UNIÓN
REVISTA IBEROAMERICANA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA

Diciembre de 2010, Número 24, páginas 57-68
ISSN: 1815-0640

MONOGRÁFICO ESTADÍSTICA

Dualidad de la probabilidad y enseñanza de la estadística

Pablo Carranza; Jenny Fuentealba

Resumen

En este artículo nos interesamos en la noción de probabilidad y algunas de sus implicaciones didácticas. En la primera parte nos centraremos en los dos principales significados de la probabilidad, uno denominado frecuentista, el otro bayesiano. En la segunda, nos interesaremos en algunas cuestiones didácticas que se desprenden de esta dualidad, en particular nos centraremos en algunas dificultades de su tratamiento en clase.

Abstract

In this article we are interested to the notion of probability and some of his didactic implications. In the first part we will centre on both principal meanings of the probability, one named frecuentista, another bayesiano. In the second one, we will be interested to some didactic questions that part with this duality, especially we will centre on some difficulties of his treatment on class

Resumo

Neste artigo interessamos-nos à noção de probabilidade e algumas de seus envolvimentos didácticos. Na primeira parte centrar-nos-emos nos dois principais significados da probabilidade, um denominado frecuentista, o outro bayesiano. Na segunda, interessar-nos-emos a algumas questões didácticas que se desprendem desta dualidad, em particular centrar-nos-emos em algumas dificuldades de seu tratamento em classe.

1. La probabilidad. Dualidad de significados

A diferencia de como muchos docentes la hemos aprendido, la probabilidad tiene dos significados bien distintos, cada uno de estos nos reenvía a paradigmas inferenciales diferentes. En efecto, bajo el término probabilidad es posible representar por un lado la estabilización de la frecuencia de aparición de un fenómeno y por otro lado una medida de certeza de la veracidad de una proposición. A la primera se la conoce como probabilidad frecuentista, a la segunda como bayesiana. La noción frecuentista corresponde a la inferencia llamada “clásica”, la segunda a la bayesiana, en fin, dos métodos estadísticos bien diferentes de inferir.

Si la noción bayesiana como una medida de certeza resulta al lector una novedad, ello no debe sorprendernos, los sistemas educativos suelen centrar su atención en la primera interpretación, la llamada frecuentista. Tampoco debería sorprendernos que, luego de una breve descripción, el lector sienta una cierta familiaridad con la noción bayesiana, aunque jamás haya entendido hablar de ella en su formación. Esta familiaridad se explicaría porque la dualidad de significados es una característica indisociable al concepto de probabilidad. La hayamos aprendido en nuestra formación o no, esta noción se ha ido construyendo en nosotros por las diferentes situaciones a las que nos hemos enfrentado.

Para comprender la dualidad de la probabilidad es necesario considerar dos dimensiones, la primera la llamaremos calculatoria, la segunda, semántica. Por dimensión calculatoria entenderemos todos aquellos aspectos que se refieren al valor numérico de una probabilidad. Por dimensión semántica, entenderemos aquellos aspectos vinculados al significado dado a un cálculo. Por ejemplo, tomemos el ejercicio que se presenta a continuación, el mismo es de un libro de texto francés destinado a alumnos de aproximadamente 16 años (Belin 1S, página 199):

Sea un conjunto Ω sobre el cual se define una ley de probabilidad P y tres eventos A, B y C tales que:

$$P(A) = 0{,}5; P(B) = 0{,}7; P(C) = 0{,}4; P(A \cup B) = 0{,}8 \; y \; P(B \cap C) = 0{,}1$$

Calcular $P(A \cap B)$

Este problema se centra en la dimensión calculatoria de la probabilidad. En efecto, no solo no hay ningún indicio que nos permita asociar tal o cual significado al cálculo realizado, sino que además, ninguno de esos significados podria contribuir a responder a la pregunta del problema. Es entonces un ejercicio focalizado sobre la dimensión calculatoria.

Tomemos otro problema donde las dos dimensiones están presentes, tanto la calculatoria como la semántica. Un ejemplo lo constituye el ejercicio siguiente, extraído de otro libro de texto francés, siempre para alumnos de 16 años (Didier 1S, página 210):

Se lanzan dos dados cúbicos simétricos, se busca la frecuencia de aparición de un doble, es decir, por ejemplo, 2 veces el 1, 2 veces el 2, etc.(…) Realizar un gran número de simulaciones y estimar la frecuencia de aparición de cada [doble]; Calcular, ayudándose de la simulación, la probabilidad de aparición de cada doble.

En este último ejercicio, la dimensión calculatoria es clara, se le pide al alumno “Calcular”. La semántica por el contrario aparece dejando entrever que el cálculo debe asociarse a la estabilización de frecuencias proveniente de la simulación, en este caso, el significado dado a la probabilidad es frecuentista.

Para comprender entonces la dualidad de la probabilidad es necesario situarse en la dimensión semántica de la probabilidad y no en la calculatoria. En esta última no encontraremos indicio alguno de lo que significa una probabilidad, y esto simplemente porque la dimensión calculatoria es la misma para ambas interpretaciones. Continuaremos con la presentación de algunas características que, creemos, ayudaran a diferenciar estas dos interpretaciones, características que a su vez, nos servirán para comprender la complejidad y la riqueza de esta dualidad, sabiendo siempre que, en este enfoque habrá dos dimensiones alternándose, una calculatoria y otra semántica.

2. Diferencias entre los significados de la probabilidad

2.1. Primera diferencia: sobre qué contextos se evalúa la probabilidad

Veremos que, independientemente de nuestros gustos o afinidades hacia tal o cual enfoque probabilístico, hay contextos que son frecuentistas y otros que son bayesianos. Es decir que hay una cierta objetividad en la interpretación de la probabilidad asociada a un contexto dado. Comenzaremos describiendo las características de los contextos frecuentistas. Para ello nos basaremos en la definición que Richard von Mises propone para la probabilidad[1] (frecuentista). Este autor remarca que, para poder hablar de probabilidad debe haber un conjunto (*collective*) satisfaciendo dos axiomas (von Mises, 1928). Este conjunto no es ni más ni menos que la serie de resultados de la reproducción de un fenómeno. Los dos axiomas que debe satisfacer este conjunto son los siguientes:

- Axioma de convergencia: La proporción de aparición del carácter observé en el conjunto tiende a un valor dado cuando el conjunto tiende al infinito.
- Axioma de aleatoriedad: El valor límite de la proporción de aparición no se ve afectada por la selección de cualquier subconjunto infinito, a condición que la regla de selección de los elementos del subconjunto infinito sea fija.

Esta definición de la probabilidad frecuentista, tan acertada como concisa, refleja las características que debe satisfacer el conjunto de reproducciones de un fenómeno dado, sea este real o hipotético. Entonces, y tal cual lo remarca el autor, la probabilidad frecuentista solo se aplica a casos donde hay un conjunto infinito de reproducciones de un fenómeno dado (o evento).

El último ejercicio que reprodujimos es un ejemplo de probabilidad frecuentista. En efecto, el problema se interesa la proporción de la aparición de un fenómeno cuando se reproduce la experimentación (hipotéticamente) una infinidad de veces, el segundo axioma, claro esta, queda implícito.

Para la probabilidad bayesiana la situación es menos restrictiva. En efecto, dado que ella representa un grado de certeza de la veracidad de una proposición, es suficiente que dispongamos de una proposición y que desconozcamos su veracidad. Esto bastaría para poder utilizar el término probabilidad. De esta manera la probabilidad representa numéricamente cuanto creemos en una proposición.

Tomaremos como ejemplo de probabilidad bayesiana un problema propuesto por Pascal (Pascal, 1670). Este problema resulta interesante por tres

[1] Richard von Mises, al igual que su hermano Lutwin y que Kart Popper (Popper, 1957, 1959, 1959) fueron acérrimos defensores del enfoque frecuentista, en otras palabras opositores al enfoque bayesiano.

razones, la primera porque la probabilidad en este problema no admite otra interpretación que la bayesiana, la segunda porque nos muestra que, desde su emergencia, las dos interpretaciones[2] estuvieron representadas por el término probabilidad, y la tercera porque pone en evidencia la función de la probabilidad como una herramienta para la toma de decisiones en contexto de incertidumbre.

El problema de Pascal que aquí sintetizamos es conocido como "La Gran Apuesta" y puede ser resumido como sigue (Hacking, 2002) : habiendo personas que, no convencidos por las pruebas de la religión (católica) y aun menos por los argumentos de los ateos, duda entre la fe o la incredibilidad. Para resolver esta duda, Pascal propone una modelización del problema en términos de probabilidad donde el argumento decisional de adherir a los preceptos de la Iglesia o llevar una vida sin privaciones, se basa en la utilidad máxima obtenida para cada una de estas dos acciones posibles. De esta manera, según Pascal claro, convendría adherir a los preceptos de la Iglesia aunque la probabilidad que Dios exista sea mínima, pues adhiriendo a los preceptos de la Iglesia y Dios existiendo, la ganancia seria infinita (el paraíso) y ella superaría a cualquier otra ganancia posible.

Lo que nos interesa aquí retener es el significado de la probabilidad subyacente al problema. En este caso, podemos afirmar que la expresión "la probabilidad que Dios exista" se refiere a una medida de certeza sobre su existencia y en ningún caso, a la frecuencia con la que Dios existe. Es sin dudas, una probabilidad bayesiana.

En el ejemplo que acabamos de resumir, la interpretación bayesiana se aplicó a proposiciones ("Dios existe", "Dios no existe"). Como dijimos anteriormente, los contextos bayesianos son menos restrictivos que los frecuentistas, basta una proposición de la cual no estemos convencidos para que podamos utilizar el término probabilidad. Para la probabilidad frecuentista en cambio, es necesario un contexto mas complejo, una experimentación que sea repetida (al menos mentalmente) infinitas veces y bajo las mismas condiciones.

Si bien, como hemos visto, los contextos bayesianos son menos restrictivos que los frecuentistas, será conveniente descomponer los primeros, en dos grupos. Esto nos ayudara a comprender de qué manera las dos interpretaciones de la probabilidad se relacionan. Descompondremos entonces los contextos bayesianos en dos categorías, a una la llamaremos "hipótesis", a la otra "evento genérico", comenzaremos con el último, el "evento genérico".

Una proposición es un evento genérico cuando, interesados siempre en su veracidad, podemos concebirlo como un evento formando parte de un conjunto mas vasto de eventos, en otras palabras, cuando lo pensamos como uno entre otros, de ahí la denominación de genérico. Veamos un ejemplo de un evento genérico: Nahuel tiene que decidir entre tomar la autopista A o la B. Lo único que sabe de estas autopistas es que la tasa de mortalidad por accidentes de transito de A es de 5 por mil, mientras que la de la autopista B es de 2 por mil. Para ese evento, Nahuel no dispone de otra información que del dato

[2] Pascal propuso dos problemas, uno se refiere a la probabilidad frecuentista (Le Partage) el otro a la probabilidad bayesiana (Le Gran Pari) ambos publicados en la misma época.

estadístico de la tasa de accidentes mortales, él decide entonces, en base a esta información, tomar la autopista B.

Veamos primero por qué esta situación es bayesiana. La cuestión que preocupa a Nahuel se refiere a su persona, él se interesa en saber si “él” tendrá un accidente mortal o no. Imposibilitado de conocer la verdad de esa proposición, aborda la cuestión en términos de probabilidad, una suerte de medida de certeza de tener un accidente mortal, es entonces un contexto bayesiano. Veamos ahora por qué es un evento genérico. Para evaluar cuán seguro está de tener un accidente mortal, Nahuel considera la información disponible, nada particular sabe de lo que ocurre en esas autopistas en ese momento, ni del vehiculo que él conduce tampoco, solo dispone de información genérica (la tasa de accidentes por autopistas). De esta manera, al no disponer de información específica, Nahuel inscribe su caso dentro de un conjunto y lo considera como uno entre otros. Esta inclusión de su caso en el conjunto de usuarios de las autopistas le permite evaluar numéricamente cuanto creer en la proposición. Remarcamos que, si aquí Nahuel toma la frecuencia de accidentes mortales como un argumento no es mas que para justificar su razonamiento (Hacking & Dufour, 2004). Si el dispusiese de información mas precisa, seguramente la evaluación de la probabilidad sería otra. Por ejemplo, si el tuviera conocimiento de la tasa de accidentes mortales correspondientes al día de la semana en cuestión, y/o a la edad de los conductores… En fin, vemos que el valor numérico de la probabilidad bayesiana esta en función de la información disponible (probabilidad condicional).

Es necesario remarcar aquí que, a pesar que Nahuel hace intervenir la frecuencia de accidentes, la cuestión no deja de ser nunca bayesiana, y si esta frecuencia aparece, es porque Nahuel la considera como una razón para evaluar cuánto creer en la proposición.

Veamos otro ejemplo de contexto bayesiano del tipo evento genérico donde se pone en evidencia el rol de la información disponible a la hora de evaluar numéricamente la probabilidad. Imaginemos dos personas frente a una mesa, Belén a la izquierda y Emilce a la derecha. Se coloca una hoja de papel sobre la mesa como muestra la Figura 1. Se tira una moneda de tal manera que ella cae a la derecha de la hoja de papel, frente a Emilce. Claro está, Belén no tiene posibilidad de ver el resultado del lanzamiento. Se les pregunta a ambas, cual es la probabilidad que la cara visible de la moneda sea “cara”.

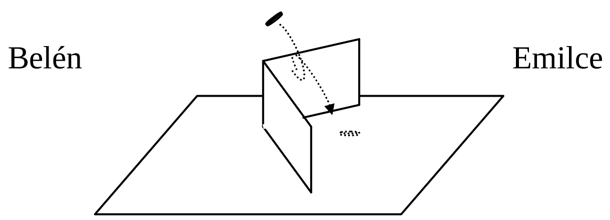

Figura 1

La respuesta de Emilce debería diferir de la de Belén. Para la primera, no habría ninguna incertidumbre a considerar, interrogada en términos de probabilidad, ella diría 1 o 0, dos medidas de certeza, por cierto. El problema para Belén es otro, ella desconoce el resultado, su vecina no le desliza ningún indicio, tampoco conoce nada de la moneda que ha sido lanzada. En fin, no teniendo ningún motivo para privilegiar un resultado sobre otro (Keynes, 1921), Belén decide atribuirle a las dos posibilidades las mismas probabilidades.

Vemos en este ejemplo dos valores de probabilidad diferentes, y ninguno erróneo por cierto. Podríamos preguntarnos si estos dos valores (el de Emilce y el de Belén) son los únicos posibles. He aquí una pregunta que los bayesianos gustan responder, sobre todo frente a aquellos que nos hemos formado dentro de la matemática. La respuesta de un bayesiano como (de Finetti, 1937, 1974) sería no, no hay un valor correcto y único para una probabilidad bayesiana, lo que hay son mejores razones que otras.

Incluso es posible, según los bayesianos, que un mismo individuo evalúe de manera diferente la probabilidad de una misma proposición si, a momentos diferentes, dispone de informaciones diferentes. Por ejemplo, supongamos que tanto Emilce como Belén obtienen un premio si al lanzar la moneda, sale “cara” y supongamos que, al caer la moneda, Belén constata en Emilce un gesto de satisfacción. La pregunta es, deberíamos juzgar como incorrecto un eventual valor de probabilidad de 0,8 y corregir a Belén diciendo que la probabilidad “es” 0,5? Sería un acto inteligente de nuestra parte, una tal corrección?

Nos queda por describir el otro caso posible para una probabilidad bayesiana, el que hemos denominado “hipótesis”.

La principal diferencia entre una “hipótesis” y un “evento genérico” es que, para el primero no disponemos de un conjunto donde inscribirlo. En el caso tanto sea de Nahuel como el de Emilce y Belén, se disponía de conjuntos que nos permitían considerarlo como uno entre otros, en efecto, Nahuel se incluyó en el conjunto de usuarios de las autopistas A y B, y Belén, para evaluar la probabilidad de “cara”, consideró ese lanzamiento como uno entre otros. En fin, podríamos decir que un evento genérico, se caracteriza por su inclusión dentro de un conjunto de casos posibles.

El tipo de contexto “hipótesis” carece de esa posibilidad, su unicidad no nos permite inscribirlo dentro de un conjunto. De esta manera su evaluación numérica se torna “problemática”. De hecho, el ejemplo de Pascal (La gran apuesta) es un problema bayesiano del tipo “hipótesis”. En efecto, en que conjunto inscribiríamos la existencia de Dios? Aquí, la evaluación de la probabilidad de la proposición se torna “subjetiva”, cada persona atribuirá una medida que irá desde 1 (certeza de su existencia) a 0 (certeza de su no existencia).

Acabamos de utilizar el termino “subjetiva” para referirnos a la evaluación de una probabilidad bayesiana del tipo “hipótesis”, sin embargo, esto no es más que una impresión producto de nuestras costumbres. En efecto, la evaluación de una probabilidad bayesiana es siempre subjetiva y si nadie de nosotros cuestiona que la probabilidad de obtener “cara” al lanzar una moneda es 0,5, es porque el argumento de los casos posibles sobre los favorables es el de mayor peso (Bernoulli, 1713; Condorcet, 1805; De Finetti, 1974; de Moivre, 1756; Jaynes, 1995; Laplace, 1795; Leibniz, 1765; Savage, 1968; Shafer, 1994).

Cuando nos enfrentamos a problemas donde no disponemos que de un solo conjunto donde inscribir nuestro evento, nadie duda de la pertinencia del argumento, tal es el caso de la moneda, pero en cuanto aparecen varios tipos de conjuntos, como podría ser el caso de Nahuel (día de la semana, edad, tipo de vehiculo, etc.) la subjetividad de la probabilidad queda develada. ¿Cuál conjunto tomar? En sí, todas las posibilidades de evaluación terminan siendo subjetivas. La única diferencia entonces entre una "hipótesis" y un "evento genérico" es la disponibilidad o no de un conjunto sobre el cual referenciar la evaluación.

En estos últimos párrafos hemos estado alternando entre las dos dimensiones de la probabilidad. Nos hemos referido tanto al significado de la probabilidad como al valor numérico de la misma. Precisamente, los criterios de evaluación de una probabilidad son otra diferencia entre las dos interpretaciones de la probabilidad, presentaremos ahora esta diferencia de una manera esquemática.

2.2. Segunda diferencia: los criterios de evaluación de una probabilidad

Esta es otra de las diferencias entre la probabilidad frecuentista y la bayesiana. Recordemos que la probabilidad frecuentista se refiere a la estabilización de la frecuencia de ocurrencias de un fenómeno dado. En este sentido, el valor numérico de la probabilidad es una característica de la serie de repeticiones (Popper, 1959; von Mises, 1928). Es por ello que se suele decir que la probabilidad frecuentista es "objetiva": dos o más observadores dan el mismo valor de probabilidad. En efecto, dado que la frecuencia de aparición es una propiedad de la serie de repeticiones, dos individuos deberían estar de acuerdo en el valor de la misma.

Podríamos decir que la probabilidad frecuentista en tanto que proporción de aparición de un fenómeno cuando las repeticiones tienden al infinito, no deja de ser un valor teórico. Este valor teórico es sea estimado, sea evaluado a partir de hipótesis a priori. Para el último caso, es común utilizar hipótesis de equiprobabilidad de casos elementales, esto permite deducir el valor límite de la probabilidad, para el primer caso, cuando estas hipótesis carecen de sustento, la probabilidad se estima con una muestra.

Para la probabilidad bayesiana la situación es diferente. El valor de probabilidad no es una característica del objeto como en la frecuentista sino una medida personal. Hemos visto ya un criterio de evaluación para la probabilidad bayesiana: la formula de Laplace (casos favorables sobre posibles). Otro criterio es el principio frecuentista (Gärdenfors et al., 1988; Hacking, 2002; Jeffreys, 1939) según el cual, asignamos un valor de certeza proporcionalmente a la frecuencia de ocurrencia del fenómeno, en otros términos, cuanto mas frecuente ocurre algo, mas creemos en ese fenómeno, así medida de certeza coincide con frecuencia de aparición.

Estos no son los únicos criterios, entre otros figura el llamado principio de razón insuficiente según el cual se asignan los mismos valores de probabilidad a las posibles hipótesis cuando no hay razones para privilegiar una sobre otras (Keynes, 1921).

En realidad, para los bayesianos, la cuestión de la evaluación es más compleja puesto que ellos se interesan más que nada a la evolución de la probabilidad cuando hay un incremento en la información disponible. En otras palabras, la pregunta que les interesa a los bayesianos es: ¿De qué manera se deberían modificar los valores de probabilidad cuando se acaba de conocer una información significativa?

La respuesta a esta pregunta la da la formula de Bayes, de ahí el nombre de la escuela inferencial. Veamos brevemente cómo es considerada esta formula por los bayesianos:

El esquema inferencial bayesiano podría resumirse como sigue:

$$P_B(H_j) = \frac{P_{Hj}(B)}{P(B)} \times P(H_j)$$

donde:

$P(H_j)$: La probabilidad de la hipótesis H_j antes de la llegada de la información B *i*=1,…, *j*,…, *n* (probabilidad *a priori*)

$P_{Hj}(B)$: La probabilidad de *B* bajo la hipótesis H_j

$P(B)$: La probabilidad total del hecho B es: $\sum_{i=1}^{n} P_{H_j}.(B) \times P(H_j)$

$P_B(H_j)$: La probabilidad de la hipótesis H_j luego de la llegada de *B* (probabilidad *a posteriori*).

Esta formula, ampliamente conocida por los profesores de matemática, condensa un criterio objetivo para la reasignación de probabilidades cuando se obtiene información (B) referida al sistema de hipótesis posibles. Veamos un ejemplo: Seguramente el lector poseerá una cuenta de mail, entonces el lector habrá observado entre sus correos entrantes, que algunos son derivados a una carpeta llamada “no deseados” o spams. Pues bien, el algoritmo utilizado para que un mail sea enviado o no a esa carpeta, se basa en la formula de Bayes. El esquema para los mails es el siguiente: Un mail ingresa a la cuenta, a su ingreso, una probabilidad de correo no deseado le es asignada, llamémosle P (Spam). Luego, el texto es analizado en función de las palabras que contiene (entre otras cosas), esa información (B) sirve para aumentar o disminuir su probabilidad de no deseado, de esta manera se obtiene al final del algoritmo la probabilidad P_B (Spam). Si este valor supera un cierto sesgo, el correo es enviado a la carpeta de no deseados para la confirmación del usuario.

Esto, que no es más que un escueto esquema del funcionamiento de nuestras cuentas de mail, es un ejemplo de cómo funciona el procedimiento de evaluación de probabilidades en función de la información disponible. Otro ejemplo, y esta vez de uso escolar, lo constituye el llamado test de detección según el cual se refuerza o no la probabilidad de un diagnostico medical en función de los resultados de los análisis realizados. En fin, los ejemplos son numerosos e incluso son utilizados en algoritmos de inteligencia artificial para que robots guías realicen tomas de decisiones (Min, 2005).

En fin, invitamos al lector profesor de matemática a explorar esta formula tan conocida por nosotros desde este enfoque y descubrirá sentirse muy probablemente familiarizado con este tipo de razonamientos.

Las diferencias entre las dos interpretaciones de la probabilidad no terminan aquí, pero creemos que alcanzan para comenzar a interrogarse sobre algunas cuestiones didácticas que se desprenden de la dualidad de la probabilidad, a continuación analizaremos algunas de ellas.

3. ¿Es necesario incluir los dos enfoques de la probabilidad en la enseñanza?

En párrafos precedentes hemos mencionado que la dualidad de significados es una condición inherente a la noción de probabilidad. En otros términos, pareciera imposible que las dos nociones no aparezcan en la enseñanza.

Para corroborar esta hipótesis, hemos realizado un estudio sobre libros de textos franceses (Carranza & Kuzniak, 2006) y hemos mostrado que esta dualidad subyace a los ejercicios propuestos a los alumnos, aunque la noción institucionalmente reconocida sea la frecuentista. Es decir que, de reproducirse este fenómeno de manera generalizada, podríamos decir que la dualidad de la probabilidad está ya presente en la enseñanza. Una noción, reconocida e institucionalizada por el docente, la otra, la bayesiana, por no contar con el reconocimiento institucional, su conceptualización estaría bajo responsabilidad del alumno.

En otros términos, los dos enfoques ya se encuentran en los ejercicios propuestos a los alumnos, sólo que uno de ellos es institucionalizado. Como se logra un tal ocultamiento? Hemos observado en los manuales analizados que en los ejercicios bayesianos, la atención se centra en aspectos calculatorios, sin ninguna intervención de la dimensión semántica.

4. ¿En qué casos es necesario reconocer el significado correcto de una probabilidad?

Para responder esta pregunta, es necesario considerar las dos dimensiones de la probabilidad: la calculatoria y la semántica. Si proponemos a los alumnos ejercicios exclusivamente calculatorios, no habría en principio necesidad de consagrarse al significado de la probabilidad, puesto que los dos enfoques, tanto el frecuentista como el bayesiano, se sirven de los mismos axiomas de Kolmogoroff.

Sin embargo es necesario remarcar que, presentando a nuestros alumnos sólo ejercicios calculatorios, estaríamos cercenando el concepto a enseñar reduciéndolo a un simple número, lejos, muy lejos de su verdadera función.

En efecto, una de las funciones para la que fue creada la probabilidad es la de herramienta para la toma de decisiones en contextos de incertidumbre (Cox, 1946; Droesbeke, Fine, & Saporta, 2002; Hacking, 2002), y es precisamente cuando la probabilidad interviene en una decisión que emerge su significado. En otras palabras, cuando se solicita justificar una decisión a tomar, será necesario significar el valor de la probabilidad interviniente.

Algunos casos elementales decisionales pueden encontrarse utilizando el criterio de maximización de la esperanza o simplemente el criterio de máxima probabilidad. Estos criterios decisionales, aunque sencillos, constituyen casos muy interesantes para cuestionar las concepciones determinísticas de los alumnos. En tipo de problemas sencillos ya puede verse la estructura argumentativa de la estadística, donde, a diferencia de la matemática deductiva, una decisión es tomada no por el valor lógico de la conclusión sino por el peso de la argumentación. En efecto, por tratarse de contextos indeterminísticos, el valor lógico de la conclusión no es asegurado, es entonces que interviene la razonabilidad de los argumentos presentados.

Decidir una estrategia de un juego en base al criterio de maximización de la esperanza es un ejemplo, en este caso la estrategia elegida no se valida ni invalida por haber ganado ni perdido, sino por la racionalidad de los argumentos expuestos.

Cuando se pregunta sobre los argumentos expuestos, se incita a explicitar el sentido dado a la probabilidad. Es entonces a través de problemas decisionales que encontramos una vía para que el significado de la probabilidad cobre sentido

5. ¿Qué dificultades se prevén al intentar explicitar los dos significados de la probabilidad?

Los conceptos en juego al momento de introducir la probabilidad son elementales, es de esperarse que no haya mayores dificultades con respecto a los contenidos en juego. Las dificultades que hemos observado en nuestras experimentaciones se refieren a la adaptación a los cambios que implica la introducción de aspectos de orden estadístico en una clase de matemática. Veamos algunos ejemplos:

- Métodos de razonamiento. Un problema decisional, puede ser una novedad para la clase de matemática que, habituada a situaciones hipotético-deductivas, no encuentra sustento en argumentos que no aseguran el resultado propuesto. Suele ocurrir que los alumnos, al final de un problema decisional, soliciten al docente la verificación del resultado. Esta solicitud, funcionando como validación es una consecuencia de la resistencia a aceptar este género de argumentos. Suele ocurrir también que un docente ceda ante esta presión de los alumnos. En este caso, el develamiento de la incertidumbre del problema anula la función argumentativa de las herramientas utilizadas en el problema, perdiendo así sentido el procedimiento utilizado.
- Distribución de la palabra en la clase. Tanto sea el discurso decisional como la interpretación de una probabilidad, ambos se realizan en el registro del lenguaje (oral y escrito). Este último, en clase de matemática, se ve intencionalmente relegado por la potencia del lenguaje simbólico de las matemáticas. En lo que respecta al lenguaje oral, nuestra experiencia como docente, como investigador y en particular en nuestras experimentaciones,

nos han mostrado que el docente tiende a monopolizar la palabra en clase. Esto dificulta, por un lado que los alumnos expresen el significado atribuido a una probabilidad y por otro lado, la creación de un consenso grupal respecto a la pertinencia de los argumentos utilizados.

A pesar de esta, y otras dificultades observadas, hemos constatado que, en problemas decisionales tanto sean frecuentistas como bayesianos, y luego de la institucionalización de estas dos nociones, los alumnos no manifiestas signos de resistencia a ninguno de estos dos conceptos ni a su convivencia bajo el mismo termino “probabilidad”. Por el contrario, las resistencias las hemos encontrado en los docentes que, al ver la noción bayesiana como valores de certeza, temen cambios rotundos en el contrato didáctico de la clase.

En fin, hemos aquí solo presentado la cuestión de la dualidad de la probabilidad y algunas consecuencias didácticas. Consideramos que si bien las investigaciones son incipientes en este tema, la enseñanza de la dualidad podría resultar menos conflictiva que lo pensado y que su explicitación en clase permitiría un trabajo mas profundo sobre aspectos propios tanto a la noción de la probabilidad como a la estadística inferencial.

Bibliografía

Bernoulli, J. (1713). *The art of conjecturing* (E. D. Sylla, Trans. 2006 ed.). Bâle: Johns Hopkings.

Carranza, P., & Kuzniak, A. (2006). *Dualité de la notion de probabilité et enseignement de la statistique au lycée en france.* Paper presented at the XXXVIII journées de statistique de la Société française de statistique, Clamars, France.

Condorcet, J.-A.-N. (1805). *Eléments du calcul des probabilités* (F.-J.-M. Fayolle, Trans.). Paris: Fayolle, F.-J.-M.

Cox, R. T. (1946). Probability, frequency, and reasonable expectation. *American Journal of Physics, 14*, 1-13.

de Finetti, b. (1937). La prévision: Ses lois logiques, ses sources subjectives, *Annales de l'I.H.P.* (Vol. 7, pp. 1-68): Numdam.

De Finetti, B. (1974). *Theory of probability*:Wiley classics library.

de Moivre, A. (1756). *The doctrine of chances* (A. Millar, Trans. 2002 ed.). London: Strand.

Droesbeke, J.-J., Fine, J., & Saporta, G. (2002). *Méthodes bayésiennes en statistique*.Paris: Sfds.

Gärdenfors, P., Sahlin, N.-E., Ramsey, F., Luce, D., Raiffa, H., Savage, L., et al. (1988). *Decision, probability and utility*:Cambridge University Press.

Hacking, I. (2002). *L'émergence de la probabilité*.Paris: Seuil.

Hacking, I., & Dufour, M. (2004). *L'ouverture au probable*.Paris: Armand Colin.

Jaynes, E. (1995). *Probability theory: The logic of science* (2003 ed.).

St. Louis, U. S. A.: Washington University.

Jeffreys, H. (1939). *Theory of probability* (1960 ed.). Oxford: University Press.

Keynes, J. M. (1921). *A treatise on probability*.London: MacMillan and Co.

Laplace, P. S. (1795). *Essai philosophique sur les probabilités* (1816 ed.). Paris: Pour les mathématiques et la Marine.

Leibniz, G. W. (1765). *New essays concerning human understanding* (A. Langley, Trans. 1916 ed. Vol. 1). Chicago: The Open Court Publishing Company.

Min, H. J. (2005). *Navigation of a mobile robot using behavior network with bayesian inference.* Paper presented at the Mechatronics and Automation.

Pascal, B. (1670). *Pensées* (É. Périer, Trans. 1995 ed.): Num. BNF de l'éd. de: Cambridge (Mass.).

Popper, K. R. (1957). The propensity interpretation of the calculus of probability and the quantum theory. *The Colston Papers, 9*, 65-70.

Popper, K. R. (1959). *The logic of scientific discovery*.London: Hutchinson.

Popper, K. R. (1959). The propensity interpretation of probability. *The British Journal for the Philosophy of Science, X*(37), 25-42.

Savage, L. (1968). Probabilité personnelle et induction. *Mathématiques et sciences humaines, 23*, 5-15.

Shafer, G. (1994). The subjective aspects of probability. In *Subjective probability* (pp. 53-73). Wiley: George Wright and Peter Ayton.

von Mises, R. (1928). *Probability, statistics and truth* (1981 ed.). New York: Dover.

Pablo Carranza, Profesor Adjunto Regular de la Universidad Nacional de Río Negro. Argentina. pcarranza@unrn.edu.ar

Jenny Fuentealba, Auxiliar Regular de la Universidad Nacional de Río Negro. Argentina.