la enseñanza y que va más allá de la matemática del currículo en sí; (3) conocimiento del contenido y de los estudiantes: la intersección del conocimiento matemático y el conocimiento acerca de los alumnos. (Ball, Thames y Phelps, 2008; Hill, Ball y Schilling, 2008)

La manifestación de estas formas de conocimiento es observada al indagar sobre las competencias, exhibidas por un grupo de maestros en formación inicial, para identificar y analizar tareas que promuevan el razonamiento algebraico elemental, en el contexto del diseño de una unidad didáctica.

Previamente presentamos algunas reflexiones sobre el papel del álgebra en educación primaria y sobre la visión ampliada del álgebra que comporta su incorporación en los primeros niveles educativos.

2. El razonamiento algebraico elemental en la escuela

En los Principios y Estándares para las Matemáticas Escolares del National Council of Teachers of Mathematics (NCTM, 2000) se propone el *Álgebra* como uno de los cinco bloques de contenido, junto con Números y Operaciones, Geometría, Medida, Análisis de datos y Probabilidad, con la particularidad de que este bloque se debe desarrollar, no sólo en los niveles de enseñanza secundaria, sino incluso desde Preescolar. Carraher y Schliemann (2007, p. 675) formularon dos preguntas: ¿Pueden los niños de escuela elemental operar con álgebra?, ¿Pueden los maestros enseñar álgebra?

En relación con la primera pregunta, diversas investigaciones refieren a los logros de niños de escuela primaria cuando trabajan con tareas propias del razonamiento algebraico elemental (Amit y Neria, 2008; Becker y Rivera, 2008, Britt e Irwin, 2008). En relación con la segunda pregunta algunos estudios informan sobre las competencias y creencias de maestros activos en relación con aspectos centrales del razonamiento algebraico elemental, tales como la resolución de problemas de palabras (Van Doren, Verschaffel y Onghema, 2003), el signo igual y la variable (Asquith, Stephens, Knuth, y Alibali, 2007), la equivalencia y el pensamiento relacional (Stephens, 2006) y en general sobre el reconocimiento y promoción del razonamiento algebraico por parte de un profesor durante las clases (Blanton y Kaput, 2005). Estos estudios señalan algunas deficiencias en la formación inicial de maestros quienes podrían desaprovechar, debido a esas deficiencias, las competencias algebraicas espontáneas de los niños.

[1] Siglas correspondientes a la expresión inglesa, "Mathematical Knowledge for Teaching".
[2] Una aplicación de esta forma de análisis puede verse en Godino, Rivas, Castro y Konic (2008)

En atención a las sugerencias de inclusión del álgebra en el currículo de la matemática escolar que la contemple como un nuevo contenido trasversal con los demás bloques temáticos (NCTM, 2000), a los logros de los niños de escuela elemental (Becker y Rivera, 2008), las experiencias de inclusión del razonamiento algebraico en el currículo de algunos países (Fong, 2004; Watanabe, 2008), los reportes sobre investigaciones longitudinales que apoyan la inclusión del razonamiento algebraico desde la escuela elemental (Derry, Wilsman y Hackbarth, 2007); parece pertinente ofrecer a los futuros maestros experiencias de formación, sobre planeación y análisis didáctico de tareas, que incluyan algunos aspectos del razonamiento algebraico elemental, para iniciarlos en su reconocimiento y promoción cuando este sea manifestado por los niños.

2.1. Aproximación desde el Enfoque Onto-semiótico

Algunos autores han propuesto aproximaciones al razonamiento algebraico elemental en la escuela primaria (Kaput, 2000; Kieran, 1996; Burkhardt, 2001). Tales aproximaciones favorecen una visión más amplia del álgebra escolar, diferente de la que resulta de la aproximación truncada de “álgebra como aritmética generalizada” como manejo de expresiones literales. Apoyados en las nociones de práctica, objeto y proceso matemático introducidas en el Enfoque Onto-Semiótico (EOS) de la cognición e instrucción matemática (Godino, Batanero y Font, 2007), se propone una aproximación al Razonamiento Algebraico Elemental (RAE) que lo considera como el sistema de prácticas operativas y discursivas puestas en juego en la resolución de tareas abordables en la educación primaria en las cuales intervienen objetos y procesos algebraicos (simbolización, relación, variables, incógnitas, ecuaciones, patrones, generalización, modelación, etc.).

2.2. Conocimiento matemático para la enseñanza

Ball y colaboradores, de la Universidad de Michigan, han publicado diversos trabajos sobre el conocimiento matemático para la enseñanza que se vinculan, en particular, con la competencia tanto para reconocer el razonamiento algebraico elemental en los materiales curriculares como para promover las manifestaciones matemáticas de los niños.

La propuesta de Ball y colaboradores sugiere un fraccionamiento del “conocimiento didáctico del contenido” (Shulman, 1986) que favorece el estudio de cada una de sus componentes y las relaciones entre las mismas (Ball, Thames y Phelps, 2008). Para operacionalizar la propuesta de Ball y cols., es necesario diseñar instrumentos que puedan ser usados por los formadores de maestros para promover tanto el reconocimiento del conocimiento matemático presente y emergente en la resolución de una tarea matemática como en las resoluciones dadas por los niños.

Para Blanton y Kaput (2005, p. 414): “la mayoría de los profesores de escuela elemental tienen poca experiencia con los aspectos ricos y conexos del razonamiento algebraico elemental…” y agregan “…debemos proveer formas apropiadas de apoyo profesional que produzca cambio en las prácticas curriculares” (p. 414).

Por tanto se ha considerado pertinente investigar y valorar el diseño de una herramienta que favorezca el reconocimiento de los conocimientos matemáticos, sus relaciones y su adecuación para la enseñanza, en el contexto de un curso de formación inicial de maestros de primaria.

2.3. Exploración de competencias de diseño y análisis didáctico

Discutiremos dos competencias específicas para la formación didáctica de los futuros maestros (Godino, .Rivas, Castro y Konic, 2008), considerando algunos elementos del EOS (Godino, Batanero y Font, 2007). La primera refiere a la competencia de diseño de un proceso de estudio didáctico-matemático, que involucra: la selección de problemas matemáticos pertinentes para el desarrollo del razonamiento algebraico elemental de los alumnos; además de definir, enunciar y justificar los conceptos, procedimientos y propiedades en función de su uso en un proceso de enseñanza. La segunda se refiere al conocimiento didáctico específico que permite utilizar el reconocimiento de conceptos, procedimientos y propiedades en función de la enseñanza, conllevando a la identificación de conflictos de significado que posiblemente se manifiesten en el aprendizaje matemático involucrado en el razonamiento algebraico elemental.

Godino (2009) presenta un modelo para el estudio del conocimiento didáctico-matemático del profesor, en el que se identifican diversas dimensiones (epistémica, cognitiva, afectiva, instruccional y ecológica) implicadas en el proceso de enseñanza y aprendizaje de contenidos específicos. Considerando diversas propuestas para el estudio del conocimiento del profesor (Shulman, 1986, Hill, Ball y Schilling, 2008; Schoenfeld y Kilpatrick, 2008), haciendo uso de herramientas teóricas propuestas por el EOS; se observa, en el uso de este modelo, un refinamiento que posibilita realizar un análisis más detallado de la puesta en juego de esta forma de conocimiento.

En relación con estas aportaciones, pretendemos observar la manifestación de las dimensiones epistémica y cognitiva del conocimiento didáctico-matemático, exhibido por un grupo de maestros en formación inicial, al diseñar una propuesta de enseñanza que involucra el razonamiento algebraico elemental.

Si bien las dos competencias referidas se enuncian separadamente, su desarrollo tiene como tarea común el llevar a efecto un análisis didáctico (epistémico y cognitivo) en el que se desarrolla el conocimiento matemático para la enseñanza (MKT), puesto que comprende: (a) una solución de un problema matemático; lo cual requiere el desarrollo del *conocimiento común del contenido*, (b) identificación de conceptos, propiedades y procedimientos puestos en juego en el proceso de resolución del problema, esta identificación se debe hacer en función de que esa resolución sea explicada y discutida con los niños; lo cual fomenta el desarrollo del *conocimiento especializado del contenido*, (c) además, esa identificación, comprende el señalamiento de posibles conflictos de significado que podrían surgir en la interacción didáctica, cuyo objetivo es incrementar la idoneidad del proceso de enseñanza y aprendizaje planificado; esta acción está en relación con el desarrollo del *conocimiento del contenido y de los estudiantes* (Hill, Ball y Schilling, 2008).

En síntesis, la manifestación y desarrollo de estas formas del conocimiento matemático para la enseñanza es puesto en juego por medio del uso de una herramienta de análisis didáctico utilizada para el desarrollo de las dimensiones epistémica y cognitiva propuestas por el EOS. En el siguiente apartado informamos sobre la puesta en juego de esa herramienta y su valoración cuando es utilizada por maestros en formación inicial en el contexto del diseño de una Unidad Didáctica sobre razonamiento algebraico elemental.

2.4. El Análisis Epistémico mediante la GROS

En el EOS se ha introducido la noción de configuración de objetos y significados como un recurso para describir los conocimientos matemáticos puestos en juego en la resolución de un problema matemático. Esta noción favorece ampliar la atención dada a las representaciones e incluir el estudio de los tipos de entidades (elementos lingüísticos, conceptos, procedimientos, propiedades y argumentos) y el papel que desempeñan en la actividad matemática (Font, Godino y D'Amore, 2007).

La noción se concreta en una herramienta denominada Guía de Reconocimiento de Objetos y Significados (GROS) que comprende la identificación de los tipos de objetos o entidades primarias referidas, puestas en juego en la solución del problema, agrupadas en los siguientes tipos: elementos lingüísticos (términos y expresiones matemáticas; símbolos, representaciones gráficas), conceptos (entidades matemáticas para las cuales se puede formular una definición), procedimientos (técnicas, operaciones, algoritmos), propiedades (enunciados para las cuales se requiere una justificación o prueba) y argumentos (justificaciones, demostraciones, o pruebas de las proposiciones usadas). Así mismo, para cada una de estas entidades se identifican posibles conflictos de significado que podrían surgir durante la actividad de resolución del problema.

Esta herramienta vincula la primera competencia referida al diseño de un proceso de estudio didáctico-matemático, en tanto que requiere la selección y resolución de problemas matemáticos con fines didácticos, con la segunda, referida al uso y reconocimiento de objetos y significados matemáticos para la identificación de conflictos potenciales en el desarrollo del razonamiento algebraico elemental. En el apartado 4.2 se mostrará un ejemplo de análisis epistémico, dado por un grupo de maestros en formación inicial. Se incluyen comentarios valorativos y vinculaciones con un trabajo análogo, realizado por otro grupo de futuros maestros.

3. Metodología

Con la finalidad de explorar las competencias de diseño y de análisis didáctico sobre RAE que exhiben los futuros maestros, se les propuso diseñar una unidad didáctica sobre el álgebra, para el sexto curso (11-13 años) de primaria. La investigación se realizó en el marco del curso "Currículo de Matemáticas en Educación Primaria" impartido en la Facultad de Ciencias de la Educación de la Universidad de Granada, España, el cual tiene una componente práctica y una teórica.

Durante el desarrollo del curso, el conocimiento del contenido del álgebra y su didáctica no fueron motivo de estudio. Al margen del desarrollo del curso, sólo se les dio a los futuros maestros una aproximación al RAE, desde la perspectiva del EOS. La investigación en cuestión se realizó durante el primer cuatrimestre del curso 2008-2009. Los maestros en formación inicial sobre quienes se informa en este documento tienen en promedio 20 años, manifiestan gusto por las matemáticas, no tienen experiencia docente, sin embargo suelen dar asesorías a niños de escuela primaria. Durante las reuniones de trabajo mostraron un pensamiento crítico e independiente. Específicamente se informa sobre la actuación de dos grupos, conformados por cuatro maestros en formación inicial, cada uno.

3.1. Toma de datos

Se realizó un proceso de estudio con los dos grupos donde el primer autor jugó un doble papel de participante y observador, y donde se procuró no ejercer autoridad epistémica ni deontológica para favorecer la participación y la manifestación de conocimientos y creencias por parte de los participantes. Así mismo se intentó crear conflictos epistémicos y se estimuló el debate sobre la explicación; los participantes debían tomar decisiones no sólo sobre la selección e inclusión de los ejercicios sino sobre su carácter algebraico. Como tarea opcional se les solicitó cumplimentar la Guía de Reconocimiento de Objetos y Significados -GROS- cuyo uso no estaba considerado como requisito para el diseño de su Unidad Didáctica.

Se sostuvieron 8 reuniones con cada grupo, con una duración promedio de 45 minutos. Para obtener comprensión del proceso experimentado por los futuros maestros se efectuó una triangulación y se usaron varias fuentes de datos: solución escrita de ejercicios, identificación escrita de elementos algebraicos, borradores previos de las unidades didácticas, audio de las discusiones y video de las presentaciones finales de las unidades didácticas.

4. Análisis y resultados

4.1. Los análisis realizados por los grupos

Mostramos a continuación parte del trabajo realizado por dos grupos de maestros en formación inicial, al proponer, resolver y analizar dos problemas de razonamiento algebraico elemental, seleccionados de un libro de texto de sexto curso de primaria, un problema por cada grupo. Observaremos que el primer grupo, al analizar la tarea, realiza un análisis epistémico mediante el uso de la GROS, mientras que el segundo no. Por razones de espacio sólo mostraremos algunas de las entradas de las tablas (1 a la 4) propuestas por el primer grupo. Para cada tabla se presentan comentarios valorativos de las identificaciones realizadas por este grupo, las cuales, tal como podrá observarse, refieren al desarrollo del *conocimiento especializado del contenido*.

4.1.1. Grupo uno (G-1)

Este grupo propuso la siguiente tarea de razonamiento algebraico elemental:

Problema: Cambia las letras por números del 1 al 16 de manera que sumados en cualquier dirección, el resultado sea 34

A	3	B	13
5	10	C	D
E	6	7	F
4	G	H	1

Figura 1: Problema de RAE propuesto por G-1

Los integrantes del G-1 proponen una solución algebraica del problema, que pone de manifiesto su conocimiento común del contenido, y justo después hacen uso de la GROS.

Comentario sobre los elementos lingüísticos identificados por G-1 (Tabla 1): Las interpretaciones de los elementos lingüísticos presentadas por el G-1, se limitan a parafrasear el enunciado del problema e identificar una frase que consideran clave "En cualquier dirección". El parafraseo mostrado muestra que se comprenden las demandas del enunciado, quedando implícitas interpretaciones más específicas, presentes en las condiciones planteadas en el problema. Las condiciones planteadas en el problema sugieren una solución de carácter aritmético, en tanto que se pide "cambiar las letras por números". Es posible que el procedimiento escogido por un niño sea el de ensayo y error. Los términos lingüísticos usados: "cambia… de manera que… el resultado sea", introducen conceptos tales como: incógnita, ecuación, igualdad, cuyos significados, propiedades y procedimientos pueden relacionarse argumentativamente de manera compleja y en formas que favorezcan o inhiban la solución del problema (Castro y Godino, 2009).

Tabla 1. Identificación de elementos lingüísticos

Tipos de objetos	**Significados** (relación de referencia o de uso)
Elementos lingüísticos: representaciones (Términos y expresiones matemáticas; símbolos, representaciones gráficas, …)	
Cambia las letras por números del 1 al 16 de manera que sumados en cualquier dirección, el resultado sea 34	Si sumamos los números colocados en cada una de las casillas de una fila, columna o diagonal, el resultado debe ser 34.
En cualquier dirección	Se suma de izquierda a derecha, de arriba hacia abajo y en sentido diagonal (principal y secundaria)

En relación con la solución algebraica propuesta por el G-1, en el apartado de conflictos, se comentan posibles conflictos de significado.

Tabla 2. Identificación de conceptos

Tipos de objetos	**Significados** (relación de referencia o de uso)
Conceptos (Entidades matemáticas para las cuales se puede formular una definición)	
Introducción a la notación algebraica mediante el uso de incógnitas.	Los valores numéricos con los que debemos rellenar el cuadro son desconocidos, por ello usamos las incógnitas A,B,C,D, E, F, G y H para designarlos
Suma	Operación que nos permite encontrar el total, o suma, a partir de la unión de dos o más números a los que llamamos sumandos.
Resta	Operación utilizada para encontrar la diferencia, o proceso de quitar un número de otro para encontrar la cantidad restante
Ecuaciones de primer grado con una incógnita	Expresión matemática que establece una relación de igualdad entre dos términos, cada uno de los exponentes [sic] que acompañan a las cifras que componen cada uno de los dos términos son 0 o 1.

Comentario sobre los conceptos identificados por G-1 (Tabla 2): Nótese que los significados conferidos a los conceptos de suma y de resta son expresados en términos de "operaciones", que son usados en la solución del problema. El G-1 reconoce la presencia de elementos algebraicos en el problema tales como ecuación, incógnita y grado de la ecuación. Llama la atención el significado conferido al concepto de "ecuación" dado en términos de la igualdad, pero invocando el significado de "relación" en lugar del de resultado; la importancia de esta asignación de significado relacional al signo igual y su rol en las tareas de RAE ha sido resaltada por diversos autores (Carpenter, Levi, Franke y Zeringue, 2005; Fujii y Stephens, 2001).

Comentarios sobre los procedimientos identificados por G-1 (Tabla 3): Los procedimientos identificados se corresponden con los usados por el G-1 en la solución matemática del problema, y los significados conferidos se adecuan al problema. Nótese que los significados para "algoritmo de sumar y de restar" se expresan en términos de lo que el procedimiento "permite" hacer. Mientras que el procedimiento de "resolución" se indica en términos de "propósito". El significado conferido a "asignación de un valor numérico…" se da en términos de sustitución de letras por números.

Tabla 3. Identificación de procedimientos

Tipos de objetos	**Significados** (relación de referencia o de uso)
Procedimientos (Técnicas, operaciones, algoritmos)	
Traducción de lenguaje ordinario a lenguaje algebraico	Al leer en el enunciado: "Los sumandos en cualquier dirección tienen que sumar 34…", el alumno lo traduce al lenguaje algebraico, buscando ecuaciones en las que sólo desconozca un dato y las iguala a 34 que sabe que debe ser el resultado de cada suma. *Ej:* $3 + 10 + 6 + G = 34$
Algoritmo de sumar	Nos permite establecer las relaciones entre los sumandos y el total
Algoritmo de restar	Nos permite calcular el valor de cada una de las letras, ya que restamos al total (que es un valor constante y conocido), el valor de cada uno de los sumandos salvo uno, que es el sumando cuyo valor deseamos conocer
Resolución de ecuaciones de primer grado	Para hallar el valor de cada una de las incógnitas.
Asignación de un valor numérico a una incógnita que era desconocida en un principio.	Se sustituye cada una de las letras del crucigrama, por el valor numérico calculado mediante los procedimientos que se indican.

Nótese que el concepto de incógnita, inmerso en la solución del problema, no ha sido específicamente mencionado por el G-1 en su listado de conceptos, sin embargo, aparece en los significados que surgen en la identificación de procedimientos: valor desconocido que debe y puede ser hallado y que se suele representar por una letra. Se resalta aquí una característica de la GROS: la promoción del surgimiento de objetos y significados vinculados con el problema que emergen a lo largo del análisis epistémico. En tal sentido la GROS es una herramienta que da cuenta de un proceso complejo y dinámico, y que puede ser cumplimentada de varias maneras; lo cual pone de manifiesto la relatividad de los objetos y significados matemáticos (Radford, 2006).

Comentarios sobre las propiedades identificadas por G-1 (Tabla 4): El G-1 logra identificar dos propiedades, entre varias que se pueden señalar, en la resolución del problema.

La primera propiedad identificada es la de la unicidad del valor numérico, la cual es posteriormente considerada como un posible conflicto de significado, en tanto que, si esta propiedad no es reconocida en acto por los niños, podrían dar varios valores a la misma incógnita.

La segunda propiedad identificada determina el procedimiento que utiliza el G-1para resolver el problema: en cada fila o columna escogen las ecuaciones con dos incógnitas que pueden ser reducidas a una sola incógnita, a partir de las incógnitas previamente determinadas. Nótese que este criterio es el mismo que se usa en el método de reducción de Gauss-Jordan para resolver sistemas de ecuaciones lineales.

Tabla 4: Identificación de propiedades

Tipos de objetos	**Significados** (relación de referencia o de uso)
Propiedades (Enunciados para las cuales se requiere una justificación o prueba)	
P1: Cada una de las incógnitas tiene un único valor numérico	A cada una de las letras del cuadro le corresponde un único valor numérico, que debe estar comprendido entre 1 y 16
P2: Solo podemos calcular el valor de aquellas incógnitas situadas en una fila, columna o diagonal en la que el resto de los datos son conocidos.	Por trabajar con ecuaciones de primer grado con una sola incógnita, para tratar de hallar el valor numérico de las letras del cuadro, debemos saber que el resto de valores situados en la misma fila, columna o diagonal deben ser conocidas.

4.1.2. Grupo dos (G-2)

En la siguiente figura mostramos un ejercicio y la propuesta de análisis realizada por el segundo grupo, el cual no utilizó la GROS durante el proceso de elaboración de la unidad didáctica. Seguidamente se presentan comentarios valorativos del trabajo realizado por este grupo.

Problema: **¿Qué números pueden ser?**

? + ? + ? + ? = 13

Busca todos los números que cumplan estas condiciones: La suma de sus cuatro cifras es 13; la cifra de las decenas es 0; la cifra de las unidades de millar es el triple que la de las unidades.

[La solución matemática dada por el G-2, es:]

$$3x + y + 0 + x = 13 \quad ; \quad 4x + y = 13 \quad ; \quad y = 13 - 4x$$

RESULTADOS: x = 0 y = 13; x = 1 y = 9 ; x = 2 y = 5 ; x = 3 y = 1

Fig. 2: Problema de RAE y solución dada por el G-2.

Comentarios sobre la propuesta y resolución del G-2: De esta propuesta dos aspectos llaman la atención: el primero es que la tarea pone en juego varios elementos propios del razonamiento algebraico elemental, tales como: variable, ecuación, solución de una ecuación; la segunda es que la solución dada no es fácil de entender, en tanto que no se ha especificado cómo, a partir de las condiciones dadas, se obtiene una ecuación, tampoco se ha asignado significado a las letras “x” e “y” ni se indica cómo, a partir de los valores asignados a estas letras, se puede dar la respuesta al problema planteado.

Aún cuando se deduce, del planteamiento del problema y de su resolución, un posible manejo implícito de los elementos propios del razonamiento algebraico referidos, la competencia didáctica de los maestros, referida específicamente a la selección de problemas matemáticos pertinentes y a la definición, enunciación y justificación de los conceptos, procedimientos y propiedades en función su enseñanza, está pobremente manifestada en este caso.

Parece que este grupo considera que es suficiente proveer una solución al problema para enseñarlo; los problemas didácticos convocados por el problema no han sido reconocidos por el G-2, cuyos integrantes podrían no estar del todo preparados para abordar con pertinencia su enseñanza para niños de sexto curso de primaria (11-13 años). No se evidencia, como en el caso del G-1, el desarrollo del conocimiento matemático para enseñar, excepto en su forma de conocimiento común del contenido.

Para Carraher, Schliemann, Brizuela y Earnets (2006) “la idea no es simplemente atribuir significado algebraico a las actividades matemáticas de la escuela primaria. Los contenidos matemáticos deben ser transformados sutilmente para resaltar su carácter algebraico”, (p. 88). La competencia de transformación referida anteriormente no se evidencia en el trabajo realizado por el G-2.

4.2. Identificación de posibles conflictos de significado

A partir de la discusión de los objetos y de sus significado intervinientes y emergentes durante la resolución particular dada al ejercicio, se pueden señalar posibles conflictos de significado que podrían surgir durante la interacción didáctica. Desde la perspectiva del desarrollo del conocimiento didáctico-matemático (Godino, 2009; Hill, Ball y Schilling, 2008) se considera que la preparación de una actividad matemática con fines instruccionales no solamente debe considerar la “solución matemática” sino un conjunto de posibles conflictos y modos de abordarlos. Esto se hace aún más pertinente cuando se trabaja con maestros en formación quienes posiblemente carecen del conocimiento de los niños (Shulman, 1986) y de los conflictos que estos suelen manifestar.

4.2.1. Conflictos identificados por el G-1

Los conflictos de significado identificados por el G-1 refieren a elementos lingüísticos, conceptos y procedimientos. A continuación señalaremos algunos de tales conflictos en el orden indicado (Fig 3 a la 5). Para cada tipo de conflicto identificado se presentan comentarios valorativos correspondientes.

- La instrucción "en cualquier dirección" podría ser interpretada también, en el sentido "diagonal"; que sólo es valida para las diagonales principales pero no para las diagonales secundarias.

- Si los niños resuelven el problema algebraicamente, obtendrán "muchas" ecuaciones e incógnitas, lo cual podría desmotivarlos dado que hay muchas incógnitas y los niños podrían pensar que no es posible resolver el problema.

- Si resuelven el problema aritméticamente, por ensayo y error, podrían presentarse dos soluciones:

- ***En la primera, los niños podrían no tener en cuenta que aunque los valores de las letras no se conocen, estos son únicos; de tal suerte que podrían dar valores diferentes a la letra A en la ecuación de la primera fila (A+3+B+13=34), y un valor diferente cuando se considera la misma letra en la correspondiente ecuación de la primera columna (A+5+E+4=34).***
- ***En la segunda solución, por ensayo y error, los niños podrían desanimarse en tanto que algunos valores de las letras asignados por ellos, en unos casos no servirán para resolver las ecuaciones en otros casos.***

Figura 3: Conflictos relacionados con elementos lingüísticos identificados por G-1

Comentarios sobre los conflictos relacionados con elementos lingüísticos identificados por G-1 (Fig. 3): *Nótese que estas identificaciones podrían ubicarse preferentemente en "procedimientos", pero han sido ubicadas por el G-1 en "elementos lingüísticos" en tanto que fueron originadas en las consideraciones motivadas por estos. Desde un punto de vista didáctico, no importa en que categoría se rotule un objeto, sus significados y los eventuales conflictos; sino la identificación de los mismos.*

Se resalta la identificación de elementos lingüísticos cuya interpretación puede modificar el proceso de significación y solución del ejercicio por parte de los niños; para MacGregor y Price (1999) "la conciencia de las estructuras del lenguaje y la habilidad para manipular esas estructuras puede ser una manifestación de un proceso cognitivo más profundo que también subyace la comprensión de la notación algebraica" (p. 462).

- El concepto de ecuación será muy difícil para los niños.
- Los niños no han visto ecuaciones y no se les ha enseñando cómo resolverlas.
- Lo mismo sucede con el concepto de "sistemas de ecuaciones"

Figura 4: Conflictos relacionados con conceptos identificados por G-1

Comentarios sobre los conflictos relacionados con conceptos identificados por G-1 (Fig. 4): *La solución algebraica del problema, propuesta por el G-1, conlleva al uso de conceptos (ecuaciones, sistemas de ecuaciones) en un sentido algebraico avanzado, lo cual se considera difícil para el nivel de primaria. Este reconocimiento debe conducir a buscar formas alternativas para la planificación y desarrollo de la actividad de enseñanza, por ejemplo; modificar las variables de la tarea, hacerla resoluble por medio de una asignación sencilla de valores.*

- En la resolución algebraica la “resolución del sistema” de ecuaciones y el “orden” en que se deben resolver, es la mayor dificultad para los niños; ya que los niños deben elegir el orden en que se deben escoger las ecuaciones, siempre buscando tener una ecuación con una incógnita;
- Deben resolver todas las ecuaciones en pirámide;
- Si los niños resuelven el problema por ensayo y error, entonces el problema es mas difícil, pues los niños ensayarán valores en desorden y se liaran mucho con la solución

Figura 5: Conflictos relacionados con procedimientos identificados por G-1

Comentarios sobre los conflictos relacionados con procedimientos identificados por G-1 (Fig. 5): El G-1 no refiere a que los niños podrían tener dificultades para resolver las ecuaciones con una sola incógnita. Al parecer consideran que el procedimiento de “operar en reversa” o de “transponer” términos será naturalmente desarrollado por los niños. (Filloy, Rojano y Puig, 2008)

4.2.2. Conflictos identificados por el G-2

Los conflictos identificados por el G-2 se presentan en la Figura 6.

Comentarios sobre los conflictos identificados por G-2 (Fig. 6): Si bien es cierto que el G-2 identifica eventuales conflictos que podrían ser manifestados por los niños durante el proceso de resolución, también es cierto que algunos de ellos son tan difíciles de comprender como la solución matemática que dieron al problema. La identificación de conflictos hecha por el G-2 parece no dar importancia al subsiguiente proceso de explicación y discusión del ejercicio con niños reales.

- Los niños no reconocerán las tres condiciones; en el enunciado nos indica que busquemos “todos” los números, y les resultará un problema saber si los que han puesto serán todos, o si les falta alguno.
- Los niños van a suponer que todos los números que van a buscar para que les den 13, serán números naturales, y en cambio, a partir de x=4, se obtienen números negativos.
- La interrogación puede confundir a los niños, ya que puede que piensen que al ser el mismo símbolo, también será el mismo número.
- Las condiciones segunda y tercera son confusas porque sus enunciados, muestran a todos los sumandos, como si se tratase de una cifra de 4 dígitos, aspecto que no se aprecia en la representación gráfica, ya que se consideran números individuales.

Figura 6: Conflictos identificados por G-2

La comparación con el trabajo de identificación del G-1 no puede ser evitada. Se considera que un proceso de identificación de posibles conflictos de significado como el realizado por el G-1 es más deseable, por la especificidad de sus identificaciones, en contraste con la generalidad de las identificaciones realizadas por el G-2.

5. Implicaciones para la formación de maestros

Parece que ambos grupos G-1 y G-2 manifiestan competencia para seleccionar ejercicios tipo RAE en libros de texto para sexto curso de primaria. Sin embargo, el G-1 también manifiesta competencia para el análisis didáctico; para reconocer, definir, y enunciar los conceptos, procedimientos y propiedades en función de su enseñanza. Mientras que el G-2 no lo hace.

El análisis didáctico efectuado por el G-1 le permite identificar posibles conflictos de significado más pertinentes y específicos, implicados en la tarea considerada. La idoneidad potencial del proceso de enseñanza planificado por el G-1 es mejor que la correspondiente al G-2, al no exhibir, este último, competencia para el análisis didáctico que debería preceder a la enseñanza de un tema matemático.

A pesar que ambos grupos tuvieron la oportunidad de discutir la pertinencia del análisis didáctico/epistémico (uso de la GROS) para el diseño de la unidad didáctica, el G-2 no lo utilizó para identificar los conocimientos matemáticos intervinientes y emergentes durante la solución del ejercicio, ni reconocer algunos conflictos potenciales más específicos y pertinentes. Podría ser el caso que este grupo no considere necesario realizar el análisis epistémico en tanto que el ejercicio propuesto y su análisis no serán puestos en práctica con niños en un contexto escolar real. También podría ser que las creencias dominantes de los futuros maestros entren en conflicto con las exigencias del análisis epistémico en tanto que cambiar las creencias es una tarea difícil que demanda un esfuerzo continuado (Wubbels, Korthagen y Broekman, 1997).

La puesta en práctica de la GROS ha permitido al G-1 efectuar un reconocimiento más específico de algunos elementos propios del razonamiento algebraico elemental; siendo la mera solución del ejercicio insuficiente, tanto para reconocer los diversos objetos y significados puestos en juego, como para planificar su enseñanza para los niños.

Se debe reconocer que la puesta en práctica de la GROS es un reto para los futuros maestros. La identificación y discriminación de los tipos de objetos y significados resulta conflictiva, ya que supone un cierto nivel de actividad metacognitiva (Jaworski, 2005) a la que no están habituados. Sin embargo, la actividad de análisis epistémico enmarcado en la formación inicial de maestros promueve el desarrollo del conocimiento matemático para la enseñanza (Ball, Thames y Phelps., 2008; Godino, 2009) en tanto que se ofrece una herramienta que promueve el reconocimiento de los diversos tipos de entidades y los significados que intervienen en la actividad de la instrucción matemática.

En consecuencia, este tipo de actividades de reflexión y análisis podría ayudar a profundizar la comprensión de los objetos y procesos de significación matemáticos en el contexto de la didáctica, que a su vez coadyuvan al reconocimiento y promoción del razonamiento algebraico elemental.

6. Reflexiones finales

Somos conscientes que nuestro énfasis en sólo dos competencias didácticas no da cuenta de la complejidad del proceso de diseño didáctico en términos de la propuesta de Ball, Thames y Phelps (2008); Godino (2009). Sin embargo, consideramos que la focalización en estas dos competencias y su puesta en práctica en tareas de razonamiento algebraico elemental, mediante el uso de la GROS, ha favorecido no sólo el reconocimiento del complejo entramado de objetos y significados inmersos en la solución de una tarea algebraica, sino que ha permitido avanzar hacia una respuesta a la pregunta: ¿Qué tipo de formación debe ser ofrecida a los maestros en formación para que puedan reconocer tanto el carácter algebraico de las tareas matemáticas como promover el razonamiento algebraico en los niños?.

En este sentido el presente trabajo aporta alguna información para apoyar la urgente necesidad de revisar los planes de formación de maestros en el área de matemáticas y de contemplar el razonamiento algebraico y su didáctica en el desarrollo de los distintos bloques de contenido.

Reconocimiento: Trabajo realizado en el marco del proyecto de investigación, SEJ2007-60110/EDUC. MEC-FEDER

Bibliografía

Amit M., Neria D. (2008): *Rising to the challenge: using generalization in pattern problems to unearth the algebraic skills of talented pre-algebra students*. ZDM. The International Journal on Mathematics Education, 40(1), 11-119.

Asquith P., Stephens A., Knuth E., Alibali M. (2007):*Middle school mathematics teachers' knowledge of students' understanding of core algebraic concepts: equal sign and variable.* Mathematical Thinking and Learning, 9(3), 249-272.

Ball D. L., Thames M. H., Phelps G. (2008): *Content Knowledge for Teaching: What Makes It Special?.* Journal of Teacher Education, 59(5), 389-407.

Beker J. R., Rivera F. D. (2008):*Generalization in algebra: the foundation of algebraic thinking and reasoning across the grades*. ZDM. The International Journal on Mathematics Education, 40(1), 1.

Blanton M. L., Kaput J.J. (2005): *Characterizing a classroom practice that promotes algebraic reasoning.* Journal for Research in Mathematics Education, 36(5), 412-446.

Britt M., Irwin K. (2008): *Algebraic thinking with and without algebraic representation: a three-year longitudinal study*. ZDM. The International Journal on Mathematics Education, 40(1), 39-53.

Burkhardt H. (2001): *Algebra for all: What does it mean? How are we doing?* En: H. Chick, K. Stacey, J. Vincent, J. Vincent (eds.) The future of the teaching and learning of algebra, Vol. 1, pp. 140-146. University of Melbourne, Australia.

Carpenter T., Levi L., Franke M.L., Zeringue J.K. (2005):*Algebra in elementary school: Developing relational thinking.* ZDM. The International Journal on Mathematics Education, 37, 53-59.

Carraher D. W., Schlieman A. (2007):*Early algebra and algebraic reasoning*. En: F. Lester (ed.) Second Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning, Vol. 2, 669-705. Information Age Publishing, Inc. y NCTM, Greenwich.

Castro W., Godino J.D. (2009): *Cognitive configurations of pre-service teachers when solving an arithmetic-algebraic problem*. Proceedings of the Sixth Conference of European Research in Mathematics Education. Université Claude

Bernard, Lyon, France. Disponible en Internet: http://www.ugr.es/local/jgodino/indice_eos.htm.

Davis R. B. (1989): *Theoretical considerations: Research studies in how humans think about algebra*. En: S. Wagner, C. Kieran (eds.) Research Issues in the Learning and Teaching of Algebra Vol. 4, 266-274. NCTM y Laurence Erlbaum Associates, Reston, VA.

Derry S. J., Wilsman M. J., Hackbarth A. J. (2007):*Using contrasting case activities to deepen teacher understanding of algebraic thinking and teaching*. Mathematical Thinking and Learning, 9(3), 305-329.

Filloy E.; Rojano T., Puig L..(2008). *Educational Algebra: A theoretical and Empirical Approach* (Vol. 43): Springer.

Fong N. S. (2004):*Developing algebraic thinking in early grades: A case study of the Singapore primary mathematics curriculum*. The Mathematics Educator, 8(1), 39-59.

Fujii T., Stephens M. (2001):*Fostering an understanding of algebraic generalisation through numerical expressions: The role of quasi-variables*. En: H. L. Chick, K. Stacey, J. Vincent, J. Vincent (eds.) Proceedings of the 12th ICMI Study Conference. The Future of the Teaching and Learning of Algebra, Vol. 1, 258-264. University of Melbourne, Melbourne.

Godino J. D. (2009):*Categorías de análisis de los conocimientos del profesor de matemáticas*. UNIÓN Revista Iberoamericana de Educación Matemática, 20, 13-31.

Godino J. D., Batanero C., Font V. (2007):*The onto-semiotic approach to research in mathematics education*. ZDM The International Journal on Mathematics Education, 39(1-2), 127-135. [Versión ampliada en español: Un enfoque ontosemiótico del conocimiento y la instrucción matemática. Disponible en Internet: http://www.ugr.es/local/jgodino/indice_eos.htm]

Godino J. D., Rivas M., Castro W. F., Konic P. (2008):*Desarrollo de competencias para el análisis didáctico del profesor de matemáticas.* Actas de las VI Jornadas de Educación Matemática Región de Murcia. Centro de Profesores y Recursos. Murcia. Disponible en Internet: http://www.ugr.es/local/jgodino/indice_eos.htm .

Hill H. C., Ball D.L., Schilling S.G. (2008):*Unpacking pedagogical content knowledge: Conceptualizing and measuring teachers' topic-specific knowledge of students.* Journal for Research in Mathematics Education, 39, 372-400.

Jaworski B. (2005):*Tools and tasks for learning and meta-learning*. Journal of Mathematics Teacher Education, 8, 359-361.

Kaput J. J. (2000):*Transforming algebra from an engine of inequity to an engine of mathematical power by "algebrafying" the K–12 curriculum*. En: National Research Council (ed.) The nature and role of algebra in the K–14 curriculum: Proceedings of a National Symposium. National Academy Press, Washington, DC. Disponible en http://eric.ed.gov/ (Eric # ED441664).

Kieran C. (1996):*The changing face of school algebra*. En B. Hodgson, C. Alsina, J. Alvarez, C. Laborde, A. Pérez (eds.) 8vo Congreso Internacional de Educación Matemática: Selección de conferencias, 271-290. Sociedad Andaluza de Educación Matemática “Thales”, Sevilla, España.

MacGregor M., Price E. (1999):*An exploration of aspects of language proficiency and algebra learning*. Journal for Research in Mathematics Education, 30(4), 449-467.

National Council of Teachers of Mathematics (2000): Principles and standards for school mathematics. NCTM, Reston, VA.

Radford L. (2006):*The anthropology of meaning*. Educational Studies in Mathematics, 61(1-2), 39-65.

Schoenfeld A. H., Kilpatrick J. (2008):Towards a theory of proficiency in teaching mathematics. En: D. Tirosh, T. Wood (eds.) Tools and Processes in Mathematics Teacher Education, 321-354. Sense Publishers, Rotterdam.

Shulman L. S. (1986):*Those who understand: Knowledge growth in teaching.* Educational Researcher, 15(2), 4-14.

Stephens A. C. (2006):*Equivalence and relational thinking: Preservice elementary teachers' awareness of opportunities and misconceptions*. Journal of Mathematics Teacher Education, 9, 249-278.

Stump S. L., Bishop J. (2002):*Preservice elementary and middle school teachers' conceptions of algebra revealed through the use of exemplary curriculum materials.* En: D. S. Mewborn, P. Sztajn, D. Y. White, H. G. Wiegel, R. L. Bryant, K. Nooney (eds.) Proceedings of the Twenty-Fourth annual meeting of the International Group for the Psychology of Mathematics Education, 1903-1914, PME, Columbus, OH.

Vergnaud G. (1988): *Long terme et court terme dans l'apprentissage de l'algèbre.* En: C. Laborde, N. Balacheff (eds.) Actes du Premier Colloque Franco-Allemand de Didactique des Mathématiques et de l'informatique, 189-199, La Pensée Sauvage, Grenoble, Paris.

Van Dooren W., Verschaffel L., Onghema P. (2003): *Pre-service teachers' preferred strategies for solving arithmetic and algebra word problems*. Journal of Mathematics Teacher Education, 6, 27-52.

Watanabe T. (2008): *Algebra in elementary school: A Japanese perspective*. En: C. E. Greenes, R. Rubenstein (eds.) Algebra and Algebraic Thinking in School Mathematics, 183-193. National Council of Teachers of Mathematics, Reston, VA.

Wubbels T., Korthagen F., Broekman H. (1997):*Preparing teachers for realistic mathematics education*. Educational Studies in Mathematics, 32, 1-28.

Walter F. Castro G, docente de la Universidad de Antioquia, Facultad de Educación Medellín, Colombia. Licenciado en Educación, Matemático, Magíster en Matemáticas, Magíster en Didáctica de las Matemáticas, Candidato a Doctor en Didáctica de las Matemáticas por la Universidad de Granada, España. **wcastro@ugr.es**

Juan Díaz Godino, Catedrático de Universidad de Didáctica de la Matemática de la Universidad de Granada. Coordina un grupo de investigación sobre los fundamentos teóricos y metodológicos de investigación en Didáctica de la Matemática. Una selección de sus trabajos está disponible en http://www.ugr.es/local/jgodino

Mauro Rivas Olivo, docente de la Universidad de los Andes, Mérida. Venezuela. Profesor en Educación Matemática y Magíster en Matemática. Universidad de los Andes. Venezuela. Master en Didáctica de la Matemática y Candidato a Doctor en Didáctica de las Matemáticas por la Universidad de Granada, España