UNIÓN
REVISTA IBEROAMERICANA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA

Marzo de 2011, Número 25, páginas 175-190
ISSN: 1815-0640

Ideas para Enseñar

La recta numérica como instrumento de representación de los números

José Antonio Redondo González; Ricardo Francisco Luengo González; Luis Manuel Casas García; José Luis Redondo García.

Resumen

En el presente artículo, extraído de una experiencia con alumnos de Educación Primaria, se comentan las virtualidades y el papel cognitivo que desempeña la Recta Numérica como metáfora e instrumento de representación de los números. En ella, mediante el lenguaje espacial y visual, pueden modelarse la estructura, operaciones, y propiedades del sistema de numeración. De modo que los alumnos puedan formase una correcta representación mental del mismo.

Abstract

In this article, taken from an experience with students of primary education, we discuss the potentialities and the cognitive role played by the Number Line as a metaphor and an instrument of representation of numbers. In it, through language and visual spatial, can be modeled the structure, operations and properties of numbering system. So that students can form an accurate mental representation of it.

Resumo

No presente artigo, extraído de uma experiência com alunos de Educação Primaria, comentam-se as virtualidades e o papel cognitivo que desempenha a Recta Numérica como metáfora e instrumento de representação dos números. Nela, mediante a linguagem espacial e visual, podem modelarse a estrutura, operações, e propriedades do sistema do numeración. De modo que os alunos possam formasse uma correcta representação mental do mesmo.

1. Introducción

Todos los años en las aulas de Educación Primaria los alumnos se enfrentan a la tarea de aprender el lenguaje de los números, es este uno de los objetivos fundamentales establecido dentro del área de matemáticas.

Se presenta, a continuación, en la siguiente figura "*dos formas de hacer*" de dos alumnos, ambos pertenecientes al tercer curso de Educación Primaria frente a una misma consigna:

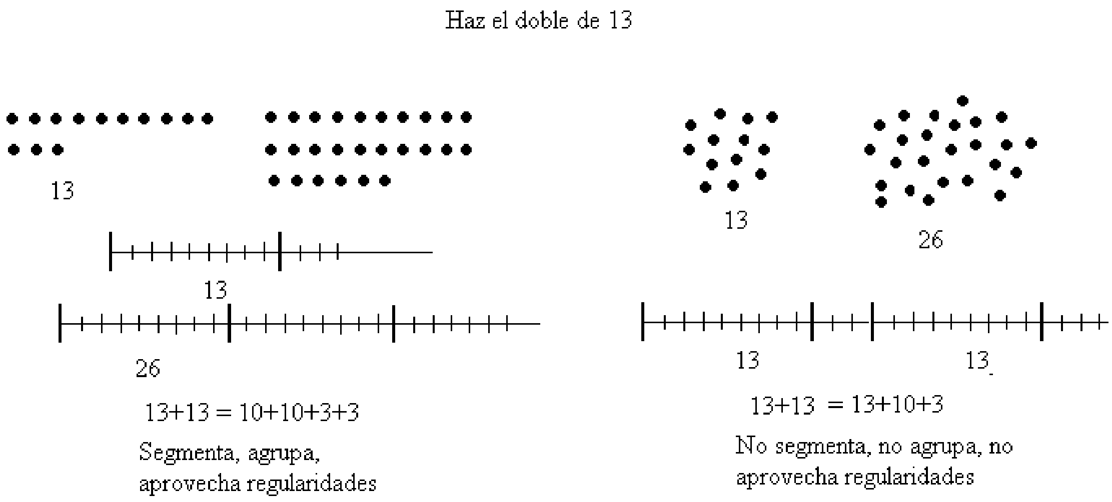


Figura 1

El ejemplo extraído del modo de proceder de dos alumnos pone al descubierto dos modos de funcionamiento cognitivo distantes entre sí: para el primer alumno todo es más diáfano y sencillo, agrupa decenas por un lado y unidades por otro, el segundo coloca un número a continuación del otro y suma elemento a elemento, no se aprovecha de la estructura del sistema de numeración.

La diferencia radica en que al segundo alumno se le escapa información relevante, no percibe que la decena puede ser utilizada como una unidad superior, como un ente diferenciado que ya no es necesario recontar porque ya se da por hecho que consta de diez elementos. Esta estructura en grupos de diez, que es la que precisamente da al sistema de numeración toda su potencia, no está lamentablemente captada e incorporada a su red de conocimientos por el segundo alumno.

Esta tarea, en apariencia fácil, de percibir un grupo de elementos como un todo, entraña dificultades para algunos alumnos. Estos dos alumnos, como dijimos, forman parte de una experiencia llevada a cabo en dos aulas de tercer curso de Educación Primaria en las que se trabajó el aprendizaje del sistema de numeración con la recta numérica como instrumento de representación.

2. La búsqueda de información y los instrumentos de representación

La búsqueda de información aparece como una actividad crucial en cualquiera de los aspectos en que se desenvuelve la vida humana, siempre es deseable saber más, tener un mayor número de datos sobre cualquier situación. Por ejemplo a la hora de tomar una decisión se reclama saber todo cuanto sea posible, con el deseo de minimizar el error.

En los aprendizajes, como se ha visto en el ejemplo anterior de la decena, la búsqueda de información constituye la esencia misma de la tarea, lo que se pretende es que el alumno pueda hacer suya toda la información necesaria, para que a partir de ella pueda construir las representaciones que suponen comprender y asimilar un contenido.

Los instrumentos de representación contribuyen a que la información sea más fácilmente perceptible y asimilable y con ello facilitan el aprendizaje. Se construyen con información, y a su vez, son vehículos de la misma, su función es sacar información oculta hasta la superficie. Un instrumento de representación es más eficaz y transparente cuanto más visibles y explícitos hace aflorar los significados.

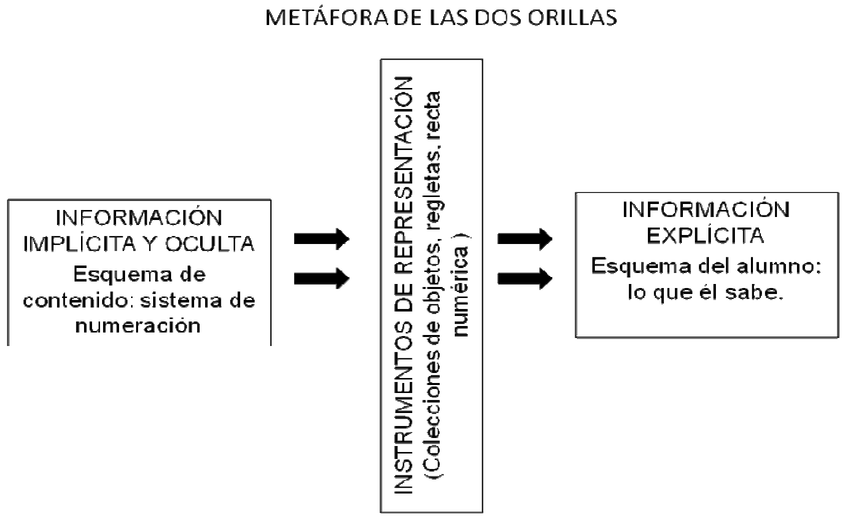


Figura 2

El papel de los instrumentos de información es hacer viajar información de una a otra orilla. No todos los instrumentos de representación son igualmente eficaces. Unos son más potentes y eficaces que otros para aprehender los conceptos matemáticos, ocultan unos aspectos y resaltan otros, aquellos que definen o distinguen un concepto. Con el desarrollo del pensamiento matemático los instrumentos de representación se han ido afinando, han aparecido otros nuevos más potentes que han permitido desechar los anteriores. Comparar por ejemplo en lo referido a la representación numérica la eficacia del sistema de numeración decimal (numerales indo-arábigos) frente a una representación simple mediante piedrecitas, marcas en un palo, o el sistema de numeración romano.

3. La representación numérica mediante elementos espaciales y visuales: la recta numérica como instrumento de representación

Existe un excelente estudio sobre las representaciones discretas de los números en Educación Infantil (Martín Sánchez 2008), en él se destaca la importancia de la percepción visual en el concepto de número. Martín Sánchez plantea la necesidad de percibir los números menores de diez como constelaciones o grupos de objetos que son aprehendidos de un solo golpe de vista. Por ejemplo:

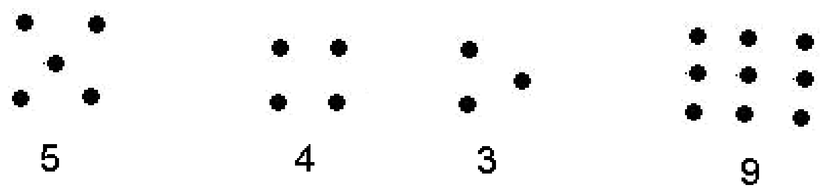
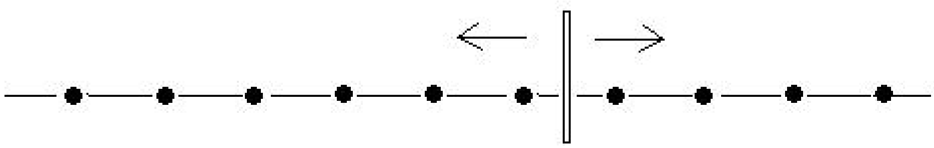


Figura 3

Los niños aprenden los números en actividades de conteo en la serie numérica, con saber contar puede ser suficiente para hacer los cálculos. Para calcular 5+4 se puede contar cinco dedos en una mano y cuatro en la otra, después contar todos juntos y llegar al nueve. La utilidad de esta estrategia de cálculo es poco práctica y costosa en procesamiento. Y es la que siguen usando todos los alumnos que fracasan en matemáticas en los cursos superiores de primaria. Si la percepción global de estas cantidades menores de diez está mal adquirida o alterada todo el posterior progreso matemático queda en buena medida mediatizado por esa dificultad

La siguiente actividad propia del último curso de Educación Infantil o primer curso de Educación Primaria sirve para trabajar con los alumnos todas las descomposiciones posibles de la decena o de números menores de 10.

"Mueve el cursor separador hacia la izquierda o hacia la derecha y escribe todas las posibles combinaciones de 10"



$$6 + 4 = 10$$

$$9 + 1 = 10$$

Figura 4

Esta representación tiene características discretas, todavía aparece el grupo de objetos, pero también continuas, están ya dispuestos en una línea.

Las representaciones discretas (dedos, números, marcas sobre el papel) muy pronto se muestran insuficientes para representar el concepto de número. A partir de siete u ocho objetos, estas agrupaciones ya no caben en la memoria de trabajo y no es posible manejarlas mentalmente. No son funcionales para comparar dos números, para recrear las operaciones que con ellos es posible realizar, para estimar un resultado, para imaginar números mayores etc.

Cubierta una primera etapa de representación en forma discreta, se hace necesario asociar el concepto de número a una nueva forma de representación más versátil y funcional. Así el concepto de número se asocia a la magnitud longitud, los niños de Educación Infantil comienzan a manejar las regletas como sucedáneos de los números y con ellas realizan operaciones. Es una forma de representación que nace de la observación y de la experiencia (lo alto y largo de los objetos, la medida) y cuya principal razón de ser es que se adapta mejor a las posibilidades limitadas de la memoria de trabajo.

Lakoff y Nuñez (1998) señalan que el mejor modo para representar los números es mediante dos magnitudes del espacio: longitud y el movimiento. A través de la longitud y el movimiento pueden hacerse transparentes todas las propiedades de los números. Estas magnitudes se materializan funcionalmente en un instrumento de gran transparencia y capacidad de representación que es la recta numérica. La recta numérica puede dibujarse sobre el suelo o bien construirse en un modelo de madera. En ella deben quedar marcados los números nudos que se corresponden con las decenas, la separación de cinco en cinco que se corresponde con la mitad de la decena llevará también una marca un poco más corta que las decenas pero a su vez más larga que las unidades que se corresponden con el resto de los números. Es un instrumento espacial, en cuanto que los significados, que son los números y operaciones, se manifiestan mediante características del espacio.

Los números son los puntos o marcas en la recta numérica, el cero es el origen o punto de partida, los números positivos están a la derecha del origen y los números negativos están a la izquierda del origen. El número entero más pequeño, el uno, es un paso adelante desde el origen. El tamaño del número es la longitud desde el origen hasta un determinado punto. El resultado de una operación matemática es un punto de la recta numérica. Las operaciones matemáticas son los pasos que se dan al avanzar en uno u otro sentido, la suma de una cantidad dada es avanzar en una dirección a partir de una distancia dada, la resta es caminar hacia atrás o también caminar desde el número más pequeño al mayor.

En las agrupaciones de objetos el cero no surge de forma tan natural como otros números, representa la ausencia de objetos en un conjunto. No es tan fácil darse cuenta de que haya que representar precisamente la ausencia de objetos. Sin embargo en la recta numérica el cero es igual que cualquier otro número, él es también un punto o una marca. Como el conteo de objetos en grupos es uno de los primeros referentes en la concepción del número, puede apreciarse por qué tuvo que pasar mucho tiempo para que el cero fuera incluido como tal, y por qué hubo mucha resistencia a denominar al cero como un número.

En principio las agrupaciones de objetos sirven para enseñar aritmética porque es la forma más natural de hacerlo. Pero estas representaciones tan naturales tienen fecha de caducidad, limitadas a los números naturales y a los inicios de las operaciones básicas. Sirven para explicar algunas partes de la aritmética, pero no pueden aplicarse a otras, por ejemplo a los números netativos.

Como los casos de cualquier instrumento de representación la recta numérica tiene también su propio lenguaje (Lakoff y Nuñez 1998). 37 está lejos de 198712; 4,9 son casi 5; el resultado está alrededor de 40, o próximo a 40; contar hasta 20 sin saltarse ningún número; contar hacia atrás desde 20; nombrar todos los números desde 2 hasta 10. Los ejemplos lingüísticos son importantes porque muestran como el idioma de la manipulación de objetos y el movimiento pueden solaparse de una manera casi perfecta al hablar de aritmética.

4. Virtualidades de la recta numérica como elemento de representación

Construir una representación mental del sistema de numeración no es fácil ni inmediato. Cuando un alumno se inicia en el aprendizaje de los números sucede como cuando se visita una ciudad por primera vez. El primer paseo si no se va acompañado por nadie es un deambular sin rumbo. Poco a poco, a base de ir recogiendo información parcial, se va elaborando un mapa mental donde figuran las referencias que se consideran más importantes para después poder orientarse, pueden ser sus monumentos más significativos, o una avenida importante, o las diferentes manzanas o grupos de edificios que la componen. A partir de esas informaciones aisladas se va construyendo una representación mental que permite estar situados permanentemente y dirigirse a un objetivo preestablecido en cualquier punto de la ciudad. Algo similar debe suceder con el aprendizaje de los números, se debe viajar solo, en compañía de otras personas, o incluso perderse, para al final de esas experiencias diversas poder construir una representación mental válida y ajustada de la estructura del sistema de numeración. Esa representación mental debe ser completa para poder expresar todas las propiedades, transparente para que los mecanismos y operaciones aparezcan claros, y funcional cognitivamente en cuanto que facilite el manejo mental de los números. La recta numérica, ayuda a construir esa representación.

Una ventaja importante de la recta numérica sobre otras representaciones de los números es que es un instrumento perdurable. Muchas de las formas de representación de comprensión de la notación decimal una vez realizada su labor son abandonadas, en cambio la recta numérica se mantiene y es aplicable a multitud de contenidos relevantes, desde las primeras actividades de conteo, en la descomposición de números, en el aprendizaje de los algoritmos y el significado de las operaciones, en la resolución de sencillos problemas, en los conceptos de divisores y múltiplos, en proporcionalidad, hasta otros más complejos de análisis como pueden ser los de límite, etc.

Dos aspectos son destacados en la recta numérica como elemento de representación: su carácter intuitivo y su carga de información:

4.1. Su carácter intuitivo:

Es un modelo sencillo que lleva una enorme carga intuitiva, está asociado a acciones muy cotidianas y de gran contenido visual, como el movimiento, la percepción de alturas, la medida etc. Esto constituye una enorme ventaja, el pensamiento humano es deudor de sus experiencias más familiares.

Puede construirse como un modelo físico sobre el suelo, constituido por una cinta con divisiones en la que van marcados los números nudos como son las decenas, centenas etc. El avanzar o retroceder en la recta numérica es fácilmente aprehensible por los alumnos porque se relaciona de forma muy directa con acciones cotidianas que ellos realizan, al deslizarse hacia delante los números son cada vez mayores y al deslizarse hacia atrás se hacen más pequeños. Hay números que son como hitos o mojones a lo largo de ese camino y que sirven de puntos de referencia por ejemplo las decenas 10, 20, 30, 40 etc. También las centenas y los millares. Con la ayuda de ellos se sabe en qué punto exacto de este camino se está situado.

Desde muy pronto muchos preescolares pueden usar su representación mental de la serie numérica para resolver problemas sencillos como saber cuál es el anterior y posterior de un número "tres pastelitos y uno más" o "cinco muñecas menos una que te quedas" (Barody 1984). Sumas de números pequeños, cuatro pelotas más dos pelotas, cinco lápices menos dos. En estos problemas un niño puede entrar en la serie numérica por el punto especificado por el primer número y continuar para adelante o para atrás según lo expresado en el segundo número. Como el empleo de esta representación mental de la serie numérica es muy adecuado para determinadas respuestas relacionadas con el número anterior y posterior y sencillas sumas, muchos niños de cuatro o cinco años pueden dar mentalmente, y con rapidez, las respuestas a problemas sencillos. Posteriormente estas estrategias deben irse ampliando y completando, debe existir la capacidad para ir sumando trozos o fragmentos más amplios. Dominar mentalmente primero las descomposiciones numéricas más sencillas 7+3. 8+2, 9+1 etc. y a partir de ellas otras más complejas 62+13, 45+15, 4 por 25, 4 por 15 etc.

Otros procedimientos concretos de representación no tienen el mismo grado de adaptabilidad mental y flexibilidad que la recta numérica. Su poso intuitivo queda reflejado en que para los alumnos es más fácil contar hacia delante que contar hacia atrás, las restas son más difíciles que las sumas (Gelman 1982). La resta puede hacerse contando hacia atrás y luego los alumnos aprenden una estrategia de resolver las restas contando hacia delante, entonces su dificultad se equipara a la de la suma. Contar progresivamente se parece al enfoque del sumando ausente, pero aplicado a la sustracción (Carpenter y Moser 1982). Implica partir del sustraendo y contar hacia delante hasta llegar al minuendo, al tiempo que se lleva la cuenta del número de pasos dados. Aunque contar progresivamente no refleja la noción informal que el alumno tiene de la sustracción, a la hora de realizar el cálculo es cognoscitivamente más fácil que contar regresivamente (Barody 1984).

Algunos libros de texto presentan la automatización del algoritmo de la resta de la siguiente manera:

$$\begin{array}{c} 45 \\ 28 \\ \hline \end{array} \longrightarrow \begin{array}{cc} 3 & 15 \\ 2 & 8 \\ \hline 1 & 7 \end{array}$$

De ocho a quince son siete.
Como el cuatro le ha dado
una decena, sólo quedan
tres. De dos a tres uno

Según lo recogido a través de la observación de los alumnos y puntos de vista de los profesores en nuestra experiencia esta forma de automatización del algoritmo de la resta es inferior a la siguiente:

$$\begin{array}{c} 45 \\ 28 \\ \hline \end{array} \longrightarrow \begin{array}{cc} 4 & 15 \\ 3 & 8 \\ \hline 1 & 7 \end{array}$$

De ocho a quince son siete.
Como me llevo una en lugar de
ir de dos a cuatro voy de tres a
cuatro que es uno.

La razón argüida más convincente es que en la segunda forma se respeta en todo momento el mecanismo intuitivo de caminar hacia delante en la recta numérica, cosa que no sucede en el primer método en que en uno de los pasos se cuenta regresivamente.

Algo similar sucede con la división, los alumnos la convierten en un multiplicación, porque caminar hacia delante en la recta numérica es intuitivamente más sencillo.

$$135 : 12$$

$$12 \times 10 = 120;$$

$$120 + 12 = 132$$

Da de cociente 11 y
de resto 3

Mentalmente es más fácil construir el número mediante sumas sucesivas o la multiplicación que destruir el número mediante la resta sucesiva o división.

4.2. Su carga de información:

Una imagen puede estar construida con una gran cantidad de significados, o lo que es lo mismo, a partir de muchas unidades de información Pylysyn (1986). Esto mismo sucede con la resta numérica como instrumento de representación.

Por supuesto que no basta presentar la imagen de la recta numérica para que su contenido pueda ser asimilado por los alumnos. Para que los alumnos se formen una representación mental con sentido, es necesario que por diferentes medios puedan adquirir cuanta información sea posible sobre ella. La imagen que los adultos conocedores del tema tienen formada de la recta numérica está construida sobre multitud de unidades de información del tipo: el 52 está dos unidades más allá que el cincuenta, el 55 equidista del 50 y el 60, al 59 le falta uno para llegar al 60, de 30 a 40 hay diez unidades etc. En realidad la recta numérica esta constituida por infinitas unidades de información porque infinitos son sus elementos. Ningún procesador y tampoco el humano a pesar de su extraordinaria capacidad de almacenar información es capaz de retener un número infinito de datos. Lo que sucede en la recta numérica esta organizada en torno a un gran número de regularidades, lo que demuestra la maestría con que está construido el sistema de numeración. Pero naturalmente hay que ser consciente de esas regularidades y aprovecharlas para poder manejar mentalmente el sistema numérico: 2+5 es igual que 5+2, pronto los alumnos se dan cuenta que no importa el orden en que se sumen los números porque el resultado es el mismo; de hecho esto reduce ya el número de combinaciones a la mitad. El resultado de 8+7 es fácilmente generalizable a 18+7 o 28+7 etc.

Para poder operar hay que estar continuamente echando mano de esas unidades de información que se posee. Para sumar 31 más 8 habría que razonar que el 31 está una unidad más allá del 30, que al 8 le faltan 2 unidades para llegar a 10, por tanto que si al 31 se le suma 8 se queda a una unidad del 40, que es tanto como decir que el resultado es 39. Todos estos ítems de información se hacen transparentes a través de la recta numérica. En ella muchas unidades de información quedan encuadradas en una sola forma de representación espacial-visual.

Las operaciones deben abordarse desde un conocimiento profundo del sistema de numeración y uno de los modos más accesible y eficaz de enseñarlo es mediante su representación en la recta numérica.

5. Estrategias cognitivas en la recta numérica. Aprendizaje de las combinaciones básicas

5.1. Combinaciones básicas de la suma

Todo el sistema de numeración y las operaciones que en él son posibles realizar, ya se han visto ejemplos de la suma y de la resta, pueden ser muy bien modeladas y aprendidas utilizando la recta numérica como instrumento de representación. Pero aún más importante que en la recta numérica se puedan modelar el sentido general de las operaciones es que en ella como soporte puedan llevarse a cabo los mecanismos mentales que permiten aprender y aplicar los algoritmos de estas operaciones.

Bien sea para realizar el algoritmo de la suma o el de la resta el dominio ágil de las combinaciones básicas del tipo 7+5 o 9-4 es imprescindible. Al calcular cualquier suma o resta, no importa lo grandes que puedan ser los números, todo se reduce, una vez colocadas las cantidades convenientemente, a aplicar esas combinaciones sencillas.

Cuando se suman o se restan los dos números de una combinación básica, por ejemplo 6+3, es necesario realizar estrategias de conteo. En la suma a partir del primer número avanzar en la recta numérica tanto como indica el segundo, en la resta avanzar desde el número menor al mayor. Estas estrategias de conteo pueden realizarse de dos formas, que se corresponden con dos estados de conocimiento muy diferentes: una de ellas es realizar la suma de modo automático, de un solo salto, seis más tres son nueve; la otra es mucho más primitiva, sumar elemento a elemento, avanzar desde el seis, paso a paso, tres pasos, para finalizar en el nueve.

La decena es el bucle a partir del cual se genera todo el sistema de numeración, la serie numérica es una sucesión de decenas. Por ello las combinaciones de los números menores de diez 3+2=5; 4+3= 7 etc. deben ser plenamente automatizadas como requisito previo del aprendizaje numérico. Son esenciales en sí mismas y también para sumar otras combinaciones. Una suma de dos números de una combinación básica puede llevarse a cabo dentro de una decena, por ejemplo 13+5 que no es más que una generalización de 3+5, o bien saltar de una decena a la siguiente, por ejemplo 18+7. En todas estas operaciones se está poniendo a prueba la capacidad de procesamiento de la memoria a corto plazo. Para sumar 18+7 hay que apoyarse en el próximo número nudo (veinte), saber que de 18 a 20 hay dos pasos, tener presente que el 7 puede descomponerse como 2+5 porque hay que ir de un salto de 18 hasta 20, se han sumado dos, y concluir sumando los cinco restantes a 20 que son 25. En ambos tipos de sumas se está dando uso a la descomposición de un número menor de diez.

Son variados los argumentos que se dan sobre el porqué de que el sistema de numeración está construido sobre la base diez, se hace referencia al tamaño adecuado de los números o a que la actividad de contar se realizaba con la ayuda de los dedos de las manos que son diez. También pueden darse razones de tipo cognitivo, y son de peso, como que es una distancia ideal para ser abarcada y partida mentalmente en la memoria de trabajo. Está en el límite de lo que la capacidad media humana puede manejar con solvencia. Especial relevancia cobran las decenas que constituyen la primera centena, es decir los números inferiores a 100, porque es el tramo de la serie numérica en el que se realizan las operaciones mentales que permiten resolver los algoritmos de las cuatro operaciones, a partir de ahí se trabaja preferentemente con lápiz y papel.

Una gran parte de los impedimentos al aprendizaje numérico de algunos alumnos radican en su incapacidad para saltar del conteo elemento a elemento al manejo del grupo de elementos. Son incapaces de aprehender la estructura de grupo de elementos, que proporciona una estrategia mucho más flexible, no se aprovechan de la organización del sistema de numeración en decenas. La posibilidad de segmentar y agrupar de una forma sabia según la conveniencia de la situación es fundamental para conocer bien el propio sistema de numeración decimal y poder desplazarse por él. Si al realizar la suma 56 + 9 se hace paso a paso, sin apoyarse en las decenas (números nudo) esta estrategia es costosa en tiempo, facilita los errores y agota mentalmente. Es decir, que la actividad mental de partir o segmentar los números, de acoplar fragmentos en la recta numérica, es un requisito necesario para aprender las combinaciones básicas más sencillas 4 + 5; 9 + 6; etc., otras más complejas 38 + 9; 48 + 9; etc. y con ello tener una visión de la serie numérica y poder realizar un cálculo ágil y eficaz.

En los algoritmos de la suma y la resta con lápiz y papel del tipo 389+256; la mayoría de los alumnos que dominan con soltura las combinaciones básicas los resuelven correctamente y con rapidez, basta saber manejar números menores que 20, 9+6= 15; 8+5+1 = 14; 3+2+1 = 6; pero incluso los que no las dominan de un modo automático, pueden utilizar sus dedos y sumar elemento a elemento, con lo que en la mayoría de las veces, con mayor inversión de tiempo y esfuerzo, son capaces de obtener el resultado correcto.

5.2. Combinaciones básicas de la multiplicación:

Como en el caso de la suma y la resta para poder abordar los algoritmos de la multiplicación y división es necesario conocer las combinaciones básicas de estas operaciones recogidas en las tablas de multiplicar.

Las estrategias de conteo juegan también un papel destacado en el aprendizaje de las combinaciones básicas de la multiplicación, aquellos alumnos que las realizan adecuadamente tienen más facilidad para moverse en la recta numérica y aprenden con rapidez las tablas de multiplicar. Para construir la tabla del 7 se va sumando de 7 en 7, pero si esta suma se realiza uno a uno significa que los alumnos no visualizan adecuadamente la recta numérica, su conocimiento es demasiado particular, no manejan trozos más amplios de ella, no se representan la serie numérica hasta el 100 y fallan al tratar de retenerlas.

La técnica de sumar elemento a elemento, de caminar en la recta numérica paso a paso, de ayudarse con los dedos como apoyo concreto, no puede llevarse a cabo en las combinaciones básicas de la multiplicación, por ejemplo para calcular 9x8 no hay dedos. De ahí su dificultad cognitiva en relación con la suma o la resta. En la multiplicación es imprescindible tener una representación interna para poder situar los dos números y el resultado de la combinación básica y poder memorizarla. Cuando se pretende aprenderlas de memoria sin haberlas construido mentalmente fallan en su propósito.

Se debe estimular explícitamente a contar a intervalos, sobre modelos físicos construidos. Dibujar la recta numérica sobre el suelo y mediante pasos ir simulando los avances que se producen en cada una de las tablas. Así en la tabla del nueve los pasos son más grandes y se camina más lejos que en la del 6. Estas actividades contribuyen a la interiorización y representación. Pero no basta con presentar una imagen de la recta numérica para que se forme una representación, es necesario tratar de transmitir toda la información que contiene esa imagen, para ello lo mejor es utilizar preguntas que afloren y vayan haciendo explícita toda esa información.

En el siguiente ejemplo se muestra la construcción de la tabla del 8 con alumnos que tienen dificultades para retenerla comprensivamente:

Profesor: ¿*Desde donde partimos*?

Alumno: *Desde el* 0.

Profesor: *Escribe* el 0 *y señala el* 0 *en la recta numérica que tenemos dibujada. Ahora súmale ocho, es decir da 8 pasos ¿hasta dónde avanzamos*?

Alumno: *Avanzamos hasta* 8. *Está aquí* (señalando dónde se encuentra) 8 *pasos más adelante*.

Profesor: *Muy bien. Como estamos construyendo la tabla del* 8 *vamos a sumar* 8, *o lo que es lo mismo, vamos a avanzar otros ocho pasos más. ¿Cuál es la decena más próxima que tenemos delante*?

Alumno: *El diez*

Profesor: ¿*A cuántos pasos estamos del* 10?

Alumno: *A dos pasos*.

Profesor: *Tenemos que sumar* 8, *si hasta* 10 *hemos sumado ya* 2 *¿Cuántos nos quedan por sumar*?

"Esta es una de las preguntas que les resultan difíciles a los alumnos. Se alternan las preguntas utilizando términos de la metáfora longitud, pasos, distancias, y los términos propios de la numeración"

Alumno: *Si teníamos que avanzar* 8 *y ya hemos avanzado* 2 *nos quedan* 6 *por avanzar*. 10 *más* 6 *son* 16.

Profesor: *Muy bien, lo has hecho muy bien*.

De esta manera se construye la tabla hasta el cuarenta, del cuarenta al ochenta se vuelven a reproducir las mismas situaciones en la recta numérica (en lugar de 8+8, 48+8, en lugar de 16+8, 56+8 etc.). Todas estas preguntas, se realizan mientras el alumno va apuntando las cantidades y trabajando y desplazándose física o visualmente sobre la recta numérica. Estas mismas preguntas pueden completarse con otras que profundicen y propicien una representación mental en el alumno de la serie de los números, por ejemplo cuando se pregunta cuántos pasos hay de 24 a 30 si el alumno no lo sabe se le deberá preguntar ¿cuántos pasos hay de 25 a 30? Y ayudarle a razonar que si de 25 a 30 hay 5, desde 24 a 30 hay 6.

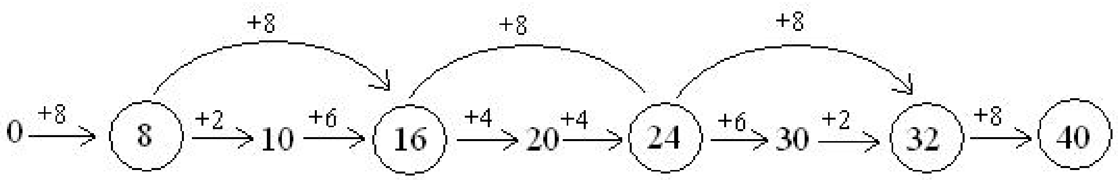


Figura 4

Comenzar por las tablas del 5, del 10, del 2. Como los niños aprenden a contar de dos en dos, de cinco en cinco y de diez en diez antes de aprender a contar tres en tres de cuatro en cuatro etc., las combinaciones del dos, del cinco y hasta del diez son relativamente fáciles para la mayoría de los niños. Por tanto, no se debe retrasar la práctica con las tablas del cinco y del diez. De hecho la tabla del cinco, al partir exactamente la decena en dos partes iguales, es una candidata psicológicamente ideal para introducir la multiplicación pues es más fácil la visualización de sus intervalos en la recta numérica.

La representación que el profesor debe ayudar a construir a sus alumnos se produce sobre la serie numérica, ella es el referente que visto mentalmente permite a los alumnos recordar de forma comprensiva y eficaz el resultado de aplicar una operación a un par de números. Los números nudos (decenas) ocupan un papel fundamental en esta representación, a partir de ellos utilizados como hitos o mojones en el camino se pueden situar los demás números.

De las representaciones espaciales y visuales numéricas al cálculo mental. Combinaciones y senderos de menor coste de representación

El ser y finalidad de la recta numérica como instrumento físico de representación es llegar a un momento en que pueda ser prescindible. Ello será posible cuando la representación externa no sea necesaria porque se ha adquirido e interiorizado una representación mental. Los apoyos concretos mediante lápiz y papel y los modelos físicos son una ayuda pero nunca pueden sustituir a las estrategias puramente mentales. Necesariamente muchas operaciones deben realizarse de forma mental, por motivos obvios de velocidad de procesamiento, si todos los pasos, hasta los más simples se realizaran sobre el papel, cualquier sencillo calculo como el algoritmo de una suma, no digamos una división, se eternizaría en el tiempo.

Cuando los alumnos están preparados van conociendo con mayor soltura los cálculos básicos, comienzan a ser menos necesarios los procedimientos concretos y se van abandonando en favor de los procedimientos mentales. El cálculo mental es una actividad considerada de especial importancia por todos los profesores, porque perciben que aquellos alumnos que son capaces de realizar estimaciones o resolver sumas y restas mediante cálculo mental progresan sin problema en cualquier tipo de aprendizaje matemático. El cálculo mental, al carecer de elementos concretos en que apoyarse, necesita de una buena capacidad de representación. Aquellos alumnos que son capaces de realizarlo con soltura la poseen y además conocen muy bien los tramos de sistema de numeración, 10, 20, 30 100, 200, 300 etc. y son capaces de crear estrategias y de utilizarlas con flexibilidad. Por ejemplo si se les solicita que sumen 25 más 37, son capaces de imaginar una situación similar a la siguiente:

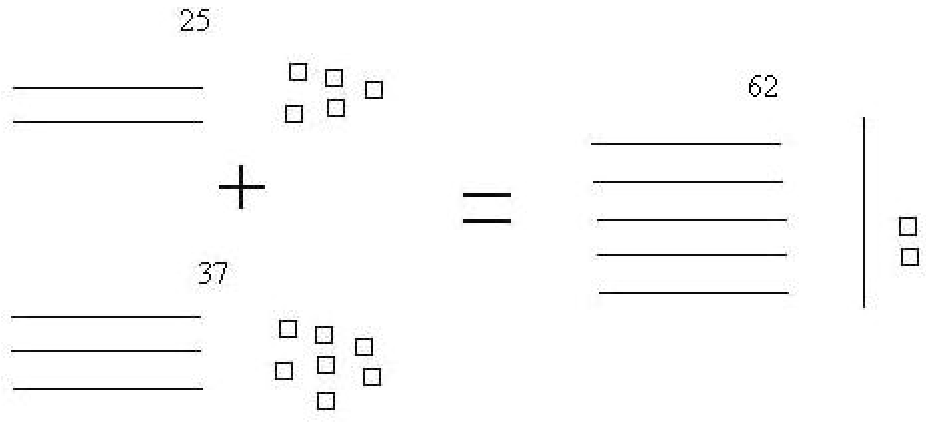


Figura 5

En el escenario planteado, crean una nueva decena, suman las decenas, y teniendo en cuenta las unidades restantes obtienen el resultado. Los alumnos que fallan al realizar este tipo de actividad es que no tienen la posibilidad de imaginar alguna forma de representación mental para poder llevar a cabo estas operaciones, mientras esto no sea posible, la enseñanza se realiza en el vacío, a ciegas, con pocos o nulos progresos que son olvidados de un día para otro. Y la consiguiente frustración y desgana que ello lleva consigo.

Las estrategias mentales utilizadas deben ser aquellas que sean más eficaces, pero a la vez se eligen las que exigen menor esfuerzo de representación, que requieren menor carga en la memoria de trabajo.

Dobles: es un hecho constatado que la suma de dos números iguales exige de menor carga en la memoria de trabajo que la suma de dos números diferentes. Por ello los alumnos utilizan esta estrategia en diferentes tipos de sumas. No es necesario hacer el análisis y la descomposición de dos números sino de uno sólo que se repite. Existe también una simetría que facilita la suma.

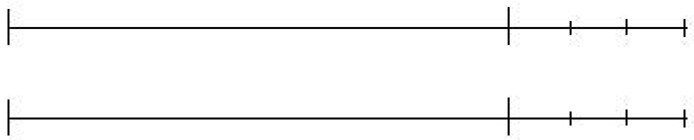


Figura 6

13 + 13 = (10 + 10) + (3 + 3) = 20 + 6 = 26

Dobles más/menos uno: cuando se plantean sumas donde uno de los números supera al otro en una unidad hay muchos alumnos que espontáneamente realizan el doble del número menor y le añaden después una unidad, o bien el doble del número mayor y le restan una unidad al resultado. Aunque es más frecuente lo primero que lo segundo porque es más fácil avanzar en la serie numérica hacia delante que retroceder.

13 + 14 = (13 + 13) + 1 = 26 + 1 = 27

Dobles mas/menos dos: no es tan habitual pero algunos alumnos son capaces de descomponer los sumandos cuando uno de ellos supera al otro en dos unidades.

15 + 17 = (15 + 15) + 2 = 30 + 2 = 32.

Llegar hasta la decena: esta estrategia es de extraordinaria importancia. Permite desplazarse en la recta numérica. Es el modo de proceder mentalmente en la mayoría de las situaciones en las que intervienen números. Se utiliza con profusión en los algoritmos de las cuatro operaciones.

57 + 8 = (57 + 3) + 5 = 65

Combinaciones de más fácil acople en la recta numérica: en general es más fácil retener, porque son más fáciles de visualizar, aquellas combinaciones que se acoplan de modo perfecto en tramos señalados de la recta numérica. Por ejemplo es más fácil 4 por 25 que se acopla en la centena que 7 por 13 o 4 por 17.

En las operaciones de cálculo mental más complejas siempre se busca utilizar las vías que necesitan de menor esfuerzo de visualización.

Al calcular mentalmente 200 **:** 14, puede hacerse:

14 por 10 = 140 14 + 14 = 28 28 + 28 = 56 140 + 56 = 196

Como, desde 196 hasta 200 son 4, entonces 200 son diez veces 14, más cuatro veces 14 que son 196 y quedan cuatro de resto. También se podría realizar:

5 por 14 = 70 70 por 3 = 210

Como 210 son quince veces 14, se tiene que 200 **:** 14 son catorce veces 14 y quedan 4 de resto.

Como puede observarse las posibilidades que ofrece el cálculo de llegar por caminos distintos a un mismo resultado son prácticamente ilimitadas. Las actividades de enseñanza deben favorecer en los alumnos la aparición de este tipo de técnicas. Fácilmente imitables entre compañeros de un mismo nivel, a través de discusiones y diálogos en voz alta sobre las forma de realizarlas, y con una actitud por parte del profesor de admitir respuestas distintas pero igualmente acertadas a los cálculos planteados. Para los alumnos puede ser muy interesante descubrir itinerarios de cálculo que hagan más fácil llegar mentalmente a un resultado.

6. Algunas actividades tipo

El aprendizaje del sistema de numeración y de los algoritmos de cálculo no tiene porqué ser aburrido y monótono para los alumnos. Siempre que sea posible es preferible proponer actividades abiertas, se adaptan mejor a las posibilidades individuales de cada alumno, permiten la creatividad al poder elegir entre diferentes caminos y estimulan el aprendizaje.

Se proponen algunos ejemplos.

- **Parchís.**

Es uno de los juegos que mejor pueden servir para la interiorización de la serie numérica. Las habilidades básicas de contar precursoras de otras más complejas pueden entrenarse y evaluarse mediante este juego.

- **Llegar hasta 180 (puede proponerse cualquier otro número).**

Cada alumno elige e indaga el camino que él estima más oportuno para llegar al objetivo. Muchos se apoyan en las decenas para avanzar. Utilizan diferentes intervalos y las operaciones de suma, resta, y multiplicación. Lo importante es que permite ampliar y profundizar el conocimiento propio que tienen del sistema de numeración.

- **Números diana: con los números 7, 3 y 5 y las cuatro operaciones conseguir el número 860.**

Mediante los números diana se puede practicar de un modo divertido las cuatro operaciones aritméticas. Es posible proponer ejercicios de muy diferente grado de complejidad, desarrollando la creatividad y la autonomía de los alumnos.

- **Parte de 0 y añade 5. Continua siempre así, añade siempre 5 al resultado que obtienes. ¿Llegarás en alguna ocasión a conseguir el número 43? ¿Y el número 70? ¿Y si comenzamos partiendo del número 2? ¿Y partiendo del número 3?**

Actividades como las anteriores permiten la interiorización del sistema de numeración, a través de ellas se va creando una representación completa y ajustada del mismo.

7. Conclusión

El dominio del sistema de numeración, objetivo importante de los alumnos de Educación Primaria, constituye desde su inicio un enorme ejercicio de visualización. Sucede desde las primeras representaciones discretas de los números menores de diez que deben ser aprehendidas de un solo golpe de vista (de modo similar a como aparecen representadas las cantidades en un dado). A la vez que se reconocen estas constelaciones de objetos se van adquiriendo formas de representación simbólicas alternativas, a cada cantidad menor de nueve se le asigna un número. Posteriormente, para poder manejar y representar mentalmente cantidades mayores, en un nuevo ejercicio visual, se forman grupos de diez elementos: surgen las decenas. No es posible designar con la misma marca al grupo de diez elementos que a las unidades sueltas, este hecho queda diferenciado por otro aspecto visual, como es la posición relativa que las decenas ocupan dentro del número.

Las representaciones discretas tienen mayormente su razón de ser para números menores de diez elementos. A partir de esa cantidad son necesarias otras formas de representación, surge la recta numérica como un instrumento de representación continua, de naturaleza claramente visual. Los hitos en el camino, cada paso o desplazamiento, decenas y centenas, quedan señaladas mediante marcas en el camino. En la recta numérica se pueden modelar, de forma transparente, las operaciones aritméticas y todas sus propiedades.

El atribuir significados mediante contenidos visuales es un componente importante de todas las matemáticas y también del aprendizaje numérico. Esto no sólo se manifiesta en las percepciones globales de conceptos, si no también en detalles necesitados de un análisis fino, por ejemplo en el caso de la estrategia de llegar hasta la decena, comentado en un apartado anterior, un alumno manifestaba que al visualizar la operación 57 + 8 la descomposición de 8 en 3+5 la veía como si se quebrara el segmento.

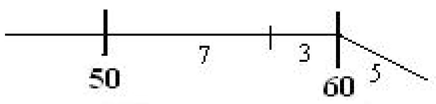


Figura 7

Muestra que la visualización puede ser fuertemente idiosincrásica, pero lo más importante es que cumpla su objetivo funcional de atribuir significados.

Hay alumnos para los que este paso del Rubicón de aprender los números y sus reglas se produce con facilidad, para otros entraña relativas dificultades que al final con una mayor o menor inversión de tiempo y esfuerzo son superadas, para un tercer grupo se convierte en una tarea bastante difícil de llevar a cabo.

Para favorecer la visualización y comprensión de los números es deseable que se programen actividades abiertas, que puedan resolverse por diferentes caminos y permitan la libertad de indagación y pensamiento. También la utilización de aquellas formas de representación más intuitivas, transparentes y perdurables, como puede ser el caso de la recta numérica. Útiles para cualquier alumno, y especialmente necesarias para alumnos con algún tipo de dificultad en su aprendizaje del sistema de numeración y algoritmos de cálculo.

Nota: se está trabajando en la creación de un diseño informático de la recta numérica en el que la que el alumno puedan trabajar visualmente todas las operaciones que es posible realizar en ella.

Bibliografía

Barody A.J. (1988) *El pensamiento matemático de los niños*. Visor.

Carpenter, T.P. y Moser, J. M. (1982) *The development of addition and subtraction problem-solving skills.* Hillsdale, NJ: Lawrenece Erlbaum Associates.

Gelman, R. (1982). Basic numerical habilitéis. En R. J. Stemberg (Ed), *Advances in the psycology of intelligence.* Hillsdale, NJ: Lawrenece Erlbaum Associates.

Lakoff, G, & Johnson, M. (1980). *Metáforas de la vida cotidiana*. Ediciones Cátedra, Madrid, Traducción de 1990.

Lakoff, G. y Núñez, R. (1998). Conceptual metaphor in mathematics, en Koenig J.P. (ed.). *Discourse and Cognition:Bridging the Gap*, 219-237. Stanford: CSLI-Cambridge.

Pylyshyn Z. W. (1986) Imágenes e inteligencia artificial en Albea J.E. *Percepción y computación*. Madrid. Ediciones Pirámide S.A.

Martín Sánchez E. (2008) Unión. *Revista Iberoamericana de Educación Matemática.* Marzo de 2008, Número 13, 51-60.

José Antonio Redondo González. Equipo de Orientación Educativa y Psicopedagógica de la Junta de Extremadura. Doctor en Ciencias de la Educación con una tesis sobre la Visualización en Matemáticas. **jredondog@juntaextremadura.net**

Ricardo Francisco Luengo González, Catedrático de la Facultad de Educación de la Universidad de Extremadura. Doctor en Ciencias de la Educación, autor de numerosas publicaciones y trabajos sobre Matemáticas y Nuevas Tecnologías aplicadas a la Didáctica de las Matemáticas. **rluengo@unex.es**

Luis Manuel Casas García, Profesor Asociado de la Facultad de Educación de la Universidad de Extremadura. Doctor en Ciencias de la Educación, autor de diversas publicaciones sobre Didáctica de las Matemáticas. **luisma@unex.es**

José Luis Redondo García, Técnico de Apoyo de la Universidad de Extremadura. Ingeniero en Informática, colabora en la creación de herramientas informáticas aplicadas a la Didáctica de las Matemáticas. **jluisred@unex.es**