

Registros de representação semiótica em atividades de Modelagem matemática: uma categorização das práticas dos alunos

Lourdes María Werle de Almeida; Rodolfo Eduardo Vertuan

Resumo

O trabalho busca uma aproximação entre Modelagem Matemática e Registros de Representação Semiótica. A partir da análise de atividades de Modelagem desenvolvidas com grupos de alunos identificamos que suas práticas no que se refere à produção e articulação de registros podem ser agrupadas em três categorias: usam diferentes registros, mas não estabelecem relações entre eles; realizam conversões entre pares de registros, mas não chegam a coordenar a totalidade de registros; fazem a coordenação entre os registros e estabelecem relações com o problema em estudo.

Abstract

In this paper we are looking for an approach between Mathematical Modeling and the Registers of Semiotics Representation. Starting from the analysis of Modelling activities developed by students we identified that them practices in what refer to the production and articulation of registers in the extent of the development of the activities can be contained in three categories: they use different registers, but they don't establish relationships among them; they accomplish conversions among two registers, but they don't get to coordinate the totality of the registers; they coordinate the different registers and they establish relationships with the modelling activity.

Resumen

El trabajo busca una aproximación entre Modelización Matemática y Registros de Representación Semiótica. A partir del análisis de actividades de Modelización desarrolladas con algunos grupos de alumnos identificamos que sus prácticas en lo que se refiere a la producción y articulación de registros pueden ser agrupadas en tres categorías: usan diferentes registros, pero no establecen relaciones entre ellos; realizan conversiones entre pares de registros, pero no llegan a coordinar la totalidad de ellos; y los que hacen la coordinación entre los registros y establecen relaciones con el problema en estudio.

1. Introdução

Foco de pesquisas na área da Educação Matemática, a aprendizagem tem sido entendida como um processo dinâmico, complexo e influenciado por múltiplos fatores, combinados de tal modo que, torna-se praticamente impossível discuti-los e inferir sobre suas influências de forma isolada.

Neste trabalho, para tratar da compreensão dos alunos em relação à conceitualização dos objetos matemáticos, recorreremos à Teoria dos Registros de Representação Semiótica de Raymond Duval. Segundo o autor, o que os alunos fazem das representações semióticas de objetos matemáticos são determinantes

para a compreensão em matemática. No entanto, o modo como os alunos lidam com tais registros depende, em parte, das atividades desenvolvidas em ambiente escolar. Neste sentido, tratamos da Modelagem Matemática como alternativa pedagógica.

Para subsidiar nossas argumentações sobre o potencial da Modelagem para proporcionar a coordenação entre os diferentes registros de representação associados a um objeto matemático e como esta coordenação influencia a compreensão dos alunos a respeito destes objetos, desenvolvemos atividades de modelagem com alunos de um curso de Licenciatura em Matemática e de alunos de um curso de Especialização em Educação Matemática com alunos adultos e idades entre 19 e 28 anos.

A análise das práticas destes alunos nos leva a identificar três categorias com relação às práticas dos alunos no que diz respeito ao uso que fazem dos registros de representação quando envolvidos com atividades de modelagem, quais sejam: os alunos usam diferentes registros, mas não estabelecem relações entre eles; os alunos realizam conversões entre pares de registros, mas não chegam a coordenar a totalidade dos registros; os alunos fazem a coordenação entre diferentes registros e estabelecem relações com o problema de que trata a atividade de modelagem.

2. Conceitualização em Matemática e os Registros de Representação Semiótica

Diversas pesquisas, especialmente no âmbito da Educação Matemática, têm tratado da produção dos registros dos alunos, do modo como eles lidam com tais registros e das relações destes registros com a aprendizagem. Neste sentido, a aprendizagem de conceitos matemáticos estaria subordinada, ao menos em parte, às representações deste conceito, uma vez que, em Matemática, os objetos matemáticos, enquanto ideias, tornam-se acessíveis por meio de suas diferentes representações.

A compreensão do conceito associado ao objeto matemático¹, todavia, implica em ir além de identificar e saber operar suas representações prototípicas. Implica em reconhecer nos diferentes registros o mesmo objeto matemático, bem como saber coordenar estes registros. Considerando esse entendimento a respeito da compreensão dos conceitos em Matemática, tratamos, neste texto, da teoria dos Registros de Representação Semiótica de Raymond Duval.

Segundo essa teoria, compreender um conceito matemático implica em ser capaz de diferenciar o objeto matemático da representação que o torna acessível. Para Duval (2003), “[...] os objetos matemáticos, começando pelos números, não são objetos diretamente perceptíveis ou observáveis com a ajuda de instrumentos” (p.14) e o acesso aos objetos matemáticos acontece por meio da utilização de uma representação. Estas representações podem ser mentais, internas (ou computacionais) e semióticas (Duval, 2004). As representações mentais cumprem a função de objetivação² e consistem num conjunto de imagens e concepções que um

¹ Objeto matemático é “qualquer entidade ou coisa à qual nos referimos, ou da qual falamos, seja real, imaginária ou de qualquer outro tipo, que intervém de alguma maneira na atividade matemática” (Godino, Batanero & Font, 2006, p. 5).

² Objetivação “[...] é uma operação imaginante e estruturante, pela qual se dá uma forma (ou figura) específica ao conhecimento acerca do objeto, tornando-o concreto, quase tangível, o conceito abstrato, materializando a palavra” (SÁ, 1993, p.39).

indivíduo pode ter sobre um objeto, sobre uma situação ou sobre aquilo que está associado ao objeto ou a situação (Duval, 2004). Já as representações internas ou computacionais, segundo Duval (2004), são aquelas que privilegiam a execução automática de uma determinada tarefa, a fim de produzir uma resposta adaptada à situação. Trata-se, portanto, de um registro mecânico que o sujeito executa sem pensar em todos os passos necessários para a sua resolução, tal como acontece quando realizamos o algoritmo da multiplicação, por exemplo.

As representações semióticas, por sua vez, são produções constituídas pelo emprego de signos³ pertencentes a um sistema de representação, os quais têm suas dificuldades próprias de significado e de funcionamento (Duval, 2004). Tais representações são externas e conscientes ao indivíduo e realizam de maneira indissociável as funções de objetivação e a manipulação, de forma intencional, com vistas à obtenção de respostas.

Duval, ao longo de suas pesquisas sobre as representações semióticas, tem usado o termo 'registros de representação semiótica' para designar os diferentes tipos de representação semiótica. As representações língua natural, tabular, gráfica, figural e algébrica são exemplos de tipos diferentes de registros de representação. Cada uma delas consiste num registro de representação⁴ diferente (ou num sistema de representação).

Neste sentido, um objeto matemático pode ser identificado por meio de diferentes registros de representação semiótica, os quais podem pôr em evidência distintas características do objeto.

Considerando que compreender um objeto matemático implica em conhecer suas distintas características e propriedades, Duval (2003) argumenta que

Na medida em que a matemática tende a diversificar os registros de representação, sua aprendizagem específica pode contribuir fortemente para o desenvolvimento das capacidades cognitivas dos indivíduos. Visar esse desenvolvimento sem se fixar de forma míope sobre a aquisição de uma ou outra noção particular é, provavelmente, o aporte maior que se pode esperar da aprendizagem matemática para a sua educação (p.30).

O uso de diferentes registros associados a um objeto matemático envolve duas operações fundamentais: o tratamento e a conversão.

O tratamento consiste em uma transformação interna a um registro, mantendo o mesmo sistema de registros. A simplificação de uma fração é um exemplo de tratamento.

Já a conversão, segundo Duval (2004) consiste na

[...] transformação de um registro de um sistema de representação para outro sistema de representação, conservando, pelo menos, a referência ao mesmo objeto ou à mesma situação apresentada, mas mudando, de fato, o conteúdo de representação (p.30).

³ Tomamos o signo como algo que, para alguém, toma lugar de outra coisa (o objeto), não necessariamente em todos os aspectos desta coisa. É, portanto, uma representação parcial do objeto, em termos de sua forma ou capacidade (PEIRCE, 2005).

⁴ Usamos os termos "registro" e "registro de representação" com o mesmo significado de "registro de representação semiótica".

Passar de uma tabela para um gráfico, ou de um gráfico para uma expressão de algébrica, são exemplos de conversões. Segundo o autor, a conversão é uma atividade cognitiva essencial, aquela “[...] que conduz aos mecanismos subjacentes à compreensão” (Duval, 2004, p.16).

Considerando estes mecanismos, é importante que as conversões sejam realizadas nos dois sentidos, uma vez que as dificuldades e os custos cognitivos relacionados às conversões realizadas num sentido podem não ser iguais àqueles associados às conversões realizadas noutro sentido. Realizar as conversões nos dois sentidos implica em conhecer características do conceito matemático que se evidenciam em cada um dos registros (o de chegada e o de partida), mantendo a referência ao objeto em estudo, mesmo que em sistemas semióticos distintos.

Esta dinâmica – realizar as conversões nos dois sentidos – pode possibilitar e potencializar a apreensão conceitual de um objeto matemático, bem como levar à identificação de uma diferença ou a compreensão de uma inferência. A tais atos cognitivos, Duval (2004) denomina “noésis” que, por sua vez, só acontecem por meio de significativas “semiósises”, entendida como “a apreensão ou a produção de uma representação semiótica” (p.14). Para o autor, não existe noésis sem semiósises, ou seja, não há conceitualização de um objeto matemático sem utilizar, para isso, representações deste objeto. Isto implica em dizer que a compreensão em Matemática acontece na medida em que o sujeito que aprende, consegue coordenar os vários registros de representação associados a um mesmo objeto matemático.

Neste sentido, Jahn e Karrer (2004) colocam que

[...] a aprendizagem de um conceito matemático consiste em desenvolver coordenações progressivas entre vários sistemas de representação semiótica. Sua teoria (de Duval) está inserida no modelo cognitivo do processo da aprendizagem matemática, cujo foco está na complexidade cognitiva do pensamento humano. Neste contexto, a principal preocupação reside na análise das condições cognitivas internas, necessárias para o estudante entender Matemática, as quais compõem o que ele intitula de arquitetura cognitiva. Desta forma, na concepção desse autor, o entendimento matemático depende, então, da mobilização de vários registros e, por consequência, um indivíduo aprende Matemática se ele integra, em sua arquitetura cognitiva, todos os registros necessários como novos sistemas de representação (p.16-17).

Segundo Damm (1999), a coordenação entre registros de representação permite que os alunos, ao trabalharem com um determinado objeto matemático, troquem de registro de modo a escolher aquele em que os custos de tratamento e funcionamento sejam menores.

É possível estabelecer, então, a seguinte conjectura: saber coordenar diferentes registros implica em potencializar a realização de tratamentos e conversões entre registros, enquanto a coordenação em si, é alcançada quando os sujeitos realizam tratamentos e conversões.

Diante desta conjectura e do fato de que a conversão é uma atividade cognitiva que o professor tem de provocar nas aulas, faz-se conveniente adotar um caminho

para a aprendizagem matemática que vislumbre a necessidade de realizar conversões. Com esta perspectiva tratamos da Modelagem Matemática.

3. Um Caminho para a Aprendizagem Matemática – a Modelagem Matemática

Entendemos a Modelagem Matemática como uma alternativa pedagógica para o ensino e a aprendizagem da Matemática, a partir da qual fazemos uma abordagem, por meio da Matemática, de uma situação-problema não essencialmente matemática (Almeida e Brito, 2005). Por ser assim entendida, a Modelagem tem como aporte maior a realização de investigações em sala de aula em que diferentes hipóteses são elencadas e por meio das quais diferentes resoluções matemáticas são empreendidas com vistas a resolver um problema. Neste ambiente de investigação, tão importante como as respostas encontradas para os problemas investigados, são as discussões realizadas durante a resolução do problema.

Em atividades de Modelagem, de modo geral, os alunos são levados a escolher um problema de seu interesse, fato que, em muitas situações, faz os alunos sentirem-se corresponsáveis pela investigação. Desse modo, é como se os estudantes aceitassem a um convite, o de responder a um problema por meio da matemática.

Ao fazer uso da matemática, considerando tanto o uso de algoritmos quanto conceitos matemáticos⁵ em si, os alunos podem, ou aplicar conhecimentos já construídos durante as aulas, ou construir novos conhecimentos. Em muitas situações, ao se envolver com atividades de Modelagem, os alunos se deparam diante de um obstáculo para o qual não possuem, provisoriamente, conhecimentos suficientes para superá-lo, emergindo assim a necessidade de construir esse conhecimento por meio dessa atividade. Logo, em Modelagem, os alunos tanto ressignificam conceitos já construídos quanto constroem outros diante da necessidade de seu uso.

Os interesses e conhecimentos de cada grupo de alunos envolvido com atividades de Modelagem, remetem à resoluções que podem fazer uso de diferentes conceitos matemáticos. Neste sentido, ao compartilhar as diferentes resoluções, os alunos tanto põe em evidência aquilo que sabem e pensam a respeito do assunto em questão, quanto conhecem outros modos de pensar sobre o assunto – em termos da Matemática usada e das hipóteses e simplificações realizadas.

Segundo Almeida e Ferruzzi (2009)

[...] a atividade de Modelagem se configura como uma atividade que, para os envolvidos na atividade, implica em um conjunto de ações como a busca de informações, a identificação e seleção de variáveis, a elaboração de hipóteses, a simplificação, a obtenção de uma representação matemática (modelo matemático), a resolução do problema por meio de procedimentos adequados e a análise da solução que implica numa validação, identificando a sua aceitabilidade ou não (p.120 e 121).

⁵ Utilizamos os termos “conceito matemático” e “objeto matemático” com o mesmo significado.

Embora tais ações não aconteçam seguindo uma ordem determinada, geralmente, o ponto de partida consiste em um problema a ser investigado. Segue-se então a busca e/ou coleta de informações que viabilizem essa investigação. A partir de então, os alunos elencam hipóteses que norteiam toda a resolução, desde a realização de simplificações até a obtenção de uma conclusão para o problema e a comunicação dos resultados, passando pela construção de um modelo matemático da situação.

O modelo matemático, por sua vez, é uma representação simplificada da realidade sob a ótica daqueles que a investigam (Kehle e Lester, 2003). Segundo Lesh (2010), um modelo matemático é um sistema conceitual, descritivo ou explicativo, expresso por meio de uma linguagem ou uma estrutura matemática, com a finalidade de descrever o comportamento de outro sistema e permitir a realização de previsões sobre este outro sistema. Ainda de acordo com o autor, é possível que o modelo construído para representar uma situação num dado momento sirva, também, para representar outro sistema em um momento posterior.

Um modelo matemático pode ser escrito utilizando-se para isso diferentes sistemas semióticos. Uma equação, uma tabela, um gráfico, são exemplos de sistemas semióticos que podem ser utilizados para representar modelos matemáticos. Neste contexto, em que a Modelagem Matemática consiste na obtenção, validação e aplicação de modelos matemáticos (D'Ambrosio, 1986), o uso de diferentes registros de representação semiótica parece não só viabilizar a resolução do problema, como potencializar tal resolução, na medida em que diferentes características dos objetos matemáticos, advindas de suas diferentes representações em registros distintos, possibilitam diferentes interpretações do problema.

Esta complementaridade de interpretações advindas da complementaridade de registros é o que justifica a nossa escolha pela Modelagem Matemática como caminho para a aprendizagem matemática. Ora, se a Modelagem Matemática leva à produção, à interpretação e à coordenação entre diferentes registros, o tratamento e a conversão destes registros são atividades cognitivas necessárias, independente de serem realizadas de modo espontâneo ou não. Se tais atividades cognitivas acontecem em atividades de Modelagem Matemática, os alunos são levados a conhecer e a relacionar as diferentes características dos objetos matemáticos, dadas nos diferentes registros. Isso implica em considerar os objetos matemáticos não apenas como ferramentas úteis para a resolução dos problemas, mas sim, como importantes em si, enquanto conceitos. Se há coordenação entre registros, podemos inferir, segundo a Teoria dos Registros de Representação Semiótica, que há aprendizagem dos conceitos matemáticos e, como consequência, que atividades de Modelagem aliadas a esta teoria, contribuem para a aprendizagem.

4. Práticas dos alunos identificadas em relação ao uso dos registros nas atividades de Modelagem Matemática

As considerações que fazemos são advindas de informações que coletamos durante dois cursos ofertados pelos autores deste texto com a temática "Modelagem Matemática". O primeiro deles refere-se à disciplina de Modelagem Matemática oferecida em um curso de Especialização em Educação Matemática, tendo como

público professores de Matemática da Educação Básica. O segundo diz respeito a um curso de extensão em Modelagem oferecido a alunos do 1º ano do curso de um curso de Licenciatura em Matemática.

Para o desenvolvimento das atividades de Modelagem, nestes cursos, nos orientamos nas argumentações de Almeida e Dias (2004), que ponderam que a introdução de atividades de Modelagem Matemática em cursos regulares pode ser realizada de forma gradativa. As autoras apontam três momentos pelos quais podem passar os alunos de modo a se ambientarem à dinâmica de atividades de Modelagem. Em um primeiro momento o professor desenvolve com os alunos um trabalho de Modelagem já estruturado, cabendo a ambos, alunos e professor, a resolução do problema. Num segundo momento o professor propõe uma situação-problema no contexto não-matemático, para que os alunos selecionem variáveis, formulem hipóteses, construam um modelo, validem-no e o apliquem ao contexto inicial de modo a tirar conclusões. Finalmente, no terceiro momento, os alunos desenvolvem uma atividade de Modelagem Matemática desde a escolha do problema até a obtenção de respostas para o mesmo. Segundo as autoras,

[...] na medida em que o aluno vai realizando as atividades nos diferentes momentos [...] a sua compreensão acerca do processo de Modelagem, da resolução dos problemas em estudo e da reflexão sobre as soluções encontradas vai se consolidando (Almeida e Dias, 2004, p. 26).

Em relação ao primeiro momento, foram desenvolvidos trabalhos sobre as temáticas “Incidência de Câncer”, “Movimento das Marés”, “Embalagens” e “Número de Veículos de uma cidade”. Reunidos em grupos, os alunos discutiram, de acordo com a dinâmica do segundo momento apresentado para as atividades de Modelagem, situações relacionadas à “Carga Tributária”, aos “Estados de Nupcialidade”, às “Alergias” e ao “Tratado de Kyoto”. Finalmente, em relação ao terceiro momento os alunos estudaram os temas “Mercúrio das lâmpadas fluorescentes”, “Dinâmica do Desemprego no Brasil”, “Venda de Automóveis” e “Novos Velhos”, entre outros.

Frente às análises das informações que coletamos por meio de gravações em áudio e vídeo e por meio da análise dos registros dos alunos durante cada uma das atividades de Modelagem desenvolvidas, tanto no que concerne à dinâmica de construção de modelos e aplicação destes às questões investigadas, quanto no que diz respeito ao comportamento dos alunos diante de tais atividades em relação aos registros matemáticos utilizados e ao modo como eram utilizados, verificamos a presença marcante de três práticas.

Notamos que, às vezes, os diferentes registros de um objeto matemático eram mobilizados, mas não eram relacionados entre si, sendo o “tratamento” a única transformação presente. Outras vezes, os diferentes registros surgiam por meio de conversões obtidas a partir do registro inicial. Neste caso, os alunos estabeleciam relações entre pares de registros e não entre todos os registros utilizados. Outra prática presente nos registros dos alunos consistia na coordenação dos registros associados aos objetos matemáticos envolvidos. As interpretações advindas de tal coordenação eram utilizadas para responder à situação-problema.

Frente à identificação destas práticas estabelecemos três categorias que levam em consideração o modo como foram usados os registros nestas atividades, conforme apresentamos a seguir.

4.1. Categoria 1: Diferentes registros são utilizados sem que se estabeleçam relações entre eles (os alunos fazem somente tratamentos).

Durante o desenvolvimento das primeiras atividades de ambos os cursos, os alunos utilizavam somente a conversão do registro inicial em que o problema era apresentado para o registro algébrico, concluindo a atividade com este registro do modelo matemático. Esta prática conduzia a incoerências em relação à análise da situação problema em estudo.

Em outros momentos, os alunos utilizavam os diferentes registros de um objeto matemático, sem, no entanto, estabelecer relações entre eles. Este foi o procedimento de alunos do 1º ano do curso de Licenciatura em Matemática para buscar uma representação gráfica para o modelo $V(x) = 600x - 100x^2 + 4x^3$ obtido na situação “Embalagens”. Para construir o gráfico tomando somente alguns pontos, sem considerar características deste tipo de função, obtiveram representações gráficas não adequadas à expressão algébrica $V(x)$ (figura 1).

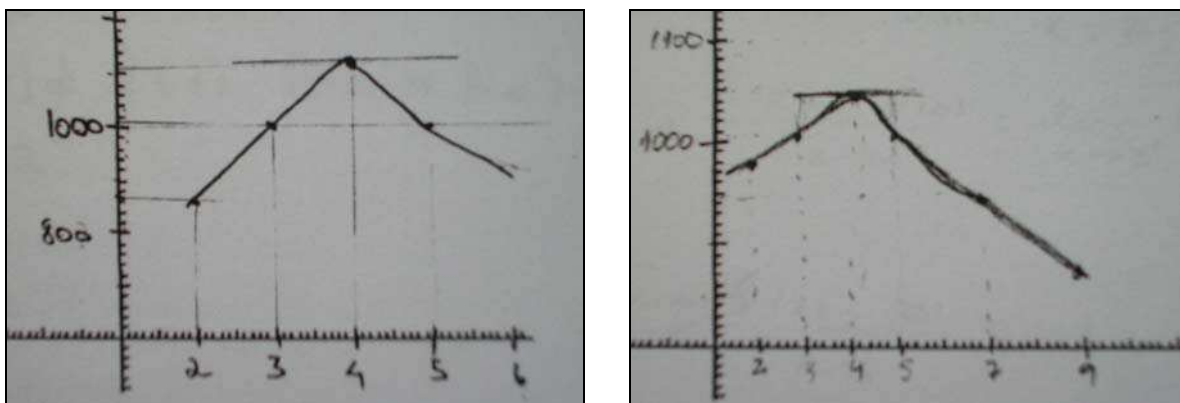


Figura 1: Representações gráficas equivocadas da função $V(x)$

Segundo Duval (2003),

[...] a conversão entre gráficos e equações supõe que se consiga levar em conta, de um lado, as variáveis visuais próprias dos gráficos (inclinação, intersecção com os eixos, etc.) e, de outro, os valores escalares das equações (coeficientes positivos ou negativos, maior, menor ou igual a 1 etc.) (p.17)

Neste exemplo, encontrar pares ordenados e representá-los adequadamente no plano cartesiano parece não ter sido suficiente para que os alunos esboçassem o gráfico da função cúbica.

A dificuldade de associar adequadamente diferentes registros também se evidenciou na atividade da Carga Tributária Brasileira, quando os grupos apresentavam as diferentes resoluções uns aos outros. Um grupo utilizou uma função cúbica para ajustar aos dados, a partir da ideia de um aluno que reconhecia na tendência dos dados este tipo de curva.

No entanto, dos 10 alunos presentes no curso naquele dia, somente este aluno conhecia a representação gráfica desta função polinomial. A interação com os alunos nos fez perceber que mesmo conhecendo a simbologia $y = x^3$ e mesmo sabendo encontrar raízes de uma função polinomial, nunca tiveram a possibilidade de relacionar esta expressão com nenhum tipo de representação gráfica. Isso aponta para a necessidade de se utilizar e de se relacionar os diferentes registros de um objeto matemático para compreendê-lo, uma vez que “a compreensão em Matemática implica a capacidade de mudar de registro” (Duval, 2003, p.21).

4.2. Categoria 2: Os alunos realizam conversões entre pares de registros, mas não chegam a coordenar a totalidade dos registros

A maior parte dos registros produzidos pelos alunos se enquadra nesta categoria, uma vez que, em atividades de Modelagem, as conversões não são realizadas por uma questão de escolha, mas de necessidade. Necessidade de trocar de registro para melhor interpretar a situação em estudo, necessidade de obter uma representação em outro registro a fim de complementar os registros iniciais ou a fim de responder ao problema discutido, ou ainda, de trocar de registro para realizar tratamentos matemáticos sem tantas dificuldades. Realizar uma conversão implica em estabelecer relações entre as representações de saída e de chegada, relações estas que têm em comum, ao menos alguns aspectos do objeto matemático representado. Como afirma Duval (2003), “[...] passar de um registro de representação a outro não é somente mudar de modo de tratamento, é também explicar as propriedades ou os aspectos diferentes de um mesmo objeto” (p.22). Segundo Almouloud (2007)

[...] tudo o que se pode observar numa representação não é necessariamente pertinente, ou seja, representativo ou significativo e, por outro lado, o que é pertinente nem sempre é percebido pelos aprendizes [...]. É por meio do estudo sistemático da passagem de um registro para outro que se apresenta a possibilidade de perceber a importância da forma das representações e da identificação daquelas que são pertinentes (p.75 e 76).

Nesta categoria enquadram-se aquelas conversões realizadas entre pares de registros, sem que a coordenação seja utilizada em sua plenitude.

O que podemos perceber é que, nas atividades que se encaixam nesta categoria, dificilmente os alunos realizavam a validação e aplicação do modelo encontrado. A obtenção de um modelo matemático dado em seu registro algébrico era, ao ver dos alunos, suficiente para pôr fim à investigação.

Um exemplo desta categoria pôde ser observado na situação “Mercúrio das Lâmpadas Fluorescentes”, desenvolvida por um grupo de alunos no terceiro momento da Modelagem Matemática. A situação foi suscitada por uma matéria de jornal que denunciava o descaso da universidade com as lâmpadas fluorescentes descartadas, a céu aberto, expondo à comunidade ao risco de contaminação por mercúrio com a quebra destas lâmpadas.

A partir da matéria do jornal os alunos buscaram informações sobre a problemática e definiram a questão: Que quantidade de mercúrio tem sido liberada

(ou pode ser) no ambiente advindo das lâmpadas fluorescentes descartadas, a céu aberto, na Universidade?

Considerando esse problema e as informações encontradas, inclusive referentes à meia vida do mercúrio, o grupo de alunos que discutiu a situação realizou uma conversão para o registro algébrico e, a partir de então, apenas tratamentos neste registro, obtendo o modelo $Q_n = 31025,87 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{n}{2}} + 28974,12$. As análises frente ao modelo encontrado foram limitadas ao registro utilizado e, por isso, embora calculassem a quantidade de mercúrio no ambiente para um ano qualquer, não conseguiam descrever a tendência dos dados, ou seja, o comportamento da quantidade de mercúrio no ambiente no decorrer dos anos.

Diante das limitações, propusemos que os alunos realizassem ao menos uma conversão para o registro gráfico, a partir do qual realizaram análises mais completas em relação à situação e em relação aos conceitos matemáticos utilizados.

4.3. Categoria 3: Diferentes registros são utilizados e relacionados e as interpretações provenientes destas relações possibilitam que os alunos tirem conclusões sobre o problema em função dos registros (presença da coordenação e de relações com o problema).

Coordenar os diferentes registros associados a um objeto matemático e utilizar as interpretações advindas desta coordenação para refletir sobre a situação, responder ao problema inicial e tomar decisões se for o caso, tornou-se freqüente na medida em que se envolviam com maior número de atividades de Modelagem. Isto parece ir ao encontro do argumento de Duval (2003) de que é a coordenação dos registros que “constitui uma condição de acesso à compreensão em Matemática, e não o inverso” (p. 22), ou seja, os alunos foram percebendo que aprendiam matemática e encontravam soluções para os problemas usando a coordenação entre registros.

O que se pode perceber, também, é que na segunda metade dos cursos os alunos já estavam familiarizados com atividades de Modelagem. Nesta etapa, os alunos vinham para a aula com ideias de temas para serem investigados, bem como com informações que pudessem viabilizar o estudo. A intenção dos alunos passou a ser a investigação de problemas de seus interesses. A aprendizagem matemática, por sua vez, passou a ser uma conseqüência destas investigações.

Na situação cujo tema era a Carga Tributária, por exemplo, os alunos, a partir dos resultados e registros matemáticos presentes na resolução, estabeleceram relações com o problema, chegando a discutir as condições dos serviços públicos brasileiros frente à cobrança de impostos tão altos, a corrupção que assola nosso país e a diminuição de impostos que seria possível se não houvesse um rombo tão grande nos cofres públicos. Além disso, enfatizaram o fato da matemática permitir uma interpretação diferente e “mais crítica” de situações que, geralmente, são camufladas para atender ao interesse de alguém.

Outro exemplo de atividade de Modelagem Matemática em que a categoria 3 se evidenciou é a situação “Novos Velhos”, apresentada por um grupo de alunos do Curso de Especialização em Educação Matemática.

4.3.1. “Novos Velhos”- a coordenação de registros na atividade de Modelagem

O grupo que desenvolveu esta atividade estava interessado em investigar o comportamento da expectativa de vida dos brasileiros. A partir de dados do IBGE (Instituto Brasileiro de Geografia e Estatística) que revelam a expectativa de vida dos brasileiros para quem nasceu no período entre 1940 e 2000, os alunos iniciaram o seu estudo.

Tabela 1: Dados do IBGE sobre a expectativa de vida

Ano	tempo em anos (d)	Expectativa de vida (E)
1940	0	42,74
1950	10	45,9
1960	20	52,37
1970	30	52,49
1980	40	61,74
1990	50	65,78
2000	60	68,55

Fonte: IBGE – Variável auxiliar d introduzida pelos alunos

Neste caso, o registro inicial é uma tabela que já passou por um tratamento matemático quando os alunos criaram uma coluna para a variável auxiliar d. Diante das informações, é possível investigar qual a expectativa de vida para quem nasceu em 2010 ou para quem nasceu em 1996, por exemplo. Para isso, a intenção dos alunos era construir um modelo matemático por meio do qual fosse possível realizar previsões da expectativa de vida para diferentes anos de nascimento, procurando respostas para a questão: Como calcular a expectativa de vida de uma pessoa, dado seu ano de nascimento?

Os dados da tabela 1 revelam um crescimento na expectativa de vida no decorrer dos anos, embora, esse crescimento seja decrescente no período. Essa tendência dos dados ficou ainda mais evidente quando os alunos representaram os pares ordenados (d, E) no plano cartesiano (Figura 2). Com a finalidade de construir um modelo matemático para descrever este comportamento dos dados e permitir a realização de previsões, os alunos começaram a realizar investigações em torno do registro gráfico apresentado. Em uma destas investigações, trabalharam com os pares ordenados (E, d), o que implica em considerar os pares ordenados simétricos aos (d, E) em relação ao eixo de simetria $y=x$, como observamos no gráfico da figura 3 (tratamento no registro gráfico).

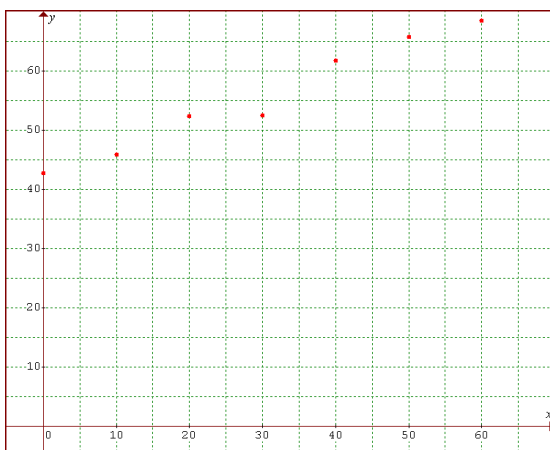


Figura 2: Pares Ordenados (t; E).

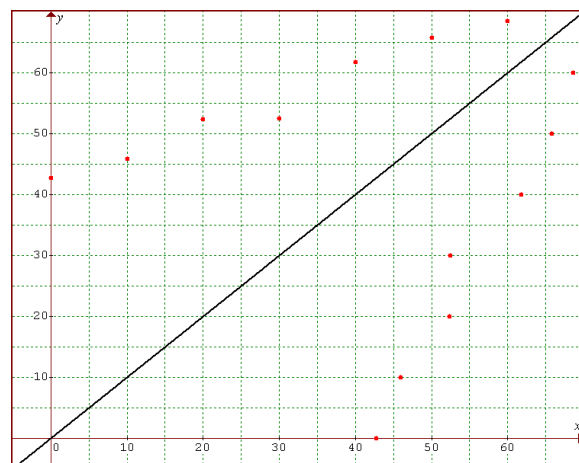


Figura 3: (d; E), (E, d) e eixo de simetria $y=x$.

Frente à disposição dos pares ordenados (E, d) no plano cartesiano (os pontos abaixo do eixo de simetria), o grupo considerou a hipótese contrária àquela já descrita. Consideraram, então que, neste caso, o que acontece é um crescimento cada vez maior, “mais acelerado”, o que denota o comportamento de uma função do tipo exponencial. Frente a esta hipótese, mais um tratamento foi realizado no registro tabular, como segue.

Tabela 2: Tratamento no registro tabular – (E;d)

Expectativa de vida (E)	tempo em anos (d)
42,74	0
45,9	10
52,37	20
52,49	30
61,74	40
65,78	50
68,55	60

Para o ajuste exponencial, os alunos partiram da expressão $y = a.e^{bx}$ e, determinando os parâmetros a, b, por meio de tratamentos algébricos, obtiveram o modelo $y = 0,497.e^{0,0709.x}$, cuja representação gráfica está na figura 4.

Em seus tratamentos, os alunos ignoraram o ponto (42,74; 0) já que não existe $\ln y$ para $y=0$ – ação empreendida para determinar os parâmetros a, b do modelo.

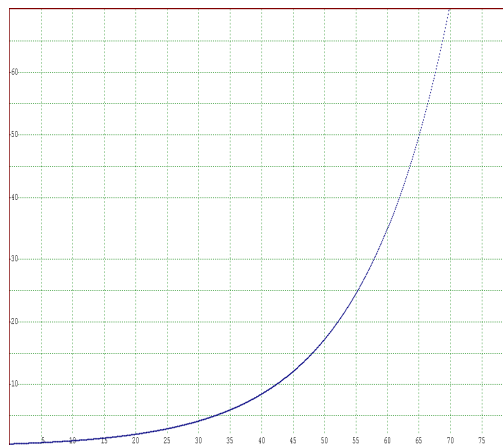


Figura 4: Gráfico da Função

A partir deste modelo exponencial, os alunos tiveram que realizar uma adaptação para contemplar as informações (d, E), tal como são dadas originalmente. Para isso, encontraram a função inversa daquela obtida. No entanto, como nem toda função admite inversa, tornou-se necessário investigar se o modelo em questão era representado por uma função bijetora. Para isso, utilizaram o conceito de função bijetora, bem como a coordenação entre as características da função dadas em sua expressão algébrica, em seu registro gráfico e tabular.

Uma vez confirmado que a função era bijetora, restringindo seu domínio aos números reais positivos e diferentes de zero, por meio de uma sequência de

tratamentos obtiveram $E(d) = \frac{\ln d}{0,0709} + 9,8589$, sendo E a expectativa de vida ao nascer e d o ano de nascimento, considerando $d=0$ como 1940.

A relação $d=(t-1940)$, permite escrever

$$E(t) = \frac{\ln(t - 1940)}{0,0709} + 9,8589 \quad (1)$$

cuja representação gráfica está na figura 5. A tabela 3 mostra a validação deste modelo obtido.

Tabela 3: Validação do Modelo da situação “Novos Velhos”

tempo (t)	tempo (t) - modelado	Expectativa (E)
1940	42,74	
1950	45,9	42,34
1960	52,37	52,11
1970	52,49	57,83
1980	61,74	61,89
1990	65,78	65,04
2000	68,55	67,61

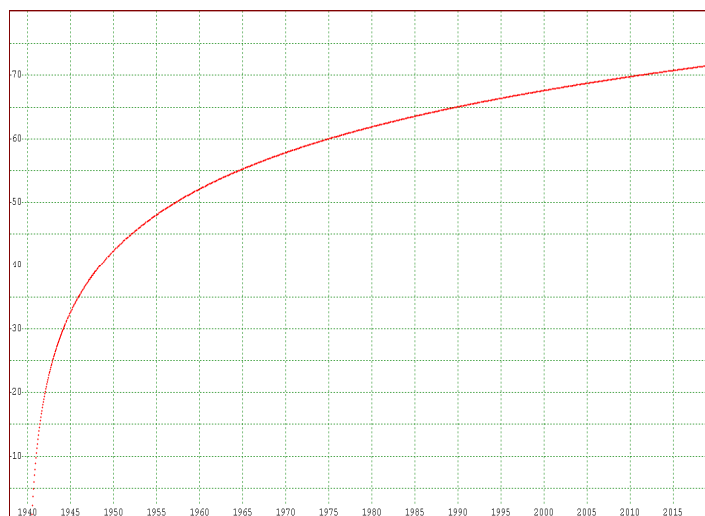


Figura 5: Gráfico da Função

Usando o modelo (1) as previsões dos alunos revelam que a expectativa de vida para quem nasceu em 1996 e em 2010 é de, 67 e 70 anos, respectivamente.

Nesta atividade de Modelagem os alunos realizaram um conjunto de atividades cognitivas que envolvem tratamentos, conversões e coordenação entre registros, conforme apresentamos na figura 6 e na figura 7. É possível observar que, em alguns momentos, os alunos não realizaram uma conversão única de um registro para o outro, mas sim, mobilizaram simultaneamente dois ou mais registros para produzir uma representação em outro registro. Segundo Duval (2003), “[...] é necessário distinguir cuidadosamente o que sobressalta [...] em uma conversão,

esta consistindo em uma simples mudança de registros ou em uma mobilização em paralelo de dois registros diferentes” (p. 24).

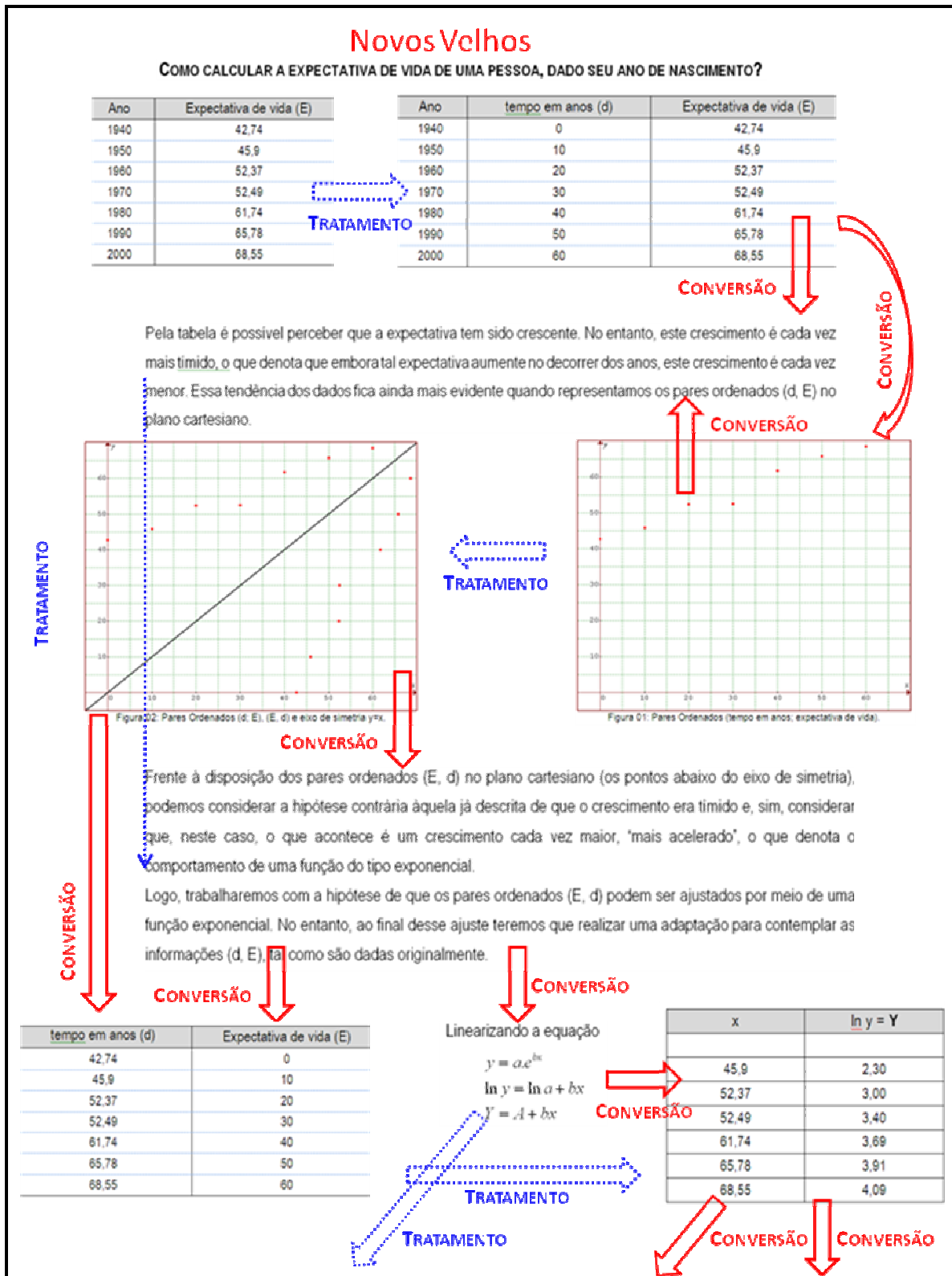


Figura 6: Atividades cognitivas realizadas na atividade “Novos Velhos” – parte 1.

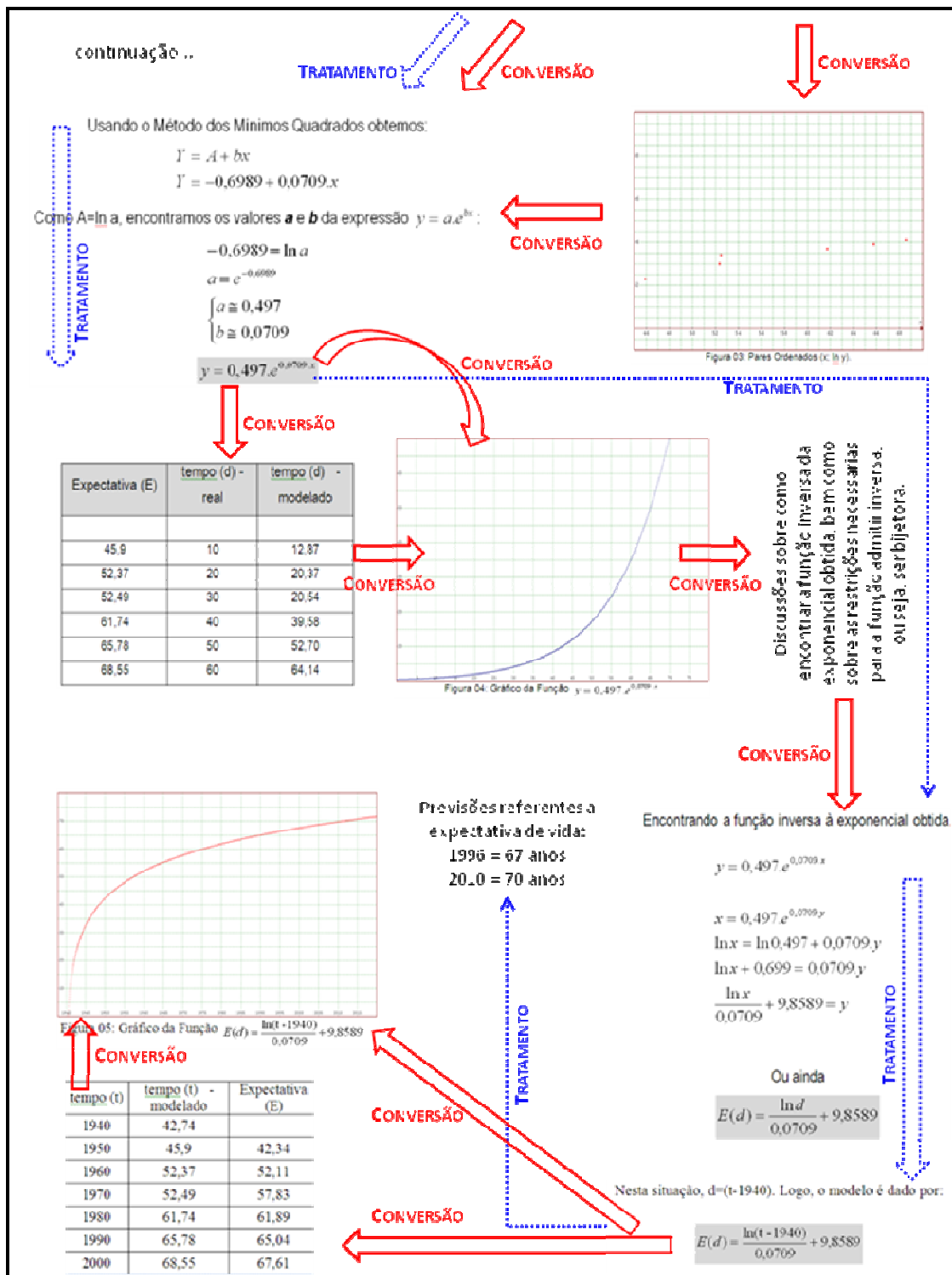


Figura 7: Atividades cognitivas realizadas pelos alunos na atividade “Novos Velhos” – parte 2.

Considerando esses registros e essa articulação de registros realizada pelos alunos, argumentamos que a prática dos alunos nesse caso é da categoria três, ou seja, há fortes indícios de coordenação de registros e de influência dessa coordenação sobre a análise da situação-problema em estudo.

Na situação dos “Novos Velhos”, além de discutir o aumento crescente na expectativa de vida dos brasileiros e as possíveis causas deste aumento, os alunos, também professores da Educação Básica, discutiram formas de encaminhamento desta atividade em suas salas de aula, conjecturando que há nas atividades de Modelagem, potencial para aprendizagem em Matemática na perspectiva da teoria de Duval em que a compreensão é associada à produção e articulação dos diferentes registros de representação associados ao objeto matemático.

5. Considerações Finais

Investigar uma situação-problema por meio da Matemática com a finalidade de conhecer, analisar e tomar decisões em relação à situação, são ações que caracterizam uma atividade de Modelagem Matemática. Ao desenvolver atividades desse tipo, os alunos são inseridos em contextos que ativam a produção e o uso constante de diferentes registros dos objetos matemáticos como condições necessárias para a investigação do problema. Por outro lado, enquanto realizam a atividade de Modelagem, os alunos acabam por discutir os objetos matemáticos em suas várias facetas, e este uso diversificado dos registros é fundamental para a compreensão dos objetos matemáticos.

Produzir e coordenar os diferentes registros de um mesmo conceito matemático faz-se importante em atividades de Modelagem diante da necessidade do uso dos diferentes registros para a produção de uma resposta para o problema em estudo. Essa necessidade é o que permite ao aluno optar por aquele registro em que os custos cognitivos são menores, em que as interpretações do problema são potencializadas ou, então, aquele em que a solução do problema parece se tornar mais evidente (VERTUAN, 2007).

A análise das atividades desenvolvidas durante os cursos, contudo, nos leva a caracterizar diferentes categorias de práticas dos alunos em relação à produção e articulação de registros no âmbito das atividades de Modelagem. Estas práticas dos alunos, entretanto, foram se modificando no decorrer da familiarização com atividades de Modelagem, de modo que alunos que em atividades iniciais eram incluídos na categoria que só realiza tratamentos, passaram a realizar coordenações entre registros. Isso aconteceu devido ao envolvimento com atividades de Modelagem em que, se por um lado, emergem diferentes registros, por outro lado, a coordenação destes registros é fundamental para a conceitualização dos objetos matemáticos bem como para a elaboração de respostas convincentes e satisfatórias para as situações-problema em estudo.

Bibliografia

- Almeida, L.; Brito, D. S. (2005) Atividades de Modelagem Matemática: que sentido os alunos podem lhe atribuir? *Ciência & Educação*, v. 11, n. 3, 483-497.
- Almeida, L.; Dias, M. R. (2004) Um estudo sobre o uso da modelagem Matemática como estratégia de ensino e aprendizagem. *Bolema*, Rio Claro, v. 17, n.22, 19-35.
- Almeida, L.; Ferruzzi, E. C. (2009) Uma aproximação Socioepistemológica para a Modelagem Matemática. *Alexandria (UFSC)*, v.2, 117-134.
- Almoulouds, S. Ag. (2007) *Fundamentos da Didática da Matemática*. Paraná: UFPR.
- D'Ambrosio, U. (1986). *Da Realidade à Ação: Reflexões sobre Educação e Matemática*. Campinas: Ed. da Universidade Estadual de Campinas.

- Damm, R. F. (1999) Registros de Representação. In: Machado, Silvia Dias Alcântara. *Educação Matemática: uma introdução*. São Paulo: EDUC, 135-154.
- Duval, R. (2003). Registros de Representações Semióticas e Funcionamento Cognitivo da Compreensão em Matemática. In: Machado, Silvia D. A. *Aprendizagem em Matemática: Registros de Representação Semiótica*. Campinas: Editora Papirus, p.11-34.
- Duval, R.(2004). *Semiosis y pensamiento humano: registros semióticos y aprendizajes intelectuales*. Tradução de Myriam Vega Restrepo. Colômbia: Universidad del Valle, Instituto de Educación y Pedagogía, Grupo de Educación Matemática.
- Godino, J. D.; Batanero, C.; Font, V. (2006) *Um enfoque ontosemiótico do conhecimento e a instrução Matemática*. Disponível em: <http://www.ugr.es/local/jgodino> capturado em 1/5/2006.
- Jahn, A.P.; Karrer, M. (2004). Transformações lineares nos livros didáticos: uma análise em termos de registros de representação semiótica. *Educação matemática em revista*, Recife/PE, Ano 11, n.17, 16-28.
- Kehle, P.; Lester, F. K, Jr. (2003). A semiotic look at modeling behavior. In: Lesh, & Doerr, H., *Beyond constructivism: Models and Modeling Perspectives on Mathematics Problem Solving, Learning, and Teaching*. Hillsdale, N.J.: Erlbaum, 97-122.
- Lesh, R.(2010) Tools, Researchable Issues & Conjectures for investigating what it means to Understand Statistics (or Other Topics) Meaningfully. *Journal of Mathematical Modelling and Application*, v.1, n.2, 16-48.
- Peirce, C. S. (2005). *Semiótica*. Tradução de José Teixeira Coelho Neto. 2. reimpr. da 3. ed. de 2000. v.46. São Paulo: Perspectiva., (Estudos).
- Sá, C. P. (1995). Representações sociais: o conceito e o estado atual da teoria. In: Spink, M.J. (Org.). *O conhecimento no cotidiano: as representações na perspectiva da psicologia social*. São Paulo: Brasiliense, 19-45.
- Vertuan, R. E. (2007). *Um olhar sobre a modelagem Matemática à luz da teoria dos registros de representação semiótica*. Dissertação (Mestrado). Universidade Estadual de Londrina, Ensino de Ciências e Educação Matemática, Londrina.

Lourdes María Werle de Almeida, Licenciada em Matemática, Mestrado em Matemática e Doutorado em Engenharia de Produção. Professora da Universidade Estadual de Londrina e atuando no curso de graduação em Matemática e no Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Educação Matemática. Atualmente é coordenadora do GT de Modelagem Matemática da SBEM nacional. lourdes@uel.br

Rodolfo Eduardo Vertuan, Possui graduação em Matemática pela Universidade Estadual de Londrina, Especialização em Educação Matemática e Mestrado em Ensino de Ciências e Educação Matemática. Atualmente é Doutorando do Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Educação Matemática da Universidade Estadual de Londrina (UEL). É professor assistente da Universidade Tecnológica Federal do Paraná. rodolfovertuan@utfpr.edu.br

