UNIÓN

REVISTA IBEROAMERICANA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA

Número 1

Marzo de 2005

Índice

UNIÓN
REVISTA IBEROAMERICANA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA

Marzo de 2005, Número 1, página 2
ISSN: 1815-0640

Unión. Revista Iberoamericana de Educación Matemática es una publicación de la Federación Iberoamericana de Sociedades de Educación Matemática **(FISEM)**. Tendrá una periodicidad trimestral, de modo que se publicarán cuatro números al año, en los meses de marzo, junio, septiembre y diciembre.

UNIÓN
REVISTA IBEROAMERICANA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA

Marzo de 2005, Número 1, página 3
ISSN: 1815-0640

Abertura do Presidente da FISEM

Neste início de ano, uma boa novidade: nasce nossa revista **UNION**. Com ela, damos um importante passo na direção dos nossos propósitos de desenvolver a Educação Matemática no mundo iberoamericano.

A revista **UNION** será um veículo apropriado para o intercâmbio de investigações no campo da Educação Matemática e para a socialização dos experimentos profissionais e acadêmicos no âmbito das sociedades filiadas, as quais é atribuída a tarefa de ampliar a divulgação desse periódico em seus países de atuação. Sem esquecer o papel fundamental que essas sociedades devem ter no estímulo à submissão de bons trabalhos acadêmicos por parte de seus associados.

Para assegurar a qualidade profissional e acadêmica de nossa recém-criada revista contamos com a formação de um corpo de avaliadores que vem sendo indicado pelas sociedades filiadas e ao qual desde já agradecemos a preciosa colaboração.

UNION deverá abrir espaço, também, para o intercâmbio de informações relativas a eventos importantes para o aprofundamento e a difusão dos saberes relacionados com a Educação Matemática.

Por essas razões, estamos certos de que nossa revista tem, à frente, uma longa caminhada de êxitos.

Paulo Figueiredo Lima

UNIÓN
REVISTA IBEROAMERICANA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA

Marzo de 2005, Número 1, página 5
ISSN: 1815-0640

Editorial

Esta revista nace de la mano de la Federación Iberoamericana de Sociedades de Educación Matemática (FISEM), organización constituida el 2 de julio de 2003 que agrupa, por el momento, a más de veinte mil docentes de once países: Argentina, Bolivia, Brasil, Chile, Colombia, España, Paraguay, Perú, Portugal, Uruguay y Venezuela.

Deseamos realizar una revista que canalice y dé a conocer trabajos sobre educación matemática destinados a los profesores de nuestro ámbito cultural, de todos los niveles educativos, desde Educación Infantil hasta la Universidad. Se publicarán experiencias didácticas, ideas para el aula, aplicaciones de la investigación… Además, la revista contendrá informaciones sobre acontecimientos de interés, tesis doctorales, libros, congresos… Dado que disponemos en nuestra Comunidad de un amplio conjunto de docentes e investigadores de alta cualificación, podremos conseguir una revista de gran calidad y utilidad para todos.

La revista tendrá una edición digital a la que tendrá acceso libre cualquiera que lo desee y que se podrá encontrar en la página *web* de la FISEM: www.fisem.org . Si finalmente conseguimos financiación, habrá una edición de corta tirada en papel.

Como primeros directores de esta revista deseamos expresar nuestro agradecimiento a la Junta de Gobierno de la FISEM por la confianza que han depositado en nosotros. Gracias también a los otros miembros del Comité editorial, con los que hemos formado equipo para elaborar esta revista: Alicia Bruno, Dolores de la Coba, Carlos Duque, Antonio Ramón Martín Adrián e Inés Plasencia. También queremos agradecer a las personalidades del Consejo Asesor su aceptación para formar parte de este órgano de colaboración con la dirección y el comité editorial de la revista.

Todos los trabajos remitidos a la revista para ser publicados son sometidos a un proceso de evaluación por parte de varios profesores, con independencia del análisis que del mismo haga el Comité Editorial y de la decisión que finalmente tome. Gracias a estos evaluadores el proceso de publicación posee controles que aseguran la calidad de los trabajos publicados. Finalmente, damos las gracias a los autores, pues a ellos se debe que esta revista sea una realidad.

Animamos a los profesores de toda nuestra amplia geografía a que nos hagan llegar los artículos en los que nos describan sus experiencias y sus ideas. De esa forma conseguiremos que ***Unión*** sea efectivamente la ***Revista Iberoamericana de Educación Matemática*** en la que podamos unirnos todos los que constituimos la gran comunidad de los profesores iberoamericanos de Matemáticas.

Luis Balbuena y Antonio Martinón, Directores

UNIÓN
REVISTA IBEROAMERICANA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA

Marzo de 2005, Número 1, páginas 7 - 15
ISSN: 1815-0640

Cuadratura de polígonos

Carmen Galván

Resumen

Intentamos mostrar una forma de resolver en el aula el problema geométrico "Cuadratura de polígonos". Encontraremos la posibilidad de establecer conexiones con las funciones y el álgebra. El uso de un programa de geometría interactivo facilita el dibujo, la visualización y la comprensión.

Abstract

We try to show a way to solve in classroom the geometric problem "Squaring polygons". We will find the possibility of connections with algebra and functions. The use of an interactive geometry program facilitates drawing, visualisation and understanding.

Introducción

Partimos de la idea de que en la enseñanza de las matemáticas la geometría tiene una gran importancia. Su carácter formativo es evidente, por sí misma y porque en ella podemos encontrar una serie inagotable de ejemplos donde pueden relacionarse diversos contenidos matemáticos. Los conceptos, apoyados en la realidad de las figuras, adquieren más sentido y se aprenden mejor.

Nuestro ejemplo geométrico de hoy surge de la lectura de algo de historia de las matemáticas.

En *Historia de la Matemática* de J. Rey Pastor y J. Babini leemos: *En cuanto al problema de la cuadratura del círculo, surgió sin duda de la exigencia práctica de determinar el área de un círculo conociendo su radio o su diámetro, y traduciéndose geométricamente en un problema de equivalencia: dado un segmento como radio de un círculo, determinar otro segmento como lado del cuadrado equivalente. Los pitagóricos habían resuelto el problema de la "cuadratura de los polígonos", pero al pasar de los polígonos al círculo, el proceso resultaba inaplicable…*

Y pensamos: Quizás en nuestro método de enseñanza de las áreas estamos dando poca relevancia a la equivalencia (igualdad del área de dos figuras) y al papel primordial que tienen el rectángulo y el cuadrado en la medida de una superficie: para empezar, es el cuadrado la figura elegida para representar la unidad de medida, y es a partir de la fórmula del área del rectángulo como producto de sus dos magnitudes lineales básicas (su base y su altura) como se justifican las fórmulas de las áreas de las demás figuras. En dichas fórmulas se relacionan, siempre a través de un producto, dos magnitudes lineales. Sin embargo, en la práctica, inconscientemente, recurrimos al rectángulo o al cuadrado para comprender mejor la cuantía de una superficie: una habitación de 12 m^2 la imaginamos como un rectángulo de 3 por 4 metros, por ejemplo, o un país cuya superficie sea, aproximadamente, 490000 Km^2 será como un cuadrado de 700 Km. de lado… Estamos recurriendo a la equivalencia, y, en ello, el rectángulo y el cuadrado aparecen de manera natural.

Pero ¿cómo resolvieron los pitagóricos en los siglos VI-V a C. el problema geométrico?: *Encontrar el segmento que será el lado del cuadrado de igual área que un polígono utilizando sólo rectas y circunferencias* es un problema atractivo, motivador... (Tenemos que buscar información, estudiar…)

En este trabajo se presenta una forma de llevarlo al aula. Puede servir para empezar a apreciar la fuerza y la belleza de las construcciones geométricas de la antigua Grecia y para repasar diversas propiedades fundamentales. Primero veremos la transformación de un polígono en un rectángulo de igual área. Después, el rectángulo se transformará en su cuadrado equivalente. Como el rectángulo que da origen al cuadrado no es único, "nos veremos obligados" a analizar los rectángulos que son equivalentes entre sí. La ocasión es buena para relacionar la geometría con las funciones.

Recurriremos a la ayuda de GEUP (www.geup.net), un programa de matemáticas interactivo, que nos va a facilitar al máximo el dibujo y la visualización, favoreciendo, por tanto, la comprensión, el hallazgo de nuevas relaciones, la formulación de nuevas preguntas, nuevas pautas para seguir trabajando.

Estas actividades están pensadas para realizar en clase con alumnos de catorce a dieciséis años (sería ideal que fuera en un aula en la que cada alumno pudiera utilizar un ordenador). Podrían resultar de interés en el momento del estudio de las áreas. Aportarían, quizás, algo nuevo a este estudio, que normalmente limitamos a ejercicios de repaso de las fórmulas y su aplicación. También se podría cambiar el orden: durante el estudio de las funciones, empezar por el estudio de rectángulos de igual área, como ejemplo de función de proporcionalidad inversa, y hablar después del cuadrado equivalente…

1. Reducción de vértices de un polígono

¿Podemos transformar un polígono cualquiera de n lados en un triángulo equivalente, valiéndonos sólo de rectas?

Esto promete ponerse interesante… Seguro que a los alumnos les gustará la idea. Es fácil. Sólo tenemos que recordar una propiedad fundamental: *Todos los triángulos que tienen la misma base y el vértice opuesto es cualquier punto de una paralela a ella, tienen igual área.*

Si fijamos la base AB y un punto C formando triángulo con A y B, moviendo el vértice C sobre la recta paralela por él a la base conseguimos diferentes triángulos ABC de la misma base y la misma altura y, por tanto, de igual área. (Fig. 1).

Es conveniente que cada alumno realice él mismo el dibujo y darle la oportunidad de que descubra por sí mismo la propiedad, antes de enunciarla formalmente.

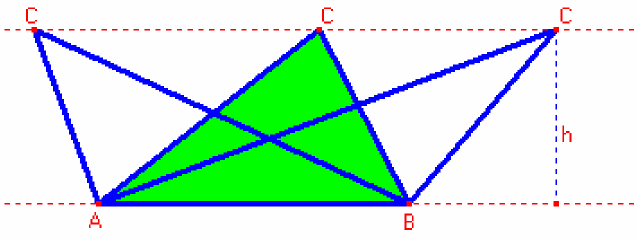


Fig.1

El programa, aparte de facilitar el dibujo, permite cambiar el triángulo de partida modificando cualquiera de sus vértices, y visualizar los triángulos generados por el movimiento de C sobre la paralela. La comprensión de la propiedad está, así, al alcance de todos.

Ahora, podemos aplicarla para la transformación del polígono.

Recurrimos de nuevo al programa:

Como ejemplo, dibujamos un pentágono ABCDE cualquiera. Nuestro objetivo: transformar el pentágono en un cuadrilátero ABCD' y éste, después, en un triángulo BCD'', equivalentes ambos al pentágono de partida.

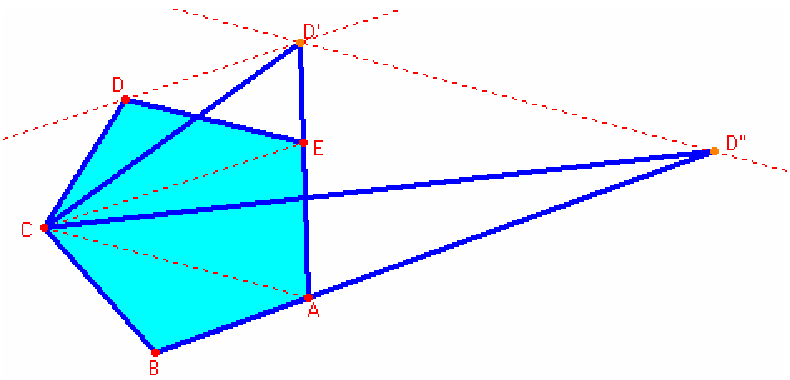


Fig. 2

El proceso es el siguiente: Poniendo como ejemplo el seguido en la Fig. 2, sustituimos el triángulo CDE por su equivalente CD'E. El punto D' es la intersección de la prolongación del lado AE con la recta paralela a la diagonal CE por el vértice D. Hemos conseguido el cuadrilátero ABCD' equivalente al pentágono. De forma análoga conseguimos el triángulo ACD’’, como se observa en la figura, equivalente al ACD’. Con lo cual, el pentágono ABCDE es equivalente al triángulo BCD’’.

El programa permite, con una sola construcción, tener el problema resuelto para cualquier polígono del mismo número de lados que el de partida, sin más que modificar cualquiera de los vértices. Si nos interesa, también nos dará el valor del área en cada caso.

Una vez que tenemos el triángulo equivalente, es fácil transformar éste en un rectángulo de igual área. Sólo tenemos que dibujar uno que tenga la misma base y la mitad de su altura (o aquel que tenga la misma altura y la mitad de la base).

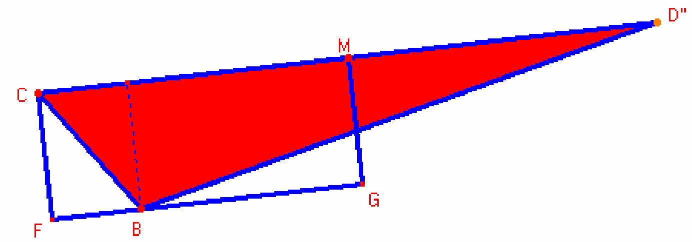


Fig.3

En la Fig. 3 el rectángulo CFGM tiene la misma altura y la mitad de la base que el triángulo BCD’’.

Es importante advertir que triángulo final no es único, depende del vértice elegido para empezar el proceso de reducción.

2. El cuadrado equivalente a un rectángulo

Claro que la solución numérica es muy sencilla. Cualquier alumno de estas edades será capaz de indicarnos que la raíz cuadrada del área será el valor del lado del cuadrado equivalente… ¿Pero por qué renunciar a la riqueza de conceptos y a la belleza que encierra la construcción puramente geométrica?

El problema sería: *Dado un rectángulo, encontrar el lado del cuadrado equivalente a él utilizando sólo rectas y circunferencias.*

Aquí no va a haber cálculo numérico alguno. Sólo manipularemos segmentos valiéndonos de una regla sin graduar (trazado de rectas) y un compás (trazado de arcos de circunferencia). Puede resultar interesante.

El álgebra va a abrir el camino para la construcción…

Recordemos una identidad algebraica fundamental:

$$(a + b)\,(a - b) = a^2 - b^2$$

Podemos interpretarla desde la geometría: Si a y b representan segmentos, el primer miembro representa el rectángulo de dimensiones (a + b) y (a – b), mientras que el segundo miembro es el resultado de restar al cuadrado de lado "a" el cuadrado de lado "b". Lo dibujamos: (Fig. 4.1).

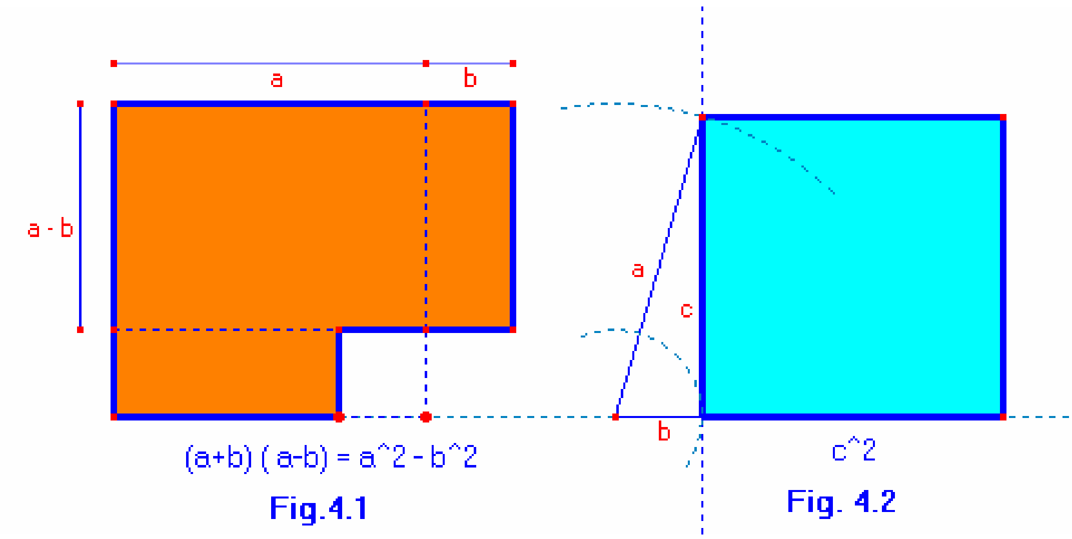


Fig.4.1 Fig. 4.2

Encontrar el cuadrado equivalente a la diferencia $\mathbf{a^2 - b^2}$ nos conduce a recordar el *Teorema de Pitágoras*, que relaciona los cuadrados de los tres lados de un triángulo rectángulo: $\mathbf{a^2 = b^2 + c^2}$, siendo "**a**" la hipotenusa y "**b**" y "**c**" los catetos. El problema se reduce a encontrar el cateto "c", conocidos "a" y "b": (Fig. 4.2).

Hemos conseguido la igualdad $\mathbf{(a + b)\ (a - b) = c^2}$. Es emocionante. No hay duda, las construcciones geométricas tienen una magia especial.

En el dibujo con GEUP (Fig. 5) se muestran dos construcciones del cuadrado equivalente a un rectángulo de base "a" y altura "b". Una de ellas es análoga a la que hemos hecho anteriormente y la segunda utiliza la propiedad: *La altura h sobre la hipotenusa de un triángulo rectángulo es media proporcional entre los segmentos (en este caso "a" y "b") que determina en ella* (conocido como *Teorema de la altura*). Será necesario, además, recordar otra propiedad importante: *El triángulo que tiene un lado como diámetro y el vértice opuesto sobre la circunferencia es rectángulo, siendo el diámetro la hipotenusa.*

Es una oportunidad para recordar e ir consolidando el conocimiento de estas propiedades.

Nuestro objetivo está cumplido: Podemos conseguir geométricamente, utilizando sólo rectas y circunferencias, transformar un polígono cualquiera en un cuadrado equivalente: primero hemos conseguido un rectángulo, y, a través de éste, el cuadrado.

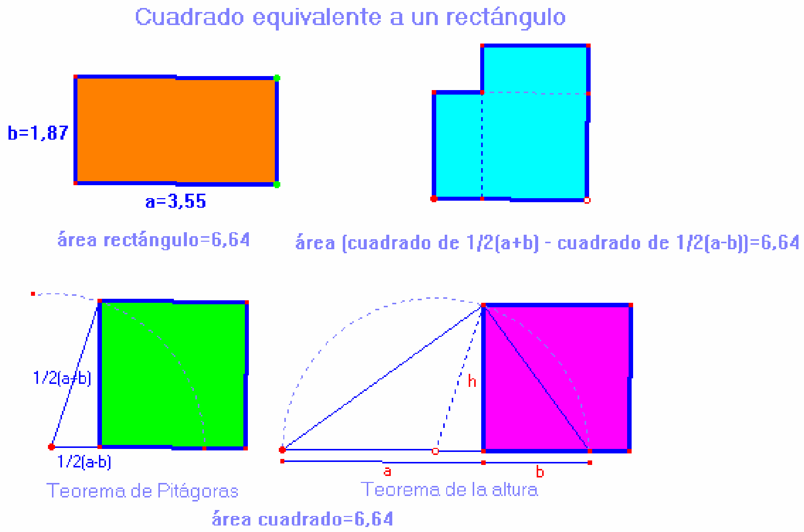


Fig.5

Tiene que quedar claro que para cada valor de un área, independientemente de la figura que sea, el cuadrado equivalente será único: el valor numérico de su lado es la raíz cuadrada del área.

Y todos deben saber que, sin embargo, no es único el rectángulo equivalente, pero, *¿Podemos dibujar o imaginar todos ellos?*

3. Rectángulos de igual área

Los diferentes apartados de esta actividad se irán proponiendo en clase uno a uno, a medida que los alumnos vayan resolviendo (es un ejercicio que solía trabajar con mis alumnos en el momento de iniciar el estudio de la proporcionalidad inversa):

a) Dibujar diferentes rectángulos que tengan la misma área (12 u^2 por ejemplo)

Aparecerán, rápidamente, los rectángulos cuyas medidas de la base y la altura son números naturales y divisores de 12:

3 x 4; 2 x 6; 1 x 12; y los 12 x 1; 6 x 2; 4 x 3…

b) ¿Cuántos rectángulos de igual área podemos dibujar?

Lo más probable es que no aparezca ningún rectángulo más, pero si es así, ayudaremos un poco: *Dibujar un rectángulo que tenga de base 2’5 y que su área sea 12…* (por ejemplo).

Pronto se aclararán las cosas, la mente se abrirá para aceptar la posibilidad de los números no enteros y la posibilidad de "jugar" con las dimensiones a nuestro antojo: Si fijamos la base, que puede ser cualquiera, ***x***, la altura correspondiente, ***y***, se puede hallar fácilmente (***y* = 12 / *x***). O de igual forma, si fijamos la altura, la base se hallará sujeta a una ley similar. La respuesta será unánime: podemos dibujar todos los rectángulos de igual área que queramos. Podemos continuar:

La base y la altura en los rectángulos de área constante (A) están relacionadas mediante una ley de proporcionalidad inversa: El producto de ambas magnitudes debe ser constante:

$$x \times y = A.$$

c) Construir la gráfica de la función y = A / x. Analizar aspectos importantes de esta gráfica, relacionándolos con los diferentes rectángulos.

Cada punto de esta gráfica tiene por coordenadas el valor de la base y de la altura de los infinitos rectángulos equivalentes, ¡pudiéndose visualizar, si queremos, cada uno de ellos! (Vale la pena estudiar la función).

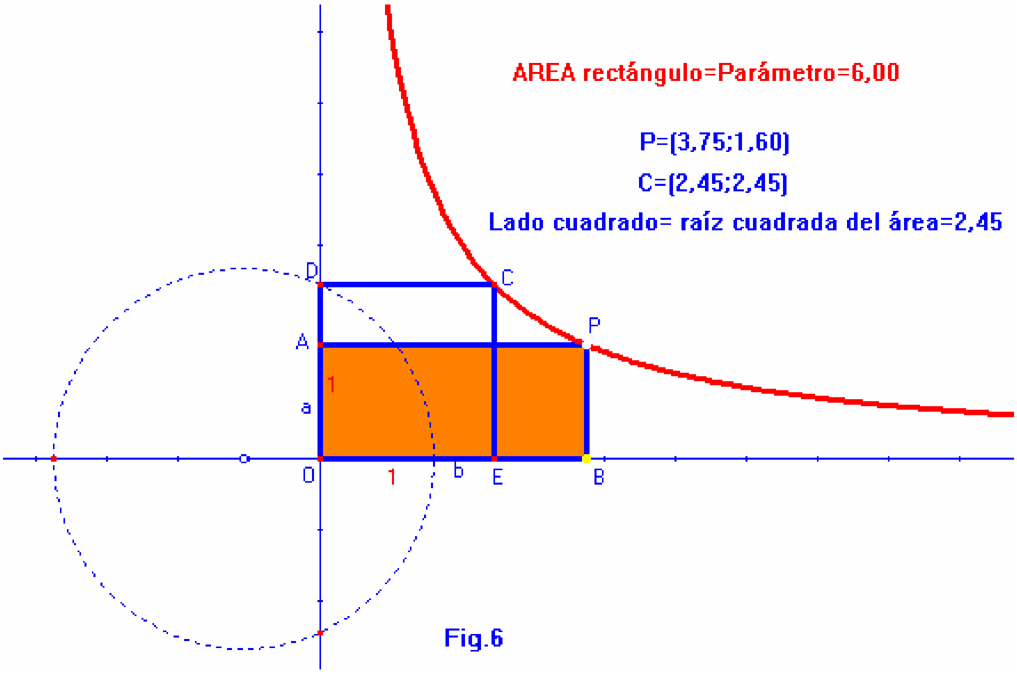


Fig.6

Será interesante analizar el intervalo de existencia (0,∞). No existe el rectángulo de base igual a cero (podemos reflexionar sobre la imposibilidad de dividir por cero); pero si la base tiende a cero la altura tiende a ser más y más grande (diremos que tiende a ∞). De igual forma, si la base tiende a infinito, la altura tiende a cero. Es una oportunidad para empezar a hablar de límites, basándonos en una situación concreta y visual como es el rectángulo. La continuidad en este intervalo se acepta fácilmente: cualquier segmento es admitido como base y el rectángulo tendrá su altura correspondiente, no tiene por qué faltar ningún rectángulo. Podemos observar la simetría de la función con respecto a la recta y = x relacionándola con los rectángulos (b ^{x} a) y (a ^{x} b) y fijar la atención en el punto de intersección de la recta y la curva: aquí el rectángulo tiene igual base que altura ¡es el cuadrado equivalente! En este punto el valor de la abscisa y de la ordenada es la raíz cuadrada del área (se puede recurrir al álgebra y resolver el sistema).

Sería una lástima no detenernos en relacionar el lenguaje gráfico con el geométrico y con el algebraico. La realidad geométrica, visual, nos ayuda a entender la utilidad de las funciones y sus gráficas, así como a comprender mejor los números y el álgebra. De igual forma, la función y su gráfica nos han facilitado el cálculo y la visualización de todos los rectángulos equivalentes…

La gráfica puede hacerse, primero, en el cuaderno y en la pizarra, como es habitual, para el caso concreto estudiado dibujando la función punto a punto. Después utilizaremos el ordenador.

El uso del programa nos va a permitir la observación de manera general. Vamos a poder modificar el valor del área (A) y, para cada valor de ésta, observar la transformación de los diferentes rectángulos equivalentes y disponer, en general, del dibujo de la función ***y*=A/*x*.** Podemos construir geométricamente el cuadrado equivalente y observar su comportamiento cuando movemos los rectángulos. Evidentemente, el cuadrado cambiará si cambia el valor del área.

La construcción es sencilla, (Fig. 6):

1. Elegimos un valor inicial cualquiera “A” para el área, que será un parámetro que podremos modificar.
2. Construimos el rectángulo de base “b” variable al mover el punto B; la altura correspondiente a cada base estará determinada por el valor “a = A / b”. Así, para cada valor de A y de b tendremos el rectángulo correspondiente.
3. Situando con origen en el vértice O unos ejes de coordenadas, podemos obtener el dibujo de la curva, que será el lugar geométrico del punto P cuando se mueve B. ¡Si movemos B sobre el eje horizontal, podemos observar el cambio del rectángulo y el punto P moviéndose, en consecuencia, sobre la curva (su lugar), o, también, mover el punto P y observar cómo va cambiando el rectángulo correspondiente!
4. Por último construiremos, de forma geométrica, el cuadrado equivalente, de tal forma que el vértice C esté situado en la curva correspondiente al lugar geométrico de los diferentes rectángulos. Para un área concreta, podremos observar la infinidad de los rectángulos equivalentes mientras el cuadrado permanece invariable.

Es interesante fijar la atención en cómo a medida que el punto P se acerca a C, sus coordenadas se van haciendo más y más iguales entre sí, aproximándose más y más al valor de la raíz cuadrada del área, obviamente, ya que el rectángulo se va haciendo cada vez “más cuadrado”. De nuevo la geometría, la visualización, ayuda a comprender la continuidad: llegaremos a encontrar el punto exacto, el segmento que será el lado del cuadrado, que tendrá, exactamente, un valor numérico (racional o irracional).

Este ejercicio de visualización y observación de los rectángulos equivalentes junto con su correspondiente cuadrado nos conduce a otras preguntas y a reflexiones nuevas:

El problema inverso: *Dado un cuadrado, encontrar el rectángulo equivalente,* tiene, lógicamente, infinitas soluciones. Sería interesante proponer la construcción geométrica de este caso.

Y seguir observando: *¿Es igual el perímetro de todos los rectángulos que tienen la misma área?*

La resolución y el análisis de estas dos cuestiones nos reserva nuevas sorpresas… Podemos seguir trabajando.

Una pequeña reflexión final

Tenemos que animarnos. Animarnos a adaptar nuestros contenidos, nuestra metodología y nuestros recursos didácticos a los nuevos tiempos. No podemos permanecer estáticos, anclados en nuestras viejas tradiciones, mientras el mundo se mueve. El movimiento, en el sentido adecuado, trae como consecuencia el avance. Lo vemos en la geometría, imprimir movimiento a las figuras produce el descubrimiento de nuevas propiedades, y en el análisis, que es, en sí, pura variación…

Bibliografía

- Courant, R. y Robbins, H. (1971): *¿Qué es la matemática?* Aguilar, Madrid.
- Eves, Howard. (1969): *Estudio de las geometrías.* Uteha, Méjico.
- Rey Pastor, J. y Babini, J. (1986): *Historia de las matemáticas.* Gedisa, Barcelona.
- Ríbnikov., K. (1987): *Historia de las matemáticas.* Mir, Moscú.

Carmen Galván ha sido profesora de educación secundaria en varios centros de la isla de Tenerife (Canarias, España). Tiene varias publicaciones sobre la enseñanza de las matemáticas.

e-mail: carmen@geup.net

UNIÓN
REVISTA IBEROAMERICANA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA

Marzo de 2005, Número 1, páginas 17 - 35
ISSN: 1815-0640

Modelos de medida para la enseñanza del número racional en Educación Primaria

Rafael Escolano Vizcarra y José María Gairín Sallán

Resumen

En la primera parte de este trabajo mostramos los obstáculos didácticos provocados al priorizar la enseñanza de la fracción como relación parte-todo en España. En la segunda parte presentamos una propuesta didáctica alternativa para alumnos de 4º, 5º y 6º de Educación Primaria, propuesta que se apoya en el uso de tres modelos de aprendizaje: medida, cociente y razón.

Abstract

In the first part of this study we present the didactic problems brought about by to prioritize the teaching of the fraction as a part-whole relationship in Spain. In the second part we present an alternative didactic proposal for pupils in the 4th, 5th and 6th levels of Primary Education, this proposal is based on the use of three learning models: measure, quotient and ratio.

Introducción

La instrucción sobre los números racionales positivos ocupa una parte muy destacada de la Aritmética que figura en los currícula oficiales de la Enseñanza Primaria en España. Sin embargo, un estudio del INCE con alumnos españoles de sexto curso de Educación Primaria (12 años) concluye que "son casi tres de cada cuatro los que tienen dificultad para comprender el concepto de fracción y operar con fracciones" (INCE, 2002, pág. 2).

Es cierto que buena parte de las dificultades de comprensión de los escolares se sitúa en el conjunto de conceptos, procedimientos, relaciones y operaciones de la propia estructura numérica de los números racionales; y así se pone de manifiesto en distintas investigaciones (Kerslake, 1986; Bezuk y Bieck, 1993; Mack,1993; Kieren, 1993). Pero también es cierto que existen dificultades de comprensión provocadas por el proceso instructivo.

En la primera parte de este trabajo nos proponemos analizar las dificultades de comprensión que provoca el significado parte-todo puesto que en este significado se sustenta, de forma casi exclusiva, el proceso de enseñanza de la fracción en el sistema educativo español. Es más, este mismo significado también se utiliza para introducir el número decimal como "otra forma" de escribir las fracciones decimales.

En la segunda parte de este trabajo enunciamos una propuesta didáctica alternativa que elude el significado de la fracción como relación parte-todo, y cuyos referentes principales son la fenomenología y la epistemología del número racional. El objetivo principal que ilumina esta propuesta es la de incrementar la comprensión de los alumnos sobre el número racional, entendido tal incremento en el sentido que le otorgan Hiebert y Carpenter (1992). Con esa finalidad hemos caracterizado distintos modelos de aprendizaje para alcanzar objetivos parciales: el modelo de medida para introducir las fracciones, el modelo de cociente para fortalecer las conexiones entre las notaciones fraccionaria y decimal, y el modelo de razón para construir ideas sobre proporcionalidad aritmética.

Además de los enunciados generales de la propuesta, solamente podemos incluir una descripción de las características esenciales de la propuesta didáctica en cuarto curso de Educación Primaria (9-10 años), así como el enunciado de algunos de los resultados obtenidos al implementar la propuesta en el aula.

1. Parte I: Consideraciones sobre el significado parte-todo

El número racional positivo sintetiza diversos significados o interpretaciones que han participado en la construcción de este concepto. En estas condiciones parece adecuado que la enseñanza de la representación fraccionaria del número racional se articule alrededor de estos significados. Hay autores como Behr et al. (1993, pág. 14), que admiten cinco significados diferenciados de la fracción: parte-todo, cociente, razón, operador y medida; mientras que otros autores consideran el significado parte-todo incluido en los de cociente y medida (Kieren, 1993), o lo consideran como una razón (Figueras, 1988).

La realidad del sistema educativo español es que la relación parte-todo prioriza el proceso educativo sobre la fracción (Morcote y Flores, 2001); por tanto, resulta pertinente responder a tres cuestiones relacionadas con el proceso instructivo fundamentado desde la relación parte-todo: ¿es un significado diferenciado o está incluido en otros?, ¿por qué se prioriza su utilización?, ¿qué efectos provoca en el aprendiz? Las respuestas a estas cuestiones las buscamos en la práctica docente, en la interpretación de las formas de presentación de las fracciones a través de los manuales escolares que ha utilizado el sistema educativo español.

1.1 La fracción con significado de parte-todo

Al iniciar la enseñanza de las fracciones aparecen tareas similares a la que enunciamos y en la que reconocemos el significado parte-todo.

Tarea 1: Expresa con una fracción la parte pintada de la figura 1:

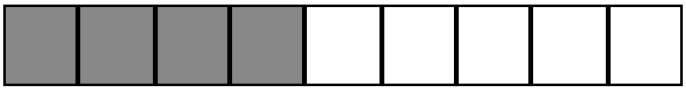


Fig. 1.

La resolución de este tipo de tareas exige del escolar realizar transferencias entre representaciones gráficas y representaciones simbólicas. Para ello, debe actuar del siguiente modo:

1. Interpretar, en la representación gráfica, aquellos aspectos que representan el "todo" y los que representan las partes destacadas.
2. Realizar un doble recuento: el de las partes iguales que forman el "todo" y el de las partes destacadas.
3. Representar, de forma simbólica, el resultado de los dos recuentos: colocar debajo de una raya el resultado de contar el "todo", y escribir, encima de la raya, el resultado de contar las partes destacadas.

Esta tarea resulta representativa de lo que entendemos por el significado parte-todo: la relación simbólica que se establece entre dos números naturales a partir de una representación gráfica. Posteriormente, y desde estas representaciones gráficas, el proceso instructivo formula definiciones sobre los componentes de la fracción: el denominador indica las partes que existen y el numerador las partes que se consideran.

Como características, desde la perspectiva cognitiva, de la construcción del significado parte-todo mediante tareas como la enunciada, cabe señalar las siguientes:

1. Buena parte del conocimiento se adquiere de forma visual. Las tareas se presentan con gráficos, generalmente figuras geométricas regulares, en las que se destaca, mediante recursos gráficos o colores, alguna parte.
2. Se ignora la medida de magnitudes. Al escolar se le oculta la existencia de un proceso de medida, puesto que en la instrucción se producen los siguientes hechos:

   - Omisión de la magnitud utilizada. En el enunciado de las tareas se suele utilizar la magnitud superficie, pero no se hace mención de ella porque la actividad se resuelve sin realizar la medida de ninguna cantidad de superficie, simplemente hay que hacer dos recuentos.
   - Indefinición de la unidad. El "todo" o unidad no necesita que se muestre de forma explícita. Por este motivo las figuras suelen presentarse superpuestas y claramente diferenciadas según el atributo del color de modo que el alumno no tiene la necesidad de reconocer la unidad para resolver la tarea.
   - Irrelevancia de la igualdad de cantidades de magnitud. El alumno debe reconocer el número de regiones que conforman dos figuras planas, pero el énfasis se pone en la cardinalidad, no en la igualdad de las superficies de las regiones que aparecen en el fraccionamiento.

3. Se refuerza el sentido del número natural. La respuesta a la tarea se alcanza realizando un doble recuento y, por lo tanto, el alumno no ve la necesidad de introducir ninguna estructura numérica superior a la del número natural.
4. La fracción no tiene el status de número. Ante el escolar la fracción aparece como la relación simbólica entre dos números naturales, pero para este escolar dicha expresión simbólica no tiene la entidad de número porque la entiende como una situación descriptiva.
5. Promueve el aprendizaje pasivo. La relación entre la parte y el todo presenta una situación estática entre cantidades de superficie; no hay situación problemática porque la tarea está perfectamente preparada para asegurar el éxito de los escolares.

1.2. Origen del significado parte-todo

En la génesis histórica de la fracción hemos buscado aquellas actividades humanas que dieron lugar a la aparición de este concepto. En esta génesis caben situar los significados de medida, cociente (con sentido partitivo) y razón. Brevemente señalamos la diferencia entre estos tres significados y el de parte todo, y lo haremos mostrando cómo la tarea 1 no tiene cabida en ellos:

La relación parte-todo no tiene significado de medida

No es infrecuente que se identifiquen los significados de parte-todo y de medida. Consideramos conveniente establecer las diferencias existentes entre ambos significados, y lo vamos a hacer desde una nueva reformulación de la Tarea 1 (Fig. 2):

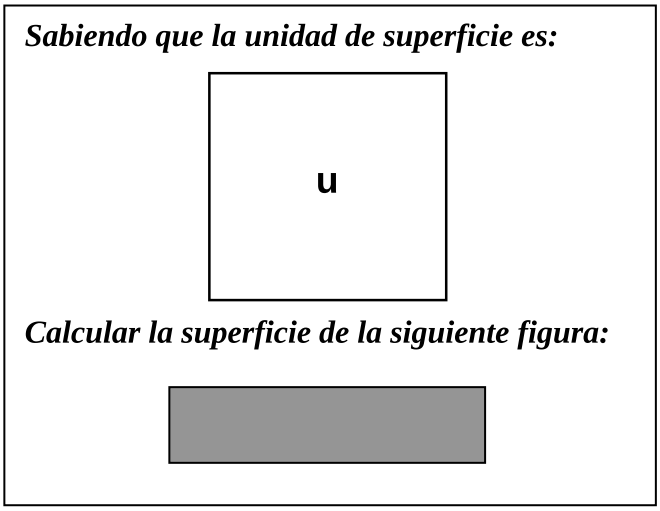


Fig. 2. Reformulación de la tarea 1

Ahora la respuesta a la tarea no es evidente porque nos encontramos ante un problema cuya solución no es inmediata puesto que, ahora, el resolutor debe una tomar decisiones y proceder por ensayo y error:

1. Es evidente que la superficie a medir no contiene un número entero de veces la unidad de medida u; por tanto, hay que decidir sobre el tamaño de una nueva unidad de medida que, necesariamente, ha de ser una parte alícuota de la unidad u. Pero, ¿cuál es esa parte o subunidad?, ¿la mitad de u, la tercera parte de u,...?; no queda otra opción que construir tal subunidad y comprobar que está contenida un número entero de veces en la superficie a medir.
2. Una vez finalizado el proceso, hay que expresar el resultado de la medida. Y este resultado dependerá de la técnica utilizada en el proceso de medida: habrá que mencionar la subunidad o subunidades utilizadas y el tamaño de éstas respecto a la unidad u. En consecuencia, pueden aparecer distintas formas de expresar el resultado de la medida, como 4/9 de u, 1/3 + 1/9 de u, 8/18 de u…

A la vista de estas consideraciones resulta evidente que el significado de medida es muy diferente del significado parte-todo, tanto por las exigencias cognitivas que exige la tarea, como por las ideas matemáticas que se derivan de la resolución de la tarea.

La relación parte-todo no tiene significado de cociente

Entendemos que el significado de cociente se corresponde históricamente con la idea de cociente partitivo, a la expresión del resultado de repartir de forma igualitaria **a** unidades entre **b** personas, o de distribuir **a** unidades en **b** grupos iguales. Por tanto, en esta idea intervienen la cantidad a repartir (que puede ser continua o discreta) y el número de grupos o personas que participan (siempre un número natural). Con estas consideraciones, la expresión a/b indica el resultado del reparto, la cantidad de la magnitud considerada que corresponde a cada uno de los participante. Además, la fracción a/b aparece solamente si se aplica la técnica del reparto en una sola fase: cada una de las **a** unidades a repartir se fraccionan en **b** partes iguales y a cada participante se le entrega una parte de cada una de las unidades previamente fraccionadas.

Por consiguiente hay que considerar a los significados de cociente y de parte-todo como significados diferenciados.

La relación parte-todo no tiene significado de razón

Sostenemos que el significado de razón surge históricamente en actividades comerciales en las que aparece la necesidad de comparar dos cantidades de una misma magnitud o de dos magnitudes diferentes, y que el resultado de la comparación define una nueva magnitud. Posteriormente, se amplió hacia nuevos usos: la probabilidad surge de comparar dos cardinales; el “sabor” o concentración de una mezcla es la razón entre las cantidades de dos ingredientes; la escala es una razón de semejanza; etc.

El significado parte-todo se podría considerar como un caso particular del significado de razón, se interpretaría como la relación entre cantidades de la misma magnitud y medidas con la misma unidad; y, en estas condiciones, el resultado de tal relación sería un número no medida, como ocurre en el caso de las escalas. Ahora bien, desde el enunciado de la Tarea 1 el alumno no puede percibir esta relación; para dicho alumno la fracción 4/9 indicaría que estamos señalando 4 regiones de las 9 en las que está fraccionado el “todo”, y la fracción no pretende expresar una razón entre áreas, no pretende definir una nueva magnitud. Por lo tanto, la relación parte-todo tiene un significado claramente diferenciado del de razón.

Además de los tres significados mencionados anteriormente, las propias matemáticas aportan dos significados de la fracción -operador y cociente indicado- que están presentes en el proceso educativo. Pero estos significados son claramente distintos del significado parte-todo, como mostramos brevemente.

La relación parte-todo no tiene significado de operador

Entendemos que el significado de operador es el de una función racional que produce transformaciones de una cantidad de magnitud, obteniéndose otra cantidad de esa misma magnitud medida con la misma unidad. Esta transformación se logra mediante la realización de dos acciones: multiplicar la cantidad inicial por el número entero del numerador y dividir el resultado por el número entero del denominador. Ahora bien, para poder aplicar estas transformaciones es preciso conocerlas previamente, y tal conocimiento lleva implícito el símbolo **a/b** como convenio que expresa que **a** es el número por el que se multiplica la cantidad y **b** por el que se divide.

Con el significado parte-todo la fracción 4/9 describe una situación estática que es muy diferente de la transformación que impone la función racional: el significado parte-todo es un significado claramente diferenciado del significado de operador.

La relación parte-todo no tiene significado de cociente indicado

Es frecuente que los textos escolares indiquen que la fracción expresa el cociente indicado de dos números. Bajo este enunciado encontramos reminiscencias de la construcción formal del conjunto de los números racionales, aunque los textos escolares solamente se preocupan por mostrar que en este conjunto numérico siempre se pueden dividir dos números enteros. Desde la perspectiva del alumno este significado de la fracción es muy diferente del de parte-todo, pues no tiene sentido el cociente de dividir el número de partes que se consideran entre el número de partes existentes.

A modo de conclusión

A la vista de las consideraciones anteriores, vemos que la fracción con significado parte-todo no surge de las necesidades humanas (en el sentido que nombra Bishop, 1999), puesto que la génesis histórica del número racional se encuentra en la medida de cantidades de magnitud –bien realizada directamente o bien realizada para expresar el resultado de un reparto–, o en la comparación de dos cantidades de magnitud, ya medidas, que da sentido a la idea de razón. Este significado tampoco es un significado generado por las propias matemáticas.

Por tanto, pensamos que el origen del significado parte-todo habría que situarlo en la práctica educativa, habría que ubicarlo entre los recursos didácticos creados por necesidades del proceso de la enseñanza y del aprendizaje de las matemáticas. En efecto, en uno trabajo reciente (Escolano, 2004) se pone de manifiesto cómo en los textos escolares españoles se puede detectar la presencia del significado parte-todo desde el primer tercio del siglo XX. Asimismo, señala dos razones que justificarían la introducción y consolidación de este recurso didáctico:

- Eludir el proceso de medida con objetos tangibles (dificultad del propio proceso de medida, gestión del aula por la utilización de material, control de la diversidad de resultados obtenidos, prioridad de la enseñanza del Sistema Métrico Decimal, etc.),
- Abreviar los períodos de instrucción: el significado parte-todo permite una introducción rápida de la representación simbólica de la fracción y, además, con elevados niveles de éxito a corto plazo.

1.3. Consecuencias de la práctica docente

La aparente facilidad, desde el punto de vista docente, con la que se introduce el significado del número racional como relación parte-todo también tiene unos costos en términos de comprensión. Aparecen así los que Brousseau (1983) denomina *obstáculos didácticos*, o dificultades y errores que se originan como consecuencia del modo en que se presentan los conceptos matemáticos. Haremos referencia a tres de estos obstáculos que tienen especial relevancia en la construcción significativa de las fracciones por parte de los escolares españoles:

1º Se obstaculiza la formación de concepciones adecuadas.

Un seguimiento de las actividades que proponen los textos escolares, sustentadas por el significado parte-todo, nos ha permitido identificar en los alumnos las siguientes ideas erróneas:

- *No existen las fracciones impropias*. El alumno se crea la idea de que el número de partes que se toman debe ser menor o igual que las partes del “todo” (Bonotto, 1993).
- *Las fracciones son números no medida*. Las fracciones se presentan al margen de las magnitudes, de modo que, por ejemplo, ante representaciones gráficas de medio cuadrado, o de medio círculo o de media tarta, el alumno escribirá simplemente 1/2. Desde esta creencia, y varios años después de recibir instrucción, no resulta infrecuente que estudiantes para Maestro al enfrentarse a problemas del tipo “encontrar el número de manzanas que había en una cesta sabiendo que después de retirar la mitad de las manzana menos 7 quedan 40”, digan que el

problema no tiene sentido porque el resultado de la operación 1/2 – 7 es un número negativo. (Gairín, 2004a)

- *El "todo" o unidad no es un número*. En el proceso instructivo no se explicita el sentido y funciones de la unidad, lo que provoca la identificación de las fracciones del tipo **a/a** con la unidad, pues los estudiantes tienden a señalar que este tipo de fracciones representa el todo, o que han tomado **a** elementos (Gairín, 2001)

2º Se obstaculiza la separación conceptual del número racional y del número natural.

La instrucción desde el significado de parte-todo no justifica la introducción de una nueva estructura numérica puesto que para la resolución de las tareas basta el recuento de números naturales, lo que provoca ideas erróneas en los alumnos:

- *La fracción está formada por dos números naturales*. La fracción describe una situación estática en la que hay involucrados dos números naturales; por tanto, ni la fracción, ni la expresión decimal, se entienden como un solo ente numérico de naturaleza diferente a la de los números naturales.
- *Las relaciones y operaciones con números racionales tienen el mismo significado que en los números naturales*. Los alumnos extienden los significados y técnicas del número natural a una nueva situación en la que, desde sus creencias, los entes numéricos no cambian de sentido: el orden de los números racionales es igual que el de los naturales, la multiplicación de racionales es una suma reiterada, el resultado del producto de dos números racionales es mayor que cualquiera de los factores, etc.

3º Se obstaculiza la formación de ideas abstractas.

No se sitúa a los alumnos en disposición de buscar estrategias de resolución de situaciones problemáticas que le faciliten el paso del mundo de los objetos al mundo de las ideas; así, los alumnos se forjan creencias como las siguientes:

- *Los conceptos son las técnicas asociadas a los mismos*. Para los alumnos las ideas sobre relaciones y operaciones se limitan al uso de sus técnicas asociadas; por ejemplo, el significado de la suma de fracciones es el algoritmo que proporciona el resultado de dicha suma.
- *Los contenidos útiles son los procedimentales*. Los alumnos memorizan las técnicas de cálculo sin preocuparse de sus fundamentos teóricos, lo que provoca resultados de esta índole: *solo el 33% de los alumnos de 6º curso de Educación Primaria* (12 años) *responde correctamente a la pregunta ¿qué tanto por ciento representan 2/5?* (INCE, 2002, pág.2).

2. Parte II: Propuesta alternativa

Hemos puesto de manifiesto las limitaciones de la enseñanza del número racional basada en el uso casi exclusivo del significado parte-todo. Otros investigadores consideran que el parte-todo es el menos valioso de los significados de la fracción (Lamon, 2001).

Con el propósito de mejorar la práctica docente analizamos la viabilidad de ofrecer a los escolares un proceso instructivo diferente: que eluda el significado parte-todo y que ayude a superar las dificultades de comprensión de las fracciones que ya hemos señalado.

Tras un periodo de análisis y reflexión formulamos una propuesta didáctica genuina para la enseñanza del número racional a lo largo de los tres últimos cursos de Educación Primaria (desde los 10 hasta los 12 años), con tres objetivos principales:

1º Favorecer la construcción de concepciones adecuadas.

Al escolar se le presenta un proceso instructivo sustentado en el uso de modelos de aprendizaje[1] que tienen como característica común la medida de cantidades de magnitud. De este modo disponen de un mundo de objetos físicos en los que justificar los resultados matemáticos.

2º Potenciar la idea de número racional

Se provoca una ruptura entre la idea de número natural y la de número racional a partir de sus diferentes usos: contar y medir son actividades de naturaleza diferenciada que demandan técnicas y procesos distintos. En consecuencia, los números naturales y los números racionales se representan con signos distintos, las relaciones y operaciones entre ellos tienen significados también distintos, y también son distintos los algoritmos de cálculo que se utilizan en los dos campos numéricos.

3º Facilitar la construcción de ideas abstractas.

A través de los modelos de aprendizaje el alumno dispone de una herramienta que, mediante la interacción con el mundo de los objetos, le facilita la construcción mental de los números racionales y le permite la evaluación semántica de cualquier expresión simbólica en la que aparezcan números racionales.

Esta propuesta, que tiene en cuenta la génesis histórica del número racional, se sustenta en una práctica educativa que prioriza el uso de modelos de aprendizaje en tanto en cuanto constituyen soportes físicos estables sobre los que los alumnos construyen sus conocimientos. Ahora bien, como los modelos de aprendizaje tienen unas potencialidades y unas limitaciones que delimitan su utilización en el proceso

[1] Gairín J. M. (2004 b): Números racionales. Modelos y significados.

educativo, hemos optado por utilizar tres modelos distintos con intencionalidades educativas bien diferenciadas:

- Los modelos de medida directa se utilizan en cuarto (10 años). En estos modelos la representación fraccionaria aparece desde la necesidad de comunicar el resultado de una acción de medida de una cantidad de magnitud.
- Los modelos de cociente, basados en la medida del resultado de un reparto igualitario, se utilizan en quinto curso (11 años)[2]. Estos modelos permiten introducir la notación decimal y conectarla con la fraccionaria.
- Los modelos de razón entre cantidades de magnitud en utilizan en sexto curso (12 años). Estos modelos vinculan el número racional con las ideas de proporcionalidad.

El orden seguido en la introducción de estos modelos se ha establecido teniendo en cuenta las capacidades cognitivas que exige cada uno de ellos. En efecto, aún siendo conscientes de que la medida presenta dificultades derivadas de la propia naturaleza del concepto, entendemos que son mayores las dificultades en el caso del cociente (además de las dificultades de la medida se añaden las derivadas de la idea de cociente partitivo), y de la razón (hay que disponer de la medida de dos cantidades de magnitud para después establecer relaciones entre ellas). Con el uso de estos modelos se espera que los escolares integren los diferentes significados del número racional, así como los sistemas de representación asociados, y que se evite la exclusividad de alguno de ellos puesto que cualquiera de los significados destaca alguno de los aspectos del número racional mientras que oscurece otros (Figueras, 1988).

La metodología de la propuesta toma como referente el paradigma constructivista del aprendizaje: prioriza el trabajo personal y en grupo de los alumnos, y potencia el aula como espacio natural para la construcción del conocimiento.

El proceso de instrucción parte del trabajo de los alumnos, de sus respuestas a las situaciones problemáticas que se les proponen y que han sido elaboradas, organizadas y secuenciadas de acuerdo con los modelos de aprendizaje elegidos. Una vez finalizada la tarea (en el aula o en sus casas) hay un proceso de reflexión colectiva en el que los alumnos discuten las respuestas incorrectas y exponen distintas estrategias utilizadas en la resolución de la tarea, siendo el profesor quien institucionaliza el conocimiento matemático. Todos los alumnos disponen, una vez terminado el tema, un pequeño texto encuadernado en el que figuran los conceptos y procedimientos objeto de la instrucción, así como actividades resueltas y propuestas.

Esta propuesta, que forma parte de una investigación en Didáctica de la Matemática, se implementó, durante los cursos 1999-00, 2000-01, 2001-02 y 2003-04 en el colegio público “Tío Jorge” de la ciudad de Zaragoza (España). A lo largo de

[2] Una descripción de las características del modelo puede consultarse en Escolano (2002a y 2002b)

esta experimentación participaron 160 alumnos y se implicaron 5 profesores del colegio.

2.1 Enseñanza de las fracciones con el significado de medida

Por razones de espacio no podemos incluir en este trabajo la propuesta didáctica completa, por lo que nos limitamos a enunciar los aspectos más destacables de dicha propuesta correspondientes a cuarto curso de Educación Primaria (10 años); es decir, la parte de la propuesta didáctica en que los alumnos tienen el primer contacto con la fracción.

El modelo de medida directa

Es el modelo de aprendizaje utilizado en este curso, entendiendo como tal modelo de aprendizaje un entorno físico con el que se esquematiza y recrea una parte del mundo real, con variables bien definidas, estable frente a interacciones con el mundo exterior, y que permite las acciones de los sujetos (Gairín, 1999, pág. 15). En este caso de los modelos de medida las cuatro variables tomaron los siguientes valores:

a) Magnitudes medibles.

Se utilizan las de longitud, superficie y cardinalidad. Se eligen estas magnitudes porque interesa utilizar las que figuran en los currícula oficiales, y porque este tipo de magnitudes facilitan al escolar la obtención del resultado de la medida.

b) Objetos en los que resulta perceptible una cantidad de magnitud.

Los objetos utilizados son listones de madera, tiras de papel, cartulinas, folios, cubos ensamblados, pues se pueden manipular fácilmente, no crean problemas de limpieza o de seguridad, y son agradables al tacto.

c) Acciones realizadas sobre los objetos.

Se propone a los escolares la medida de cantidades de magnitud en diferentes situaciones.

d) La técnica elegida para realizar la acción es la de medir en una sola fase[3].

[3] Existen otras técnicas de medida que no se ha considerado pertinente su utilización por estar alejadas de las capacidades cognitivas de los escolares de 4º curso. Así ocurre, por ejemplo con la técnica de medir en varias fases (utilizar la unidad y sucesivos fraccionamientos de ésta o de las subunidades obtenidas en a partes iguales y cuyo resultado se expresa de la forma $n + n_1\frac{1}{a} + n_2\frac{1}{a^2} + \ ... \ + \ n_p\frac{1}{a^p}$ de unidad), o con la técnica de medir por conmensuración (hallar el número de veces (*b*) que hay que reiterar la cantidad a medir y el número de veces (*a*) que hay que reiterar la unidad (u) hasta que las cantidades reiteradas sean iguales; por lo que el resultado a/b expresa la razón entre cantidades de magnitud)

Consiste en fraccionar la unidad de medida con la finalidad de crear una subunidad que esté contenida un número entero de veces en la cantidad a medir. La elección de esta subunidad se logra mediante un proceso de ensayo y error y existen múltiples subunidades para medir una misma cantidad. El resultado de la medida se expresa mediante una fracción.

Consideraciones sobre los contenidos

Una vez concretados los modelos de medida que utilizamos en nuestra propuesta, hay que justificar las decisiones que se han tomado para organizar y secuenciar los contenidos de dicha propuesta:

1º Comenzar con la notación fraccionaria

Una idea esencial para la comprensión de los números racionales es la del fraccionamiento o partición de la unidad en un número finito de partes iguales. Esta idea aparece cuando la unidad de medida es mayor que la cantidad a medir, cuando se necesita establecer una subunidad de medida que quepa un número de veces en la cantidad a medir (Gairín, 2001). La idea de fraccionamiento aparece con la técnica de medir en una fase.

Es más, si la instrucción comenzase por la notación decimal se plantearían algunas cuestiones de difícil respuesta: ¿cómo se realiza una construcción efectiva de la fracción a partir de la notación decimal?, o ¿cómo se justifica la existencia de números racionales no decimales?

2º Trabajar inicialmente con la longitud

Es conveniente que las situaciones problemáticas que sirven para introducir la fracción conlleven la medida de magnitudes realizadas con técnicas lo más sencillas posible; de lo contrario la tarea de medir acapararía toda la atención del escolar en detrimento de la resolución del problema. En este sentido, hemos optado por trabajar inicialmente la longitud porque su carácter unidimensional facilita la percepción de la cantidad y porque facilita la construcción de cantidades de longitud conocida su representación fraccionaria.

Una vez que el alumno está familiarizado con la notación fraccionaria interesa que no asocie esta representación, exclusivamente, a la longitud, sino que la extienda a otras magnitudes. En este sentido proponemos el trabajo con la magnitud superficie porque fortalece el significado de fracción como resultado de la medida de cantidades de magnitud que tienen formas distintas, y desaconsejamos el uso de la magnitud masa porque crea dificultades sobre su percepción visual.

3º Incorporar la magnitud cardinalidad

El modelo basado en la magnitud cardinalidad presenta características diferentes al resto de los modelos construidos con magnitudes continuas porque el fraccionamiento de la unidad no puede hacerse en el número de partes que se desee, tan solo puede hacerse teniendo en cuenta los divisores del cardinal de la unidad. Proponemos el trabajo con esta magnitud porque ofrece al escolar una nueva perspectiva del significado de la fracción y porque es un conocimiento socialmente útil por su amplia presencia en el mundo real.

4º Anteponer la enseñanza de las fracciones a la del Sistema Métrico Decimal

Si se adelanta la enseñanza del Sistema Métrico Decimal a la enseñanza de la fracción resulta muy complejo justificar la necesidad de introducir el conjunto de los números racionales para resolver el problema de la medida; en efecto el Sistema Métrico Decimal se ideó pensando que cualquier cantidad se pueda expresar con un número natural (para lo que basta elegir una unidad lo “suficientemente pequeña”). Es más, la enseñanza de este Sistema lleva asociado el uso de la regla graduada, y esta práctica educativa obstaculiza la aparición de ideas sobre las fracciones.

5º La instrucción se limita a tres bloques de contenido: Construcción del sistema de representación fraccionario con magnitudes continuas, relaciones de equivalencia y orden de fracciones y construcción del sistema de representación fraccionario con la magnitud cardinalidad.

Ejemplificación de la primera tarea de medida

Con la finalidad de ilustrar este discurso, nos parece oportuno incluir la situación inicial, la primera de las tareas que se proponen al alumno, con el fin de que el lector pueda hacerse una idea más precisa de cómo se hace surgir en el alumno la idea de fracción y de qué tipo de tareas se proponen para afrontar los contenidos de este curso.

Deseáis encargar, por carta, una barra para colgar la cortina que tenéis en la pared[4].

¿Qué le escribiríais al vendedor para que os venda una barra que tenga la misma longitud que la de la cortina?

El vendedor nos ha mandado lo que llama una unidad de medida que tiene la misma longitud que las tiras de papel que os entrego.

También os entrego una carta para que solo tengáis que rellenar los espacios en blanco.

En este momento incipiente del proceso de enseñanza los alumnos desconocen la representación simbólica de la fracción; sin embargo, son capaces de medir la longitud de la barra. Mostramos la respuesta que escribe Iratxe que mide correctamente la barra y que está en condiciones de comprender la representación simbólica de la fracción:

[4] En la pared se cuelga una pequeña cortina de papel con una barra de madera que la sujeta

A la atención del Sr. vendedor de barras de cortinas.

Zaragoza, 8-3-04

Estimado Sr. Vendedor:

Deseo recibir en mi domicilio una barra de cortina que mida una longitud de

3 cuartos de unidad.

Atentamente:

Firmado: Iratxe

P.D. Le voy a decir cómo he realizado la medida de la longitud de la barra:

1º He doblado la unidad en 4 partes 2º He colocado la barra encima de la unidad 3º Me he fijado en que la barra media 3 partes de las que habia doblado 4º Por lo que la barra mide 3cuartos de unidad

2.2. Resultados

Nos limitamos a enunciar algunas conclusiones de las obtenidas en la investigación referidas a cuarto curso. Estos resultados provienen de los análisis (cualitativos y cuantitativos) de las 30 tareas que realizan los alumnos de este curso a los largo de las 23 sesiones de clase, de 50 minutos de duración, que se desarrollaron en la fase experimental.

• Comprensión de los alumnos

1º Los alumnos no intuyen la necesidad de fraccionar en partes iguales la unidad de medida cuando intentan resolver la primera situación problemática, lo que obliga al profesor a sugerir esta idea central para dar significado a la fracción.

2º En las tareas de medida los alumnos encuentran con facilidad la fracción que expresa la cantidad longitud, superficie o cardinalidad. Sin embargo, tienen serias dificultades en el trabajo con la magnitud masa.

3º Los alumnos saben construir la cantidad de magnitud a partir del conocimiento de la representación simbólica de la fracción, aunque el porcentaje de acierto desciende si se compara con los de las tareas de medida.

4º No se detectan diferencias significativas en la comprensión de los escolares cuando trabajan con las magnitudes longitud o superficie.

5º Los alumnos aceptan de forma natural la existencias de fracciones mayores, menores o iguales que la unidad.

6º El concepto de equivalencia de fracciones aparece de forma natural, desde las primeras tareas de medida, porque los alumnos expresan la medida de una misma cantidad con distintas subunidades.

7º Los alumnos saben construir fracciones equivalentes a una dada utilizando como recurso didáctico materiales manipulativos. Sin embargo, la mayoría de los alumnos tienen dificultad para formular la regla general de obtención de fracciones equivalentes y para aplicar dicha regla en las tareas de comparación de fracciones.

8º Los alumnos de cuarto curso saben ordenan fracciones utilizando como estrategia básica el significado de fracción como medida, es decir, justifican sus resultados a partir de las cantidades de magnitud que expresan las fracciones. Este es el caso de Abel que al resolver la tarea 24: "*Has comprado dos cartulinas: una tiene una superficie de 5/4 de unidad y otra tiene una superficie de 4/3 de unidad. ¿Qué cartulina tiene menor superficie*?", ofrece estos argumentos (Fig. 3):

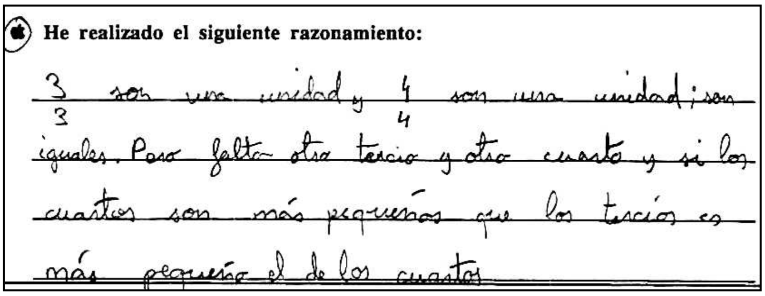


Fig. 3. Argumentos de Abel en la tarea 24.

•Potencialidades de la propuesta didáctica

1º. Los modelos utilizados han facilitado a los alumnos el paso de las representaciones manipulativas a las representaciones gráficas; y, aunque las representaciones gráficas sean imprecisas, éstas les sirven para fijar los aspectos esenciales de los procesos de medida, como muestra el caso de Silvia que en la tarea 24 (Fig. 4), anteriormente enunciada, utiliza este dibujo:

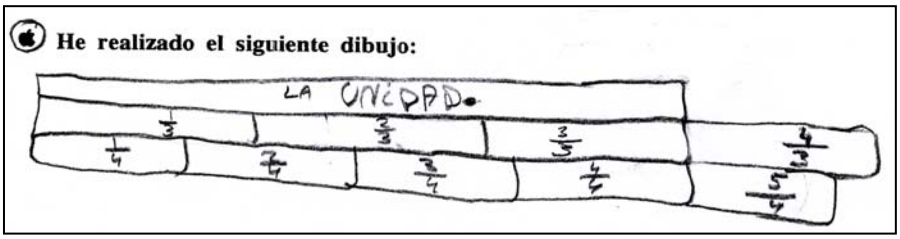


Fig. 4. Respuesta de Silvia en la tarea 24.

2º Los modelos de aprendizaje que se han utilizado son coherentes con la línea metodológica que caracteriza la propuesta de enseñanza, porque:

a) Facilitan el aprendizaje de los alumnos a partir de acciones físicas con objetos manipulables.

b) Respetan los diferentes niveles de comprensión de los alumnos, puesto que el diseño de las tareas les deja libertad para elegir la estrategia más adecuada a su nivel de abstracción para resolver el problema.

c) Potencian la construcción social del conocimiento porque, durante la evaluación conjunta de las tareas, los alumnos exponen las estrategias de resolución puestas en juego.

• Limitaciones de la propuesta

1. La magnitud masa ha causado dificultades asociadas a la complejidad de la percepción visual de cantidades de esta magnitud, así como a las dificultades de realizar el fraccionamiento con una balanza de dos brazos.
2. La mayor parte de los alumnos de cuarto curso no alcanzan a gestionar la equivalencia de fracciones a nivel simbólico: no formulan la técnica de obtención de fracciones equivalentes a una dada y no saben utilizar la equivalencia para comparar fracciones. Estos alumnos saben comparar fracciones manipulando objetos y, sin embargo, al trabajar con los símbolos suman la misma cantidad al numerador y al denominador para encontrar fracciones equivalentes a una dada. Estos hechos nos hacen pensar que la gestión de la equivalencia a nivel simbólico debe ubicarse en un curso posterior, en quinto curso.
3. Se intuye que, a largo plazo, los alumnos de Educación Primaria pueden haberse forjado la idea de que la medida de cualquier cantidad continua puede ser expresada mediante una fracción. Asumimos que esta limitación deberá superarse, en estudios posteriores, cuando los alumnos estén capacitados para entender tanto los procesos infinitos de aproximación en la recta real, como la densidad de los números racionales en los números reales.

3. Parte III: Discusión e implicaciones

La experimentación realizada y los resultados obtenidos ponen de manifiesto que es factible una propuesta didáctica alternativa a la tradicional enseñanza sustentada por el significado parte-todo. Es más, durante cuatro cursos hemos implementado nuestra propuesta respetando la programación y temporalización del área de Matemáticas que figura en el Proyecto Curricular del Centro.

Las respuestas que dan los alumnos a las tareas propuestas indican la desaparición de obstáculos didácticos que, como hemos manifestado, se producen si en la instrucción se utiliza el significado parte-todo: las fracciones propias e impropias tienen el mismo estatus como expresión de cantidades de magnitud; las fracciones son entes numéricos asociados a la medida y la unidad de medida juega un papel esencial para interpretar las fracciones.

Además, los alumnos perciben que la fenomenología asociada a la fracción difiere sustancialmente de la del número natural. Para los alumnos la fracción surge como una necesidad para formular la respuesta a problemas en los que los números naturales se muestran insuficientes, situaciones en las que el resultado de la medida no puede expresarse con un número natural.

Desde sus experiencias previas con los números naturales, para un niño de 9-10 años resulta difícil de admitir que una cantidad se puede representar de formas diferentes. Sin embargo, la constatación personal de las actividades realizadas con materiales manipulativos lleva a los alumnos que han participado en la experimentación a admitir y comprender la existencia de fracciones equivalentes, a admitir que existan formas diferentes de escribir la misma cantidad.

También queremos dejar constancia de que, para estos alumnos, la comparación de fracciones es una idea muy nítida: una cantidad puede ser mayor, menor o igual que otra; mientras que la interpretación y aplicación, a nivel simbólico, de las correspondientes técnicas de cálculo asociadas les resulta bastante dificultoso.

Pero esta propuesta también presenta desventajas respecto a la tradicional enseñanza sustentada en el significado parte-todo: el aprendizaje es más dilatado en el tiempo porque se retrasa la introducción de la representación simbólica de la fracción. No obstante, podemos afirmar que los alumnos que intervienen en las fases experimentales desarrollan ideas adecuadas de la fracción como resultado de una medida cuando interactúan con distintos sistemas de representación (manipulativos, gráficos y verbales). Y, a pesar de que en cuarto curso no son capaces de gestionar correctamente la representación simbólica de la fracción han sentado las bases para hacerlo en el siguiente curso. Hemos constatado que los mismos alumnos, un año después, en quinto curso de Educación Primaria (11 años), han ido gradualmente utilizando la estrategia basada en la equivalencia de fracciones para resolver situaciones problemáticas sobre relaciones y operaciones con fracciones.

Hemos presentado una propuesta que en la fase experimental ha mostrado más ventajas que inconvenientes respecto a la enseñanza tradicional; queda el desafío de que otras investigaciones confirmen la incidencia de dicha propuesta en un incremento de la comprensión de los escolares y, caso de ser así, queda el reto de formar a unos profesores para que enseñen de forma diferente a como aprendieron.

Bibliografía

▪ Behr, M. J., Harel, G., Post, T. y Lesh, R. (1993). “Rational Numbers: toward a Semantic Analysis. Emphasis on the Operator Construct”. En: Carpenter, T.P., Fennema, E. y Romberg, T. A. (Edits): *Rational Numbers. An integration of Research*. Lawrence Erlbaum Associates Publishers, Hillsdale, New Jersey.

- Bezuk, N. S. y Bieck, M. (1993). “Current research on rational numbers and common fractions: summary and implications for teachers”. En: Owens, D. T. (Edit.): *Research ideas for the classroom. Middle grades mathematics.* Macmillan Publishing Company, New York.
- Bishop, A. J. (1999). *Enculturación matemática. La educación matemática desde una perspectiva cultural*. Paidós, Barcelona.
- Bonotto, C. (1993). “A research project on rational numbers”. Department of Pure and Applied Mathematics, University of Padova, Italy. *Paper presented at the International Study Group on the Rational Numbers of Arithmetic*, University of Georgia, Athens.
- Brousseau, G. (1983) *Problemas en la enseñanza de los decimales. Problemas de didáctica de los decimales.* Universidad de Córdoba, Argentina.
- Escolano, R. (2002a). “Enseñanza del número racional positivo en Educación Primaria: un estudio desde el modelo cociente”. En Palacián, E y Sancho, J. (Edit.): *Actas de las X Jornadas para el Aprendizaje y la Enseñanza de las Matemáticas, JAEM*. Instituto de Ciencias de la Educación, Universidad de Zaragoza, Volumen II, pp. 593-598.
- Escolano, R. (2002b). “Enseñanza del número racional positivo en Educación Primaria: un estudio desde el modelo cociente”. En Moreno, M.F. et al. (Edit.): *Investigación en Educación Matemática*. Servicio de Publicaciones de la Universidad de Almeria, pp. 149-158.
- Escolano, R. (2004). “Presencia histórica de la fracción en los libros de texto del sistema educativo español”. *Comunicación presentada al Grupo de Pensamiento Numérico y Algebraico. VIII Simposio de la Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática*. La Coruña, 10 al 13 de septiembre de 2004.
- Figueras, O. (1988). *Dificultades de aprendizaje en dos modelos de enseñanza de los racionale*s. Departamento de Matemática Educativa del Centro de Investigación y Estudios Avanzado del IPN (Instituto Politécnico Nacional). México.
- Gairín, J. M. (1999). *Sistemas de representación de números racionales positivos. Un estudio con maestros en formación*. Tesis doctoral, Universidad de Zaragoza.
- Gairín, J. M. (2001). “Números racionales positivos: reflexiones sobre la instrucción”. *Aula*. *Revista de Enseñanza e Investigación Educativa*, VOL. 10, pág. 41-64
- Gairín, J. M. (2004a). “Estudiantes para Maestros: reflexiones sobre la instrucción en los números racionales positivos”. *Contextos educativos (en prensa).*
- Gairín, J. M. (2004 b) “Números racionales. Modelos y significados”. En: Rico, L. (Edit): *El número, agente integrador del conocimiento*. Ministerio de Educación y Ciencia, Madrid, pp. 99-124
- Hiebert, J. A. Y Carpenter, T. P. (1992). “Learning and teaching with understanding”. En: Grouws, D. A. (Edit.): *Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning. A Project of the National Council of Teachers of Mathematics.* Macmillan Publishing Company, New York.
- INCE. Instituto Nacional de Calidad y Evaluación. (2002). *Evaluación de la Educación Primaria 1999. Fallos y dificultades de los alumnos en la prueba de Matemáticas*. Secretaría General Técnica del MEC, Madrid

▪Kerslake, D. (1986). *Fractions: Children´s strategies and errors*. NFER-NELSON, Windsor (England).
▪Kieren, T. E. (1993). “Rational and Fractional Numbers: From Quotient Fields to Recursive Understanding”. En: Carpenter, T. P., Fennema, E. y Romberg, T. P. (Edits): *Rational Numbers. An Integration of Research*. Lawrence Erlbaum Associates Publishers, Hillsdale, New Jersey.
▪Lamon, S. J. (2001). “Presenting and Representing: From Fractions to Rational Numbers” En: Cuoco, A.; Curcio, F. (Edits.): *The Roles of Representations in School Mathematics*, 2001 Yearbok of The National Council of Teachers of Mathematics, Reston VA , pp.146-165.
▪Llinares, S. y Sánchez, M. A., (1988). *Fracciones*. Síntesis, Madrid.
▪Mack, N. K. (1993). “Learning Rational Numbers with understanding: Case of Informal Knowledge”. En: Carpenter, T. P., Fennema, E. y Romberg, T. P. (Edits): *Rational Numbers. An Integration of Research*. Lawrence Erlbaum Associates Publishers, Hillsdale, New Jersey.
▪Morcote, O. y Flores, P. (2001). “Análisis del conocimiento didáctico sobre las fracciones en un texto escolar de 1º de ESO”. En: Berenguer, J., Cobo, B. y Navas, J. (Edits.): *Investigación en el aula de matemáticas. Retos de la educación matemática del siglo XXI*. Facultad de Ciencias de la Educación de Granada.

Rafael Escolano Vizcarra es profesor del Área de Didáctica de la Matemática de la Universidad de Zaragoza (España) e imparte docencia en la Facultad de Educación de esta Universidad. Es miembro del grupo de Pensamiento Numérico y Algebraico de la SEIEM (Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática) e investiga en la didáctica del número racional y en la formación del Profesorado.
E-mail: rescolan@unizar.es
Facultad de Educación de la Universidad de Zaragoza
C/ San Juan Bosco, nº 7
50009-Zaragoza (España)

José María Gairín Sallán es profesor del Área de Didáctica de la Matemática de la Universidad de Zaragoza (España) e imparte docencia en las Facultades de Educación y de Ciencias de esta Universidad. Es miembro del grupo de Pensamiento Numérico y Algebraico de la SEIEM (Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática) e investiga en la didáctica del número racional, en la formación del Profesorado y en juegos educativos matemáticos.
E-mail: jgairin@unizar.es
Facultad de Educación de la Universidad de Zaragoza
C/ San Juan Bosco, nº 7
50009-Zaragoza (España)

UNIÓN
REVISTA IBEROAMERICANA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA

Marzo de 2005, Número 1, páginas 37 - 44
ISSN: 1815-0640

Algoritmos en la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas

Antonio J. Pérez Jiménez

1. Revisión de los algoritmos tradicionales de la enseñanza elemental

La visión que socialmente se tiene de la enseñanza elemental de la Aritmética es principalmente la de un entrenamiento para la adquisición de habilidades de cálculo. Esta es también, en parte, la opinión del profesorado; y no sólo en mi país. Los algoritmos tradicionales de suma, resta, multiplicación y división han sido un hallazgo tan extraordinario y eficaz que, como todo aprendizaje consolidado, es un obstáculo (epistemológico) para su renovación.

Sin embargo esta posición preponderante de dichos algoritmos va perdiendo fuerza.

En primer lugar hay que destacar la cada vez más precaria ubicación en los programas del algoritmo usual de la raíz cuadrada. Son muy pocos, y cada vez menos, los profesores que enseñan a sus alumnos este algoritmo. ¿Por qué? Se dan múltiples razones, todas ellas loables; pero entonces la pregunta es: ¿no valen esos mismos argumentos para la progresiva eliminación en la enseñanza de los algoritmos usuales de suma, resta, multiplicación y división? En segundo lugar, el fuerte movimiento de renovación pedagógica que arranca en los años 50 (*Resolución de problemas*, de Polya, *Enseñanza dinámica*, del grupo interdisciplinar CIEAEM) y que resurge con una inspiración constructivista y en contra de los postulados de la llamada “matemática moderna”, cambian el centro de gravedad de la enseñanza y lo sitúan en el aprendizaje, es decir, el protagonismo pasa del profesor al alumno. Importa lo que el alumno pueda asimilar y para ello lo mejor es que sea él mismo quien construya sus conocimientos; y, con estos postulados, parece innegable que los algoritmos usuales pierden interés. En tercer lugar, la utilidad social de dichos algoritmos. Hoy no se ve a nadie, como en los tiempos de mi infancia y juventud, realizar las cuentas sobre un papel, o sobre la barra de un bar; las máquinas han ocupado este lugar. En cuarto lugar, los movimientos, proclamas (*Let's Abolish Pencil-and-Paper Arithmetic*, de Anthony Ralston; *Manifiesto en contra de los algoritmos tradicionales de las cuatro operaciones aritméticas y de la raíz cuadrada,* del Colegio Público Aguamansa de las Islas Canarias) a favor de la abolición de los algoritmos tradicionales. Estos movimientos sitúan como prioritarias las estrategias para el cálculo mental, frente a las habilidades que dichos algoritmos proporcionan; en lugar de la vieja tecnología del lápiz y papel proponen la utilización de la calculadora.

Parece pues claro que la enseñanza de los algoritmos básicos está en revisión. Pero no sólo eso, también en general se tiende a confundir un enfoque algorítmico con un tratamiento no significativo del aprendizaje. En esto ha tenido mucho que ver la oposición que las teorías constructivistas han opuesto a las doctrinas conductistas. En el conductismo la enseñanza se produce a través de una *enseñanza programada* en la que los algoritmos, que pueden ser implementados como programas en una *máquina de enseñar*, guían el aprendizaje del alumno. Estos métodos pretenden obviar el *error* y así, cuando un alumno yerra, el programa vuelve atrás (feed-back) automáticamente para que asimile los pasos anteriores –que se suponen mal aprendidos-. El constructivismo sostiene de manera radicalmente opuesta, que los errores no hay que evitarlos, sino más bien sacarlos a la luz, diagnosticarlos y proceder en consecuencia.

En mi país (y en otros muchos) los currículos oficiales son constructivistas y, en consecuencia, los algoritmos están devaluados. ¿Debe ser esto así?

2. ¿Qué es un algoritmo? Resolución algorítmica

La noción de algoritmo se ha manejado a lo largo de la historia de manera totalmente informal e intuitiva. La idea de algoritmo como secuencia de instrucciones elementales ha parecido siempre tan obvia que nadie se había planteado, hasta finales del siglo XIX, dar una definición formal del mismo. Es muy claro cuándo un problema se resuelve algorítmicamente: basta con encontrar un procedimiento mecánico que pueda ser considerado como tal. Sin embargo, para probar que un problema no es resoluble algorítmicamente se necesita saber con rigor qué es un algoritmo. La cuestión de si todo problema es resoluble algorítmicamente está implícita en el programa finitista de Hilbert y, en 1936, A. Turing da una respuesta negativa a la misma a través de un célebre problema conocido como *el problema de la parada*. Para ello, Turing define la noción de algoritmo a través de un artilugio teórico conocido como *máquinas de Turing*. Otros insignes matemáticos de la época –estamos hablando de los años 30- (Gödel, Church, Kleene) introducen por distintas vías la noción formal de modelo de computación tratando de capturar la idea intuitiva del concepto de algoritmo. Además se formula una hipótesis no refutada hasta hoy: la hipótesis de Church (o de Church-Turing) que afirma que dichos modelos (todos equivalentes) capturan completamente la noción intuitiva de computación.

Así, pues, existen problemas para los que no hay ningún algoritmo que lo resuelva. El interés de esta afirmación, en el contexto de esta conferencia, es que si todos los problemas fuesen resolubles algorítmicamente se justificaría plenamente, desde el punto de vista matemático, una enseñanza de los algoritmos, dado que al fin y a la postre la matemática resuelve problemas. Pero puesto que no es así tendrá que utilizarse otros argumentos para justificar la enseñanza de los mismos.

Curiosamente los modelos de computación son establecidos antes de que aparecieran los primeros ordenadores (en el sentido actual). Es decir, antes de que éstos vieran la luz ya se había determinado qué podían hacer y qué no podían hacer. La aparición de los ordenadores (como máquinas de propósito general o máquinas universales según el sueño de Leibnitz) supone una revolución en la que estamos inmersos. Tras los trabajos pioneros de von Neumann, los ordenadores son programados a través de *lenguajes de programación* y, como máquinas de propósito general que son, cualquier problema resoluble algorítmicamente puede ser resuelto por una de estas máquinas. Claro que no importa sólo esto pues entra en juego el problema de la eficiencia: no nos vale desde el punto de vista práctico un algoritmo que necesite una gran cantidad de tiempo para resolver instancias de un problema de tamaño medianamente grande. Es necesario, pues, analizar la cantidad de recursos necesarios (cuantificados en tiempo y/o memoria) para la ejecución de un algoritmo. Así nace la teoría de la complejidad computacional en cuyo marco aparece uno de los problemas abiertos más relevantes de la actualidad: el problema **P versus NP**. Una respuesta afirmativa a la conjetura **P** = **NP** significaría que determinados problemas podrían resolverse en un tiempo considerablemente menor (polinomial) y conllevaría algunas consecuencias muy importantes. Por ejemplo, los sistemas de computación carecerían de eficacia en tanto en cuanto cualquier texto cifrado podría desencriptarse mecánicamente y de forma rápida. Por ello habría que cambiar la filosofía de los sistemas de encriptación. Pero por ahora no hay que temer pues hoy por hoy todo apunta a una respuesta negativa de dicha conjetura.

3. Algoritmos y nuevas tecnologías

Todo algoritmo puede traducirse en *un programa* escrito en un lenguaje de programación y todo *programa* es un algoritmo. Todo problema resoluble algorítmicamente puede ser resuelto mecánicamente por un ordenador. Si tenemos en cuenta la revolución de las nuevas tecnologías de la información y si éstas han de tener una incidencia en la enseñanza, parece que los algoritmos vuelven a adquirir un papel relevante. Un ejemplo: el lenguaje *Logo* es una extraordinaria herramienta para la enseñanza de la geometría. Los alumnos han de escribir un programa muy sencillo para obtener como respuesta un dibujo que representa el objeto deseado. *Logo* fue toda una revolución en el panorama de la enseñanza de mediados de los años 80, pero muy rápidamente perdió parte de su empuje.

Logo es una aplicación educativa tal que, a través de programas formales (*procedimientos* en la terminología de este lenguaje) el alumno realiza sus tareas. El diseño de programas en un lenguaje de programación para resolver problemas ocupa hoy un lugar muy importante en el quehacer social; en el contexto escolar ese proceso de diseño tiene, entre otras, la virtud de conectar la realización de una tarea con la utilización explícita de un lenguaje, es decir, de conexión directa del significado con el significante.

Pero hay otras aplicaciones que tienen un fuerte carácter algorítmico aunque no se manejen con un lenguaje formal; un ejemplo es el *Cabri-Géomètre* o *Cabri*.

El *Cabri*, como el *Geometer's Sketpad* o *Cinderella*, es otra aplicación informática que está cambiando sensiblemente el enfoque y los métodos de la enseñanza de la geometría. Es una herramienta muy eficaz para la generalización geométrica (lo que permite la realización de pruebas matemáticas) y para la elaboración de conjeturas (una de sus principales virtudes desde mi punto de vista); pero lo que quiero enfatizar ahora es su capacidad para el manejo y elaboración de algoritmos (como, por ejemplo, los de regla y compás).

Cuando el alumno se enfrenta a una tarea con el *Cabri* es usual que tenga que elaborar, implícitamente en muchos casos, un algoritmo informal para resolver el problema implicado en esa tarea. El *Cabri* proporciona, en los menús, las instrucciones elementales que el alumno ha de utilizar para obtener un algoritmo que resuelva el problema. El profesor, si lo desea, puede modificar (suprimir, añadir) esas instrucciones elementales lo que permite por una parte el aprendizaje y asimilación de determinadas instrucciones (no consideradas elementales por el profesor) y, por otra, la agilización en las tareas mediante la introducción de macro-instrucciones.

El manejo de las nuevas herramientas que proporcionan las actuales tecnologías posee una carga algorítmica muy importante (por supuesto, va mucho más allá al adentrase en el terreno de la conjetura y de la prueba matemática). Concretando en el objeto de esta conferencia, podemos concluir que la nueva perspectiva tecnológica favorece la utilización de algoritmos tanto en la enseñanza como en el aprendizaje de las matemáticas.

4. ¿Qué algoritmos?

Si un problema es resoluble algorítmicamente existen distintos algoritmos que lo resuelven (es más, existen infinitos algoritmos). La utilización de ábacos (la yupana incaica, el suan-pan chino, el soroban japonés, etc) condicionan un determinado tratamiento algorítmico de las operaciones elementales alejado (independiente) de la notación numérica. La multiplicación mediante celosías, el ábaco de arena, suponen ya un cálculo vinculado a la notación. La multiplicación rusa se basa en el conocimiento de la suma, del doble y de la mitad (por defecto). Las regletas de Neper, que reducen la multiplicación a la suma, introducen un elemento más alto de automatización en el cálculo. Las máquinas de Pascal y Leibnitz son el primer paso hacia la automatización del cálculo de las operaciones elementales. Las actuales calculadoras electrónicas permiten la utilización de “algoritmos ingenuos” (pronto veremos un ejemplo) en lugar de los algoritmos usuales, y las calculadoras gráficas proporcionan una fuerte capacidad de visualización en los problemas de estudio de funciones. Todo ello sea dicho como argumentos para concluir que los algoritmos dependen, entre otros factores, de la tecnología disponible en cada momento cultural. Los algoritmos de lápiz y papel, vinculados además al enorme hallazgo del cero, han supuesto un gran éxito en la historia del cálculo al ser fuertemente automatizados y depender sólo de una tecnología tan usual y barata como el lápiz y papel (o similares).

Pero tras el formidable invento de nuestras actuales máquinas de calcular, ¿no van a ser relegados el lápiz y papel? Estarán conmigo en que la pregunta es muy pertinente y que los intentos de abolicionistas están fuertemente basados.

Pongamos un ejemplo. Para calcular la raíz cuadrada entera de un número podemos proceder con un *algoritmo ingenuo*: mediante ensayo y error buscamos un número tal que su cuadrado sea menor que el número dado y, sin embargo, el cuadrado de su siguiente lo sobrepase. Este método, implementado en lápiz y papel tiene una enorme desventaja frente al tradicional: no es tan mecánico y es más lento; tan lento que salvo en cálculos de números pequeños se hace inviable (mucho más si se quiere obtener una solución con decimales). Pero tiene unas enormes ventajas desde el punto de vista conceptual pues en cada paso se está manejando la definición de raíz cuadrada como el inverso (y la reversibilidad importa mucho desde el punto de vista de la psicología del aprendizaje); además, para dar el mínimo número de pasos el alumno debe efectuar *cálculos mentales* aproximados. Y, por abundar, hemos de decir que puede extenderse fácilmente al cálculo de otras potencias.

Pues bien, si a las ventajas indicadas unimos que las desventajas pueden obviarse con la utilización de la calculadora, comprenderán ustedes que yo me decante por este "algoritmo" de ensayo y error. La enseñanza tiene la misión de elegir en cada etapa histórica los algoritmos más pertinentes.

Ya he comentado que hay quienes pretenden que la calculadora se emplee desde la más tierna infancia y desaparezcan los algoritmos de lápiz y papel. Creo que los algoritmos de suma, resta, multiplicación y división pueden ser sustituidos por otros que utilicen la calculadora (combinados posiblemente con técnicas no algorítmicas) pues, como en el *algoritmo ingenuo* de la raíz cuadrada, se favorece claramente el cálculo mental y, de camino, se elimina un elemento memorístico que consume gran parte del tiempo del alumno en un momento en que, además, se supone que está ávido de conocimientos. Pero he de reconocer que en el caso de las cuatro operaciones básicas es bastante más difícil pues aparte de la raigambre tan profunda que poseen dichos algoritmos y, por qué no decirlo, de su belleza, la resistencia social y del profesorado tiene su razón: la relación del enseñante con el pupilo y con su entorno es, en términos de Guy Brosseau, un *contrato didáctico* (implícito); en esa relación contractual los algoritmos usuales cumplen el papel de unas reglas fijas y muy claras. Su "eliminación" ha de venir por la vía de la sustitución de ese contrato con otras reglas aceptadas por la generalidad y eso, pienso yo, va a llevar su tiempo. El contrato didáctico es más fuerte (o mejor, más conservador) que el contrato social.

5. Algoritmos en la enseñanza y en el aprendizaje de las matemáticas

Las teorías sobre el aprendizaje significativo han de tomarse (al igual que tantas teorías sobre la enseñanza) como una tendencia. Me explico: la enseñanza de determinadas habilidades como la del algoritmo usual de la raíz cuadrada es memorística, no significativa. ¿Quiero ello decir que no debieron enseñarme dicho algoritmo? Yo no estoy de acuerdo y la razón es bien simple: con esa habilidad yo podía resolver de manera efectiva los problemas elementales de áreas, de semejanza cuadrática. A su vez, el manejo de éstos me ayudó a adquirir la noción de raíz cuadrada. Pero hoy, con la poderosa calculadora en nuestras manos, yo defiendo el *algoritmo ingenuo*, es decir, un aprendizaje enmarcado en una enseñanza significativa.

En la enseñanza de una operación básica se hace un *paréntesis* para enseñar una rutina necesaria para su cálculo: el algoritmo tradicional. Pero, ¿había otra elección cuando a mí, a finales de los años 50, me enseñaron a sumar? Y aunque la hubiera (Felix Klein, ya en 1910, propugnaba la utilización de la Brunsviga - calculadora mecánica- como instrumento de formalización de las operaciones básicas), ¿se daban las condiciones culturales, de divulgación tecnológica y de actualización del profesorado adecuadas? La respuesta a ambas preguntas es negativa. (Una precisión: las regletas de Cuisenaire se han utilizado, y se utilizan, para la conceptualización de las operaciones básicas, pero nunca como una alternativa al cálculo).

Una pregunta crucial en el caso de las operaciones aritméticas básicas es la siguiente: ¿puede evitarse ese *paréntesis* o hacerlo lo más corto posible? Dicho de otra forma, ¿puede integrase un algoritmo de calculo en el aprendizaje del concepto correspondiente? Cuando esto ocurre la enseñanza gana en significatividad; el algoritmo correspondiente es, entonces, un "*algoritmo ingenuo*" que, como en el caso de la raíz cuadrada, irá acompañado normalmente de diversas estrategias heurísticas.

Para calcular la fórmula de la distancia de un punto a una recta el profesor utiliza el siguiente algoritmo en su demostración; tras señalar los datos, una recta *r* y un punto *P* genéricos, realiza los siguientes pasos: 1) Calcula la ecuación de la recta que pasa por *P* y es perpendicular a *r*; 2) Calcula el punto de intersección de *r* con la recta obtenida en el paso anterior; 3) Calcula la distancia entre dos puntos.

A partir de este momento el alumno utilizará la fórmula obtenida.

En la enseñanza tradicional este algoritmo es frecuentemente "ocultado" por el profesor. En una enseñanza significativa el manejo de dicho algoritmo por parte del alumno a través de ejercicios con distintos grados de concreción, funciona como un todo en el reforzamiento del conocimiento implícito contenido en las instrucciones y en la consecución del objetivo deseado, que puede llegar, si así se ha propuesto, a la obtención de la fórmula.

Tanto el algoritmo anterior como los *algoritmos ingenuos* citados son utilizados como *medio* para la conceptualización y para el cálculo (de las operaciones básicas, de las fórmulas).

Pero en muchos casos la situación planteada puede llevar a la obtención de algoritmos; es decir, los algoritmos se convierten así en *objetivos* a conseguir. Cuando se propone un ejercicio a resolver con un lenguaje de programación el alumno ha de elaborar los algoritmos correspondientes (y traducirlos a dicho lenguaje). El trabajo con *Logo* o con *Cabri* aboca en muchos casos a convertir los algoritmos en objetivos.

Esta clasificación de los algoritmos como *medio* o como *objetivo* no es disjunta; depende del tratamiento, de la situación que planteemos. Por ejemplo, el algoritmo que señalábamos para la distancia de un punto a una recta puede ser solicitado de una manera natural en el contexto del Cabri. Basta que, en dicho contexto, planteemos al alumno que calcule la distancia de un punto a una recta concretos.

6. La recursión

Con la introducción de las nuevas tecnologías nuevos contenidos y nuevos métodos solicitan un lugar en la enseñanza. La teoría de grafos, la de fractales, las técnicas de matemática discreta, la recursión como método, son ejemplos poderosos que están en la mente de todo profesor renovador. Vamos a centrarnos en la recursión. Para fijar ideas pondremos dos ejemplos.

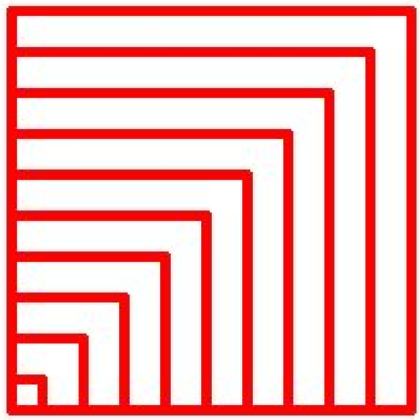
El primero va a consistir en un ejercicio dedicado a la obtención de la suma de *n* números naturales consecutivos. Tradicionalmente este ejercicio ha sido enfocado desde el tratamiento clásico de las progresiones geométricas. Pero veamos otra manera de enfocarlo. Supongamos que queremos sumar de 1 a 10. De manera simbólica podemos expresar el problema así:

Sumar_hasta 10 = 1+2+3+4+5+6+7+8+9+10 = 10 + Sumar_hasta 9.

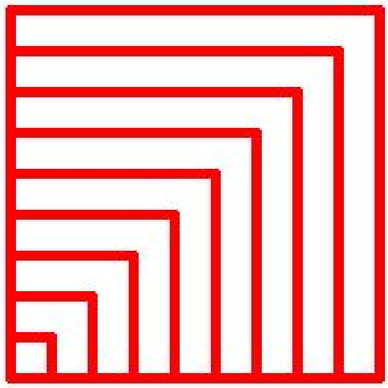
Conceptualmente hemos hecho algo evidente: para sumar hasta 10 sumamos a 10 el resultado de sumar hasta 9. Este es un ejemplo de recursión donde para obtener un cálculo definido utilizamos la propia definición (*ley de recursión*). Si seguimos avanzando en el cálculo según la ley de recursión, tendríamos que efectuar, a su vez, **Sumar_hasta 9,** para la que utilizaremos **Sumar_hasta 8** y así sucesivamente. ¿Hasta donde? Parece claro que pararemos (*caso base*) cuando lleguemos a 1, así: **Sumar_hasta 1 = 1**. Un programa informal que calcule la suma hasta n sería:

```
Sumar_hasta n
        Si n=1 devuelve 1 y Termina
        n + Sumar_hasta n-1
```

El segundo ejemplo lo vamos a extraer de Logo y es análogo al anterior. Observemos los cuadrados encajados que aparecen en la figura. Simbólicamente expresaremos esta construcción con el nombre **Cuadrados.encajados 10** (donde 10 representa el lado del cuadrado mayor).



cuadrados.encajados 10



cuadrados.encajados 9

La visión recursiva de esa figura es la siguiente: si dibujamos el cuadrado exterior lo que nos queda **es lo mismo** pero de lado 9 (menor). Así pues, podemos decir a una máquina que dibuje los cuadrados encajados así:

Cuadrados.encajados n

Si n=0 Termina

Cuadrado n

Encajar

Cuadrados.encajados n-1

La realización de algoritmos recursivos requieren una gran cantidad de espacio (memoria) y tradicionalmente se han sustituidos por algoritmos iterativos que realizan la misma tarea global (otros, como la construcción de árboles o el clásico Copo de nieve, tienen un tratamiento natural desde el punto de vista de la recursión mientras que de forma iterativa son mucho más complejos y artificiales). El mismo Pascal, quien inventase la primera máquina de calcular, abordó de forma recursiva el famoso *problema de los repartos*. Fermat trató este mismo problema explicitando las posibilidades; ambos inventaron el moderno cálculo de probabilidades, pero las técnicas de Pascal no se impusieron porque no existía la tecnología adecuada.

Hoy existen máquinas poderosas y, por supuesto, lenguajes recursivos como *Logo* que permiten su tratamiento de una manera natural. Es quizás el momento de introducir esta poderosa técnica conceptual.

UNIÓN
REVISTA IBEROAMERICANA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA

Marzo de 2005, Número 1, páginas 45 - 49
ISSN: 1815-0640

DIVULGAMAT,
Centro Virtual de Divulgación de las Matemáticas

Comisión de Divulgación R.S.M.E.

1. Introducción

Hoy en día, casi es una obviedad decir que las matemáticas constituyen un eje central de la historia de la cultura y de las ideas y que gracias a su universalidad, se aplican en las otras ciencias, de la naturaleza y sociales, en las ingenierías, en las nuevas tecnologías, en las distintas ramas del saber y en los diferentes tipos de actividad humana. Además, las matemáticas constituyen una herramienta básica para que la mayoría de las personas puedan comprender la sociedad de la información en la que viven, cada vez más compleja y tecnificada. Actualmente el desarrollo de toda sociedad, en particular, de la sociedad española, depende en gran medida del desarrollo científico y tecnológico, en el cual las matemáticas son parte fundamental. Por tanto, sería lógico esperar un incremento generalizado de la cultura matemática entre la población. Sin embargo, no parece que eso sea así según algunos estudios recientes, como los informes PISA, TIMSS, OCDE e INCE.

En general, podríamos decir que la mayoría de las personas no alcanzan el nivel de **alfabetización funcional** mínimo para desenvolverse en una sociedad moderna. Un gran número de personas encuentra las matemáticas difíciles y aburridas, e incluso se sienten inseguras respecto a su capacidad para resolver problemas sencillos o simples cálculos. Como afirma J. A. Paulos (1990) en su famoso libro titulado “El hombre anumérico”***, El anumerismo****, o incapacidad de manejar cómodamente los conceptos fundamentales de número y azar, atormenta a demasiados ciudadanos que, por lo demás, pueden ser perfectamente instruidos... de manera que es frecuente oír expresiones como: las matemáticas no son lo mío, yo soy de letras, no entiendo de números, etcétera”.* La paradoja parece pues estar servida: las matemáticas, uno de los conocimientos más valorado y necesario en las sociedades modernas altamente tecnificadas es, a la vez, uno de los más inaccesibles para la mayoría de la población.

Las anteriores reflexiones suponen un reto: hacer llegar de un modo asequible el sentido de la actividad matemática a un amplio segmento de la sociedad. En estos últimos años diversos colectivos y personalidades así lo han manifestado. Citaremos como ejemplo que en el Acta de la reunión de cierre del Comité del Año Mundial de las Matemáticas 2000, se aprobó que una de las labores prioritarias a desarrollar en el futuro era la popularización y divulgación de las Matemáticas, con la pretensión de colaborar en la mejora de la cultura científica de nuestra sociedad y en un cambio positivo en la imagen de las Matemáticas. Por último, comentar que en el **Programa Nacional de Matemáticas del Plan Nacional de Investigación, Desarrollo e**

Innovación Tecnológica 2004-2007 se dedica un apartado al **Fomento de la cultura científica y tecnológica**, mencionándose "*A pesar del desarrollo notable de las Matemáticas en nuestro país y de su creciente implicación en la ciencia, la tecnología y la economía, existe aún un problema evidente de comunicación al público de esta realidad que afecta en consecuencia a la falta de vocaciones científicas. Las medidas que aumenten la apreciación pública de las Matemáticas deberían pues ser priorizadas, como se ha puesto de manifiesto en la reciente ponencia sobre "La problemática de la enseñanza de las ciencias en la educación secundaria", desarrollada en el Senado en colaboración con las sociedades científicas*."

*Ante esta situación, **la Real Sociedad Matemática Española (RSME)** ha creado una **Comisión de divulgación**, con el fin de mejorar la actitud social hacia las matemáticas, desarrollar la cultura matemática de nuestra sociedad, deshacer el tópico de ciencias/humanidades, compartir su belleza, animar a las personas a que sean matemáticamente más activas, mostrar las matemáticas que existen en nuestro entorno, aprendiendo a mirar la realidad con ojos matemáticos, estimular el desarrollo de la actividad matemática, divulgar la investigación matemática que se desarrolla en nuestro país, incrementar la cultura matemática española y fomentar las vocaciones matemáticas. En resumen, se trata de aumentar la presencia de las matemáticas en la sociedad y de mejorar la actitud, percepción y valoración que ésta tiene de las matemáticas.*

2. Comisión de Divulgación

La **Comisión de divulgación** de la **REAL SOCIEDAD MATEMÁTICA ESPAÑOLA (RSME)** está formada por los siguientes miembros: Raúl Ibáñez (presidente), Alberto Bagazgoitia, José Ignacio Extremiana, Santiago Fernández, Fernando Fouz, Mikel Lezaun, Vicente Liern, Pilar Moreno, Antonio Pérez, Lukas Rodríguez (webmaster) y Rosa María Ros.

Dicha comisión, tras analizar la situación en que se encuentra actualmente la divulgación matemática en España, ha diseñado una estrategia para desarrollar distintas actividades a medio y largo plazo. En particular, ha elaborado un plan de trabajo recogido en los proyectos ***DIVULGAMAT, Divulgación Matemática (2004 y 2005)***, del que el portal ***DIVULGAMAT*** es parte esencial y que describimos a continuación. Este proyecto ha sido posible gracias a la acción especial DIF2003-10145-E del Ministerio de Ciencia y Tecnología (2004), y continuará a lo largo del 2005 gracias a una acción especial del Ministerio de Educación y Ciencia.

3. Portal DIVULGAMAT

La página principal del portal DivulgaMAT, Centro Virtual de Divulgación Matemática, consta de tres zonas:

3.1. 1ª Zona, situada en la parte central

El objetivo de la misma es captar la atención de los visitantes a la página mediante **imágenes y fragmentos literarios relacionados con las Matemáticas**. Aquí, todos los meses aparecerán dos imágenes impactantes (esculturas, pinturas, edificios, imágenes generadas por ordenador, fotografías, imágenes históricas, sellos, etc.) que estén relacionadas con las Matemáticas, y además dos fragmentos literarios (poesía, novela, teatro,…) que contengan alusiones directas a diferentes aspectos de las Matemáticas. Todas estas imágenes y fragmentos se irán guardando en dos Históricos de imágenes y de fragmentos literarios, a los que se podrá acceder en cualquier momento.

3.2. 2ª Zona, situada visualmente en la parte izquierda de la página

El grueso de la información ofrecida en DivulgaMAT está ubicada en esta columna. Su contenido está distribuido en las siguientes secciones:

- **Retos Matemáticos.** Uno de los objetivos definidos en esta sección es animar al “público” a que tenga una relación **activa** con las matemáticas. Una de las formas, que aquí planteamos, para que realmente exista esa participación activa y de calidad es que los visitantes se enfrenten a una serie de retos matemáticos. Así, cada quince días se propondrán dos retos para que los lectores los trabajen y si lo creen interesante nos comuniquen sus dudas, reflexiones, soluciones, o incluso narren su experiencia a la hora de resolver el reto propuesto. En la quincena siguiente aparecerán las soluciones con los siguientes retos. Habrá dos tipos de retos: un problema de matemáticas más o menos elemental (del nivel de la enseñanza secundaria u obligatoria) y otro de un nivel de bachillerato o de primeros años de la universidad.
- **Historia de las Matemáticas.** Sin duda, este es uno de los apartados con mayor peso dentro de este portal, tanto por su contenido como por su trascendencia. En el mismo se podrán encontrar las siguientes subsecciones: *Biografías de matemáticos ilustres, Temas matemáticos, Obras clave en la Historia de las Matemáticas, Las Matemáticas en diferentes culturas, Artículos de las secciones “Historia” y “Mirando hacia atrás” de La Gaceta de la RSME, Historia de las Matemáticas a través de la imagen, Biografías de matemáticos españoles, Recuperando la memoria: La Gaceta Matemática 1949-1982*.
- **Publicaciones de divulgación.** Uno de los grandes problemas con que se encuentran las publicaciones de tipo divulgativo o didáctico en nuestro país es que no llega información de las mismas a la sociedad. Por ejemplo, rara vez los medios de comunicación hacen reseñas o comentan las publicaciones relacionadas con las matemáticas. Por ello, en esta sección vamos a realizar bases de datos con información de publicaciones en formato libro, vídeo, revista y artículos de periódicos, con contenidos divulgativos de diferentes niveles. En estas bases de datos se dará información precisa de las publicaciones, así como reseñas críticas de las mismas. En la parte dedicada a la prensa contaremos con una sección “un matemático lee el periódico”.
- **Textos on-line.** En esta sección se podrán encontrar textos matemáticos, en formatos de fácil utilización como por ejemplo ficheros pdf, inéditos o que han

tenido una difusión muy reducida o efímera. Estos textos serán cursos, seminarios, conferencias, premios culturales o de divulgación, lecciones inaugurales, discursos de las academias, jornadas matemáticas, etc.

- **Exposiciones Virtuales.** Una forma interesante y atractiva de divulgar las Matemáticas es mediante la organización de exposiciones. La belleza de las imágenes que conforman la exposición, tienen como objetivo captar la atención del público con la pretensión de que este se interese por lo que está viendo. De esta manera, las matemáticas van apareciendo de forma natural a través de la propia imagen, del objeto expuesto o del texto que les acompaña. El interés por las Matemáticas relacionadas con la exposición va surgiendo de forma espontánea en el público que sin darse cuenta está pidiendo más explicaciones, más material,… Esta sección está formada por cinco series de exposiciones, que se irán renovando periódicamente, aunque seguirán guardándose las viejas exposiciones de cada sección. Los títulos de estos apartados son: *Arte y Matemáticas*, *Fotografía y Matemáticas*, *Libros matemáticos, Exposiciones con Historia*, *La Exposición de…*
- **Cultura y Matemáticas.** Aquí se pretende mostrar y explicar de forma sencilla y atractiva la presencia de las Matemáticas en otras manifestaciones culturales. Para este año se están organizando ya las siguientes subsecciones: *Las Matemáticas en la Ciencia-Ficción, Música y Matemáticas, El Rincón Matemágico, Matemáticas y Cine, Matemáticas y Teatro, Matemáticas con Papiroflexia, Juegos,…*
- **Érase una vez… un problema.** Estos cuentos con problemas, o estos problemas contados, han sido escritos con la intención de entretener y hacer pensar tanto a aquellos que se escudan en que son “de letras” para justificar su rechazo hacia las matemáticas, como a aquellos “de ciencias” que están convencidos de que las matemáticas tienen que ser muy serias, con el riesgo consiguiente de convertirlas en áridas, como a todo quien pueda estar interesado en divertirse un poco. Queremos demostrar que letras y números no están reñidos, como se comprobará en estos “cuentos problemáticos”, a los que hemos intentado añadir, además, una buena dosis de humor.
- **Matemáticas en Acción.** En esta sección encontraréis información, artículos o imágenes sobre el concurso para profesores “Física + Matemáticas en Acción”, así como un apartado de experimentos para realizar en el aula y en casa, para aprender Matemáticas con ellos, y creación de recursos didácticos innovadores.
- **Recursos didácticos de Matemáticas.** Uno de los objetivos de este portal es crear una guía comentada de recursos didácticos en la que profesores (de primaria, secundaria y universidad), estudiantes y aficionados a las matemáticas puedan encontrar materiales de aprendizaje o autoaprendizaje de las matemáticas. A corto plazo esta sección tendrá tres secciones: Recursos Didácticos en Internet, Recursos para el aula de Matemáticas y Juegos (Juegos como materiales didácticos y Juegos de Estrategia).
- **Enlaces de interés.** En esta sección se dará un listado de interesantes enlaces relacionados con las matemáticas, prestando especial atención a las páginas web de contenido divulgativo o didáctico. Cada una de las páginas vendrá acompañada de un comentario crítico realizado por la comisión de divulgación, así como una pequeña descripción de sus contenidos. Los enlaces estarán clasificados por su temática.

- **Las Matemáticas en…** En esta sección, en la que estamos trabajando, se explicará la aplicación de las matemáticas en otras profesiones (arquitectura, ingeniería, economía, medicina, agricultura,…).

3.3. 3ª Zona, situada visualmente en la parte derecha de la página

Actualmente consta de los siguientes apartados:

- **Sorpresas Matemáticas**. Esta sección de DivulgaMAT pretende poner a disposición del visitante pequeñas joyas matemáticas de rápida lectura. Como su propio nombre indica, Sorpresas Matemáticas es una sección donde el visitante nunca estará seguro de lo que allí aparecerá, aunque eso sí, serán pequeñas sorpresas, interesantes y cautivadoras. Entre estas sorpresas tendremos anécdotas de matemáticos, curiosidades, citas con contenido matemático, chistes matemáticos, acertijos, caricaturas, ilusiones y paradojas, demostraciones sin palabras,…
- **Quienes somos**. En este apartado aparecen los miembros de la Comisión de Divulgación de la RSME, junto con una carta de presentación en la que se hace un llamamiento a la comunidad científica española para que colabore en este interesante proyecto.
- **Sugerencias.** Ésta es una página interactiva, por lo que dispone de un sencillo formulario que facilita que los lectores envíen sus sugerencias, ideas, críticas,…
- **Buscador.** La página web DivulgaMAT cuenta en su página inicial con un buscador que permitirá al visitante localizar cualquier materia en la que esté interesado. Pensamos que el buscador es una herramienta imprescindible para toda página web, de gran valor para el visitante.
- **Noticias.** En este espacio se pretende difundir las noticias matemáticas o con contenido matemático. Aquí caben desde noticias relacionadas con la investigación matemática pero susceptibles de tener una repercusión social (al estilo de la demostración del teorema de Fermat), pasando por premios que se concedan a matemáticos o a obras matemáticas, hasta noticias con un marcado tono divulgativo.
- **Eventos.** Siguiendo con la filosofía de la información, en esta sección se recogerán y se acercarán a la comunidad científica y a la sociedad en general los eventos de carácter divulgativo, didáctico,… que se celebren en España. Desde aquí animamos a la colaboración para que se nos remita y así podamos difundir las convocatorias de este tipo de eventos.

Para terminar, como antes hemos mencionado, el portal DivulgaMAT que acabamos de presentar no es la única realización que se ha propuesto llevar a cabo la Comisión de Divulgación de la Real Sociedad Matemática Española. En un futuro no muy lejano daremos cumplida información del desarrollo de esas otras actividades.

Dirección Página WEB de Divulgamat: www.divulgamat.net

UNIÓN
REVISTA IBEROAMERICANA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA

Marzo de 2005, Número 1, páginas 51 - 52
ISSN: 1815-0640

Dinamización matemática

Departamento de Matemáticas

Instituto de Enseñanza Secundaria Viera y Clavijo (La Laguna, Tenerife, España)

En esta sección pretendemos presentar ideas que permitan crear un ambiente favorable hacia las matemáticas en los centros educativos. No se trata de que en cada uno se tengan que desarrollar las ideas que se vayan presentando sino que los profesores y los departamentos sepan que cuentan con un conjunto de posibles iniciativas que pueden llevarse a cabo y atender así a las diversas circunstancias que se presentan en los centros a lo largo del curso o de los años, como puede ser el Día Escolar de las Matemáticas, semanas culturales, ciclos de actividades, exposiciones, salidas pedagógicas, etc.

El sistema solar

Si en el centro escolar se dispone de un trozo de vía o pasillo largo (en torno a cien metros), entonces tiene la posibilidad de construir, pintándolo, un sistema solar.

Para ello necesita aplicar dos escalas. Por un lado, el tamaño de la vía establece la escala de distancias. Por ejemplo, si tiene un tamaño de 105 metros, entonces la distancia media del Sol a Plutón, que son 5 946 millones de kilómetros, marca la escala a la que hay que colocar los demás planetas. Basta una sencilla regla de tres. Así, por ejemplo, como la distancia del Sol a Urano es de 2 870 millones de kilómetros, la regla de tres nos dice que entonces este planeta hay que ponerlo a 50.6 metros de donde se ha colocado el Sol. En el caso de Mercurio, habrá que separarlo un poco para que no se confunda con el Sol…

En cuanto a fijar la escala para determinar de qué tamaño hay que hacer el círculo que represente a cada uno de los planetas y al propio Sol, conviene decidir el diámetro que se va a dar al círculo de Júpiter que, con sus 142 796 kilómetros de diámetro, es el más grande de los planetas. Para obtener luego el tamaño del diámetro de los demás planetas se realizan otras sencillas reglas de tres. Un tamaño apropiado puede ser entre un metro y medio y dos de diámetro. Suponiendo que se le dé metro y medio, entonces Venus, que tiene 12 103 kilómetros de diámetro, será un círculo de 12´7 centímetros de diámetro.

Obviamente, el Sol es un círculo demasiado grande para pensar en pintarlo. En este caso, se dibuja y pinta tan solo un segmento circular cuyo tamaño dependerá principalmente del sitio en el que haya que pintarlo. Al lado de cada planeta se dibujará y pintará su símbolo para identificarlo. A Saturno se le colocará su característica corona, y así se contemplarán todos los detalles posibles (color, satélites, etc.). No olvidarse de los Asteroides entre Marte y Júpiter…

¿Con qué material hacerlo? No tiene por qué ser caro. Incluso puede salir gratis para el centro si se consiguen botes de la pintura que utiliza el Ayuntamiento (la municipalidad) para poner las señales de tráfico. Tiene la ventaja, además, de que es una pintura preparada para poder ser pisoteada sin que sufra demasiado…

¿Metodología? Lo ideal es formar un equipo de alumnos y alumnas para hacer la investigación de todos los datos que se necesitan para plasmar el sistema solar en el sitio elegido.

Hay posibilidades de ir un poco más allá y designando un equipo para cada planeta de forma que haga una memoria consultando en la biblioteca o Internet. Hacer en cartulina negra y en grande el símbolo de cada planeta para colocarlos en el tablón de anuncios o lugares similares. Hacer una esfera con algún material posible. Como se ve, las posibilidades se pueden extender hasta donde se quiera dependiendo del nivel de los alumnos, del tiempo de que se dispone, de la imaginación de los equipos que se formen, etc.

Nombre	Distancia al Sol (Millones km)	Diámetro (km)
Sol		1 390 000
Mercurio	57.9	4 892
Venus	108.2	12 103
Tierra	150	12 756
Marte	227.9	6 794
Asteroides	330 – 480	
Júpiter	778	142 796
Saturno	1 427	120 000
Urano	2 870	51 800
Neptuno	4 496	49 500
Plutón	5 946	3 500

UNIÓN
REVISTA IBEROAMERICANA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA

Marzo de 2005, Número 1, página 53
ISSN: 1815-0640

Sistemas educativos

El objetivo principal de esta sección es dar a conocer los distintos sistemas educativos del ámbito iberoamericano haciendo un estudio especial de la situación de las matemáticas. De esta forma podremos ir acumulando una información que nos será útil cuando intentemos reflexionar sobre el papel de las matemáticas en la formación de nuestros jóvenes. Podremos tener constancia de cuáles son las previsiones oficiales en los distintos niveles educativos, cuál es la estructura de la educación desde cero hasta la edad de pasar a la universidad o al mundo del trabajo, cuántos años tiene la enseñanza obligatoria en cada lugar, cuáles son los contenidos concretos previstos en cada nivel…

Estos reportajes serán encargados a personas cualificadas de cada una de las sociedades de la FISEM a quienes agradecemos la colaboración que van a prestar y que, sin duda, va a contribuir a un mejor conocimiento mutuo y ¡quién sabe! si tal vez para empezar a establecer una coordinación entre todos para compartir materiales, esperanzas y anhelos.

Empezamos con Bolivia y justo es que agradezcamos a la Sociedad Boliviana de Educación Matemática y, en especial, a su Presidenta la Profesora Begoña Grigoriu, haber aceptado abrir el camino. Pensamos que su trabajo es magnífico y que señala un esquema para las demás sociedades que, obviamente, tienen absoluta libertad para enfocarlo y desarrollarlo.

UNIÓN
REVISTA IBEROAMERICANA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA

Marzo de 2005, Número 1, páginas 55 - 88
ISSN: 1815-0640

Sistemas educativos

La Educación Matemática en Bolivia

Begoña Grigoriu
SOBOEDMA

1. Bolivia (ubicación geográfica)

Bolivia es un país que se ubica el centro de Sudamérica. Limita al norte y el este con Brasil, al sudeste con Paraguay, al sur con Argentina, y al oeste con Chile y Perú. Su extensión territorial es de 1 098 581 kilómetros cuadrados. Su población alcanza alrededor de 8 millones de habitantes.

La pirámide poblacional muestra que el 56% de los habitantes son menores de 25 años.

DESCRIPCIÓN	TOTAL	EXPRESADO EN	PERÍODO DE REFERENCIA
Tasa de analfabetismo (Para la población de 15 o mas años)	12,93	Porcentaje	Sep 2001(p)
Área urbana	6,24	Porcentaje	Sep 2001(p)
Área rural	25,17	Porcentaje	Sep 2001(p)
Promedio de escolaridad (De la población de 19 años y mas)	7,57	**Años**	Sep 2001(p)
Cobertura bruta de matriculación	65,91	Porcentaje	2000
Cobertura bruta de matriculación en el nivel inicial	32,63	Porcentaje	2000
Cobertura bruta de matriculación en el nivel primario	86,98	Porcentaje	2000
Cobertura bruta de matriculación en el nivel secundario	38,44	Porcentaje	2000
Tasa de efectivos	93,14	Porcentaje	2000
Tasa de promoción	88,22	Porcentaje	2000
Tasa de abandono	6,86	Porcentaje	2000
Relación alumno/docente	26,1	**Promedio**	2000
Tasa bruta de matriculación universitaria	3,83	Porcentaje	1998
Tasa de egreso aparente en la educación universitaria	7,21	Porcentaje	1998

Fuente: Instituto Nacional de Estadística 2001

Tabla 1.- Indicadores educativos generales.

Los datos de la **tabla 1** muestran los indicadores más importantes para caracterizar la situación del país en relación con la educación. Como puede apreciarse existe un porcentaje aparentemente bajo de población analfabeta, sin embargo el analfabetismo funcional incrementa este porcentaje al doble o triple.

Respecto a los abandonos, sólo toman en cuenta a aquellos que desertan definitivamente del sistema escolar, no considera los abandonos temporales, que pueden abarcar períodos de incluso varios años.

Descripción	2002		
	Total	Hombres	Mujeres
BOLIVIA	**3.094.833**	**1.591.468**	**1.503.365**
Educación Pre Escolar	5,38	5,23	5,55
Primaria	61,34	62,58	60,03
Secundaria	17,94	17,95	17,94
Educación de Adultos	1,45	1,30	1,60
Normal	0,54	0,50	0,57
Universidad (Licenciatura y Post-grado)	9,47	8,96	10,00
Técnico (Medio y Superior)	2,58	2,47	2,70
Colegio Militar o Academia Policial	0,07	0,12	0,02
Otros cursos	1,23	0,90	1,59
ÁREA URBANA	**2.111.464**	**1.072.877**	**1.038.587**
Educación Pre Escolar	5,46	5,18	5,74
Primaria	53,60	56,15	50,97
Secundaria	19,95	19,08	20,86
Educación de Adultos	1,46	1,21	1,71
Normal	0,58	0,46	0,70
Universidad (Licenciatura y Post-grado)	13,63	13,07	14,22
Técnico (Medio y Superior)	3,69	3,59	3,80
Colegio Militar o Academia Policial	0,10	0,18	0,03
Otros cursos	1,53	1,09	1,98
ÁREA RURAL	**983.369**	**518.591**	**464.778**
Educación Pre Escolar	5,23	5,33	5,11
Primaria	77,97	75,90	80,29
Secundaria	13,63	15,60	11,42
Educación de Adultos	1,42	1,47	1,35
Normal	0,44	0,58	0,29
Universidad (Licenciatura y Post-grado)	0,52	0,47	0,57
Técnico (Medio y Superior)	0,19	0,14	0,25
Colegio Militar o Academia Policial			
Otros cursos	0,61	0,49	0,73

Fuente: Instituto Nacional de Estadística 2004

Tabla 2.- Distribución de los estudiantes entre los diferentes niveles.

Como puede apreciarse en la **tabla 2**, existen notables diferencias entre la población urbana y rural, las cuales deberían tomarse en cuenta a la hora de formular políticas educativas para garantizar **equidad de oportunidades**.

En el año 1994 se promulga la Ley de Reforma Educativa que plantea a lo largo de un proceso progresivo y continuo la transformación de los procesos de enseñanza aprendizaje en los diferentes niveles**.**

2. El currículo de la Reforma Educativa

La Reforma Educativa boliviana, define el currículo como “la organización de procesos formativos desarrollada, por el sistema educativo, en los que interactúan alumnos. Profesores, padres de familia y comunidad en general, en un marco institucional que posibilita la satisfacción de las necesidades de aprendizaje planteadas por la sociedad”.

Desde este enfoque, el currículo se constituye en un espacio democrático y equitativo, que permite el desarrollo de aprendizajes, que articulan el conocimiento y los valores locales, con el conocimiento y valores que son patrimonio de la humanidad; y que son requeridos para el desempeño social y el mejoramiento de la calidad de vida. Se aspira a la formación integral del estudiante, para que se desenvuelva competentemente, en una sociedad diversa, siendo capaz de proyectar su identidad y asumir el desafío de la **unidad en la diversidad**.

La Escuela Primaria, por los procesos formativos generados a través del desarrollo del currículo, se transforma en una institución en la que los procesos de enseñanza y de aprendizaje son permanentemente analizados y mejorados, para asegurar su pertinencia frente a las necesidades de la sociedad boliviana. Es decir, **la escuela se convierte en una institución abierta al cambio.**

Es preciso anotar que estos enunciados están aun más en un terreno de aspiraciones que de realidades.

Enfoque curricular

El enfoque curricular del Nivel Primario tiene corno principios **la atención a la diversidad, la satisfacción de necesidades básicas de aprendizaje de la población y la atención a los problemas emergentes de la sociedad.** En respuesta a estos principios, el enfoque adopta una **orientación hacia el desarrollo de competencias, la formación laboral, la modalidad bilingüe y la integración de niños con necesidades educativas especiales.**

Los principios del enfoque curricular

Un currículo que atiende la diversidad

El principio de atención a la diversidad exige dar respuesta educativa a todos los individuos que conforman la sociedad boliviana. Educar en la diversidad supone crear un ambiente educativo donde no se excluya ni se discrimine a nadie.

Tanto en la concepción del currículo como en su diseño, se considera la diversidad desde dos perspectivas:

- **Cultural y lingüística**, que caracterizan nuestro país, y son asumidas como un potencial para el desarrollo de las capacidades de los niños y que se traduce en el planteamiento de una educación que reconoce y valora las diferentes manifestaciones culturales, es decir, una educación intercultural en modalidades monolingüe y bilingüe.

- **Individual,** referida a las características particulares de cada individuo, como son el desarrollo de las capacidades y la motivación propia en 1a manifestación de los intereses e inquietudes. Todas las personas tienen necesidades diferentes, y entre ellas, algunas tienen necesidades educativas especiales, que requieren una atención oportuna y adecuada.

Un currículo que atiende las necesidades básicas de aprendizaje

Necesidades básicas de aprendizaje en el enfoque de la reforma, son aquellos requerimientos fundamentales que la sociedad demanda a la educación, para que las personas desarrollen aprendizajes generadores de actitudes, conocimientos, habilidades y destrezas, que les permitan solucionar problemas y enfrentar desafíos exigidos por el entorno social y el medio ambiente, para así alcanzar el bienestar propio y contribuir al desarrollo social y económico del país.

Un currículo que atiende problemas emergentes en la sociedad

Las principales dificultades detectadas en la sociedad boliviana y priorizadas para su abordaje en el proceso educativo de la escuela, se refieren al manejo inadecuado de los recursos naturales, el desconocimiento de la importancia de una vida plena de salud, la falta de una sexualidad sana, responsable y respetuosa; la discriminación y la desigualdad de oportunidades entre géneros; los bajos niveles de participación popular que inciden la debilidad de la democracia.

Un currículo orientado al desarrollo de competencias

Este tipo de currículo supera al basado en objetivos porque:

- Reemplaza la rigidez y la prescripción por la flexibilidad y apertura curricular.
- Prioriza los procesos de aprendizaje y no solamente sus logros.
- Rompe con la tradicional fragmentación entre los contenidos cognitivos, procedimentales y actitudinales, al proponer la formación integral del alumno.
- Entiende los aprendizajes como procesos que se dan a lo largo de la vida, permitiendo a las personas mejorar progresiva y permanentemente.

- Genera en los educandos la necesidad de construir sus conocimientos y actitudes a mediano y largo plazo y no permite que sean simples receptores de instrucciones e información.
- Permite al maestro tener mayor autonomía en las decisiones que toma, para encaminar el hecho educativo.
- Exige del docente promover la discusión, investigación, trabajo en equipo para la reflexión permanente sobre sus aprendizajes.

Para una mejor comprensión del contexto en el cual deben aplicarse los postulados de la Reforma, se presenta la Estructura del Sistema Educativo Boliviano en la **tabla 3**.

<table>
<tr><th>EDAD</th><th>NIVEL</th><th colspan="2">TIPO DE APRENDIZAJE</th><th>OBLIGATO-RIEDAD</th><th>DESTINO</th></tr>
<tr><td>18 y más</td><td>Educación Superior</td><td colspan="2">Universidad
Formación Docente
Formación Técnica</td><td rowspan="5">EDUCACIÓN POST OBLIGATORIA</td><td rowspan="5">MUNDO LABORAL</td></tr>
<tr><td>17</td><td rowspan="4">Educación Secundaria</td><td colspan="2">Segundo Ciclo</td></tr>
<tr><td>16</td><td>Aprendizajes científico-humanísticos</td><td>Aprendizajes técnico-profesionales</td></tr>
<tr><td>15</td><td colspan="2" rowspan="2">Primer ciclo
(Aprendizajes tecnológicos)</td></tr>
<tr><td>14</td></tr>
<tr><td>13</td><td rowspan="8">Educación Primaria</td><td colspan="2" rowspan="2">Tercer ciclo
(Aprendizajes aplicados)</td><td rowspan="8">EDUCACIÓN OBLIGATORIA</td><td rowspan="14"></td></tr>
<tr><td>12</td></tr>
<tr><td>11</td><td colspan="2" rowspan="3">Segundo ciclo
(Aprendizajes esenciales)</td></tr>
<tr><td>10</td></tr>
<tr><td>9</td></tr>
<tr><td>8</td><td colspan="2" rowspan="3">Primer ciclo
(Aprendizajes básicos)</td></tr>
<tr><td>7</td></tr>
<tr><td>6</td></tr>
<tr><td>5</td><td rowspan="6">Educación Inicial</td><td colspan="2" rowspan="2">Segundo ciclo
(Aprendizajes sistemáticos iniciales)</td><td rowspan="6"></td></tr>
<tr><td>4</td></tr>
<tr><td>3</td><td colspan="2" rowspan="4">Primer ciclo
(Primeros aprendizajes)</td></tr>
<tr><td>2</td></tr>
<tr><td>1</td></tr>
<tr><td>0</td></tr>
</table>

Tabla 3.- Estructura del sistema educativo boliviano.

En relación con dicha estructura trataremos de expresar la importancia relativa que se asigna a la educación matemática a través del tiempo de clases que se destina a la misma. Véase la **tabla 4.**

Nivel	Ciclo	Horas de clase por semana	Horas de clase matemáticas	Porcentaje
Superior		Variable según carreras	Variable según carreras	
Secundario	Segundo	36	4	11%
	Primero	36	5	14%
Primario	Tercero	36	6	20%
	Segundo	30	10 (aprox)	33%
	Primero	30	10 (aprox)	33%
Inicial	Variable según establecimiento			

Tabla 4.- Tiempo destinado a la enseñanza matemática en los diferentes niveles y ciclos

A pesar de que la Matemática es considerada a lo largo de todos los períodos como una de las materias troncales dentro del currículo del Sistema Educativo Boliviano, por lo que se le asigna una adecuada carga horaria, sin embargo la concepción de la enseñanza de la matemática, determina que en vez de ser un tronco vivo, es un tronco derribado en medio del camino, a manera de barrera que interfiere el avance de los estudiantes en su proceso de aprendizaje.

Nivel	Alumnos	Profesores	Relación alumnos /profesor de matemática
Primario	1,578,086	35,523	44
Secundario	341,235	1,207	283

Fuente: Ministerio de Educación

Tabla 5.- Número de profesores de matemáticas en relación al número de alumnos por nivel (Promedios nacionales)

Esta visión cuantitativa (**tabla 5**) no refleja de una manera precisa la importancia asignada a la matemática, pues la misma está determinada por factores que tienen que ver con el interés y capacidad del profesor en el nivel primario y con la orientación del establecimiento en el nivel secundario.

Nivel	Profesores		Normalistas		Interinos		Universitarios	
Primario	35,523	100%	23,450	66%	8,177	23%	3,896	11%
Secundario	1,207	100%	904	75%	253	21%	50	4%

Fuente: Ministerio de Educación

Tabla 6.- Profesores según tipo de formación

La **tabla 6** muestra que en el nivel que mayor importancia tiene en la formación matemática (el primario) es donde se presenta mayor improvisación de profesores, lo cual constituye un problema para la construcción de conceptos básicos y su aplicación en la resolución de problemas de la vida diaria. Este aspecto es aplicable tanto a los maestros interinos (empíricos) como a los formados en las universidades, quienes no tienen ningún conocimiento de didáctica.

La observación ha mostrado que los profesores empíricos son los más resistentes al cambio, pues su seguridad se fundamenta en la repetición de su propio aprendizaje. Además estos profesores son los menos interesados en la educación permanente, porque al no tener la formación básica, la capacitación complementaria no les representa posibilidad de ascenso en el escalafón docente, y la consecuente mejora de sus ingresos.

3. Competencias y contenidos por ciclo y nivel

Con la finalidad de completar la visión de la organización de la Educación Matemática dentro del Sistema Educativo Boliviano se presentan a continuación las competencias, indicadores y contenidos para los diferentes ciclos y niveles.

3.1. Competencias y contenidos del nivel primario

Competencias del primer ciclo de primaria

Competencias	Indicador	Indicador	Indicador	Indicador	Indicador
Identifica las características del sistema de numeración decimal y las utiliza para comunicar información cuantitativa de su entorno.	Cuenta y ordena colecciones de objetos y los representa en forma oral y escrita.	Lee y escribe números de hasta cuatro cifras.	Identifica regularidades en la formación de números de dos, tres y cuatro cifras.	Relaciona la posición de una cifra con su valor cuando ordena o cuantifica cantidades.	Resuelve problemas cotidianos en los que aplica estrategias de conteo y comparte sus soluciones con sus compañeros.
Utiliza apropiadamente las operaciones aritméticas básicas en la resolución de problemas matemáticos que relaciona con situaciones reales y significativas.	Realiza cálculos mentales y escritos de adición y sustracción con cantidades de una y dos cifras.	Compone y descompone cantidades numéricas de hasta cuatro cifras apoyándose en el valor de posición de éstas.	Verifica los resultados de los cálculos operativos que realiza en la resolución de problemas, utilizando diferentes recursos.	Utiliza estrategias no convencionales en las operaciones con números naturales que le ayuden a entender los algoritmos.	Reflexiona sobre los diferentes significados que tienen las operaciones con números naturales en la resolución de problemas cotidianos y los comunica de manera espontánea.
Relaciona su lenguaje cotidiano con el lenguaje simbólico de la matemática que utiliza en procesos de resolución de problemas.	Interpreta el significado de la información numérica del entorno y produce escrituras numéricas.	Representa situaciones cotidianas y situaciones matemáticas a través de simbología matemática.	Utiliza símbolos matemáticos convencionales cuando resuelve cálculos operativos.	Relaciona el lenguaje oral y escrito de los números con sus representaciones matemáticas.	Reflexiona sobre el valor de la notación matemática para interpretar y comunicar situaciones cotidianas y matemáticas.

Competencias	Indicador	Indicador	Indicador	Indicador	Indicador
Utiliza algunas estrategias de estimación para encontrar soluciones aproximadas a problemas cotidianos y matemáticos.	Explora estrategias de estimación cuando realiza comparaciones.	Reconoce las situaciones cotidianas en las que es conveniente realizar estimaciones.	Anticipa resultados en el cálculo de operaciones sencillas utilizando estrategias de agrupación.	Da respuestas aproximadas a los problemas cotidianos, matemáticos y comprueba la pertinencia de sus resultados.	Reflexiona sobre las diversas estrategias de estimación que utiliza en el cálculo de operaciones y la resolución de problemas y las comparte con sus compañeros.
Reconoce regularidades sencillas en sucesiones de números, formas y figuras geométricas en situaciones matemáticas y de su entorno.	Observa regularidades en sucesos, formas, dibujos y conjuntos de números y las comunica de manera espontánea.	Reconoce patrones en las regularidades que se dan en su entorno y crea otros ayudándose en la observación de los mismos.	Identifica regularidades en series numéricas para nombrar, leer y escribir números.	Clasifica figuras y números a partir del descubrimiento de regularidades.	Explica las relaciones que se dan en los patrones y formula conjeturas sobre esas relaciones.
Utiliza unidades de medidas no convencionales y convencionales cuando soluciona problemas cotidianos que requieren establecer magnitudes.	Realiza comparaciones entre objetos para determinar su longitud, capacidad y peso.	Compara y establece el número de veces que la unidad de medida no convencional o convencional está contenida en el objeto.	Utiliza unidades de medida propias y convencionales para medir longitudes capacidades y peso.	Efectúa mediciones y expresa por escrito con números el resultado de esas mediciones.	Reflexiona respecto al resultado de la medición y los errores producidos en el acto de medir.
Se orienta utilizando referentes espaciales y temporales cuando ubica, describe y representa posiciones de objetos y personas en situaciones que así lo requieren.	Ubica personas y objetos en el espacio con relación a su cuerpo, a diferentes puntos de referencia y a algunas indicaciones de posición.	Se desplaza a los diferentes puntos de referencia y a algunas indicaciones de dirección y sentido.	Describe la posición y los movimientos de personas y objetos en el espacio, en forma oral y gráfica.	Construye croquis, planos y maquetas de su entorno utilizando elementos conocidos como puntos de referencia.	Resuelve problemas de ubicación y desplazamiento al representarlo en croquis, planos y maquetas.
Identifica en el entorno figuras y cuerpos geométricos y los representa mediante dibujos y modelos tridimensionales considerando sus características.	Establece comparaciones entre las formas y figuras geométricas que reconoce en los objetos del entorno.	Observa las semejanzas y diferencias entre las figuras y cuerpos geométricos con características similares y las clasifica.	Reconoce que las redes geométricas forman diferentes cuerpos geométricos cuando las arma y desarma.	Reconoce las características de las figuras y cuerpos geométricos y las toma en cuenta en la resolución de problemas.	Anticipa los resultados de las diferentes combinaciones que realiza de figuras y cuerpos geométricos.
Organiza información que obtiene de su entorno y las comunica mediante algunas representaciones estadísticas.	Recolecta y clasifica de acuerdo a sus atributos la información que obtiene de su entorno.	Utiliza la función del número como un recurso para organizar la información.	Crea registros personales para comunicar la información recolectada.	Representa en tablas y gráficos la información recolectada.	Lee e interpreta la información contenida en tablas gráficos, asumiendo una posición crítica.

Contenidos del primer ciclo de primaria

Números y operaciones

- Los números y sus funciones en contextos cotidianos.
- Comparación y ordenación de colecciones por la cantidad de elementos.
- Valor de posición de una cifra en números de hasta cuatro cifras.
- Estrategias para estimar y cuantificar elementos de un colección en forma oral y escrita:
  - Por correspondencia.

   - Por agrupación.
   - A simple vista.
   - Otros.
- Lectura y escritura de números de hasta cuatro cifras.
- Criterios para comparar y ordenar números:
   - Ordenarlos de menor a mayor y viceversa.
   - Comparar pares de números.
   - Ordenar tríos de números.
   - Intercalar números que faltan en una secuencia ordenada.
   - Otros.
- Conteos y desconteos a *partir* de cualquier número dado:
   - De 2 en 2 empezando por *5.*
   - De 7 en 7 empezando por 3.
   - Empezando de 100, descontar de 8 en 8.
   - Otros.
- Estrategias para identificar números en situaciones que involucren conteos y medidas (temperaturas ambientes, distancias, duraciones, etc.)
- Regularidades en la serie numérica.
   - En los nombres de los números.
   - En la lectura y escritura de los números.
   - En los conteos o desconteos en intervalos regulares de la secuencia numérica (de 5 en 5, de 10 en 10, etc.)
- Representación de los números en la recta numérica.

Operaciones con números naturales

- Símbolos convencionales en la escritura de las operaciones.
- Combinaciones aditivas básicas (7+3,6+4).
- Estrategias para desarrollar el cálculo mental con números de una cifra, de dos cifras, etc.
   - Descomposiciones aditivas (7 + 8 = 7 + 3 + 5).
   - Utilizar datos conocidos (7 + 3, 70 + 30...).
   - Construir y consultar tablas de adición y sustracción.
- Diferentes significados de la adición y sustracción en la interpretación, resolución y formulación de problemas:
   - Juntar dos o más colecciones.
   - Separar una parte de una colección.
   - Agregar objetos a una colección
   - Quitar objetos de una colección.
   - Comparar dos colecciones.
- Composición y descomposición de números en forma aditiva.
- Estrategias no convencionales en la resolución de operaciones (adición y sustracción) y algunos algoritmos convencionales.
- Diferentes significados de la multiplicación en la interpretación, resolución y formulación de problemas.

  - Agregar varias veces una determinada cantidad.
  - Relacionar la multiplicación con la proporcionalidad (triple, doble, etc.).
  - Organizaciones rectangulares.
  - Problemas de combinación.
- Situaciones de reparto equitativo en la resolución de problemas.
- Estrategias de verificación y control de resultados mediante el cálculo mental y la estimación:
  - Con material concreto.
  - Con calculadora.
  - Otros.

Tratamiento de la información

- Recolección, registro y organización de información de su entorno.
- Lectura e interpretación de información contenida en gráficos simples.
- Interpretación y elaboración de listas, tablas y diagramas de barra.

Espacialidad y geometría

Orientación en el espacio

- Localización de personas y objetos en el espacio con relación a diferentes puntos de referencia e indicadores de posición.
  - Con referencia a sí mismo.
  - Referentes externos.
- Desplazamientos de personas en el espacio con relación a diferentes puntos de referencia.
  - Siguiendo instrucciones verbales y dando instrucciones verbales.
  - Utilizando registros gráficos.
  - Creando códigos.
- Desplazamientos de objetos en el espacio con relación a diferentes puntos de referencia.
- Interpretación y representación de posiciones y movimientos en el espacio, precisando:
  - Origen y meta del trayecto.
  - Dirección de avance.
  - Distancia a recorrer.
  - Cambios de dirección expresados como giros (dar vuelta a la derecha...).

Representación del espacio

- Representación de ubicaciones y trayectos mediante dibujos.
- Construcción y representación de formas geométricas bi y tridimensionales.
- Construcción de maquetas, planos y Croquis.

Formas y planos espaciales

- Relaciones de tamaño y forma en los espacios bi y tridimensional.
- Descripción y modelado de cuerpos geométricos:
  - Armado de cuerpos (con varillas, a partir de redes, con plegados y recortes).
  - Modelado.
- Semejanzas y diferencias entre cuerpos geométricos.
- Semejanzas y diferencias entre figuras geométricas.
- Las figuras geométricas y sus elementos (diagonal, vértices, lados, etc).
- Relaciones entre figuras geométricas:
  - Entre los lados de un polígono: igual medida, paralelismo y perpendicularidad.
  - Entre sus diagonales: diagonales de un cuadrado, diagonales de un rectángulo.
  - Otros.

Medida

Medidas convencionales y no convencionales:

- Comparación de magnitudes con unidades de medidas corporales.
- Comparación de magnitudes con unidades de medidas no convencionales y convencionales (de uso local)
- Principales unidades de medida del sistema métrico decimal (metro, kilómetro, litro, kilogramo, gramo...).
- Unidades de medida de tiempo (día, mes, año, hora, minuto)
- Unidades de medida de temperatura.
- Unidades de medida monetarias.
- Aproximación de medidas:
  - Estimación en el uso de las medidas de longitud, capacidad, peso y tiempo (convencionales y no convencionales).

Competencias del segundo ciclo de primaria

COMPETENCIAS	INDICADOR	INDICADOR	INDICADOR	INDICADOR	INDICADOR
Sistematiza las características del sistema de numeración decimal y las amplía en otros conjuntos numéricos para resolver problemas cotidianos y matemáticos sencillos.	Compone y descompone números de cuatro y más cifras e interpreta el valor de posición de cada una de ellas.	Representa las partes fraccionadas de un objeto o de una colección a través del lenguaje y símbolos matemáticos.	Utiliza las características del sistema de numeración decimal para relacionar las fracciones con los números decimales.	Explora las relaciones valor de posición que se dan en los números decimales entre sus partes entera y decimal.	Establece relaciones entre los números naturales, fraccionarios y decimales y las explica.

COMPETENCIAS	INDICADOR	INDICADOR	INDICADOR	INDICADOR	INDICADOR
Sistematiza estrategias matemáticas para realizar operaciones aritméticas en la resolución de problemas.	Realiza composiciones y descomposiciones de cantidades numéricas que faciliten el cálculo mental.	Utiliza estrategias propias y convencionales cuando realiza operaciones con números naturales.	Utiliza estrategias propias y convencionales cuando realiza operaciones con fracciones y números decimales.	Identifica y comunica los significados que tienen las operaciones aritméticas en la formulación y resolución de problemas.	Selecciona las técnicas más apropiadas para resolver problemas de cálculo: cálculo mental, cálculo escrito y con calculadora.
Reconoce la utilidad de la notación convencional para representar y comunicar matemáticamente algunas situaciones significativas.	Utiliza las reglas del sistema de numeración decimal para producir escrituras numéricas convencionales y comunicarlas.	Utiliza fracciones equivalentes como un recurso de notación para comunicar diferentes situaciones matemáticas.	Representa un número en sus diferentes formas equivalentes (fracción, decimal y porcentaje).	Representa situaciones cuantificables en modelos gráficos y numéricos.	Reflexiona sobre la importancia de la notación convencional para interpretar y comunicar matemáticamente situaciones cotidianas
Selecciona y emplea estrategias de estimación pertinentes para realizar cálculos aproximados en la resolución de problemas.	Anticipa resultados en el cálculo de operaciones o en la resolución de problemas y evalúa la pertinencia de la anticipación.	Relaciona el intervalo numérico estimado con el resultado obtenido.	Selecciona estrategias de estimación y reconoce cuándo es apropiado utilizarlas.	Utiliza diferentes estrategias para realizar cálculos mentales.	Argumenta las estrategias de estimación que utiliza en la resolución de problemas.
Identifica patrones y establece relaciones entre ellos para clasificar, organizar información y anticipar resultados.	Explora patrones numéricos y geométricos para determinar repeticiones, crecimiento o decrecimiento.	Elabora conjeturas sobre las reglas que sigue un patrón numérico y las verifica.	Utiliza patrones numéricos para resolver problemas de conteo que puedan generalizarse a otras situaciones numéricas.	Identifica los múltiplos y divisores de un número a partir de la exploración y descripción de patrones.	Identifica las propiedades de los números a partir de las características que se establecen en las regularidades numéricas.
Selecciona y utiliza las unidades de medida y los instrumentos adecuados para resolver problemas de medición.	Reconoce la unidad de medida más pertinente en relación con lo que se quiere medir.	Realiza conversiones entre las unidades de medida más usuales de su entorno.	Utiliza diferentes instrumentos de medición en función del nivel de exactitud que se requiere.	Desarrolla procedimientos para obtener fórmulas que le permitan resolver problemas de medida.	Resuelve creativamente problemas de medidas de superficies irregulares y explica su procedimiento.
Representa diferentes espacios geográficos en modelos bi y tridimensionales y los interpreta cuando localiza lugares y se orienta espacialmente.	Identifica puntos de referencia para describir convencionalmente la posición y el movimiento de personas y objetos en un determinado espacio.	Interpreta planos y mapas de diferentes lugares de su entorno y de otros.	Utiliza algunas nociones de medida cuando representa espacios geográficos en maquetas, croquis y planos.	Utiliza códigos para comunicar ubicaciones y trayectorias en un plano o mapa.	Resuelve problemas de ubicación y desplazamiento en el espacio a partir del análisis de planos y mapas.
Analiza y relaciona propiedades y características de figuras y cuerpos geométricos y los representa gráficamente en la resolución de problemas.	Describe las características de las figuras y cuerpos geométricos a partir de su visualización.	Descubre relaciones entre las figuras y cuerpos geométricos para transformarlos y clasificarlos.	Observa las características de los objetos tridimensionales y los representa en el plano.	Establece relaciones de medida, paralelismo y perpendicularidad entre elementos de las figuras geométricas.	Representa gráficamente figuras y cuerpos geométricos considerando sus propiedades fundamentales.
Interpreta información estadística y la representa de diferentes formas para explicar y argumentar aspectos cuantitativos de su realidad.	Recoge datos de diferentes fuentes de información y los organiza utilizando criterios de clasificación sencillos.	Representa en diferentes tipos de gráficos los resultados obtenidos en la organización de datos.	Establece conclusiones y argumentos a partir de la información organizada.	Resuelve problemas de contexto que impliquen recoger, organizar, representar y analizar datos.	Fundamenta sus conclusiones basándose en el análisis de la información obtenida.

Contenidos del segundo ciclo de primaria

Número y operaciones

Números naturales

- De cuatro y más cifras.
- Conteos y comparación de colecciones.
- Valor de posición de una cifra en un número.
- Reglas del sistema de numeración decimal para la lectura y escritura de números.
- Composición y descomposición de números en forma aditiva y multiplicativa.
- Relaciones entre los números naturales: mayor que, igual que, menor que.
- Representación de diferentes intervalos de números naturales en la recta numérica.
- Estrategias para contar secuencias numéricas en forma ascendente y descendente:
  - de conteo directo.
  - aditivas o multiplicativas.
- Relaciones entre el conteo y su representación escrita (literal y numérica).

Regularidades y patrones.

- Regularidades en las sucesiones numéricas.
- Identificación del patrón de formación:
  - en sucesiones numéricas.
  - números figurados.
  - regularidades del sistema de numeración.
- Formulación y comprobación de conjeturas sobre la regla que sigue un patrón.
- Múltiplos y divisores.
- Múltiplos de un número e interpretación de sus factores como sus divisores.
- Números primos y compuestos:
  - descomposición de números en sus factores primos.
  - criterios de divisibilidad por 2, 3, 5, 9 y 10.

Operaciones con números naturales

- Diferentes significados de las operaciones en la formulación y resolución de problemas:
  - juntar dos o más colecciones, separar una parte de una colección, avanzar o retroceder en la recta numérica, etc.
  - adición iterada (repetida).

  - arreglos bidimensionales (rectangulares).
  - variación proporcional.
  - reparto, agrupación, distribución.
- Estrategias para efectuar cálculos mentales y escritos:
  - descomposiciones aditivas y multiplicativas.
  - cálculos desconocidos a partir de cálculos conocidos.
  - propiedades de los números y las operaciones.
  - construcción y consulta de tablas de adición y multiplicación.
- Estrategias para anticipar resultados:
  - redondeos de cantidades.
  - estimación en el cálculo de operaciones.
  - valoración de la respuesta anticipada.
- Algoritmos de las operaciones:
  - algoritmos no convencionales.
  - algoritmos convencionales.
  - uso de la calculadora.
- Relaciones inversas entre las operaciones aritméticas:
  - adición – sustracción.
  - multiplicación – división.
- Potenciación de números naturales:
  - potenciación como multiplicación iterada.
  - regularidades y propiedades de las potencias.
- Estrategias para la resolución de problemas mediante:
  - ensayo error.
  - problemas más simples.
  - problemas semejantes.
  - elección de la notación o representación adecuada.
  - experimentación con casos particulares.
  - suposición del problema resuelto.
- Fracciones y decimales.
- Diferentes significados y usos de la fracción:
  - como medida.
  - como la comparación de una parte con el todo continuo o discreto.
  - como porcentaje.
  - como razón.
- Fraccionamiento del entero:
  - en mitades: diferentes posibilidades.
  - en tercios, en cuartos, etc.
- Orden y comparación de fracciones sencillas.
- Representación de fracciones en la recta numérica.
- Familias de fracciones equivalentes.
- Operaciones con fracciones sencillas: cálculo mental con fracciones sencillas.

- Números decimales: usos de los números decimales (precios, medida, etc.)
- Extensión de las reglas del sistema de numeración decimal en la lectura y escritura de las fracciones en su forma decimal: valor de posición (décimos, centésimos y milésimos).
- Equivalencias entre los números fraccionarios y decimales.
- Relaciones entre números decimales y su representación en la recta numérica.
- Relaciones entre las fracciones decimales con denominador 10, 100 y 1000 y los décimos, centésimos y milésimos.
- Transformación de fracciones decimales a números decimales y viceversa.
- Operaciones con números decimales.
- Porcentajes sencillos en la resolución de problemas.
- Relaciones numéricas entre porcentajes, fracciones y decimales.

Tratamiento de la información

- Recolección de datos.
- Organización de la información obtenida.
- Representación en: tablas, diagramas y gráficos.
- Interpretación y argumentación de datos.

Espacialidad y geometría

Orientación en el espacio

- Desplazamiento y/o ubicación en diferentes sistemas de referencia:
  - puntos cardinales
  - sistemas de ejes coordenados
  - posición de objetos en el espacio bi y tridimensional

Formas planas y espaciales

- Modelados de cuerpos geométricos.
- Representación gráfica de cuerpos geométricos desde diferentes perspectivas:
  - Construcción de redes de cuerpos geométricos
- Semejanzas y diferencias entre cuerpos redondos: esferas, conos y cilindros.
- Semejanzas y diferencias entre poliedros y sus elementos: prismas, pirámides y otros.
  - Simetrías en figuras planas.
- Figuras poligonales y circulares en cuerpos geométricos y su representación en superficies planas.

- Lados, vértices y ángulos en figuras poligonales. Tipos de ángulos con referencia al ángulo recto:
  – ángulos agudos
  – ángulos obtusos
- Construcción de figuras y cuerpos geométricos con instrumentos geométricos.
- Caracterización de los lados y ángulos en los cuadriláteros: paralelogramos, trapecios, rombos, etc.
- Descomposición y composición de figuras planas Características de algunas figuras planas:
  – lados paralelos y perpendiculares
  – rigidez triangular, etc.
- Ampliación y reducción de figuras planas.

Representación del espacio

- Construcción de maquetas, planos y croquis.
- Planos de ámbitos urbanos y rurales.
- Códigos de información al interior de un plano.

Medida

- Medidas convencionales y no convencionales.
- Comparación de magnitudes.
- Unidades de medida en el sistema métrico decimal:
  – longitud
  – superficie
  – capacidad
  – volumen
- Unidades de medida no convencionales de uso local.
- Unidades de medida de tiempo y temperatura.
- Sistema monetario.
- La unidad de medida del ángulo: El grado
- Cálculo de perímetros y áreas.
- Uso de instrumentos de medir.
- Estimación en la medición.

Competencias del tercer ciclo de primaria

COMPETENCIAS	INDICADOR	INDICADOR	INDICADOR	INDICADOR	INDICADOR
Aplica las características del sistema de numeración decimal en diferentes conjuntos numéricos para resolver problemas matemáticos en diversas situaciones.	Reconoce las principales diferencias entre el sistema de numeración decimal y otros sistemas de numeración.	Localiza números enteros y racionales en la recta numérica y deduce que pueden ser expresados en forma fraccionaria y decimal.	Representa números enteros y racionales en sus formas equivalentes, estableciendo relaciones entre esas representaciones.	Identifica números irracionales como números de representación decimal infinita no periódica y localiza algunos de ellos en la recta numérica.	Aplica el significado de los números reales (naturales, enteros, racionales e irracionales) en la resolución de problemas matemáticos.
Utiliza estrategias matemáticas convencionales para operar con diferentes conjuntos numéricos en la resolución de problemas.	Aplica las propiedades de las operaciones matemáticas como estrategias de cálculo mental.	Elige las operaciones más adecuadas en la, resolución de problemas numéricos con números naturales, enteros, racionales, irracionales y reales.	Realiza operaciones combinadas estableciendo el orden de las mismas.	Formula problemas numéricos, analiza sus procedimientos y los confronta con otros posibles.	Utiliza la calculadora en función de la complejidad de los cálculos que realiza y de la exigencia de exactitud en los resultados.
Representa patrones numéricos y situaciones reales en tablas de datos, gráficos y expresiones algebraicas y los aplica en la resolución de problemas matemáticos.	Aplica conceptos de la teoría de números (números primos, factores y múltiplos) en la resolución de problemas	Utiliza las propiedades de las potencias con exponente entero positivo y las aplica a potencias de exponente negativo, fraccionario y nulo.	Utiliza representaciones algebraicas para expresar generalizaciones sobre las propiedades de las operaciones aritméticas y regularidades numéricas	Generaliza patrones y construye gráficas donde explica de qué forma el cambio en una cantidad provoca el cambio en otra.	Compara y utiliza gráficos, tablas y ecuaciones como diferentes formas de representar una relación.
Anticipa los resultados de problemas matemáticos mediante estimaciones y verifica sus hipótesis realizando cálculos con exactitud.	Estima y acota de manera pertinente, resultados de operaciones con distintos conjuntos numéricos.	Utiliza la notación científica para contar o estimar grandes y pequeñas cantidades.	Calcula de manera aproximada diferentes raíces a través de estimaciones y/o mediante el uso de la calculadora.	Resuelve problemas matemáticos utilizando cálculos estimativos por comparación.	Verifica y busca la precisión de los resultados obtenidos por medio de la estimación de medidas y el cálculo de operaciones.
Representa situaciones problema mediante expresiones algebraicas y las resuelve utilizando sus propiedades.	Deduce, a partir del contexto del problema, si la letra se usa como variable, como incógnita o como símbolo abstracto.	Traduce situaciones problema en ecuaciones o inecuaciones de primer grado y las resuelve utilizando sus propiedades.	Expresa enunciados en lenguaje algebraico y utiliza algoritmos que permitan realizar operaciones con monomios y polinomios.	Obtiene las expresiones equivalentes de una expresión algebraica por medio de la aplicación de factorizaciones, simplificaciones y amplificaciones.	Aplica métodos algebraicos en la resolución de diversos problemas matemáticos, sobre todo aquellos que involucran relaciones lineales.
Utiliza las relaciones proporcionales como estrategias para resolver problemas numéricos y geométricos en situaciones cotidianas y matemáticas.	Resuelve situaciones problema que requieren el uso de la proporcionalidad y la aplicación de estrategias propias.	Representa en el plano cartesiano la relación algebraica existente entre dos magnitudes, proporcionales o no proporcionales.	Resuelve problemas que incluyen magnitudes directa e inversamente proporcionales, por medio de diversas estrategias.	Utiliza la proporcionalidad geométrica en las construcciones geométricas y la resolución de problemas de semejanza de figuras.	Resuelve algunos problemas de matemática comercial aplicando relaciones proporcionales y otras estrategias de cálculo.

COMPETENCIAS	INDICADOR	INDICADOR	INDICADOR	INDICADOR	INDICADOR
Establece relaciones entre diferentes sistemas de medición a través de fórmulas y procedimientos que aplica en la resolución de problemas.	Realiza conversiones para resolver problemas que implican el uso o de diferentes magnitudes de acuerdo a la unidad de medida pertinente.	Interpreta y aplica fórmulas que describen fenómenos o relaciones conocidas para calcular sus valores.	Resuelve problemas de cálculo de áreas y perímetros de superficies planas por medio de la composición y descomposición de figuras y por aproximación.	Utiliza diferentes estrategias para resolver problemas dé cálculo de áreas de superficie total en algunos cuerpos tridimensionales.	Calcula el volumen de algunos prismas rectos y de composiciones de cuerpos tridimensionales.
Interpreta, a partir de situaciones problema, la posición de puntos, sus transformaciones en el plano y sus representaciones en un sistema de coordenadas cartesianas.	Representa los desplazamientos de un punto en un plano cartesiano mediante un segmento de recta orientado.	Utiliza la terminología y la notación adecuada para describir con precisión las transformaciones geométricas e isométricas.	Descubre propiedades y relaciones en las transformaciones de figuras y cuerpos en el plano y las aplica en la resolución de problemas.	Identifica las características que se mantienen y las que se modifican cuando amplía y reduce figuras planas.	Formula y verifica conjeturas acerca de las propiedades de las transformaciones isométricas y homotéticas.
Resuelve problemas y realiza demostraciones aplicando las propiedades de las figuras y cuerpos geométricos.	Obtiene las propiedades geométricas de figuras planas y de sus relaciones utilizando los métodos inductivo y deductivo.	Formula y comprueba conjeturas acerca de las propiedades geométricas de figuras planas.	Establece propiedades, regularidades y relaciones en distintos cuerpos.	Formula y comprueba conjeturas acerca de las propiedades geométricas de algunos poliedros y cuerpos redondos.	Aplica las propiedades de las figuras y cuerpos geométricos en la resolución de problemas.
Valora la utilidad del análisis estadístico y de la probabilidad como medios para predecir eventos que ayuden en la toma de decisiones.	Lee e interpreta tablas estadísticas y gráficas que representan diversas situaciones.	Compara e interpreta información obtenida de diferentes fuentes estadísticas aplicando medidas de tendencia central.	Define un espacio muestral e indica la posibilidad de que suceda un evento mediante una fracción.	Estima y verifica probabilidades a partir de experimentos de carácter aleatorio.	Formula inferencias y argumentos convincentes basados en el análisis de la información estadística y determina la probabilidad de que suceda un evento.

Contenidos del tercer ciclo de primaria

Números y operaciones

Números naturales

- Sistemas de numeración.
  - Sistemas antiguos de numeración: maya, egipcio, romano
  - Sistemas de numeración posicionales (decimal) y no posicionales (romano).
  - Sistemas de numeración en diferentes bases (binario, quinario)
  - Comparación de la escritura de los números en diferentes sistemas en cuanto al valor posicional y la base.
- Regularidades y patrones en N
  - Múltiplos y divisores: definiciones y propiedades.
  - Números primos y compuestos. Criba de Eratóstenes.

  - Criterios de divisibilidad: Formulación de conjeturas sobre problemas numéricos de divisibilidad y su comprobación mediante el uso de ejemplos y contraejemplos, método de ensayo y error, etc.
  - Descomposición factorial de un número en sus factores primos: Teorema fundamental de la Aritmética.
  - Máximo común divisor y mínimo común múltiplo en la resolución de problemas numéricos: Algoritmo de Euclides.
- Ampliación de las operaciones en N.
  - Pictogramas y multiplicación, diagramas de árbol y multiplicación.
  - División entera
  - Potenciación y radicación en N:

    Interpretación y liso de la potenciación en diferentes contextos
    Potencias de base natural y exponente natural
    Potencias y diagramas de árbol
    Patrones y propiedades de las potencias
    Las potencias de 10 y nuestro sistema de numeración
    Raíz cuadrada, raíz cúbica y raíz enésima exacta y aproximada
    Estrategias de cálculo mental y estimación, utilizando potencias, raíces y sus propiedades.
  - Propiedades de las operaciones en N y su aplicación en operaciones combinadas.
  - Estrategias de cálculo mental utilizando las propiedades de las operaciones en N.

Números enteros y sus operaciones

- Significado, uso, ordenación, representación de operaciones y sus propiedades en contextos cotidianos, históricos y científicos.
  - Clasificación de los números enteros en positivos, negativos y cero
  - Representación de los números enteros en la recta numérica.
  - Valor absoluto o módulo de un número entero y su interpretación geométrica.
  - Comparación de números enteros mediante la ordenación y su representación gráfica
  - Regularidades y patronos en Z:

    Divisibilidad en Z.
    Regularidades en sucesiones numéricas en Z.
  - Operaciones con números enteros y sus propiedades:

    Adición y sustracción
    Multiplicación y división
    Potenciación: Potencias de base positiva o negativa y exponente natural, potencias y diagramas de árbol, patrones y propiedades
    Radicación: Raíz cuadrada, raíz cúbica y raíz enésima exacta
    Cálculo aproximado de raíces por medio de la estimación y haciendo uso de la calculadora

– Propiedades de las operaciones en Z, estrategias de cálculo mental y su aplicación en operaciones combinadas.

Números racionales y sus operaciones

- Significado, uso, ordenación, representación, operaciones y propiedades de las operaciones en Q, bajo sus diferentes representaciones y en contextos cotidianos, históricos y científicos.
  - El número racional como conjunto de fracciones equivalentes
  - Clasificación de los números racionales en positivos, negativos y cero; enteros y fraccionarios
  - Relación entre fracciones y decimales
    Representación de una fracción por un decimal exacto o periódico y viceversa
    Aproximaciones por truncamiento o por redondeo. Errores cometidos al aproximar
  - Representación de los números racionales en la recta numérica en su forma fraccionaria y decimal
  - Comparación de números racionales mediante la ordenación y la representación gráfica
  - Regularidades y patrones en sucesiones numéricas en Q
  - Operaciones con números racionales en su forma fraccionaria y decimal y sus propiedades:
    Adición y sustracción
    Multiplicación y división
    Potenciación: Potencias de base natural y exponente entero, potencias de base racional y exponente entero, regularidades y propiedades, crecimiento y decrecimiento exponencial, notación científica
    Radicación: Raíz cuadrada, raíz cúbica y raíz enésima exacta
    Cálculo aproximado de potencias y raíces por medio de la estimación y haciendo uso de la calculadora
    Propiedades de las operaciones en Q y su aplicación en operaciones combinadas.
  - Aproximaciones: estimaciones de cálculo por redondeo o truncamiento y control de los resultados utilizando la calculadora
  - Resolución de desafíos y problemas numéricos tales como cuadrados mágicos o cálculos orientados a la identificación de patrones numéricos.

Números irracionales y reales.

- El número decimal irracional. Algunos números especiales: π √, 2, la razón áurea.
  - Representaciones en la recta numérica.

- Reconocimiento de números racionales o irracionales utilizando la calculadora.
- Cálculo aproximado: truncamiento y redondeo
  Distinción entre una aproximación y un número exacto
  Error absoluto, relativo y porcentual
  Estimación y acotación de los resultados de un cálculo con la precisión adecuada.
  Aproximación de raíces
- Números reales: Representación en la recta numérica
- Operaciones con números reales

Proporcionalidad

- Las razones y sus diferentes formas de interpretación:
  - Razones entre partes de una colección u objetos y razones entre una parte y el todo.
- Situaciones que dan sentido a la proporcionalidad. Situaciones de variaciones no proporcionales.
  - Situaciones de variación proporcional directa o inversa y su representación en tablas y gráficos.
  - Caracterización de situaciones de proporcionalidad directa o inversa mediante un cociente o un producto respectivamente.
  - Resolución de ecuaciones con proporciones
  - Expresiones usuales de la proporcionalidad directa e inversa y situaciones científicas, económicas y sociales que las involucre:
    Porcentajes
    Escalas
    Tasa
    Reparto proporcional
    Interés simple
    Análisis de fórmulas
  - Resolución de problemas geométricos de proporcionalidad
  - Figuras semejantes. Representación a escala:
    Ampliación y reducción de figuras
    Construcción de croquis, planos y maquetas

Lenguaje gráfico y algebraico y sus diferentes interpretaciones

- Aritmética generalizada.
  - Modelos aritméticos
  - Propiedades de las operaciones.
  - Generalizaciones de patrones aritméticos.
- Relaciones funcionales.
  - Análisis de relaciones que son o no funciones a través de gráficas o tablas

  - La letra como variable. Noción de dependencia entre variables
  - Utilización del lenguaje gráfico para expresar relaciones funcionales
  - Utilización del lenguaje algebraico para describir gráficos sencillos
  - Descripción de las características más importantes de una función a través
  - gráfica (incrementos, valores límite, continuidad)
  - Descripción de un fenómeno en términos de funciones
  - Patrones a partir de la interpretación de gráficos
  - Funciones que se expresan mediante fórmulas
  - Algunas funciones especiales:
  - Función de proporcionalidad directa o inversa
  - Función afín
  - Función lineal
- Ecuaciones e inecuaciones lineales
  - Las letras como incógnitas. Resolución de ecuaciones e inecuaciones
  - Fórmulas. Análisis de fórmulas de perímetros, áreas y volúmenes en relación con la variación de los elementos lineales y viceversa
- El álgebra como estructura
  - Las letras como símbolo abstracto
  - Cálculo algebraico: operaciones con monomios y polinomios, productos y cocientes notables, factorización y expresiones algebraicas fraccionarías.
  - Obtención de expresiones algebraicas equivalentes: por eliminación de signos de agrupación, reducción de términos semejantes, factorización y simplificación.

Tratamiento del azar y la información

- Nociones elementales de probabilidad
  - Fenómenos aleatorios y terminología probabilística
  - Probabilidad teórica: ley de Laplace
  - Probabilidad experimental: elaboración de tablas de frecuencias y gráficas para representar el comportamiento de fenómenos aleatorios
  - Errores habituales en la interpretación del azar
- Técnicas de recuento de datos o de sucesos
  - Diagramas de árbol y de casillas.
  - Frecuencia absoluta y relativa
  - Probabilidad de sucesos a partir de las frecuencias
- Nociones elementales de estadística
  - Terminología estadística
  - Variables estadísticas discretas y continuas
  - Tablas de frecuencias y representaciones gráficas.
  - Errores en las gráficas que afectan a su interpretación
- Medidas de tendencia central
  - Media, moda y mediana: ventajas y desventajas en su uso

Espacialidad y geometría

Elementos geométricos en el plano y en el espacio

- Elementos básicos para la descripción y organización del plano y del espacio: puntos, rectas y planos
- Relaciones básicas para la descripción del plano y el espacio: paralelismo, perpendicularidad e incidencia.
- Sistemas de referencia:
  - Coordenadas cartesianas en el plano
    Proyecciones planas de cuerpos geométricos: planta, perfil y alzado
  - Coordenadas en la superficie esférica:
    Paralelos-Meridianos
    Latitud-Longitud

Formas planas y espaciales

- Descripción y clasificación de figuras, cuerpos y configuraciones geométricas Clasificación de figuras y cuerpos atendiendo a diversos criterios: número de lados, medida de los lados y los ángulos, número de caras, formas de las caras
  - Elementos y propiedades de triángulos y cuadriláteros:
    Construcciones con regla y compás
    Líneas y puntos notables en un triángulo
    Formulación de conjeturas acerca de algunas propiedades y demostración de las mismas
  - Elementos y propiedades de los polígonos:
    Diagonales de un polígono
    Suma de los ángulos de un polígono
    Construcciones con regla y compás
    Formulación de conjeturas acerca de algunas propiedades y demostración de las mismas
  - Circunferencia y círculo:
    Posiciones de rectas y circunferencia
    Circunferencia inscrita y circunscrita
    Ángulos en la circunferencia
  - Elementos y propiedades de poliedros y cuerpos redondos:
    Teorema de Euler
    Redes o desarrollo de poliedros y cuerpos redondos
    Proyecciones planas
    La esfera terrestre
- Transformaciones isométricas y homotéticas en el plano.
  - Simetrías, traslaciones y rotaciones:
    Composición de transformaciones isométricas
    Transformaciones isométricas en el plano cartesiano. Teselados

Medida

- Sistemas de medida
  - Ampliación del Sistema Métrico Decimal: múltiplos y submúltiplos de las unidades fundamentales para longitudes, áreas, volúmenes y masas
  - Unidades astronómicas y micro unidades de longitud
  - Unidades de memoria en informática (bytes, kilobytes, etc.)
  - Unidades de medida no convencionales de uso común en la región
- La medida de tiempo
  - Relación de las unidades de tiempo con fenómenos astronómicos en nuestro sistema de calendario y en los de otras culturas
  - Expresión de medidas temporales: forma compleja y decimal
  - Operaciones con unidades de tiempo
- Medida de ángulos
  - Ángulos planos: unidades angulares sexagesimales
- Relaciones métricas en el triángulo Relación entre los lados
  - El teorema de Pitágoras
- Instrumentos de medida
  - Instrumentos de medida más frecuentes
  - Instrumentos de medida tradicionales de la región
  - Precisión de los instrumentos de medida

Fuente: Ministerio de Educación.

3.2. Competencias y contenidos del nivel secundario

Competencias del primer ciclo de secundaria

COMPETENCIAS	INDICADOR	INDICADOR	INDICADOR	INDICADOR	INDICADOR
Representa patrones numéricos y situaciones reales en tablas de datos, gráficos y expresiones algebraicas y los aplica en la resolución de problemas matemáticos	Aplica conceptos de la teoría de números (números primos, factores y múltiplos) en la resolución de problemas.	Utiliza las propiedades de las potencias con exponente entero positivo y las aplica a potencias de exponente negativo, fraccionario y nulo.	Utiliza representaciones algebraicas para expresar generalizaciones sobre las propiedades de las operaciones aritméticas y regularidades numéricas.	Generaliza patrones y construye gráficas donde explica de qué forma el cambio en una cantidad provoca el cambio en otra.	Compara y utiliza gráficos, tablas y ecuaciones como diferentes formas de representar una relación.
Incorpora el lenguaje y los métodos algebraico y modos de argumentación como medio de representación y generalización de situaciones numéricas, utilizándolos como herramientas para la resolución de problemas en diversos contextos.	Encuentra relaciones entre magnitudes, analizando situaciones cotidianas.	Representa situaciones numéricas en el lenguaje algebraico.	Expresa mediante polinomios perímetros y áreas de figuras planas, así como volúmenes de cuerpos geométricos.	Realiza operaciones elementales con expresiones algebraicas.	Desarrolla estrategias propias y/o aplica la operatoria algebraica en la resolución de problemas prácticos.

COMPETENCIAS	INDICADOR	INDICADOR	INDICADOR	INDICADOR	INDICADOR
Representa situaciones problema mediante expresiones algebraicas y las resuelve utilizando sus propiedades.	Deduce, a partir del contexto del problema, si la letra se usa como variable, como incógnita o como símbolo abstracto.	Traduce situaciones problema en ecuaciones o inecuaciones de primer grado y las resuelve utilizando sus propiedades.	Expresa enunciados en lenguaje algebraico y utiliza algoritmos que permitan realizar operaciones con monomios y polinomios.	Obtiene las presiones equivalentes de una expresión algebraica por medio de la aplicación de factorizaciones, simplificaciones y amplificaciones.	Aplica métodos algebraicos en la resolución de diversos problemas matemáticos, sobre todo aquellos que involucran relaciones lineales.
Transforma expresiones algebraicas aditivas en expresiones multiplicativas, eligiendo el camino más apropiado de descomposición, para simplificar polinomios, realizar operaciones con fracciones y optimizar el tiempo en la resolución de problemas en diversos contextos.	Factoriza expresiones algebraicas.	Simplifica fracciones algebraicas, aplicando la descomposición factorial.	Realiza operaciones fundamentales con fracciones algebraicas.	Realiza trabajos prácticos con esmero, puntualidad y pulcritud.	Identifica los productos notables y los desarrolla, aplicando estrategias prácticas.
Interpreta hechos reales a través del análisis de gráficas y fórmulas algebraicas de funciones polinómicas, exponenciales, logarítmicas y trigonométricas, reconociendo la importancia que tienen estos conocimientos matemáticos por sus múltiples aplicaciones en diversas ciencias y en su vida cotidiana.	Reconoce las características de una función y de su gráfica.	Utiliza procedimientos algebraicos y gráficos para definir funciones.	Construye gráficos de distintos tipos de funciones.	Determina el dominio y el rango de una función.	Construye los gráficos de funciones de segundo grado, determinando claramente el vértice de cada parábola.
Interpreta y traduce diferentes enunciados a ecuaciones algebraicas, utilizando simbología apropiada, resolviendo problemas relacionados con distintas áreas científicas y con su realidad circundante.	Resuelve ecuaciones y sistemas de primer grado, utilizando diferentes estrategias.	Resuelve problemas relacionados con su entorno, a través del planteo de ecuaciones lineales.	Inventa problemas a partir de ecuaciones lineales dadas	Resuelve ecuaciones cuadráticas y sistemas cuadráticos, gráfica y algebraicamente.	Resuelve problemas que plantean ecuaciones cuadráticas
Utiliza funciones, ecuaciones, inecuaciones y sistemas sencillos formalizando y resolviendo situaciones problemáticas en áreas diferentes, seleccionando las estrategias de resolución en función de la situación planteada y reconociendo el valor de la matemática como herramienta necesaria para el aprendizaje científico.	Utiliza funciones, ecuaciones, inecuaciones y sistemas sencillos para formalizar.	Expresa hechos cotidianos como funciones.	Aplica el cálculo de funciones a eventos reales.	Selecciona las estrategias de resolución en función de la situación planteada.	Reconoce el valor de la matemática como herramienta necesaria para el aprendizaje científico.
Resuelve problemas reales, cotidianos realizando demostraciones y aplicando las propiedades de las figuras y cuerpos geométricos.	Obtiene las propiedades geométricas de figuras planas y de sus relaciones utilizando los métodos inductivo y deductivo.	Formula y comprueba conjeturas acerca de las propiedades geométricas de figuras planas.	Establece propiedades, regularidades y relaciones en distintos cuerpos	Formula y comprueba conjeturas acerca de las propiedades geométricas de algunos poliedros y cuerpos redondos.	Aplica las propiedades de las figuras y cuerpos geométricos en la resolución de problemas.

COMPETENCIAS	INDICADOR	INDICADOR	INDICADOR	INDICADOR	INDICADOR
Valora la utilidad del análisis estadístico y de la probabilidad como medios para predecir eventos que ayuden en la toma de decisiones.	Acude a diferentes medios para recolectar información.	Clasifica la información que obtiene de diferentes fuentes.	Lee e interpreta la información contenida en las tablas y gráficos y opina sobre la misma.	Compara e interpreta información obtenida de diferentes fuentes estadísticas aplicando medidas de tendencia central.	Socializa la información con sus compañeros.

Contenidos del primer ciclo de secundaria

Números y operaciones

1. Operaciones algebraicas

- Definiciones básicas.- Expresión.- Término.- Coeficiente numérico.- Monomio, Binomio y Trinomio.- Polinomio.
- Adición de expresiones algebraicas.
- Sustracción de expresiones algebraicas.
- Símbolos de agrupación.- Eliminación de símbolos de agrupación.
- Operaciones con coeficientes fraccionarios, exponentes literales.
- Multiplicación de expresiones algebraicas.- Ejercicios con exponentes literales.- Productos notables.
- División de expresiones algebraicas.- División sintética.
- Operaciones combinadas.

2. Factorización

- Factor común.
- Trinomio de segundo grado.
- Suma y resta de potencias iguales.
- Descomposición por evaluación.
- Casos especiales.

3. Fracciones algebraicas

- Principio fundamental de las fracciones.- Numerador, Denominador, Miembro.
- Operaciones con fracciones.-Producto de dos fracciones.- Multiplicación y División de una fracción por una cantidad diferente de cero.- Regla de los signos de las fracciones.
- Reducción a la mínima expresión.- Supresión de factores comunes.
- Multiplicación de fracciones.
- División de fracciones.

- Ejercicios combinados de multiplicación y división de fracciones (monomios y polinomio).
- El Mínimo Común Múltiplo.- Pasos para determinar el M.C.M.- Factor Primo.
- La adición de fracciones.- Fracciones equivalentes.- M. C. D.
- Fracciones complejas.- Reducciones de fracciones complejas.

4. Ecuaciones e inecuaciones de primer grado

- Igualdad Identidad y ecuación
- Ecuaciones de primer grado-Ecuaciones Literales
- Formulas
- Inecuaciones de primer grado
- Problemas

5. Ecuaciones simultáneas de primer grado

- Solución del sistema
- Métodos de resolución: Gráfico – Reducción – Determinante –Sustitución

6. Potenciación y radicación

- Operaciones con potencias
- Racionalización de denominadores

7. Función cuadrática

- Ecuaciones cuadráticas
- Métodos de resolución
- Inecuaciones
- Sistemas de segundo grado
- Problemas

Espacialidad y geometría

1. Paralelismo y congruencia

- Rectas y planos paralelos
- Triángulos y Congruencia
- Casos de congruencia

2. Relaciones Métricas y Semejanza

- Teorema de Pitágoras
- Teorema de Tales

- Teorema fundamental de proporciones
- Teorema fundamental de semejanza

Tratamiento de la información

- Recolección, registro y organización de información de su entorno.
- Lectura e interpretación de información contenida en gráficos simples.
- Interpretación y elaboración de listas, tablas y diagramas de barra.

Competencias segundo ciclo de secundaria

COMPETENCIAS	INDICADOR	INDICADOR	INDICADOR	INDICADOR	INDICADOR
Interpreta hechos reales a través del análisis de gráficas y fórmulas algebraicas de funciones polinómicas, exponenciales, logarítmicas y trigonométricas, reconociendo la importancia que tienen estos conocimientos matemáticos por sus múltiples aplicaciones en diversas ciencias y en su vida cotidiana.	Reconoce las características de una función y de su gráfica.	Expresa hechos cotidianos como funciones exponenciales.	Define la función logarítmica a partir de la exponencial y construye su gráfico.	Aplica el cálculo de funciones exponenciales y logarítmicas a eventos reales.	Resuelve ecuaciones exponenciales y logarítmicas.
Aplica las propiedades de progresiones aritméticas y progresiones geométricas en la solución de diversos problemas económicos y sociales, reconociendo su valor para resolver situaciones.	Determina la ley de formación de sucesiones de números reales.	Reconoce las diferencias conceptuales entre progresiones aritméticas, progresiones geométricas y progresiones armónicas.	Analiza las relaciones entre términos de una progresión aritmética y de una progresión geométrica.	Resuelve problemas de aplicación práctica.	Establece las relaciones de procedimientos entre las interpolaciones aritméticas y geométricas.
Resuelve problemas de su contexto y realiza demostraciones aplicando las propiedades de las figuras y cuerpos geométricos.	Obtiene las propiedades geométricas de figuras planas y de sus relaciones utilizando los métodos inductivo y deductivo.	Formula y comprueba conjeturas acerca de las propiedades geométricas de figuras planas.	Establece propiedades, regularidades y relaciones en distintos cuerpos	Formula y comprueba conjeturas acerca de las propiedades geométricas de algunos poliedros y cuerpos redondos.	Aplica las propiedades de las figuras y cuerpos geométricos en la resolución de problemas.
Grafica, analiza y resuelve problemas trigonométricos, aplicando estrategias y modelos matemáticos apropiados a situaciones reales de su medio.	Define funciones trigonométricas.	Grafica funciones trigonométricas.	Resuelve problemas aplicando definiciones de funciones trigonométricas.	Demuestra identidades trigonométricas.	Resuelve ecuaciones trigonométricas.
Analiza, deduce y resuelve problemas de geometría analítica, aplicando procesos algebraicos y relaciones geométricas, en situaciones reales y contextos matemáticos.	Analiza las distintas posibilidades de encontrar una ecuación de una recta.	Identifica el mínimo de datos suficientes para encontrar la ecuación de las cónicas.	Deduce las fórmulas de las cónicas.	Traslada ejes para encontrar la ecuación de la cualquier cónica.	Resuelve problemas reales utilizando cónicas.

COMPETENCIAS	INDICADOR	INDICADOR	INDICADOR	INDICADOR	INDICADOR
Conceptualiza, organiza y representa la información en cuadros estadísticos mediante estrategias y modelos matemáticos apropiados para el estudio de fenómenos observables en su entorno social.	Lee e interpreta tablas estadísticas y gráficas que representan diversas situaciones.	Compara e interpreta información obtenida de diferentes fuentes estadísticas aplicando medidas de tendencia central.	Hace gráficos para interpretar fenómenos.	Determina estadígrafos de posición.	Determina estadígrafos de dispersión.
Valora la utilidad del análisis probabilístico como medios para predecir eventos que ayuden en la toma de decisiones.	Define un espacio muestral e indica la posibilidad de que suceda un evento mediante una fracción.	Realiza experiencias sencillas para estudiar la relación entre la frecuencia relativa de un suceso y su probabilidad.	Estima y verifica probabilidades a partir de experimentos de carácter aleatorio.	Formula inferencias y argumentos convincentes basados en el análisis de la información estadística y determina la probabilidad de que suceda un evento.	Identifica situaciones de la vida cotidiana que dependen o no dependen del azar.

Contenidos del segundo ciclo de secundaria

Números y operaciones

1. Función Exponencial y Logarítmica

- Definiciones.
- Propiedades.
- Manejo de la calculadora.
- Ecuaciones exponenciales y logarítmicas.

2. Sucesiones y series

- Progresiones aritméticas
- Progresiones geométricas.

Espacialidad y geometría

1. Figuras planas

- Congruencia y semejanza de triángulos.
- Teoremas.
- Círculo y circunferencia.
- Relaciones métricas de la circunferencia.
- Polígonos.

2. Trigonometría

- Funciones trigonométricas y sus variaciones.

- Círculo trigonométrico.
- Resolución de triángulos.- rectángulos y oblicuángulos.
- Funciones trigonométrica de dos ángulos.
- Transformaciones de suma a producto y viceversa.
- Funciones trigonométricas inversas.
- Identidades trigonométricas.
- Ecuaciones trigonométricas.

3. Geometría analítica

- Ecuación de la recta.
- Ecuación de la circunferencia.
- Ecuación de la elipse.
- Ecuación de la parábola.
- Ecuación de la hipérbola.

Tratamiento de la información

1. Estadística

- Técnicas de recuento de datos o de sucesos.
- Diagramas de árbol y de casillas.
- Frecuencia absoluta y relativa.
- Probabilidad de sucesos a partir de las frecuencias.
- Nociones elementales de estadística.
- Terminología estadística.
- Variables estadísticas discretas y continuas.
- Tablas de frecuencias y representaciones gráficas.
- Errores en las gráficas que afectan a su interpretación.
- Medidas de tendencia central:
  - Media, moda y mediana; ventajas y desventajas en su uso.

2.- Probabilidades

- Nociones elementales de probabilidad.
- Fenómenos aleatorios y terminología probabilística.
- Probabilidad teórica: ley de Laplace.
- Probabilidad experimental: elaboración de tablas de frecuencias y gráficas para representar el comportamiento de fenómenos aleatorios.
- Errores habituales en la interpretación del azar.

Fuente: Propuesta del IV Congreso Boliviano de Educación Matemática

4. La formación docente

Los profesores se forman en los Institutos Normales Superiores cuyo grado académico corresponde a Técnico Superior, los maestros de nivel primario, primer y segundo ciclo son polivalentes y los profesores del tercer ciclo de nivel primario y de nivel secundario son especialistas en matemática.

El tiempo de formación en todos los casos es de 4 años. El requisito es ser Bachiller en Humanidades.

Existen Institutos Normales Superiores, para área urbana e Institutos Normales bilingües, para el área rural.

Desde hacen algunos años, las Universidades están desarrollando cursos de complementación para acceder al grado académico de licenciatura. Sin embargo, es preciso anotar, que dichos cursos hacen énfasis en aspectos teóricos generales, con poco peso de las materias pedagógicas y menos aún las de didáctica de las ramas científicas específicas.

Desde el año 2001 se ha implementado un programa piloto de Bachillerato Humanístico Pedagógico, con el fin de cubrir los requerimientos de profesores para áreas alejadas donde no llegan los profesores normalistas.

5. Movimientos de mejora de la educación matemática

Existen cuatro movimientos de diferente origen, con diferentes motivaciones y manejo de recursos, los mismos que tienen en común el deseo de mejorar la educación matemática. A continuación se presenta una descripción muy breve de los mismos.

En 1968 con el surgimiento de la llamada **matemática moderna, el Centro Pedagógico y Cultural Simón Patiño**, tomó el desafió de promoverla en Bolivia.

Para lograrlo organizó un equipo constituido por docentes belgas y profesores de los distintos distritos en la ciudad de Cochabamba. Este equipo se encargó de la preparación de los que debían ser los multiplicadores del mejoramiento, en los 9 departamentos. Este movimiento no tuvo mucho éxito y en 1985 concluyó sin lograr los objetivos que se había planteado

En 1992 surge también en Cochabamba otro movimiento esta vez promocionado por la Facultad de Tecnología de la Universidad Mayor de San Simón, con el apoyo del Instituto Freudenthal de la Universidad de Utrecht- Holanda, con el nombre de **Proyecto MEMI** (Mejoramiento de la Enseñanza de la Matemática y la Informática).

Este movimiento tuvo como propósito promover el mejoramiento de la enseñanza de la matemática y la informática, tanto en el nivel secundario, como en la Universidad. Con este propósito organizaron cursos, talleres y seminarios. El proceso concluyó con la creación de una Licenciatura en didáctica Matemática dirigida a docentes de secundaria. Esta carrera ha logrado capacitar un buen grupo de profesores

Las Olimpiadas Matemáticas son un movimiento importante en nuestro país. Aunque están a cargo de las universidades, movilizan a los profesores de matemática del todo el país en la preparación de los participantes, debiendo reconocer que Tarija es el distrito que mejor y mayor participación ha tenido en olimpiadas internacionales

Un movimiento representativo y activo en los distritos pequeños del país son las **Asociaciones de Profesores**, que trabajan promoviendo cursos para actualización de los docentes. Este movimiento de carácter académico se extendió por todo el país, pero ha perdido vigencia en los distritos grandes en los últimos años.

Sociedad Boliviana de Educación Matemática (SOBOEDMA)

Contando con el apoyo de las Sociedades de Educación Matemática de los países Iberoamericanos, con domicilio legal en la ciudad de Cochabamba, en fecha 28 de agosto de 1995, se constituyó una Sociedad de Educadores en el campo de la Matemática, bajo la denominación de Sociedad Boliviana de Educación Matemática (Soboedma). Cuenta con personería jurídica por resolución Administrativa Nº 060/97 de 7 de marzo de 1997, lo cual garantiza un funcionamiento legal de la misma y el reconocimiento de las autoridades de la legitimidad de la sociedad como interlocutor en representación de los profesores en temas académicos.

Las características de Soboedma son:

Tiene el **PROPÓSITO** de lograr la superación profesional y el mejoramiento de los procesos de enseñanza en su campo, sin fines de lucro y con duración por tiempo indefinido.

Esta Sociedad responde a la **VISIÓN** de que la matemática y su enseñanza deben concebirse como parte de la vida y como factores contribuyentes al desarrollo integral de los niños y jóvenes.

Su **MISIÖN** es reflexionar sobre los mecanismos que permitan la integración de la matemática a las actividades de la vida cotidiana como apoyo a la resolución de problemas en diferentes campos, desarrollando actividades de motivación y capacitación de profesores de los diferentes ciclos del sistema educativo nacional y promoviendo intercambio de experiencias e investigaciones.

La Sociedad ha extendido su acción con la creación de filiales, en seis de los nueve departamentos de Bolivia y en la actualidad cuenta con 200 socios inscritos.

Actividades

Cada dos años se organizan los Congresos Nacionales, el primero fue en junio de 1996 en la ciudad de Cochabamba, con asistencia de casi 600 profesores de todo el país, el segundo se realizó en Santa Cruz en diciembre de 1998, con participación de más de 500 profesores, el tercero se realizó en diciembre del 2000 en La Paz, el cuarto se realizó en julio del 2004 en Cochabamba, también con participación de más de 500 profesores, nuestro próximo encuentro está fijado para el mes de julio del 2006 en Potosí.

Tenemos la satisfacción de, a pesar de ser una Sociedad muy joven, haber organizado la IV Reunión de Didáctica de la Matemática del Cono Sur y el IV CIBEM, que fue realizado en julio de 2001 con participación de representantes de trece países de Ibero América.

Cada una de las filiales organiza actividades en sus distritos con el propósito de mejorar la práctica docente, para los distintos niveles del sistema educativo: por ejemplo seminarios, talleres sobre temas específicos.

6. Perspectivas de la educación matemática

Al calor de los cambios políticos ocurridos en el país, en los últimos años se gestan movimientos tendientes a descalificar todo lo planteado por la Reforma Educativa descrita líneas arriba. El argumento es que la Reforma se hubiera realizado a espaldas de los profesores, sin tomar en cuenta sus puntos de vista y respondiendo a modelos dictados por organismos internacionales.

Este punto de vista, aunque no representa la visión de la mayoría, arrastra a muchos profesores, porque se presenta unido a las demandas por mejores condiciones laborales y salariales que indudablemente son necesarias, pues el nivel de ingresos de los maestros oscila entre 450 Bs y 1800 Bs al mes. (1€ = 10.28 Bs)

El Congreso de la Educación Boliviana a realizarse en Cochabamba en el mes de marzo, tendrá un papel fundamental para definir si la lógica de organización de la Educación matemática presentada en este artículo se mantiene o se producen cambios, respecto a los cuales, cabe anotar que hasta el momento ninguna organización gremial ha presentado un proyecto alternativo.

UNIÓN
REVISTA IBEROAMERICANA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA

Marzo de 2005, Número 1, páginas 89 - 94
ISSN: 1815-0640

Euclides Roxo e a História da Educação Matemática no Brasil

Wagner Rodrigues Valente

Introducción

Em 1908, em Roma, matemáticos estão preocupados em discutir o ensino da Matemática. Pela primeira vez, matemáticos dão importância, a questões ligadas ao ensino, num congresso internacional. Ao que parece, de modo inédito, buscava-se internacionalizar Matemática escolar. Para tanto, é criada uma comissão internacional para estudo do ensino de Matemática (CIEM, 1908:446). Constituída a comissão, é eleito um comitê central dirigente formado pelos matemáticos Félix Klein, Henri Fehr e George Greenhill. Os objetivos oficiais do movimento de reforma desencadeado a partir da criação da comissão internacional IMUK (Internationale Mathematische Unterrichtskommission) / CIEM (Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique) incluem "a reorientação dos métodos de ensino no sentido da intuição e das aplicações" (Schubring, 1999:37).

Segue-se, ao Congresso de Roma, o V Congresso Internacional de Matemática, em Cambridge, no ano de 1912. Para esse evento previu-se, inicialmente, que o comitê deveria preparar relatórios a respeito do estado da instrução matemática nos diversos países. Essa tarefa foi ampliada e buscando-se ajuntar aos objetivos iniciais a disseminação de uma proposta de reforma do ensino de Matemática (Schubring, 1999:35).

Esse primeiro movimento de renovação internacional do ensino de matemática produz várias conseqüências no Brasil. Dentre elas, é possível mencionar: a criação da disciplina escolar Matemática, o debate sobre a necessidade de criar faculdades de filosofia para a formação de professores de matemática e, de modo inédito até então, a emergência de discussões relativamente à distinção entre ser professor de matemática e exercer o ofício de matemático. Figura principal desse período, o professor Euclides Roxo pode ser considerado o primeiro educador matemático brasileiro.

Quem foi Euclides Roxo?

Euclides de Medeiros Guimarães Roxo nasce circunstancialmente em Aracaju, Sergipe, em 10 de dezembro de 1890, pois seu pai, engenheiro, viaja muito e realiza obras por todo o país. Em 1904, Euclides Roxo ingressa no Colégio Pedro II. A partir de 1915, Roxo torna-se professor substituto de Aritmética do mesmo Colégio. Roxo forma-se pela Escola Politécnica do Rio de Janeiro em 1916 e, três anos mais tarde, assume a cátedra de Matemática do Pedro II, substituindo Eugênio de Barros Raja Gabaglia, morto no mesmo ano. Em 1923, publica seu primeiro livro de circulação nacional intitulado *Lições de Arithmetica*. Dois anos mais tarde, em 1925, Roxo é nomeado Diretor do Externato do Colégio Pedro II. Em 1927, encaminha à Congregação do estabelecimento modelo para o secundário no país, uma proposta de renovação do ensino das Matemáticas, a partir da criação da disciplina Matemática, que deveria ser o resultado da fusão dos ramos aritmética, álgebra e geometria, até então ensinados separadamente. Em 1929, Roxo torna-se membro do conselho diretor da Associação Brasileira de Educação - ABE. No mesmo ano, publica o primeiro volume de uma coleção de livros didáticos escritos para atender à proposta renovadora do ensino de Matemática, intitulado "Curso de Mathematica Elementar", onde os temas da aritmética, da geometria e da álgebra aparecem fundidos. Vinda a Revolução de 1930, Roxo, ligado à República Velha, pede demissão do cargo de diretor do Externato do Colégio Pedro II, retornando depois de um período de cerca de dois meses à direção do Internato do mesmo Colégio. Euclides Roxo é o responsável pelos programas de Matemática da Reforma "Francisco Campos" e participa ativamente do grupo encarregado de elaborar os programas de Matemática, em 1942, na Reforma "Gustavo Capanema". Ainda em 1937, é nomeado diretor da Divisão do Ensino Secundário. No mesmo ano, publica a obra "A Matemática na educação secundária" onde detalha as influências que sofre do movimento de internacionalização do ensino da Matemática em suas propostas de ensino. Roxo morre em 21 de setembro de 1950, deixando por sua atuação no Colégio Pedro II, nos dois primeiros ministérios da Educação e Saúde, nos livros que escreveu e nos cargos que exerceu, marcas decisivas nos rumos da educação matemática brasileira do período 1920-1950.

O movimento internacional de renovação do ensino de matemática no Brasil

Será somente ao final dos anos 1920, que as discussões internacionais sobre o ensino de Matemática começaram a fazer eco no Brasil. Euclides Roxo, professor de Matemática e diretor do Colégio Pedro II, foi o introdutor dos debates ocorridos nos congressos internacionais sobre a reforma do ensino de Matemática (Valente, 2002a).

A experiência como professor do Pedro II; também como elemento da Comissão de Ensino do Colégio responsável pela programação de Matemática; o sucesso obtido por seu primeiro livro de circulação nacional, *Lições de Aritmética*; a prática de estar sempre atualizado em relação aos novos lançamentos de livros, principalmente livros ligados ao ensino de Matemática; e a posição de diretor do Pedro II, são elementos fundamentais que explicam a iniciativa de Euclides Roxo de propor à Congregação do Colégio Pedro II, em 14 de novembro de 1927, uma alteração radical no ensino de Matemática. A proposta é elaborada a partir de vários 'considerandos'. Desde o primeiro, Roxo retoma a discussão internacional sobre modernização do ensino trazida pela Alemanha à Comissão Internacional (LACP, 1927:14/11:64-67).

1928: a Congregação do Colégio Pedro II recebe dois ofícios. O primeiro do Departamento Nacional de Ensino e o segundo da Associação Brasileira de Educação. Ambos manifestam-se favoráveis às modificações no ensino de Matemática, aprovando e apoiando a iniciativa de Euclides Roxo (LACP, 1928:18/06:79). O Decreto 18 564 de 15 de janeiro de 1929 oficializa o aceite da proposta modernizadora encabeçada por Roxo. Apesar do Colégio Pedro II ser referência para o ensino secundário do país, as modificações trazidas pelo Decreto deverão ser seguidas apenas no Pedro II (Miorim, 1998:92).

Vinda a revolução varguista, Euclides Roxo é chamado por Francisco Campos, o primeiro ministro do recém-criado Ministério da Educação e Saúde Pública, para compor uma comissão que irá elaborar um projeto de reforma do ensino brasileiro. No dizer da pesquisadora Angela Miorim, o Ministro "acatou, em sua reforma para o ensino secundário, todas as idéias modernizadoras presentes na proposta da Congregação do Colégio Pedro II, na parte relativa ao ensino de Matemática" (1998:93).

Com a ausência dos antigos catedráticos de Matemática do Colégio Pedro II, com a morte de Eugênio de Barros Raja Gabaglia e a licença de Joaquim Almeida Lisboa, em viagem ao exterior, uma nova geração assume o comando da organização do ensino da Matemática. Essa nova geração, encabeçada por Euclides Roxo, aparentemente não encontra dificuldades de produzir inovações na Matemática escolar através da modificação de seus programas. Porém, logo essas inovações começarão a serem combatidas. Lisboa retorna ao Colégio e assim se pronuncia na reunião da Congregação cuja ordem do dia era a votação dos programas para o ano de 1931: "Declaro que voto contra os programas de Matemática" (LACP, 1930:20/12:137-138). Voto vencido no Colégio, onde permaneceu tanto tempo fora e sem participar das discussões modernizadoras, Almeida Lisboa buscará outra tribuna para fazer eco ao seu desagrado: a imprensa.

Um debate público e o nascimento do educador matemático no Brasil

O *Jornal do Commercio* de 21 de dezembro de 1930 dá voz ao descontentamento do professor Joaquim Inácio de Almeida Lisboa relativamente à reforma do ensino de Matemática. A reforma, inicialmente levada a cabo no Colégio Pedro II, posteriormente é transformada em lei nacional com a Reforma 'Francisco Campos'. Lisboa inicia seu artigo, intitulado "Os Programas de Matemática do Colégio Pedro II", declarando: "Na qualidade do mais antigo professor catedrático do Colégio Pedro II, declaro não ter colaborado, nem de leve, nos seus atuais programas de Matemática. Sou fundamentalmente contra eles: não os considero sequer programas de ensino, porque tudo destroem". Em seguida, afirma que: "De decadência em decadência, de supressão em supressão, chegamos nos programas atuais do professor Euclides Roxo, meu jovem e ilustrado colega e, outrora, um dos meus mais brilhantes alunos. Não compreendo que tão mesquinha reforma tivesse tal patrono".

Lisboa busca ridicularizar a renovação do ensino de Matemática no Brasil, tentando destruir a argumentação que vinha, na própria imprensa, sendo utilizada por Euclides Roxo para defender a reforma.

Ao final de seu artigo, Joaquim Lisboa considera que "a reforma do professor Euclides Roxo não pode subsistir. Ela é um crime contra a mocidade e o Brasil".

Uma semana depois, exatamente no domingo seguinte, Euclides Roxo responde a seu oponente, através do mesmo *Jornal do Commercio*. Roxo faz publicar, no dia 28 de dezembro de 1930, o artigo intitulado “O ensino de Matemática na escola secundária - réplica ao Sr. Professor Almeida Lisboa”.

Roxo inicia sua réplica considerando que Lisboa não entende de questões ligadas ao ensino de Matemática:

> “Surpreendeu-me o artigo do Sr. Professor Almeida Lisboa. Surpreendeu-me, não porque eu não esperasse ataques ainda mais violentos contra a reforma do ensino da Matemática no Pedro II, nem porque supusesse estar S. S. de acordo com a nova orientação: conheço a sua completa inciência no que diz respeito ao ensino secundário. Por várias razões, entretanto, eu não podia esperar o artigo do Sr. Lisboa. Primeiro, porque nunca supus que, depois de 15 ou 20 anos de completo alheamento às coisas do ensino, se é que esse alheamento jamais deixou de existir, pudesse ainda o Sr. Lisboa tornar-se de tamanho ardor por uma questão desta natureza”.

Em seguida, Roxo destaca, ao que parece, de modo inédito até então, as diferenças existentes entre o conhecimento matemático e o ensino de Matemática. Para ele, Almeida Lisboa é caso exemplar: um grande conhecedor de Matemática e ignorante das questões ligadas ao ensino da disciplina. Euclides Roxo toma como exemplo Almeida Lisboa para defender a necessidade que tem o país de estruturar a formação do professor secundário. Diz o replicante:

> “Quero, entretanto, antes de começar a rebater as críticas do Sr. Lisboa, explicar, as causas desta profunda divergência entre dois colegas de cátedra em um estabelecimento oficial, com as responsabilidades do Pedro II. Mesmo porque, da rápida análise que vou fazer da vida professoral do Sr. Lisboa, podem-se tirar ilações em benefício do aperfeiçoamento do ensino secundário entre nós. Com efeito, o Sr. Almeida Lisboa é a prova mais eloqüente e a demonstração mais viva da necessidade inadiável em que estamos (e para a qual sei que felizmente o Sr. Ministro da Educação volta as suas vistas) de cuidar da formação do professorado secundário. O Sr. Lisboa entrou para o Colégio Pedro II, graças a um memorável e brilhantíssimo concurso, em que revelou profundo conhecimento de Matemática. Foi isto em 1902. Quando em 1904, entrei como aluno para o primeiro ano do Internato, ainda lá retumbavam os ecos desse famoso certame, ecos que ainda

> não morreram de todo… Pois bem, comparável ao ruído desse concurso, só o do fragoroso desastre da sua carreira no magistério ginasial. Não há talvez notícia de um concurso mais brilhante no Pedro II; mas também não há notícia de um maior fracasso no professorado daquela casa".

Com detalhes da trajetória de Lisboa no Colégio Pedro II, Roxo busca reforçar a tese de que a seu oponente falta formação pedagógica:

> "(...) nas suas aulas, o prof. Lisboa só tinha em mente mostrar aos espantados meninos do Pedro II a sua vasta cultura Matemática. Lembro-me ainda de quando, em 1906, sendo eu aluno do Internato, o Sr. Lisboa voltou da Europa, no meio do ano e foi dar a sua primeira aula naquela casa. Perguntou aos alunos em que ponto estavam e como estes lhe respondessem que em equações do segundo grau, o prof. Lisboa começou a expor àqueles pobres indigenazinhos os métodos de Viète, de Grünnert, de Clebseh, de Heilermann, etc., para dedução da fórmula. Era a continuação da sua prova de concurso. Daí por diante, a ineficiência do seu ensino no Pedro II foi, cada vez mais, se acentuando, até tornar-se proverbial. Não sei se, de algumas centenas de meninos, que passaram por suas mãos, haverá meia dúzia que tenham podido com ele aprender alguma coisa".

Se para Almeida Lisboa falta conhecimento pedagógico, sobra-lhe matemático. É o que Euclides Roxo reafirma ao tentar mostrar que seu colega de profissão encontra-se deslocado no ensino secundário:

> "(...) entretanto, o Sr. Lisboa é um belo talento, um grande matemático, um bom professor de "curso anexo" ou vestibular da Politécnica. Disso posso dar testemunho porque fui seu aluno e muito apreciava as suas bonitas preleções; mas eu tinha 20 anos de idade e seis ou oito de estudos de Matemática, criteriosamente orientados. Digo mais, e é o que todos sentem. O Sr. Lisboa deveria ser um ótimo professor da Politécnica, talvez uma notabilidade no nosso magistério superior se as circunstâncias não tivessem privado aquela alta escola desse verdadeiro luminar das ciências exatas. No Pedro II, porém, ele concretiza a maior catástrofe que se poderia imaginar no magistério. Esses fatos que, para muitos, parecerá encerrar uma contradição chocante, nada têm, entretanto, de extraordinário: imaginem que Weierstrass fosse ensinar Matemática nas primeiras classes de uma höhere Schule alemã; o desastre seria talvez maior do que o do prof. Lisboa".

Continuando sua réplica, Euclides Roxo retoma o tema da necessidade da criação de escolas para a formação do professor secundário, a fim de evitar, segundo ele, exemplos como o de Almeida Lisboa:

> "(...) desculpe-me o Sr. Lisboa esta análise em público. Mas já que S. S. se expôs, eu não posso deixar de apresentá-lo como o mais forte argumento que encontro em favor da criação, entre nós, de uma escola normal para professores secundários, ou melhor, de um instituto de educação, nos moldes dos teachers colleges americanos, onde se formem professores dignos desse nome, isto é, indivíduos que, além de uma forte cultura especializada, conheçam a psicologia infantil e se possuam das modernas idéias sobre pedagogia e metodologia".

Assim, vemos que a defesa da reforma no ensino de Matemática no Brasil, resultado das apropriações feitas por Euclides Roxo do movimento internacional iniciado em 1908, enseja uma discussão pública sobre o problema da formação do professor de Matemática para o ensino secundário brasileiro.

A controvérsia entre Euclides Roxo e Almeida Lisboa fornece muitos ingredientes preciosos para a compreensão de concepções diferentes acerca do ensino de Matemática. Em meio aos debates, emerge entre nós, pela primeira vez, a idéia de formação do educador matemático, apesar da questão não ser descrita com esses termos. Em substituição ao professor de Matemática, habilitado por sua ciência do conteúdo matemático, tem início o debate sobre a necessidade da formação pedagógica desse profissional. Almeida Lisboa é símbolo do matemático, do engenheiro que virou professor. Por outro lado, Euclides Roxo erige-se como um dos primeiros educadores matemáticos de nosso país.

Bibliografía

- **APER-Arquivo Pessoal Euclides Roxo.** São Paulo: PUC- Programa de Estudos Pós-Graduados em Educação Matemática.
- CIEM (1908): "Rapport préliminaire sur l'organisation de la Commission et le plan général de ses travaux" IN: **L'Enseignement mathématique**. Paris/Genebra. Vol. 10.
- **LACP- Livros de Atas da Congregação do Colégio Pedro II**. Rio de Janeiro. Manuscrito.
- MIORIM, M. A. (1998): **Introdução à história da educação Matemática**. São Paulo: Atual Editora.
- SCHUBRING, G. (1999): "O primeiro movimento internacional de reforma curricular em Matemática e o papel da Alemanha: um estudo de caso na transmissão de conceitos". In: **Zetetiké**. Campinas, SP: FE/Unicamp. Vol. 7, no. 11.
- VALENTE, W.R. (2002): "Euclides Roxo e o movimento internacional de modernização da Matemática escolar " IN: VALENTE, W. R. (org.): **Euclides Roxo e a modernização do ensino de Matemática no Brasil**. Brasília: Editora da SBEM.

Wagner Rodrigues Valente, Professor do Programa de Estudos Pós-Graduados em Educação Matemática da Pontifícia Universidade Católica de São Paulo (Brasil), Coordenador do GHEMAT (Grupo de Pesquisa de História da Educação Matemática), Autor do livro *Uma história da matemática escolar no Brasil, 1730-1930,* Organizador dos livros *Euclides Roxo e a modernização do ensino de matemática no Brasil* e *O nascimento da matemática do ginásio*. E-mail: valente@pucsp.br

UNIÓN
REVISTA IBEROAMERICANA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA

Marzo de 2005, Número 1, páginas 95 - 96
ISSN: 1815-0640

Cronoludia Matemática

Ismael Roldán y José Muñoz

Estimado lector, queremos darte una gran acogida en esta sección de la nueva revista digital UNION. La comunicación a través de Internet nos va a permitir vivir una experiencia formidable de interacción y ciberespacio compartido que trasciende límites geográficos y distancias euclídeas. En este nuevo planeta digital UNIÓN no existen fronteras y la utopía de un amplio colectivo hispanoamericano en armonía se hace realidad. Nuestra pretensión es que encuentres aquí unas páginas agradables que provoquen al menos tu sonrisa, algo que en un mundo tan estresante como es el educativo nunca está de más. Si no te dedicas a la enseñanza pero te interesan las matemáticas también puedes divertirte con las cosas que encontrarás aquí y si no te gustan las matemáticas ojalá que nuestras aportaciones consigan atraerte hacia ellas para ver esta ciencia con otros ojos.

Queremos hacer esta sección bastante interactiva, por lo que te ofrecemos una dirección de correo electrónico para que nos envíes cualquier aportación que creas pueda tener cabida aquí. Nosotros seleccionaremos aquellas que vayan mejor con la línea de la revista y las incluiremos señalando su autor.

Por todo ello, bienvenidos y que disfrutéis.

En este número hacemos una primera entrega de Leyes de Murphy. Ya en Internet hay miles de páginas donde pueden encontrarse este tipo de curiosidades pero hemos hecho una selección y nos hemos inventado muchas otras que aparecen por vez primera publicadas. Las encontrarás agrupadas más o menos según su temática. Como contamos con tu ayuda, si conoces o te inventas alguna otra dedicada a las matemáticas, por favor, mándanosla. Las podremos incluir en la segunda entrega con el próximo número. Recibid un saludo muy cordial.

Ismael Roldán y José Muñoz

Los autores

Ismael Roldán Castro (Sevilla, 1956) es Doctor en Ciencias de la Información y Licenciado en Ciencias Físicas y en Arte Dramático. Ha sido actor del grupo *Teatro de la Jácara* de Sevilla (1975 hasta 1982). Es Asesor científico de la revista *SUMA.* Es autor de varioslibros (*Blanco White y Sevilla. Etapa 1775-1810*, *Teatromático, divertimentos matemáticos teatrales para todos los públicos*, *Caos y Comunicación: La teoría del caos y la comunicación humana).* Es Profesor de Teoría de la Comunicación en la Universidad de Sevilla. Tiene numerosas publicaciones sobre Matemáticas, Publicidad y Consumo, Publicidad y Educación, Teoría del Caos, Matemáticas y Medios de Comunicación, Teatro y Matemáticas…
E-mail: ismael@us.es

José Muñoz Santonja es Licenciado en Matemáticas y Catedrático de Matemáticas de Educación Secundaria. Ha escrito los libros *Newton. El umbral de la ciencia moderna* y *Ernesto el aprendiz de matemago*, además de ser coautor de *Lectura matemática de un periódico* y de libros de texto de matemáticas. Es miembro del comité editorial de la revista Epsilon, del Colectivo Andaluz "Comunicar: Medios de comunicación en las aulas", de la comisión andaluza de Estimulación del Talento Matemático… Ponente en diferentes cursos convocados por los Centros de Profesores. Es autor de numerosos artículos sobre didáctica y divulgación de las matemáticas y de la informática.
E-mail: josemunozsantonja@hotmail.com

UNIÓN
REVISTA IBEROAMERICANA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA

Marzo de 2005, Número 1, páginas 97 - 101
ISSN: 1815-0640

Cronoludia Matemática
Ismael Roldán y José Muñoz

Leyes de Murphy para matemáticos

1ª Entrega

Generales:

Ley de Murphy

Si algo puede salir mal, saldrá mal.

También conocida como el:

Postulado de la tostada con mantequilla.

Cualquier tostada untada con mantequilla al caer al suelo lo hará siempre por la cara untada.

Axioma de Lundfor

En matemáticas, ser un experto consiste en saber cada vez más sobre menos cosas.

Corolario de Esturah

Si se es profesor de matemáticas se alcanza el saber absoluto sobre casi nada.

Guía de Handy para la Ciencia moderna

1. *Si es verde o se retuerce, es Biología.*
2. *Si apesta, es Química.*
3. *Si no funciona, es Física.*

Extensiones de Cerf a la Guía de Handy para la Ciencia moderna

1. *Si es incomprensible, es Matemáticas.*
2. *Si no tiene sentido, es Economía o Filosofía.*

Complemento de Juhbty

1. *Si no se cumple, es Estadística.*
2. *Si sale muy caro, es Economía.*

Sobre operaciones:

Anexo a la Ley de Murphy

En términos matemáticos precisos 1 + 1 = 2, donde el símbolo "=" significa "rara vez, si acaso".

Lema de Obtuso

Esa cuenta tan fácil y evidente que no repasa será la única que esté equivocada en todo el problema y hará que la solución esté lo más alejada posible de la realidad.

Ley del caos

Es el efecto mariposa aplicado a la resolución de ese problema en el que Vd., sin darse cuenta, cambió un signo menos por un más y obtuvo un resultado totalmente desquiciado.

Corolario fractálico

El caos es la textura sobre la que se escribe a diario la realidad discente

El factor CHI

Cantidad = 1/Calidad; o la cantidad es inversamente proporcional a la calidad.

Constante de Skinner (Factor chanchullo de Flannagan)

Es esa cantidad que cuando se multiplica, divide, suma o resta del resultado que usted ha obtenido, le proporciona el resultado que debería haber obtenido.

Sobre exámenes:

Teorema de Longines

Si se programa perfectamente el tiempo de un examen para poder hacer todos los problemas que lo forman, siempre le faltara tiempo en el último.

Corolario de Lotus

El último problema del examen siempre será el que sabía hacer mejor de todos, pero no le dará tiempo de acabarlo.

Ley de la proporcionalidad inversa

En un examen, el que menos sabe es el que necesita más tiempo para terminarlo.

Corolario de la experiencia

Salvo que sólo conozca su nombre.

Algoritmo del tiempo para examen

Para estimar el tiempo que necesitarán sus alumnos para realizar un examen siga los siguientes pasos:

a) *Estime el tiempo que usted crea necesario.*
b) *Multiplique la cantidad anterior por tres.*
c) *Añádale 10 minutos más por problema.*

Corolario de Richardson

Aún así les faltará tiempo.

Axioma de Justo

El primero que entrega un examen no es nunca el que más sabe, el último tampoco.

Principio de reciprocidad

El 80 por ciento del tiempo inicial de un examen suele dedicarse al 20 por ciento de la tarea. El 20 por ciento restante sirve para desesperarse.

Postulado de Milan

Cuando se borre el lápiz de un examen para pasarlo a bolígrafo siempre se perderá el paso que el profesor considera más importante.

Principio del tiempo relativo

Los últimos minutos de un examen suelen ser los más productivos y los que más cunden.

Corolario del copieteo

Sobre todo si te han pasado las respuestas del examen.

Lema de la Idea Feliz

Sólo cuando haya agotado todas las posibilidades y dándose por vencido entregue el examen, descubrirá una solución simple y evidente que estaba delante de sus narices.

Corolario de la remanencia nocturna

Es normal que esa noche se maldiga asimismo reiterativa y obsesivamente por culpa de esa solución que se le escapó.

Ley de Natalie sobre el Álgebra

No lo comprenderá hasta después del examen.

Ley del misterio descubierto

Lo que fue incapaz de entender cuando lo estudiaba y de aplicar en el examen lo comprenderá cuando el profesor explique como había que hacer el ejercicio.

Principio del agujero negro

El teorema más importante para comprender toda la teoría, se impartió el único día que usted faltó a clase y se olvidó de pedir los apuntes.

Ley del contrario

Cuando en un examen existan dos opciones en la misma clase, la que no le corresponde a usted es siempre la que mejor sabría hacer.

Sobre calculadoras:

Postulado de las teclas

La probabilidad de que se estropee una tecla de su calculadora es inversamente proporcional a la cantidad de veces que utiliza esa tecla en sus cálculos ordinarios.

Primera regla de Duracell

El número de posibilidades de que las pilas de su calculadora se agoten es directamente proporcional a la importancia de la operación que usted debe realizar.

Cronoludia Matemática
Ismael Roldán y José Muñoz

Axioma de la calculadora loca

Sólo después de haber entregado el examen comprobará que todas las soluciones son absurdas debido a las operaciones realizadas con su calculadora, ya que su hermano pequeño le ha cambiado el modo normal de la calculadora a uno desconocido.

Primera Ley de los exámenes finales

Las pilas de la calculadora de bolsillo, que han durado todo el curso, se agotarán durante el examen final de matemáticas.

Corolario

Si lleva pilas de repuesto, serán defectuosas.

Sobre resolución de problemas:

Axioma de Pericles

Un problema cerrado siempre tendrá algún resquicio por el que la solución se escapa. Si el problema es abierto no habrá forma de alcanzar las soluciones que escaparán por todos lados.

Lamentación de Rutheford

Por muy fácil que sea resolver un problema, un ordenador lo hace mejor y más rápido.

Comentario de Rille a la lamentación de Rutheford

Pero usted desconocerá el programa que lo realiza.

Principio de irracionalidad

En todo proyecto importante las variables son inmutables y las constantes nunca se mantienen como tales, siempre varían.

Principio de irrealidad

Al aprender a resolver ecuaciones, siempre tendrá n incógnitas cuando disponga de n ecuaciones, salvo en la vida real que siempre habrá n+1 incógnitas para las mismas ecuaciones.

UNIÓN
REVISTA IBEROAMERICANA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA

Marzo de 2005, Número 1, página 103
ISSN: 1815-0640

El rincón de los problemas

Uldarico Malaspina Jurado

Pontificia Universidad Católica del Perú
umalasp@pucp.edu.pe

Problemas: oportunidades de aprendizaje, para alumnos y profesores

En esta sección nos proponemos no sólo plantear problemas o dar pistas para resolverlos, sino también hacer comentarios sobre su aplicación en el marco de la resolución de problemas como actividad fundamental en la formación matemática de los estudiantes y de los profesores.

Un aspecto importante al trabajar resolviendo problemas es la invitación a los participantes a plantearse nuevas preguntas a partir del problema dado o a hacerle modificaciones y resolver las nuevas cuestiones. Esta es una forma de estimular su creatividad y su actitud investigadora y en muchos casos se presentan excelentes ocasiones para visualizar conexiones con otros campos de la matemática u otros campos del conocimiento.

Los lectores quedan invitados a enviarme sus comentarios, ya sea como consecuencia de la aplicación del problema o de las reflexiones que les suscite lo escrito en esta sección.

Uldarico Malaspina Jurado

Uldarico Malaspina Jurado (Caraz, Perú, 1948) es Magíster en Matemáticas y ha realizado estudios de post grado en la Universidad de Bonn, Alemania. En la actualidad es Profesor Principal y Director Académico en la Pontificia Universidad Católica del Perú. Dirige el IREM-Perú y es Presidente de la Comisión de Olimpiadas de la Sociedad Matemática Peruana. Autor y coautor de libros y artículos sobre educación matemática y sobre economía matemática. Ha participado como conferencista en diversos foros nacionales e internacionales.

UNIÓN
REVISTA IBEROAMERICANA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA

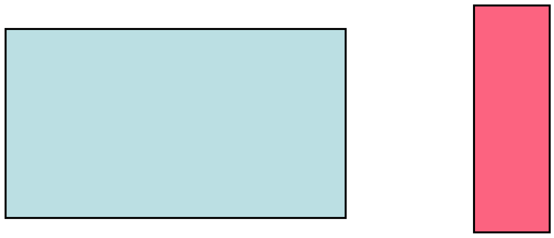
Marzo de 2005, Número 1, páginas 105 - 106
ISSN: 1815-0640

El rincón de los problemas

Uldarico Malaspina Jurado

Pontificia Universidad Católica del Perú
umalasp@pucp.edu.pe

Problema



Se tienen dos láminas rectangulares: una de 9 cm de largo por 5 cm de ancho y otra de 6 cm por 2 cm,

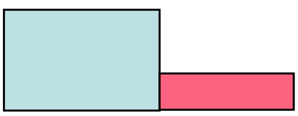
¿Cómo es la figura plana de *<u>mayor</u>* *perímetro que se puede formar pegando un lado completo de una de las láminas a uno de los lados de la otra? Justificar e ilustrar gráficamente.*

Este es un problema sencillo de optimización, que puede ser planteado en diversos niveles educativos, inclusive a niños de niveles muy básicos, si tienen como conocimientos previos la idea de perímetro, medición de segmentos y suma y comparación de números.

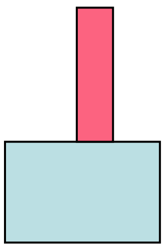
Observemos que no se está pidiendo una respuesta numérica y que no es indispensable conocer numéricamente el perímetro máximo para resolver el problema.

Si el profesor deja tiempo para que los alumnos examinen el problema con tranquilidad y tiene suficiente cuidado para orientar adecuadamente y no hablar más de lo indispensable, el problema brinda excelentes oportunidades para ejercitar el ensayo y error; para estimular la intuición y hacer conjeturas; para rechazar o mantener una conjetura; para agudizar la capacidad de observación buscando la forma más fácil de obtener el perímetro de cada figura que forme; para encontrar situaciones equivalentes; etc.

Es muy importante en la formación del pensamiento matemático de los niños pasar - por propio descubrimiento - de la obtención del perímetro haciendo sumas de longitudes muy concretas, a la obtención por casos equivalentes, y hasta a la obtención por una sustracción. Para estos pasos es fundamental el adecuado y oportuno papel del profesor, que en muchos casos será el de guardar silencio, sin dejar de estimular.



$P = 5 + 9 + 2 + 6 + 2 + 6 + 1 + 9 = 40$



Al obtener el perímetro de la figura de la derecha, luego de hacer unos cálculos similares al caso de la izquierda, los niños suelen descubrir que estas dos figuras son "equivalentes" (aunque no usen esta expresión), en el sentido de tener el mismo perímetro, y generalizar a todos los casos en que la unión de las láminas se ha hecho pegando el lado más angosto del rectángulo pequeño.

Una fase de mayor abstracción o de percepción matemática es observar que en todos estos casos el perímetro es simplemente 44 – 4, porque 44 es la suma de los perímetros de ambos rectángulos y 4 es el doble de 2, que es la parte que "se pierde" al pegar.

Posiblemente la parte más difícil del problema es la justificación. Lo más frecuente es encontrar un convencimiento de haber llegado a una solución correcta, pero no poder sustentar una justificación rigurosa. Según mis experiencias, esto ocurrió en todos los niveles en los que planteé el problema. Invito a los lectores a proponer este problema a alumnos de distintos niveles y a contarme sus experiencias, en particular sobre la justificación.

Nuevas preguntas:

a) *¿Cómo es la figura plana de <u>menor</u> perímetro que se puede formar pegando un lado completo de una de las láminas a uno de los lados de la otra? Justificar e ilustrar gráficamente.*
b) *¿Cómo es la figura plana de <u>mayor</u> perímetro que se puede formar pegando <u>parte</u> de un lado de una de las láminas a uno de los lados de la otra? Justificar e ilustrar gráficamente.*
c) *¿Cómo es la figura plana de <u>menor</u> perímetro que se puede formar pegando <u>parte</u> de un lado de una de las láminas a uno de los lados de la otra? Justificar e ilustrar gráficamente.*
d) *¿Cómo es la figura plana de <u>mayor</u> perímetro que se puede formar pegando <u>parte</u> de un lado de una de las láminas a uno de los lados de la otra, si <u>no pueden estar unidas sólo por un punto</u>? Justificar e ilustrar gráficamente.*

La pregunta (a) suele ser propuesta por los participantes de manera bastante natural cuando se les pide que piensen en alguna otra pregunta relacionada con la situación planteada. En las experiencias tenidas, las preguntas (b) y (c) surgieron pocas veces. Más bien las propuse para actividades grupales. La pregunta (d) sólo la propuse trabajando con estudiantes de segundo ciclo universitario y con profesores de matemática de secundaria. Lo interesante es que partiendo de una situación muy simple, se llega a un problema de optimización que no tiene máximo. Es una linda oportunidad para relacionar conceptos de intervalos semiabiertos, funciones afines, el máximo de una función continua y decreciente definida en un intervalo semiabierto, etc. y para trabajar con un problema que queda resuelto cuando se concluye que no es posible encontrar una situación óptima. La función $f(x) = 44 – 2x$, definida en el intervalo $]0; 2]$ no tiene máximo.

UNIÓN
REVISTA IBEROAMERICANA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA

Libros

Marzo de 2005, Número 1, páginas 107 - 108
ISSN: 1815-0640

Ángel Alsina

Desarrollo de competencias matemáticas con recursos lúdico-manipulativos para niños y niñas de 6 a 12 años

Narcea Ediciones, Madrid, 2004.

156 páginas. ISBN: 84-277-1453-X

Es éste un libro muy interesante y muy útil para los maestros de educación primaria, así como para los estudiantes para maestro y para aquellas personas interesadas en la educación matemática.

El libro aporta reflexiones sobre diferentes aspectos de las matemáticas de primaria, acompañadas de una selección de actividades para niños y niñas de 6 a 12 años que pretenden desarrollar competencias matemáticas, todo ello utilizando recursos lúdicos-manipulativos.

Comienza Alsina con una introducción donde hace una reflexión acerca de la transformación que está sufriendo la enseñanza obligatoria en diversos países, en los que el concepto de competencia matemática está sustituyendo al concepto contenido. Justifica, además, cómo el juego es el recurso ideal para conseguir que los niños aprendan y tomen conciencia de este aprendizaje, insistiendo en que “este recurso debe quedar subordinado a la matemática y no a la inversa”. No se trata, pues, de jugar por jugar, sino de aprender matemáticas mediante juegos. Esta introducción acaba con un decálogo del juego, esto es, diez argumentos más que suficientes para convencernos de las ventajas del uso del juego en clase de Matemáticas.

El libro se estructura en cinco capítulos que responden a:

1. Razonamiento lógico-matemático.
2. Números y operaciones.
3. Formas geométricas y situación en el espacio.
4. Medida.
5. Organización de la información: estadística y probabilidad.

Cada uno de estos capítulos comienza con una reflexión conceptual del bloque a tratar, señalando las competencias que deben adquirir los alumnos.

A continuación sugiere algunos criterios metodológicos para realizar actividades sobre cada tema, mientras que en la última parte, que es la más amplia, plantea, después de describir el material didáctico que va a utilizar, una serie de actividades que va graduando en nivel de dificultad y, en algunos casos, secuenciando por edad.

Los materiales didácticos elegidos son un material lógico estructurado en el capítulo 1, en el capítulo 2 regletas de colores, ábaco, juegos numéricos (cartas, bingo, dominó, etc), y geoplano y el tangram en el capítulo 3.

El capítulo de Medida lo divide en cinco talleres: longitud, masa, capacidad, tiempo y almacenamiento informático de la información, haciendo en cada uno de ellos un listado de materiales de la vida cotidiana que se pueden utilizar.

Es de resaltar el último taller por ser novedoso en la enseñanza de los temas de la medida a nivel de Primaria y que refleja el interés del autor por conectar con situaciones reales, ya que los disquetes, CD, DVD, DVD-R, Zips, etc son objetos de la vida cotidiana que usan los alumnos de Primaria.

En el capítulo 5, dedicado a la organización de la información, la propuesta que hace se basa en definir proyectos estadísticos (¿Cómo somos los alumnos de nuestra clase?) y en experimentar con fenómenos aleatorios (los dados y las probabilidades), siguiendo las recomendaciones de los últimos estándares norteamericanos de matemáticas (NCTM, 2000).

En resumen, creo que este libro aporta a todos los educadores matemáticos dos aspectos importantes:

1. Las reflexiones que hace acerca de las diferentes competencias matemáticas a desarrollar en los niños.
2. Una colección de ficha de actividades motivadoras, a partir del uso de materiales didácticos o de situaciones reales, que vienen ya elaboradas para que el maestro las pueda llevar al aula.

Josefa Hernández Domínguez