UNIÓN

REVISTA IBEROAMERICANA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA

Número 7

Septiembre de 2006

Índice

UNIÓN
REVISTA IBEROAMERICANA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA

Septiembre de 2006, Número 7, página 2
ISSN: 1815-0640

Unión. Revista Iberoamericana de Educación Matemática es una publicación de la Federación Iberoamericana de Sociedades de Educación Matemática **(FISEM)**. Tiene una periodicidad trimestral, de modo que se publican cuatro números al año, en los meses de marzo, junio, septiembre y diciembre.

UNIÓN
REVISTA IBEROAMERICANA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA

Septiembre de 2006, Número 7, páginas 3 - 21
ISSN: 1815-0640

La proyección estereográfica… sicut in caelo et in terra

Juan Antonio García Cruz

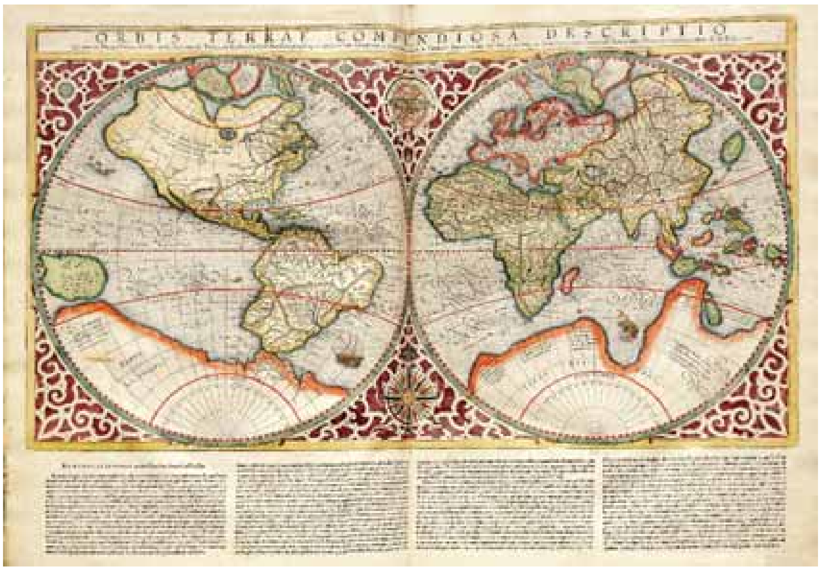
Resumen

Bien conocida desde la antigüedad, fue durante el Renacimiento cuando la proyección estereográfica adquirió su papel predominante como procedimiento matemático para la construcción de planisferios. Este artículo es una mezcla de historia de la cartografía y matemática elemental. Se abordan los modos polar y meridiana de la proyección estereográfica. Finalmente, se incluyen algunas demostraciones matemáticas relacionadas.

Abstract

Stereographic projection was well known from early times but it is during the Renaissance when plays a predominant role as a mathematical projections for the construction of planiglobes. This paper is a mix of history of cartography and elementary mathematics. It is mainly concerned with two modes of the stereographic projection: polar and meridional. Finally some related mathematic proofs are provided.

En 1595, un año después de la muerte de su padre, Rumold Mercator hijo y heredero de la tradición cartográfica de Gerard Mercator (1512-1594), publica la obra póstuma de su progenitor: *Atlantis Geographia Nova Totius Mundi*. Esta magna obra contiene un mapamundi en proyección estereográfica meridiana que inicia el camino triunfal, de esta proyección, hacia una de las más importantes en la historia de la cartografía y, sin duda, una de las más utilizadas, pues así lo fue durante los siglos XVII al XVIII.



(Fig. 1: *Orbis Terrae*…, R. Mercator, 1587)

Orbis Terrae Compendiosa Descriptio, cuyo autor es Rumold Mercator y tiene fecha de 1587, inaugura una forma novedosa de presentar los nuevos descubrimientos geográficos. Resaltando además la redondez de la Tierra, al mostrar una imagen compuesta por dos hemisferios circulares tangentes y surcados por arcos de circunferencia que representan los meridianos y paralelos terrestres. Debió parecerle tan diferente a lo utilizado habitualmente que, el mismo Rumold, se vio obligado a justificar la elección de esta proyección y añadió las siguientes palabras a su presentación: “Sciet lector nos eam complanandae sphaerae rationem secutos esse, quam Gemma Frisius in suo Planisphaerio adiuvenit, quae omnium longe optima est”[1]. Como veremos hay mucho de razón en la afirmación de Rumold sobre la mejor forma de representar la esfera sobre un plano a través de la proyección estereográfica.

Superadas las limitaciones impuestas por la autoridad de Ptolomeo al uso de las proyecciones descritas en su *Geographia*, el siglo XVI vio el nacimiento y desarrollo de varias representaciones que enfatizaban, sobre todo, la redondez de la Tierra. Para que el lector adquiera una perspectiva de la proyección estereográfica, hemos elegido tres proyecciones no estereográficas importantes durante el siglo XVI. Las dos últimas fueron publicadas en dos obras de amplia circulación debido al auge y desarrollo de la imprenta. Además, estas dos tienen a favor el sugerir la redondez de la Tierra, pero todas tienen en contra la distorsión tanto en la forma de los continentes, como en las distancias y en las posiciones relativas o ángulos entre los distintos puntos geográficos.

(Fig. 2: Segunda proyección de Ptolomeo. *Geographia*, varias ediciones siglo XV y XVI)

[1] Sabio lector, hemos aplanado la esfera según el razonamiento expuesto por Gemma Frisius en su Planisferio, que con mucho es el mejor.

(Fig. 3: Proyección Cordiforme. Orontius Finaeus Delphinas ca.1536)

(Fig. 4: Proyección Oval. Theatrum Orbis Terrarum. A. Ortelius. Leiden, 1570)

La *Geographia* de Claudio Ptolomeo fue la obra cartográfica más importante de la civilización greco-latina que ha llegado hasta nuestros días. Recuperada y reconstruida durante el siglo XV tuvo numerosas ediciones, que incorporaron información geográfica actualizada, y se publicó hasta bien entrado el siglo XVIII. El *Theatrum Orbis Terrarum* de Abraham Ortelius fue el primer atlas con el que el siglo

XVI se liberó de la autoridad de C. Ptolomeo e inauguró la nueva cartografía que va a ser dominante hasta la llegada del siglo de las luces y el nacimiento de la cartografia científica. La proyección cordiforme es una invención matemática del siglo XVI, debida a Johannes Stabius (muerto en 1522), profesor de matemáticas en Viena, y fue dada a conocer por primera vez por otro importante matemático y geógrafo del siglo XVI, Orontius Finaeus (1494-1556).

La proyección de la esfera sobre el plano

La representación sistemática de parte o toda la superficie de un sólido "redondo", especialmente la Tierra, en un plano se llama proyección. Sin embargo, no es posible representar la superficie de la Tierra sobre un plano, sin que se produzca algún tipo de distorsión. Durante los últimos dos mil años se han producido más de cien tipos distintos de proyecciones. Cada proyección tiene sus características particulares y proporciona, en consecuencia, una imagen diferente de la Tierra. Todas muestran distorsión, pues todas deforman la imagen de los continentes. Todas también sesgan la distancia o la dirección entre dos lugares. Elegir una proyección no es una tarea simple, es cuestión de encontrar una, la que mejor encaje con el propósito del mapa.

Este trabajo no es una exposición sistemática de las diferentes proyecciones, ni siquiera un estudio exhaustivo de una en particular. Pretendemos introducir al lector en un campo interdisciplinar que aúna, entre otras, las disciplinas de Historia, Geografía y Matemáticas. Con ese fin, hemos elegido una de las más importantes proyecciones de todos los tiempos, la proyección azimutal estereográfica. Pues, aunque conocida en su versión estelar desde la lejana antigüedad, es en el Renacimiento y sobre todo a finales del siglo XVI y comienzos del XVII cuando se convierte en la proyección más utilizada para representar la imagen de la Tierra, y por ende de los descubrimientos geográficos que tiene lugar durante esa época, tan importante para la historia y expansión de la civilización occidental.

En la proyección acimutal estereográfica la esfera terrestre se proyecta sobre un plano tangente a la misma. El punto de tangencia determina el modo o aspecto de la proyección. Si el punto de tangencia es un polo se denomina *estereográfica polar*; si es un punto sobre el ecuador, se denomina *estereográfica meridiana* o *ecuatorial* y si es cualquier otro punto sobre la esfera distinto de los anteriores, se denomina *estereográfica horizontal* u *oblicua*. El término estéreo proviene del griego στερεο, cuyo significado es sólido. Calificar con el término sólido a una proyección tiene por principal objetivo, contraponer a la concepción plana de la superficie terrestre la solidez redonda. De hecho, esta proyección empezó a utilizarse ampliamente una vez establecida y aceptada, sin lugar a dudas, la esfericidad del planeta Tierra.

(Fig. 5: Proyecciones estereográficas polar, meridiana y horizontal)

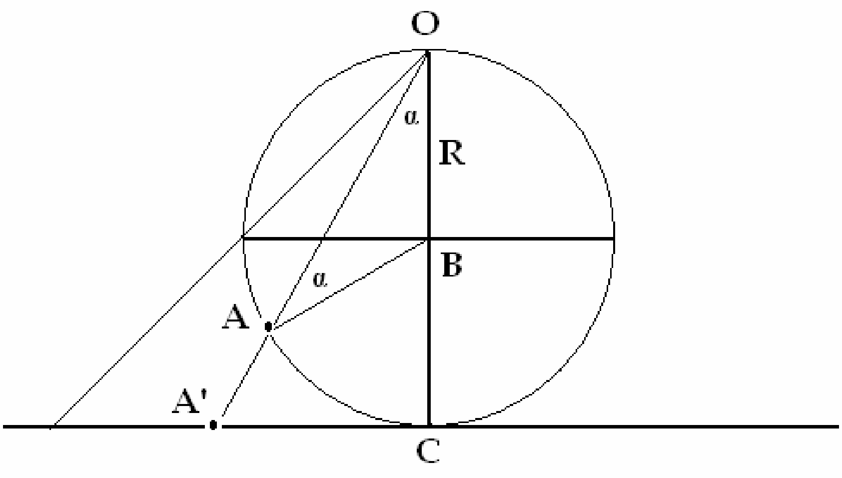
Propiedades matemáticas de la proyección estereográfica

Mediante la proyección estereográfica, cada punto sobre la esfera se proyecta en un plano tangente a la misma y diametralmente opuesto al punto del observador, llamado vértice de proyección. El punto sobre el plano resulta de la intersección de este plano con una recta que contiene al vértice de proyección y al punto sobre la esfera.

Veamos que la proyección estereográfica es una inversión.

Una inversión es una transformación en el espacio que hace corresponder a un punto A, otro punto A', alineados ambos con un punto O llamado centro de inversión, tal que: $\overline{OA} \times \overline{OA'} = K$, donde K es un número real, que se conoce como potencia de inversión.

A continuación demostraremos que toda proyección estereográfica es una inversión.



(Fig. 6)

Sea O el punto del observador, vértice de la proyección, puede ser el polo o cualquier otro punto. Sea A' la proyección sobre el plano del punto A, situado sobre la esfera.

El triángulo ABO es isósceles.

Tenemos, AB=OB=R (radio de la esfera) y $\dfrac{\overline{OA}}{sen(180º-2\alpha)} = \dfrac{R}{sen\alpha}$.

De esta última relación tenemos que $\overline{OA} = 2R\cos\alpha$.

Por otro lado, en el triángulo OCA', tenemos que $\overline{OA'} = \dfrac{2R}{\cos\alpha}$.

De ambas expresiones se concluye que $\overline{OA}\times\overline{OA'} = (2R)^2$.

Esta última relación prueba que la proyección estereográfica es una inversión, de polo el vértice de la proyección y potencia el cuadrado del diámetro de la esfera proyectada.

Como inversión que es, la proyección estereográfica comparte las propiedades de esta transformación. Así, tenemos que:

La transformada de una circunferencia que pasa por el centro de inversión es una recta y la de una circunferencia que no pasa por el centro de inversión es otra circunferencia.

Estas dos propiedades nos confirman lo que vemos en los planisferios anteriores (Fig. 5) donde, en la proyección estereográfica meridiana, el ecuador terrestre y el meridiano que pasa por el vértice de la proyección se transforman en dos líneas rectas en el plano. También observamos que cada círculo máximo sobre la esfera terrestre, no ecuatorial, tiene como transformado una circunferencia sobre el plano.

Pero hay una propiedad matemática que es de capital importancia para la proyección estereográfica:

En toda inversión, el ángulo entre dos curvas es igual en valor absoluto al de sus inversas y de sentido contrario.

Luego, la proyección estereográfica conserva los ángulos (proyección conforme). Esta es la razón por la que la proyección muestra sin distorsión los elementos infinitesimales, forma y ángulos, aunque en el caso de regiones mayores se muestre distorsión en la forma.

Esta propiedad fue notada, por primera vez, por el astrónomo y matemático Edmond Halley (1656-1742), quien en una memoria publicada en 1695-96 en las *Philosophical Transactions*, escribió:

"En la proyección estereográfica, los ángulos bajo los cuales los círculos se intersectan, los unos con los otros, son en todos los casos iguales a los ángulos esféricos que representan; lo cual es quizás una propiedad tan valiosa como la de que todos los círculos de la esfera parezcan círculos en ella (la proyección); pero esto, no siendo comúnmente conocido, no debe asumirse sin demostración".

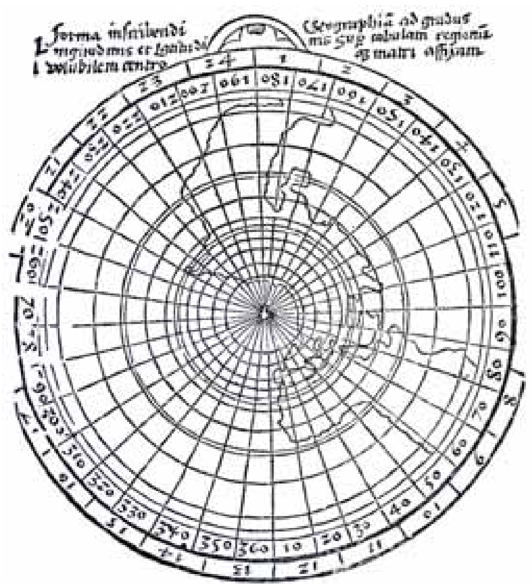
Esta propiedad es la que hizo de la proyección estereográfica una de las preferidas por los cartógrafos de los siglos XVI al XVIII, pues muestra la imagen de la Tierra con moderada distorsión, al conservar los ángulos.

Proyección estereográfica polar

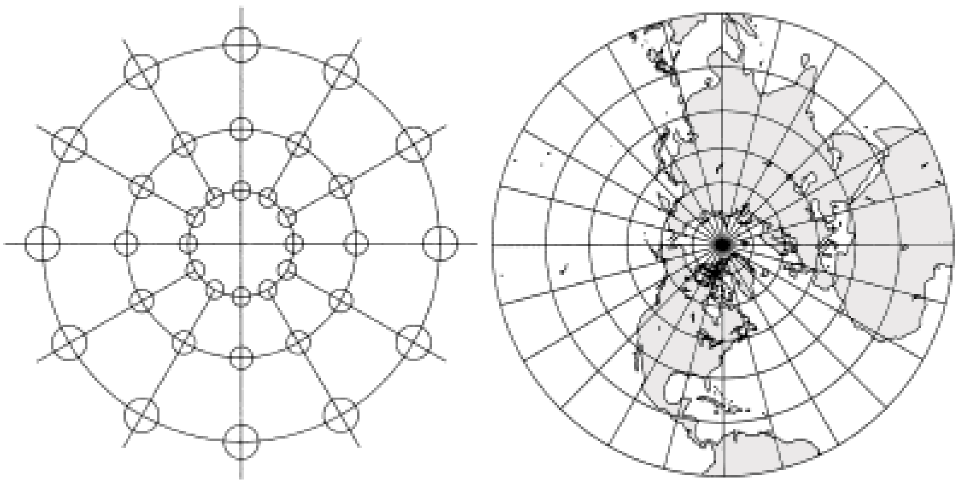
En su forma más simple, *proyección estereográfica polar*, fue conocida desde la antigüedad clásica. Ptolomeo le dedicó un tratado titulado *Sphaera a planetis projectio in planum*, texto cuyo original griego se ha perdido pero que ha llegado a nuestros días en su versión árabe. El hispano Maslama ben Ahmed al-Majriti (muerto en Córdoba en 1007 ó 1008) lo tradujo del griego al árabe y dicha traducción fue utilizada por Hermannus Secundus para realizar la versión latina en el siglo XII. Apareció por primera vez impresa como un apéndice a la *Geographia* de Ptolomeo publicada en Roma en 1507 y editada por Marcus Beneventanus, con el título *Planisphaerium Ptholemaei*. Fue utilizada por A. Dürer en uno de los primeros atlas estelares impresos, *Imagines coeli septentrionales cum duodecim imaginibus zodiaci* (Fig. 7), publicado en 1515.

(Fig. 7)

También fue incorporada por Gregor Reisch (ca. 1470-1525) en su famosa enciclopedia de principios del siglo XVI, *Margarita Philosophica nova* (Estrasburgo, 1512). La Fig. 8 muestra los elementos básicos de este modo de la proyección estereográfica: Vértice de la proyección el Polo Sur, opuesto al centro del mapa que se sitúa en el Polo Norte; los meridianos son, al pasar por el vértice de la proyección, líneas rectas que irradian del Polo Norte; los paralelos son circunferencias concéntricas.



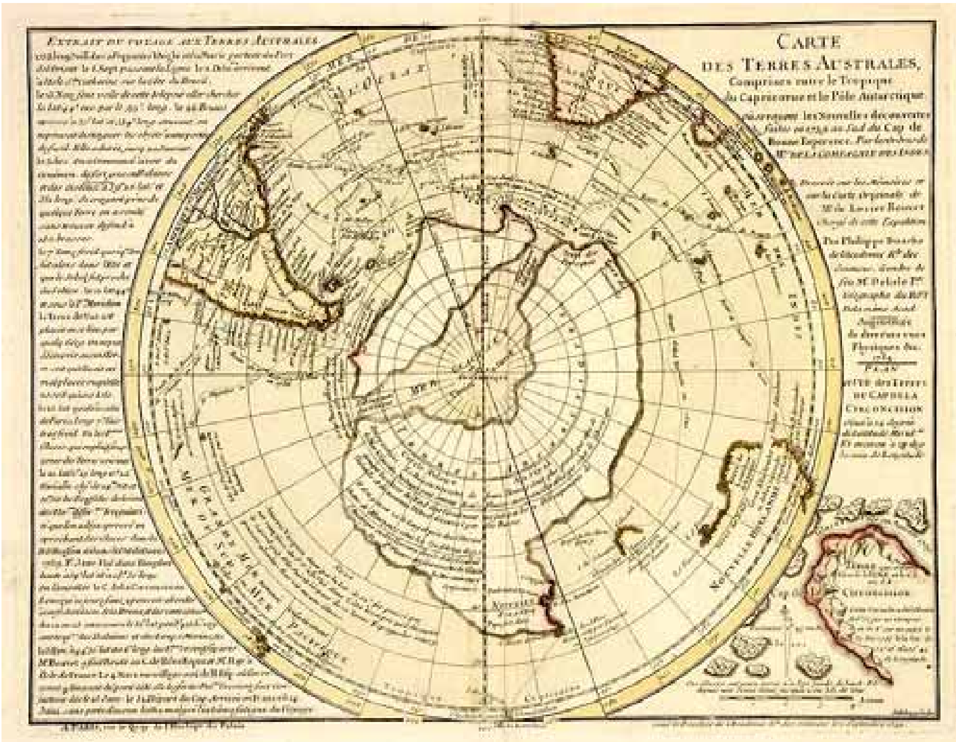
(Fig.8: Grabado de Margarita Philosophica nova)



(Fig.9: Indicatrix de Tissot para la Proyección estereográfica polar)

Los meridianos se muestran como líneas rectas igualmente espaciadas que se cortan en el polo. Los ángulos entre ellos corresponden, en la proyección, con los valores reales sobre la esfera terrestre (proyección conforme). Los paralelos son círculos desigualmente espaciados centrados en el polo. El espaciado aumenta según nos alejamos del polo (Fig. 9), aumentando de esta forma la distorsión en la forma y las distancias como muestra la indicatrix de Tissot[2] para esta proyección de 30º de espaciado reticular. El ecuador se muestra mediante la circunferencia más alejada del polo, frontera de la proyección. La distorsión es moderada hasta los 30 grados de latitud norte, a partir de ahí, aumenta esta hacia el ecuador. Debido al aumento de la distorsión con la lejanía del polo, no se suele proyectar más allá del ecuador para cada hemisferio.

Suele utilizarse para representar la imagen de los hemisferios centrada en los polos y, sobre todo, la imagen de las regiones polares. Cuando la representación se restringe a estas, se obtienen imágenes con muy moderada distorsión en forma y distancia. Philippe Bauche utilizó esta proyección (Fig. 10) para su famosa *Carte des Terres Australes* (1754), que representa la región austral comprendida entre el trópico de capricornio y el polo sur, región de moderada distorsión. Observamos la imagen de la Antártica como un continente dividido y el comienzo del trazado del continente Australiano todavía en fase de descubrimiento y exploración. Este mapa es una prueba del uso tan extendido que se hizo de esta proyección hasta bien entrado el siglo XVIII.

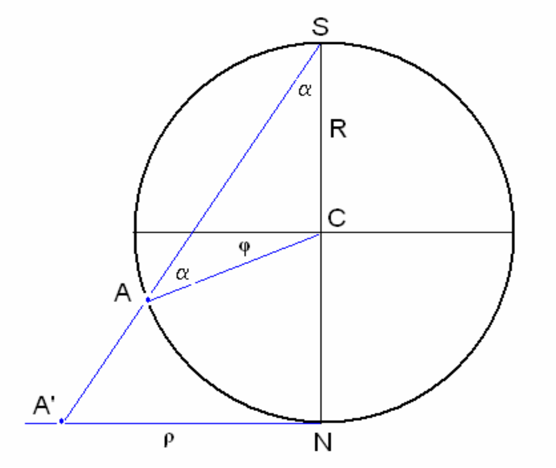


(Fig. 10: Carte des Terres Australes, P. Bauche, 1754)

[2] Esta herramienta fue desarrollada por Auguste Nicolas Tissot en un artículo publicado en 1859 en Comptes Rendus des Séances de l'Académie des Sciences. La indicatríz destaca propiedades de la proyección en un punto, mostrando como se distorsionan los atributos de ángulo, distancia y área. Emplea un código visual sencillo basado en círculos, elipses y segmentos rectilíneos. Cualquier círculo pequeño sobre la esfera o el elipsoide que representa a la Tierra, se transforma en un círculo o elipse plana centrada en el punto homólogo equivalente. Si se representan varios de estos círculos en diferentes localizaciones del mapa, utilizando el mismo radio para cada círculo correspondiente del globo terrestre, entonces la distorsión en cualquier punto del mapa se muestra por medio del tamaño y forma del círculo o elipse. Así, cuanto más próxima sea la imagen a un círculo corresponde menor distorsión en la forma y la distorsión en las distancias se indica por el aumento el tamaño del círculo o elipse en la representación.

Coordenadas de la proyección estereográfica polar

La proyección estereográfica polar transforma el punto A sobre la esfera de coordenadas (λ,φ)[3] en un punto sobre el plano A' de coordenadas (*x, y*). Sea R el radio de la esfera.



(Fig. 11)

Dado que el triángulo ACS es isósceles, se tiene que $\alpha = \dfrac{90^{\circ} - \varphi}{2}$.

Todos los puntos sobre la esfera que comparten latitud con A están sobre una circunferencia, cuya proyección es otra circunferencia plana de radio ρ.

De la figura 10 se sigue que $\rho = 2R\,tg\left(\dfrac{90^{\circ} - \varphi}{2}\right)$.

Una vez situados los puntos sobre el plano de proyección, las coordenadas de cada punto del mismo dependen del radio ρ y de la longitud λ, según las expresiones:

$$\begin{cases} x = 2R\,tg\left(\dfrac{90^{\circ} - \varphi}{2}\right) sen\lambda \\ y = -2R\,tg\left(\dfrac{90^{\circ} - \varphi}{2}\right) \cos\lambda \end{cases}$$

Estas fórmulas nos indican que el radio del círculo de proyección depende de la latitud φ, y que además esa dependencia se verifica a través de la función $tg\left(\dfrac{90^{\circ} - \varphi}{2}\right)$.

[3] Logitud y latitud, respectivamente.

Este hecho lo utilizaremos en el siguiente apartado para justificar matemáticamente la representación de la proyección estereográfica polar, según un procedimiento muy extendido durante el siglo XVII.

Construcción de la proyección estereográfica polar

Bernadus Varenius (1621-1650), aunque de origen alemán, está considerado como uno de los más importantes científicos holandeses del siglo XVII. Estudió en Leyden donde se licenció en Medicina en 1648. También estudió matemáticas bajo la supervisión de Willebrord Snellius que fue discípulo de Simon Stevin. En su obra *Geographia Generalis* muestra su inclinación hacia la ciencia moderna, cosmología de Copérnico, y hacia una precisa formulación matemática de los problemas geográficos. Consideró a la Geografía como parte de la Matemática: *Geographia dicitur scientia Matemática mixta*[4]*….* Esta concepción fundamentalmente cuantitativa y teórica de la Geografía, exposición sistemática de los conceptos y propiedades mediante el canón euclídeo de definiciones y proposiciones, sea quizás lo que atrajo la atención de Isaac Newton quien consideró a la obra de Varenius como la más importante obra geográfica de su tiempo y realizó una nueva edición latina en Cambridge, en 1672, a la que añadió nuevos datos. Destacamos que esta fue la primera publicación de Isaac Newton. De los ocho métodos para trazar *las cartas geográficas universales*, que presenta la obra original de Varenius en el capítulo XXXII, los dos primeros corresponden a la proyección estereográfica en sus versiones polar y meridiana, dedicando el último a la versión horizontal de la misma proyección.

A continuación transcribo el método expuesto[5] por Bernadus Varenius para el trazado de la proyección estereográfica polar.

“En cualquier pieza plana o papel, tómese el punto P por el Polo, y con él como *Centre*, trácese la *Periphery* (circunferencia) grande o pequeña que corresponderá con el *Æquator*. Estos dos se pueden tomar a gusto, mientras que los otros puntos y *Peripheries* han de hallarse a partir de estos. Dividamos el *Æquator* en 360 *grados* y tracemos líneas rectas desde el *Centre* a cualquiera de estos *grados*, estos serán los Meridianos, de los que aquel trazado al comienzo del primer *grado* de los 360, será tomado como el primero, así el resto de los líneas mostrarán el resto de los Meridianos y *Longitudes* de la Tierra a partir del primer Meridiano. Ahora trazaremos los Paralelos de *Latitud*. Tenemos cuatro *Quadrantes*, o cuartos de *Æquator*, el primero 0, 90; el segundo 90, 180; el tercero 180, 270; y el cuarto 270, 0. Denotemos cada uno de ellos por medio del par de letras AB, BC, CD, DA, y tomemos uno de esos, por ejemplo el BC, de cada uno de sus *grados* y también de los 23 grados. 30

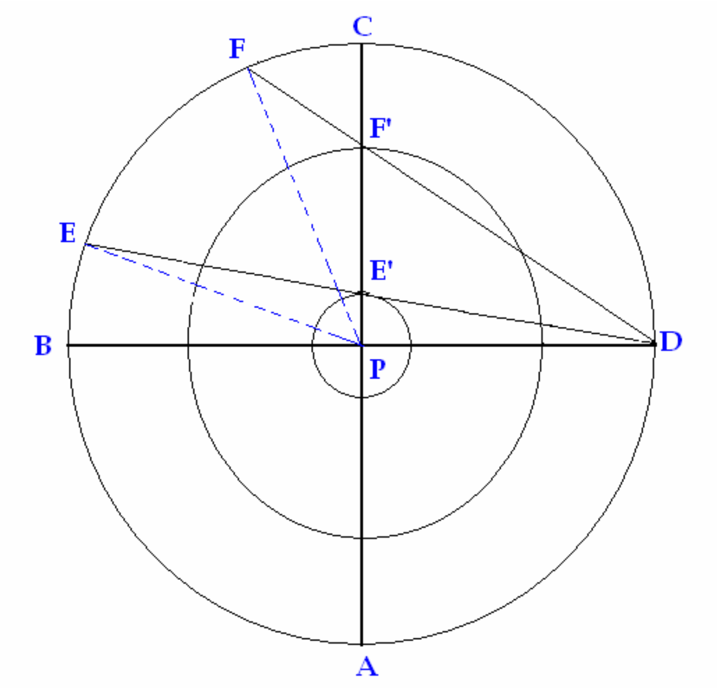
---

[4] La Geografía es una ciencia Matemática mixta…

[5] He traducido el procedimiento, de la versión inglesa publicada por Isaac Newton, que aparece integramente en Snyder (1993), respetando el estilo de la exposición que mezcla términos latinos y griegos latinizados, con vocablos de la lengua inglesa, en nuestro caso del castellano. Lo hemos hecho así, pues esto es una muestra de una época, no tan lejana, en la que el inglés no era todavía lengua científica y pedía prestado del latín y de otras lenguas, como el griego, los términos de vocabulario científico que necesitaba.

minutos y los 66 grados. 30 minutos, tracemos rectas hasta el punto D, (término del *Diámetro* BD) apliquemos la regla sólo a D y llevémosla a cada *grado* del *Quadrante* BC: y denotemos cada punto en los que esas rectas cortan al *Semidiámetro* PC, y con P como *Centre* describamos las *Peripheries* que pasan por cada uno de esos puntos sobre PC. Tales *Peripheries* serán los Paralelos de *Latitud* en los que situaremos números desde el *Æquator* hasta el punto P, en sucesión 1, 2, 3,… 90; tanto en el primer Meridiano AP como en su opuesto CP".

Analicemos la construcción anterior mediante el dibujo de la Fig.12.



(Fig. 12)

He utilizado las mismas letras que en la explicación de Varenius, pero añadiendo cuatro puntos (E, F, E' y F') y dos líneas de puntos auxiliares. Recordemos que ABCD corresponde con el ecuador y P con el Polo. Sean los ángulos BPE y BPF complementarios. La unión de E con D determina sobre CP el punto E' por el que se traza el círculo con centro en P que pasa por E'. De la misma forma la unión de F con D determina sobre CP el punto F' por el que se traza el círculo con centro en P que pasa por F'. Si BPE = (90º – φ), entonces el paralelo que pasa por E' está a la latitud φ. Recordemos que la numeración, asignación de latitud a los paralelos, se hace desde C a P (corresponde a la marca C la latitud 0º y a la P la latitud 90º).

El ángulo BPE es igual a dos veces el ángulo BDE, pues el primero es un ángulo central y el segundo es un ángulo inscrito en la circunferencia y ambos abarcan el mismo arco BE.

Luego el ángulo BDE = (90º – φ)/2.

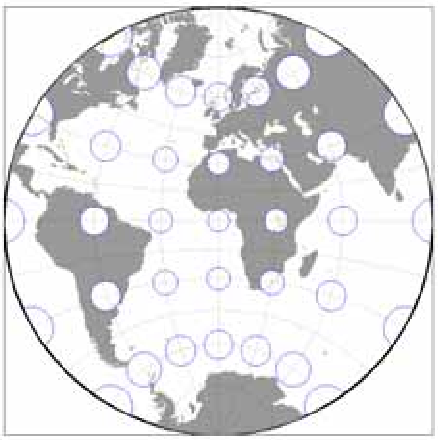
Se tiene que PE' = $tg\,\frac{90^{\circ}-\varphi}{2}$.

Concluimos que el punto E' está sobre el círculo de centro P y radio $tg\,\frac{90^{\circ}-\varphi}{2}$.

Con esto demostramos que el dibujo de Varenius corresponde con la proyección estereográfica polar.

Proyección estereográfica meridiana

Una proyección estereográfica se denomina meridiana o proyección en el plano de un meridiano, cuando la circunferencia frontera representa un meridiano y los polos norte y sur aparecen, respectivamente, en lo alto y bajo del mapa. Tanto el meridiano central como el ecuador son dos líneas rectas y forman los diámetros perpendiculares de la circunferencia frontera. Los otros meridianos son arcos de circunferencia desigualmente espaciados que se intersecan en cada polo. El espaciado aumenta según la lejanía respecto del meridiano central. Como hemos dicho, el ecuador es una línea recta. Los otros paralelos son arcos de circunferencia desigualmente espaciados y cóncavos hacia el polo más próximo. El espaciado aumenta gradualmente, a lo largo del meridiano central, con la lejanía respecto del ecuador, pero es igual en el meridiano frontera, a 90º respecto del meridiano central. La distorsión, como muestra la figura, es moderada en las cercanías del centro del círculo y aumenta radialmente con el alejamiento hacia la circunferencia frontera, donde se da la mayor distorsión en forma y distancias.

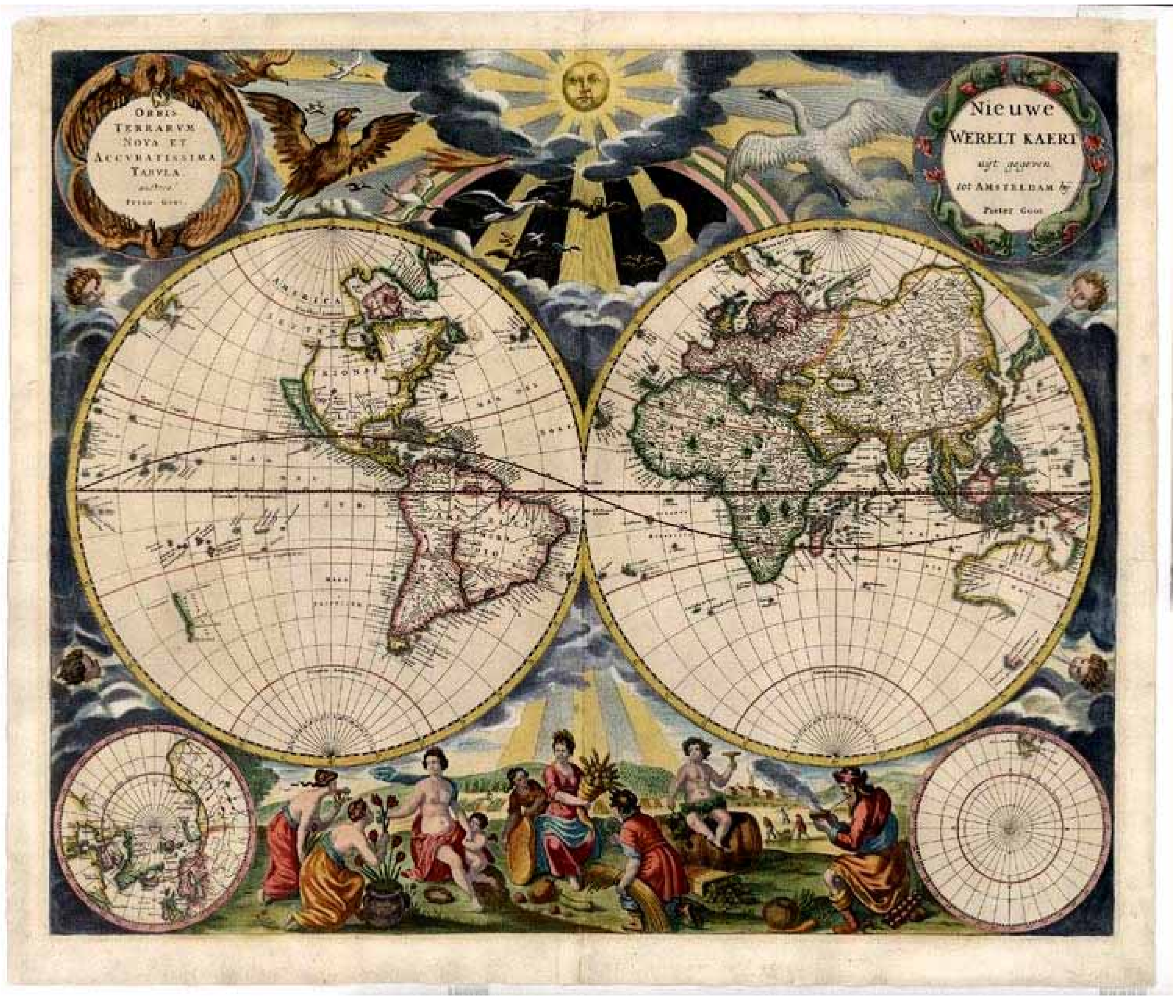


(Fig. 13: Proyección estereográfica meridiana con indicatrix de Tissot)

Si se representa un solo hemisferio, se obtiene una imagen no muy distorsionada en la forma y nada en los ángulos, al ser una proyección conforme. Este hecho hizo que se utilizara tanto a partir de finales del siglo XV. También se conoce con el nombre de proyección ecuatorial. Michael Coignet en su *Introductio mathematica* al *Speculum Orbis Terrarum* de G. de Jode (Amsterdam, 1578) la denomina *Figura hemispherii Arzahelis*, haciendo honor al origen árabe de este modo de la proyección estereográfica. La versatilidad de este modo de proyección se pone de manifiesto en el mapa (Fig. 14) debido a Jodocus Hondius (1563-1612), quien a comienzos del siglo XVII fue el editor de Mercator, e incluso añadió producción propia a la empresa y de esta forma, el nuevo atlas, paso a conocerse con el nombre de Atlas de Mercator-Hondius. El mapa fue elaborado por Hondius para mostrar los viajes de descubrimiento realizados al Océano Pacífico y a las regiones australes por los ingleses Drake y Cavendish a fines del siglo XVI.

(Fig. 14: Vera Totius Expediciones Nauticae, J. Hondius, ca 1595)

Al mover el vértice de la proyección sobre el Ecuador se obtiene otra visión del Mundo en dos hemisferios, la imagen pone de manifiesto otra importante ventaja de la proyección estereográfica meridiana. También se da la posibilidad de combinar la proyección estereográfica polar y meridiana en una representación muy completa del globo terrestre, como así ocurre con *Nieuwe Werelt Kaert* de Peter Goos (Fig. 15) publicada en Ámsterdam en 1666. Los hemisferios occidental y oriental se representan en estereográfica meridiana, surcados por la proyección del círculo de la eclíptica, mientras que para las regiones polares se elige una más adecuada representación mediante la estereográfica polar.



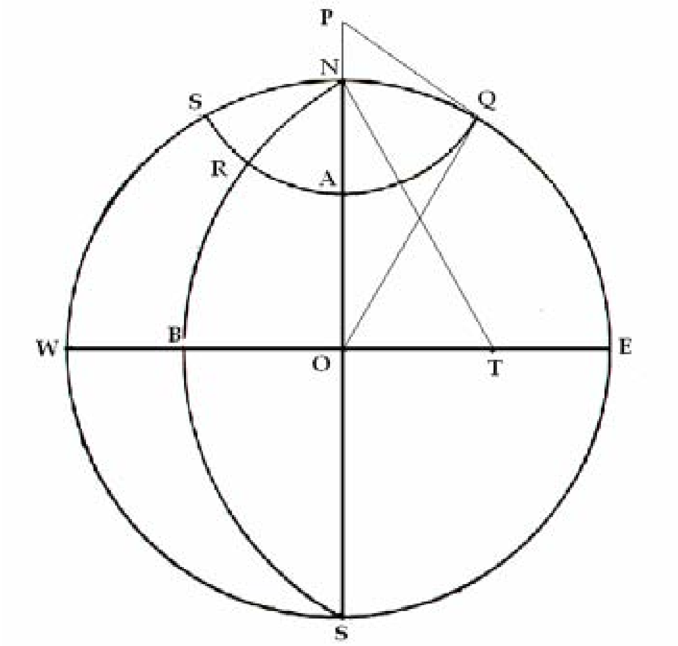
(Fig. 15: Nieuwe Werelt Kaert, Peter Goos, 1666)

Construcción de la proyección estereográfica meridiana[6]

Trácese el círculo base y los dos diámetros perpendiculares, NS y EW (Fig. 16).

Sea el arco EQ que mide φ grados. Trácese por Q la tangente a la circunferencia que corta al diámetro NS en el punto P. Con centro en P trácese el arco circular QRS. Este arco representa el paralelo de latitud φ. Sobre el diámetro EW llévese la longitud PQ igual a OT. Con T como centro y radio TN trácese el arco circular NRS. Dicho arco representa el meridiano de longitud φ.

[6] Esta construcción se expone en la obra de Deetz y Adams citada en la bibliografía sin que se justifique matemáticamente su correspondencia con las fórmulas de la proyección estereográfica meridiana. Así, los libros modernos sobre cartografía siguen la tradición histórica de obviar la justificación matemática de sus procedimientos de trazado, relegando a la simple visión de la construcción la suficiente justificación: La explicación de esto depende de la doctrina de las secciones cónicas, y se comprende mejor por la vista que por el razonamiento (Varenius, Geographie Générale, pag 111).



(Fig. 16)

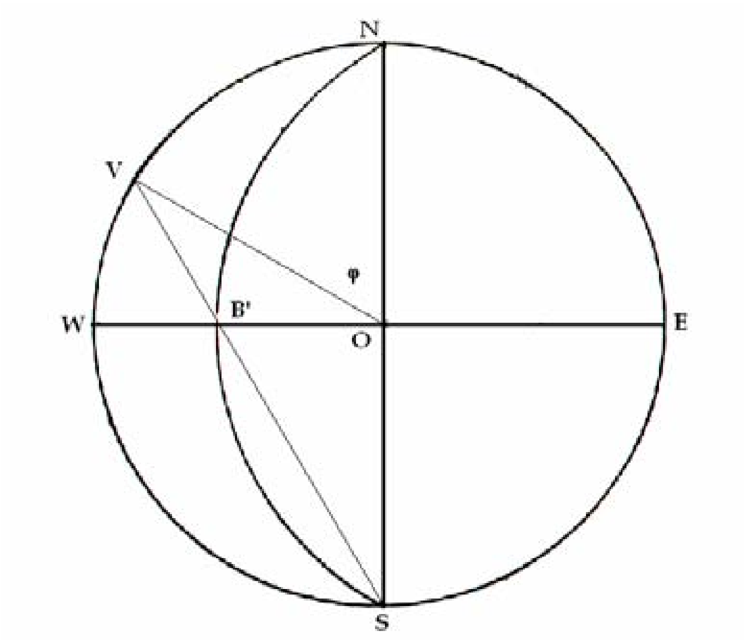
Dado que PQ=OT=PA y OQ= ON, los triángulos OQP y NOT son iguales y tenemos que OP=NT.

NT=BT y BO=NT-OT=OP-PA= OA. Luego el meridiano NBS está en longitud hacia el oeste lo que el paralelo QAS se aparta en latitud hacia el norte.

De esta forma se trazan los meridianos y paralelos necesarios, sin más que dividir el arco EN, en el número de grados que se requiera, siendo el arco EN igual a 90º. Por simetría se completan los meridianos y paralelos en los semicírculos restantes.

Varenius en su *Geographia Generalis* describe un procedimiento para el trazado del mapa en proyección estereográfica meridiana cuyo resumen transcribimos a continuación: Se traza una circunferencia que representa el meridiano exterior de uno de los hemisferios de la proyección. Luego dos diámetros perpendiculares, correspondientes al ecuador y el meridiano central. Se divide cada uno de los cuadrantes nortes del meridiano externo en 90 partes iguales, cada parte es un grado. Se trazan líneas rectas desde estas marcas hasta el polo sur, tales líneas determinan un punto sobre el ecuador. Por cada uno de esos puntos y los dos polos se traza un arco circular que corresponde con cada uno de los meridianos de la proyección.

Varenius añade que, en grandes mapas y para no incurrir en grandes errores, es conveniente disponer de una tabla de tangentes, para señalar estas intersecciones, que sean proporcionales a las tangentes de la mitad de los ángulos trazados desde el centro.



(Fig. 17)

Veamos que mediante matemática elemental -trigonometría y geometría analítica- podemos establecer la equivalencia entre el procedimiento de Varenius y el de Deetz y Adams.

Nuestro esquema de demostración será el siguiente: probaremos que los puntos B y B' (Fig. 16 y Fig. 17) tienen las mismas coordenadas y, al ser única la circunferencia que pasa por tres puntos, daremos por demostrada la igualdad de ambos procedimientos.

En primer lugar, determinemos las coordenadas del punto B en la figura 16.

Sea R el radio de la circunferencia ENWS.

OB = TB – TO.

TB = TN = R/senφ. Pues TN=PO y basta con relacionar ángulos y lados en el triángulo rectángulo OQP.

Por otro lado, se tiene que TO = PQ = R tg(90º- φ). Por relaciones trigonométricas en el triángulo OQP [Sea el ángulo QOE igual a φ. También es el ángulo QPO igual a φ].

Se tiene que OB = R/senφ - R tg(90º- φ).

Simplificando tenemos que R(1-cosφ)/senφ.

Por lo tanto tenemos que el punto B tiene por coordenadas (-R(1-cosφ)/senφ, 0).

Ahora, determinaremos las coordenadas del punto B’ de la figura 17. Lo haremos mediante la determinación del punto de intersección de la recta que pasa por los puntos V y S con la recta WE (eje OX).

Tenemos V (-Rsenφ, Rcosφ); S (0, -R).

La recta que pasa por Vy S es: y = -((1+cosφ)/senφ) x – R.

Su intersección con el eje OX, y=0, determina que x = - R senφ/(1+cosφ).

Luego el punto B’ tiene por coordenadas (- R senφ/(1+cosφ), 0).

Una simple operación algebraica determina que (1-cosφ)/senφ = senφ/(1+cosφ) con lo que queda demostrado que B=B’.

Y por lo tanto los procedimientos son equivalentes. Fin de la demostración.

La proyección estereográfica ha sido, durante estos últimos quinientos años, una de las más utilizadas. La propiedad matemática de ser una representación conforme la situó durante mucho tiempo como la proyección estrella para representar la imagen, la menos distorsionada posible, del planeta Tierra. Quizás también ayudó a su popularización el que B. Varenius le dedicara un lugar preeminente en su *Geographia generalis* y que I. Newton reeditara la obra de Varenius, situándola en un lugar privilegiado dentro del mundo científico del siglo XVII.

(Fig. 18: Orbis Terrarvm Tipvs, Petro Plancio, 1594)

Desde su recuperación en el siglo XV se recordó su origen estelar, pues ya Petrus Plancius en su *Orbis Terrarum Tipus* mostró, en un doble folio, la imagen de la tierra y del cielo de forma conjunta. Sin temor a equivocarnos podemos afirmar que no existe otra proyección que permita representar, con las mismas propiedades matemáticas, tanto el Cielo como la Tierra.

Bibliografía

- Deetz C.H. y O.S. Adams. Elements of Map Projections with Applications to Map and Chart Construction. Washington: U.S. Department of Commerce, 1944.
- Keuning, J. "The history of geographical map projections until 1600". Imago Mundi XII (1955): 1-24.
- Lee, L.P. "The Nomenclature and Classification of Map projections". Empire Survey Review, 51, VII (1944): 190-200.
- Nordenskiöld, A.E. Facsimile-Atlas to the Early History of Cartography with reproductions of the most importants maps printed in the xv and xvi centuries. New York: Dover Publications Inc, 1973.
- Snyder, J.P. Flattening the Earth: Two Thousand Years of Map Projections. Chicago: The University of Chicago Press, 1993.
- Snyder, J.P. An Album of Map Projections. U.S. Geological Survey. Professional Paper 1453. Washington: Department of the Interior, 1994.
- Varenius, B. Geographie Générale, composé en Latin par B. Varenius, Revue par Isaac Newton, augmenteé par Jacques Jurin, traduite en Anglois d'après les Editios Latines données par ces Auteurs, avec des Additions sur les nouvelles Découvertes & présentement trauite de l'Anglois en Francois avec des Figures en taille-douce. A Paris, Chez Vincent, rue S. Severin, á l'Ange; Chez Lottin, rue S. Jacques, au Coq. 4 vol, 1755. (Edición francesa de la obra de Varenius traducida del inglés, y editada en cuatro volúmenes en octavo. Ejemplar perteneciente al fondo antiguo de la Universidad de La Laguna).

Juan Antonio García Cruz, es profesor titular de la Universidad de La Laguna, Tenerife, España, y catedrático de Bachillerato en excedencia. Es miembro de la Comisión de Educación del Comité Español de Matemáticas en representación de la Federación Española de Profesores de Matemáticas. Fue director de la revista Números editada por la Sociedad Canaria Isaac Newton de Profesores de Matemáticas de la que fue Vicepresidente. Ha publicado libros y artículos en torno a la educación matemática y participado en numerosos congresos nacionales e internacionales. Además de la educación matemática se interesa por la historia de las Matemáticas y de la Cartografía.

UNIÓN
REVISTA IBEROAMERICANA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA

Septiembre de 2006, Número 7, páginas 23 - 38
ISSN: 1815-0640

Perspectiva integrada de la enseñanza y el aprendizaje de la matemática: una mirada al campo disciplinar de la matemática

Marcela Falsetti, Mabel Rodríguez, Gustavo Carnelli, Francisco Formica

Resumen

La relación entre la Matemática científica y la escolar, su imagen, la naturaleza del conocimiento matemático y las particularidades de la actividad matemática son algunas de las importantes cuestiones que confluyen al momento de pensar la enseñanza de esta disciplina. Presentamos aquí un desarrollo sobre estos aspectos, donde destacamos algunas características de la Matemática como disciplina científica. Este trabajo nos centramos en el campo disciplinar y es parte de otro más amplio en el que realizamos un recorrido por las tendencias actuales en la Educación Matemática y por la situación y las perspectivas de la enseñanza de esta disciplina.

Introducción.

La Matemática siempre ha tenido un lugar privilegiado en el desarrollo humano por su presencia práctica en la vida cotidiana, su protagonismo en el ámbito científico – tecnológico y su influencia en el ámbito artístico. Es además considerada como ámbito privilegiado del pensamiento humano. Probablemente este privilegio radique en el hecho que ofrece posibilidad de abstracción desde la manipulación concreta (sensorio-motriz) de objetos a temprana edad. Operaciones mentales como clasificar, cuantificar, ordenar, seriar, ubicar, discernir, comparar, simbolizar, generalizar, representar, construir teniendo en cuenta la percepción espacial, etc. se van dando en el pensamiento humano, de forma creciente en complejidad, ya desde los primeros contactos del hombre con los objetos. Justamente, hacer Matemática consiste en sistematizar acciones como las anteriores y los resultados de las mismas.

La Matemática es una ciencia formal que persigue rigor en sus fundamentos, por lo cual axiomatiza sus construcciones y no consiente ambigüedad en las definiciones. Esta disciplina ha persistido en la cultura humana y tiene actualmente un creciente protagonismo. Luis Santaló[1], explica este fenómeno a través del carácter de dualidad que la Matemática presenta (Santaló, 1994), la cual no es entendida como una relación dialéctica entre sus características sino como la

[1] Luis A. Santaló, (Girona 1911 - Buenos Aires 2001) matemático español quien desarrolló la mayor parte de su carrera en Argentina ha sido el máximo exponente de la Geometría Integral que se aplica con éxito a la medicina, la biología, geología, etc. englobándose dichas aplicaciones bajo el nombre de Estereología. Santaló fue además un gran pedagogo y divulgador científico con más de 250 publicaciones, entre ellos libros con gran influencia en nuestra comunidad matemática, como su Geometría Proyectiva o Vectores y Tensores.

posibilidad de brindar una visión diversificada de las cosas. La dualidad de la Matemática consiste en que a lo largo de su historia se han referido, y se refieren, a ella como arte y como técnica, como teoría y herramienta, como filosofía y aplicación, como paradigma de exactitud y como modelo de aproximación, como creación intelectual pura y como verificación experimental. La Matemática ha avanzado como ciencia gracias al equilibrio entre estas características duales, exacerbar alguna de ellas implica desvirtuar el tipo de conocimiento que la constituye, por ejemplo, insistir en su carácter teórico, podría "aplastar toda iniciativa original e ingeniosa que se aparte de lo impuesto por el maestro" (Santaló, 1994).

Como ya mencionamos, en este trabajo presentamos aspectos referidos a la trayectoria del campo disciplinar de la Matemática, donde se observan algunas características de la Matemática como disciplina científica: cuáles son sus mecanismos de producción, cuáles son sus características especiales que la diferencian de otros campos disciplinares, cómo se presenta a la comunidad no especialista, es decir cuál es su imagen, y finalmente cuál es su relación con la Matemática a enseñar a nivel escolar, a la que nos referiremos como Matemática escolar[2].

El campo disciplinar de la matemática: algunas características

1. La Matemática como saber científico

Evolución histórica: breve reseña

La Matemática participa en la vida desde comienzos de la humanidad. Desde entonces las distintas sociedades han ido dotando al conocimiento matemático de distintas características y contenidos, cada uno de ellos, de acuerdo con la idiosincrasia, a las necesidades y a las "modas" que imperaban en cada momento de la historia. Es así como la Matemática se vio entreverada con la astronomía, la música, la astrología, el arte y la religión entre otras disciplinas, prácticamente desde sus comienzos.

Ejemplos de estas intervenciones de la Matemática pueden ser las aplicaciones concretas que hicieron los babilonios en la astronomía. En los finales del siglo VIII antes de Cristo, este pueblo alcanzó un alto grado de desarrollo para poder predecir algunos fenómenos astronómicos. Con sus mediciones y observaciones, buscaban elaborar los calendarios y también los vaticinios para sus monarcas. Precisamente de los babilonios y también de los egipcios parece ser que Pitágoras asumió la idea de que los números eran quienes regían los movimientos de los astros, y que también estaban muy relacionados con las figuras geométricas. De hecho, Pitágoras y sus discípulos han prácticamente rendido un "culto" al número. Afirmaban que el

[2] Consideramos como Matemática Escolar la Matemática de los niveles primario y medio aunque podría extenderse, y el documento así lo refleja, a la Matemática de la Formación Docente.

número es la esencia de las cosas, lo que permite llegar a las raíces y fuentes de la naturaleza. La aritmética que desarrollaron estaba muy vinculada a la Geometría: relacionaban el número con lo mensurable. Es para destacar el gran desarrollo que la escuela de los pitagóricos tuvo en el área de la Geometría, desarrollo que en cierta forma surgió del estudio que hacían de la aritmética, dada la vinculación que establecían entre ambas áreas.

Recorriendo la historia desde aquellos momentos hasta nuestros días, se observa en la Matemática una sucesión de cambios en los contenidos y áreas de estudio, y también en los puntos de vista desde los que se aborda el estudio. Esto se debe a que simultáneamente con el desarrollo y evolución de la Matemática, también evolucionan el resto de las disciplinas que forman el conocimiento humano. Es así como el conocimiento matemático se ve requerido, favorecido y enriquecido por varias de las ramas del saber que a lo largo de la historia han ido teniendo presencia, tanto como en la antigüedad la han tenido la música, la astronomía, la astrología, la religión, la arquitectura, y otras representaciones del "saber artístico". Si bien el desarrollo de la Matemática es requerido por otras ciencias como, por ejemplo, la medicina, la física, la geología, las que a su vez requieren y exigen constantes avances en la tecnología, también es cierto que la Matemática nunca ha dejado de ser un área del saber que responde a los intereses y gustos personales del investigador. Así, la Matemática ha pasado a formar parte imprescindible de la evolución de la ciencia y la tecnología en general.

Ciencias fácticas y formales: la Matemática como una ciencia formal

Cuando hablamos de ciencia entendemos que es un conjunto de conocimientos que conforman un sistema, fundado en el estudio sistemático y metódico de un objeto determinado que determina un saber verificable. Los conocimientos involucrados en la ciencia resultan de la aplicación de una serie de acciones o prácticas racionalmente secuenciadas, aceptadas institucionalmente (por la comunidad científica) y que son englobadas dentro de un método científico.

El modelo físico-matemático dominante durante el siglo XIX, el espacio propio logrado por disciplinas como la Biología y la Química y la posterior instalación del debate acerca del estatus epistemológico de las ciencias sociales, conforman un entramado bajo el cual los intentos por clasificar y agrupar a las disciplinas se tornan complejos, debiendo adoptar criterios convencionales para su realización. Si tomamos como parámetros para realizar una clasificación de las ciencias a su objeto de estudio, su método, el tipo de enunciados y el tipo de "verdad" involucrado en esos enunciados, puede hablarse de ciencias formales y ciencias fácticas, subdividiéndose este último grupo en ciencias naturales y ciencias sociales.

Las ciencias fácticas tienen como objeto de estudio entes pertenecientes a la realidad empírica. En términos amplios, para las ciencias naturales es la naturaleza; para las ciencias sociales son a) las leyes, regularidades, formas de organización, de comportamiento, etc. del ser humano, considerado individualmente o en comunidades humanas y b) los ambientes y "habitats" de estas comunidades. El problema del método de las ciencias sociales originó un debate en el terreno de la epistemología, mencionado anteriormente, que dividió inicialmente el pensamiento entre los que plantearon una posición “explicativa”, que sostuvo la continuidad en el conocimiento y la sentencia para las ciencias sociales a ajustarse al método de las ciencias naturales y aquellos que se enrolaron en una postura “comprensivista” (o hermenéutica), que –a muy grandes rasgos– postularon una grieta epistemológica entre las sociales y las naturales, proponiendo para el conocimiento proveniente de las ciencias sociales a la *comprensión,* que se explica, básicamente, en la “pertenencia” como precedente de la objetivación manifestada en la auto-implicación del científico en el objeto de estudio.

Las ciencias formales son la Matemática y la Lógica, que tienen como objeto de estudio entes ideales (conceptos abstractos), sin marco espacio – temporal. No obstante, estos entes pueden ser interpretados –de acuerdo con la realidad empírica– al establecerse relaciones con los hechos. Los enunciados de estas ciencias se refieren o bien a relaciones entre signos (a los que se puede, en algunos casos, asignárseles contenido empírico), o bien a relaciones entre conceptos abstractos, operaciones que puedan hacerse entre ellos y propiedades de los conceptos y de las operaciones.

En Matemática, la “verdad” de un enunciado depende de la aceptación del carácter de verdad de ciertos enunciados dados a priori, los axiomas, y de que éste pueda deducirse, a través de reglas lógicas de inferencia, de los axiomas.

La Matemática es un ejemplo de “sistema axiomático”. Éstos están compuestos por los términos primitivos (términos que no requieren de definición y que pueden ser interpretables), las definiciones, los axiomas, las reglas de inferencia o deductivas (provistas por la Lógica) y los teoremas. Como ya dijimos, los axiomas son proposiciones que se consideran como verdaderas y no requieren demostración. El conjunto de axiomas debe tener ciertas características como por ejemplo la independencia (es decir que uno de ellos no pueda deducirse de otros) y la consistencia (que no pueda deducirse a partir de ellos otros enunciados que los contradigan). Partiendo de los axiomas y a partir de las reglas de inferencia, se llegan a deducir los “teoremas”, componentes fundamentales en la cadena deductiva. La formalidad de los sistemas axiomáticos radica en que todas sus componentes puedan expresarse en un lenguaje sintáctico y en que los nuevos enunciados se obtienen a partir de cadenas deductivas. Sin embargo, un sistema axiomático no se reduce a esto pues da a lugar a una dimensión semántica cuando dichos componentes son puestos en relación con objetos, empíricos o ideales. La interpretación de un sistema en términos de proposiciones verdaderas constituye un “modelo” del sistema axiomático.

La Matemática tiene por *objeto de investigación* por un lado crear sistemas abstractos constituidos por definiciones de conceptos, por representaciones simbólicas, con símbolos y gramáticas específicas, reglas de manipulación simbólica y conceptual, relaciones entre los conceptos obtenidas mediante técnicas específicas y aplicación de la Lógica Simbólica y por otro crear teorías, técnicas y modelos enmarcados en dichos sistemas. Estos sistemas se presentan a la comunidad científica como un conjunto interrelacionado, coherente y autocontenido de axiomas y teoremas. Los modelos pueden referirse a la realidad física y social captada por el hombre como así también pueden referirse a abstracciones matemáticas en sí mismas. Cuando se refieren a la realidad extra-matemática son medios para describir, interpretar, anticipar, obtener conclusiones sobre hechos, procesos, funcionamientos de los sistemas estudiados. Son, por lo tanto, base y sustento conceptual y simbólico de las demás ciencias y la tecnología. El método de investigación propio de esta ciencia es predominantemente deductivo aunque también se vale del método inductivo para entender y observar regularidades en la forma en que se relacionan los conceptos.

Lo hasta aquí descrito permite tener una idea de la Matemática como campo disciplinar científico. Esta presentación de la Matemática tiene el peso puesto en la forma en la que se presenta el saber matemático en la comunidad científica de acuerdo a los métodos científicos que le corresponden y ha dejado expresamente afuera las cuestiones temporales en el desarrollo histórico de las nociones así como el terreno de la generación de las ideas y la búsqueda de soluciones a los problemas planteados. Este otro terreno, arena de los matemáticos, tiene sin lugar a dudas otras características. En él se admite la duda, la búsqueda informal, inductiva, la exploración, las soluciones aproximadas, temporales, etc. Así también, en una mirada temporal, lo axiomático no aparece en un primer momento. El problema de hacer convivir ambas características de la Matemática científica se evidencia en la enseñanza de la disciplina. Desde nuestra concepción, la Matemática escolar se encuentra con la Matemática científica justamente en este otro terreno. Entre la Matemática científica y la Matemática escolar planteamos que se comparta el hacer del matemático más que el formalismo y rigurosidad que se encuentra en la Matemática comunicada entre científicos, por lo menos en las primeras instancias de aprendizaje. Veremos a continuación cómo la concepción de la Matemática científica en relación con la Matemática escolar determina condicionantes para su aprendizaje llegando a tener fuertes repercusiones de índole social.

La Imagen de la Matemática

Un aspecto importante a tener en cuenta es la “imagen” que la sociedad tiene de la Matemática. En general, esta imagen es la de una ciencia fría, rígida y poco asociada con el quehacer humano. Así también se la considera difícil y circunscripta a un reducido grupo de individuos. Esta imagen, tan difundida, es la que Ernest llama visión absolutista (Ernest 1996). Esta posición ve a la Matemática como universal, objetiva y cierta. Asume que los objetos de estudio son preexistentes y la tarea del hombre es “descubrirlos”. No se contempla la posibilidad de la “invención” y se asume que los “objetos” matemáticos y el conocimiento son necesarios, perfectos y eternos. El conocimiento matemático es considerado como universal, carente de valores e independiente de la cultura y de la historia. Es esta filosofía absolutista la que ha regido en la sociedad hasta no hace mucho tiempo atrás y, fruto de esta interpretación del conocimiento matemático a lo largo de tanto tiempo, es la imagen negativa que se tiene en realidad de la Matemática.

Ernest propone, oponiéndose al absolutismo, pensar a la Matemática de una manera distinta, otorgándole una imagen que incluye una faceta más humana. Esta línea, llamada "falibilismo", ve a la Matemática como un "trabajo en progreso", incompleto y permanente. Es vista en constante evolución y en la cual el hombre es quien la "inventa" o "crea". De esta forma, adquiere las características de revisable, corregible y cambiante, que da lugar a la invención de nuevas verdades y, por lo tanto la ve como emergente de las producciones e invenciones del hombre, y no sólo como fruto del "descubrimiento" (Ernest 1996). El filósofo Wittgenstein opina que la Matemática consiste en una mezcla y entrecruzamiento de juegos de lenguaje entrelazados, aunque éstos no son juegos en un sentido trivial. También expresa que a menudo seguimos reglas en el razonamiento matemático, consecuencia de la costumbre bien ensayada, no por una necesidad lógica, y de esta forma, puntualiza qué es lo que los matemáticos hacen en la práctica, y no lo que las teorías lógicas nos dicen, lo cual sería el motor que conduciría el desarrollo del conocimiento matemático. Esta imagen más humanizada, que contempla la falibilidad en su razonamiento y admite la revisión, le quita la cuota de rigidez que durante tanto tiempo se le adjudicó a la Matemática y que derivó en la construcción de la imagen negativa ya señalada. La corriente falibilista se instaló en la sociedad en la segunda mitad del siglo XX y es consonante con el programa constructivista de la enseñanza de la Matemática.

La Matemática y algunas de sus ramas de saber específico

La evolución constante de todo el conjunto de conocimientos que forman el saber humano, y el requerimiento en paralelo de la evolución del saber matemático, ha ido desarrollando a lo largo de los últimos dos siglos muchas de las áreas de la Matemática que hoy requieren de particularizada especialización, en técnicas, teorías y métodos, para poder abordarlas. Tal es el caso del Análisis Matemático (que vio sus primeros pasos con Leibniz y Newton), el Álgebra, la Topología, y las diversas "ramas" de la Geometría (diferencial, integral, de la convexidad, de los fractales, algebraica, etc.) entre otras. Cada una de estas áreas, tienen su propio objeto de estudio y sus propias características. A grandes rasgos, podríamos señalar algunas particularidades de las más difundidas y fundamentales en la formación matemática:

– El objeto de estudio del Álgebra clásica es la resolución de las ecuaciones polinomiales $P(x) = 0$, donde P es un polinomio. Posteriormente, el Álgebra tomó como rumbo el estudio de las estructuras, entendidas éstas como "clases" de objetos (por ejemplo, los grupos, anillos, cuerpos, espacios vectoriales), a las cuales se las dota de algunas operaciones como las que se realizan entre números reales o enteros. Como sostiene Miguel de Guzmán (1984) "…El estudio abstracto de tales estructuras representa una enorme economía de pensamiento, ya que aparecen repetidas muchas veces, en muy diversas áreas de una forma natural. Los teoremas demostrados sobre la estructura abstracta son así inmediatamente aplicables. Por otra parte, tal estudio pone de manifiesto la unidad profunda de los diversos campos de la Matemática…" Entre los representantes del estudio de las "estructuras algebraicas", figura el grupo Bourbaki.

– El Análisis Matemático estudia la variación de magnitudes. Para ello se deben manipular cantidades infinitamente grandes o infinitamente pequeñas, de aquí que esté relacionado con el cálculo infinitesimal. Una característica central es que su evolución se origina a partir de métodos heurísticos. Puede decirse que comenzó su estudio en el siglo XVII, y que fue una herramienta fundamental para la física clásica. De Guzmán describe la filosofía del cálculo infinitesimal como sigue: "… Deseamos estudiar cómo se desarrolla un proceso complicado que aparece en la naturaleza, en una máquina, en la sociedad o tal vez en un mundo matemático ideal. Analizamos primero lo que ocurre «localmente», es decir, en una porción pequeña, para un cambio pequeño de tal o cual variable del fenómeno. Al proceder así tal vez podamos aplicar algún principio característico del proceso que nos permita una formulación matemática del modo en que se relacionan las diferentes variables del proceso. Tal formulación aparece a menudo en forma de ecuaciones diferenciales, es decir, ecuaciones en las que figura una función y sus derivadas y se desea saber cómo o cuál es la función o funciones que la satisfacen. Al hacerlo sabremos cómo se comporta el fenómeno, no ya «localmente», sino «globalmente»" (De Guzmán, 1984). Como señalamos anteriormente, entre los exponentes del desarrollo del análisis, se encuentran Newton, Leibniz y Bernoulli.

– Cuando nos referimos a la Geometría, pensamos en el estudio de las "formas" (figuras planas y cuerpos) y su relación con las medidas. Si bien sus comienzos datan de la antigüedad (Pitágoras, Euclides y Arquímedes ya eran estudiosos de las formas y de sus dimensiones), ha tenido a lo largo de la historia una gran evolución y adaptación a diferentes modalidades de abordaje. Descartes tuvo la idea de relacionar desarrollos algebraicos con los geométricos, dando así origen a la "Geometría analítica". Esto hizo avanzar notablemente el estudio del cálculo infinitesimal. Pero no sólo el Cálculo se vio influenciado y beneficiado por la Geometría, varias de las ramas de la Matemática se ven favorecidas por el aporte de tipo geométrico en sus concepciones y demostraciones.

– En cuanto a la Topología su objeto de estudio son las propiedades de las figuras o formas que no se ven alteradas por "transformaciones continuas" (homeomorfismos), como pueden ser doblar, estirar, encoger, pero sin romper, sin provocar orificios ni separar lo que estaba unido ni pegar lo que estaba separado. De esta forma, puede decirse que, desde el punto de vista "topológico", un cuadrado no difiere de un triángulo, dado que uno se transforma "homeomórficamente" en el otro. En el contexto de la Topología no se estudian las entidades asociadas a las "medidas" como, por ejemplo, las nociones de ángulo y área (que sí son de fundamental importancia en la Geometría). La Topología hace enormes aportes a la fundamentación de resultados en el Análisis Matemático y Funcional, y en la Geometría, entre otras áreas de la Matemática.

Hasta aquí, hemos detallado algunas de las características de estudio de algunas ramas de lo que puede llamarse Matemática del Continuo o Matemática Continua. Un desarrollo importantísimo ha tenido en el último siglo la llamada

Matemática Discreta, asociado éste, al amplio desarrollo que tuvo, por ejemplo, la informática. Esta Matemática es la que está más asociada a las “aplicaciones”, y su estudio tiene una gran componente empírica. Los procesos de estudio que admiten una modelización o una formulación a partir de “simulaciones” en el campo de la informática, tienen un sustento matemático basado en lo “discreto”. Se consideran “variables discretas” a aquellas variables que admiten la existencia de dos “mediciones consecutivas”, o sea, que no admiten una representación “continua”. Tales pueden ser los datos recogidos en un análisis estadístico, o en un registro numérico de alguna situación o hecho particular. Por ejemplo, si bien la variable “altura de cierta especie de árbol” es una variable continua, el registro de una determinada población se hace a partir de una serie de mediciones hechas por un observador. Los datos recogidos por este observador, son “finitos”, y pueden ordenarse, por ejemplo, de menor a mayor, y así observarse que existe en ellos la noción de “dos medidas consecutivas”. Ésta es una característica de una variable discreta, que en este caso está representando una “muestra” de una variable continua, de la cual se obtendrán características desde las inferencias que surjan de esta muestra finita. Este proceso de análisis de una variable continua a partir de “datos discretos” es una de las acciones que se desarrollan dentro del mundo de la Matemática Discreta. Están asociadas a ella, por ejemplo, la estadística, la teoría de grafos, la programación lineal, la programación dinámica, la teoría de control óptimo, entre otras.

El pensamiento matemático

Es común oír hablar del pensamiento matemático y de la forma en que la Matemática desarrolla el pensamiento en “el individuo que la practica”. El desenvolvimiento de las tareas que el matemático desarrolla involucra acciones y actividades, que requieren de una forma de pensar específica que es lo que podríamos definir como el “pensamiento matemático”. Algunas características del mismo son:

- Se maneja con una simbolización adecuada que permite presentar eficaz y operativamente entidades que representan la realidad física o mental (De Guzmán. 1993).
- Manipula racional y rigurosamente objetos de producción mental (de Guzmán, 1993).
- Es analítico cuando inicia la búsqueda del camino adecuado para la resolución de un problema. Reflexiona sobre lo que ya ha hecho y también sobre lo que hará. Juzga los pasos realizados y decide emprender cambios en el abordaje del tema de estudio, si no ve apropiado el enfoque inicial.
- Es abarcativo e integrador. Intenta reconocer lo que se relaciona con un problema de estudio, ya sea desde la Matemática o desde otra disciplina. Dentro de la propia Matemática, busca herramientas en cualquiera de las áreas (Álgebra, Análisis…) que le sean útiles para el fin que persigue, independientemente de que sean o no herramientas de su dominio habitual.
- Es crítico y cuestionador de sus propias reglas (por ejemplo, el cuestionar la necesidad del postulado de Euclides de las paralelas como regla esencial y

evidente para el desarrollo de la Geometría dio a lugar a las Geometrías no euclidianas)

- Usa en forma integrada diferentes recursos intelectuales:

    - se apoya en lo intuitivo, lo sensible, lo inductivo y lo empírico para conceptualizar, diferenciar y determinar objetos y relaciones;
    - recurre a expresiones simbólicas precisas para definir y comunicar dichos objetos y relaciones y en reglas operativas y leyes lógicas, también simbolizables, para manipularlos, establecer vinculaciones entre ellos, validar dichas relaciones y comunicar resultados.

- Es estructurante y generalizador en los siguientes sentidos:

    - establece clases de objetos (como por ejemplo matrices, n-uplas, polinomios, etc. abarcados en la clase de “vectores”, no en el sentido físico sino de elemento del espacio vectorial), luego establece formas de operar con los objetos de esa clase (sumar vectores y multiplicar vectores por escalares) y de vincularlos entre sí conservando las propiedades de las operaciones (Ej. las transformaciones lineales)
    - frente a operaciones o propiedades que responden a ciertos patrones o regularidades, estructura una nueva operación o propiedad (Ej. la multiplicación a partir de la suma con los términos iguales).

- Es flexible, no se ata a modelos preestablecidos como paradigmas sino que busca nuevos modelos y procedimientos.
- Es creativo, dinámico, no algorítmico. Sobre esta última característica vale aclarar que, es parte de la actividad matemática la producción de algoritmos, es decir la producción de reglas y operaciones que se aplican metódica y sistemáticamente a objetos, pero esa producción no es algorítmica.

Este tipo de pensamiento se pone de manifiesto en las producciones matemáticas como los teoremas, las demostraciones, las teorías, las fórmulas, frutos de enfrentar al individuo que hace Matemática con problemas, extramatemáticos o intramatemáticos. El desarrollo de estas producciones exige un accionar muy complejo y amplio que determina, como veremos en un próximo apartado, la verdadera actividad matemática.

La Matemática: arte y oficio

Como señalamos anteriormente, la evolución de la Matemática también se debe a los intereses que cada investigador (matemático) tiene en su área de estudio. Vale preguntarse por qué los investigadores tienen puesto su interés en descubrir nuevas teorías o nuevos resultados, tan abstractos, que tal vez sólo un pequeño grupo de personas pueda interpretarlos y entenderlos. Sin embargo, este cuestionamiento no es frecuente cuando se piensa en un pintor respecto de su obra, ya que se lo justifica porque tuvo esa imagen en la mente y decidió plasmarla en la pintura.

El estudio de la Matemática le proporciona a quien lo realiza un tipo de placer y desafío que sólo él puede explicar. Para hacer referencia a esto, en el Seminario inaugural del curso 2001-2002 del Proyecto: Detección y Estímulo del Talento Precoz en Matemáticas en la Comunidad de Madrid, organizado por la Real Academia de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales y la Fundación Airtel, se presentó el siguiente texto, basado en una anécdota del matemático *Yves Meyer.* Éste decía que: *"… estaba tratando de resolver un problema que me había entregado un amigo matemático. La esposa de este último se me acerca y me dice: Yves, si en lugar de trabajar en esas matemáticas que para nada sirven, utilizaras tu inteligencia en aliviar el sufrimiento humano, las cosas irían un poco mejor en este mundo, ¿no te parece? El reproche me hirió, pero continué mi trabajo matemático. Dos días después había resuelto el problema planteado, pero no sabía responder aún el cuestionamiento de Bárbara, la esposa de mi amigo. Pasó el tiempo y gracias al trabajo de todo un grupo de investigadores y médicos, en el cual yo estaba incluido, los nuevos métodos de tratamiento de imágenes que descubrimos, se aplican en numerosos problemas planteados por las imágenes médicas. Entonces encontré parcialmente la respuesta: "Sí, yo he podido en parte aliviar el sufrimiento humano". Y ¿por qué decía este matemático "parcialmente"? Le faltaba considerar lo que él esperaba cuando trabajaba en un problema matemático. Encontrar esa mezcla de miedo, excitación y alegría, similar a la que siente un niño al buscar el tesoro perdido en una isla misteriosa…".*

Para el investigador en Matemática (al igual que en algunas otras ciencias), la Matemática también representa un arte, y desde ese punto de vista, la producción surgida de su investigación está vista por él como una producción artística, dotada de múltiples componentes estéticas. Entre ellas, se destacan la "belleza" de una demostración, cualidad tal vez compartida por la comunidad matemática, e interpretada desde la óptica de la economía de recursos para lograrla, la perfecta armonía que la lógica brinda para entrelazar cada una de las hipótesis hasta lograr alcanzar el resultado anunciado. Es común escuchar en el ámbito de la Matemática, que cuando hay dos demostraciones de un mismo resultado, una es más linda que la otra. ¿Por qué? A veces, es más linda porque es más corta, otras veces, la belleza está en que es más clara o que no utiliza tantos recursos de otras áreas, etc. El matemático encuentra en su producción (su obra) el mismo placer que el pintor, el escultor o el músico encuentra en la suya. Resulta curioso que algunos elementos que tienen en cuenta los artistas (pintores, escultores,...) a la hora de analizar la belleza de su obra, sean la simetría, la proporción, la proyección, el orden, y que también éstos sean elementos de la Matemática.

Algunos interrogantes acerca del motivo por el cual un matemático estudia uno u otro problema, pueden surgir porque el objeto de estudio de la Matemática es, para la mayor parte de la sociedad, un verdadero misterio. En el común de la gente, existe la noción de que el único elemento de estudio de la Matemática es el número y sus relaciones con el cálculo (operacional) elemental. También asocia al estudio de la Matemática con ciertos elementos de la Geometría elemental. Es muy poco lo que se conoce fuera del ámbito de la "comunidad matemática" acerca de la actividad desarrollada por el propio matemático.

2. La Matemática de la Investigación y la Matemática enseñada en el aula

La actividad matemática

Como se ha señalado, la Matemática se genera a partir de situaciones problemáticas surgidas desde diferentes fuentes, ya sean de la propia Matemática o de otras disciplinas que requieren de ella. Estas situaciones son las que van dando origen a las distintas teorías, y junto con ellas, a los distintos conceptos, propiedades, axiomas y demás elementos involucrados en el saber matemático. La actividad que se lleva a cabo para resolver estas situaciones–problemas, es la que podría llamarse “actividad matemática”. Algunas de las acciones que intervienen en la actividad matemática, en los distintos niveles en que ésta se desarrolla, son, por ejemplo: representar, comparar, resolver, estimar, operar, seleccionar, argumentar, reconocer estructuras, revertir procedimientos, razonar, simbolizar, justificar.

La actividad matemática presenta variadas facetas, dependiendo –entre otras cosas– del nivel o instancia en que se desarrolla. Estas instancias pueden ser las de producción o creación del conocimiento matemático (la actividad del matemático), las de la enseñanza y las del aprendizaje de la Matemática. En cualquiera de estas instancias, el que hace Matemática desarrolla una faceta creativa. Por ejemplo, el que enseña Matemática, debe ser capaz de adecuar los conocimientos a enseñar, de acuerdo al alumnado y a los problemas elegidos o planteados para la enseñanza de determinados conceptos. Por otro lado, quien aprende Matemática, también crea conocimientos nuevos para él, aunque no sean novedosos para la humanidad.

J. Godino (1998) expresa *“…La génesis del conocimiento matemático se produce como consecuencia de la actividad del sujeto enfrentado a situaciones problemas y haciendo uso de los elementos ostensivos e intensivos disponibles”.* Además de las *ostensivas* e *intensivas*, considera que se necesitan otras entidades para describir a la actividad matemática, como son las *actuativas*, *extensivas*, y *afectivas*. Interpreta cada una de ellas de la siguiente manera:

Ostensivas: cualquier representación material usada en la actividad matemática (términos, expresiones, símbolos, tablas, gráficos), incluyendo las entidades lingüísticas y notacionales.

Extensivas: las entidades fenomenológicas que inducen actividades matemáticas (problemas, situaciones, aplicaciones). En general, de ellas surgirán las entidades intensivas.

Intensivas: ideas matemáticas, abstracciones, generalizaciones (conceptos, teorías, proposiciones).

Actuativas: acciones del sujeto ante situaciones o tareas (describir, operar, argumentar, generalizar)

Afectivas: creencias, actitudes, preferencias, emociones.

Aunque tal vez no parezcan de carácter primordial, en la actividad matemática las entidades afectivas muchas veces son las que determinan el rumbo de la investigación, la enseñanza o el aprendizaje de la Matemática. Las creencias, actitudes o preferencias del investigador, el docente o el alumno, son las que lo hacen reflexionar, a cada uno en su lugar, acerca de cuál es el tema a investigar, cuál la metodología de enseñanza a utilizar y cuál es el sentido que el alumno le da al concepto que está aprendiendo. Es muy importante el rol de estas entidades, sobre todo en el campo de la actividad docente. El docente se enfrenta a la tarea de reelaborar los conocimientos surgidos en el seno de la comunidad matemática, y debe enseñarlos a partir de la visión que él tenga de esos conocimientos.

Relación entre la Matemática científica y la Matemática escolar

Al hablar de la actividad matemática podemos referir dos planos diferentes en los que plantear el tema: la actividad matemática en el ámbito científico (en donde diremos que se desarrolla la “Matemática científica”) y la actividad matemática en el ámbito escolar (donde diremos que se plantea la “Matemática escolar”).

Desde el ámbito científico hasta el ámbito escolar, la Matemática hace un recorrido que merece especial atención. En particular, en la comunidad científica es donde nace o se gesta el conocimiento matemático, pero como es sabido, no todo lo que se conoce de la Matemática, es tema de estudio en el nivel escolar. Eso presupone que hay una selección de contenidos que atiende a distintos criterios, entre los que figuran las necesidades específicas del nivel en que se enseñará, la cantidad de recursos tecnológicos, informáticos o bibliográficos con que cuentan las instituciones en que dichos contenidos serán enseñados, el nivel económico–cultural de la comunidad receptora de estos contenidos, etc.

El recorrido que el saber matemático hace desde el campo de producción de la Matemática hasta el saber transformado que se enseña en la escuela, puede describirse simplificadamente en algunos pasos que detallamos a continuación.

En principio el curriculum de la formación docente ya presenta una primera transformación y selección a partir de la cual el cuerpo docente del nivel superior, sea éste la Universidad o el Instituto de Formación del que egresen los profesores de Matemática, trabaja seleccionando contenidos. Esta selección supone cuáles son los contenidos mínimos que conforman los planes de estudio del profesorado. A lo largo de su carrera, el estudiante del profesorado recibe formación pedagógica en la que estos contenidos disciplinares son acompañados en paralelo por los propios de las materias pedagógicas, en particular de la Didáctica de la Matemática. Esta conjunción de conocimientos de la Matemática con los de la Didáctica de la Matemática va desarrollando en el estudiante de profesorado la capacidad de poder hacer él mismo una selección de contenidos matemáticos para enseñarlos en la escuela en la que desarrolle su ejercicio profesional. Esta última selección de contenidos hecha por el estudiante del profesorado (en este caso, generalmente con la ayuda de sus docentes) para llevar adelante en sus prácticas docentes (residencias) o por el profesor recién egresado para llevar a su lugar de trabajo, puede considerarse como la última etapa de lo que llamamos la “transformación” del conocimiento matemático. Es indudable que cada etapa de esta transformación está íntimamente vinculada con muchos aspectos que tienen que ver con lo personal, lo institucional y lo social, entre otros.

Esta descripción sobre la transformación de los saberes matemáticos a los saberes escolares puede modelizarse de diversas formas. El modelo más difundido se conoce con el nombre de transposición didáctica y se ha originado en la Escuela Francesa de la Didáctica de la Matemática. Algunos de los interrogantes a los que debe atenderse con cualquier modelo propuesto que tenga la intención de comprender esta transformación, son: ¿qué relación guardan los saberes matemáticos con los escolares? ¿Tienen puntos en común o son construcciones diferentes? Si comparten algo, ¿en qué consiste ese terreno común?, y si no comparten nada ¿por qué se llaman igual?

Un punto de vista que compartimos es que la Matemática científica y la escolar compartan ciertos aspectos del “hacer”, de la actividad que se realiza con y sobre los contenidos matemáticos. Esta actividad debería ser considerada en un sentido amplio, desde el aspecto heurístico y el formal, ambos presentes en el quehacer del matemático. El aspecto heurístico tiene que ver con combinar observaciones y tener registro de los patrones recurrentes, explotar la analogía y la inducción, hacer uso de elementos auxiliares, descomponer y recombinar, usar casos particulares para luego generalizar, trabajar “hacia atrás” reconstruyendo procedimientos, elegir estrategias y técnicas para aproximarse a la comprensión o resolución de problemas, evaluar la elección sea por ensayo o por anticipación de su aplicación, hallar y verificar resultados, etc. El aspecto formal tiene que ver con las representaciones semióticas y los pasajes de una a otra, la generalización, las definiciones de objetos, la formulación de conjeturas y la demostración matemática, etc.

Bibliografía

- Arcavi, (2000); Problem-driven research in mathematics education, Journal of Mathematical Behaviour, 19, pp. 141-173.
- Arendt, H. (1997); Quelques remarques à propos de l’enseignement de la géometrie. Repères – IREM, 26.
- Astolfi, J-P (2002); Aprender en la escuela, Edit. Océano.
- Barbin,E. (2000); Construire la Géometrie Élementaire. Repères – IREM, 40. pp. 5-9.
- Bishop, A. (2000); Enseñanza de las matemáticas. ¿Cómo beneficiar a todos los alumnos?. Matemáticas y Educación. Retos y cambios desde una perspectiva internacional. Ed. GRAO.
- Bkouche, R. La démonstration: du réalisme au formalisme. Archivo html en casemath.free.fr/divers/tribune/demonstr.pdf.
- Brousseau, G (1995); Theory of Didactical Situations in Mathematics. Kluwer Academic Publisher.
- Brousseau, G. (1994); Didáctica de las Matemáticas, (Parra-Saiz compiladoras). Ed. Paidos. Bs. As.

- Brousseau, G. (2000); Les propriétés didactiques de la géometrie élémentaire: l'étude de l'espace et de la géométrie. Actes du Séminaire de Didactiques des Mathématiques du Département des Sciences de l'éducation de l'Université de Créte.
- Capponi, B. (2000); De la Géometrie de traitement aux constructions dans CABRI-GEOMETRE II au college. Repères – IREM, 40. pp. 11-42.
- Charnay, R. (1994); Aprender (por medio de) la resolución de problemas. Didáctica de las Matemáticas, (Parra-Saiz compiladoras). Ed. Paidos. Bs. As.
- Chevallard, Y. (1992); Concepts fondamentaux de la didactique: perspectives apportées par une approche anthropologique. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 12(1), 73-111.
- Chevallard, Y. Bosch, M., Gascon, (1997); J. Estudiar matemáticas: el eslabón perdido entre enseñanza y aprendizaje. Cuadernos de educación. Para profesores, padres y alumnos. Vol. 22, España., Horsori, Institut de Ciences de l´Educació, Universidad de Barcelona.
- De Guzmán, M. (1984); Panorama de la Matemática. Avances del Saber. Tomo 5. Ed. Labor.
- De Guzmán, M. (1993); Enseñanza de la Matemática. Enseñanza de las Ciencias y la Matemática, Tendencias e Innovaciones. Ed. Popular- OEI- Madrid.
- Díaz, E. (editora) (1997); Metodología de las Ciencias Socales. Editorial Biblos. Buenos Aires.
- J. Dieudonné (1971); La abstracción en Matemáticas y la Evolución del Álgebra. La Enseñanza de las Matemáticas. Ed. Aguilar. Madrid.
- Dirección General de Cultura y Educación. Gobierno de la Provincia de Buenos Aires (1999); Marco General, Nivel Inicial: (Tomo I: Estructura General, Fundamentación y Propósitos de las Áreas, Expectativas de Logros, Tomo II: Organización de Contenidos) y Superior (Tomo I: Estructura General, Profesorado Inicial, Profesorado EGB, Tomo II: Profesorado de Matemática)
- Dirección General de Cultura y Educación. Gobierno de la Provincia de Buenos Aires (2003); Programa para la definición del Diseño Curricular del Nivel Polimodal. Documento base.
- Dirección de Educación Polimodal y Trayectos Técnicos Profesionales. Dirección General de Cultura y Educación. Gobierno de la Provincia de Buenos Aires (2003); Propuestas para la enseñanza de matemática en el 3er Año del nivel polimodal. Documento de apoyo Nº 1.
- Ernest, P. (1996); The nature of mathematics and teaching. Philosophy of Mathematics Education. Newsletter 9.
- Font, V. (2002); Una organización de los programas de investigación en Didáctica de las matemáticas. Revista EMA Vol. 7, Nº 2. Una empresa docente.
- Fortuny , J., Azcárate,C. (1994); Parte II: Enseñanza de la Matemática. Formación del profesorado de las Ciencias y la Matemática. Tendencias y experiencias innovadoras. Gil, D. Pessoa,A., Fortuny,J., Azcárate,C. Editorial Popular.
- Gascón, J. (1998); Evolución de la didáctica de las matemáticas como disciplina científica. Recherches en Didactique des Mathématiques.
- Krichesky, Rodríguez, Petrucci, Guindi, de Amézola, Cerletti, "Las condiciones y posibilidades del "pasaje" de saberes y prácticas especializados: el caso particular de la formación de docentes". Ponencia presentada en las Jornadas de Docencia de la UNGS, 2004.

- Nápoles Valdés, J., Cruz Ramírez, M. (2000); La resolución de problemas en la escuela. Algunas reflexiones., Función Continua, Nro. 8. Bs. As.
- Polya, G. (1945; 2nd edition, 1957); How to solve it. Princeton: Princeton University Press.
- Polya, G. (1954); Mathematics and plausible reasoning (Volume 1, Induction and analogy in mathematics; (Volume 2, Patterns of plausible inference). Princeton: Princeton University Press.
- Polya, G. (1962,1965/1981); Mathematical Discovery (Volume 1, 1962; Volume 2, 1965). Princeton: Princeton University Press. Combined paperback edition, 1981. New York: Wiley.
- Ruiz, A., Barrantes, H. (1998); La historia del Comité Interamericano de Educación Matemática. Academia Colombiana de Ciencias. Disponible en http://www.accefyn.org.co/PubliAcad/CIAEM/indice.htm
- Santaló, L. (1990); Matemática para no matemáticos. Conferencia inaugural del Primer Congreso Iberoamericano de Educación Matemática, Sevilla, España.
- Santaló, L. (1994); Enfoques: hacia una didáctica humanista de la Matemática. Ed. Troquel. Bs. As.
- Schoenfeld, A. (1992); Learning to think mathematically. Problem Solving, Metacognition, and sense-making in mathematics. Handbook for Research on Mathematics Teaching and Learning (D. Grouws, Ed.) New York: Mac Millan. (disponible en formato html)

Marcela C. Falsetti es Doctora en Matemática y se dedica al campo de la investigación en Didáctica de la Matemática ocupándose de temas como: interacciones en el aula y aprendizaje matemático, aprendizaje de la validación en Matemática. Trabaja para el nivel preuniversitario y para la formación de profesores.
Instituto del Desarrollo Humano. Universidad Nacional de General Sarmiento.
Buenos Aires – Argentina.
mfalse@ungs.edu.ar

Mabel A. Rodríguez es Doctora en Matemática y además de la investigación en Matemática se dedica al campo de la investigación en Didáctica de la Matemática ocupándose de temas como: interacciones en el aula y aprendizaje matemático, aprendizaje de la validación en Matemática. Trabaja para el nivel preuniversitario y para la formación de profesores.
Instituto del Desarrollo Humano. Universidad Nacional de General Sarmiento.
Buenos Aires – Argentina.
mrodri@ungs.edu.ar

Gustavo F. Carnelli es Licenciado en Enseñanza de las Ciencias, orientación Matemática. Realiza el Doctorado en Educación y se dedica al campo de la investigación en Didáctica de la Matemática ocupándose de temas como: interacciones en el aula y aprendizaje matemático, aprendizaje de la validación en Matemática. Trabaja para el nivel preuniversitario y para la formación de profesores.
Instituto del Desarrollo Humano. Universidad Nacional de General Sarmiento.
Buenos Aires – Argentina.
gcarnell@ungs.edu.ar

Francisco A. Formica es Licenciado en Matemática y además de la investigación en Matemática se dedica al campo de la investigación en Didáctica ocupándose de temas como: interacciones en el aula y aprendizaje matemático, aprendizaje de la validación en Matemática. Trabaja para el nivel preuniversitario y para la formación de profesores.
Instituto del Desarrollo Humano. Universidad Nacional de General Sarmiento.
Buenos Aires – Argentina.
aformica@ungs.edu.ar

UNIÓN
REVISTA IBEROAMERICANA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA

Septiembre de 2006, Número 7, páginas 39 - 51
ISSN: 1815-0640

Los estudiantes proponen un problema: una posibilidad favorecida por los ambientes computacionales informatizados

Estela Torroba, Marisa Reid, Nilda Etcheverry y Mónica Villarreal

Resumen

Se presenta un relato acerca de los procesos seguidos por estudiantes al resolver un problema abierto, propuesto en el transcurso de una experiencia didáctica diseñada para estudiar las implicaciones del uso de la computadora en los procesos de pensamiento matemático de estudiantes universitarios.

Se reportan características del trabajo realizado por estudiantes y docentes en el ambiente en el cual se llevó a cabo la experiencia y algunas conclusiones vinculadas con el planteo de conjeturas que son favorecidas en los ambientes computacionales.

Abstract

This article reports about the process followed by student when solving a open-ended problem, that was proposed during an didactic experience designed to study the effect that produce the use of the computer on the process of mathematical thinking of college students.

Characteristics are reported of the work of students and teachers in the environment in which the experience took place and same conclusions related with the plant of conjectures that are favoured in the computer environment.

Introducción

En el presente trabajo reportaremos acerca de los procesos seguidos por dos estudiantes al resolver un problema abierto propuesto en el transcurso de una experiencia didáctica diseñada para estudiar las implicaciones del uso de la computadora en los procesos de pensamiento matemático de estudiantes universitarios.

La experiencia muestra que la proposición de un problema abierto (open-ended problem) de tipo exploratorio en un ambiente informatizado permite que los estudiantes se involucren en la tarea de proponer conjeturas matemáticas a partir de las respuestas visuales ofrecidas por la computadora, generando un juego de conjeturas y refutaciones donde también surgen discusiones acerca de las argumentaciones matemáticas que son consideradas válidas para probar una determinada conjetura.

En este tipo de trabajo son favorecidos dos procesos fundamentales para el aprendizaje de la matemática: la visualización y la experimentación. Por visualización entendemos el proceso de formar imágenes, sea mentalmente o con el auxilio de lápiz y papel o tecnología. Tal proceso estimula el descubrimiento matemático dando lugar a una mejor comprensión (Zimmermann & Cunninghan, 1991). Por su parte, la experimentación, asociada con la idea de ensayo y error, contribuye a la generación de conjeturas cuya validez puede ser verificada o refutada con la ayuda de la tecnología.

En la siguiente sección describiremos, sintéticamente, el grupo de estudiantes que participó del estudio, la propuesta didáctica que generó esta experiencia de aula, describiendo en detalle lo ocurrido en los dos encuentros que se realizaron con los estudiantes y reportaremos algunos episodios que nos brindan elementos para reflexionar y, finalmente, presentaremos algunas conclusiones.

El grupo de trabajo

Los alumnos participantes del estudio, Erica y Emiliano, son estudiantes de segundo año de las carreras de Profesorado en Matemática y Profesorado en Computación, respectivamente, de la Facultad de Ciencias Exactas y Naturales de la Universidad Nacional de La Pampa. Estos estudiantes habían cursado Análisis Matemático I durante el primer cuatrimestre de 2003 y se encontraban, al momento de participar de la experiencia, preparando el examen final de esa materia.

En oportunidad en que los alumnos acudieron a realizar consultas para corroborar sus conocimientos y aclarar conceptos, se les planteó un problema donde debían combinar varios temas vistos en la asignatura para su solución.

Según Schoenfeld, A. (1985): Los aspectos del conocimiento relevantes para el rendimiento en resolución de problemas incluyen: el conocimiento intuitivo e informal sobre el dominio del problema, los hechos, las definiciones y los procedimientos algorítmicos, los procedimientos rutinarios, las competencias relevantes y el conocimiento acerca de las reglas del lenguaje en ese dominio.

En la elección del problema se tuvo en cuenta que en el proceso de resolución se debía atender a la conexión existente entre las distintas representaciones (verbal, algebraica, numérica y gráfica) para lo cual la tecnología juega un papel fundamental.

El proceso de resolución de un problema con el uso de tecnología se centra en el alumno, es este quien tiene una responsabilidad importante en su formación, donde es preferible el trabajo en pequeños grupos y el profesor tiene un rol de facilitador, de generación de espacios de trabajo, de saber como utilizar los recursos.

El hecho de no presentarlo como un ejercicio correspondiente a un tema determinado posibilitó la puesta en juego de ideas para llegar a la solución y el reconocimiento de la aplicación de determinados conceptos.

Para la resolución del problema los alumnos utilizaron el software Derive 5 lo que posibilitó además de economizar tiempo y esfuerzo en las tareas rutinarias, un razonamiento visual que los condujo, como lo relataremos a continuación, a plantear una nueva situación.

La introducción de la computadora asigna un nuevo rol a la visualización matemática y ésta, complementada con la manipulación simbólica hace que ambas contribuyan a la comprensión matemática (Borba & Villarreal, 2005).

Fueron realizados dos encuentros de aproximadamente dos horas cada uno, donde los alumnos trabajaron en un ambiente computacional disponiendo de una computadora equipada con el software Derive 5.

La responsable del desarrollo de la propuesta didáctica fue una docente que está a cargo de la cátedra de Análisis Matemático I. Otra de las autoras de este trabajo realizó filmaciones y grabaciones de audio durante el desarrollo de los encuentros con los alumnos y confeccionó un cuaderno de registro de observaciones a fin de describir y analizar el desarrollo de las actividades, los procesos de pensamiento y las estrategias de los estudiantes.

La experiencia

En el primer encuentro se planteó el siguiente problema:

> Sea una función cuadrática de la forma $y = ax^2 + bx$. Hallar el coeficiente *b* en función de *a*, de manera que el área de la región encerrada por la curva y el eje de las *x* tenga un valor constante.

Al comienzo los estudiantes se muestran bastante desorientados por el enunciado del problema. La docente interviene formulando una pregunta que permita iniciar la actividad:

Docente (D): *¿Cómo se les ocurre que deben ser a y b?*

Emiliano (Em): *a tiene que ser menor que cero para que las ramas sean hacia abajo. Pero b puede ser negativo o positivo.*

Erica (Er): [poco convencida de lo expresado por Emiliano] *¿no sé por qué a debe ser menor que cero?*

Em: *Esto es para que quede una región encerrada entre la curva y el eje de las x.*

La docente sugiere el uso del software para la construcción de algunos gráficos. Los estudiantes grafican las funciones $y=-x^2+bx$ donde b varía de –7 a 9 con un paso de 4, es decir b = -7, -3, 1, 5, y 9 (Figura 1).

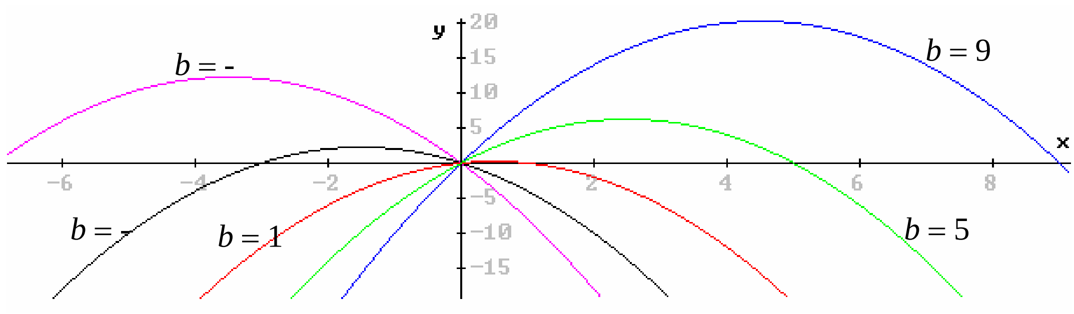


Figura 1

Los estudiantes grafican otras parábolas considerando distintos valores negativos del coeficiente *a*[1] y en cada caso variando *b*. Erica usa el comando *Zoom* para acercarse a los gráficos en el origen y se produce el siguiente diálogo entre los estudiantes:

Er: *Todas* [se refiere a las parábolas] *pasan por el origen de coordenadas.*

Em: *Sí, pero todas las parábolas cortan al eje x en dos puntos, falta averiguar el otro.*

Er: *Para eso, resolvamos la ecuación* $a\,x^2+b\,x=0$.

Erica manifiesta sentirse más segura haciendo los cálculos algebraicos con lápiz y papel y, luego de realizarlos acota: *"La curva va desde cero a* $\frac{-b}{a}$*"*, refiriéndose a los ceros de la función cuadrática.

Una vez realizadas estas tareas la docente retoma el problema y plantea lo siguiente:

D: *¿Qué significa que las áreas deben ser constantes?*

Obteniendo como respuesta:

[1] Cuando se analizaron los registros y las grabaciones, observamos que el planteo con el coeficiente *a* negativo restringió su solución. La docente responsable debió sugerir el análisis de la situación con a mayor que cero, lo que probablemente hubiera conducido a conclusiones interesantes.

Er: *Y…, que valga siempre lo mismo, por ejemplo 3.* [...] *¿El área bajo la curva era la integral, no?*

Em: *Sí, pero acordáte que sólo cuando la función es positiva…. Nos falta ver entre qué límites debemos integrar, pero en principio consideremos a negativo y b positivo.*

D: *¿Por qué hacen esa consideración?*

Em: [Señalando las gráficas mostradas en la figura 1], *según que b sea positivo o negativo los límites de integración cambiarán.*

Convencidos que el área la pueden plantear a partir de una integral definida, cuyos límites de integración son las raíces anteriormente calculadas, escriben: $\int_0^{-b/a}(ax^2+bx)\,dx$ y de acuerdo a lo planteado por Erica, igualan esa expresión a 3.

Emiliano propone resolver la integral usando el software, el cual permite calcular integrales definidas con límites de integración no numéricos, y obtiene como resultado: $\frac{1}{6}\frac{b^3}{a^2}$.

Despejando *b*, en función de *a*, de la ecuación $\frac{1}{6}\frac{b^3}{a^2}=3$ resulta

$$\boxed{b = 18^{1/3}\, a^{2/3}}$$

Es importante destacar que esa expresión ya está dando respuesta al problema planteado, al menos para el caso particular donde el área sea 3.

A continuación mostraremos el trabajo exploratorio de los estudiantes lo cual merece ser destacado ya que proporciona evidencias acerca del tipo de actividad que favorece el ambiente computacional. Los estudiantes profundizan y van más allá en la exploración.

Después de obtener la expresión de b en función de a, de manera que el área encerrada por cada una de las parábolas $y = a\,x^2 + 18^{1/3}\, a^{2/3}x$ y el eje x sea 3, realizan las gráficas de estas funciones cuadráticas para distintos valores negativos de *a*, lo cual se muestra en la Figura 2.

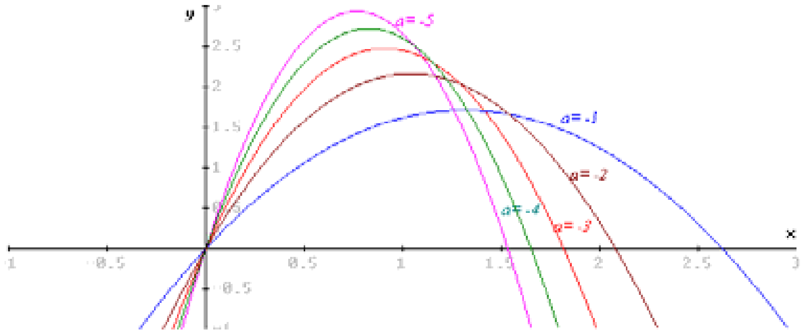


Figura 2.

Observando las gráficas, los estudiantes comentan:

Em: *Para que el área sea siempre la misma, cuando la base* [se refiere a la distancia entre las raíces de cada parábola] *aumenta, la altura* [se refiere a la ordenada del vértice de cada parábola] *debe disminuir*.

Er: *Claro, para que el área de la región encerrada sea constante es necesario que cuando la raíz* [se refiere a la raíz no nula] *crece, la ordenada del vértice decrezca*, [sobre su hoja de trabajo realiza el gráfico que se muestra en la Figura 3]

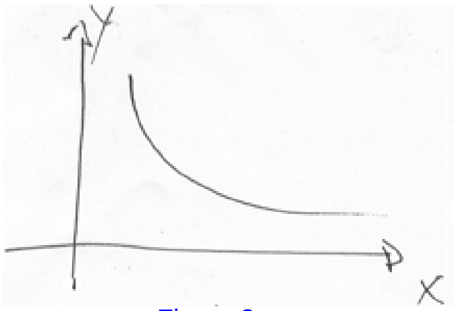


Figura 3

La docente trata de interpretar las producciones de los alumnos y retomando la afirmación de Erica, pregunta: *Cuándo la raíz, de la que hablan Uds., crece: ¿qué sucede con la abscisa del vértice?*

Er: *"como la raíz aumenta, entonces la abscisa del vértice también aumenta"*

La profesora rescatando la relación que los alumnos establecían entre las coordenadas del vértice les propone que las marquen sobre las parábolas para que confirmen o desechen la hipótesis que están sosteniendo.

Para poder obtener las coordenadas del vértice Erica prefiere expresar la ecuación en forma canónica, por lo que completando cuadrados, en su hoja de cálculos, obtiene $\mathbf{y}=\mathbf{a}\left(\mathbf{x}-\frac{\mathbf{b}}{\mathbf{2a}}\right)^{2}+\frac{\mathbf{b}^{2}}{\mathbf{4(-a)}}$ y expresa las coordenadas del vértice de la forma: $V=\left(-\frac{b}{2a};-\frac{b^2}{4a}\right)$.

Emiliano, quien está frente al teclado de la computadora, introduce la expresión hallada por Erica (para las coordenadas del vértice) y sustituye b por el valor $b=18^{1/3}\ a^{2/3}$, obteniendo la expresión:

$$\left(-\frac{18^{\frac{1}{3}}\ a^{\frac{2}{3}}}{2\,a};-\frac{\left(18^{\frac{1}{3}}\cdot a^{\frac{2}{3}}\right)^{2}}{4\,a}\right)$$
.[2]

Posteriormente marca los vértices sobre las parábolas mostradas en la Figura 2, (Figura 4)

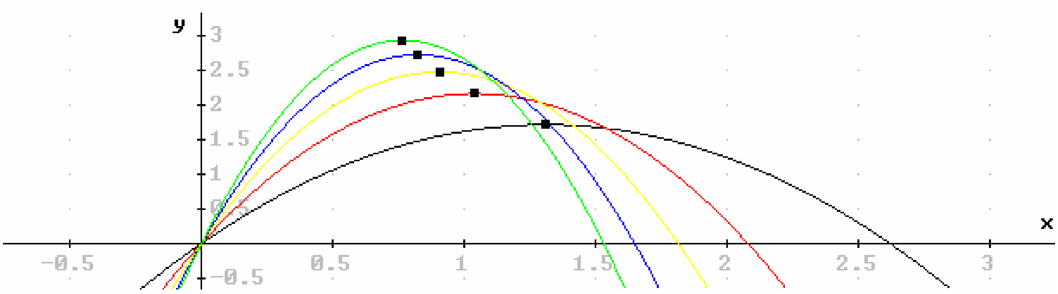


Figura 4

La docente interviene diciendo:

D: *Entonces ¿se cumple que cuando la base aumenta la altura debe disminuir?*

Er: *Sí, en realidad cuando aumenta la abscisa del vértice disminuye su ordenada.*

A pedido de Erica, Emiliano grafica una familia de parábolas haciendo variar a entre 0.25 y 10 con un paso de 0.25 y sobre ellas los vértices.

[2] A sugerencia de la docente fue necesario elegir la preferencia de simplificación ***Any*** (Definir-Preferencia de simplificación) que permite controlar las simplificaciones de las expresiones matemáticas, por ejemplo, simplifica expresiones del tipo $\left(\mathbf{x}^{2}\right)^{\frac{1}{2}}=\mathbf{x}$ en lugar de $|x|$ si el signo de x es desconocido ya que pensamos que la simplicidad de las notaciones resultarían más familiares.

[Silencio, mientras observan el gráfico en la computadora (Figura 5). Finalmente Emiliano propone:]

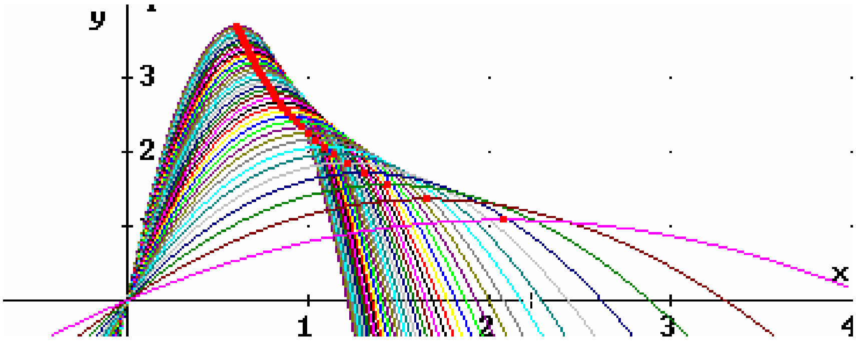


Figura 5

Em: *Hasta podríamos encontrar la ecuación de esa curva.*

Er: *¿De cuál?*

Em: *De la curva que pasa por todos los vértices*

[Silencio]

Er: [anotando (x ; y)] *Tenemos que encontrar una función f(x) donde x sea la abscisa del vértice,* $\mathbf{y = f(x)}$ *la ordenada.*

Erica, busca entre sus anotaciones y comienza trabajar con la expresión de las coordenadas del vértice: $\mathbf{V} = \left(-\frac{\mathbf{b}}{\mathbf{2a}} ; -\frac{\mathbf{b}^2}{\mathbf{4a}} \right)$, aunque anteriormente Emiliano había logrado una expresión de las coordenadas sólo en función de a y a partir de allí obtener la figura 4.

Es importante destacar en este momento del relato de la experiencia que los estudiantes visualizando las gráficas pudieron anticipar la existencia de una curva que une los vértices de las parábolas, surgiendo de esta manera un nuevo problema propuesto por ellos y que va más allá del problema original.

Los estudiantes tenían la conjetura de que el gráfico de la función que buscaban, relacionando xv e yv bajo las condiciones establecidas, era una rama de hipérbola, sin embargo no conseguían determinar la ecuación de ésta. La docente decide intervenir:

D: *¿Cuál es la expresión de la coordenada x?*

[Silencio]

Em: *x debe ser* $-\frac{\mathbf{b}}{\mathbf{2a}}$

D: *Ahora, la idea es encontrar la coordenada y en función de x*

Er: *Como* $\mathbf{b} = \mathbf{18}^{1/3}\,\mathbf{a}^{2/3}$ *podemos escribir x* [se refiere a xv] *sólo en función de a. Con el auxilio del software sustituyen la variable b y obtienen*: $\mathbf{x} = -\frac{\mathbf{18}^{1/3}}{\mathbf{2 \cdot a}^{1/3}}$.

Em: *y* [se refiere a yv] *debe ser* $-\frac{\mathbf{b}^2}{\mathbf{4a}}$, *podríamos hallar y [del vértice] en función de a.* Para ello usando el comando Sustituir encuentran $\mathbf{y} = -\frac{\mathbf{3 \cdot 12}^{\frac{1}{3}} \cdot \mathbf{a}^{\frac{1}{3}}}{\mathbf{4}}$.

Er: Pero necesitamos escribir y en función de x. Usando el comando “Resolver” obtiene $\mathbf{a} = -\frac{\mathbf{9}}{\mathbf{4 \cdot x}^3}$

Em: *Claro, sustituyendo encontraríamos la ecuación de la función que estamos buscando.* Usando el software arriban a la función $\mathbf{f(x)} = \frac{\mathbf{9}}{\mathbf{4x}}$.

Posteriormente realizan el gráfico de la función hiperbólica que acaban de determinar (Figura 6)

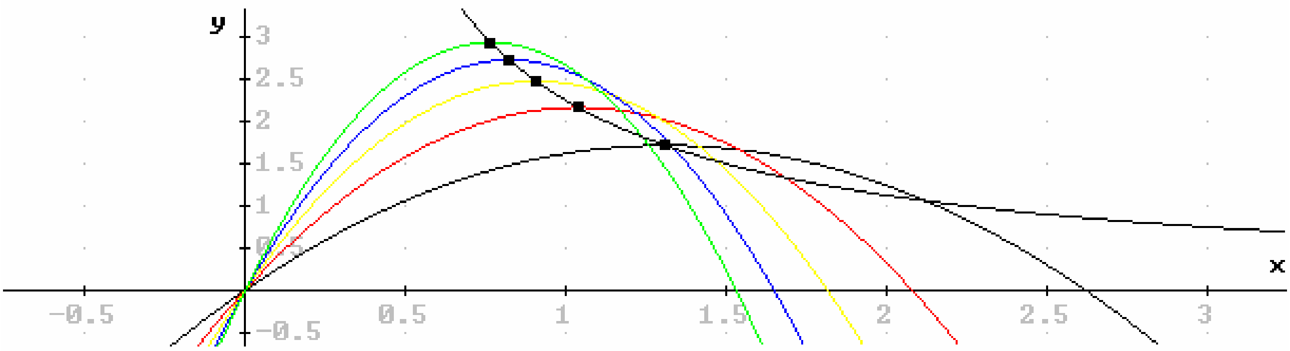


Figura 6

Observan que el gráfico de la función es una hipérbola pero en la pantalla sólo se ve una sola de sus ramas. Cambiando la escala del gráfico aparece la otra rama. Esta última actividad puso el punto final al primer encuentro.

En el segundo encuentro se retoma el problema planteado. La docente recuerda que Emiliano había manifestado que b podía tomar valores positivos o negativos, entonces propone que analicen la situación cuando b toma valores negativos. Los estudiantes recuerdan que en los gráficos realizados en el encuentro anterior mostrados en la Figura 1, las parábolas $y=-x^2+bx$ se desplazan hacia la izquierda cuando b toma valores negativos.

Continúan la exploración del problema planteado originalmente pero ahora considerando tanto a como b negativos y las raíces son en este caso $-b/a$ y 0. A partir de esa observación plantean la integral que les permitirá calcular el área buscada:

$$\int_{-b/a}^{0}\left(ax^2+bx\right)dx$$

Nuevamente acuerdan que el área constante sea igual a 3. Repiten la estrategia ya usada para obtener b en función de a, resultando en este caso

$$b=-18^{1/3}\,a^{2/3}$$

Para corroborar lo hallado deciden graficar la familia de parábolas $y=ax^2-18^{1/3}\,a^{2/3}\,x$ asignado a a los valores negativos –10, -8, -6, -4, -2 (Figura 7) .

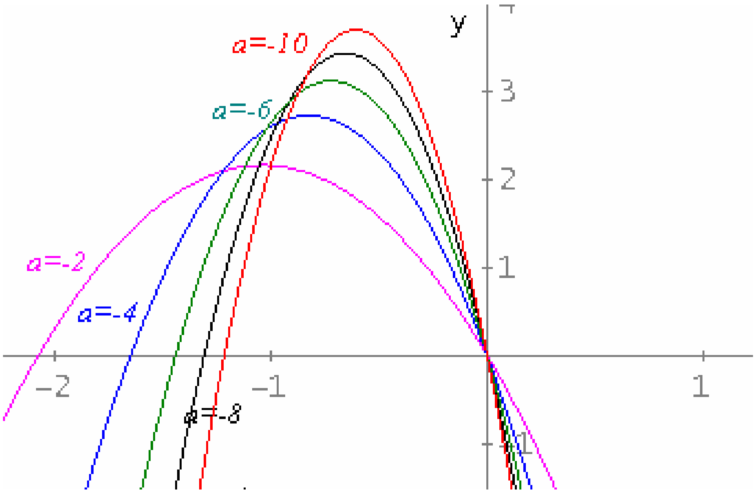


Figura 7

A continuación deciden marcar los vértices de las parábolas ya graficadas y posteriormente grafican la función $f(x)=-\dfrac{9}{4x}$ ya que consideran que si b era negativo, entonces la función que pasa por los vértices de esas parábolas debe cambiar también su signo. Esta conjetura fue confirmada a través de la visualización del gráfico correspondiente (Figura 8), estableciendo de esta manera que los vértices se encuentran sobre una rama de la hipérbola.

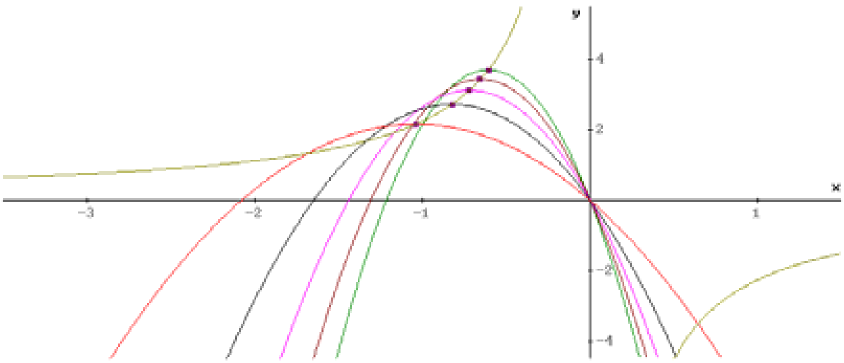


Figura 8

Finalmente la docente les pide que realicen la generalización del problema.

Introduciendo un valor constante k para el área, los estudiantes logran expresiones generales tales como:

$$\mathbf{y = a\,x^2 + \left(6 \cdot a^2 \cdot k\right)^{1/3}\,x}$$

para las funciones cuadráticas y

$$\mathbf{f(x) = \frac{3\,k}{4x}}$$

para una de las ramas de la función que pasa por los vértices de las parábolas en el caso que b sea positivo.

La generalización del problema fue realizada usando el software ya que se trataba de realizar los mismos pasos que consideraron para el caso particular $\mathbf{k = 3}$, con la ventaja de la rapidez en las distintas etapas. Esta actividad se vio favorecida por la posibilidad de uso del software en la realización de cálculos simbólicos.

Conclusiones

La visualización tuvo un papel importante en el planteo de conjeturas que luego fueron verificadas gráfica y analíticamente. Según Hitt, F. (1995): *“visualizar no es lo mismo que ver. En nuestro contexto, visualizar es la habilidad para crear ricas imágenes mentales que el individuo pueda manipular en su mente, ensayando diferentes representaciones del concepto y, si es necesario, usar el papel o la computadora para expresar la idea matemática en cuestión”.*

Durante el desarrollo de la experiencia surgieron conclusiones no previstas por los docentes como la determinación de que los vértices de las diferentes parábolas se hallaban sobre una rama de hipérbola lo que muestra que trabajando en un ambiente computacional es posible que emerjan conjeturas que puedan ser verificadas.

También puede destacarse que los alumnos, para resolver el problema, recurren inicialmente a un caso particular, a partir del cual luego consiguen generalizar, mostrando un camino más inductivo que deductivo. La elección de un caso particular (área de la superficie limitada por la parábola y el eje x) permitió graficar familias de curvas que encerraban regiones de áreas constantes y la visualización de ellas los condujo a proponer un nuevo problema, la determinación de la curva que pasa por los vértices de esas parábolas.

En este trabajo se observa el planteo de conjeturas, de lo más variadas que luego, por iniciativa de los alumnos o del docente son retomadas y dan lugar a nuevos resultados que en este caso fueron totalmente inesperados.

La tecnología es una ayuda para resolver problemas. Los estudiantes deciden cuando usarla y cuando no, y lograr así un equilibrio entre el uso de la tecnología y la forma tradicional de trabajar con lápiz y papel. En esta experiencia se observó a los alumnos alternar entre ambas formas de trabajo ya sea que en una lograban más seguridad que en otra o para controlar los resultados obtenidos de una u otra forma.

El problema propuesto podría haberse resuelto sin recurrir a la computadora, solamente usando lápiz y papel. Usar el software amplió la gama de manipulaciones posibles y de visualizaciones, favoreciendo la exploración de temas matemáticos y la formulación de conjeturas, provocando la reflexión y el razonamiento matemático permitiendo la formulación y resolución de un nuevo problema.

Este resultado difícilmente hubiese surgido sin recurrir a la tecnología. Por medio de la construcción de gráficos los estudiantes revalidan constantemente sus hipótesis y conjeturas.

Bibliografía

- F. Hitt (1995): “Intuición Primera Versus Pensamiento Analítico: Dificultades en el paso de una Representación Gráfica a un Contexto real y Viceversa”, Revista Educación Matemática. Vol. 7 No 1, Grupo Editorial Iberoamérica, México.
- F. Hitt (2003): “Una Reflexión Sobre la Construcción de Conceptos Matemáticos en Ambientes con Tecnología”, Boletín de la Asociación Matemática Venezolana, Vol. X No 2, Venezuela.
- M. Borba (1999): Tecnologias informáticas na Educação Matemática e reorganização do pensamento. In Bicudo (Ed.) Pesquisa em Educação Matemática: concepções e perspectivas, São Paulo: Editora UNESP.

- M. Borba; M. Villarreal (2005): Humans-with-Media and the Reorganization of Mathematical Thinking. Mathematics Education Library .Springer, United States of America.
- A, Schoenfeld (1985) Mathematical Problem Solving New York: Academic Press.
- W. Zimmermann, S. Cunningham (1991): Editor`s introduction: what is mathematical visualitation? In: ZIMMERMANN, W.; CUNNINGHAM, S.(Eds) Visualization in teaching and learning mathematics.

Torroba, Estela, Santa Rosa (1950). Profesor de Matemática y Física Universidad Nacional de La Pampa. Facultad de Ciencias Exactas y Naturales. (Argentina). Dirección Postal: Independencia 329. Santa Rosa, (6300), La Pampa, Argentina
estelat@exactas.unlpam.edu.ar

Reid, Marisa, Sansinena (Pcia. Bs. As) (1966). Licenciada en Matemática. . Universidad Nacional de La Pampa. Facultad de Ciencias Exactas y Naturales. (Argentina). Dirección Postal: José Luro 1359 Santa Rosa, (6300), La Pampa, Argentina.
mareid@exactas.unlpam.edu.ar

Etcheverry, Nilda, Santa Rosa (1954). Magíster en Didáctica de la Matemática. Universidad Nacional de La Pampa. Facultad de Ciencias Exactas y Naturales. (Argentina). Dirección Postal: Avda Argentino Valle 623 Santa Rosa, (6300), La Pampa, Argentina.
nildae@exactas.unlpam.edu.ar

Villarreal, Mónica, Doctora en Educación Matemática. Universidad Nacional de Córdoba. Facultad de Ciencias Agropecuarias. (Argentina). Dirección Postal: Av. Cornelio Saavedra 3113, Barrio Granadero Pringles, (5008) Córdoba, Argentina.
mvilla@agro.uncor.edu

UNIÓN
REVISTA IBEROAMERICANA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA

Septiembre de 2006, Número 7, páginas 53 - 61
ISSN: 1815-0640

Los números irracionales y su aplicación práctica en la educación secundaria básica en Argentina: el número de oro

Alejandra Cañibano

Resumen

El número de oro es un número que aparece repetidamente en la vida diaria, sin embargo poco se sabe de él y esto último no se refiere al desconocimiento de dicho número sino más bien al desconocimiento de su presencia en diferentes situaciones cotidianas y que, de una manera u otra, reducen la visión de un aprendizaje sistémico.

El contenido de la enseñanza es el componente que le da razón al proceso docente educativo y siempre está determinado por los objetivos de enseñanza que se concretan en el programa analítico de la asignatura. Dicho programa debe estructurarse con un enfoque sistémico que comprenda un sistema de conocimientos y de habilidades. Esto significa que el modo de abordar los objetos y fenómenos no puede ser de ninguna manera aislado y si tiene que verse como parte de un todo. De esa manera se trata de un conjunto de elementos que se encuentran en interacción y que, por lo tanto, deben tener una doble función: instructiva y educativa.

El sistema educativo argentino

Las dificultades que mostraron en los últimos años los egresados del polimodal para ingresar a las universidades llevaron a las autoridades a replantear el sistema impuesto por la Ley Federal de Educación de 1994. Esa norma establecía una Educación General Básica (EGB) de 9 años y otros 3 años de polimodal. Hace dos años, el gobierno de la Provincia de Buenos Aires a través de la Dirección General de Cultura y Educación (DGCyE) anunció una reforma para jerarquizar el último tramo de la educación. Así, a partir del año 2006, se ideó un esquema de seis años de secundaria: tres de ESB (Educación Secundaria Básica) y tres de Polimodal, reduciendo la Educación Primaria Básica (EPB) a 6 años divididos en dos ciclos de tres años cada uno. El tercer ciclo de la EGB se transforma en el ciclo denominado ESB y mientras en la actualidad se terminan de discutir los contenidos de cada asignatura permanecen vigentes los que se dictaban anteriormente. De acuerdo a la *Resolución Nº 13269/99. Tomo 1. Áreas Curriculares,* y atendiendo al tema que se trata en este trabajo, los números irracionales aparecen citados en el apartado Contenidos, Tercer Ciclo, Números y Operaciones. El siguiente es un extracto de la totalidad de los contenidos donde estarían incluidos los números irracionales.

- Números reales: noción de número real, propiedades. Completitud.
- Encuadramiento y aproximación de números reales.
- La lectura, escritura e identificación de números pertenecientes a los distintos conjuntos numéricos (N, Z, Q, R).

- El ordenamiento y la ubicación en la recta de números pertenecientes a los distintos conjuntos numéricos.
- Propiedades de los distintos conjuntos numéricos. Análisis comparativo.
- Operaciones en distintos conjuntos numéricos.
- La interpretación del sentido de las operaciones en los distintos conjuntos numéricos.
- Propiedades de las operaciones en distintos conjuntos numéricos. Análisis comparativo.
- Distinción del tipo de número necesario en función de la situación a resolver.

Es notable que los números irracionales no se designan explícitamente, sin embargo es un conjunto más que debería ser incluido cuando se estudia el conjunto de los números reales. Todo docente conoce este tema pero, como se citó anteriormente, poco se sabe de ellos y esto afirmación no se refiere al desconocimiento de dichos números sino más bien al desconocimiento de su presencia en diferentes situaciones cotidianas y que, de una manera u otra, ajustan un aprendizaje sistémico.

El número de oro

El número de oro, Φ (FI), también conocido como la proporción áurea, es uno de los conceptos matemáticos que aparecen una y otra vez ligados a la naturaleza y el arte. Comparte el grupo de los llamados números metálicos, Φ esta ligado al denominado rectángulo de oro y a la sucesión de Fibonacci.

Su descubrimiento data de la época de la Grecia clásica (s. V a.C.), fue seguramente el estudio de las proporciones y de la medida geométrica de un segmento lo que llevó a los griegos a su descubrimiento. Ya era perfectamente conocido y utilizado en los diseños arquitectónicos, por ejemplo el Partenón y escultóricos pero, recién en el siglo XX fue cuando el número de oro, conocido también como sección áurea, proporción áurea o razón áurea recibió su símbolo Φ (FI). El valor numérico de Φ es de 1,618... , Φ es un número irracional.

Su definición es la siguiente: "Dos números A y B están en la proporción de oro si (A + B) es a A lo mismo que A es a B".

En símbolos: $\frac{(\mathbf{A}+\mathbf{B})}{\mathbf{A}}=\frac{\mathbf{A}}{\mathbf{B}}$

Si a A se le da el valor unitario, A = 1 entonces se tendrá que:

$$\frac{(\mathbf{1}+\mathbf{B})}{\mathbf{1}}=\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{B}}$$

$$\mathbf{B}+\mathbf{B}^2=\mathbf{1}$$

$$B^2 + B - 1 = 0$$

Con las dos soluciones: $B_1 = 1.618033989$ y $B_2 = 0.618033989$.

La presencia del número de oro en diferentes situaciones

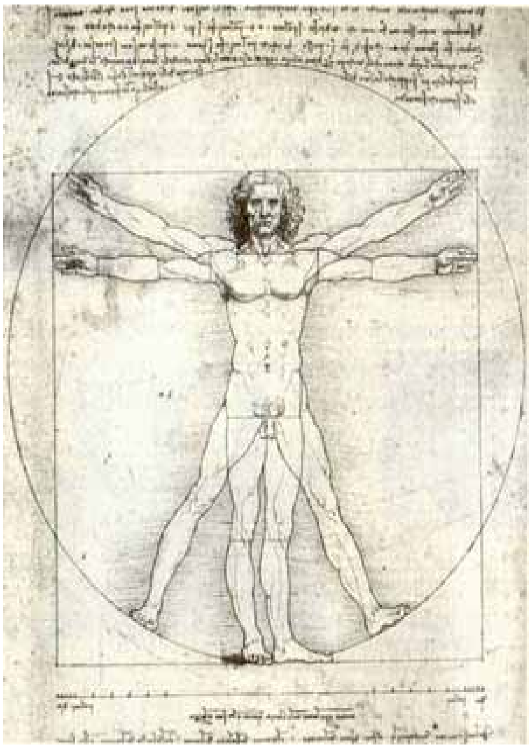
El número de oro no solo se encuentra en la naturaleza o en las antiguas construcciones y representaciones artísticas, diariamente se observan objetos en los cuales se han tenido en cuenta las proporciones áureas para su elaboración: las tarjetas de crédito y los documentos de identidad tienen la proporción de un rectángulo áureo. Los atados de cigarrillos, la construcción de muebles, los marcos para ventanas, las camas son otros ejemplos de dicha proporción.

Se encuentra el número de oro en la naturaleza: en el hombre (las falanges de las manos guardan esta relación, igualmente la longitud de la cabeza y su anchura), los caracoles marinos, las piñas y las hojas que se distribuyen en el tallo de una planta,

Leonardo Da Vinci ilustró el libro “De Divina Proportione” del matemático Luca Pacioli editado en 1509. En este libro se describen cuales han de ser las proporciones de las construcciones artísticas. El Hombre de Vitrubio es uno de los dibujos de los libros de apuntes de Leonardo da Vinci.

En cualquier persona la longitud de una estructura (brazos) varía en relación con la de cualquier otra estructura (la altura total del cuerpo) en las diferentes etapas del desarrollo.

En particular, Pacioli propone un hombre perfecto en el que las relaciones entre las distintas partes de su cuerpo sean las del dibujo adjunto.



El numero de oro y la sucesión de Fibonacci

La sucesión de Fibonacci[1]

Consideremos la siguiente sucesión de números:

1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34...

Cada número a partir del tercero, se obtiene sumando los dos que le anteceden. Por ejemplo 34 = 21+13 lo que sugiere que el número siguiente a 34 en la sucesión es 55 = 21+34.

Esta sucesión es la llamada "sucesión de Fibonacci"*.

La sucesión de Fibonacci presenta diversas reglas numéricas y cumple con determinadas propiedades. La tabla muestra hasta el término 14 de la sucesión:

t_1	t_2	t_3	t_4	t_5	t_6	t_7	t_8	t_9	t_{10}	t_{11}	t_{12}	t_{13}	t_{14}
1	**1**	**2**	**3**	**5**	**8**	**13**	**21**	**34**	**55**	**89**	**144**	**233**	**377**

Propiedades (aplicadas sobre los términos de la sucesión)

- Si se suman los cuatro primeros términos y se agrega 1, se obtiene el sexto número (1+1+2+3+1=8). Si se suman los cinco primeros términos y se añade una unidad surge el séptimo número (1+1+2+3+5+1=13).
- Si se suman los tres primeros términos que ocupan posición impar (t1,t3,t5) se obtiene el sexto término (t6), (1+2+5=8) y si se suman los cuatro primeros términos que ocupan posición impar (t1,t3,t5,t7) se obtiene el octavo término (t8), (1+2+5+13 = 21).
- Si se suman los tres primeros términos que ocupan posición par (t2,t4,t6) y se añade 1, se obtiene el séptimo término (t7), (1+3+8+1=13); si se suman los cuatro primeros términos que ocupan posición par (t2,t4,t6,t8) y se le vuelve a sumar 1, sale el noveno término (t9), (1+3+8+21+1 =34).
- Tomando dos términos consecutivos, por ejemplo t4=3 y t5=5; elevados al cuadrado y sumados: 9+25=34 se obtiene el noveno (4+5) término de la sucesión. Tomando t6=8 y t7=13; haciendo el mismo procedimiento se obtiene 64+169=233, que es el (6+7) decimotercero término de la sucesión.

[1] Leonardo de Pisa (1170-1240) fue sin duda el matemático más original y hábil de toda la época medieval cristiana, pero buena parte de sus trabajos eran demasiado difíciles para ser bien comprendidos por sus contemporáneos. Fibonacci era su sobrenombre y significa “Hijo de Bonacci”, tal era el apellido paterno.

- Elevando al cuadrado los cinco primeros términos y sumándolos, sale el producto del quinto y el sexto término: 1+1+4+9+25=40=5x8. Si se hace lo mismo para los seis primeros términos, sale el producto del sexto y el séptimo término:1+1+4+9+25+64=104= 8 x13.
- Otra propiedad consiste en dividir dos términos consecutivos de la sucesión, siempre el mayor sobre el menor. Los resultados que se obtienen son los siguientes:

1 : 1 = 1	13 : 8 = 1,625
2 : 1 = 2	21 :13 = 1,6153846....
3 : 2 = 1,5	34 :21 = 1,6190476....
5 : 3 = 1,66666666	55 :34 = 1,6176471....
8 : 5 = 1,6	89 :55 = 1,6181818....

Al tomar más términos de la sucesión y hacer su cociente nos acercamos al número de oro. Esta es la relación entre Φ y la sucesión de Fibonacci.

Cuanto mayores son los términos, los cocientes se acercan más a Φ =1,61803...

Aplicaciones para el aula

El presente apartado no intenta demostrar ninguna experiencia didáctica aplicada al aula; excede el objetivo de este trabajo que solo busca brindar un “torbellino de ideas” para todo aquel docente o persona interesada que lo considere necesario para determinados fines. Es sabido que la Sucesión de Fibonacci y la Proporción Áurea se encuentran en diversos escenarios y las aplicaciones son muchas. A fin de acotar la temática los ejemplos que se muestran se hallan directamente asociados al campo de las Ciencias Naturales.

Ejemplo 1: En el **cuerpo humano** el número áureo aparece en muchas medidas: la relación entre las falanges de los dedos es el número áureo (Figura 1), la relación entre la longitud de la cabeza y su anchura es también este número.

Figura 1

Ejemplo 2: En el caso de la **zoología,** el número de descendientes en cada generación de una abeja macho o zángano nos conduce a la sucesión de Fibonacci.

La abeja reina puede determinar el sexo de su descendencia. Cuando un huevo pasa del ovario al oviducto, puede ser fecundado o no con el esperma que contiene la espermateca. El huevo fecundado se transforma en una abeja hembra, ya sea obrera o reina, y el huevo no fecundado en una abeja macho o zángano. Los zánganos son machos, y nacen a los 24 días de haber sido aovado un huevo no fecundado (partenogenético) en una celda de zángano.

Si observamos el árbol genealógico (Figura 2) de un zángano, podemos ver como el número de abejas en cada generación es uno de los términos de la sucesión de Fibonacci.

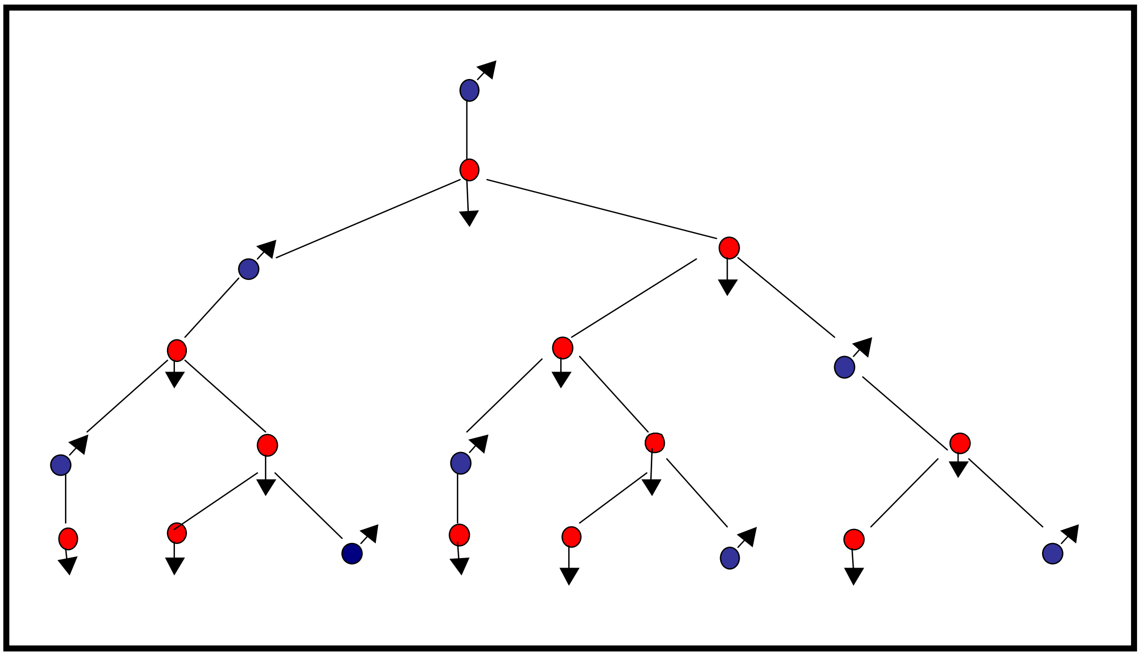


Figura 2

Acá se ha graficado hasta la cuarta generación y si se cuenta el número de abejas por fila se tendrá 1,1, 2,3, 5, 8 tal como se mencionó en el párrafo anterior.

Ejemplo 3: La serie de Fibonacci se puede encontrar también en **botánica**. Así, por ejemplo, ciertas flores tienen un número de pétalos que suelen ser términos de dicha sucesión; de esta manera el lirio tiene 3 pétalos, algunos ranúnculos 5 o bien 8, las margaritas y girasoles suelen contar con 13, 21, 34, 55 o bien 89.

Margaritas

Lirios

Ejemplo 4: La Filotaxia es una parte de la botánica que estudia la disposición de las hojas a lo largo de los tallos de las plantas. El arreglo de las hojas o partes florales en sus ejes; por lo general expresado numéricamente por una fracción, en la que el numerador representa el número de revoluciones de una espiral para llegar de una hoja, pasando por cada una sucesiva, hasta alcanzar la que está directamente sobre la hoja inicial, y el denominador representa el número de hojas encontradas al hacer tal espiral. Se llama característica del tallo a la fracción m/n

Si se toma la hoja de un tallo y se cuenta el número de hojas consecutivas hasta encontrar otra hoja con la misma orientación este número será, por regla general, un término de la sucesión de Fibonacci.

Sauce Llorón; Característica = 3/8

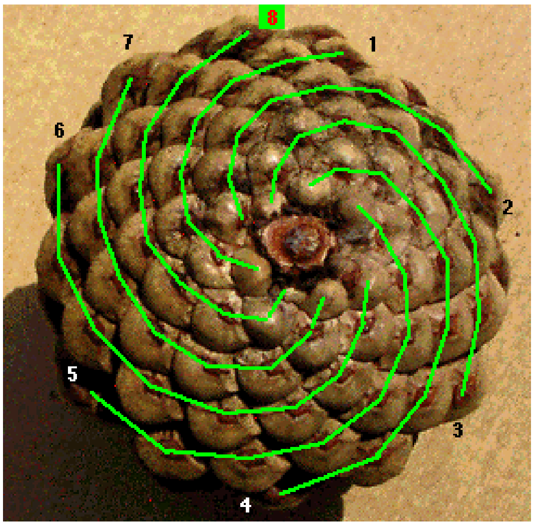
Olmo; Característica = 1/2

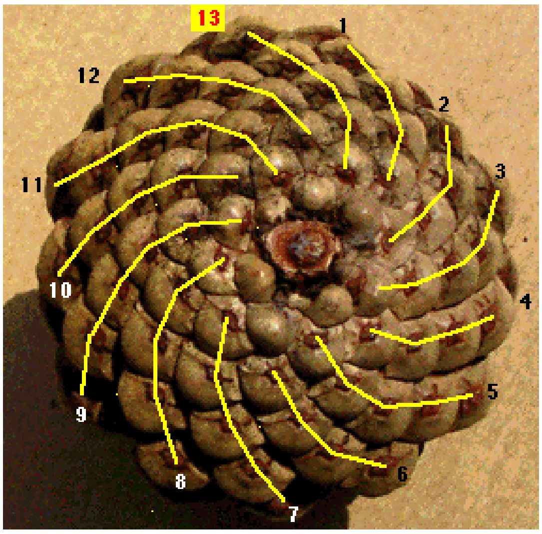
Almendro; Característica = 8/13

Álamo Blanco; Característica =2/5

Ejemplo 5: Las **"hojas" de una piña** de pino tienen, por regla general, una característica de 5/8 o bien 8/13, presentando propiedades similares las hojas de las lechugas, los pétalos de las flores, las ramas de las palmeras, el ficus, etc., ejemplos que se pueden comprobar fácilmente.

En las dos fotografías que se muestran a continuación se cuentan las espirales de la piña de arriba y se aprecia ese hecho: hay 8 en un sentido y 13 en el otro, es decir, dos números de Fibonacci consecutivos.





La matemática, considerada una actividad que ocupa grandes espacios en casi todas las situaciones cotidianas, es una ciencia intensamente dinámica y cambiante aún en su propia concepción profunda. Esto sugiere que, efectivamente, la actividad matemática no puede ser una realidad de abordaje sencillo.

Haciendo hincapié en la transmisión de los procesos de pensamiento propios de la matemática más que en la transferencia de contenidos, la matemática se transformará en un saber hacer y el método predominará sobre el contenido. El enfoque de sistema, también denominado enfoque sistémico, es justamente el modo de abordar los objetos y fenómenos en forma no aislada, como parte de un todo. Es la reunión de una serie de elementos que se encuentran en interacción, integrándose y de ello se obtendrán resultados en un nivel superior al de los componentes que lo forman.

Finalmente a la matemática, en los niveles educativos en que los alumnos se están formando y recibiendo información de manera continua, no se le deberá seguir dando un tratamiento de ciencia independiente de la realidad que nos rodea.

Bibliografía

- Álvarez, Cristina; Álvarez, Fernando; Garrido, Luis Mario; Martinez, Stella M. y Ruiz, Andrés.(2004). Matemática. 1ª edición. Editorial Cúspide. E.G.B. Tercer Ciclo. Noveno Año. 267 pp. ISBN: 987-21118-0-4.
- Carione Noemí H; Carranza, Susana G; Diñeiro, María Teresa; Latorre, María Laura y Trama, Eduardo E. (1996). Matemática 3. Editorial Santillana. Secundaria. 255 pp. ISBN: 950-46-0234-7
- Donoso C, Mauricio (1995). Taller de educación matemática: “La sección áurea y el número de oro, estudio en el cuerpo humano”. Universidad de Santiago - Chile.
- Rosell Puig W.; Mas García M. (2003). El enfoque sistémico en el contenido de la enseñanza. Edición Médica Superior. Volumen 17, Nº 2. Mayo-Junio 2.
- Resolución Nº 13269/99. Tomo I. Áreas Curriculares. Matemática. 1999. DGEy C. Provincia de Buenos Aires.

WEB

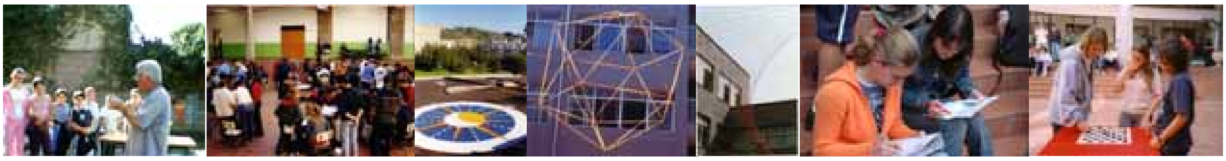
- http://rt000z8y.eresmas.net/El%20numero%20de%20oro.htm#5
- http://www.juntadeandalucia.es/averroes/recursos_informaticos/concurso2002/alumnado/naturaleza.html
- http://www.ubu.es/investig/aulavirtual/trabajos_03/trabajo12.pdf

Alejandra Cañibano, nació en Azul (Argentina) el 13 de julio de 1963. Es Agrimensora y posee una maestría en Metodología de la Investigación Biológica Aplicada a las Ciencias Agropecuarias. Es Profesora Adjunta del Área Matemática en la Facultad de Agronomía de la UNICEN. Comparte su trabajo con la enseñanza de la matemática en el nivel medio y adultos de escuelas estatales. Ha escrito diversos trabajos con la finalidad de mostrar las bondades de la matemática aplicada.

mac@faa.unicen.edu.ar

UNIÓN
REVISTA IBEROAMERICANA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA

Septiembre de 2006, Número 7, páginas 63 - 67
ISSN: 1815-0640



Dinamización matemática

Departamento de Matemáticas

Instituto de Enseñanza Secundaria Viera y Clavijo (La Laguna, Tenerife, España)

Por su huella le conocerás

Una exposición didáctica

En muchos de los programas de televisión y en ciertas películas se utiliza el argumento de utilizar las huellas dejadas por algún individuo (persona o animal) para tratar de identificarlo. Así ocurre con las huellas dactilares dejadas por el ladrón en un vaso que estaba sobre la mesa o con la huella dejada por determinado felino sobre una tierra blanda. Por su huella les identifican.

A lo largo de la historia, muchos científicos han dejado también una huella con la que se les identifica de manera inequívoca. La penicilina nos lleva a Alexander Fleming, la bombilla eléctrica a Thomas Alba Edison, la transmisión inalámbrica a Giuliamo Marconi y así podríamos continuar una larga lista. Todos ellos aportaron más descubrimientos e inventos (solo con Edison la lista sería muy amplia), pero la historia les recuerda asociados a uno especialmente espectacular.

Pues bien, en el mundo de las matemáticas y de la física también se da ese fenómeno. Posiblemente sea Pitágoras el matemático más popular entre los estudiantes y entre las personas que no han pasado de estudios medios. Si les preguntamos por las aportaciones que hizo este personaje, en el mejor de los casos, dirán que lo estudiaron también en filosofía pero sin lugar a dudas, su resultado estrella es el teorema que lleva su nombre. Si rascamos un poco más en la memoria de nuestro imaginario encuestado y le decimos que lo enuncie, a lo mejor nos dice algo así como: “en todo triángulo (puede que añada rectángulo), la *suma de los catetos al cuadrado* es igual al cuadrado de la hipotenusa”.

La letra cursiva indica un error bastante corriente en que cae la memoria de algunos pues realmente deberían decir: “*la suma de los cuadrados de los catetos*…”.

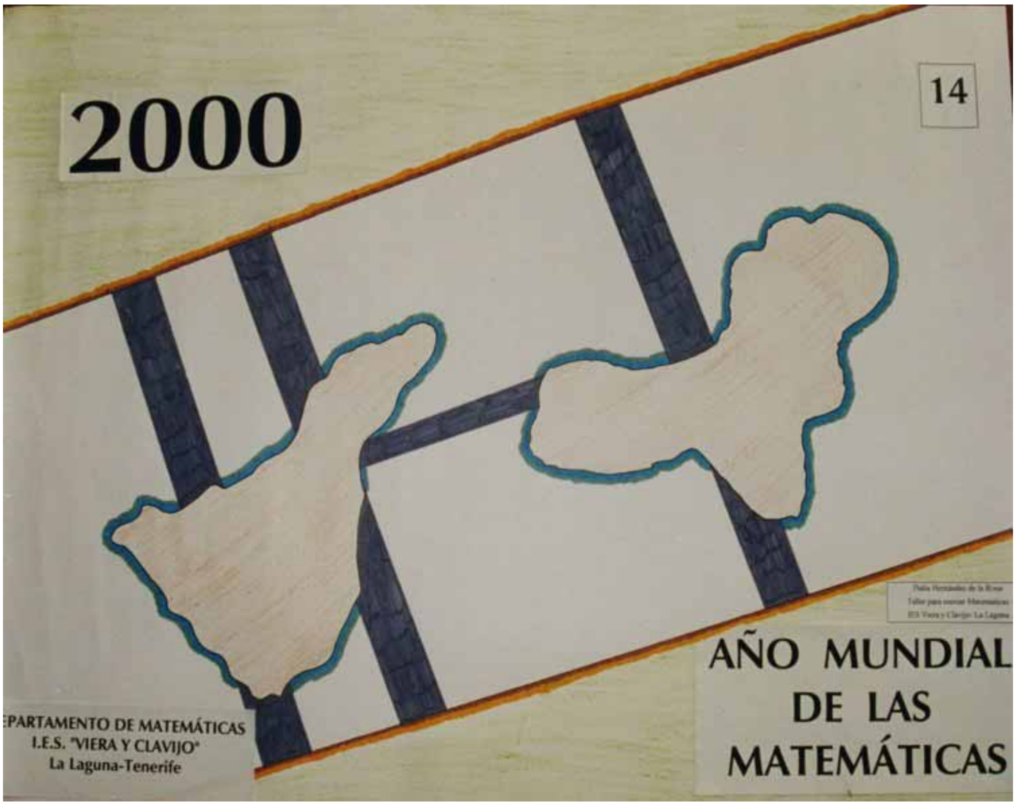
Esto nos indica, en la línea argumental anterior, que Pitágoras ha dejado su huella en la microhistoria de la ciencia de muchos estudiantes a través de ese teorema. Es mejor no preguntar el siglo en el que vivió para no descubrir que pocos lo saben.

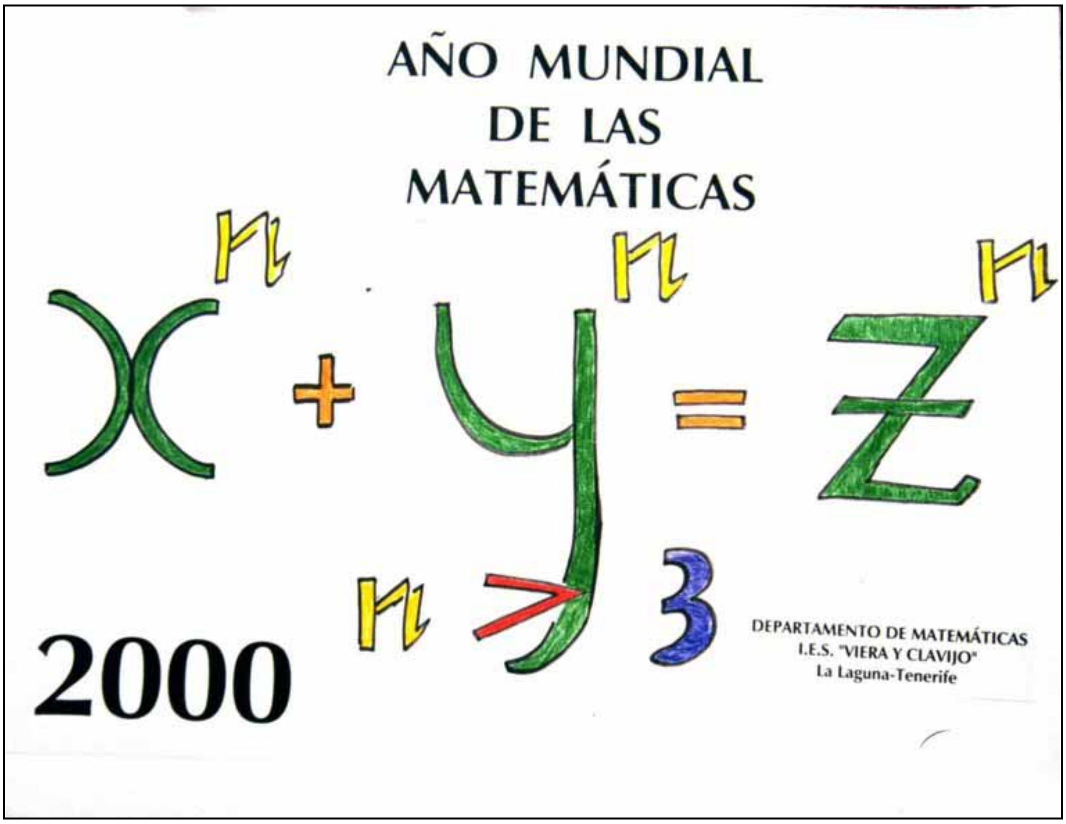
El trabajo que presentamos hoy es una exposición que se realizó por primera vez en el Taller de Matemáticas con motivo del 2000, año mundial de las matemáticas. Se tituló justamente así: **Por su huella le conocerás**.

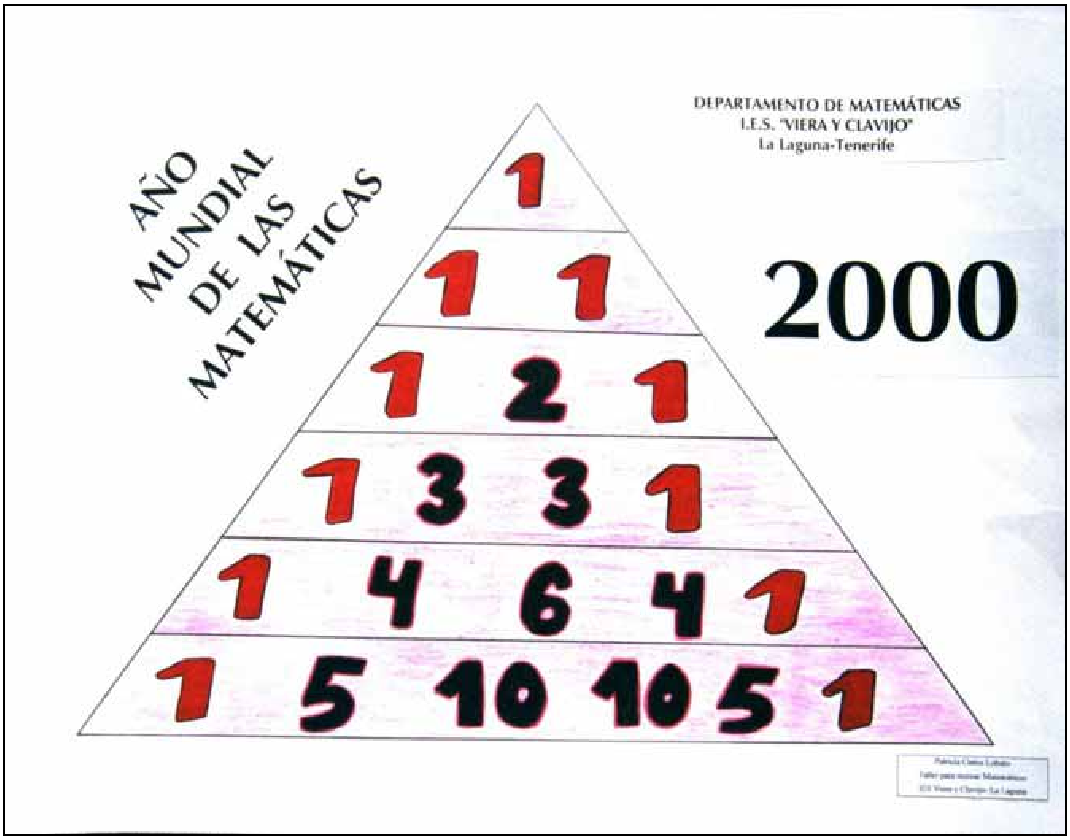
Tiene como objetivo plasmar la huella en una cartulina. El visitante debe identificar cuál es el matemático que se esconde detrás de esa huella. Con el fin de ayudarle, se le entregaba una relación de “las huellas” y debían escribir al lado a qué matemático se le asocia. Como en toda exposición didáctica y escolar, se cuidó la sencillez y la claridad en la idea que se deseaba transmitir. La visita a la exposición permitía al profesor hacer un recorrido por la historia de las matemáticas precisamente a través de los que dejaron esas huellas, que son tan profundas que se les identifica con ellas y que en algún caso siguen de plena actualidad, como Pitágoras, más de dos mil quinientos años después.

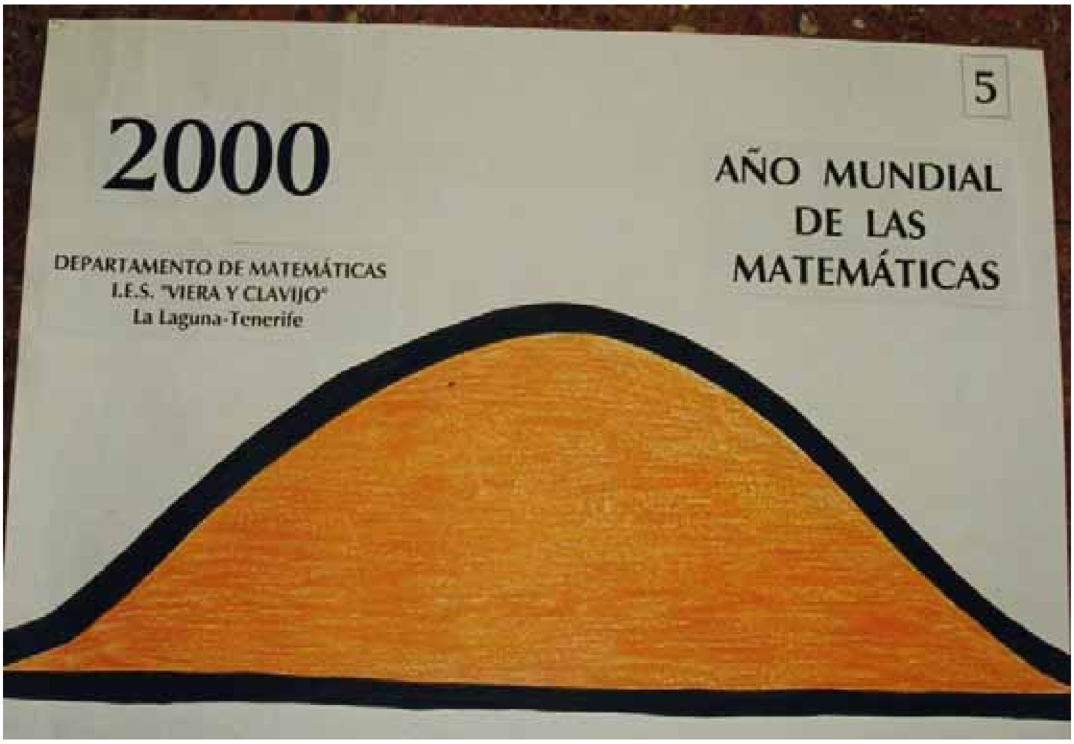
La exposición puede abordarse como trabajo colectivo desde finales de Primaria. Hay una interesante labor previa de investigación e indagación de los diferentes matemáticos o de las culturas que hicieron aportaciones matemáticas (egipcia, mesopotámica, maya, árabe, etc.).

Presentamos a continuación varios de los carteles de que consta la exposición así como una fotografía de una visita y la encuesta que se entregaba a los visitantes.




AÑO MUNDIAL
DE LAS
MATEMÁTICAS
$x^n + y^n = z^n$
$n > 3$
2000
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS
I.E.S. "VIERA Y CLAVIJO"
La Laguna-Tenerife


AÑO
MUNDIAL
DE LAS
MATEMÁTICAS
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS
I.E.S. "VIERA Y CLAVIJO"
La Laguna-Tenerife
2000
1
1 1
1 2 1
1 3 3 1
1 4 6 4 1
1 5 10 10 5 1


5
2000
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS
I.E.S. "VIERA Y CLAVIJO"
La Laguna-Tenerife
AÑO MUNDIAL
DE LAS
MATEMÁTICAS


2000
AÑO MUNDIAL
DE LAS
MATEMÁTICAS
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS
I.E.S. "VIERA Y CLAVIJO"
La Laguna-Tenerife

Alumnos visitando la exposición

Con motivo de celebrarse durante el 2000 el año mundial de las Matemáticas, el Taller para re-crear Matemáticas del IES "Viera y Clavijo" de La Laguna, Tenerife, ha preparado una exposición-concurso que ha titulado "**Por su huella le conoceréis"** y que consiste en lo siguiente:

En carteles montados con metacrilatos, se presentan al visitante veinte imágenes (fórmulas, gráficos, dibujo, etc.) cada una asociada a un matemático. El concurso consiste en que se ha de escribir al lado del número correspondiente, el nombre del matemático al que cree que corresponde la imagen del cartel.

Se hará un sorteo de un premio entre las respuestas recibidas.

Número del cartel	Nombre del Matemático
1	
2	
3	
4	
5	
6	
7	**Cauchy**
8	
9	
10	
11	
12	
13	**Durero**
14	**Euler**
15	
16	
17	**Fermat**
18	
19	
20	

UNIÓN
REVISTA IBEROAMERICANA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA

Septiembre de 2006, Número 7 página 69
ISSN: 1815-0640

Sistemas educativos

Nota de los editores

Por razones ajenas a la voluntad, tanto del Comité Editorial como de los compañeros y compañeras de Venezuela, el texto de esta sección, dedicada en esta ocasión al sistema educativo en dicho país, no ha podido ser incluido. Se publicará en el número 8 de UNIÓN, en diciembre de este año. Pedimos disculpas.

UNIÓN
REVISTA IBEROAMERICANA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA

Historia

Septiembre de 2006, Número 7 páginas 71-81
ISSN: 1815-0640

Coordinador: Wagner Rodrigues Valente

A aritmética na escola de primeiras letras: os livros de aprender a contar no Brasil do século XIX.

Wagner Rodrigues Valente

As Aritméticas: dos mercadores do século XVI ao comércio brasileiro do século XIX

Os negócios realizados no século XVI revelam a figura múltipla do mercador. Como banqueiro, por exemplo, seus horizontes profissionais e intelectuais são muito diferentes daqueles do pequeno negociante. Sua pertença geográfica, também, é um traço de distinção: veneziano, florentino, genovês... Isso torna impossível a construção do arquétipo do mercador. De todo modo, como nos ensina o historiador Pierre Jeaninn, o mais simples comerciante não pode deixar de fazer contas, efetuar cálculos. E, possivelmente, ele também sabe ler e escrever. O comércio exige que se leia, que se escreva, inclusive em línguas estrangeiras. Jeaninn pondera, ainda, que "há razões sérias para pensar que um ensino rudimentar é largamente dado nas cidades do século XVI, por mestres privados e por escolas comunais". O historiador considera que o conteúdo desse ensino está voltado para questões práticas. A partir do momento em que a criança sabe soletrar, passa a ter que ler textos que lhe são dados, com as noções indispensáveis sobre o calendário, rudimentos de vocabulário comercial (tipos de panos, medidas, moedas). JEANINN (1986, p. 87).

O ensino do cálculo, nessa instrução elementar do século XVI, nem sempre chega às quatro operações:

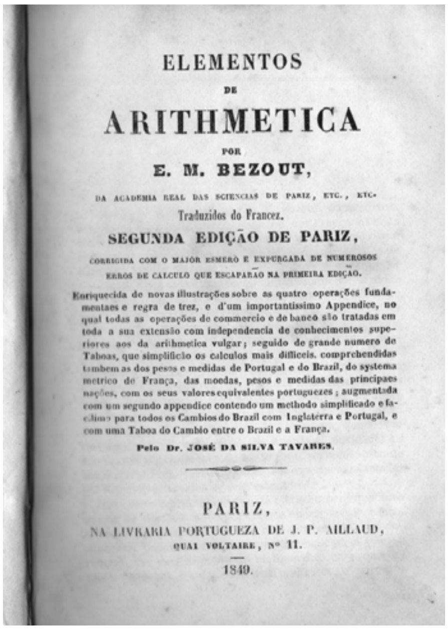
> A criança aprende a ´cifrar´, isto é, a ler e a escrever os números, ao mesmo tempo em que a metrologia mais corrente, o sistema métrico do tempo. O contrato de emprego de um mestre escola para uma pequena cidade alemã, em 1544, fixa o montante dos direitos que os alunos deverão pagar para aprenderem a ler e a escrever; para os que quiserem, além disso, aprender a contar, assim como a

> escrita de chancelaria, a tarifa será combinada entre o mestre e a família. A aritmética mais simples é abordada após dois ou três anos de estudos, quando o aluno passa, segundo a terminologia italiana, ao ábaco. (JEANINN, 1986, p. 88).

Relativamente ao material para o aprendizado do cálculo, sabe-se que os alunos têm a seu dispor modelos manuscritos. Alguns desses documentos chegaram até o nosso tempo. (JEANINN, 1986, p. 88). No entanto, no século XVI, muitos são os tratados de aritmética que ganham impressão. E vários deles com número considerável de edições. Como exemplo, Jeaninn menciona o *Ábaco* de Pietro Borgi, publicado ainda no século XV, em Veneza, em 1484. A obra foi reimpressa 16 vezes. (1986, p. 89). Mas, que tipo de obra era essa? São aritméticas para estudantes ou para um público de adultos? Que nível de elaboração tem esse tipo de obra? Pierre Jeannin responde a essas questões avaliando que "tratava-se de muito curta ciência" (1986, p. 89). No entanto, continua o historiador, há livros que têm um real valor científico. Como exemplo, cita a *Summa de Artihmetica Geometrica Proportioni et Proportionalita*, de Luca Pacioli, impressa em Veneza, em 1494.

Para o pesquisador Mariano Martínez Pérez, o frade franciscano Lucas Pacioli foi o último dos matemáticos do século XV. Conta-nos Pérez que em sua juventude Pacioli foi preceptor dos filhos de um rico mercador veneziano, Antonio Rompiansi, e assim foi introduzido às necessidades dos conhecimentos matemáticos no comércio. Depois de ordenar-se franciscano, Pacioli ensinou nas universidades de Perugia, Nápoles e Roma, publicando naquele ano de 1494, sua obra mais importante. A obra monumental, de 600 páginas, consta de três partes: aritmética, álgebra e geometria. O tratamento dos conteúdos é mais teórico e não tão prático como obras publicadas anteriormente ao livro. (Pérez, 2000, p. 91).

Deixando de lado as discussões sobre níveis de elaboração da produção matemática, é possível dizer que para grande parte da atividade mercantil, tratados de aritmética elementar servem como base para a ciência desse ofício. Esse parece ser um destino da grande maioria dos textos impressos: a divulgação dos rudimentos do cálculo para o trabalho dos mercadores, dos negociantes, das lides comerciais[1]. Vida longa tem essa produção editorial. Suas finalidades, atravessando séculos, nos levam aos primeiros textos usados no Brasil, como guias do comércio, verdadeiros dicionários para a atividade mercantil do país recém-independente.


ELEMENTOS
DE
ARITHMETICA
POR
E. M. BEZOUT,
DA ACADEMIA REAL DAS SCIENCIAS DE PARIZ, ETC., ETC.
Traduzidos do Francez.
SEGUNDA EDIÇÃO DE PARIZ,
CORRIGIDA COM O MAIOR ESMERO E EXPURGADA DE NUMEROSOS ERROS DE CALCULO QUE ESCAPARÃO NA PRIMEIRA EDIÇÃO.
Enriquecida de novas illustrações sobre as quatro operações fundamentaes e regra de trez, e d'um importantissimo Appendice, no qual todas as operações de commercio e de banco são tratadas em toda a sua extensão com independencia de conhecimentos superiores aos da arithmetica vulgar; seguido de grande numero de Taboas, que simplificão os calculos mais difficeis, comprehendidas tambem as dos pesos e medidas de Portugal e do Brazil, do systema metrico de França, das moedas, pesos e medidas das principaes nações, com os seus valores equivalentes portuguezes; augmentada com um segundo appendice contendo um methodo simplificado e facilimo para todos os Cambios do Brazil com Inglaterra e Portugal, e com uma Taboa do Cambio entre o Brazil e a França.
Pelo Dr. JOSÉ DA SILVA TAVARES.
PARIZ,
NA LIVRARIA PORTUGUEZA DE J. P. AILLAUD,
QUAI VOLTAIRE, Nº 11.
1849.

As obras de Étienne Bézout e sua utilização no Brasil já foram bastante estudadas relativamente ao ensino militar e secundário brasileiro[2]. O curso de matemática desse autor francês, em seus vários tomos, referenciaram a formação técnico-militar nos primeiros tempos de Colônia. Bézout, ainda, constitui inspiração para a publicação de vários textos de autores nacionais que foram utilizados nos liceus e preparatórios em tempos imperiais. Neste texto, cabe mencionar um aspecto pouco tratado sobre a obra de Bézout: sua Aritmética utilizada para fins comerciais.

É possível encontrar no acervo da *BNF - Bibliothèque National de France*, em Paris, várias edições em português da Aritmética de Bézout, seus *Elementos de Arithmetica.* A primeira destas edições tem a data 1836. Como referência completa da obra, na *BNF* tem-se: *Elementos de Arithmetica.... 1ª. Edição de Pariz... – Pariz, 1836. In-18 (Edition ne portant pas le nom du traducteur)*. A obra, como diz a

[1]Os estudos sobre origens da aritmética e sua escolarização muitas vezes apontam o comércio como berço desse ramo matemático. Maurice Caveing discute, em seu livro *Le problème des objets dans la pensée mathématique*, a partir de estudos de antropologia, como é enganosa e a-histórica a idéia de que a aritmética surge com o comércio. Mostra que as sociedades de tempos de antanho têm necessidade da aritmética muito antes de surgirem as lides comerciais.

[2] Um exemplo disso é o texto de Valente (1999), que informa que o *Cours de mathématiques à l'usage des gardes du pavillon et de la marine....*escrito por Bézout, tem cinco partes, em seis volumes, publicados entre 1764 e 1769.

referência não menciona o tradutor, no entanto, é possível ler já na sua capa os seguintes dizeres:

> Primeira Edição de Pariz – a qual repete fielmente a última edição da typografia da Universidade de Coimbra, enriquecendo-a de novas ilustrações sobe as quatro operações fundamentaes e regra de três, e de um importantíssimo Appendix, no qual todas as operações de commercio e de banco são tratadas em toda a sua extensão com independência de conhecimentos superiores aos d´Aritmetica vulgar; e he seguida de grande numero de Taboas, que simplificão os cálculos mais difíceis, compehendidas também as dos pesos e medidas de Portugal e do Brazil, do sistema métrico de França, das moedas, peso e medidas das principaes nações, com os seus valores equivalentes portugueses, etc., etc...

Essas informações remetem à origem das traduções do autor francês para o português. Sabe-se que é por ordem do Marquês de Pombal que as obras de Étienne Bézout ganharam tradução. Mais precisamente, a Universidade de Coimbra responsabiliza-se pela tradução, vindo à luz no ano de 1773, os *Elementos de Aritmética* de Bézout. O livro é traduzido por Monteiro da Rocha, e esta tradução foi reimpressa diversas vezes, sendo a última em 1826, pela Universidade de Coimbra. (Valente, 1999). Assim, a Aritmética de Bézout, impressa em 1836, constitui a primeira de uma nova série de reimpressões do texto originalmente traduzido por ordem da figura mais importante do reinado de D. José I[3]. Essa nova série de reimpressões está referenciada nos vários catálogos da editora Aillaud, que se encontram na *BNF*, relativos aos anos de 1836, 1844, 1847, 1849, 1851, 1854, 1856, 1858, 1860, 1863, 1866 e 1874.

As reimpressões do texto de Bézout, a partir da editada em 1836, trazem o nome de José da Silva Tavares como responsável pela readaptação dos *Elementos de Arithmetica* às necessidades comerciais. Tavares inclui um apêndice com o

[3] O acervo da BNF conta com o “CATALOGO dos Livros Portuguezes e Latinos, publicados em Pariz por J. P. AILLAUD, e outros que se achão á venda em sua casa”. (A partir do catálogo de 1860 vem escrito na capa também o seguinte : *Livreiros de Suas Majestades o Imperador do Brasil e el Rei de Portugal).*

seguinte título: "Appendice – Applicação das Regras d´Arithmetica às operações de commercio e de banco, etc". Nele estão presentes ensinamentos sobre o cálculo de juros, de câmbio, de seguro, de conversão de pesos e medidas, moedas, um "modelo de uma conta corrente feita segundo o methodo mais moderno, sem dependencia de números vermelhos", uma tabela de câmbios entre o Brasil e a Inglaterra, dentre vários outros itens para uso do comércio.

A existência de seguidas reimpressões da Aritmética de Bézout, com o apêndice de Tavares, reforça a idéia de que os primeiros textos matemáticos destinados ao comércio no Brasil, reutilizaram o manual de Étienne Bézout, clássica obra que circulou pela Europa e Estados Unidos desde o século XVIII. A exposição do conteúdo aritmético manteve-se, seguindo o trabalho do autor francês. A utilização prática-comercial da aritmética ficou referenciada pelo acréscimo feito por José Tavares.

A matemática do primário: o que deve ser ensinado aos meninos do Império?

O texto "Memória sobre a reforma de estudos da Capitania de São Paulo" escrito por Martim Francisco Andrada, provavelmente em 1815, acabou sendo indicado pela Assembléia Constituinte de 1823, para servir de guia para projetos educacionais do novo país. O texto de Andrada constitui uma tradução adaptada da obra de Condorcet. (Xavier *apud* Bittencourt, 1993, p. 23). Vinda a Carta outorgada por Pedro I, em março de 1824, decorrente da dissolução da Assembléia, surgem novas determinações, dentre elas a Lei de 15 de novembro de 1827, que obriga que sejam criadas escolas primárias em todas as cidades e vilas, com a adoção do *método lancasteriano* (Nunes, 1962, p. 72). Relativamente ao ensino de matemática, o texto de Andrada já indicava aproximadamente os seguintes conteúdos postos no projeto de Lei: "os professores ensinarão a ler, escrever, as quatro operações de aritmética, prática de quebrados, decimais e proporções, as noções mais gerais de geometria prática, ...". (Bittencourt,1993, p. 138).

Segue-se na Câmara do Deputados, calorosas discussões sobre o projeto. O historiador Primitivo Moacyr retrata esses debates como segue:

> O Sr. Ferreira França discute o método: em vez de contar, como diz o projeto, prática das principais operações de aritmética é resolução prática dos problemas de geometria elementar (...). A uma objeção, esclarece o seu pensamento: Não quero que o mestre ensine ou aponte o que é linha reta, quero que tome o compasso, descreva um triângulo sobre uma linha; isto não custa nada e é coisa mais fácil possível. Quero que o mestre prove o que ensina que os meninos aprendam como um carpinteiro ou pedreiro. Quero que o mestre ensine como há de dividir um triângulo retilíneo em duas partes iguais; quero que forme a sua escala e que reduza da menor à maior grandeza. (...) O Sr. Xavier de Carvalho lembra o estado de atrazamento em que se acha desgraçadamente a educação no Brasil fará com que se formos a exigir de um professor do primeiro ensino, do qual depende a felicidade dos cidadãos, requisitos maiores não tenhamos professores. Se exigirmos de um mestre de primeiras letras princípios de geometria elementar, dificultosamente se acharão; talvez apareçam muitos na Corte, e nas províncias de beira-mar haja alguns; mas daí por diante haverá muito poucos ou nenhum. Por isso eu me contentaria que os mestres soubessem as operações de aritmética maquinalmente; eu aprendi assim. (...) O Sr. Lino Coutinho diz que a educação dos meninos deve ser mais mecânica do que de teorias e de princípios, porque a sua razão é ainda pouco desenvolvida, não dá para muitas combinações e por conseqüência assim se deve fazer no modo de ensinar a ler, escrever e contar. (...) O ensino de conta deve ser mecânico. (...) Está de acordo com o Sr. F. França quanto ao estudo da geometria gráfica aquele de saber escrever por via de compasso e de régua, as primeiras e mais essenciais figuras da geometria. (...) O Sr. Vasconcellos é pelo estudo da geometria de aplicação imediata no campo, no terreno da escola. Para que geometria gráfica ? Qual a sua utilidade ? Está demonstrado que a matemática não sendo aplicada não presta utilidade senão para fazer = a X e perder tempo. (...) O Sr. Romualdo de Seixas (Arcebispo da Bahia) (...) impugna o estudo da

geometria porque é estudo do liceu e não de escola primária. (Moacyr, 1936, p.180-190).

Vale ainda ajuntar que a proposta, conforme escrito acima, era diferente para a instrução das meninas. No mesmo texto de Moacyr, p. 190, temos:

> Haverá escolas de meninas nas cidades,vilas e lugares mais populosos em que (...) As mestras, além do programa de ensino acima declarado, com exclusão das noções de geometria, e limitando a instrução de aritmética só às quatro operações ensinarão também as prendas que servem à economia doméstica.

Os debates na Câmara apontam para a dificuldade de cumprimento do projeto de Lei no que diz respeito aos conteúdos de geometria. Ainda trazendo o texto de Moacyr, temos o relato da dificuldade de achar professores com conhecimentos de geometria elementar, o que obriga a Assembléia a estudar projeto do executivo:

> A mais seria dificuldade para execução da Lei de 15 de outubro era o provimento dos lugares de mestre. Para corrigir esta dificuldade o governo apelou para a Assembléia Geral. Esta aceitou para estudo, em 1829, as sugestões do executivo, nos termos do seguinte projeto: Não concorrendo aos exames públicos das cadeiras de primeiras letras opositores que possuam conhecimentos, noções mais gerais de geometria prática, serão as mesmas cadeiras providas naqueles que se mostrarem mais dignos pela aprovação que merecerem nas outras matérias declaradas no plano de Lei de 15 de outubro de 1827. Aos professores providos sem conhecimento das noções mais gerais de geometria prática, unicamente só poderia taxar o ordenado de 200$000 a 300$000, e só lhes poderá aumentar este, quando por um novo exame sobre esta matéria se mostrarem suficientemente instruídos nos mesmos conhecimentos. (MOACYR, 1936, p. 191)

Toda essa discussão acaba consagrando a matemática a ser ensinada no primário: sobretudo as quatro operações fundamentais da aritmética. A geometria não deve integrar os ensinos rudimentares da matemática na escola de primeiras letras. O contar fica ligado diretamente ao aprendizado das tabuadas que sintetizam as operações de soma, subtração, multiplicação e divisão.

A edição de livros didáticos de matemática para o ensino primário do século XIX

Os livros didáticos brasileiros, desde do início de sua produção, tem seu estilo de composição dado pelas empresas editoriais francesas. Isso apesar da atuação dos portugueses na produção e comércio de livros brasileiros. De acordo com

Bittencourt (1993, p.87): “os franceses tiveram interferência direta na produção, com obras editadas inteiramente em Paris, destacando-se a firma Aillaud, Guilhard & Cia e, de maneira indireta pela dependência dos editores brasileiros quanto às tarefas de impressão dos livros”.

Baptiste Louis Garnier foi “o primeiro editor a fazer um esforço real para atender às necessidades de livros escolares brasileiros” (Hallewell *apud* Bittencourt, 1993, p. 81). Ainda de acordo com a historiadora Circe Bittencourt, “Garnier sempre preferiu ter seus textos impressos em Paris e por esta atitude foi constantemente criticado pelos tipógrafos cariocas, o que o levou a instalar em 1873, uma tipografia sob a responsabilidade de um seu conterrâneo, mas que teve vida efêmera” (1993, p. 87).

Através de consulta à *Bibliothèque Nationale de France* é possível realizar um primeiro inventário sobre a edição dos primeiros livros didáticos de matemática destinados ao ensino primário brasileiro. Produzidas em Paris, essas obras, em sua quase totalidade, apresentam-se como textos não cartonados, em tamanho “In-18”, com páginas equivalentes a um quarto de papel ofício.

Como já se mencionou anteriormente, as aritméticas reimpressas de Bézout, com o anexo de Silva Tavares, servem às lides comerciais. Todas elas são publicadas pela Aillaud. Será a casa editorial B. L. Garnier a responsável pela maioria dos livrinhos de matemática a serem destinados à escola de primeiras letras.

O inventário realizado na *BNF*, de acordo com o quadro abaixo, revela a existência de publicações que cobrem toda a segunda metade do século XIX, centralizada em poucos autores.

Autor	**Título**
Camillo Trinocq	Elementos de Arithmetica. Curso de Estudos Elementares
Antonio Maria Barker	Rudimentos Arithmeticos ou taboadas de sommar, diminuir, multiplicar e dividir com as principaes regras dos quebrados e decimaes
Pedro Victor Renault	Postillas de Arithmetica para meninos
Joaquim Maria de Lacerda	Arithmetica da infância
Ascanio Ferraz da Motta	Pequeno Curso de Arithmetica para uso das escolas primárias

Com diversas reimpressões e edições, esses autores podem ser considerados aqueles que referenciaram o texto didático da matemática na escola de primeiras letras.

Dentre eles, destaque deve ser dado a Barker, como informa Circe Bittencout, que menciona ter sido o autor um dos raros que teve sua obra didática atravessar do século XIX até os anos 1970. (Bittencourt, 1993). Sua tabuada foi editada pela primeira vez em 1853. Barker, como outros autores, escreve “tratadinhos” de diversos temas, além da aritmética escolar. Exemplo disso, é a lista constante da contra-capa de seus *Rudimentos* onde a Garnier divulga ser ele o autor de livrinhos como “Cathecismo”, “Resumo de Chorografia”, “Novo Atlas” dentre outros.

Com 32 páginas, o livrinho *Rudimentos Arithmeticos* constitui-se numa espécie de guia de trabalho para o professor primário. Desde a Introdução de seu texto didático, Barker orienta o professor como deve ensinar os passos iniciais da aritmética. De pronto, seu texto inicia com os dizeres:

> Para que os meninos entrem no verdadeiro conhecimento dos números e do valor de cada um dos algarismos, se lhes ensinará em primeiro lugar a Taboada das Unidades fazendo-lhes conhecer o valor natural e local de cada letra: 1 nas unidades vale 1; nas dezenas, 10; nas centenas, 100 (...). Deste modo ficam os meninos lendo qualquer número que se lhes apresente, de uma até três letras, não só com mais facilidade, como também sabendo dar a razão do que dizem (...).

O texto de Barker em sua grande parte é escrito na forma de perguntas e respostas. Sempre que considera necessário, faz advertências e sugestões aos professores, no trabalho com os seus *Rudimentos Arithmeticos.* A obra, assim, reúne conteúdos da aritmética elementar entremeada de sugestões didático-pedagógica aos professores.

Observações finais

A produção editorial do século XIX, relativamente aos livros de aritmética utilizados no Brasil, apresenta pelo menos dois tipos de textos. Um primeiro é herdeiro dos tratados aritméticos utilizados no ensino técnico-militar da Colônia. Étienne Bézout é reimpresso para ser utilizado de outro modo: nas lides comerciais. Com extenso anexo, o livro ganha finalidades diferentes daquelas para as quais foi produzido em meados do século XVIII, na França. Um segundo tipo de produção relaciona-se às aritméticas destinadas à escola de primeiras letras. Tratadinhos, livrinhos e apostilas revelam obras que em grande medida foram escritas para orientar os professores do ensino primário. Essa produção não é homogênea e carece de estudos mais aprofundados que permitam revelar as razões pelas quais algumas delas perduraram por décadas a fio.

Bibliografia

- BITTENCOURT, C. M. F. Livro didático e conhecimento histórico: uma história do saber escolar. Tese de Doutorado. Depto. De História FFCLCH USP, 1993. 369p.
- CAVEING, M. Le probléme des objets dans la pensée mathématique. Paris: Librairie Philosophique J. Vrin, 2004.
- JEANNIN, P. Os mercadores do século XVI. Porto, Portugal: Vertente. Trad. De Mário B. Nogueira, 1986.
- MOACYR, P. A Instrução e o Império. São Paulo: Cia. Editora Nacional, 1936.
- NUNES, M. T. Ensino secundário e sociedade brasileira. Rio de Janeiro: Instituto Superior de Estudos Brasileiros, 1962.
- PÉREZ, M.M. De la aritmética medieval al álgebra renacentista. In: El legado de las Matemáticas. Sevilla: Consejeria de Cultura (Junta de Andalucía). Universidade de Sevilla, Real Sociedad Matemática Española, 2000.
- VALENTE, W. R. Uma história da matemática escolar no Brasil, 1730-1930. São Paulo: Annablume/Fapesp, 1999.

Wagner Rodrigues Valente. GHEMAT – PUCSP
valente@pucsp.br

UNIÓN
REVISTA IBEROAMERICANA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA

Septiembre de 2006, Número 7, páginas 83-87
ISSN: 1815-0640

¡¡Esto no es serio!!

José Muñoz Santoja

¡Vaya disparates!

Cualquier profesor con algo de experiencia sabe de las barbaridades que son capaces los alumnos cuando responden preguntas a temas que no dominan (que suele ser casi siempre).

En España, hace muchos años, un profesor de Ciencias Naturales, Luis Díez Jiménez, recopiló estas monstruosidades y publicó una serie de libros bajo el epígrafe de "Antología del disparate". Posteriormente han surgido libros en esa misma línea especializados en temas concretos, por ejemplo Historia, y por supuesto, han llegado a Internet donde en los apartados de humor de muchas páginas pueden encontrarse esos temas.

El problema de las matemáticas es que esos errores no son tan graciosos como en otras disciplinas, más bien son para echarse a llorar. De todos modos queremos hoy recopilar algunos propios y otros recogidos de Internet y, como siempre, animar a nuestros lectores a que nos envíen cualquier disparate que se hayan encontrado, los incluiremos en futuras secciones indicando quién lo envía y el nivel en que se dio.

- ¿Qué es un paralelogramo?
- *Un aparato que sirve para pesar en gramos.*

- ¿Qué es un ángulo recto?
- *El que no se desvía nunca.*

- ¿Qué son números primos?
- *Los que tienen los mismos abuelos.*

- Define polígono.
- *Es un hombre con muchas mujeres.*

- Área de un triángulo.
- *Es igual a la cuarta parte de la mitad de su lado por la semisuma de la raíz cuadrada de tres.*

- ¿Qué es un círculo?
- *Es una línea pegada por los dos extremos formando un redondel.*

- Averiguar si es primo el número 2639:
- *Para mi que este número es primo porque no hay ningún número que dividido por este número que es 2639 nos de exacto. Si usted ve que esta mal lo corrija.*

- ¿Qué es la hipotenusa?:
- *Lo que está entre los dos paletos.*

Hay que tener cuidado cuando explicamos algo de historia de las matemáticas porque los alumnos se quedan con las ideas que les interesan y las transforman:

- ¿Quién era Pitágoras?
- *Un director de colegio que inventó muchas cosas y que no sabía escribir.*

No es de extrañar que no haya quedado ninguna prueba escrita de sus trabajos.

- Profesor: Un pintor tarda dos horas en pintar una pared y otro pintor lo hace en tres horas, ¿cuánto tardarán en pintar la pared si lo hacen los dos juntos?
- *Alumno: Cinco horas.*
- *Profesor: Claro si trabajan juntos se ponen a charlar y a fumar el cigarrito y tardan más que cualquiera de ellos por separado.*

A veces la aglomeración de exámenes en determinadas fechas hace que todo lo que el alumno tiene cogido con alfileres se mezcle entre sí.

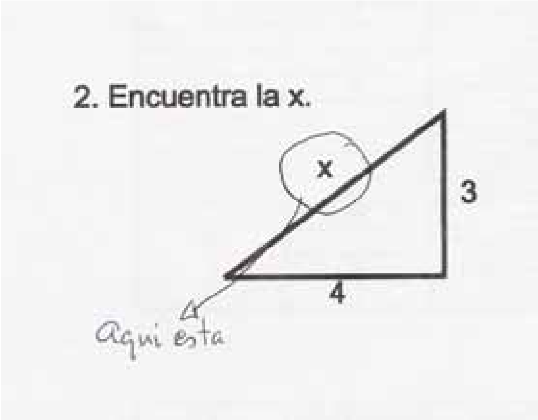
- Ponme un ejemplo de pentágono.
- *La Casa Blanca.*

- ¿Quién fue Enrique Octavo?
- *El que inventó las fracciones.*

Es muy importante que la pregunta esté bien expresada para que no haya lugar a interpretaciones, si no es así a veces podemos encontrarnos con respuestas que aunque ciertas no es lo que pedíamos.

- Pregunta: ¿Sabrías decirme para qué se utiliza la Regla de Ruffini?
- *Respuesta: No*

Algo parecido a lo anterior es lo que ocurre en la siguiente imagen que ha sido muy difundida a través de los correos electrónicos:



No sé si lo anterior es real o la creación de una mente brillante, pero lo que si es cierto que me encontré hace años en una prueba de conocimientos previos es lo siguiente:

A veces los disparates no son producidos por los alumnos. Queremos terminar esta sección con dos ejemplos ficticios (esperemos) que aunque son un poco antiguos creemos que no han perdido su fuerza y para aquellos lectores que no lo conozcan pueden ser muy divertidos.

La evolución de un problema matemático

Enseñanza de 1960:

Un campesino vende un saco de patatas por 1000 ptas. Sus gastos de producción se elevan a 4/5 del precio de la venta. ¿Cuál es su beneficio?

Enseñanza tradicional de 1970:

Un campesino vende un saco de patatas por 1000 ptas. Sus gastos de producción se elevan a 4/5 del precio de venta, esto es, a 800 ptas. ¿Cuál es su beneficio?

José Muñoz Santoja

Enseñanza moderna de 1980:

Un campesino cambia un conjunto P de patatas por un conjunto M de monedas. El cardinal del conjunto M es igual a 1000 ptas., y cada elemento vale 1 Pta. Dibuja 1000 puntos gordos que representen los elementos del conjunto M.

El conjunto F de los gastos de producción comprende 200 puntos gordos menos que el conjunto M. Representa el conjunto F como subconjunto del conjunto M y da la respuesta a la cuestión siguiente: ¿cuál es el cardinal del conjunto B de los beneficios? Dibuje B con color rojo.

LODE

Tras la entrada de España en el Mercado Común, los agricultores no pueden fijar libremente el precio de venta de las patatas. Suponiendo que quieran vender un saco de patatas por 1000 pesetas, haga una encuesta para poder determinar el volumen de la demanda potencial de patatas en nuestro país y la opinión sobre la calidad de nuestras patatas en relación con las importadas en otros países, y cómo se vería afectado todo el proceso de venta si los sindicatos del campo convocan una huelga general.

Complete esta actividad analizando los elementos del problema, relacionando los elementos entre sí y buscando el principio de relación de esos elementos. Finalmente, haga un cuadro de doble entrada, indicando en horizontal, arriba los nombres de los grupos citados y abajo, en vertical, diferentes formas de cocinar las patatas.

LOGSE:

Un agricultor vende un saco de patatas por 1000 ptas. Los gastos de producción se elevan a 800 Ptas. Y el beneficio es de 200 ptas.

Actividad: subraya la palabra "patata" y discute sobre ella con tu compañero.

La próxima reforma:

"Un lavriego burges latifundista espanyol i intermediario es un kapitalista insolidario y centralista q saenriquecido con 50 euros al bender espekulando un mogollón d patatas". Analise el testo y deseguido diga lo que piense de este avuso antidemocratico."

José Muñoz Santoja

Evaluación en la E.S.O.

Respuesta del alumno:

$$6+7=18$$

Comentario de evaluación:

1. La grafía del signo seis es del todo correcta.
2. Se puede apreciar lo mismo con el siete.
3. El signo más nos dice acertadamente que se trata de una suma.
4. En cuanto al resultado vemos que el uno es correcto. El segundo número efectivamente no es un ocho. Bueno si lo cortamos por la mitad, de arriba abajo, observamos que el alumno ha escrito dos treses simétricos.
5. Elegimos el de la derecha que es el que vale porque su intención era buena.

Evaluación:

1. La actitud del alumno es positiva (lo intentó).
2. Los procedimientos son correctos (los elementos están ordenados correctamente).
3. En conceptos sólo se equivocó parcialmente en uno de los seis elementos que forman el ejercicio. Eso es casi de sobresaliente.

En consecuencia podemos otorgarle un “Notable” y decirle que “Progresa adecuadamente”.

UNIÓN
REVISTA IBEROAMERICANA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA

Septiembre de 2006, Número 7, páginas 89-93
ISSN: 1815-0640

El rincón de los problemas

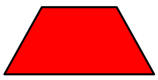
Uldarico Malaspina Jurado

Pontificia Universidad Católica del Perú
umalasp@pucp.edu.pe

Problema[1]

Determinar la función que establece el perímetro del polígono convexo formado con **n** trapecios, siendo los trapecios tomados de los “bloques de Cuisenaire”.

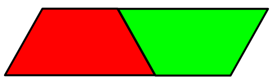
Para examinar este problema, familiaricémonos con el material de trabajo: un trapecio de estos (o mejor, un bloque o ficha con forma de trapecio) es isósceles, con lados no paralelos de la misma longitud que la base menor, y con la base mayor de longitud el doble de la longitud de la base menor:

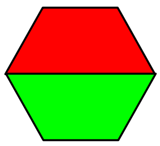


Para facilitar el análisis, podemos asumir que la base menor y los lados no paralelos miden una unidad y que en consecuencia el perímetro de este trapecio es 5. Cuando en este artículo hagamos mención a un trapecio, será a uno de estas características, que podemos llamarlo “trapecio básico”.

Tal como está planteado, el problema no tiene solución, pues existen valores de n para los cuales hay varios polígonos convexos que se pueden construir con n de estos trapecios básicos, y con diferentes perímetros. Por ejemplo,

$n = 2$





Podemos ver que estos dos polígonos convexos, construidos con dos trapecios, tienen perímetros diferentes: 8 y 6, respectivamente. Algo similar ocurre para otros valores de n, lo cual es incompatible con el concepto de función y en consecuencia no se puede construir una función cuyo dominio sea el número de trapecios y cuyo rango sea el perímetro del polígono convexo construido. Es un

[1] Este problema me lo propuso Guillermo Liu, ex alumno de la maestría en enseñanza de la matemática de la PUCP.

interesante problema lúdico-matemático, verificar que algo similar ocurre para otros valores de n (¿Para todos?)

Así, proponemos el siguiente **rompecabezas**:

*Construir con 10 trapecios, tres polígonos convexos que tengan perímetros dif*erentes

Una solución, dada por Guillermo Liu, la encontrarán al final del artículo y queda como problema adicional examinar si tal solución es la única.

Una primera solución al problema original

Debemos establecer algunas restricciones en la construcción para de esa manera construir un polígono convexo único con n trapecios y en consecuencia poder definir una función.

Una posibilidad es la que llamaremos "construcción trivial": colocar los n trapecios en una sola fila, como lo mostramos para n = 2 (El paralelogramo de perímetro 8). Así obtendremos un paralelogramo cuando n es par y un trapecio cuando n es impar, y podemos construir una tabla que nos muestre los perímetros que corresponden al número de trapecios básicos usados en la construcción del polígono convexo (paralelogramo o trapecio), para algunos valores de n:

Número de trapecios (n)	1	2	3	4	5	6	7
Perímetro P(n)	5	8	11	14	17	20	23

Para obtener una expresión general de P(n), podemos hacerlo algebraicamente, partiendo de la observación de los 7 primeros términos de la sucesión:

$$P(n) = 5 + 3(n-1)$$

Y en consecuencia

$$\mathbf{P(n) = 3n + 2}$$

Pero es aún más interesante, obtener la expresión general como consecuencia de las observaciones al construir los polígonos convexos:

Teniendo en cuenta que cada trapecio básico tiene perímetro 5, al añadir uno de estos a un polígono convexo ya formado, se están añadiendo 5 unidades a tal polígono, pero se deben restar 2 unidades por ser las que "se pegan" y ya no quedan en el borde del nuevo polígono convexo. En consecuencia, sólo se añaden 3 unidades y se tiene la siguiente expresión recursiva de la sucesión de perímetros:

$$P(1) = 5; \qquad P(n) = P(n-1) + 3, \qquad \text{para } n > 1$$

Si se explicitan los primeros términos de esta sucesión, obtendremos los mismos valores que los de la tabla, pero ahora hay un razonamiento algebraico-geométrico que lo fundamenta. Para ser rigurosos en la obtención de la expresión general de P(n) puede resolverse la ecuación en diferencias de primer orden, dada en la expresión recursiva. Así obtendremos también:

$$\mathbf{P(n) = 3n + 2}$$

Veamos ahora cómo obtener esta expresión continuando el razonamiento algebraico-geométrico al hacer las construcciones:

Si usamos n trapecios básicos, tendremos **5n** lados, pero el perímetro del polígono convexo que construyamos tendrá como perímetro **5n** menos los lados que "se pegan" y dejan de estar en el borde. Como al usar **n** trapecios se hacen **n – 1** "pegados", a **5n** debemos restar **2(n – 1)** y en consecuencia:

$$P(n) = 5n - 2\,(n - 1)$$

O sea

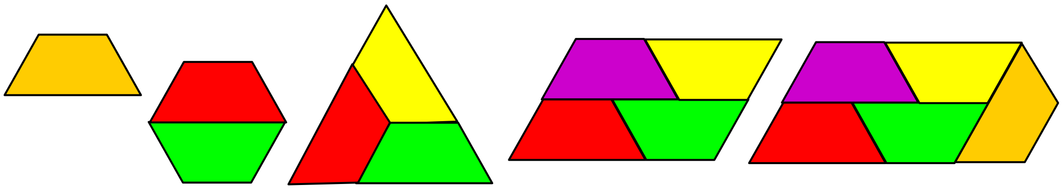
$$\mathbf{P(n) = 3n + 2}$$

Una solución no trivial

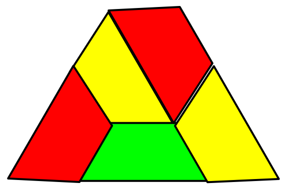
Resulta más interesante aún encontrar una solución "no trivial" para obtener la función perímetro, teniendo como variable independiente el número de trapecios básicos empleado en la construcción, y con ese propósito establecemos las siguientes restricciones para la colocación de los trapecios básicos al construir los polígonos convexos:

1. No deben estar ubicados todos en una sola fila, salvo el caso n = 1 (descartamos la solución trivial, para n > 1).
2. Deben estar ubicados a lo más en dos filas.
3. Para n > 4 todos los polígonos convexos deben tener como una parte incluida uno o más paralelogramos similares al correspondiente a n = 4
   (Para n = 4, el polígono convexo es un paralelogramo de perímetro 10)

Así se va obteniendo una sucesión de polígonos convexos, cuyos 5 primeros términos son:



Observemos que con 5 trapecios también se puede formar el polígono convexo que se muestra, pero éste no contiene el paralelogramo formado con 4 trapecios (incumple la regla 3). Más adelante, al relacionar estas construcciones con el concepto de función y la aritmética módulo 4 se verá la importancia de esta restricción.



Al registrar los perímetros P(n) de los polígonos convexos que se construyen con n trapecios básicos con las reglas establecidas, tenemos una tabla como la siguiente:

Número de trapecios (*n*)	1	2	3	4	5	6
Perímetro P(*n*)	5	6	9	10	11	12

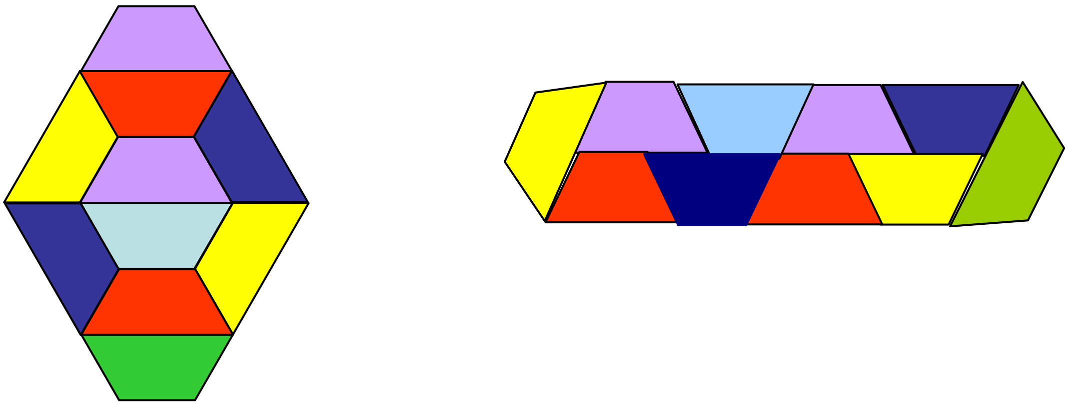
Es interesante obtener experimentalmente P(n), primero para valores de n como 7, 8, 15 y luego para valores más grandes de n (35, 58, 321). Esto lleva a pasar de una fase meramente manipulativa y concreta a la búsqueda de regularidad y generalizaciones.

Encontrar una expresión general de P(n) lleva a examinar las secuencias que se forman, relacionando mucho pensamiento geométrico y algebraico, en especial con la aritmética módulo 4. Es un ejercicio interesante para los lectores verificar que la función buscada es la siguiente

$$P(n)=\begin{cases} \dfrac{3n+8}{2} & si \quad n=4k \qquad \text{k=1,2,3,...} \\ \dfrac{\text{3n+7}}{2} & si \quad n=4k+1 \quad k=0,1,2,3,\ldots \\ \dfrac{3n+6}{2} & si \quad n=4k+2 \quad k=0,1,2,3,\ldots \\ n+6 & \text{si} \quad n=4k+3 \quad k=0,1,2,3,\ldots \end{cases}$$

La situación lúdica con los trapecios, permite plantear numerosos e interesantes problemas, antes y después de haber llegado a este nivel de formalización.

Una solución del rompecabezas:

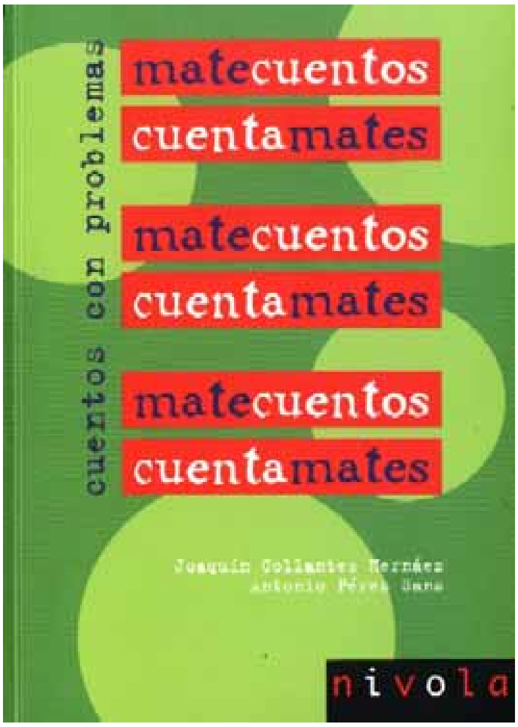


El tercer polígono convexo, se obtiene haciendo la construcción trivial: un paralelogramo de 10 trapecios básicos, todos en una sola fila.

UNIÓN
REVISTA IBEROAMERICANA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA

Libros

Septiembre de 2006, Número 7, páginas 95-98
ISSN: 1815-0640



Matecuentos cuentamates

Autores: Joaquín Collantes Hernáez; Antonio Pérez Sanz

Editorial: NIVOLA

Colección VIOLETA nº 1

Año: 2005

127 páginas

La importancia del cuento en la enseñanza es innegable. Es un vehículo inigualable para desarrollar las capacidades de compresión y expresión. Permite trabajar las competencias lectoras lingüísticas y gráficas. Permite reconocer subgéneros literarios y la estructura de la narración y las tipologías de sus personajes. Explicita los procesos de comunicación y establece la elaboración de lenguajes sociales. Es una herramienta para desarrollar la imaginación, la sensibilidad y la invención. Fomenta la solidaridad, la interacción entre semejantes y favorece la crítica. Sin embargo los cuentos nunca han sido un instrumento didáctico habitual en las clases de matemáticas. Seguramente las posibilidades de los instrumentos de manipulación y las posibilidades de la imagen y las TIC parecen haber relegado a las herramientas literarias y narrativas a otras áreas de conocimiento. Es cierto que la importancia social y cultural de los medios narrativos y de imagen ha favorecido que cada vez más el profesor de matemáticas emplee novelas y películas en sus clases.

En cualquier caso, debemos recordar que la literatura siempre ha estado presente en las clases de matemáticas. Los enunciados de los problemas de matemáticas son un género literario. Poca gente lo reconoce. Tiene sus categorías, estructuras y temáticas. Los primeros ejemplos escritos ya están en las tablas babilónicas o en los papiros egipcios y en los actuales libros de textos escolares encontramos sus últimas versiones. Los docentes y estudiosos de la enseñanza de las matemáticas le dedican buena parte de su tiempo, aunque su punto de vista y su foco de atención están puestos más en la resolución del problema que en su estilo literario.

En su libro “***Matecuentos Cuentamates***”, Joaquín Collantes Hernáez y Antonio Pérez Sanz se embarcan en la comparación de géneros literarios. Quizás como docentes y estudiosos de las matemáticas, los autores se sintieron alguna vez constreñidos por las características del género “Enunciado” y decidieron mostrar la potencia del género “Cuento”, para conseguir sus propósitos como profesores de matemáticas.

El libro se divide en dos partes. En la primera parte aparecen ocho cuentos que contienen diversos problemas matemáticos. En la segunda parte se separan estos problemas matemáticos que aparecían en los cuentos, y son enunciados y resueltos de una forma más tradicional.

Los cuentos se pueden clasificar en tres tipos: cinco cuentos que tratan sobre Trolls, animales parlantes, Harry Potter y el Señor de los Anillos; otros dos de los cuentos tratan de jóvenes, grupos de amigos que van a la discoteca o se reúnen para jugar a sus video-juegos; por último, aparece un cuento cuyos personajes son triángulos, cuadrados y círculos.

En todos ellos los personajes se ven enredados en problemas matemáticos que son planteados y, aunque en la historia se diga que son resueltos, en ningún caso su resolución aparece durante el relato, ya que se muestra separada en la segunda mitad del libro.

Los primeros cuentos a los que nos referimos se incluirían en el subgénero de los Cuentos de Hadas. Hay que recordar que en este subgénero aparecen personajes folclóricos tales como hadas, trolls, gigantes, animales parlantes y otros. Este subgénero tiene unas raíces antiguas en algunos cuentos de *Las mil y una* *noches* y en la mitología clásica. Los cuentos de hadas resurgieron en la literatura europea en el siglo XVII para ejemplificar lecciones sociales o morales. En la literatura contemporánea, muchos autores de han servido de la forma de los cuentos de hadas por diversas razones, tales como examinar la condición humana desde la sencillez que les proporciona, buscando el efecto cómico o simbólico o como reevaluaciones multiculturales o feministas. Además, muchas características de los cuentos de hadas se han trasladado a la literatura fantástica o de ciencia ficción. En la actualidad, los cuentos de hadas tienen una enorme vitalidad. Las relecturas cinematográficas que de ellos se realizan han conseguido una enorme familiaridad del público infantil y juvenil con sus pericias y personajes.

De esta familiaridad se aprovechan Joaquín Collantes Hernáez y Antonio Pérez Sanz para introducir en este ámbito algunos problemas matemáticos. Les permite que los alumnos puedan reconocer con facilidad las características de los personajes y se sientan cómodos con ellos. Los personajes poseen un refrescante aire irónico que apela a la complicidad del lector para intentar abordar los aspectos matemáticos.

Los cuentos cuyos protagonistas son jóvenes están presentados para conectar con el alumnado de secundaria. Pretenden. por trato de iguales, acercar el relato al lector. Está por descubrir hasta qué punto el tono de los personajes es realmente cercano a los actuales alumnos de secundaria. Pero sin duda, si se desea trabajar con este libro en el aula, podría proponerse una lectura en voz alta para alcanzar dicho tono.

Seguramente los personajes más originales son los de las figuras geométricas. Más allá de ver referencias en algunas series de animación para la televisión (que existen), podríamos rememorar a los personajes de *Planilandia* de Abott: triángulos, cuadrados y figuras planas varias, representando espléndidamente distintos roles sociales.

Respecto a los problemas matemáticos que plantean los autores en este libro, encontramos una gran variedad de ellos. Aparecen problemas de Matemática Recreativa, acertijos y criptoaritmética. Problemas de combinatoria, aritmética, y numéricos. Problemas de geometría y de álgebra. Todos ellos adecuados al alumnado de secundaria.

Sin duda, el libro de Joaquín Collantes Hernáez y Antonio Pérez Sanz da pie para abordar la narración, e incluso la ficción, en el entorno de las clases de matemáticas. Hace unos meses buscaba ejemplos con que ilustrar ejercicios de Análisis en 2º de Bachiller. Trataba de enmarcar con textos interpretables situaciones teóricas con que mis alumnos demostrarían sus habilidades y competencias matemáticas. Deseaba que el enunciado no repitiese o evitase los ejemplos trillados en numerosos exámenes, libros de texto o los manuales. Me inventé una relación funcional entre la cantidad de fuego que expulsan los dragones y la furia de éstos. ¿Se podía medir el fuego en litros? y ¿la furia del 0 al 10? Tenía mis serias dudas. Era ridículo y parecía atropellar muchos conceptos sobre matemática realista, significativa y la debida adaptación de los contenidos a la realidad del alumnado. Sentí que me había rendido ante las dificultades y me había buscado una salida por la tangente. También reconozco que fue muy divertido espiar la cara de mis chicas y chicos mientras iba entregando las fotocopias y oír algunos comentarios que no me dejaban muy bien parado. Habría olvidado esta extravagancia en el anecdotario del docente si no fuera por la lectura del “Matecuento cuentamates” de Joaquín Collantes Hernáez y Antonio Pérez Sanz. Repentinamente, aquel desliz cometido por las prisas recobró un valor positivo.

Reseña: Carlos Bruno Castañeda

Tenerife, España

UNIÓN
REVISTA IBEROAMERICANA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA
Septiembre de 2006, Número 7, páginas 99-105
ISSN: 1815-0640

Coordinado por
Agustín Carrillo de Albornoz

"Interpretación matemática" con calculadora gráfica

Agustín Carrillo de Albornoz Torres

En recuerdo de Franci Puerta,
entusiasta y defensor de la calculadora.

No es fácil afrontar cambio en el mundo educativo sobre todo si afectan a aspectos relacionados con la metodología con la que los docentes trabajamos en el aula y, menos aún si los cambios requieren la incorporación de nuevos recursos que necesiten una formación previa para conocer sus aspectos técnicos.

En general, al profesorado no le basta con conocer las características de los nuevos recursos, necesitan un periodo no para adaptar el nuevo recurso sino para convencerse de que lo dominan y por tanto pueden incorporarlos al aula.

Incorporar un nuevo recurso, en nuestro caso relacionado con las denominadas "nuevas tecnologías" como es el caso de las calculadoras en su sentido más amplio, aunque en las actividades nos centraremos en las calculadoras gráficas, no supone un cambio automático en la metodología, no basta con adaptar lo que se hace en el aula a este nuevo elemento que en todo caso no debe sustituir a la pizarra sino complementarlo para aprovechar sus posibilidades.

Si estamos convencidos de las ventajas que aportan las calculadoras para la enseñanza de las matemáticas, como es mi caso, podemos preguntar a nuestros compañeros en el centro y comprobaremos que siempre encontraremos a alguien que pondrá una amplia relación de inconvenientes relacionados con su precio (las científicas son baratas), que son complicadas (algunos móviles también lo son), que hacen desaparecer el cálculo mental o que los alumnos con las calculadoras no necesitarán adquirir conocimientos y quizás algunas pegas más que en todo caso no resultará complicado rebatir.

Incorporar la calculadora, en nuestro caso la calculadora gráfica supone cambiar determinados aspectos en el desarrollo de los contenidos sin necesidad de suprimir aquellos que los alumnos deben adquirir, aunque requiere algunos cambios en la forma de trabajo en el aula tanto para el profesorado como para el alumnado.

Las características principales de este tipo de calculadoras están centradas en sus posibilidades gráficas tanto para la representación de funciones como para el estudio estadístico sin olvidar otros aspectos como son el cálculo matricial o la resolución de ecuaciones.

Una actividad habitual en el aula es el estudio y representación de funciones que tradicionalmente comenzamos con la determinación de los apartados correspondientes a dominio, puntos de corte, asíntotas, extremos, crecimiento, etc., hasta llegar a completar los elementos necesarios que nos permitan su representación gráfica; mientras que con ayuda de una calculadora gráfica el proceso cambia, lo primero que se obtiene es la gráfica de la función que facilita al alumno que realmente sabe matemáticas determinar los elementos y características que tiene que obtener de la función cuyo estudio está realizando.

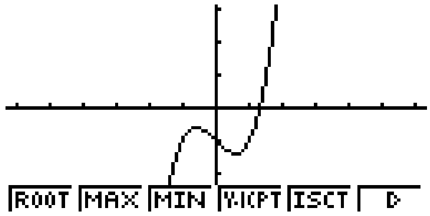
Este cambio en la metodología de trabajo que requiere el uso de las calculadoras no es fácil de asumir y por tanto no resulta sencillo incorporar las calculadoras al aula.

Algo parecido ocurre con otras actividades que podemos denominar habituales en los distintos niveles educativos.

Por ejemplo si proponemos el cálculo de un límite de una función el alumno realizará mecánicamente los procedimientos aprendidos para determinar el valor del límite sin la seguridad de si ha cometido o no algún error y sobre todo, realiza los procesos sin relacionar los cálculos con el significado de lo que ha obtenido. Con la calculadora bastaría con representar la función aprovechando las posibilidades que la máquina le ofrece e interpretar el resultado para determinar o al menos tener una ligera idea de lo que debería obtener al aplicar los mecanismos de cálculo que conoce.

Podríamos citar más ejemplos en los que la utilización de la calculadora ayuda al alumno y por tanto, no evita que conozca procesos tradicionales de cálculo que previamente deberá estudiar y manejar.

Volviendo a la representación de funciones, cualquier calculadora gráfica a partir de la expresión de la función no solo devolverá la gráfica sino que ofrecerá distintas opciones para calcular sus elementos característicos, como podemos observar en las imágenes siguientes, en las que disponemos de un menú para determinar puntos de corte, extremos, intersecciones, etc.



Aunque resultará fácil obtener la gráfica y determinar los elementos de la gráfica y más aún si disponemos de una calculadora que disponga de cálculo simbólico hay que tener en cuenta algunas consideraciones que exponemos en las actividades que proponemos a continuación.

Actividad 1

A un agente comercial su empresa le propone las dos opciones siguientes para determinar su sueldo mensual.

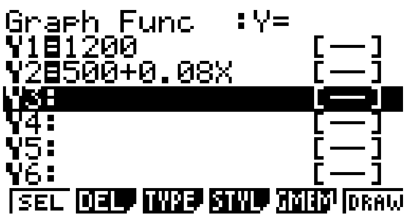
a. *Una cantidad fija mensual de 1200 €.*
b. *Una cantidad fija de 500 € mensuales más un 8% de las ventas que realice.*

¿Qué opción le interesa más y en qué condiciones?

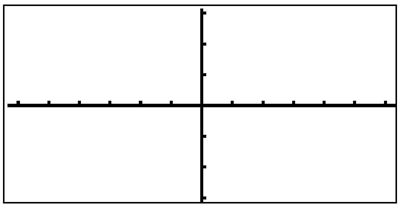
Este sencillo problema típico de las unidades en las que se estudia la función lineal se podrá resolver con ayuda de la calculadora gráfica, representando las dos funciones, analizando posteriormente las gráficas obtenidas.

Es evidente que no tratamos de resolver en este trabajo paso a paso las actividades sino que pretendemos ofrecer algunas ideas sobre el uso de la calculadora y las posibilidades que ofrecen.

Una vez introducidas las expresiones de las dos funciones correspondientes a las opciones que la empresa ofrece al agente comercial los alumnos esperan obtener las gráficas para determinar la que más le interesa.



Al pulsar la opción para dibujar la gráfica puede ocurrir una pequeña decepción ya que el resultado obtenido es el que aparece representado en la imagen siguiente:



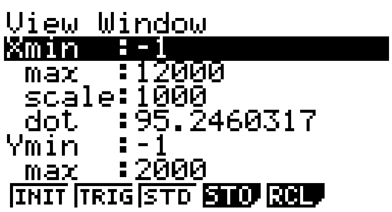
¡No se obtiene nada!

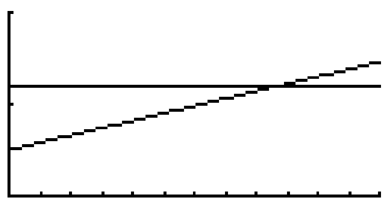
¿Para qué queremos la calculadora sino es capaz de dibujar dos rectas?

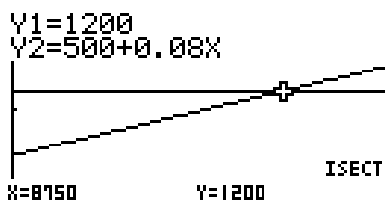
Quizás hemos olvidado algo. Hemos olvidado algo tan importante como interpretar el problema para ajustar la pantalla de la calculadora de manera que la representación sea la correcta.

Más que una queja sobre la máquina, ésta nos obliga a comenzar el problema analizando los datos que ofrece; paso que con los métodos tradicionales algunas veces obviamos.

Una vez interpretados los datos y ajustados los valores obtendríamos la representación correcta que no permite averiguar cuál es la opción que más interesa al agente comercial.







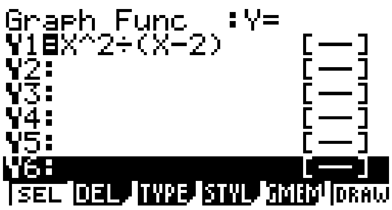
A continuación proponemos una nueva actividad en la que al alumno no le bastará con trasladar los resultados al papel, también tendrá que demostrar que conoce y domina el arte de la “interpretación matemática”

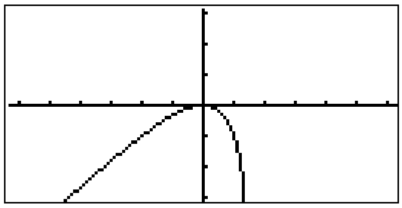
Actividad 2

Estudia y representa la función $f(x)=\dfrac{x^2}{x-2}$.

Como ya hemos indicado anteriormente, basta introducir la expresión de una función, pulsando a continuación la opción correspondiente para obtener la gráfica y con ayuda de las funciones que ofrece la calculadora determinar, en este caso, los elementos característicos de la función.

Los dos primeros pasos aparecen en las imágenes siguientes:

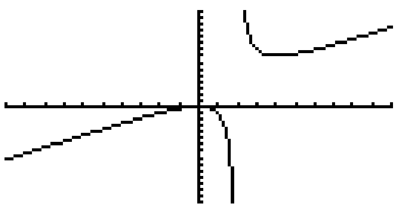




De nuevo algo ocurre en la gráfica obtenida que es necesario determinar o al menos averiguar.

Un alumno con conocimientos matemáticos pensará que el dominio de la función es R-{2} y que la recta x=2 es una asíntota; por lo que deducirá que le falta un trozo de función, justo la que falta a la derecha de la asíntota vertical.

Por tanto, con sus dotes de “interpretación matemática” deducirá que de nuevo tiene que ajustar los valores de la ventana para que la función se represente de manera correcta como ocurre en la siguiente figura:

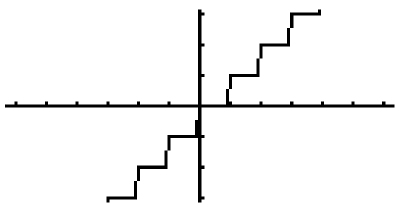


Por último, proponemos dos actividades que ayudarán al desarrollo de la "interpretación matemática" con ayuda de la calculadora en conceptos como la continuidad y la derivabilidad de una función.

Actividad 3.

Estudia y representa la función $f(x) = [x]$.

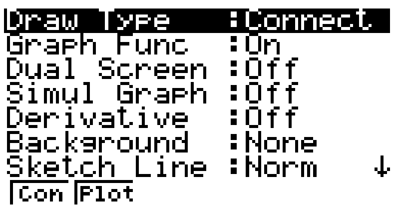
Ya sabemos representar funciones, por lo que fácilmente obtendremos la imagen siguiente:

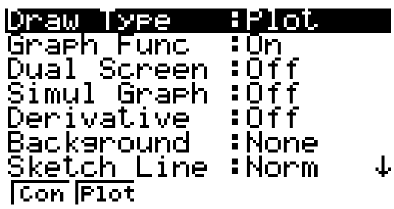


No es un error de la calculadora ya que las tareas de representación se realizan por aproximación al igual que lo hacen otros programas de cálculo simbólico.

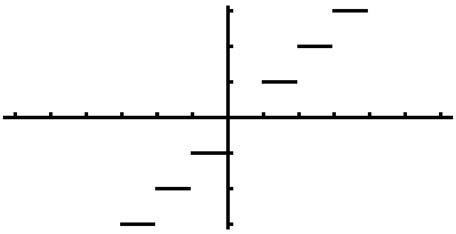
De nuevo, es necesario interpretar y determinar que esta función no es continua y por tanto, algo hay que cambiar como paso previo a su representación.

Modificando la opción de representación para evitar que conecte los puntos

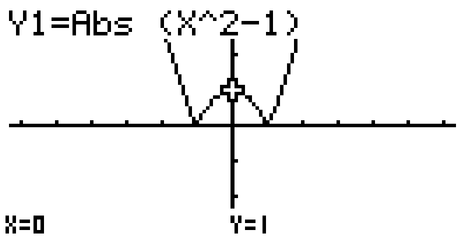




obtendremos la representación correcta para estudiar la función *parte entera*.



Cuando el alumno domine la "interpretación matemática" será capaz, sin realizar los cálculos necesarios, de determinar puntos de discontinuidad o puntos en lo que una función no es derivable como ocurre en la gráfica que aparece a continuación:



Para terminar, destacar que lo único que hemos pretendido con estas sencillas actividades ha sido destacar que la calculadora no sustituye a ningún otro recurso sino que sirve como complemento a la enseñanza que estamos habituados a realizar, merece la pena su uso en el aula y sobre todo sería un error que no aprovecháremos las posibilidades que ofrece.

Recomiendo la lectura de la declaración a favor de las calculadoras en los distintos niveles educativos realizada por la National Council of Teachers of Mathematics (NCTM) cuyos "**Estándares y principios para la educación matemática**" han sido traducidos al castellano y editados por la SAEM THALES.

http://www.eduteka.org/DeclaracionCalculadoras.php

Por último indicar que hemos utilizado una calculadora gráfica **CASIO FX9860G** que no dispone de cálculo simbólico aunque incluye otras aplicaciones como la de geometría dinámica que aumentan aún más las posibilidades que ofrece.

Agustín Carrillo de Albornoz Torres, IES Jándula de Andujar. Jaén. España

Septiembre de 2006, Número 7, páginas 107 - 110
ISSN: 1815-0640

Por Santiago López Arca y Gonzalo Temperán Becerra

Números Figurados (y II)

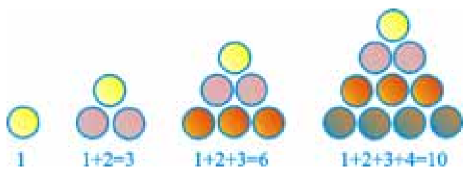
Oblongos, triangulares, cuadrados, pentagonales… en definitiva: ***números figurados***. A ellos nos hemos referido en la entrega anterior de DOSPIUNIÓN; ahora nuestro objetivo será intentar mostrar algunas de las leyes que los relacionan.

Orden	*1*	*2*	*3*	*4*	*5*	…	*n*
Oblongos	*2*	*6*	*12*	*20*	*30*	…	$n(n+1)$
Triangulares	*1*	*3*	*6*	*10*	*15*	…	$\frac{n(n+1)}{2}$
Cuadrados	*1*	*4*	*9*	*16*	*25*	…	n^2
Pentagonales	*1*	*5*	*12*	*22*	*35*	…	$\frac{3n^2-n}{2}$

Haremos a continuación algunas afirmaciones que trataremos de visualizar geométricamente.

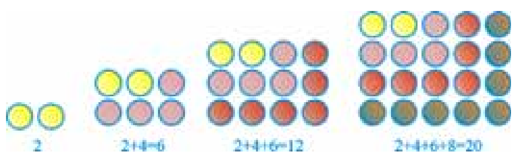
La suma de los *n* primeros números *naturales* da como resultado el número *triangular* de orden *n*:

$$1+2+3+4+\ldots+(n-1)+n=T_n=T_{n-1}+n$$



La suma de los *n* primeros números *pares* da como resultado el número *oblongo* de orden *n*:

$$2+4+6+8+\ldots+2n=n(n+1)$$

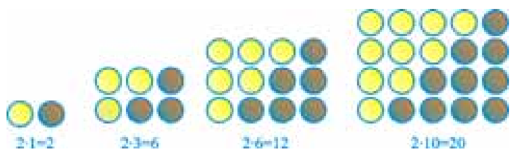


La suma de los *n* primeros números *impares* da como resultado el número *cuadrado* de orden *n*:

$$1+3+5+7+\ldots+(2n-1)=n^2$$

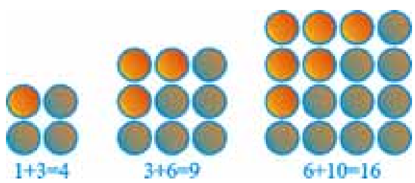
El número *oblongo* de orden *n* equivale al doble del número *triangular* de orden *n*:

$$n(n+1)=2\,T_n$$



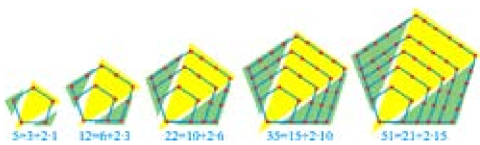
El número *cuadrado* de orden *n* se obtiene sumando el número *triangular* de orden *n* más el número *triangular* de orden *n-1*:

$$n^2=T_n+T_{n-1}\quad(n\geq 2)$$



El número *pentagonal* de orden *n* se obtiene sumando el número *triangular* de orden *n* más el doble del número *triangular* de orden *n-1*:

$$P_n=T_n+2T_{n-1}\quad(n\geq 2)$$



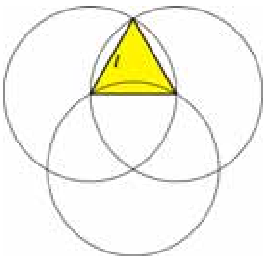
Iago F.F. 3º ESO.

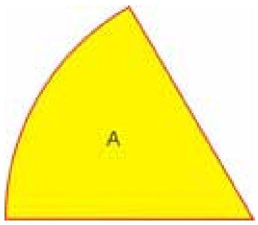
Diseño de Isletas

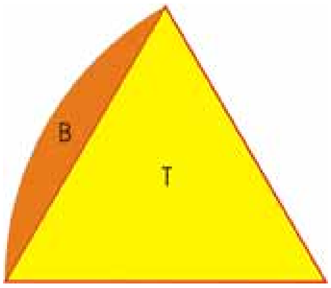
El primer concepto matemático que se nos sugiere al observar la imagen anterior es el de triángulo. Un triángulo especial, eso sí, pues la figura parece tener por lados tres arcos de circunferencia.

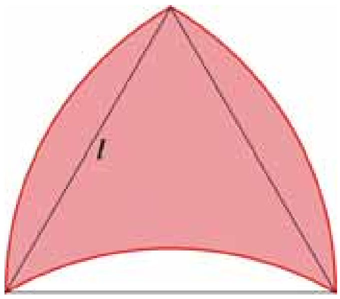
En este trabajo trataremos de investigar sobre las posibles respuestas a estas tres preguntas: ¿Cómo diseñar isletas? ¿Cuál es la medida de su perímetro? ¿Cuánto vale su área?

Tomemos como punto de partida un triángulo equilátero. La siguiente secuencia de imágenes nos servirá para aclarar lo que queremos explicar:









Para conocer el perímetro de nuestra figura debemos determinar, en primer lugar, cual es la longitud de los arcos de circunferencia que la forman. Como estos arcos han sido trazados a partir de un triángulo equilátero, tenemos un ángulo central de 60º. Por consiguiente, el arco trazado abarca una sexta parte de la longitud de la circunferencia que tiene *radio igual al lado* del triángulo.

Como la longitud de una circunferencia es $2 \cdot \pi \cdot r$ y los tres arcos equivalen a la mitad de la circunferencia, la fórmula para hallar el perímetro de la figura será:

$$P = \pi \cdot l$$

Para determinar el área de la figura tendremos que sumar el área del segmento circular, *B*, más el área del triángulo, *T*, puesto que:

Área figura = Área Triángulo + 2·área Segmento circular – Área Segmento circular

Área figura = Área Triángulo + Área Segmento circular

Conclusión:

El área de la figura coincide con la del sector circular:

$$S = \frac{\pi \cdot l^2}{6}$$

Obtendremos el mismo resultado, como es lógico, si sumamos las áreas del triángulo y del segmento circular. No será superfluo realizar estos cálculos, pues nos servirán de entrenamiento para extender la resolución del problema a otros triángulos que no sean equiláteros.

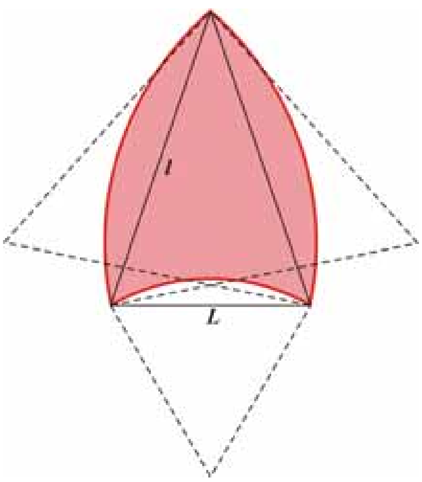
Veamos a continuación como podemos determinar el área del segmento circular, *B*. La altura, *h*, del triángulo, *T*, se obtiene por aplicación del Teorema de Pitágoras y con este dato podemos calcular el área del triángulo:

$$h = \frac{l\sqrt{3}}{2} \qquad S_T = \frac{l^2\sqrt{3}}{4}$$

Teniendo en cuenta que el área del sector circular, *A*, es un sexto de la medida de la superficie del círculo, determinamos el área del segmento circular, *B*:

$$S_A = \frac{\pi \cdot l^2}{6} \qquad S_B = S_A - S_T = \frac{l^2 \cdot \left(2\pi - 3\sqrt{3}\right)}{12}$$

Si tenemos presentes estos resultados, podremos construir isletas a partir de otros triángulos, tomando como elementos auxiliares triángulos equiláteros. Y podremos determinar, asimismo, las medidas de sus perímetros y superficies. Nosotros lo hemos realizado para casos diversos y os mostramos a continuación los resultados que obtuvimos al trabajar con triángulos isósceles del tipo del que mostramos en la figura.



$$P = \frac{\pi(2l + L)}{3}$$

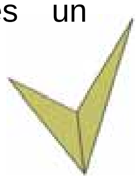
$$S = \frac{3L \cdot \sqrt{4l^2 - L^2} + \left(2l^2 - L^2\right) \cdot \left(2\pi - 3\sqrt{3}\right)}{12}$$

Atón C. G. 4º ESO.

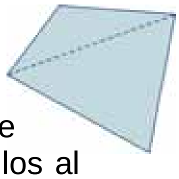
Santiago López Arca y Gonzalo Temperán Becerra

Clasificación de Cuadriláteros

Un ***cuadrilátero*** es un polígono (figura plana cerrada cuyos lados son segmentos) de cuatro



lados. Los ángulos interiores de un cuadrilátero suman 360º, puesto que obtenemos dos triángulos al triangularlo.



La clasificación de cuadriláteros depende del criterio que se utilice. La mayoría de los libros de texto utilizan dos criterios a la hora de realizar clasificaciones de ***cuadriláteros convexos***: el paralelismo y la medida de sus lados. Cuando el criterio utilizado es el número de lados paralelos, obtenemos las siguientes familias: ***Paralelogramos***, ***trapecios*** y ***trapezoides***.

PARALELOGRAMOS, son los cuadriláteros que tienen dos parejas de lados paralelos. Podemos distinguir dos subclases: los que tienen todos los lados iguales (***cuadrados*** y ***rombos***) y los que tienen los lados iguales dos a dos (***rectángulos*** y ***romboides***).

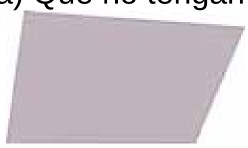
TRAPECIOS, tienen solamente dos lados paralelos. En esta familia podemos distinguir: ***trapecios escalenos*** en los que los lados no paralelos son desiguales; ***trapecios isósceles***, que tienen los dos lados no paralelos iguales; y ***trapecios rectángulos*** en los que uno de los lados no paralelos es perpendicular a las bases.

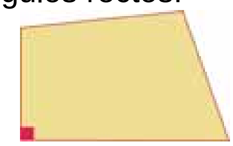
TRAPEZOIDES, no tienen lados paralelos. Los ***trapezoides asimétricos*** tienen cuatro lados desiguales y los ***deltoides*** o ***cometas*** poseen dos pares de lados de dos medidas diferentes.

Te proponemos que dibujes un ejemplo de cada uno de los tipos de cuadriláteros que acabamos de describir.

Vamos a realizar ahora una clasificación de cuadriláteros convexos teniendo en cuenta el ***número de ángulos rectos*** que posean.

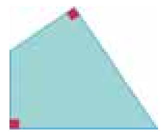
a) Que no tengan ángulos rectos:





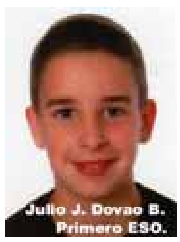
b) Que tengan un único ángulo recto:

c) Que posean dos ángulos rectos. En este caso, esos ángulos pueden ser consecutivos o no.



d) Que tengan cuatro ángulos rectos.

¿Por qué no existen cuadriláteros que tengan exactamente tres ángulos rectos?



Fuentes:
http://sapiens.ya.com/geolay/pagehtm/geometria.htm
http://sapiens.ya.com/geolay/pagehtm/cuadrila.htm
MATEMÁTICAS. Anaya. J. Colera y otros.
MATEMÁTICAS. Edelvives. I. Lazcano Uranga otros.
ENCICLOPEDIA TEMÁTICA. Argos Vergara. Volumen II.

UNIÓN
REVISTA IBEROAMERICANA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA

Septiembre de 2006, Número 7, página 111
ISSN: 1815-0640

Normas para publicación en Unión

1. Los trabajos para publicar se deben enviar a union.fisem@sinewton.org. Deben ser originales y no estar en proceso de publicación en ninguna otra revista. Serán remitidos a varios evaluadores y el Comité editorial de la Revista decidirá finalmente sobre su publicación.
2. Los artículos remitidos para publicación deben ser escritos en Word, preferentemente usando la plantilla establecida al efecto (descargar plantilla) y, en todo caso, cumpliendo las siguientes normas: letra tipo **arial**, tamaño **12 puntos**, interlineado simple, márgenes de 2,5 cm. como mínimo en los 4 bordes del papel, tamaño DIN A-4. La extensión no debe ser superior a las 15 páginas, incluyendo figuras, que deben estar situadas en el lugar del texto donde deben ser publicadas. La simbología matemática necesaria se escribirá con el editor de ecuaciones de Word, se insertará como una imagen o se realizarán utilizando los símbolos disponibles en el juego de caracteres "Arial". Es importante no cambiar el juego de caracteres, especialmente **evitar el uso del tipo "Symbol"** u otros similares.
3. Las **ilustraciones y fotografías** deben estar situadas en el lugar del texto donde deben ser publicadas. Si es posible, los "pie de foto" se escribirán dentro de un "cuadro de texto" de Word (con o sin bordes) que estará "agrupado" con la imagen de referencia. Se deben numerar usando: Fig. 1, Fig. 2,… Tabla 1, Tabla 2,…
4. El artículo deberá comenzar con un **resumen o abstract**, que tendrá una longitud máxima de 6 líneas. Preferiblemente se redactará también en inglés, además de la lengua original utilizada (español o portugués).
5. Teniendo en cuenta el carácter internacional de la revista, se hace indispensable que cuando los autores se refieran a un determinado sistema educativo nacional lo hagan constar expresamente y que siempre que se trate de un nivel educativo se indique la edad normal de los alumnos, lo que permitirá la comparación con el sistema educativo nacional del lector.
6. Los datos de identificación de los autores deben figurar en la última página del mismo documento word que contiene el artículo. Con el fin de garantizar el anonimato en el proceso de evaluación, solamente estarán los **datos identificativos en** esta **última página**. En ella se hará constar los siguientes datos:
   - **De contacto**: nombre, dirección electrónica, dirección postal, teléfono.
   - **Para la publicación**: centro de trabajo, lugar de residencia y/o del centro de trabajo, así como una breve reseña biográfica de unas cinco líneas (lugar y fecha de nacimiento, títulos, centro de trabajo, publicaciones...).
7. Las referencias bibliográficas se incluirán al final del trabajo (y antes de la hoja de datos identificativos) y deben seguir los formatos que se indican a continuación.

Para un libro:

Bourbaki, N. (1972). *Elementos de historia de las matemáticas.* Alianza, Madrid.

Bermejo, A. (1998). *La enseñanza de la geometría en la educación primaria.* Editorial Pico Alto, Buenos Aires.

Para un artículo:

Ibáñez, M. y Ortega, T. (1997). "La demostración en matemáticas. Clasificación y ejemplos en el marco de la educación secundaria". *Educación Matemática* 9, 65-104.

Díaz, C. y Fernández, E. (2002). "Actividades con ordenador para la enseñanza de la suma". *Revista de didáctica de las matemáticas* 19, 77-87.

Para un capítulo de libro:

Albert, D. y Thomas, M. (1991). "Research on mathematical proof". En: Tall, D. (ed.), *Advanced Mathematical Thinking,* 215-230*.* Kluwer, Dordrecht.

Hernández, G., Juárez, I. y Lorenzo, K. (1998). "Recopilación de datos estadísticos y su tratamiento en la enseñanza secundaria". En: Nuez, M. y Pérez, O. (eds.), *Segundo Congreso Americano de Educación Matemática,* 223-234. Editorial JJ, Caracas.

NOTA: Las normas que se indican en los puntos 2, 3 y 7 pretenden dar uniformidad a los trabajos que se reciban en la redacción y simplificar así el trabajo de composición y maquetación de la revista. Si alguien tiene dudas sobre su aplicación, puede dirigir sus preguntas (lo más concretas posible) a union.fisem@sinewton.org