UNIÓN

REVISTA IBEROAMERICANA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA

Número 11

Septiembre de 2007

Índice

Créditos……… 2
Elecciones en la FISEM……… 3
Firma invitada: presentación nueva sección……… 5
Claudi Alsina: breve reseña……… 7
Firma invitada: Educación Matemática e Imaginación
Claudi Alsina ……… 9
Análisis de errores de estudiantes y profesores en expresiones combinadas con números naturales
Vicente Carrión Miranda……… 19
La evaluación de métodos para la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas en la Educación Infantil
Carlos de Castro Hernández……… 59
O Ensino-Aprendizagem de Matemática através da Resolução de Problemas e os Processos Cognitivos Superiores
Edna Maura Zuffi y Lourdes de la Rosa Onuchic……… 79
Operaciones y funciones con tablero y dado
Omar Armando Cabrera……… 99
Análisis de una propuesta didáctica para la enseñanza de límite finito de variable finita
A. Engler, S. Vrancken, M. Hecklein, D. Müller y M. I. Gregorini……… 113
Hacia una revisión crítica de la enseñanza del número de dos cifras
José Antonio Fernández Bravo……… 133
Números poligonales como disparadores de un proceso de validación
Nora Ferreira, Estela Rechimont y Carlos Parodi……… 147
Dinamización matemática: Banderas, matemáticas y diversidad
IES Viera y Clavijo……… 157
Formación de docentes de Educación Infantil y Primaria en España:
María Sotos Serrano……… 163
Historia: Teoria e representação geométrica na obra de Albrecht Dürer: um ensino de matemática para pintores e artesãos
Cláudia Flores ……… 179
¡¡Esto no es serio!!: Las Otras Efemérides
José Muñoz Santonja……… 189
El rincón de los problemas
Uldarico Malaspina……… 197
Libros: Geometría para el siglo XXI. Colectivo de autores.
Reseña: M. Eloy Morales Santana ……… 205
TIC: Actividad interactiva en el aula: funciones lineales
Manuel Amaro Parrado……… 211
DosPIUnión 09.
Santiago López Arca……… 221
Convocatorias y eventos……… 225
Información: El día de las Matemáticas. Bolivia……… 229
Instrucciones para publicación……… 233

Septiembre de 2007, Número 11, página 2
ISSN: 1815-0640

Unión. Revista Iberoamericana de Educación Matemática es una publicación de la Federación Iberoamericana de Sociedades de Educación Matemática **(FISEM)**. Tiene una periodicidad trimestral, de modo que se publican cuatro números al año, en los meses de marzo, junio, septiembre y diciembre.

REVISTA IBEROAMERICANA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA

Septiembre de 2007, Número 11, página 3
ISSN: 1815-0640

Elecciones en la FISEM

Como es sabido, la Federación Iberoamericana de Sociedades de Educación Matemática fue creada el 3 de julio de 2003 en Puerto de la Cruz, Tenerife, España.

Tras aprobarse el proyecto de Estatuto y de Reglamento que se había venido debatiendo desde unos años antes, se procedió a la elección de la primera Presidencia y Vicepresidencia de la Junta de Gobierno que recayó en Brasil y Chile, respectivamente. El mandato es de cuatro años y durante este tiempo, han ocupado estos cargos:

Presidencia: Celia Carolino Pires y Paulo Figueiredo Lima que han sido Presidenta y Presidente de la Sociedad Brasileña sucesivamente.

Vicepresidencia: Ismenia Guzmán y Miguel Díaz Flores, que se han sucedido en el puesto de Presidencia de la Sociedad Chilena.

Pues bien, durante los meses de julio y agosto de 2007 se ha procedido a la renovación de estos cargos pues así lo señala el Estatuto. Se ha realizado por primera vez a través del correo electrónico. Abierto el debate y la presentación de candidaturas, se procedió a la elección y, para los próximos cuatro años, quedará de la siguiente forma:

Presidencia: la Sociedad Chilena de Educación Matemática (SOCHIEM) cuyo presidente actual es **Miguel Díaz Flores**

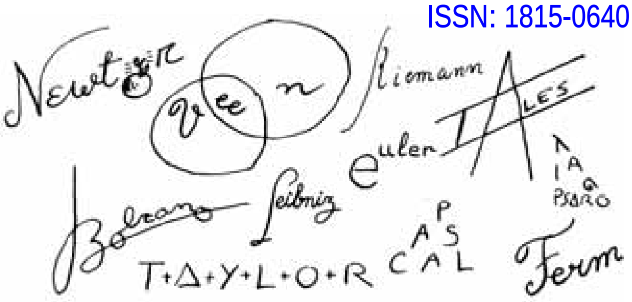
Vicepresidencia: la Sociedad Argentina de Educación Matemática (SOAREM), cuyo presidente actual es **Óscar Sardella**.

El proceso seguido ha sido valorado positivamente por las distintas Sociedades lo cual representa un éxito teniendo en cuenta que había que renovar los cargos por primera vez y solo podía hacerse por la vía electrónica.

UNIÓN
REVISTA IBEROAMERICANA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA

Septiembre de 2007, Número 11, página 5
ISSN: 1815-0640

firma invitada



En este primer capicúa de UNIÓN, abrimos una nueva sección que hemos titulado “firma invitada”.

Para llevarla a cabo, el Consejo Editor invitará a participar en cada uno de los próximos números a personas destacadas en el ámbito de la Ciencia y la Cultura en general, para que nos den su opinión sobre el asunto que ellos estimen oportuno sabiendo que, y así se lo haremos llegar, nuestra revista está especialmente orientada a docentes en activo, desde los maestros y profesores de aulas de los niveles no universitarios hasta un buen número de colegas de aulas universitarias. Todos ellos son los que han ido completando las muchas páginas que hemos logrado hasta este momento y que esperamos poder seguir aumentando.

Estimamos que la presencia de esas *firmas invitadas* en UNIÓN permitirá abrir la puerta a la reflexión, a la información, a la formación y quizá al debate de ideas acerca de la educación matemática y de lo mucho que se mueve alrededor de ese núcleo.

Hace unos años, en un calendario matemático de colgar, editado por la Sociedad Canaria *Isaac Newton* de Profesores de Matemáticas, insertamos una página en la que, sobre los días del mes en el que aparecía un problema cuya solución coincidía con el número del día, aparecían las supuestas firmas de muchos matemáticos. Pretendíamos provocar la sonrisa cuando se comprobaba el ingenio desplegado por sus autores al ver, por ejemplo, la inacabada firma de Fermat o la triangular firma de Pitágoras. Rescatamos algunas firmas de esa presentación para señalar que la sonrisa es una buena consejera y que la reflexión y el debate también caben tras ese telón.

Aunque lo haremos en cada caso, queremos agradecer a todas y a todos cuantos nos presten esta colaboración que, seguro, va a ser apreciada por nuestros internautas visitantes.

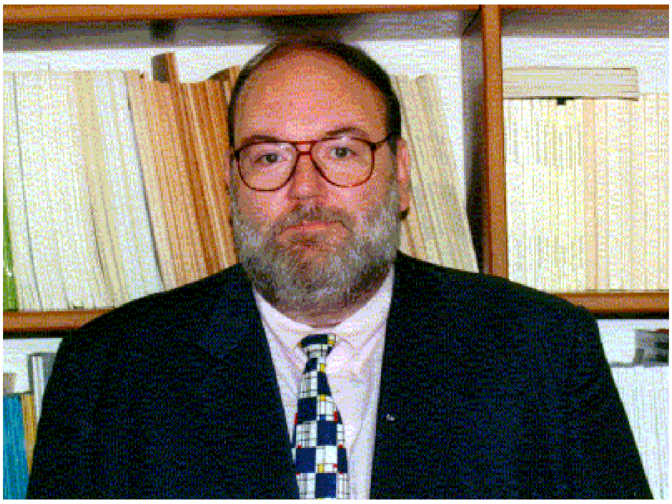
Comité editorial

UNIÓN
REVISTA IBEROAMERICANA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA
Septiembre de 2007, Número 11, página 7
ISSN: 1815-0640

firma invitada

Claudi Alsina
(Barcelona, 1952)

Breve reseña



Catedrático de Matemáticas de la Universidad Politécnica de Catalunya.

Ha publicado 20 libros y más de 200 artículos de investigación y 200 de educación y divulgación. Es especialista en ecuaciones funcionales, Gaudí, visualización y educación matemática, habiendo dirigido 15 tesis doctorales.

Ha realizado una extensa labor de divulgación de las matemáticas y de formación de profesores a nivel nacional e internacional. Ha sido delegado nacional en IMU e ICMI durante 12 años, y ha formado parte de los Comités Internacionales de Programa de ICME 7-8-9.

Es colaborador habitual de los Seminarios Internacionales de la Olimpíada Matemática Argentina desde 1998.

Premio a la Calidad Docente UPC - 1999.

Distinción Vicens Vives a la Calidad Docente Universitaria de la Generalitat de Catalunya (1999).

Coordinador de las PAU de Cataluña (2001-2002).

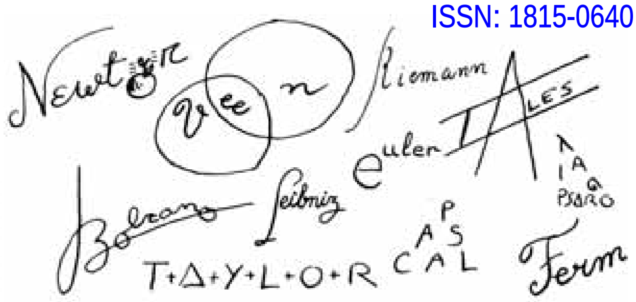
Director General de Universidades de la Generalitat de Cataluña (2002-2003).

Vocal del Consejo Superior de Evaluación del Sistema Educativo de la Generalitat de Catalunya (2007-)

http://www.upc.es/ea-smi/personal/claudi/index.html
claudio.alsina@upc.edu

Septiembre de 2007, Número 11, páginas 9-17
ISSN: 1815-0640

firma invitada



Educación Matemática e Imaginación

Claudi Alsina

Resumen

El objetivo de este artículo es estudiar el desarrollo de la imaginación en clase de matemáticas con vistas a favorecer la creatividad matemática.

Abstract

The main aim of this paper is to study the development of imagination in mathematics classrooms in order to promote mathematical creativity.

Introducción

En sus enfoques más tradicionales, la Educación Matemática ha dado especial atención a la transmisión de conocimientos. Pero en enfoques más innovadores aparece un objetivo más ambicioso como es el desarrollo de la creatividad matemática de los estudiantes. Nuestro objetivo en este breve artículo es intentar aclarar el rol que el desarrollo de la *"imaginación matemática"* podría jugar en este cultivo de la creatividad. Tras unas sintéticas aproximaciones a lo que es la imaginación y a su papel en la matemática intentaremos analizar un posible interés tanto desde el punto de vista formativo como docente.

¿Qué es la imaginación?

"Pinto los objetos tal como los pienso, no como los veo"

Pablo Picasso

La palabra *"imaginación"* es una de estas palabras maravillosas, que tienen asociada una seductora ambigüedad, capaz de interesar a colectivos muy amplios, dando lugar entonces a concepciones muy diversas. Si como es normal recurrimos primero al Diccionario de la Real Academia Española podemos ya acotar un poco este término:

Imaginación

(Del lat. *imaginatio, -onis*).

1. f. Facultad del alma que representa las imágenes de las cosas reales o ideales.
2. f. Aprensión falsa o juicio de algo que no hay en realidad o no tiene fundamento.
3. f. Imagen formada por la fantasía.
4. f. Facilidad para formar nuevas ideas, nuevos proyectos, etc.

Pero intentando profundizar un poco más podemos convenir en adoptar una descripción menos religiosa y más psicológica

"La imaginación es la habilidad de formar imágenes mentales"

En efecto, se trata de una habilidad de nuestra mente y nos lleva a generar imágenes mentales no necesariamente ligadas a las visiones reales o a percepciones realizadas anteriormente. Aquí arranca su poder creativo. No solo se trata de ficciones o fantasías, la imaginación también combina situaciones, plasma intuiciones, forja imágenes alternativas y puede generar creencias. El factor tiempo no representa ningún obstáculo: imaginamos el pasado y el futuro, imaginamos los recuerdos y el porvenir. La imaginación va pues asociada a la libertad mental. No debe dar respuestas exactas o descripciones reales, puede ir mucho más allá del sentido común… y sin embargo puede *dar sentido* al propio pensamiento racional o emocional. Y puede ser socialmente compartida.

Nuestras imaginaciones pueden (a posteriori) llevar a la elaboración de poemas, de cuentos, de historias, de obras de arte… y en el mundo científico a la creatividad, a la formulación de nuevos modelos, a nuevas interpretaciones, etc. La ciencia es, en gran medida, un juego racional donde realidad e imaginación mantienen un constante diálogo.

Siguiendo a Claxton (Claxton, 1994) podemos aceptar el siguiente principio:

"Cuando la imaginación se vuelve más disciplinada, más se convierte en una fuente valiosa de intuiciones e hipótesis que pueden ser, al mismo tiempo, más seguras y más osadas que las del puro ensayo y error"

Nos apuntamos pues a la idea de que la imaginación puede jugar también un papel importante en ciencia. Albert Einstein lo expresó explícitamente:

> *"La imaginación es más importante que el conocimiento. Mientras que el conocimiento se limita a todo lo que ahora conocemos y entendemos, la imaginación abarca el mundo entero, todo lo que en el futuro se conocerá y entenderá".*

En definitiva, la imaginación también puede formar parte del patrimonio científico y por tanto jugar un papel tanto en la creación científica como en su enseñanza.

Matemática e imaginación

"¿En qué se parece un cuervo a un pupitre?"

Lewis Carroll

"En que hay una A en AMBOS"

E.V. Rieu

Hace ya muchos años Edward Kasner y James Newman publicaron su entrañable libro *Matemáticas e imaginación* (versión española (Kasner y Newman, 1978)), todo un clásico de lo que hoy denominamos matemática recreativa. En el epílogo de este libro sus autores, después de una interesante discusión sobre la naturaleza de las matemáticas, acaban su obra con las siguientes consideraciones sobre matemática e imaginación:

> *"El desarrollo de las matemáticas es una imagen de la lucha eterna por mayor entendimiento y mayor libertad: de lo particular a lo general; de las configuraciones acotadas por líneas rectas hasta las curvas patológicas; de las propiedades de ésta o aquella figura determinada a las propiedades de todas las figuras; de una dimensión a n dimensiones; desde lo finito hasta lo infinito. En esta marcha la imaginación ha desempeñado un notable papel. Porque la imaginación tiene el valor pragmático de adelantarse a la lenta caravana del pensamiento bien ordenado y frecuentemente reconoce la realidad antes que su pesado amo. En eso consiste su contribución esencial a una de las más extrañas colaboraciones del pensamiento: las sosegadas matemáticas y el vuelo de la imaginación.*
>
> *Las matemáticas constituyen una actividad regida por las mismas reglas impuestas a las sinfonías de Beethoven, las pinturas de Da Vinci y las poesías de Homero. Así como las escalas, las leyes de la perspectiva y las reglas del metro parecen carecer de fuego, podrá*

parecer que las reglas formales de las matemáticas no tienen brillo. Sin embargo, finalmente, las matemáticas alcanzan pináculos tan elevados como los logrados por la imaginación de sus más osados exploradores. Y esto encierra, quizá, la última paradoja de la ciencia, puesto que en su prosaico tráfago, tanto la lógica como las matemáticas dejan atrás, frecuentemente, a su avanzada y muestran que el mundo de la razón pura es más extraño aún que el mundo de la fantasía pura."

Creo que esta bellísima descripción pone las cosas en su sitio: al rigor deductivo y a su formalización anteceden la imaginación como base a la creatividad matemática, es decir, la imaginación al servicio de la concreción de nuevas teorías o conceptos y a la demostración de nuevos teoremas. Evidentemente hay en matemáticas una labor meritoria de desarrollo formal, de pruebas o resoluciones que sin demasiada necesidad de imaginación permiten hallar resultados. Pero en la concepción de figuras, en la genialidad de combinar técnicas de diversos campos o en la resolución sorpresiva de un problema, la imaginación juega un papel importantísimo (Véase por ejemplo en (Mazur, 2003) una sugestiva aproximación no solo a los números imaginarios sino el propio rol de la imaginación en matemáticas).

Todos los que hemos realizado investigaciones matemáticas sabemos que las publicaciones finales, pulcramente organizadas y lógicamente expuestas, nunca reflejan este estudio previo creativo en el cual intuiciones, cálculos, diagramas, ejemplos, etc. nos llevan a imaginar soluciones, o métodos a aplicar. Si esta imaginación es esencial en el propio oficio matemático, deben tener también su influencia en la formación.

El cultivo de la imaginación en clase

"Imagine all the people…"

John Lennon

La imaginación en clase de matemáticas necesita ser cultivada. El sentido común también. Imaginación y sentido común no son facultades innatas y además interesa su estimulación, en nuestro caso, en la dirección adecuada: la de la *creatividad matemática*. Y como la imaginación también puede tener una dimensión grupal y ser compartida, su cultivo va más allá del progreso individual y puede ser un objetivo de clase.

Los estudiantes tienen grandes capacidades imaginativas y a lo largo de su progreso escolar pasan por diversas fases de este desarrollo imaginativo. La psicología tiene bien estudiadas estas fases y diversas teorías pedagógica han planteado la necesidad de explotar más estas capacidades. En clase de matemáticas deberíamos poner el acento en potenciar aspectos que resultan de especial interés (NCTM, 2000). Citaremos tres casos:

(i) *Imaginación y visualización*

Gran parte de la intuición matemática reposa sobre visualizaciones mentales de objetos matemáticos (figuras, movimientos, gráficos,…). La imaginación puede estimularse dando importancia a las visualizaciones en clase (Alsina y Nelsen, 2006) (Nelsen, 2000, 2001). El material manipulativo (Alsina, 2005a), (Alsina 2005b) y los dibujos jugaran en este proceso un punto clave (difícilmente puede "pensarse" en geometría sin un conocimiento previo táctil o visual de los objetos).

(ii) *Imaginación y razonamiento*

A menudo es complicado seguir o desarrollar un razonamiento matemático por falta de imaginación: difícilmente empezamos a razonar correctamente si antes no somos capaces de formar en nuestra imaginación unas referencias o vislumbrar unos caminos para deducir algo. Provocar imágenes mentales ("Imaginemos que…") puede ayudar, y mucho a razonar mejor. Veánse estrategias en (Mason, 2004).

(iii) *Imaginación y resolución de problemas*

Resolver problemas es un motor esencial de la educación matemática. Citemos de nuevo a (Claxton, 1994):

> *"Por ejemplo, en el área de la resolución de problemas matemáticos, George Pólya ha identificado estrategias a las que recurrir como: "descomponer el problema en subproblemas", "crear un problema análogo al que nos ocupa pero más sencillo, y ver si lo podemos resolver", "tratar de representar el problema con un método visual o mediante imágenes", o "suponer una solución posible y tratar de encontrar la respuesta trabajando en el problema hacia atrás a partir de ella". Muchas de estas estrategias también son útiles para los científicos. Las personas expertas en la resolución de problemas poseen tantos conocimientos y técnicas relacionados con ella que la mayoría de los problemas con que se encuentran son rutinarios para ellos; pero cuando se ven temporalmente confundidos poseen un repertorio de estrategias de uso más general que pueden rellenar los huecos."*

Un interesante libro de Meter M. Higgins (Higgins, 2002) titulado *Matemáticas para la Imaginación* versa precisamente sobre las relaciones problemas-imaginación. Otra sugestiva referencia es (Tanton, 2000).

Es evidente pues que la imaginación forma parte de las técnicas para abordar la resolución de problemas: hay imaginación cuando asociamos a un mapa complejo un simple grafo, cuando vemos mentalmente como revoluciona una figura plana, cuando mentalmente generamos un mosaico, cuando en una reducción al absurdo imaginamos lo que ocurriría en caso contrario, etc. Me viene a la memoria aquel viejo problema: "si en 24 horas sube una montaña siguiendo el único camino que lleva a la cima y el día siguiente baja por el mismo sendero, debe haber un lugar donde usted está a la misma hora los dos días"… y uno se "imagina" superpuestas la subida y la bajada y entiende el cruce (¡igual hora!).

Ejemplo. La canción del teorema de Pitágoras

En la conferencia "La matemática hermosa se enseña con el corazón" incluí una canción dedicada al teorema de Pitágoras con música popular de A. Mestres. He hecho cantar esta canción o su correspondiente traducción a profesorado de Cataluña, Galicia, Madrid, Valencia, Argentina y Holanda.

1 *Un conocido pensador*
viajando por Egipto
un triángulo encontró
con lados: tres, cuatro y cinco.

2 *Viva el triángulo,*
rectángulo y señor
Viva el triángulo
medible con amor.

3 *Sobre el ejemplo meditó:*
¡recto era el ángulo!
y lo generalizó
al triángulo rectángulo.

4 *Viva el triángulo,*
rectángulo y señor
Viva el triángulo
medible con amor.

5 *Los cuadrados calculará*
de los catetos que ahora usa
y el cuadrado obtendrá
del lado hipotenusa

6 *Viva el triángulo*
rectángulo y señor
Viva el triángulo
medible con amor

7 *Pitágoras nos dejó*
una verdad fabulosa
para poder hacer
Geometría rigurosa

8 *Viva el triángulo*
rectángulo y señor
Viva el triángulo
medible con amor

La imaginación docente

"Aprendí a aprender para poder enseñar y aprendí a enseñar para poder aprender"

L. A. Santaló

En una ocasión Anna Freud dijo cínicamente: "las mentes creativas siempre han sabido sobrevivir a cualquier clase de formación defectuosa". Nuestro objetivo docente debe ser ofrecer una formación de calidad. Para ello debemos ser los profesores los primeros en ser imaginativos dando a nuestra actuación en el aula enormes dosis de creatividad. Dice W.N. Sawyer:

> *"La docencia mala en matemáticas es enseñar presentando una sucesión inacabable de signos sin significado, palabras y reglas y fallar en la promoción de la imaginación".*

La imaginación docente tiene muchísimos resortes a explotar, desde el planteamiento de problemas imaginativos y tareas ricas, a la creación de entornos de aprendizaje atractivos, pasando por unas dinámicas con juegos, salidas, torneos, concursos, etc., que estimulen la participación imaginativa. Por ejemplo, para los niveles elementales existen hoy maravillosos cuentos sobre matemáticas que tienen un gran interés didáctico… pero también pueden proponerse concursos de escribir y dibujar nuevos cuentos dedicados a los temas matemáticos que se tratan en clase. La imaginación es, además, gratis.

Ejemplo. ¿Han escrito alguna vez una carta de amor a un concepto o figura?

Yo lo he hecho y les incluyo esta emocionada:

Carta de amor a un trapezoide

Querido trapezoide,

Le sorprenderá que por primera vez alguien le haga una declaración de amor y ésta no provenga de una figura plana. Su pertinaz vivencia en el plano le ha mantenido siempre al margen de lo que ocurre por arriba o por abajo, enfrente o detrás. Digámoslo claramente: yo lo conocí hace años pero usted aún no se había enterado, hasta hoy, de mi presencia. Debo pues empezar por el principio y darle noticia de cómo fue nuestro primer encuentro.

Ocurrió una tarde de otoño lluviosa. Una de estas tardes de octubre en que llueve a cántaros, los cristales de los colegios quedan humedecidos y los escolares sin recreo. Usted estaba quieto en una página avanzada de un libro grueso que era nuestra pesadilla continua. Me acuerdo aún perfectamente. Página 77, al final hacia la derecha. Fue al abrir esta página, siguiendo la orden directa de la señorita Francisca, nuestra maestra, cuando lo vi por primera vez. Allí estaba *usted entre los de su familia, un cuadrado, un rectángulo, un paralelogramo, un trapecio, un rombo, un romboide,... y ¡el trapezoide!. Un perfil grueso delimitaba sus desiguales lados y sus extraños ángulos. La señorita Francisca se fue exaltando a medida que nos iba narrando las grandes virtudes de sus colegas cuadriláteros... que si igualdades laterales, que si paralelismos, que si ángulos, que si diagonales... y el rato fue pasando y la señorita seguía sin decir nada. Como las señoritas acostumbran a no explicar lo más interesante, a mí se me ocurrió preguntarle*

- Señorita... ¿y el trapezoide?

Éste –replicó la maestra- este es el que no tiene nada.

¿Nada de nada? – le repliqué

Sí, nada de nada – me contestó

...y sonó el timbre. Quedé fascinado: usted era un pobre, muy pobre cuadrilátero. Estaba allí, tenía nombre, pero nada más. Por eso a la mañana siguiente volví a insistir en el tema a la señorita.

Así debe ser muy fácil trabajar con los trapezoides –le dije - ya que como no tienen nada de nada no se podrá calcular tampoco nada de nada.

¡Al contrario! Estos son los más difíciles de calcular. Ya lo verá cuando sea mayor.

Durante aquella época yo creí intuir que matemáticas y cosas sexuales debían tener algo en común pues siempre se nos pedía esperar a ser mayores para "verlo".

A usted ya no lo vi más hasta que en Bachillerato don Ramiro nos obsequió con una fórmula muy larga para calcular su área. Esto me enfadó enormemente. Usted había pasado del "nada de nada" al "todo de todo". A partir de entonces empecé a pronunciar su "oide" final con especial desprecio "¡trapez-OIDE!".

Nuestro siguiente encuentro tuvo lugar en una calle. De pronto miro el pavimento y descubro con horror que le estoy pisando. Dí un salto y me quedé mirando. ¡Que maravilla! Después de tantos años sobre mosaicos llenos de ángulos rectos allí estaba usted. El "nada de nada" era ahora una loseta. Dibujé aquel suelo y entonces marqué los puntos medios de sus lados y empecé a trazar rectas y una maravilla de paralelogramos nacieron enmarcando su repetición.

Con el tiempo he ido aprendiendo muchas cosas de usted y le he dedicado muchos ratos. La señorita Francisca tenía razón en lo difícil que es tratarlo pero no la tenía en lo del "nada de nada".

Y ahora al final de la declaración sólo me queda pedirle una cosa. Sé que es difícil pero no tengo más remedio que pedírselo. Por favor no diga nunca a nadie que yo hice esta declaración. Guarde esto en el centro del paralelogramo inscrito que le acompaña. Yo guardaré su recuerdo, dibujándolo en todas las reuniones. Los amores imposibles al menos tienen la virtud de ser duraderos. Suyo. Claudi.

Epílogo

Jean-Luc Picard en `Star Trek: The Next Generation' dice "las cosas sólo son imposibles hasta que dejan de serlo". Aunque el tema de la imaginación en clase de matemáticas tiene sus complicaciones no nos podemos resignar a perder el inmenso valor formativo que la imaginación compartida entre docentes y estudiantes puede aportar. Como dijo George Smith Patton "Nunca digan a la gente como hay que hacer las cosas. Díganles lo que hay que hacer y les sorprenderán con su ingenio". ¿Imaginación al poder? Al menos ¡imaginación a la clase!

Bibliografía

- C. Alsina (2005): "Mathematical Proofs in the Classroom: the Role of Images and Hands-on Materials", Mathematikunterricht im Spannugnsfeld von Evolution und Evaluation- Festschrift für Werner Blum, W. Henn and G. Kaiser, G. eds., Frazbecker, Hildesheim, pp 129-138.
- C. Alsina (2005): Geometria Cotidiana, Placeres y Sorpresas del Diseño, Rubes, Barcelona.
- C. Alsina, R.B., Nelsen (2006): Math Made Visual. Creating images for understanding mathematics. MAA, Washington.
- G. Claxton (1994): Educar mentes curiosas. El Reto de la ciencia en la escuela, Visor Dist. S.A. Madrid.
- K. Egan (1992): Imagination in Teaching and Learning, University of Chicago Press, Chicago.
- K. Egan, D. Nadaner (eds.) (1988): Imagination and Education, Teachers College Press, New York.
- N. Frye (1963): The Educational Imagination. Canadian Broadcasting Corporation, Toronto.
- P.M. Higgins (2002): Mathematics for the Imagination, Oxford University Press, Oxford.
- E. Kasner, J.R. Newman (1978): Matemáticas e Imaginación, Compañía Editorial Continental, S.A., México.
- J.H. Mason (2004): Mathematics Teaching Practice. A guide for University and College Lectures, Horwood Pub. Chichester
- B. Mazur (2003): Imagining Numbers (particularly the square root of minus fifteen), Farrar, Strauss and Girnox Ed., Cambridge.
- NCTM (2000): Principles and Standards for School Mathematics. Pub. Nat. Council of Teachers of Mathematics, USA.
- R.B. Nelsen (1993): Proofs without Words: Exercises in Visual Thinking, MAA, Washington. (In Spanish: Proyecto Sur, Granada, 2001).
- R.B. Nelsen (2000): Proofs without Words II: More exercises in Visual Thinking, MAA, Washington.
- R. Norman (2000): "Cultivating Imagination in Adult Education", Proceedings of the 41st Annual Adult Education Research.
- G. Pólya (1954): How to Solve it, Anchor-Doubleday, Garden City NY.
- J. Sallis (2000): Force of Imagination. The Sense of Elemental.
- J. Tanton (2001): Solve this. Math activities for students and Clubs. MAA, Washington.

UNIÓN
REVISTA IBEROAMERICANA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA

Septiembre de 2007, Número 11, páginas 19-57
ISSN: 1815-0640

Análisis de errores de estudiantes y profesores en expresiones combinadas con números naturales

Vicente Carrión Miranda

Resumen

Se observa en estudios con profesores y alumnos la presencia de errores en las clases de matemáticas, relacionados con los contenidos de los planes de estudio que guían la práctica docente, en los diferentes niveles escolares. Son un problema grave en la enseñanza de la matemática y en otras áreas del conocimiento. Es importante contemplar el análisis de esta problemática en el entorno social de los profesores y estudiantes y considerar sus consecuencias a futuro. Se exponen un diagnóstico y un análisis de los errores en el tratamiento de expresiones numéricas simples que incluyen operaciones aritméticas con números naturales, realizado con profesores de matemáticas de los niveles básico y medio; y con estudiantes de esos mismos niveles y del universitario. A partir de un ejemplo se clasifican e interpretan y se analizan las causas posibles que los provocan. Se revisan los tipos y frecuencias de errores cometidos por los individuos.

Abstract

Research studies that involve teachers and students use of mathematical knowledge in problem solving activities have identified several types of errors. These errors often become an obstacle to prepare and work on successful learning activities to comprehend mathematical concepts. In this research I develop and use an instrument to diagnose and analyze of teachers and student's errors that appear while working on simple numeric expressions that include arithmetic operations with natural numbers. Thus, errors are classified and interpreted, in terms of identifying their possible causes or origin. Some examples are show to illustrate the most frequent errors that teacher and students exhibit in solving simple tasks that involve the hierarchy of operations and the use of basic number properties.

Introducción

El análisis de las producciones de los estudiantes nos lleva al análisis de sus aciertos y errores. Con relación a los aciertos en los procedimientos, es importante saber qué medios han utilizado para alcanzar resultados satisfactorios. Existen, por lo general, varios caminos posibles para lograr el objetivo, siguiendo etapas intermedias. Esto demanda un análisis. ¿Qué camino es el más simple para el estudiante?, ¿cuál es el más corto?, ¿cuál es el que siguen la mayoría de los alumnos de un determinado nivel?, ¿por qué la mayoría sigue, exactamente, ese camino? En lo que respecta a los errores, la necesidad de analizarlos es evidente. Sólo mediante un análisis se puede saber qué dificultades enfrenta el alumno. Esto permite determinar los medios para corregir la situación (Vergnaud, 1991).

Las concepciones erróneas señalan una línea de pensamiento que causa errores procedentes de una idea incorrecta. Algunos estudios informan sobre la clasificación de errores y su frecuencia; sin embargo, esto no implica el examen de sus orígenes.

Se considera que el error es un conocimiento deficiente, insuficiente, imperfecto, defectuoso, escaso o incompleto; una desviación de un conocimiento establecido. Siempre existe la posibilidad de la presencia, la permanencia y la persistencia de errores en la adquisición, desarrollo y consolidación del conocimiento científico. El tratamiento adecuado de errores puede contribuir a mejorar el proceso de aprendizaje. Los estudiantes pueden desarrollar actividades para explicar y dar sentido a sus errores y fomentar la motivación del aprendizaje.

Los errores ofrecen al profesor de matemáticas la posibilidad de organizar un ámbito de acción ligado a su práctica escolar, relacionado, en forma directa, con bases teóricas de la educación matemática. Pueden ser punto de partida para orientar el aprendizaje de la materia. Todo proceso de instrucción potencia la generación de errores. La interpretación sólo como instrumento para diagnosticar y corregir anomalías toma en cuenta, parcialmente, las posibilidades que ofrecen.

Debemos desechar la propensión a censurar los errores atribuyéndolos sólo a los estudiantes, pensando que éstos son la única variable. Existen otras del proceso educativo, el profesor, los programas y planes de estudio, la escuela, las condiciones en que se desarrolla la tarea escolar o los ambientes cultural y social.

La consideración de errores en el aprendizaje es una tarea compleja. Requiere de la atención del pronóstico, de sus implicaciones en el proceso de aprendizaje y en el ámbito social. Es importante reflexionar en la herencia y reproducción de los errores de la población escolar, de todos los niveles, y en las influencias y consecuencias que siguen a esta práctica anómala. Considérese, por ejemplo, el número de alumnos que, en cada ciclo escolar, atiende un profesor que comete errores aritméticos. Reflexionemos en las consecuencias que, para un país, ocasiona formar profesionales con un aprendizaje en un ambiente de errores.

Marco teórico

Las oportunidades de los estudiantes para aprender matemáticas dependen del entorno, del tipo de tareas y del discurso en que participan. Lo que aprenden está sujeto a cómo se involucran en las actividades matemáticas. Esto determina las actitudes que tienen hacia la disciplina. En esa perspectiva, los errores forman parte de las producciones de los alumnos. Por lo general, son estables en el proceso de aprendizaje de la materia, en los distintos niveles del sistema educativo. Los profesores piensan que las respuestas incorrectas a situaciones planteadas a sus alumnos son deficiencias, o fracasos, en el logro de los objetivos. Aun cuando los errores tienen procedencias distintas se considera, por lo general, que emanan de un esquema cognitivo inadecuado del alumno.

Todo proceso de instrucción es, potencialmente, generador de errores. Pueden presentarse en forma ocasional, por azar; éstos son errores esporádicos provocados por descuidos en las producciones de los estudiantes. Otros surgen en un marco conceptual consistente, basado en conocimientos adquiridos previamente. Son sistemáticos. Favorecen una comprensión distorsionada de los conceptos. Cuando el estudiante los utiliza, piensa que lo hace en forma correcta. Los errores sistemáticos propician la creación de patrones de comportamiento equivocados en la ejecución de las tareas. Son patrones consistentes de errores. La consistencia es en dos niveles, individual: los sujetos muestran regularidad en el modo de realizar tareas y resolver problemas matemáticos similares. También hay consistencias de carácter colectivo que cometen personas diferentes en ciertas etapas de su desarrollo educativo.

Rico (1994) agrupa los polos que articulan los estudios e investigaciones recientes, relacionados con errores en el aprendizaje de la matemática, en las siguientes categorías, no excluyentes:

- Estudios relativos al análisis de errores, causas que los producen o elementos que los explican y taxonomías y clasificaciones de errores. Se sustentan en alguna teoría psicológica, o psicopedagógica, que proporciona un marco explicativo y a la que el análisis de errores ofrece una metodología adecuada para aumentar su contenido empírico. Incorporan las aproximaciones teóricas hechas desde un planteamiento epistemológico, o estrictamente matemático, que establecen causas estructurales para los errores, debidas a la naturaleza del conocimiento matemático.
- Estudios dedicados al tratamiento curricular de los errores en el aprendizaje de la matemática. Incluyen los trabajos dedicados a la organización didáctica de su enseñanza. Una de sus líneas de trabajo, la enseñanza diagnóstica, trata de prever los errores, detectarlos y proponer medios para su corrección. También involucran propuestas donde los errores son parte indispensable para fomentar el estudio e investigación de los contenidos matemáticos. Comprenden este apartado los estudios sobre el papel que desempeñan en la evaluación y en las valoraciones que deben realizarse sobre las producciones de los alumnos.
- Estudios dedicados a determinar qué es lo conveniente que aprendan los profesores en formación con relación a los errores que cometen los alumnos. Se relacionan con la formación del profesorado y con el papel que tienen la observación, análisis, interpretación y tratamiento de los errores, en el proceso de formación de los alumnos.
- Trabajos de carácter técnico que implementan y sostienen determinada clase de análisis sobre errores. Se incluyen en este apartado técnicas de análisis para contrastar hipótesis alternativas que justifican el origen o causa de errores.

Algunos estudios e investigaciones en educación matemática incluyen métodos para examinar los errores en el aprendizaje de la matemática. Un ejemplo utilizado en este trabajo es el de Mulhern (1989), citado en Rico (1994), establece cuatro categorías que se describen a continuación:

- Contar el número de soluciones incorrectas para cada problema. Este método, que tiene un valor diagnóstico limitado ha predominado en la enseñanza.
- Análisis de los tipos de errores cometidos. Esta técnica implica usualmente clasificarlos, examinar los distintos niveles de separación del conocimiento desviado y hacer inferencias sobre los factores que conducen al error.
- Análisis de patrones de error. Tales análisis pueden revelar errores sistemáticos que son causas de concepciones inadecuadas; o bien, al variar aspectos de las tareas. Los patrones de error que resultan pueden proporcionar claves sobre las estrategias utilizadas.
- Construir problemas de modo que puedan provocar errores en los individuos. El investigador observa los patrones de error realizados, especula sobre sus posibles causas y construye sistemáticamente nuevos problemas que induzcan a errores similares.

Según Oser, H. & Spychiger, M. (1999), citado por Heinze (2005), un error es un proceso, o una acción, que no obedece a la norma. Es necesaria la identificación de la línea de demarcación para verificar el proceso correcto y que la acción respete la norma. En otras palabras, se requieren los errores para afinar la idea individual sobre lo que es falso y lo que es correcto, según una norma dada. Si comparamos esto con la función de los ejemplos y contraejemplos, para el aprendizaje de conceptos matemáticos, los errores juegan el papel de contraejemplos. No es suficiente que un individuo sepa lo correcto; debe saber lo que es incorrecto porque, de esta manera, se puede identificar el punto donde termina lo correcto y empieza lo incorrecto. Desde esta perspectiva, el conocimiento de acciones y procesos incorrectos es necesario. Esta práctica de conocimiento negativo completa el conocimiento de acciones y procesos correctos; es decir, la experiencia positiva. En consecuencia, los errores son esenciales para la adquisición de conocimiento negativo y, por consiguiente, son componentes necesarios del proceso de aprendizaje. Sin embargo, cometer un error no significa adquirir automáticamente experiencia negativa que pueda usarse para prevenir errores posteriores. Para usar un error de manera productiva, es necesario que un individuo pueda comprender, analizar y corregir el error y usarlo para desarrollar estrategias de prevención de errores nuevos. La descripción anterior pone en claro que la experiencia en el conocimiento negativo, con su papel positivo de errores, corresponde a una visión constructivista de aprendizaje. Mientras que el acercamiento conductista evita los errores e intenta enfatizar actividades sólo exitosas de los estudiantes; es decir, es importante sólo el conocimiento positivo. Los errores son necesarios e inevitables y los comprende como oportunidades para el aprender.

Heinze, A. (2005) afirma que aunque se aceptan errores como una parte natural del proceso de aprendizaje, para los alumnos, es desagradable incurrir en ellos, o ser sorprendidos cometiendo errores. Este hecho lo basa en dos razones; por una parte, hay una componente afectiva, es posible que el error signifique una afrenta. Por otro lado, los errores muestran evidencia de fallas en cierta competencia individual que, para los alumnos, representan desventajas al ser evaluados. Es obvio que hay una diferencia entre el manejo de error en situaciones en privado o públicamente. Si el error de un individuo se discute en el grupo, puede sentir que se le exhibe. Si el profesor discute los errores con un estudiante en situación privada, puede haber oportunidad para el progreso individual del aprendizaje. La contribución de Heinze se enfoca en aspectos cognoscitivos y afectivos del manejo del error en procesos del aula, desde la perspectiva del estudiante y del observador. Dirige su investigación a la percepción del estudiante en actividades con manejo del error en el aula. Su estudio fue guiado por las preguntas siguientes:

- ¿Cuál es la percepción de los estudiantes con respecto al manejo del error en las lecciones de matemáticas? ¿Qué piensan los estudiantes sobre la conducta del maestro cuando se les intimida por incurrir en errores en situaciones públicas?
- ¿Cómo tratan los estudiantes individualmente sus propios errores? ¿Usan los errores como una oportunidad de aprendizaje?
- ¿Qué tipo de errores son "permitidos" o "prohibidos" en la percepción de los estudiantes (En el sentido negativo, desde el punto d vista del profesor)?

Para investigar el conocimiento del estudiante relacionado con los errores Lannin J., Townsend, B. & Barker D. (2006) desarrollaron un marco conceptual que llamaron *ciclo reflexivo de análisis del error*. Describen el proceso que los estudiantes siguen cuando examinan los errores que cometen. Un estudiante reconoce que ha incurrido en un error y elige entre ignorar la fuente o considerar las causas potenciales que lo originan. Si atribuyó el error a una, o varias fuentes, el estudiante intenta reconciliarse con él para eliminar el conflicto cognoscitivo que experimenta. Después de llevar a la práctica estrategias para reconciliarse con el error lo trata con una de las tres maneras siguientes:

- Se reconcilia el error con éxito y terminan el ciclo.
- Detiene el proceso de la reconciliación sin resolverse el error y termina.
- Reconocen que la fuente original de atribución del error es incorrecta y busca otras fuentes potenciales de error.

Los autores examinaron tres preguntas importantes para aclarar cómo los estudiantes tratan el conflicto cognoscitivo que experimentan cuando examinan sus errores:

¿Qué factores contribuyen a que reconozcan sus errores?

¿A qué causas potenciales atribuyen sus errores?

¿Qué estrategias utilizan para reconciliarse con sus errores?

Las direcciones que guían el desarrollo de este trabajo se basan en el segundo y tercer incisos de los métodos de análisis de errores de Mulhern (1989), incluidos en la primera categorías dada en Rico (1994). También se toman en cuenta las estructuras de los números naturales y enteros. Se consideran, esencialmente, la sintaxis de la aritmética, la noción de operación aritmética y los procesos algorítmicos y el desarrollo de la noción de estructura numérica a través de actividades; orientaciones incluidas en Linchevsky (1995). El desarrollo de la noción de estructura numérica a través de actividades requiere de lo siguiente:

a) **Orden de las operaciones**. En pre-álgebra se puede comenzar a tratar el orden de las operaciones trabajando ejercicios que, con el uso de reglas, conduzcan a lograr la unicidad de las respuestas. La prioridad de los operadores aritméticos determina el orden en que han de realizarse las operaciones en una expresión aritmética. Esta jerarquía se determina por el proceso de abstracción que relaciona una operación con otra: la multiplicación se convierte en una síntesis de la operación aditiva y la división es la operación inversa de la multiplicación; la potencia en una síntesis de la multiplicación y la radicación es la operación inversa de la potencia. En consecuencia, potencias y raíces tienen prioridad en los cálculos, le siguen multiplicaciones y divisiones y, finalmente, sumas y restas. Si coinciden varios operadores de igual prioridad en una expresión aritmética el orden de ejecución es de izquierda a derecha, tal como se lee un texto.

En la *Tabla 1* se exhibe la prioridad de las operaciones. Las letras ***a*** y ***b*** son los operandos y representan números reales.

Operador	**Operación**	**Ejemplos**	**Prioridad**
$+$	Suma	$a+b$	3
$-$	Resta	$a-b$	
$\times$, $\cdot$, $*$	Multiplicación	$a\times b$, $a\cdot b$, $a*b$	2
$\div$, $/$	División	$a\div b$, a/b	
$\square^{\square}$, $\wedge$	Potenciación	a^{b}, $a\wedge b$	1
$\sqrt{\ }$, $\square^{\square}$, $\wedge$	Radicación	$\sqrt[b]{a}$, $a^{\frac{1}{b}}$, $a\wedge\frac{1}{b}$	

Tabla 1

Los operadores aritméticos permiten la realización de cálculos, utilizan operandos y proporcionan resultados numéricos. Los estudiantes deben procesar expresiones aritméticas, en distintas alternativas, justificando sus acciones con verificaciones numéricas, o por medio de consideraciones generales, con reglas establecidas; por ejemplo, en lo siguiente:

- Indicar el orden en que se pueden evaluar las expresiones aritméticas.
- Dado un conjunto de números, en un orden establecido, obtener diversas expresiones aritméticas que incluyan distintas operaciones.
- Dada una expresión aritmética, decidir cuándo el seguimiento del proceso de resolución de izquierda a derecha corresponde al orden convencional de las operaciones.

b) **Uso de signos de agrupación**. Los paréntesis se usan para agrupar operaciones. Se encierran los operandos para dar preferencia a la realización de las operaciones de menor prioridad y, recíprocamente, se evalúan primero las operaciones que están entre paréntesis. Si existen varios signos de agrupación anidados tienen prioridad las operaciones incluidas en que se encuentren en la parte interior. Con el propósito de evitar confusiones se pueden utilizar diferentes signos de agrupación: ( ), [ ], { }.

Por lo general, en aritmética, los paréntesis se usan en forma estática, para indicar qué operaciones deben realizarse en primer lugar. En pre-álgebra es necesario imponer una dimensión más dinámica al uso de los símbolos de agrupación, con la finalidad de preparar al estudiante a utilizar en forma más flexible estos símbolos.

c) **Transformar una expresión aritmética en otras equivalentes**. Se tiene la posibilidad de efectuar cambios en los elementos de una expresión aritmética para obtener otras equivalentes. Para comprender las propiedades que conforman la estructura de una expresión simbólica se requiere la habilidad para descomponerla en sus partes y realizar manipulaciones con ellas, antes de considerarlas en la evaluación de la expresión original. La identificación de los términos de la expresión, para los que una sustitución es correcta, es necesaria para la comprensión de la estructura de una expresión numérica.

Con base en estos lineamientos anteriores se realiza un diagnóstico y se analizan los errores de expresiones numéricas simples que incluyen operaciones aritméticas con números naturales, realizado con profesores de matemáticas de primaria, secundaria y bachillerato y también con estudiantes de los tres niveles anteriores y, además, del universitario. Los errores de los individuos se clasifican, se interpretan y se hace un análisis de las causas posibles que los originan. La presencia de errores en las clases de matemáticas, son un problema grave en la enseñanza de la matemática y de las ciencias. Es necesario tomar en cuenta la realidad de esta problemática, sus causas y sus consecuencias.

El estudio desarrollado incluye un tema de aritmética elemental, perteneciente al área de la matemática básica, necesaria para afrontar, comunicar y resolver problemas prácticos que se le presentan a cualquier individuo en su vida cotidiana; además, estos conocimientos elementales son la base fundamental para continuar el estudio de cualquier área de conocimiento, posterior a la escuela primaria. El estudio muestra que el problema de los errores aritméticos, en profesores y estudiantes, tiene gravedad extrema. En consecuencia, a partir de los resultados que se exponen y tomando en cuenta la realidad comentada, se señala la necesidad de actualizar profesores y de realizar acciones para remediar y prevenir las anomalías de los alumnos, que incidan en toda la población escolar del país; con la participación activa de profesores y demás personas implicados en la tarea educativa.

Metodología

Se propusieron a profesores y estudiantes una colección de diez expresiones numéricas para que las transformaran a sus formas más simples. En la República Mexicana se aplicaron, al menos, en dos ciudades de cada Estado, desde 1982 hasta 2005. Sin embargo, la información recogida para el presente trabajo se obtuvo de una parte de esos sujetos, de cuatro entidades federativas que están más cercanas a la capital del país. Se eligieron los estados que circundan la capital, por la cercanía y la accesibilidad para entrevistar a los sujetos. El grupo de encuestados se formó con 356 profesores de primaria, secundaria y bachillerato y con 867 estudiantes de secundaria, bachillerato y de nivel universitario. Los resultados de la selección son análogos al resto de la población encuestada. La información de la población tomada en cuenta para esta investigación se recogió en los últimos tres años.

Todos los profesores de primaria participantes estudiaron una licenciatura que los prepara para ser profesores de su nivel. No recibieron cursos de geometría analítica y cálculo en la licenciatura, los recibieron en el bachillerato. Algunos de ellos, 8%, habían estudiado otra licenciatura, o la estaban cursando.

Cerca del 85% de los profesores de secundaria habían estudiado en la Escuela Normal Superior, o en otras instituciones afines que los preparan para ser profesores del nivel medio. Éstos habían cursado geometría analítica y cálculo en la licenciatura. El 15% restante había estudiado una licenciatura en alguna rama de ingeniería.

El 67% de los profesores de bachillerato era ingenieros de diversas áreas; el 33% restante habían estudiado la Normal Superior.

En México, la educación primaria se estudia en seis años, le siguen tres de secundaria y tres de bachillerato. Los estudios específicos en matemáticas que cursaban los estudiantes están implícitos en sus respectivos niveles de escolaridad.

Las características de los individuos, considerados por niveles o áreas de estudio, están en las *Tablas 2* y *3*:

Profesores		
Prim	Primaria	31
Sec	Secundaria	176
Bach	Nivel Medio Superior (Bachillerato)	149
Total		356

Tabla 2

Estudiantes		
Sec	Secundaria	220
Bach	Nivel Medio Superior (Bachillerato)	471
Quím	Ingeniería Química	50
Comp	Licenciatura Computación	84
Mat	Licenciatura Matemáticas	42
Total		867

Tabla 3

Se aplicó un examen que incluyó diez expresiones aritméticas. Se pidió a los sujetos que registraran por escrito los cálculos realizados y los resultados. Las expresiones aritméticas incluidas en el examen son las siguientes:

1. $3 + 2 \times 4 - 10 \div 2$	*5.* $2 \times 3 + 5 \times 6 - 12 \div 4$	*9.* $\sqrt{4} \times 2 + 2^2 \times \sqrt{9}$
2. $2 + 6 \div 2 + 2 \times 3$	*6.* $8 \div 4 + 10 \div 2 - 2 \times 2$	*10.* $3 + \sqrt{9} + \sqrt{4} \times 2^2$
3. $8 - 2 \times 4 + 3 \times 4$	*7.* $\mathbf{2 + 2^2 \times 3 - 2^2 \times 3 \div 4}$	
4. $8 - 4 \div 2 + 6 \div 2$	*8.* $2 \times 3^2 + 2^2 \times 4 + 2 \times 3$	

¿Por qué se eligieron estos ejercicios? En la década de los ochenta se establecieron maestrías abiertas, en matemática educativa, en diez estados del país, con asesorías en fines de semana. Hubo ocasión de relacionarse con profesores, estudiantes de estas maestrías, en cursos de matemáticas de los niveles mencionados. Los errores aritméticos que presentaban los profesores motivaron realizar el estudio. Se diseñaron expresiones numéricas que incluyen las operaciones usuales. Se eligieron combinaciones diversas de estas operaciones en distintas posibilidades de orden. Se consideró el ejercicio *7* para el estudio porque es uno de los que presenta mayor diversidad de errores.

Se entrevistaron algunos individuos para aclarar dudas y ampliar la información sobre el desarrollo de las respuestas.

En lo que sigue, se analizan los errores, sólo para la expresión numérica *7*, que incluye una suma, una resta, dos multiplicaciones, una división y dos potencias, para transformarla a su forma más simple. Dada la sencillez del ejercicio, objeto de estudio, se analizan los errores de carácter técnico, de cálculo, de manipulación de números o derivados de la ejecución de algoritmos básicos. Son errores causados por un aprendizaje deficiente de conceptos previos, por fallas en el conocimiento de contenidos y procedimientos al realizar la tarea, por desconocimiento de algoritmos, por procedimientos incorrectos en la aplicación de técnicas o por un dominio deficiente en el uso de símbolos.

Del análisis de las tareas se desprendieron una serie de categorías para el tratamiento de errores aritméticos, desde los puntos de vista teórico y metodológico, en la perspectiva de la matemática educativa.

Después de examinar los resultados que, en número y variedad, presentan, tanto profesores como estudiantes, observados en un ejemplo de matemática elemental, es inminente reflexionar sobre la problemática de la enseñanza de la asignatura en los niveles escolares de nuestro país. Un caso extremo fue un grupo de 87 profesores de primaria de zonas suburbanas que al resolver el ejercicio *7* llegaron a 21 resultados diferentes y ninguno fue el correcto. La razón más frecuente que exponen es que “expresiones numéricas tan complicadas no se enseñan en el nivel primario”.

Causas de los errores

Los errores de los encuestados en el ejercicio *7* se originan en los siguientes causantes:

1. Lenguaje hablado y lectura de lo escrito.
2. Visión de lo escrito.
3. Tratamiento de las operaciones.

a) **Lenguaje hablado y lectura de lo escrito**. En la percepción de lo que se escribe persiste una práctica verbal de lo escrito. ¿Cómo leen los participantes?, ¿por qué leen en esa forma y no en otra? Leen y escriben; sin embargo, no leen como escriben. Como lectores identifican los objetos y los ven como en un texto. Lo importante es el sentido inverso, como escritores. Cuando escriben, saben lo que quieren expresar y suponen que el lector también lo tiene presente en la mente, en forma explícita. La lengua usual escrita es "la misma" que la lengua usual hablada. La lengua matemática escrita difiere de la lengua matemática hablada.

Lo anterior aclara el encadenamiento de la igualdad del *Ejemplo 1*. El entrevistado, después de obtener las potencias, resuelve las operaciones, de izquierda a derecha, a medida que lee en forma continua. Escribe como lee.

Ejemplo 1:

$$2 + 2^2 \times 3 - 2^2 \times 3 \div 4 = 2+4 = 6 \times 3 = 18 - 4 = 14 \times 3 = 42 \div 4 = 10 \cdot 5$$

Otra cosa es la diferencia entre un texto escrito y la trascripción de un discurso; por ejemplo, en la expresión $2 \times 5 + 2^2 \times 3$ se observa algo que pertenece al campo de lo escrito y necesita una transformación para una presentación verbal. Puede "leerse" como sigue: "Sumar el producto de dos por cinco, más el producto de dos al cuadrado multiplicado por tres". Una lectura de la misma expresión, como se lee un texto, es la que sigue: "Dos multiplicado por cinco más dos al cuadrado multiplicado por tres". Esta forma ambigua de lectura propicia interpretarla en las siguientes formas:

$(2 \times 5 + 2)^2 \times 3$ $\quad$ $(2 \times 5 + 2^2) \times 3$ $\quad$ $2 \times (5 + 2)^2 \times 3$

$2 \times (5 + 2^2) \times 3$ $\quad$ $2 \times (5 + 2^2 \times 3)$ $\quad$ $2 \times 5 + 2^2 \times 3$

A diferencia de un texto, que se lee de izquierda a derecha, para leer una expresión numérica, o una fórmula matemática, previamente, se necesita una "forma de verla" bajo la identificación de dos objetos: como un número y como una operación. No sólo verla en la primera forma, también percibir que las operaciones son objetos y que esos objetos producen un número. En el ejemplo, se trata de ver cada producto 2×5 o $2^2 \times 3$ como un número y como una operación. En la mayoría de los casos la potencia 2^2 se percibe como un objeto; sin embargo, con productos y cocientes no sucede de la misma manera.

Un profesor de bachillerato lee el *Ejemplo 2* como si se tratara, estrictamente, de la lectura de un texto, de izquierda a derecha, paso a paso (Comete un error al elevar al cuadrado 46):

Ejemplo 2:

$2 + 2^2 \times 3 - 2^2 \times 3 \div 4 =$

$2+2=4$ | $48-2=46$
$4^2=16$ | $46^2=1116$
$16 \times 3 = 48$ | $1116 \times 3 = 3348$

$$\begin{array}{r|l} 4 & \overline{3348} \\ & 14 \\ & 28 \\ & 0 \end{array} \quad 0837$$

R=837

Algoritmo:

$[(2 + 2)^2 \times 3 - 2]^2 \times 3 \div 4$

b) **Visión de lo escrito**. Los sujetos leen a partir de una visión, ¿cómo ven la expresión numérica?, ¿por qué la ven en esa forma y no en otra? Se puede constatar que la mayoría no puede leer correctamente las expresiones presentadas. Proponen como respuesta algo que pertenece al lenguaje natural escrito, algo que representa una diferencia enorme con relación a lo que se lee.

Lo que entendemos por “visión” es la formación de una unidad operativa; es el hecho de percibir, en una expresión, un arreglo de bloques elementales. Cada bloque expresa una operación completa; se trata de una percepción operativa. Lo que aparece como visión es la percepción de estos grupos, de las unidades operativas, de los bloques numéricos elementales. En una expresión se deben identificar bien los objetos: los números y las operaciones de dos tipos, explícitas e implícitas. Cuando los participantes se enfrentan a la expresión 2^2 hay dos tendencias: los que la leen como una operación y los que la ven como un objeto. Normalmente, la escritura de una operación supone dos números y un símbolo. Sin embargo, en la expresión 2^2, el cuadrado es sólo el producto implícito 2**×**2; es un producto que se percibe únicamente por la ubicación de los dígitos. Se podría leer 22, de no ser por la posición de cada uno de los símbolos “2”. A la par, un grupo elemental se compone de dos números y un signo; por ejemplo, en la operación 2+3 el signo “+” está entre 2 y 3; a diferencia de la escritura polaca, el signo de operación se escribe antes; por ejemplo, +(2, 3); equivalente a 2 + 3. Otro caso semejante es la barra de una fracción, que no respeta el orden de escritura. Algo semejante ocurre con $4+\frac{2}{3}$.

El *Ejemplo 3* exhibe los comentarios de un estudiante de la licenciatura en matemáticas, relacionados con la visión de lo escrito y reflejan problemas de entrada por la forma de seleccionar los bloques numéricos primarios, como resultado de una visión previa de lo escrito, al resolver la expresión 1: $3 + 2 \times 4 - 10 \div 2$:

Ejemplo 3:

Lo siento vicente pero no puedo hacer estas operaciones si no existen símbolos de agrupación en las operaciones ya que existirían resultados diferentes para una sola operación, por ejemplo en la 1 si considero $\frac{(3+2)(4-10)}{2} = -15$ y si considero $3+(2\times 4) - \frac{10}{2} = 6$

Hay varias interpretaciones que tiene para la lectura y escritura del ejercicio *7*. Una visión correcta de lo escrito conduce a identificar tres bloques únicos. La expresión del *Ejemplo 4* puede leerse en forma correcta, y de manera general, como sigue: “A la suma de dos términos se le resta un tercero; el primero es un número, el segundo es el producto de una potencia por otro número y el tercero es una expresión compuesta por el producto de una potencia multiplicada por un número dividido por otro”. La expresión se compone de tres bloques. En los dos últimos se debe realizar un conjunto de operaciones para trasformarlas en números.

Ejemplo 4.

$2 + 2^2 \times 3 - 2^2 \times 3 \div 4$

Bloques correctos

$(2) + (2^2 \times 3) - (2^2 \times 3 \div 4)$

Sin embargo, no lo ven como texto escrito. Escriben como hablan y, recíprocamente, producen como se crea un discurso, no como se obtiene un escrito. El lenguaje matemático escrito es diferente al lenguaje matemático leído. Si se tiene algo escrito no se cuenta con el uso del lenguaje hablado para la representación. Todas las particularidades de lo que se escribe en matemáticas corresponden a una lectura; otras veces, se necesita una visión previa, antes de una representación verbal, o antes de expresar el ejercicio con un conjunto de operaciones, dispuestas en un orden establecido. El *Ejemplo 5* ilustra una identificación equivocada de bloques por una visión incorrecta de lo escrito.

Ejemplo 5:

Bloques incorrectos

$\boxed{\boxed{2 + 2^2} \times 3 - 2^2} \times 3 \div 4$

c) **Tratamiento (Operaciones)**. Es la formación de un texto matemático. Las expresiones presentadas no tienen verbos, son términos, objetos o expresiones. No se establece alguna relación entre dos de ellos. Al utilizar un verbo se producen expresiones con texto, por ejemplo, igualdades, desigualdades, o cadenas de éstas. Los verbos se introducen para construir y mantener el hilo conductor del discurso matemático, para obtener relaciones matemáticas. En forma hablada se refiere a producir y formar un discurso. Por ejemplo,

- ¿Es correcta, o incorrecta, la igualdad $2 \times 5 + 2^2 \times 3 = 22$?
- ¿Cuál de las dos relaciones siguientes es incorrecta:

i). $2 \times 5 + 2^2 \times 3 + 2 \times (5 + 2^2) \times 3 = (2 \times 5 + 2^2) \times 3 + 2 \times (5 + 2^2 \times 3)$

ii). $(2 \times 5 + 2)^2 \times 3 < 2 \times (5 + 2)^2 \times 3$.

- Ordenar los valores numéricos de las seis expresiones siguientes en forma ascendente:

$(2 \times 5 + 2)^2 \times 3$, $(2 \times 5 + 2^2) \times 3$, $2 \times (5 + 2)^2 \times 3$,

$2 \times (5 + 2^2) \times 3$, $2 \times (5 + 2^2 \times 3)$, $2 \times 5 + 2^2 \times 3$.

En resumen, para interpretar los errores, para precisar que no son accidentes, debemos saber que la enseñanza de la matemática reclama la introducción de la especificidad de una escritura diferente a la escritura de un texto en lengua castellana. La ausencia de esta escritura propicia la presencia de errores. Necesitamos precisar los objetos matemáticos, saber cómo identificarlos y reconocer entidades establecidas por agrupaciones de números; por ejemplo, números naturales de un sólo dígito, de dos dígitos o raíces, identificados como objetos.

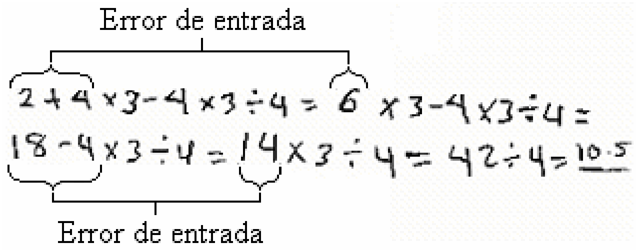
Hace falta precisar que la matemática introduce una diferencia verdaderamente profunda con respecto a un texto; es decir, lo que hace que una expresión sea un registro numérico, donde los tratamientos son diferentes a los del lenguaje natural. Si tenemos objetos de la misma prioridad, si no tienen un carácter específico, lo mismo que en una lengua, se leen uno seguido del otro. Cuando esto se propone hay un sentido que va de la visión a los tratamientos, pasando por la identificación de objetos. La expresión examinada tiene tres objetos y dos son compuestos. Se tienen dos causas y dos tratamientos, identificación de los objetos y la lectura de un texto.

Tipos de errores

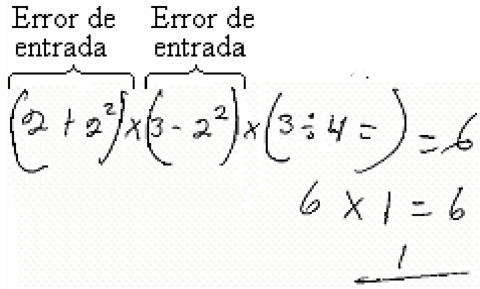
a) **Errores de entrada**. Se presentan en la lectura de texto. Son errores de visión. Algunos son más frecuentes en la lectura de una expresión numérica. Aún cuando los encuestados realizan los cálculos en forma correcta, operan una expresión diferente a la que se propone. Cuando trabajan cambian la expresión. Realizan bien, paso a paso, lo que hace un tratamiento; sin embargo, el procedimiento no corresponde a la expresión propuesta.

La transformación de la expresión requiere de un proceso de evolución. No es posible realizarla de sola una vez. El procedimiento sigue etapas determinadas por los bloques numéricos, los bloques operativos. Se requiere saber cómo identificar estos bloques numéricos. Se debe formar un algoritmo de cálculo con una sucesión de etapas, donde la salida de una es la entrada de la siguiente. En el camino se encuentran errores. Los *Ejemplos 6* y *7* muestran cambios en el inicio de la primera etapa, son cambios en la entrada que inducen errores.

Ejemplo 6:



Ejemplo 7:

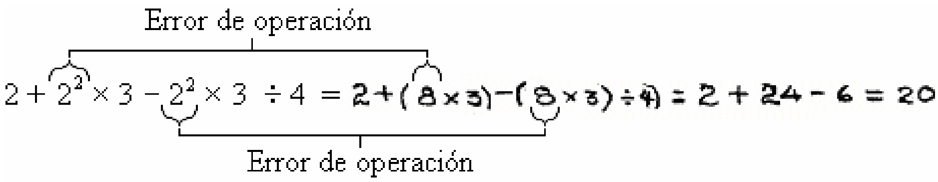


b) **Errores de operación**. Se encuentran entre los errores que alteran la repuesta. Consisten en distorsionar el proceso de obtener el resultado de cada operación realizada en forma independiente. Algunos ejemplos son los siguientes:

- Realizar cálculos en forma incorrecta.
- Omitir o hacer cambios en los signos de las operaciones o en los elementos numéricos que intervienen en la expresión.
- Infringir las reglas de la estructura numérica que incluye el ejercicio.
- Uso inadecuado de los elementos neutro, idéntico, simétrico o inverso.

El *Ejemplo 8* ilustra un error de operación al calcular el cuadrado de un número.

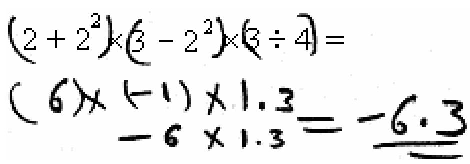
Ejemplo 8:



En el *Ejemplo 9* se observan dos errores de entrada en las elecciones de los bloques

$$2 + 2^2 = 6 \quad y \quad 3 - 2^2 = -1.$$

Ejemplo 9:



Errores de operación:

- Luego divide 3 ÷ 4. Intercambia dividendo y divisor y obtiene: 4 ÷ 3 = 1.3
- Sorprende la forma equivocada en que el estudiante de bachillerato entrevistado realiza la multiplicación – 6 × 1.3:

Escribe (– 6 × 1).3 = (– 6).3. De aquí cambia (– 6).3 por 6.3.

El *Ejemplo 10* muestra que se presentan múltiples tipos de errores en la resolución del ejercicio. Esto ocurre con frecuencia. Se señalan las dos clases de errores examinados; ocurrieron al expresar retóricamente el procedimiento. Corresponden a un número limitado de esquemas de respuesta.

Ejemplo 10:

$2 + 2^2 \times 3 - 2^2 \times 3 \div 4 = 7$

dos mas dos al cuadrado son cuatro al cuadrado por tres son doce al cuadrado menos dos al cuadrado son diez por tres son treinta entre cuatro = 7

El procedimiento del sujeto es el siguiente:

“Dos más dos al cuadrado son cuatro al cuadrado”, $(2 + 2)^2 = 4^2$:

$\mathbf{(2 + 2)^2} \times 3 - 2^2 \times 3 \div 4 = 4^2 \times 3 - 2^2 \times 3 \div 4.$

“Cuatro al cuadrado por tres son doce al cuadrado”, $4^2 \times 3 = (4 \times 3)^2 = 12^2$:

$4^2 \times 3 - 2^2 \times 3 \div 4 = \mathbf{(4 \times 3)}^2 - 2^2 \times 3 \div 4 = 12^2 - 2^2 \times 3 \div 4.$

“Doce al cuadrado menos dos al cuadrado son diez”, $12^2 - 2^2 = 10$:

$12^2 - 2^2 \times 3 \div 4 = (\mathbf{12^2 - 2^2}) \times 3 \div 4 = 10 \times 3 \div 4 = 30 \div 4.$

“Diez por tres son treinta”, $10 \times 3 = 30.$

“Treinta entre cuatro son siete”, $30 \div 4 = 7.$

Error de entrada

$$\overbrace{4^2 \times 3} - 2^2 \times 3 \div 4 = \overbrace{(2+2)^2} - 2^2 \times 3 \div 4 =$$

Error de entrada

$$\overbrace{4^2 \times 3} - 2^2 \times 3 \div 4 = \overbrace{(4 \times 3)^2} - 2^2 \times 3 \div 4 =$$

Error de entrada

$$\overbrace{12^2 - 2^2} \times 3 \div 4 = \underbrace{\overbrace{(12^2 - 2^2)}} \times 3 \div 4 = \underbrace{10} \times 3 \div 4 = 7$$

Error de operación

Finalmente, comete el error de operación $30 \div 4 = 7$.

c) **Errores de escritura**. Son errores de una salida de etapa, no de salida del proceso completo. Se presentan al comunicar el procedimiento de transformación de la expresión numérica. Dos son las formas de comunicación: escrita o verbal. De los dos tipos de errores de salida, escritos o verbales, en este trabajo sólo se consideran los primeros, puesto que los encuestados presentaron en forma escrita los ejercicios propuestos. En lo que sigue se les nombra *errores de escritura*. Se ilustran en los *Ejemplos 11* y *12*.

Ejemplo 11:

$$\overbrace{3\times4+2=3\times4}^{\text{Error de escritura}}=\overbrace{12+2=14}^{\text{No hay error de escritura}}$$

$$\underbrace{3\times4=12}_{\text{Error de escritura}}$$

Ejemplo 12:

$$\overbrace{2+2^2\times3-2^2\times3\div4=2+12}^{\text{Error de escritura}}=\overbrace{14-4\times3=14-12\div4}^{\text{Error de escritura}}=14-3=11$$

$$\underbrace{2+12=14-4\times3}_{\text{Error de escritura}}\qquad\underbrace{14-12\div4=14-3}_{\text{Error de escritura}}$$

Los *Ejemplos 13* y *14* muestran múltiples tipos de errores en una misma expresión.

Ejemplo 13:

$$7.\ \ 2+2^2\times3-2^2\times3\div4=41.8$$

$$11.2\times3=33.6-3=30.6\times4=122-4\times3=367.2\div4=91.8$$

Incorpora el número de orden del ejercicio *7* al cálculo. Cambia la expresión $7.\ \ 2+2^2\times3-2^2\times3\div4$ por la siguiente: $7.2+2^2\times3-2^2\times3\div4$.

Calcula $7.2 + 2^2 = 11.2$.

Multiplica $11.2\times3 = 33.6$.

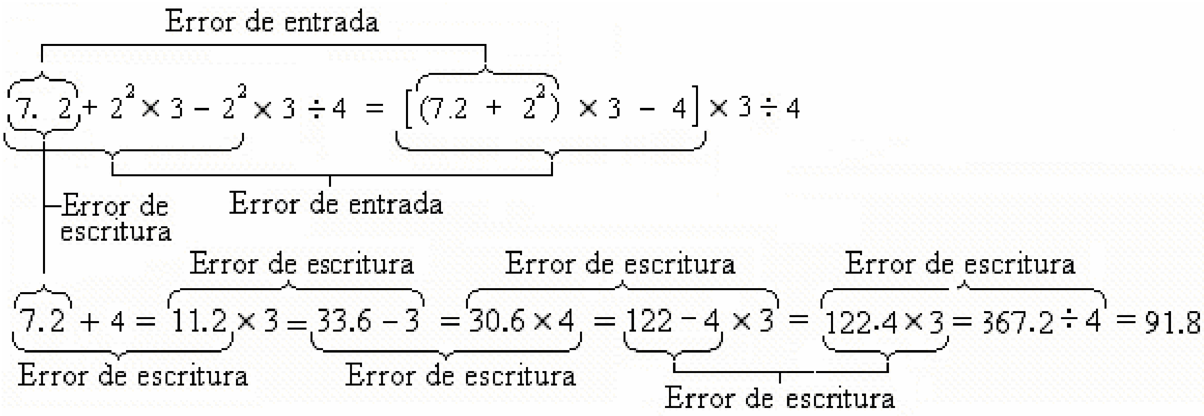
Resta $33.6 - 3 = 30.6$.

Luego, multiplica correctamente $30.6\times4 = 122.4$; sin embargo, cambia 122.4 por la forma equivocada $122 - 4$.

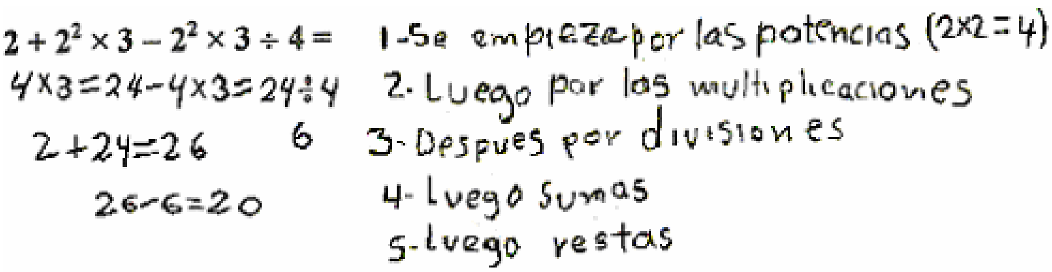
Realiza la multiplicación $122.4\times3 = 367.2$.

Finalmente, divide $367.4\div4 = 91.8$.

El algoritmo es el siguiente:



Ejemplo 14:



$2+2^2\times 3-2^2\times 3\div 4=$

4x3=24−4x3=24÷4

2+24=26 6

26−6=20

1-Se empieza por las potencias (2x2=4)

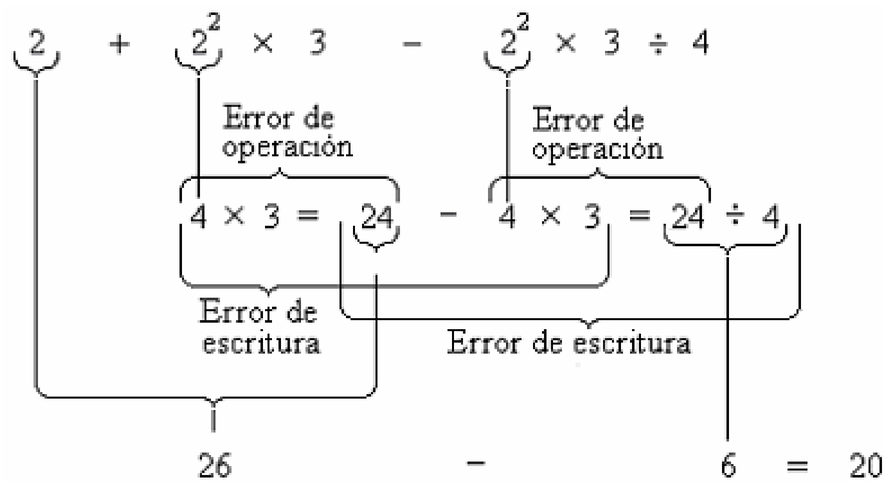
2. Luego por las multiplicaciones

3- Despues por divisiones

4- luego sumas

5- luego restas

Expresa el algoritmo retóricamente. Describe un algoritmo de cálculo; sin embargo, no tiene claridad en el orden de ejecución de las operaciones; da preferencia a una de dos operaciones tienen una misma prioridad, a la multiplicación con respecto a la división, y a la suma con relación a la sustracción. Realiza correctamente el cuadrado $2^2 = 2 \times 2 = 4$ y en forma equivocada hace dos veces el cálculo $4 \times 3 = 24$.



Descripción de los errores de entrada

Del total de profesores, 356, sólo el 24.4% y de los 867 estudiantes, sólo el 16.8% resolvieron correctamente el ejercicio *7*.

En las *Tablas 4* y *5* se exponen los números de casos y porcentajes de estudiantes y profesores que resolvieron correctamente el mismo ejercicio. Los porcentajes de estas tablas, y todas las que siguen que registran datos, se calcularon con relación a cada grupo de individuos.

Profesores		
	%	**N°. Casos**
Prim	0	0/31
Sec	12.5	22/176
Bach	23.5	35/149

Tabla 4

Estudiantes		
	%	**N°. Casos**
Sec	6.4	14/220
Bach	11.7	55/471
Quím	22.0	11/50
Comp	71.4	60/84
Mat	14.3	6/42

Tabla 5

Las columnas de la izquierda de las *Tablas 6* a la *19* expresan el orden de prioridad elegida por los participantes y, con ello, los errores de entrada. **A_1** es el algoritmo que conduce al resultado correcto. También se indican los porcentajes obtenidos en cada grupo de individuos

Algoritmo A_1:
$2 + 2^2\times 3 - 2^2\times 3\div 4$

$$\overbrace{2}^{\text{Primer Boque}} + \overbrace{2^2\times 3}^{\text{Segundo Bloque}} - \overbrace{2^2\times 3\div 4}^{\text{Tercer Bloque}}$$

a. Potencias	$= 2 + 4\times 3 - 4\times 3\div 4$	$2+4\times3-4\times3\div4=$
b. Multiplicaciones y divisiones	$= 2 + 12 - 3$	$2+12-12\div4=$ $2+12-3=$
c. Sumas y restas	$= 11$	$14-3=11$

Profesores	Prim	Sec	Bach
%	0	14.8	28.9

Estudiantes	Sec	Bach	Quím	Comp	Mat
%	11.4	11.7	20.0	75.0	19.0

Tabla 6

Aun cuando los participantes eligen el algoritmo correcto, parte de ellos presentaron errores en el proceso de resolución. A continuación se exhiben los tipos de errores del ejercicio *7*. Las *Tablas*, de la *7* a la *19* y las *Gráficas 1* y *2* describen ejemplos, errores y sus porcentajes en las formas diferentes que eligieron el orden en que realizaron las operaciones en el procedimiento para afrontar la reducción de la expresión a su forma más simple. Corresponden a la categoría de errores de entrada. Se relación con la forma en que eligen los bloques elementales que guían el procedimiento, a partir de sus percepciones operativas.

Algoritmo A$_2$: [(2 + 2^2) × 3 – 2^2] × 3 ÷ 4		$\underbrace{\left[\overbrace{\left(2+2^2\right)}^{\text{Error de entrada}}\times 3-2^2\right]}_{\text{Error de entrada}}\times 3\div 4$
a. Potencias	= [(2 + 4) × 3 – 4] × 3 ÷ 4	$2+2^2x3-2^2x3\div 4=$ $2+4x3-4x3\div 4=$ $6x3-4x3\div 4=$ $18-4x3\div 4=$ $14x3\div 4=$ $42\div 4=10.5$
b. Suma	= (6×3 – 4) × 3 ÷ 4	
c. Primera multiplicación	= (18 – 4) × 3 ÷ 4	
d. Resta	= 14 × 3 ÷ 4	
e. Segunda multiplicación	= 42 ÷ 4	
f. División	= 10.5	

Profesores	**Prim**	**Sec**	**Bach**		**Estudiantes**	**Sec**	**Bach**	**Quím**	**Comp**	**Mat**
%	48.4	38.6	51.7		**%**	80.5	73.5	66.0	15.5	52.4

Tabla 7

Algoritmo A$_3$: (2 + 2^2) × 3 – 2^2 × 3 ÷ 4		$\overbrace{\left(2+2^2\right)}^{\text{Error de entrada}}\times 3-2^2\times 3\div 4$
a. Potencias	= (2 + 4) × 3 – 4 × 3 ÷ 4	$2+2^2\times 3-2^2\times 3\div 4=$ $=2+4\times 3-4\times 3\div 4$ $=6\times 3-4\times 3\div 4$ $=18-12\div 4$ $=18-3=15$ //
b. Suma	= 6 × 3 – 4 × 3 ÷ 4	
c. Ambas multiplicaciones y división	= 18 – 3	
d. Resta	= 15	

Profesores	**Prim**	**Sec**	**Bach**		**Estudiantes**	**Sec**	**Bach**	**Quím**	**Comp**	**Mat**
%	16.1	12.5	4.0		**%**	0.5	1.7	0	1.2	0

Tabla 8

Algoritmo A$_4$: (2 + 2^2 × 3 – 2^2 × 3) ÷ 4		$\overbrace{\left(2+2^2\times 3-2^2\times 3\right)}^{\text{Error de entrada}}\div 4$
a. Potencias	= (2 + 4 × 3 – 4 × 3) ÷ 4	$2+2^2\times 3-2^2\times 3\div 4=\frac{1}{2}$ $2+4\times 3-4\times 3\div 4$ $2+12-12\div 4$ $\frac{14-12}{4}=\frac{2}{4}$
b. Ambas multiplicaciones	= (2 + 12 – 12) ÷ 4	
c. Suma y resta	= 2 ÷ 4	
d. División.	= 0.5	

Profesores	**Prim**	**Sec**	**Bach**		**Estudiantes**	**Sec**	**Bach**	**Quím**	**Comp**	**Mat**
%	6.5	14.2	3.4		**%**	2.3	4.5	0	2.4	7.1

Tabla 9

Algoritmo A $_5$: **$[(2 + 2^2) \times 3 - 2^2 \times 3] \div 4$**		$\underbrace{[\overbrace{(2+2^2)}^{\text{Error de entrada}}\times 3 - 2^2\times 3]}_{\text{Error de entrada}} \div 4$
a. Potencias	$= [(2 + 4) \times 3 - 4 \times 3] \div 4$	$2 + 2^2 \times 3 - 2^2 \times 3 \div 4 =$
b. Suma	$= (6 \times 3 - 4 \times 3) \div 4$	$2 + 4 \times 3 - 4 \times 3 \div 4$
c. Ambas multiplicaciones	$= (18 - 12) \div 4$	$6 \times 3 - 4 \times 3 \div 4$
d. Resta	$= 6 \div 4$	$18 - 12 \div 4$
e. División.	$= 1.5$	$6 \div 4 = 1.5$

Profesores	**Prim**	**Sec**	**Bach**
%	9.7	8.0	1.3

Estudiantes	**Sec**	**Bach**	**Quím**	**Comp**	**Mat**
%	0	2.5	4.0	1.2	0

Tabla 10

Algoritmo A $_6$: **$(2 + 2^2) \times (3 - 2^2) \times 3 \div 4$**		$\overbrace{(2+2^2)}^{\text{Error de entrada}} \times \overbrace{(3-2^2)}^{\text{Error de entrada}} \times 3 \div 4$
a. Potencias	$= (2 + 4) \times (3 - 4) \times 3 \div 4$	$2 + 2^2 \times 3 - 2^2 \times 3 \div 4 =$
b. Suma y resta	$= 6 \times (-1) \times 3 \div 4$	$(2 + 2^2)(3 - 2^2)(3/4) =$
c. Ambas multiplicaciones	$= -18 \div 4$	$(6)(-1)(3/4) =$
d. División.	$= -4.5$	$-\frac{18}{4} = -\frac{9}{2}$

Profesores	**Prim**	**Sec**	**Bach**
%	0	8.0	3.4

Estudiantes	**Sec**	**Bach**	**Quím**	**Comp**	**Mat**
%	0.9	2.3	10.0	3.6	9.5

Tabla 11

Algoritmo A $_7$: **$(2 + 2^2 \times 3 - 2^2) \times 3 \div 4$**		$\overbrace{(2 + 2^2 \times 3 - 2^2)}^{\text{Error de entrada}} \times 3 \div 4$
a. Potencias	$= (2 + 4 \times 3 - 4) \times 3 \div 4$	$2 + 2^2 \times 3 - 2^2 \times 3 \div 4 =$
b. Primera multiplicación	$= (2 + 12 - 4) \times 3 \div 4$	$(2 + 12 - 4)(\frac{3}{4}) =$
c. Suma y resta	$= 10 \times 3 \div 4$	$(10)(\frac{3}{4}) = \boxed{\frac{15}{2}}$
d. Segunda multiplicación y división.	$= 7.5$	

Profesores	**Prim**	**Sec**	**Bach**
%	3.2	1.1	4.7

Estudiantes	**Sec**	**Bach**	**Quím**	**Comp**	**Mat**
%	0.5	0	0	0	7.1

Tabla 12

Algoritmo A_8: **$2 + (2^2 \times 3 - 2^2 \times 3) \div 4$**	$2+\overbrace{\left(2^2\times 3-2^2\times 3\right)}^{\text{Error de entrada}}\div 4$	
a. Potencias	$= 2 + (4 \times 3 - 4 \times 3) \div 4$	$2+2^2\times3-2^2\times3\div4=2$ $2+(12-12)\div4=$
b. Ambas multiplicaciones	$= 2 + (12 - 12) \div 4$	
c. Resta	$= 2 + 0 \div 4$	
d. División	$= 2 + 0$	
e. Suma.	$= 2$	

Profesores	**Prim**	**Sec**	**Bach**		**Estudiantes**	**Sec**	**Bach**	**Quím**	**Comp**	**Mat**
%	3.2	0.6	0.7		**%**	0	0	0	0	0

Tabla 13

Algoritmo A_9: **$2 + 2^2 \times (3 - 2^2 \times 3 \div 4)$**	$2+2^2\times\overbrace{\left(3-2^2\times 3\div 4\right)}^{\text{Error de entrada}}$	
a. Potencias	$= 2 + 4 \times (3 - 4 \times 3 \div 4)$	$2+2^2\times3-2^2\times3\div4=2$ $2+4\times\left(\cancel{3}-\frac{\cancel{4}\times\cancel{3}}{4}\right)=$
b. Segunda multiplicación y división	$= 2 + 4 \times (3 - 3)$	
c. Resta	$= 2 + 4 \times 0$	
d. Primera multiplicación	$= 2 + 0$	
e. Suma.	$= 2$	

Profesores	**Prim**	**Sec**	**Bach**		**Estudiantes**	**Sec**	**Bach**	**Quím**	**Comp**	**Mat**
%	0	0	0.7		**%**	0	0	0	0	2.4

Tabla 14

Algoritmo A_{10}: $[(\mathbf{2+2})^2 \times \mathbf{3} - \mathbf{2^2} \times \mathbf{3}] \div \mathbf{4}$	$\overbrace{\left[\underbrace{(2+2)^2}_{\text{Error de entrada}}\times 3-2^2\times 3\right]}^{\text{Error de entrada}}\div 4$	
a. Suma	$= (4^2 \times 3 - 2^2 \times 3) \div 4$	$2+2^2\times3-2^2\times3\div4=$ $4^2\times3-2^2\times3=$ $48-12\div4=$ $36\div4=9$
b. Potencias y multiplicaciones	$= (48 - 12) \div 4$	
c. Resta	$= 36 \div 4$	
d. División	$= 9$	

Profesores	**Prim**	**Sec**	**Bach**		**Estudiantes**	**Sec**	**Bach**	**Quím**	**Comp**	**Mat**
%	0	0	0.7		**%**	0	0	0	0	2.4

Tabla 15

Algoritmo A $_{11}$**:**
[(2 + 2) ^{2} **× 3 – 2]** ^{2} **× 3 ÷4**

$$\overbrace{\left[\underbrace{(2+2)^2}_{\text{Error de entrada}}\times 3-2\right]^2}^{\text{Error de entrada}}\times 3\div 4$$

a. Suma	$= (4^2 \times 3 - 2)^2 \times 3 \div 4$	$2+2^2\times 3-2^2\times 3\div 4=$
b. Primera potencia	$= (16 \times 3 - 2)^2 \times 3 \div 4$	$2+2=4$ $\quad 46^2=2116$
c. Primera multiplicación	$= (48 - 2)^2 \times 3 \div 4$	$4^2=16$ $\quad 1116\times 3=6348$
d. Resta	$= 46^2 \times 3 \div 4$	$16\times 3=48$ $\quad 6348\div 4=1587$
e. Segunda potencia	$= 2116 \times 3 \div 4$	$48-2=46$ $\quad$ R=1587
f. Segunda multiplicación y división	$= 1587$	

Profesores	Prim	Sec	Bach
%	0	0	0

Estudiantes	Sec	Bach	Quím	Comp	Mat
%	1.8	1.1	10.0	0	0

Tabla 16

Algoritmo A $_{12}$**:**
[(2 + 2) ^{2} **× 3 – 2** ^{2}**] × 3 ÷ 4**

$$\overbrace{\left[\underbrace{(2+2)^2}_{\text{Error de entrada}}\times 3-2^2\times 3\right]}^{\text{Error de entrada}}\div 4$$

a. Suma	$= (4^2 \times 3 - 2^2) \times 3 \div 4$	$2+2^2\times 3-2^2\times 3\div 4=33$
b. Potencias	$= (16 \times 3 - 4) \times 3 \div 4$	16 $\quad$ 48
c. Primera multiplicación	$= (48 - 4) \times 3 \div 4$	44
d. Resta	$= 44 \times 3 \div 4$	132
e. Segunda multiplicación y división	$= 33$	$33=33$

Profesores	Prim	Sec	Bach
%	0	0	0

Estudiantes	Sec	Bach	Quím	Comp	Mat
%	0.9	1.9	0	0	0

Tabla 17

Algoritmo A $_{13}$**:**
(2 + 2) ^{2} **× 3 – 2** ^{2} **× 3 ÷ 4**

$$\overbrace{(2+2)^2}^{\text{Error de entrada}}\times 3-2^2\times 3\div 4$$

a. Suma	$= 4^2 \times 3 - 2^2 \times 3 \div 4$	$2+2^2\times 3-2^2\times 3\div 4=$
b. Potencias	$= 16 \times 3 - 4 \times 3 \div 4$	$4^2\times 3-2^2\times 3\div 4=$
c. Multiplicaciones y división	$= 48 - 3$	$16\times 3-4\times 3\div 4=$
d. Resta	$= 45$	$48-3=45$

Profesores	Prim	Sec	Bach
%	0	0	0

Estudiantes	Sec	Bach	Quím	Comp	Mat
%	0.5	0.4	4.0	0	0

Tabla 18

Se asigna el símbolo A_{14} si el participante utilizó dos algoritmos que conducen a dos soluciones diferentes para el mismo ejercicio.

(A_1) **(A_4)**

$$(2)+(2^2\times 3)-(2^2\times 3)\div 4 =$$
$$2+12-\frac{12}{4}=2+12-3=14-3=11$$

$$[2+(2^2x3)-(2^2x3)]\div 4, \quad \frac{2}{4}=\frac{1}{2}$$
$$2+12-12$$

(A_4) **(A_3)**

$$2+2^2\times 3-2^2\times 3\div 4=$$
$$2+4x3-4x3\div 4=2\div 4=2$$

$$2+4\times 3-4\times 3\div 4$$
$$18-3=15$$

Profesores	Prim	Sec	Bach
%	12.9	2.3	0.7

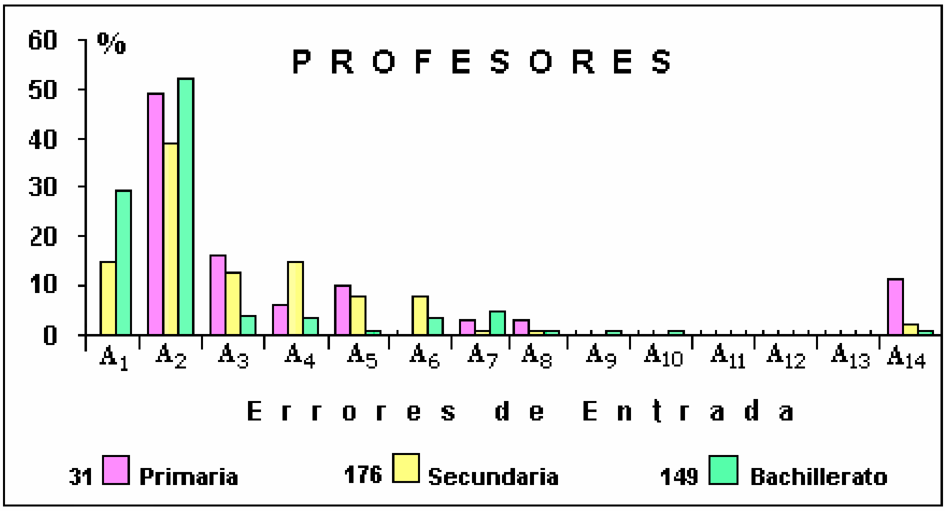
Estudiantes	Sec	Bach	Quím	Comp	Mat
%	0.9	0.4	0	1.2	0

Tabla 19

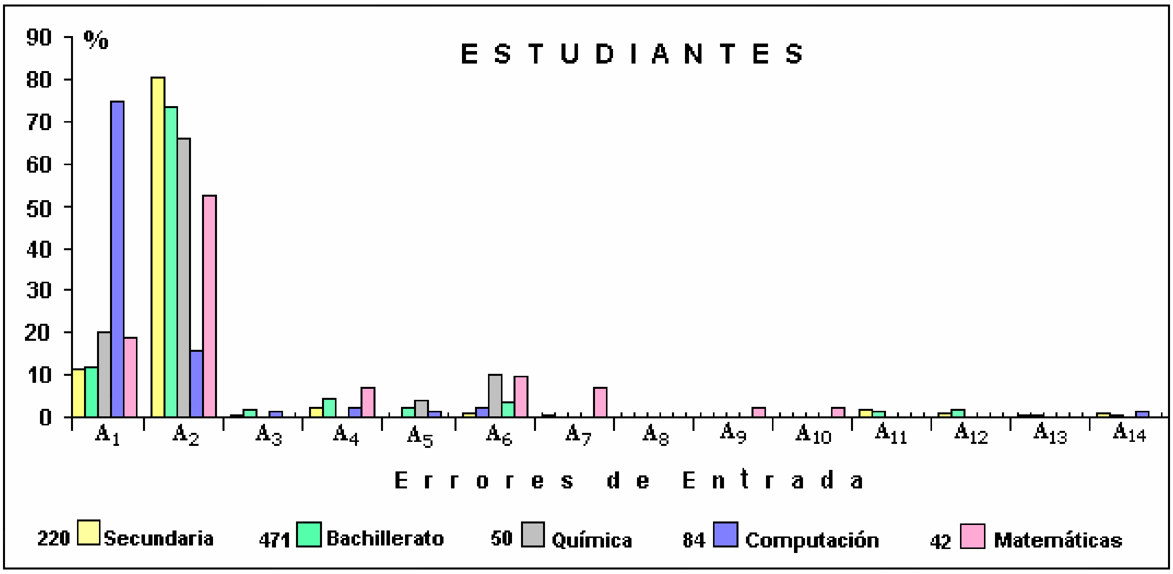
En la *Tabla 20* y las *Gráficas 1* y *2* se resumen los porcentajes de los errores de entrada, ocasionados por la elección del algoritmo, utilizados por los participantes.

Algoritmos	Profesores (%)			Estudiantes (%)				
	Prim (31)	Sec (176)	Bach (149)	Sec (220)	Bach (471)	Quím (50)	Comp (84)	Mat (42)
A_1	0	14.8	28.9	11.44	11.7	20.0	75.0	19.0
A_2	48.4	38.6	51.7	80.5	73.5	66.0	15.5	52.4
A_3	16.1	12.5	4.0	0.5	1.7	0	1.2	0
A_4	6.5	14.2	3.4	2.3	4.5	0	2.4	7.1
A_5	9.7	8.0	1.3	0	2.5	4.0	1.2	0
A_6	0	8.0	3.4	0.9	2.3	10.0	3.6	9.5
A_7	3.2	1.1	4.7	0.5	0	0	0	7.1
A_8	3.2	0.6	0.7	0	0	0	0	0
A_9	0	0	0.7	0	0	0	0	2.4
A_{10}	0	0	0.7	0	0	0	0	2.4
A_{11}	0	0	0	1.8	1.1	0	0	0
A_{12}	0	0	0	0.9	1.9	0	0	0
A_{13}	0	0	0	0.5	0.4	0	0	0
A_{14}	12.9	2.3	0.7	0.9	0.4	0	1.2	0

Tabla 20



Gráfica 1



Gráfica 2

Comentarios sobre los errores de entrada ocasionados por la elección del algoritmo

a) Ningún profesor de primaria utilizó el algoritmo correcto $\mathbf{A_1}$.

b) La mayor parte de los errores, tanto profesores como estudiantes, son ocasionados por usar el algoritmo $\mathbf{A_2}$. Dan preferencia a las potencias; después, realizan las operaciones en el orden de escritura de la expresión propuesta, tal como se lee un texto. Le siguen en la frecuencia de uso $\mathbf{A_1}$ y $\mathbf{A_3}$. Los tres forman un primer grupo en términos de la frecuencia de uso del algoritmo. Un segundo grupo lo forman $\mathbf{A_4}$, $\mathbf{A_5}$, $\mathbf{A_6}$ y $\mathbf{A_{14}}$. Finalmente, con muy escasa utilización $\mathbf{A_7}$, $\mathbf{A_8}$, $\mathbf{A_9}$, A_{10}, $\mathbf{A_{11}}$, $\mathbf{A_{12}}$ y $\mathbf{A_{13}}$.

c) Ningún profesor, ni estudiante, del nivel superior, utilizaron **A_{11}**, **A_{12}** o A_{13}. Sólo los estudiantes de secundaria y bachillerato recurrieron a estos algoritmos. Dan prioridad a sumas y restas, en lugar de hacerlo con las potencias seguidas de multiplicaciones y divisiones.

d) Los individuos que utilizaron **A_{14}**, obteniendo dos resultados diferentes. Argumentan que existen diversas alternativas posibles para resolver el ejercicio, dependiendo del procedimiento que se elija. Afirman que ambas formas son correctas: Se elige la conveniente. Esta anomalía se presentó escasamente, tanto en profesores como en estudiantes. Sólo un estudiante de nivel universitario cometió este error.

e) Tanto estudiantes como profesores del área de computación presentan mayor porcentaje en la solución correcta del ejercicio *7*.

f) Ningún estudiante utilizó **A_8**. El error consiste en hacer un nuevo bloque operativo a partir de los dos últimos de la expresión dada; esta visión sólo la tuvieron los profesores, uno de cada nivel.

g) Sólo un estudiante de matemáticas y un profesor de bachillerato emplearon **A_9**. Semejante situación ocurrió con **A_{10}**.

h) Globalmente se observa que profesores o estudiantes, de los niveles de primaria, secundaria o preparatoria cometen más errores que los estudiantes del nivel superior.

Descripción de los errores de operación

El 75.6% de los profesores (356) y el 83.2% de todos los estudiantes (867) cometieron errores al realizar las operaciones del ejercicio *7*.

Las tablas de la 21 a la 34 describen y ejemplifican errores de operación: uso inadecuado de las leyes de los exponentes, cambios o duplicación de operaciones o números, o bien, omisión, invertir de las posiciones de los operandos, confusión de los elementos neutros, unitarios, simétricos o inversos o cambio de símbolos aritméticos por algebraicos. Se indican los porcentajes en que están presentes en los individuos. Las letras *a* y *b* son representan reales.

<table>
<tr><td colspan="7">O_1. Cálculos equivocados</td></tr>
<tr><td colspan="4">O_1.a. Sumas o restas equivocadas</td><td colspan="3">6 - 18 - 16 - 48 = 12</td></tr>
<tr><td>$\begin{array}{r}2\\+2\\\hline 42\end{array}$</td><td>$\begin{array}{r}9\\-4\\\hline 14\end{array}$</td><td>2 + 4 = 8</td><td>14 - 12 = 4</td><td>18 - 4 = 16</td><td>1.2 - 2 = 0.8</td><td>3 - 9 = -2</td></tr>
<tr><td>30 - 8 = 38</td><td>2 - 15 = 13</td><td>- 12 ÷ 4 = 3</td><td colspan="2">2 + 12 - 3 = 13</td><td colspan="2">(2 + 12) - 3 = 10 - 3 = 7</td></tr>
</table>

Tabla 21

O_1.b. Multiplicaciones o divisiones equivocadas						
14 ×3 = 102	14 3 = 32	×10 3 = 33	6 ×3 = 9	14 ×3 = 22	14 ×3 = 412	14 ×3 = 52
$14\times3=24$	$4\times3=24$	$140\times3=320$	$16*3=58$	4/42 = 1, 02	4/42 = 10, 02	4/126 = 31, 06
4/42 = 1.05, 02	4/42 = 1.5, 020	4/42 = 10.2, 2	4/420 = 1.4, 020	4/42 = 8.5, 40, 20	4/42 = 20.5, 02, 2	4/42 = 10.49, 020
4/42 = 9.1, 36, 6, 4, 2	4/66 = 11.55, 22, 20	4/66 = 165, 26, 30	78/4 = 19.5	4/12 = 15, 020	$42\div4=21$	$42\div4=13$
$42\div4=4.5$	$42\div4=10.02$	$15\div4=21$	$150\div4=36.99$	$320\div4=85$	$2\div4=2$	$2\div4=-2$

Tabla 22

O_1. c. Potencias equivocadas						
O_1.c. 1. Cálculo erróneo al elevar al cuadrado un número			O_1.c. 2. $(ab)^2 = (a^2)(b)$ o $(a\div b)^2 = (a^2)\div(b)$			
$46^2=1116$	2^3 8	$2+2^2=$ $2+8=10$	$4^2\times3=12^2$	$10^2\times3=30^2$	$30^2\div4=7.5^2$	$5^2\times3=15^2$

Tabla 23

O_1.c. 3. $a^2=2a$	O_1.c. 4. $(-a)^2 = -a^2$		O_1.c. 5. $a\pm b^2 = (a\pm b)^2$
$22^2=44$	$2+2^2\times3-2^2\times3\div4=16.5$ $2+(2)^2\times3+(-2)^2\times3\div4=$ $2+4\times3+4\times3\div4=$ $2+4=6$	$6\times3=18$ $18+4=22$ $22\times3=66$ $66\div4=16.5$	$2+2^2=4^2$

Tabla 24

O_1.c. 6. $a\pm b = (a\pm b)^2$			O_1.c.7. $(a\pm b)^2 = a^2\pm b^2$		O_1.c. 8. $a\pm b^2=a\pm b$		
$+2$ 2 = 4^2	-12^2 2 = 10	$2+2=4^2$	$12^2-2^2=10^2$	$7^2-2^2=5^2$	-12^2 2 = 10	$2+2^2=4$ $15-2^2=13$	$2+2^2=5$ $12^2-2=10$

Tabla 25

O_1.c. 9. $(a^2)(b)=ab$ o $a^2\div b=a\div b$ o $(a^2)(b)=(ab)^2$				
$9^2\times 3=12^2$	$10^2\times 3=30^2$	$\begin{array}{r} 8^2 \\ \times 3 \\ \hline 24 \end{array}$	$15^2\div 4=3.75$	$30^2\div 4=7^2$

Tabla 26

O_1.c. 10. Otros errores en la aplicación de las leyes de los exponentes							
$4^2\times 3=7^2$	$4^2\times 3=12^4$	$12^4-2^2=8^2$	$12^2-2^2=10^4$	$39\div 4\div=9^3$	$10^4\times 3=30^4$	$30^4\div 4=7.5^4$	$12^2-2=10^3$
$4^2\times 3=24$	$2+2^2=4^2$	$2+2^2=2+2\times 2=4\times 2=8$		$2+2^2=2+8=10$		$10^3\times 3=30\div 4=7.5^2$	

Profesores	Prim	Sec	Bach
%	25.8	14.8	28.9

Estudiantes	Sec	Bach	Quím	Comp	Mat
%	45.0	43.5	22.0	7.1	35.7

Tabla 27

O_2. Cambiar una operación por otra

$2+2^2\times 3-2^2\times 3\div 4=2-2^2\times 3-2^2\times 3\div 4=$
$2+4\times 3+4\times 3\div 4=\frac{66}{4}=\frac{33}{2}=16.5$

Profesores	Prim	Sec	Bach
%	6.5	19.9	5.4

Estudiantes	Sec	Bach	Quím	Comp	Mat
%	3.6	3.4	0	0	2.4

Tabla 28

O_3. Cambiar un número por otro

$2+2^2\times 3-2^2\times 3\div 4=(2+2^2)\times 3-2^3\times 3\div 4=(2+4)\times 3-8\times 3\div 4=(6\times 3)-8\times 3\div 4=$
$10\times 3\div 4=30\div 4=7.5$

Profesores	Prim	Sec	Bach
%	0	1.7	3.6

Estudiantes	Sec	Bach	Quím	Comp	Mat
%	1.4	1.9	0	2.4	0

Tabla 29

O_4. Omitir una operación

$2+2^2\times 3-2^2\times 3\div 4=$
$6\times 3=18-2^2=14\times 3=42$

Profesores	Prim	Sec	Bach
%	0	1.1	0.7

Estudiantes	Sec	Bach	Quím	Comp	Mat
%	17.7	4.2	0	1.2	0

Tabla 30

O_5. Omitir un número

$2+2^2\times 3-2^2\times 3\div 4$

$2+4\times 3+4\times 3\div 4$

$18+12\div = \boxed{7.5}$

$18\times 12\div 30$

Profesores	Prim	Sec	Bach		Estudiantes	Sec	Bach	Quím	Comp	Mat
%	0	1.7	1.3		%	4.5	1.1	0	0	0

Tabla 31

O_6. Invertir los términos de una división

$2\div 4=\boxed{2}$ $\quad 2\div 4=-2$ $\quad 3\div 4=1.3$

Profesores	Prim	Sec	Bach		Estudiantes	Sec	Bach	Quím	Comp	Mat
%	0	0.6	0.7		%	0	1.1	0	0	0

Tabla 32

O_7. Confusión en el uso de los elementos neutros, unitarios, simétricos o inversos

$2+2^2\times 3-2^2\times 3\div 4=$

$2+\cancel{4\times 3}-\cancel{4\times 3}\div 4=$

$2\div 4=2$

Profesores	Prim	Sec	Bach		Estudiantes	Sec	Bach	Quím	Comp	Mat
%	0	0.6	0.7		%	0	1.7	0	0	0

Tabla 33

O_8: Realizar dos veces una misma operación

Multiplicó dos veces por el primer 3.

$2+2^2\times 3-2^2\times 3\div 4=36.99$

$6(3)=18(3)=54$

$54-4=50(3)=150$

$150\div 4=36.99$

$4\overline{)150}=36.99$; 30; 40; 40

Multiplicó dos veces por el segundo 3.

$(2+2^2)\times 3-2^2\times 3\div 4=$

$(2+4)\times 3-2^2\times 3\div 4=$

$(6\times 3)-2^2\times 3\div 4=$

$(18-4)\times 3\div 4=$

$(14\times 3)\times 3\div 4=$

$(42\times 3)\div 4$

$(126\div 4)$

$=\boxed{31.2}$

$4\overline{)126}=31$; 06

Profesores	Prim	Sec	Bach		Estudiantes	Sec	Bach	Quím	Comp	Mat
%	0	1.1	0		%	0.9	0.4	0	0	0

Tabla 34

O_9: Cambio de símbolos numéricos por símbolos algebraicos.

$2-2^2\times 3\div x^2\times 3\div 4$

$=2-4\times 3-3x^2\div 4$

$=-10+3x^2\div 4$

$2+2^2\times 3-2^2\times 3\div 4$

$2+4\times 3-4\times 3\div 4$

$6\times 3-4\times 3\div 4$

$2x^3\div 4$

$x^3\div \frac{4}{2}$

$x^3=2$

Profesores	Prim	Sec	Bach		Estudiantes	Sec	Bach	Quím	Comp	Mat
%	0	1.1	0		%	0	0	0	0	0

Tabla 35

Las expresiones de la siguiente tabla, utilizadas por profesores y estudiantes para obtener el resultado de 2 + 2^2, reflejan las irregularidades presentes al calcular el valor numérico de expresiones que incluyen varias operaciones aritméticas con potencias. Se utilizaron en los algoritmos **A_2**, **A_3**, **A_5** o **A_6**. La expresión es de la forma $a+b^2$, a y b son números reales.

$a+b^2$	$(a+b)^2$	$a+b^2=a+b\times b=(a+b)\times b$			$a+b^2=(a+b)^2=(a+b)\times 2$		
$a+b+2$	$a+b\times 2$	$a\times b\times 2$	$a+b$	$a\times b$	$a\times b^2$	$a+b^3$	

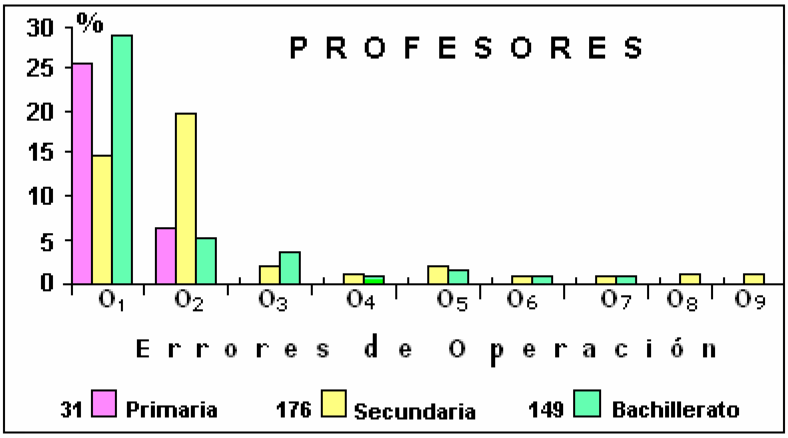
Estas expresiones algebraicas determinan relaciones de dos variables representables gráficamente por regiones del plano, tales que cada pareja de números reales correspondiente a un punto de la región, satisface la relación algebraica producto del error; en otras palabras, se tienen todas las parejas de números reales que satisfacen el error y una representación geométrica para esa relación. Consecuentemente, a partir de los errores se puede introducir el tema de variación.

Resumen de los resultados de los errores de operatividad

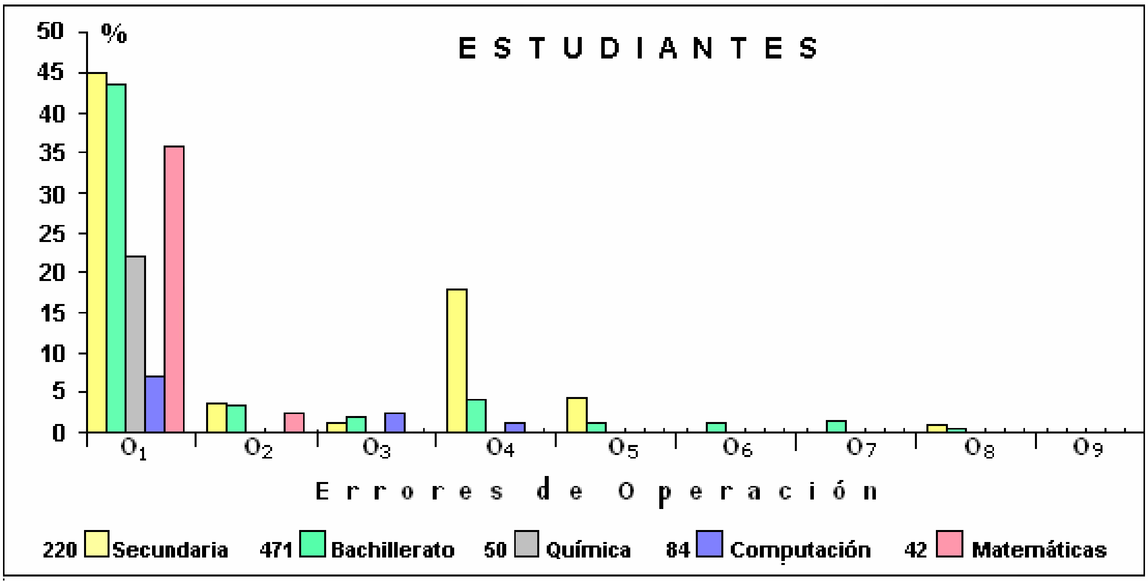
En la *Tabla 36* y las *Gráficas 3* y *4* se resumen los porcentajes de los resultados de los errores en las operaciones de los encuestados. Se calcularon con base en el número de individuos de cada grupo.

Errores de Operación	**Profesores (%)**			**Estudiantes (%)**				
	Prim (31)	**Sec (176)**	**Bach (149)**	**Sec (220)**	**Bach (471)**	**Quím (50)**	**Comp (84)**	**Mat (42)**
O_1	25.8	14.8	28.9	45.0	43.5	22.0	7.1	35.7
O_2	6.5	19.9	5.4	3.6	3.4	0	0	2.4
O_3	0	1.7	3.6	1.4	1.9	0	2.4	0
O_4	0	1.1	0.7	17.7	4.2	0	1.2	0
O_5	0	1.7	1.3	4.5	1.1	0	0	0
O_6	0	0.6	0.7	0	1.1	0	0	0
O_7	0	0.6	0.7	0	1.7	0	0	0
O_8	0	1.1	0	0.9	0.4	0	0	0
O_9	0	1.1	0	0	0	0	0	0

Tabla 36



Gráfica 3



Gráfica 4

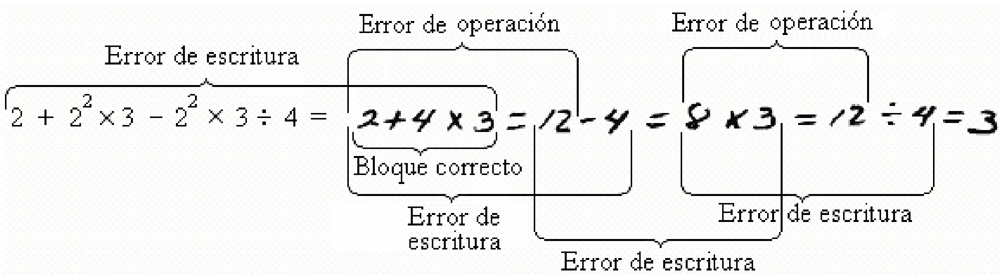
Comentarios sobre los errores en las operaciones

1. Los encuestados incurren con más frecuencia en errores del tipo $\mathbf{O_1}$, en forma sistemática, no son ocasionales.
2. La omisión de una operación, o de un número en el cálculo, se presentan con menor frecuencia en ambos grupos de participantes.
3. El intercambio entre el dividendo y el divisor de una división ocurre ocasionalmente en ambos grupos de individuos, cuando el dividendo es menor que el divisor. En esos casos persiste la idea de que al dividir dos números naturales el dividendo es el mayor y, por tanto, el cociente debe tener parte entera.
4. Profesores y estudiantes del nivel medio superior anularon o simplificaron expresiones numéricas simétricas o inversas, aun cuando éstas se encuentran ligadas a otras operaciones.

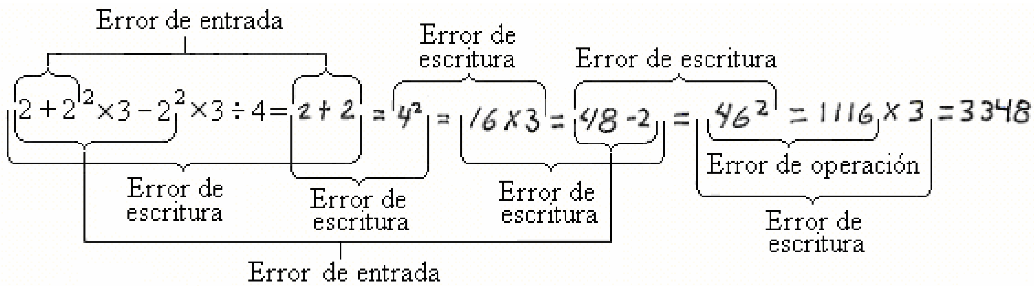
Descripción de los errores de escritura

En el proceso de transformación de la expresión aritmética a su forma más simple se tiene una acumulación de varios tipos de errores. Es pertinente hacer notar la incidencia tan alta de errores de escritura, mostrada en los *Ejemplos* 15 y *16*, cuando los participantes utilizan una sucesión de igualdades, dispuestas en columna o en fila.

Ejemplo 15:

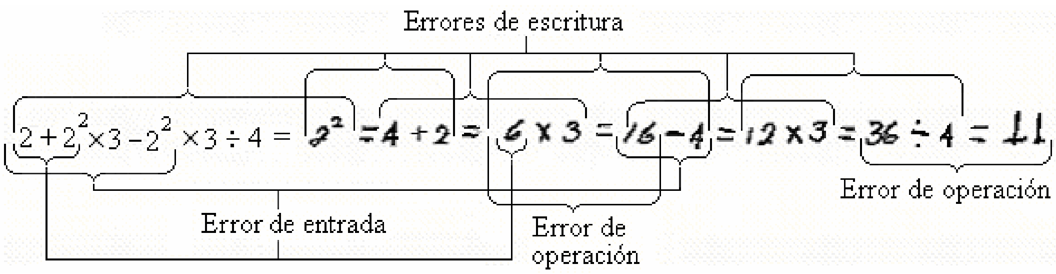


Ejemplo 16:



En el *Ejemplo 17*, además de presentar los seis errores de escritura y uno de operación señalados, se destaca que, de los ocho bloques numéricos unidos en sucesión con el signo de igualdad, se tienen 28 errores de entrada, derivados del empleo incorrecto de la transitividad de la igualdad: las combinaciones de ocho objetos tomados de dos en dos. Esta situación persiste en casi todos los casos que encadenan la igualdad. Aun cuando 11 es la respuesta correcta, en este caso, no lo es porque es resultado de una división equivocada: 36 ÷ 4 = 11.

Ejemplo 17:



En la *Tabla 37* y las *Gráficas 5* y 6 se describen los porcentajes de los errores de escritura. En la mayoría de los casos, profesores y estudiantes, los cometieron varias veces en el proceso de resolución. El conteo considera sólo el número de individuos que incurrieron en este tipo de error, no el número de errores de cada encuestado, ni la frecuencia del incurrimiento. Se estima que lo importante es enterarse de la presencia y persistencia del error, para darse cuenta de la necesidad de aprender a escribir bien el texto matemático.

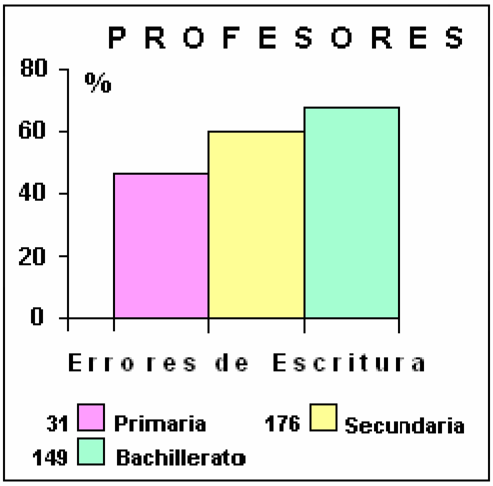
Errores de Escritura

$$2+2^2\times3-2^2\times3\div4=2+4=6\times3=16-4=14\times3=42-4=38\times3=114\div4=28.5$$

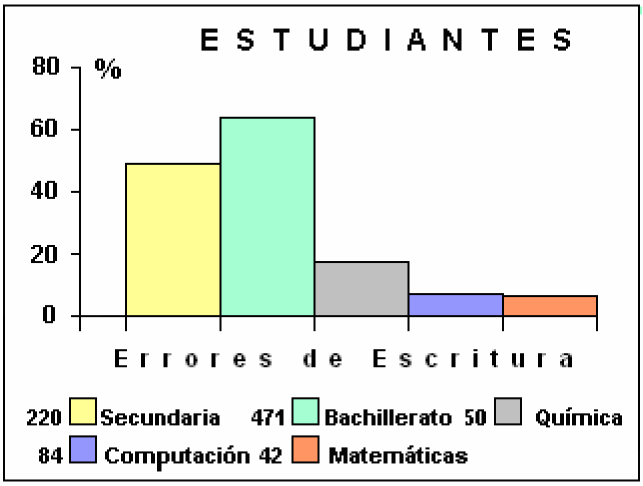
Profesores	Prim	Sec	Bach
%	45.2	58.5	66.4

Estudiantes	Sec	Bach	Quím	Comp	Mat
%	54.1	70.9	20.0	8.3	7.1

Tabla 37



Gráfica 5



Gráfica 6

Caracterizaciones de las formas de representación de los procedimientos

En este apartado se describen y ejemplifican las diferentes formas en que representaron el proceso de obtención del resultado, profesores y estudiantes. Las *Tablas* de la *38* a la *43* y las *Gráficas 7* y *8* exhiben los porcentajes obtenidos.

El encadenamiento de la igualdad se presenta cuando el individuo utiliza una sucesión de igualdades dispuestas en una fila. Están presentes tanto en profesores como estudiantes. El 30.3% del total de profesores (356) y el 35.2% de todos los estudiantes (867) presentaron su procedimiento de esta manera.

R_1: Procedimiento expresado por medio de una sucesión de igualdades en una fila (Encadenamiento de la igualdad)

$2+2^2\times3-2^2\times3\div4 = 2+4\times3-4\times3\div4 = 6\times3-4\times3\div4 = 12-4\times3\div4 = 24\div4 = 6$

Profesores	Prim	Sec	Bach		Estudiantes	Sec	Bach	Quím	Comp	Mat
%	19.4	30.1	24.8		%	19.1	35.7	20.0	9.5	7.1

Tabla 38

El 49.7% del total de profesores (356) y el 40.0% de todos los estudiantes (867) representaron el procedimiento mediante el uso de R_2. En la *Tabla 39* se describen los porcentajes del uso de sucesiones de igualdades en columna para cada grupo de individuos.

R_2: Procedimiento expresado por medio de una sucesión de igualdades en una columna

$$\begin{aligned} &2+2^2\times3-2^2\times3\div4=\\ &2+4\times3-4\times3\div4=\\ &2+12-12\div4=\\ &2+12-3=14-3=11 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &2+2^2*3-2^2*3\div4=\\ &2+4\times3-4*3\div4=\\ &6\times3-12\div4=\\ &18-12=6 \end{aligned}$$

Profesores	Prim	Sec	Bach		Estudiantes	Sec	Bach	Quím	Comp	Mat
%	32.3	49.4	53.7		%	42.7	42.7	60	85.7	59.5

Tabla 39

Las *Tablas* de la 40 a la *43* ilustran otras formas de representación del procedimiento para transformar la expresión propuesta.

R_3: Procedimiento expresado por medio de una sucesión de operaciones

$2+2^2\times3-2^2\times3\div4 = 10.5$

$\begin{array}{r}2\\+4\\\hline6\end{array}\quad \begin{array}{r}6\\\times3\\\hline18\end{array}\quad \begin{array}{r}18\\-4\\\hline14\end{array}\quad \begin{array}{r}14\\+3\\\hline12\end{array}\quad 4\,\overline{)\,42}\ \ 10.5,\ 02$

Profesores	Prim	Sec	Bach		Estudiantes	Sec	Bach	Quím	Comp	Mat
%	35.5	17.6	10.1		%	28.2	14.6	0.0	1.2	23.8

Tabla 40

R_4: Procedimiento expresado con igualdades y operaciones

$$\begin{aligned} &2+2^2\times3-2^2\times3\div4=10.5\\ &2+2(2)\times3-2(2)\times3\div4\\ &2+4\times3-4\times3\div4=4+2=6 \end{aligned}$$

$\begin{array}{r}3\\\times6\\\hline18\end{array}\quad \begin{array}{r}18\\-4\\\hline14\end{array}\quad \begin{array}{r}14\\\times3\\\hline42\end{array}\quad 4\,\overline{)\,42}\ \ 10.,\ 02.0$

Profesores	Prim	Sec	Bach		Estudiantes	Sec	Bach	Quím	Comp	Mat
%	3.2	0.6	1.3		%	2.3	4.7	12.0	2.4	4.8

Tabla 41

R_5: Procedimiento expresado retóricamente

$2+2^2\times 3-2^2\times 3\div 4=$ Se suma 2 +2 el resultado que es 4 se multiplica por 2 porque es la raiz cuadrada 8 x 3 el resultado menos 2X2 el resultado por 3 el resultado entre 4 y el ultimo resultado es 15.

Profesores	Prim	Sec	Bach		Estudiantes	Sec	Bach	Quím	Comp	Mat
%	9.7	2.3	4.0		%	7.8	2.5	0.0	0.0	0.0

Tabla 42

R_6: Procedimiento expresado en diagrama de árbol

$2+2^2\times 3-2^2\times 3\div 4=$ 10·5
2 + 4
6 × 3
18 − 4
14 × 3
42 ÷ 4
10.5
4 ⟌42
020

$2+2^2\times 3-2^2\times 3\div 4=33$
16
48
44
132
33=33

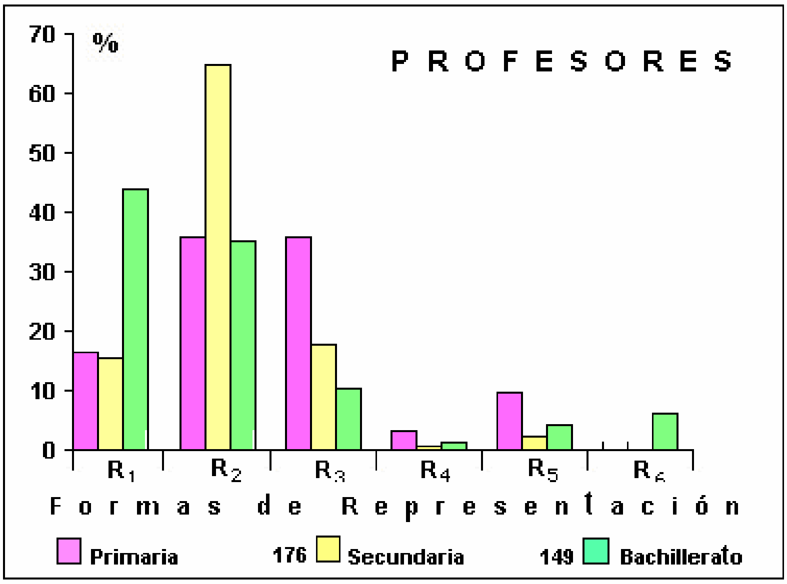
Profesores	Prim	Sec	Bach		Estudiantes	Sec	Bach	Quím	Comp	Mat
%	0.0	0.0	6.0		%	0.0	0.0	8.0	1.2	4.8

Tabla 43

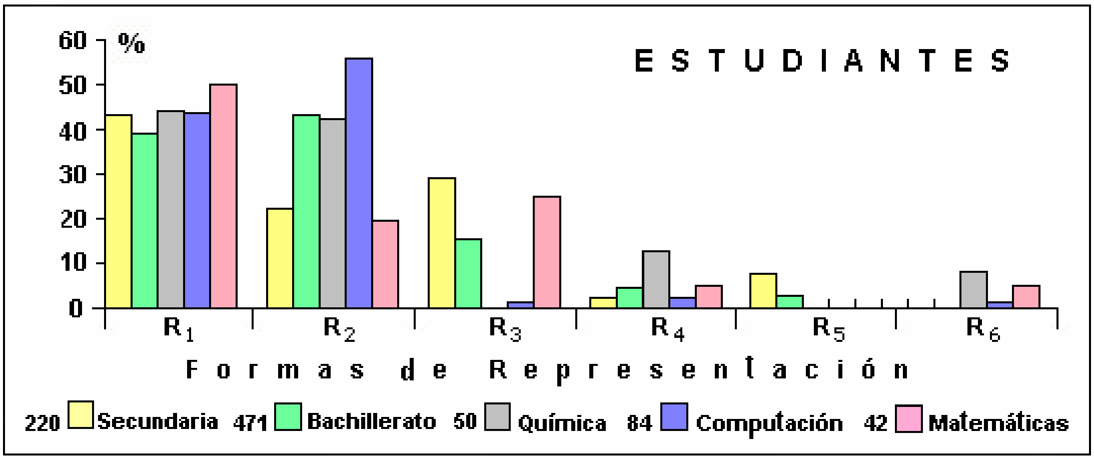
En la *Tabla 44* y en las *Gráficas 7* y *8* se resumen los porcentajes de las formas distintas de representar el proceso que conduce al resultado.

Representación	Profesores				Estudiantes				
	Prim (31)	Sec (176)	Bach (149)		Sec (220)	Bach (471)	Quím (50)	Comp (84)	Mat (42)
R_1	19.4	30.1	24.8		19.1	35.7	20.0	9.5	7.1
R_2	32.3	49.4	53.7		42.7	42.7	60	85.7	59.5
R_3	35.5	17.6	10.1		28.2	14.6	0.0	1.2	23.8
R_4	3.2	0.6	1.3		2.3	4.7	12.0	2.4	4.8
R_5	9.7	2.3	4.0		7.8	2.5	0.0	0.0	0.0
R_6	0.0	0.0	6.0		0.0	0.0	8.0	1.2	4.8

Tabla 44



Gráfica 7



Gráfica 8

Comentarios sobre los resultados de las formas de representar los procedimientos

- Al aumentar el nivel de escolaridad de los estudiantes es más frecuente encontrar que utilizan una sucesión de igualdades. La forma de representar el procedimiento de resolución no debe influir en los errores; sin embargo, cuando el encuestado utiliza una sucesión de igualdades en fila incurre en el error de escritura.
- En los profesores de primaria la forma de representación con secuencias de operaciones tiene el primer lugar en el uso.
- De los que utilizan la representación retórica, los estudiantes de secundaria y bachillerato lo hacen en mayor número.
- La representación expresada en forma de diagrama de árbol se presenta en mayor grado en estudiantes del nivel universitario.

Observaciones sobre los procesos de resolución

Las *Tablas 45* y *46* y las *Gráficas 9* y *10* muestran realizaciones de los profesores y estudiantes que no son errores: Corresponden a omisiones o uso innecesario de símbolos específicos del lenguaje de la matemática. Se identifican con $\mathbf{S_1}$ y $\mathbf{S_2}$. No influyen en el procedimiento ni en la obtención del resultado correcto; sin embargo, son reglas sintácticas que deben observarse.

S_1: No se hace uso del signo de igualdad					$2+2^2\times3-2^2\times3\div4=11$ $2+4\times3-4\times3\div4$ $2+12-3$					
Profesores	**Prim**	**Sec**	**Bach**		**Estudiantes**	**Sec**	**Bach**	**Quím**	**Comp**	**Mat**
%	67.7	25.6	14.0		**%**	2.3	10.0	0	16.7	38.0

Tabla 45

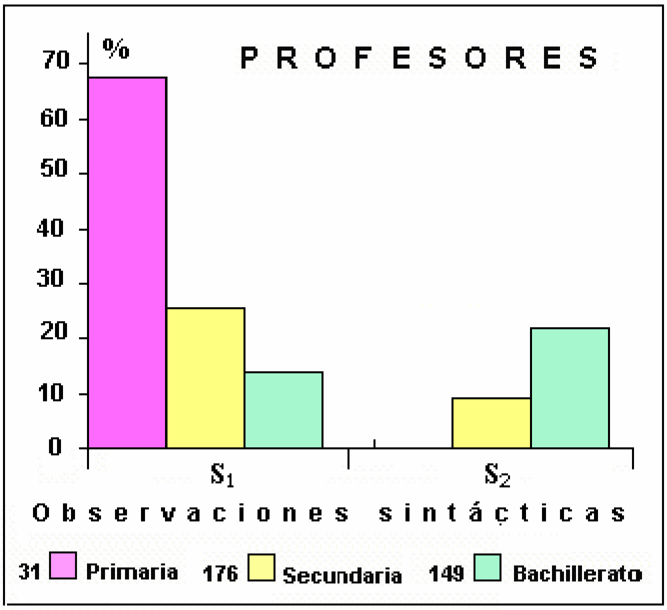
S_2: Uso innecesario de paréntesis										
$2+2^2\times3-2^2\times3\div4=2+((2)^2\times3)-(((2)^2\times3)\div4)=$ $2+(4\times3)-((4\times3)\div4)=2+12-(12\div4)=$ $2+12-3=14-3=\boxed{11}$										
Profesores	**Prim**	**Sec**	**Bach**		**Estudiantes**	**Sec**	**Bach**	**Quím**	**Comp**	**Mat**
%	0	9.1	22.1		**%**	0.9	9.6	4.0	26.2	14.3

Tabla 46

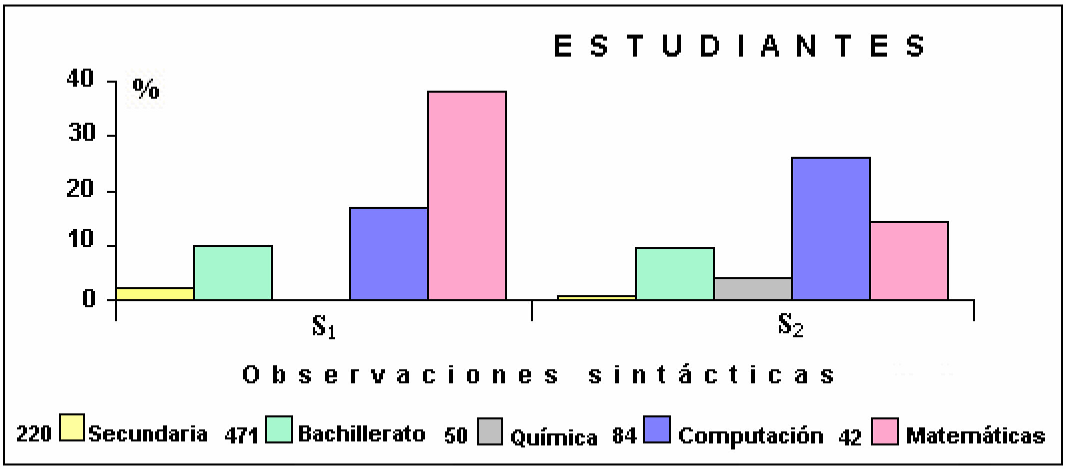
En la *Tabla 47* y en las *Gráficas 9* y *10* se describen los porcentajes de $\mathbf{S_1}$ y $\mathbf{S_2}$.

Observación	**Profesores**				**Estudiantes**				
	Prim (31)	**Sec (176)**	**Bach (149)**		**Sec (220)**	**Bach (471)**	**Quím (50)**	**Comp (84)**	**Mat (42)**
S_1	67.7	25.6	14.0		2.3	10.0	0	16.7	38.0
S_2	0	9.1	22.1		0.9	9.6	4.0	26.2	14.3

Tabla 47



Gráfica 9



Gráfica 10

Comentarios finales y conclusiones

Del diagnóstico y análisis de errores en la enseñanza de la matemática se desprende que deben utilizarse en el tratamiento de múltiples temas en el aula, permiten al profesor incidir en aspectos didácticos y en el diseño curricular y conducirlo a una competencia cada vez más formal de los conceptos matemáticos. La posibilidad de utilizar los errores cometidos por los estudiantes y profesores en clases de matemáticas, en la organización de los contenidos, se justifica con lo siguiente:

- Si el profesor conoce los errores más frecuentes de los estudiantes, tiene ocasión de preparar estrategias didácticas alternativas previas a la realización de la enseñanza para afrontar el aprendizaje de los contenidos que presentan dificultades. Con base en los tipos de errores y en la frecuencia de su incurrimiento, hay la posibilidad de contemplar acciones para su prevención en el aula

- Los errores representan un ambiente importante para que los profesores realicen investigaciones sencillas, sobre contenidos matemáticos determinados. Estos aspectos se relacionan con temas propios de la matemática escolar, no incluidos en el currículo de la matemática oficial. Permiten realizar actividades de búsqueda de propiedades de los números y de sus relaciones. Con base en estos descubrimientos, el profesor puede diseñar problemas de investigación adaptados al nivel de los alumnos.
- Los errores definen un contexto. Con el conocimiento matemático que gravita alrededor del tema, que su aprendizaje produce errores en los estudiantes, es posible construir un "islote" de contenidos matemáticos: *establecer una estructura local de conocimiento*. Existe la posibilidad de estructurar ejes temáticos tomando en cuenta los tópicos que ha sido motivo de error y otros con los que éstos se relacionan. Son la base para el diseño de actividades de aprendizaje y de materiales de apoyo. Un cuerpo de conocimiento matemático así estructurado conduce a un mayor nivel de eficiencia en el aprendizaje y a preservar la presencia de errores en el proceso de aprendizaje.

En la continuación del presente trabajo se contempla lo siguiente:

- En una parte se estudia el diagnóstico y el análisis de errores en la transformación de las mismas expresiones numéricas, empleando dos tipos de calculadoras, una básica, de cuatro operaciones fundamentales y una científica. En una sesión de trabajo se pidió a grupos de profesores de los niveles secundaria, bachillerato y del nivel universitario que resolvieran el ejercicio *7* con una calculadora del primer tipo. En otra sesión se realizó la misma actividad con la segunda calculadora. En general, obtuvieron resultados diferentes. Después, se les pidió que el resultado obtenido con la primera calculadora lo obtuvieran con la segunda y, recíprocamente, que llegaran con la primera al resultado encontrado con la segunda. En casi la totalidad de casos tienen dificultades y no consiguen hacerlo correctamente. Se analizó la información recabada. La calculadora es una herramienta útil en el tratamiento algorítmico, en los cálculos y en la detección de errores. Es posible realizar actividades matemáticas con esa herramienta para descubrir y afianzar algunas propiedades de los números y sus relaciones.
- En otra parte del estudio, con profesores y estudiantes, se encontraron curvas o regiones del plano, determinadas por un conjunto de parejas de números reales, que verifican una relación de dos variables, obtenida al resolver en forma incorrecta una expresión numérica. Lo anterior permite introducir el tema de variación, a partir de relaciones geométricas en el plano.

Tiene fundamental importancia el análisis de la problemática del incurrimiento en errores en el aprendizaje de la matemática, enmarcado desde una perspectiva social. Si las fuentes de error provienen del profesor, se trasmiten a los alumnos de la escuela elemental y se reproducen en toda la escolaridad. Lo anterior, de nuevo, invita a reflexionar sobre las consecuencias sociales que, a futuro, representa la reproducción de errores, desde la enseñanza de la matemática elemental.

Desafortunadamente, estos errores inciden en la mayor parte de la población del país; en particular, en aquel sector que se ha quedado con el menor nivel de escolaridad, o que se encuentra en el estrato social de menor protección; no obstante que, desde hace cuatro décadas, en nuestro país, se ha instituido oficialmente, y permanece en ejercicio, el estudio, desarrollo, investigación y formación de recursos humanos en el área de matemática educativa.

Bibliografía

- Heinze, A. (2005). Mistake-handling activities in the mathematics classroom. In Chick, H. L. & Vincent, J. L. (Eds.). Proceedings of the 29th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education, Vol. 3, pp. 105-112. Melbourne: PME.
- Lannin J., Townsend, B. & Barker D.(2006). The Reflective Cycle of Student Error Analysis. In For the Learning of Mathematics. An International Journal of Mathematical Education. Vol. 26, num. 3.
- Linchevsky, L. (1995). “Algebra With Numbers and Arithmetic With Letters: A Definition of Pre-Algebra. In The Journal of Mathematical Behavior. Vol. 14, pp. 113-120.
- Mulhern, P. (1989). Betwen the ears: Making inferences about internal proceses. En Creer, B. & Mulhern, G. (Eds.). New Directions in Mathematics Education. .Londres:Routledge.
- Rico, L. (1994). “Errores en el aprendizaje de las matemática”. En Kilpatrick, J., Rico, L. y Gómez, P. Educación Matemática. Grupo Editorial Iberoamérica. S. A de C. V. México.
- Stigler, J., Gonzales, P., Kawanaka, T. et al. (1999). The TIMSS videotape classroom study. U.S. Department of Education. National Center for Education Statistics, Washington, DC: U.S. Government Printing Office. http://nces.ed.gov/timss.
- Vergnaud, G. (1991). El niño, las matemáticas y la realidad. Trad. L. Ortega & G. M. Bastien. Primera edición en español. Ed. Trillas. México.

Vicente Carrión Miranda. Departamento de Matemática Educativa del CINVESTAV.
Email: vcarrion@mail.cinvestav.mx
México*, *D. F.

UNIÓN
REVISTA IBEROAMERICANA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA

Septiembre de 2007, Número 11, páginas 59-77
ISSN: 1815-0640

La evaluación de métodos para la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas en la Educación Infantil

Carlos de Castro Hernández

Resumen

En este trabajo, se plantea una propuesta de evaluación de métodos para la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas en la Educación Infantil (0 a 6 años). La evaluación está basada en la aplicación de criterios de idoneidad didáctica, que permiten valorar el grado de adecuación de los métodos para su implementación en el aula. La idoneidad didáctica se estudia examinando sus distintos componentes: matemático, cognitivo, interaccional, mediacional, afectivo y ecológico. Para cada componente se ofrece una explicación y una serie de preguntas clave para guiar el proceso de evaluación.

Abstract

In this paper, we offer a proposal for the evaluation of methods for the teaching and learning of mathematics in preschool (0 to 6 years). The evaluation is based on the application of didactic suitability criteria, which allow us to value the degree of adequacy of the methods for their implementation in the classroom. The didactic suitability is studied examining its different components: mathematical, cognitive, interaccional, mediational, emotional and ecological. We offer, for each component, an explanation and a series of key questions to guide the process of evaluation.

Introducción

En el desempeño de la profesión docente, se producen diferentes situaciones en las que un experto en didáctica, un profesor, o un maestro, deben emitir un juicio o tomar una decisión acerca de la adecuación del uso de un método para el aprendizaje de las matemáticas. A modo de ejemplo, proponemos las siguientes:

- Muchos padres y madres, con hijos que experimentan dificultades en su aprendizaje matemático, realizan consultas sobre qué método de aprendizaje puede ser más adecuado para que sus hijos se “pongan al día” (recuperen el ritmo de la clase) en matemáticas.
- En las reuniones de maestros de una escuela infantil, se plantea a menudo el problema de decidir qué método -habitualmente, un método de fichas elaborado por una editorial- debe adoptarse como método oficial por el centro para el aprendizaje de las matemáticas.
- En algunas escuelas infantiles se ofrece, ya desde el primer ciclo de Educación Infantil y dentro del proyecto educativo del centro, una iniciación a

las matemáticas para "bebés"[1]. Tal es el caso, por ejemplo, del conocido método de los "bits de inteligencia" (G. Doman y J. Doman, 2005).

- Algunos alumnos de magisterio, al finalizar su formación inicial, reciben ofertas de trabajo en centros en los que se sigue un determinado método para el aprendizaje de las matemáticas. Así ocurre con el método Kumon[2].
- También hay métodos, para el aprendizaje de las matemáticas en Educación Infantil, que se ofrecen como complementarios, independientemente de la metodología que se siga en el aula: trabajo por proyectos, métodos de fichas editoriales, trabajo por rincones, etc. Ejemplo de esto son el método Lógico Primo o el Miniarco.

El objetivo de este trabajo es elaborar una propuesta para la evaluación de métodos para el aprendizaje y enseñanza de las matemáticas. Esta elaboración se realizará desde el marco teórico del *Enfoque ontosemiótico de la cognición matemática*[3], a través del uso de los criterios de idoneidad didáctica (Godino, Bencomo, Font y Wilhelmi, 2006; Godino, Font y Wilhelmi, 2006).

Idoneidad didáctica

Para poder evaluar un método de enseñanza de las matemáticas, debemos contar con criterios de evaluación que nos permitan diseccionar el método y estudiar con detalle el mismo desde distintos puntos de vista. Un método puede reflejar adecuadamente el contenido matemático apropiado para la Educación Infantil, pero proponer tareas demasiado complejas para una determinada edad; también puede encajar en el proyecto curricular del centro, pero no conectar con los intereses de los niños. Podemos analizar múltiples facetas de un mismo método y para ello necesitamos una herramienta de análisis sensible a esta multidimensionalidad.

La idoneidad didáctica de un método para la enseñanza de las matemáticas se define como el grado en que dicho método resulta adecuado para su puesta en práctica en el aula de Educación Infantil. Esta idoneidad se estudiará a través de la reflexión sobre sus distintos componentes: matemático, cognitivo, interaccional, mediacional, afectivo y ecológico. En los apartados siguientes, explicaremos cómo evaluar cada uno de estos componentes para tener una visión de conjunto que nos permita valorar el método de una manera global.

[1] En España, el primer ciclo de Educación Infantil abarca de cero a tres años.

[2] Puede encontrase información sobre el método en la dirección: http://www.kumon.es/

[3] En Godino, Batanero y Font (2006) se presenta una síntesis actualizada del «enfoque ontosemiótico» para la Didáctica de las Matemáticas. Este trabajo está disponible en Internet: http://www.ugr.es/local/jgodino/

1. Idoneidad matemática[4]

Desde el punto de vista de las matemáticas y de su aprendizaje, dos preguntas que surgen inmediatamente al evaluar un método para aprender matemáticas son:

- ¿Qué "matemáticas" se proponen en el método?
- ¿Qué se entiende en el método por "aprender matemáticas"?

Dicho de otra manera, en todo método para aprender matemáticas hay una concepción[5] de qué son y cómo se aprenden las matemáticas. Una primera aproximación para responder a estas preguntas consistiría en examinar qué contenidos matemáticos aparecen (y con qué frecuencia) en el método y qué podemos deducir, al examinar el método, sobre el modelo implícito que los autores del método parecen asumir (en caso de que no sea expuesto explícitamente) sobre la enseñanza de las matemáticas.

La búsqueda de una referencia para la evaluación

Para investigar qué contenidos matemáticos aparecen en el método, con el fin de valorar si dichos contenidos son adecuados, necesitamos alguna referencia. Una primera respuesta ingenua consistiría en comparar los contenidos matemáticos que propone el método con los que aparecen en el currículo de Educación Infantil. Sin embargo, este intento está condenado al fracaso. El currículo matemático de Educación Infantil, debido a su brevedad, no puede constituir una referencia adecuada para las matemáticas que pueden hacer los niños en la Educación Infantil. En efecto, este currículo (en cualquiera de sus últimas versiones) suele ser muy breve y proponer una reducida lista de contenidos muy básicos. Balfanz (1999) indica[6] que "El currículum minimalista centrado alrededor de los diez primeros números y el reconocimiento de formas geométricas sencillas, que emergió durante el primer tercio del siglo [XX], ha sido el predominante en los últimos sesenta años" (p. 9). Vemos que esta característica de nuestro currículo es común a otros países y merece algún comentario. Balfanz (1999) detalla las razones por las cuales en la Educación Infantil suelen enseñarse muy pocos contenidos matemáticos. Una de las más importantes es que esta etapa educativa no suele considerarse obligatoria. Esto hace que los libros de texto de primer curso de Educación Primaria se "sientan obligados a empezar desde cero", considerando que puede haber niños que no hayan sido escolarizados previamente. Actualmente, esta situación dista mucho de responder a la realidad social de nuestro país, y a las necesidades (de los padres que trabajan) de escolarizar a los niños antes incluso de los tres años. Sin embargo, es posible que ésta haya sido una de las razones históricas que, junto con la inevitable inercia, hayan contribuido a este "minimalismo curricular".

[4] En los trabajos originales, se habla de "idoneidad epistémica". En este trabajo, para simplificar la terminología, se ha preferido el nombre de "idoneidad matemática".

[5] Aunque, en ocasiones, esta concepción es implícita.

[6] Refiriéndose al currículum matemático infantil de Estados Unidos de América.

Dado que el currículo de Educación Infantil no resulta una guía apropiada, debemos buscar otra. Es necesario emplear una referencia sobre las matemáticas adecuadas para la Educación Infantil basada en investigaciones, revisiones de investigaciones, propuestas de actividades que se hayan experimentado en la práctica, etc. La referencia ha de tener una sólida base teórica y práctica. Consideramos que una referencia adecuada es el trabajo de Clements (2004) a la que se pueden incorporar resultados de otros trabajos (Deaño, 1993; Dickson, Brown, y Gibson, 1991; Secadas, 2004). A continuación, vamos a ejemplificar la diferencia entre las orientaciones del currículo y las suministradas por Clements (2004) con respecto al aprendizaje del conteo.

El currículo matemático de Educación Infantil vigente los últimos años en España[7], citaba en 2004 los siguientes criterios de evaluación relativos al conteo: Aprender a contar de forma correcta e identificar los nueve primeros números y su representación gráfica. El segundo criterio no se refiere exactamente al conteo, sino a la lectura y escritura de números. La razón de incluirlo aquí es entender porqué a menudo la enseñanza del número se ve reducida en esta etapa al ámbito de los diez primeros números[8]. Esta idea persiste a pesar de que los maestros, en su experiencia, constaten que muchos niños aprenden a contar oralmente hasta cien antes de los seis años. Por otra parte, está claro que la indicación de que los niños deben "aprender a contar de forma correcta" no es muy precisa de cara a orientar la labor docente. Por el contrario, las orientaciones que aparecen sobre el conteo en el trabajo de Clements (2004) son bastante más detalladas. Resumimos las mismas en los párrafos siguientes:

El conteo oral es uno de los fundamentos del conteo. Entre los dos y los cuatro años, suele producirse el aprendizaje de las diez primeras palabras de la secuencia de conteo. A los cinco años, el conteo oral alcanza en torno al número treinta; a los seis años, al final de la escuela infantil, muchos niños llegan a contar oralmente hasta cien. Aunque el aprendizaje de las diez primeras palabras de la secuencia de conteo sea memorístico, a partir del 16 es evidente la importancia de la percepción, por parte del niño, de la repetición de un patrón. Dentro del conteo oral, se inicia en esta etapa el conteo regresivo (desde diez) y el conteo a saltos de diez en diez (hasta el cien). Relacionada con el conteo, está la determinación del siguiente de un número, destreza que se debe dominar para los diez primeros números. Hasta los cuatro años, es muy común que los niños tengan que repetir la secuencia completa para determinar el siguiente de un número. Por ejemplo, para decir cuál es el siguiente de cuatro, se dice: "uno, dos, tres, cuatro, cinco". Este procedimiento muestra claramente la relación del conteo oral con la determinación del siguiente de un número.

[7] Boletín Oficial del Estado, número 32, del viernes 6 de febrero de 2004 (pp. 5041-5050). Disponible en http://www.boe.es/

[8] Recientemente (BOE núm. 4, del jueves 4 de enero de 2007, pp. 474-482), en el Real Decreto de mínimos para el segundo ciclo de la Educación Infantil (3-6 años), las referencias al conteo disminuyen. La presencia del conteo se reduce, básicamente, a mencionar entre los contenidos la "Aproximación a la serie numérica y su utilización oral para contar." (p. 479)

Otro aspecto que favorece el aprendizaje del conteo es la formación de colecciones de objetos equivalentes en número a una colección de muestra. Que los niños, de dos a cuatro años, hagan esto con colecciones de hasta cuatro objetos, mediante la subitización[9] o la correspondencia uno a uno, refuerza la idea de cardinalidad. Esta idea de que el último número recitado en la secuencia de conteo representa el cardinal de la colección de objetos contados, se ve también reforzada por el reconocimiento de patrones numéricos[10], como los que se forman con las manos, los dados, o los naipes. Tanto la cardinalidad, como la correspondencia uno a uno, son básicas para un dominio eficiente del conteo y van siendo dominadas por los niños para cantidades de objetos cada vez mayores, a medida que avanza la edad. Así, al final de la Educación Infantil, los niños deben contar cantidades de hasta 20 objetos indicando cuántos hay y también ser capaces de formar colecciones de objetos con un cardinal dado.

Si al utilizar la referencia asumida para la evaluación, una mayoría de los contenidos que figuran en la misma aparecen en el método, podremos considerar que el método refleja adecuadamente el contenido matemático apropiado para la Educación Infantil. En este caso, la idoneidad matemática del método será alta. Si, por el contrario, muchos de los contenidos matemáticos adecuados para la Educación Infantil están ausentes del método, la idoneidad matemática será baja.

Las ausencias sistemáticas de áreas de las matemáticas

En algunos métodos para el aprendizaje de las matemáticas en Educación Infantil, las ausencias de contenidos son sistemáticas, puesto que algunas partes de las matemáticas resultan completamente excluidas. Este es un caso particular en que la idoneidad matemática será baja. Por ejemplo, la introducción al azar y la estadística son temas ignorados en el currículo de Educación Infantil y en los materiales diseñados para esta etapa. Sin embargo, no hay ninguna razón para que esto sea así. Como señalan Godino, Batanero y Cañizares (1991), "la intuición primaria del azar, esto es, la distinción entre fenómeno aleatorio y determinista sin instrucción previa, está presente en la conducta diaria de cada niño, incluso antes de la edad de 7 años" (p. 39). De acuerdo con este punto de vista, tendría interés incluir en la Educación Infantil experiencias sobre fenómenos aleatorios, o sobre juegos de azar (lanzamiento de dados, ruletas, juegos de extracción de bolas) que permitan a los pequeños enfrentarse con situaciones las que predomine la incertidumbre. En esta situación, se espera que los niños "desarrollen estrategias eficaces y coherentes de previsión y decisión" (Chioffi y Spaggiari, 2002, p. 192). Con respecto al aprendizaje de la estadística en la Educación Infantil, Carbó y Gracia (2004) nos proponen ejemplos de cómo se puede introducir a través de pequeñas investigaciones sobre el peso de los alumnos, la caída de los dientes, el tiempo atmosférico, las costumbres de higiene de los pequeños, etc. En todos los casos, los niños deben hacerse preguntas, recabar información, organizarla (clasificando los

[9] Reconocimiento súbito de una cantidad de hasta 4 o 5 objetos sin necesidad de contar.

[10] Los "patrones numéricos" o "configuraciones" son representaciones numéricas formadas por colecciones de objetos que, gracias a su disposición espacial, permiten el reconocimiento inmediato de la cantidad de objetos sin necesidad de contar.

datos, ordenándolos, haciendo pictogramas…) y tratar de responder a la pregunta previamente planteada. El trabajo que nos muestran es muy rico. Quizá son la visión de la matemática infantil reducida a la introducción al número, y la concepción de la estadística limitada al análisis de datos, las responsables de que no se haya reparado en el interés de este tipo de trabajo en la Educación Infantil. De acuerdo con lo dicho, será interesante valorar si hay partes de las matemáticas excluidas en los "métodos para aprender matemáticas".

El enfoque de la enseñanza de las matemáticas

Por otra parte, al valorar la idoneidad matemática de un método, no sólo nos interesa saber qué matemáticas se enseñan, sino cómo se enseñan. Baroody (2003) describe cuatro enfoques distintos de la enseñanza de las matemáticas cuya descripción puede ayudarnos a identificar el modelo implícito que asumen los autores de un método sobre la enseñanza de las matemáticas. Resumimos las descripciones de este autor en los párrafos siguientes.

El enfoque de destrezas se centra en la memorización de las destrezas básicas a través de la repetición. Este enfoque se basa en la asunción de que el conocimiento matemático es una colección de reglas, fórmulas y procedimientos. Los aprendices son considerados como recipientes vacíos, e incapaces de comprender la mayor parte de los conocimientos matemáticos. El modo más eficiente de enseñar consistirá en la enseñanza directa de procedimientos, seguida de gran cantidad de práctica. No se presta atención a la comprensión de los procedimientos. La enseñanza y la práctica suelen hacer poca referencia al contexto y suelen tener una alta carga simbólica (abstracta). Las actividades no tienen un sentido (un porqué) claro para los alumnos, no suelen estar basadas en sus intereses, no suponen una actividad genuinamente matemática, y no resultan significativas. Sin embargo, los alumnos pueden llegar a alcanzar gran destreza en la ejecución de procedimientos, siendo muy rápidos y cometiendo pocos errores.

El enfoque conceptual se centra en el aprendizaje de procedimientos con comprensión. Las matemáticas son consideradas como una red de conceptos y procedimientos. Los niños son considerados capaces de hacer matemáticas siempre que se les enseñe cómo funcionan los procedimientos. El objetivo de este enfoque es que los niños consigan aprender las reglas, fórmulas y procedimientos de un modo significativo y con comprensión. Los procedimientos simbólicos se representan mediante modelos concretos, utilizando dibujos o materiales manipulativos. Aunque en algunas ocasiones las actividades se presentan descontextualizadas y no está claro su sentido (por qué se hacen), hay un esfuerzo por promover un aprendizaje significativo.

El enfoque de resolución de problemas es radicalmente opuesto al de destrezas. Se centra en el desarrollo del pensamiento matemático a través del razonamiento y la resolución de problemas. Las matemáticas son consideradas como una forma de pensar, un proceso de investigación, o como la búsqueda de regularidades con el fin de resolver problemas. Se considera que los niños son poseedores de un pensamiento inmaduro y unos conocimientos incompletos, pero que están dotados de una gran curiosidad natural y son capaces de construir activamente sus propios conocimientos y su comprensión de las matemáticas. El objetivo principal de la enseñanza es introducir al principiante en la actividad matemática a través de la resolución de problemas reales para los niños. El profesor actúa como un compañero en el proceso de investigación sin dirigir este proceso. En este enfoque, el aprendizaje de procedimientos es secundario al desarrollo del pensamiento matemático.

El enfoque investigativo es una mezcla del enfoque conceptual y el de resolución de problemas. Las matemáticas se ven simultáneamente como una red de conceptos y procedimientos y como un proceso de investigación. Los niños son considerados como capaces de construir activamente su conocimiento, construcción que es mediada y guiada por el profesor a través de propuestas de actividades previamente planificadas, aunque también a través de experiencias de investigación que surgen durante el proceso de aprendizaje. El objetivo es el aprendizaje de reglas, procedimientos y fórmulas de un modo significativo, pero también deben adquirirse competencias de razonamiento, representación, comunicación y resolución de problemas.

Valoración de la idoneidad matemática

Resumiendo este apartado, con respecto a la idoneidad matemática, podemos hacernos las siguientes preguntas:

- ¿Qué contenidos matemáticos adecuados para la Educación Infantil están ausentes en el método? ¿Cuál es la proporción aproximada de contenidos matemáticos que aparecen en el método con respecto a los contenidos matemáticos recomendables para la Educación Infantil?
- ¿Excluye el método algún área, dentro de la matemática, como la estadística, la medición, o el pensamiento espacial?
- ¿Se reduce el método a una parte de las matemáticas como la iniciación a la lógica infantil a través de la clasificación y la seriación, o al conocimiento numérico?
- ¿Qué concepción acerca de las matemáticas y su enseñanza se transmite en el método? ¿Es importante sólo la ejecución sistemática de destrezas? ¿Se da importancia a la comprensión de las destrezas? ¿Promueve la realización de actividades abiertas de investigación por parte de los niños? ¿Con cuál de los modelos descritos sobre la enseñanza de las matemáticas identificarías más el método?

En función de la respuesta a estas preguntas, debemos decidir si la idoneidad matemática del método es baja, moderada o alta. Más allá del juicio emitido, se debe justificar la valoración del grado de idoneidad matemática haciendo referencia a los criterios asumidos en la evaluación.

2. Idoneidad cognitiva

Un aspecto muy importante a considerar al evaluar un método es saber si las tareas que se proponen en el mismo tienen un grado de dificultad adecuada para la edad a la que van dirigidas. Para abordar esta parte de la evaluación, necesitamos referencias sobre el desarrollo evolutivo de los niños pero, sobre todo, sobre el tipo de actividad matemática que pueden realizar a una determinada edad. Esto ha sido indicado por Bredekamp (2004), que sostiene que los maestros de Educación Infantil necesitan:

> Una orientación acerca de qué expectativas sobre el aprendizaje de los niños son apropiadas. Cuando los objetivos suponen un desafío asumible, es decir, son apropiados desde el punto de vista del desarrollo evolutivo, proporcionan un marco teórico muy valioso y práctico para la planificación y la implementación del currículum y para la individualización de la enseñanza. (p. 78).

Las clave de esta cita es la expresión “desafío asumible”. Las tareas propuestas a los niños deben tener un grado de dificultad “asumible” para una mayoría de los pequeños pero, a su vez, deben suponer un pequeño “desafío”. Las actividades demasiado fáciles o demasiado difíciles no son adecuadas para promover el aprendizaje. Esta misma idea la podemos encontrar en distintos autores con matices diferentes. Brousseau (1997), al proponer las características que debe tener una situación de aprendizaje, señala:

> La respuesta inicial que el alumno considera como respuesta a la cuestión planteada no debe ser la que se desea enseñar; si uno debe tener ya el conocimiento que le capacita para responder una cuestión, ésta no sería una situación de aprendizaje. La “respuesta inicial” sólo debe permitir al alumno poner en acción una estrategia básica con la ayuda de su conocimiento previo; pero esta estrategia debe rápidamente mostrarse como suficientemente inefectiva para forzar que el alumno se vea obligado a hacer algún tipo de acomodación, es decir, alguna modificación en su sistema de conocimientos a fin de enfrentarse a la situación propuesta. (p. 228)

Como vemos en la anterior cita de Brousseau, aprender implica modificar en algún sentido el conocimiento previo. Las tareas adecuadas son aquellas en las que el alumno no tiene el conocimiento previo para resolver la tarea, pero tampoco se queda bloqueado sin saber qué hacer. Debe tener un conocimiento anterior que pueda emplear para iniciar el trabajo y debe, a su vez, verse obligado a modificar este conocimiento para resolver la tarea.

Para valorar si los contenidos propuestos tienen un grado de dificultad adecuado, podemos recurrir de nuevo a la información suministrada por Clements (2004). En este trabajo se hacen continuas referencias a las edades en que se aprende cada contenido matemático. Esto permite valorar si los contenidos propuestos por el método para una determinada edad tienen una dificultad adecuada, o son demasiado complejos (o sencillos) para dicha edad. Así, para evaluar la idoneidad cognitiva, servirán de referencia las siguientes preguntas:

- ¿Ofrece referencias por edades dentro de la Educación Infantil?
- ¿Puede presentar el método alguna dificultad ligada al desarrollo evolutivo de los niños y niñas de estas edades?
- ¿Es la dificultad de las tareas propuestas adecuada para una determinada edad?

3. Idoneidad interaccional

Diversos autores señalan que uno de los principios fundamentales para la enseñanza de las Matemáticas en la Educación Infantil debe ser promover las interacciones entre los niños en la clase de matemáticas (Copley, 2000; Edo, 2005; Kamii, 1995). Si identificamos hacer matemáticas con hacer cálculos, o aprender procedimientos de memoria, para aplicarlos en un entorno de trabajo fuertemente individualizado, será muy difícil comprender en qué consiste el aspecto comunicativo de las matemáticas. Esta faceta permanece oculta y el trabajo matemático muestra sólo una de sus caras. Sin embargo, si entendemos las matemáticas como actividad de planteamiento y resolución de problemas, comunicación de las soluciones, discusión y validación de las mismas, la situación cambia. La comunicación adquiere un papel protagonista y la interacción entre los niños desempeña un rol central en la adquisición de conocimientos.

Para comprender la importancia de la comunicación y la interacción en el aula de matemáticas nos apoyamos en el siguiente ejemplo. El siguiente fragmento de conversación está tomado de una clase de niños y niñas de 4 y 5 años. Beatriz, la maestra, está leyendo un cuento sobre formas geométricas a los pequeños. Al mencionar por primera vez el rombo, una de las niñas interrumpe a la maestra:

Beatriz: "Un rombo…"
Cristina: Un rombo yo no sé qué es.
Diego: Es un cuadrado dado la vuelta.
Beatriz: Dice Diego que el rombo es el cuadrado dado la vuelta [Algunos niños dicen que sí; otros que no].
Diego: [Tratando de justificar su respuesta.] Esto es un cuadrado [Intenta formar un cuadrado con los dedos]. Y le falta la parte de arriba [Porque con los dedos sólo puede formar una "U"]. Y, si lo giramos, es un rombo.
Carmen: No. Eso [el rombo] es más grande. Tiene los picos más así, más grandes. Porque tiene los lados más estirados.
Beatriz: Entonces… ¿Es un cuadrado dado la vuelta?
Carmen: Así sería un cuadrado pequeño.
Illya: Si lo giras, parece un triángulo. Bueno, no. Un cuadrado.
Carmen: No. Si lo partes, parece un triángulo [Se refiere a partirlo por la diagonal menor].
Beatriz: ¿Un triángulo o dos?
Varios: Dos.
Illya: Si al rombo le cortas un piquito… Bueno, no, tres piquitos, y lo pones como una cajita, sería un cuadrado.
Cristina: Sí, pero tiene uno, dos, tres, cuatro. Tiene cuatro [Se refiere a los ángulos]. Si tiene cuatro, es un cuadrado.

Esta conversación permite sacar a la luz los conocimientos previos de los pequeños sobre el rombo. Surgen comentarios que dan lugar a conflictos: “Un rombo es un cuadrado dado la vuelta”, “Si tiene cuatro [ángulos], es un cuadrado”. La maestra anotará estas circunstancias y las tendrá en cuenta en la planificación de actividades posteriores, que estarán orientadas a la resolución de estos conflictos. Así, en otra sesión de trabajo, los niños manipulan cuadrados y rombos recortados, para que la forma geométrica no “dependa” de la orientación de una figura representada sobre el papel. Al superponer los cuadrados y los rombos, los niños deciden que son distintos porque “no encajan”. En cursos posteriores, llegarán a considerar los cuadrados como casos particulares de rombos.

Lo que interesa en el presente trabajo es ejemplificar situaciones de aula en las que el tipo de interacción permite elucidar conflictos, discutir dentro del grupo, e incorporar elementos en el proceso de estudio que permitan resolver los conflictos que aparecen. Estas situaciones no se dan si el trabajo de los alumnos es siempre individual. El pensamiento del niño permanece entonces oculto, y a veces sólo contamos con los productos -muchas veces estereotipados- del trabajo de los pequeños.

También nos referimos a la idoneidad interaccional cuando analizamos las interacciones de los niños y niñas con el propio material. Algunas actividades pueden ocasionar dificultades a los alumnos por el modo en que están planteadas. Por ejemplo, muchos niños interpretan la actividad de la figura 1 como una tarea en la que deben poner juntos los dibujos del mismo tamaño, y relacionan el elefante mediano de la izquierda con el grande de la columna de la derecha. Sin embargo, la intención del autor es que se relacionen el elefante pequeño con el pequeño, el mediano con el mediano y el grande con el grande. Las representaciones son interpretadas de forma distinta por el autor del material y por los alumnos que realizan la actividad. Estas divergencias de interpretación constituyen conflictos semióticos.

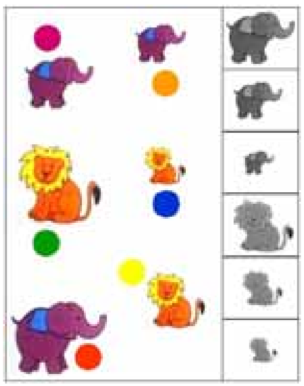


Figura 1. Conflicto en la atribución de significados en la actividad.

Otra fuente de dificultades para la actividad matemática infantil se encuentra en el registro de representación empleado en la actividad. En algunas actividades, las representaciones resultan demasiado abstractas y poco adecuadas al nivel del desarrollo evolutivo de los alumnos. En este sentido, Alsina, Burgués, Fortuny, Giménez y Torra (1996) hacen la siguiente advertencia con respecto al trabajo con fichas en la Educación Infantil:

> Se debería ser muy prudente con el uso de propuestas de trabajo sobre papel y reservarlas siempre como última fase de una labor manipulativa y experimental. Especialmente en los cursos de tres y cuatro años los niños tienen muy poca madurez para interpretar que lo que les damos dibujado en una ficha representa la realidad y que hay unos códigos que substituyen la acción real (p. 68).

De lo que se ha indicado en este apartado, surgen las siguientes preguntas:

- ¿Es el aprendizaje que se sigue en el método individual? ¿Contempla la posibilidad de aprender cooperativamente dentro de un grupo?
- ¿Hay posibilidad de que se resuelvan los posibles conflictos de significados que pueden surgir al interactuar con el material?
- ¿Aparecen representaciones con una excesiva carga simbólica (abstracta)?
- ¿Hay actividades en el método que pueden ocasionar dificultades de comprensión por el tipo de representación que utilizan o por la ambigüedad de sus consignas?

4. Idoneidad mediacional

La idoneidad mediacional refleja el grado en que un método consigue una gestión adecuada de los medios, recursos didácticos, materiales manipulativos, e incluso del tiempo de enseñanza. Con respecto a los materiales manipulativos, Baroody (1989) advierte que lo importante no es que los niños manipulen activamente objetos concretos y reflexionen sobre sus acciones físicas, sino que manipulen activamente algo que sea *familiar* para ellos y reflexionen sobre sus acciones *físicas o mentales*. El medio particular que se utiliza (objetos, dibujos, vídeos, etc.) no es tan importante como que la experiencia sea significativa y que los niños reflexionen sobre esta experiencia. Debemos tener en cuenta que materiales muy famosos, como las regletas de Cuisenaire, han recibido críticas muy severas por no producir un aprendizaje significativo en la iniciación aritmética, pues no están basadas en el conteo (Baroody, 1989) o por que su uso, por ejemplo al ordenarlas de menor a mayor, no implica que los niños hayan alcanzado la etapa de seriación operatoria, o que comprendan la inclusión jerárquica (Kamii, 1995).

Figura 2. Actividad de juego libre con construcciones.

En cuanto al tiempo de enseñanza, ilustraremos con un ejemplo de actividad matemática infantil la importancia de su gestión. En la figura 2 observamos una construcción realizada por una niña de 5 años en un momento de juego libre. La construcción tiene dos planos de simetría perpendiculares. La actividad tiene un gran valor desde el punto de vista matemático. El concepto de simetría no aparece en el currículo de Educación Infantil y, sin embargo, es un contenido matemático adecuado para esta etapa educativa (Clements, 2004). También hay que valorar que esta construcción permitiría comenzar un estudio sistemático del concepto de simetría basado en el interés y en las ideas previas de los alumnos.

No obstante el valor matemático, afectivo, y de promoción de un aprendizaje significativo de la actividad de la niña, debemos destacar otro aspecto importante, esta vez en el "debe" de la actividad: la inversión de tiempo que supone este tipo de trabajo. Las situaciones de juego libre, de juego de construcción, de aprendizaje por proyectos, etc., suelen demandar grandes cantidades de tiempo para su desarrollo. El tiempo es quizá uno de los recursos más importantes en la escuela. Cuando un tipo de actividad consume la mayor parte del horario, es muy probable que otro tipo de actividad, fundamental para la educación matemática de los niños, quede sin realizar. Los momentos de exploración y de investigación deben alternarse con otros orientados al aprendizaje de contenidos específicos. Esto es lo que se hace, como se describía en la sección primera, en el enfoque investigativo (Baroody, 2003). En resumen, para valorar la idoneidad mediacional, nos hacemos preguntas como:

- ¿Se consigue, al seguir el método, una gestión adecuada del tiempo de enseñanza? ¿Exige la dedicación excesiva de tiempo limitando la realización de otros tipos de actividades también fundamentales para la formación del niño?
- ¿Permite el método el uso de medios adecuados (como materiales manipulativos) y promueve la reflexión acerca de las acciones físicas o mentales que se realizan con estos materiales?

5. Idoneidad emocional

Las matemáticas producen ansiedad a muchos alumnos. Frecuentemente, este fuerte componente emocional negativo tiene su origen en el modo en que se enseñan las matemáticas. Al llevar nuestra reflexión al ámbito de lo emocional (y, más en general, a lo afectivo) deseamos destacar que es imprescindible valorar los aspectos que van más allá de lo cognitivo al evaluar la adecuación de un método para enseñar matemáticas; especialmente, si está dirigido a niños y niñas de Educación Infantil.

En esta línea, y ahondando en la relación de la enseñanza con sus efectos en lo afectivo, otros elementos a tener en cuenta serán el autoconcepto del estudiante como matemático y su confianza respecto a las matemáticas. Según Baroody (1994), poner en la enseñanza de las matemáticas un énfasis exagerado en la memorización de datos y el uso de técnicas puede crear una visión distorsionada de las matemáticas e incluso de la propia persona. El predominio del seguimiento "ciego" de procedimientos y la conducta mecánica sobre el pensamiento activo, puede fomentar creencias perfeccionistas y un sentimiento de "inutilidad" en los alumnos. Este sentimiento puede llegar a incapacitar a los alumnos para hacer matemáticas e incluso, en algunos casos, a provocar ansiedad.

Aunque hayamos empleado el término "emocional", la dimensión afectiva en Matemáticas no se reduce solamente a los sentimientos y las emociones (positivos o negativos) que se producen en el trabajo matemático. También consideramos como elementos importantes en este ámbito las creencias sobre las matemáticas, las actitudes hacia las mismas, los valores y las apreciaciones (Gómez, 2000). Como señala Baroody (1994) algunas creencias sobre las matemáticas son perfeccionistas y tienen un efecto "debilitador" para los alumnos, mientras que otras creencias son racionales y constructivas y promueven el uso inteligente de las matemáticas y el bienestar de los alumnos.

En cuanto a las apreciaciones, podemos destacar la percepción que tienen los estudiantes de la utilidad de las matemáticas. Como indica Skowsmose (1999) "para muchos alumnos las matemáticas formales pueden parecer hostiles y excéntricas por que les es difícil ubicarse a sí mismos en una situación de la vida (futura), a la que aspiren a llegar, donde las matemáticas que han visto en la escuela jueguen un papel vital" (p. 211). Parece, por tanto, esencial enfatizar las conexiones de las matemáticas con la realidad y presentar los conocimientos dentro de un contexto que les dé sentido.

Katz y Chard (2000) proponen que los métodos de enseñanza son adecuados cuando toman en cuenta, entre sus objetivos educativos, los siguientes elementos: el conocimiento, las destrezas, las disposiciones y los sentimientos. Estas autoras definen las disposiciones como "hábitos mentales o tendencias a responder a situaciones de forma determinada" (p. 26). Como ejemplos de disposiciones proponen la "curiosidad", o la "persistencia en la tarea ante una dificultad". Por otra parte, definen los sentimientos como "estados subjetivos emocionales o afectivos tales como sentirse aceptado, tener confianza, o ansiedad" (p. 26).

Dentro de las disposiciones, Katz y Chard (2000) otorgan un papel destacado al interés, al que definen como "la disposición a realizar una actividad o perseguir una meta en ausencia de presiones o recompensas. Incluye la tendencia a quedar tan absorto por la actividad como para continuarla durante un periodo de tiempo extenso, con un grado de compromiso suficiente como para admitir tanto su rutina como sus aspectos novedosos" (p. 38). El término "interés", muy empleado en los métodos de proyectos, es considerado por estas autoras como sinónimo de "motivación extrínseca". Dewey (2002) pensaba que "el interés representa la fuerza impulsora […] en toda experiencia que tenga un propósito" (p. 116). También en el ámbito de las matemáticas se valora tomar como punto de partida los intereses de los niños. Por ejemplo, Copley (2000) sostiene que "las decisiones curriculares deberían tener en cuenta los conocimientos infantiles, sus capacidades e intereses" (p. 14). Entre los aspectos afectivos señalados por esta autora destacan las disposiciones infantiles, sus actitudes hacia las matemáticas y los intereses, así como la tendencia a explorar y a experimentar.

Si entendemos el interés como “capacidad de implicarse en una tarea”, debemos reconocer a Brousseau (1997) el mérito de haber adaptado el término a la Didáctica de las Matemáticas, al introducir su concepto de *devolución* de una situación adidáctica. “La devolución es la acción mediante la cual el profesor consigue que el alumno acepte la responsabilidad de [abordar] una situación de aprendizaje o un problema” (Brousseau, 1997, p. 230). El alumno no se compromete a realizar la tarea por agradar al profesor, sino que establece una relación con la propia tarea; asume el problema como propio, independientemente del deseo de su profesor. En este tipo de situaciones, la actividad cobra sentido para el alumno, convirtiéndose en una verdadera ocasión para hacer matemáticas. Al producirse la devolución, la actividad pierde el carácter estereotipado, excesivamente “escolar”, y muchas veces carente de sentido, que tienen a veces las actividades matemáticas en la escuela. Más allá de que podamos decir que la motivación es intrínseca, el factor más importante es el sentido que el sujeto atribuye a la actividad matemática.

La idea de que en la educación debemos procurar que el impulso para el aprendizaje provenga del mismo sujeto, y de que cada acción debe tener un sentido claro para quien la realiza es antigua. Kilpatrick (1918), reconocido como uno de los iniciadores de los métodos de proyectos, toma -como elemento fundamental del método- las acciones que salen del interior y a las que el sujeto les da un sentido: “Es a esta acción con sentido[11], con el énfasis en la palabra “sentido”, al que yo mismo aplico el término ‘proyecto’” (p. 1).

Dentro de la Didáctica de las Matemáticas, Sfard (2003) sostiene que la necesidad de dar significado, de comprendernos a nosotros mismos y de comprender el mundo que nos rodea es fundamental en todas nuestras actividades intelectuales. Resulta interesante al respecto el siguiente ejemplo tomado del trabajo de Edo (2005).

En la tabla 1 figuran las preguntas que se plantearon a un grupo de niños de 4 y 5 años que estaban realizando una ficha en la que aparecen cuatro conjuntos, representados mediante diagramas de Venn. Para hacer la ficha los pequeños debían contar el número de caracoles de cada conjunto y escribir el cardinal del conjunto en una etiqueta que colgaba del mismo. Al leer las respuestas, observamos que la actividad no tiene ningún sentido para los niños. Sin embargo, en una ocasión distinta, se hacen las mismas preguntas en una clase de 5 y 6 años en la que los niños han realizado una receta de un “platillo volante”, con galletas, crema de cacao y varias estrellitas de adorno. Después de haber preparado la merienda, cada niño escribe la receta para llevársela a casa. Las respuestas de los niños ante las mismas preguntas no dejan lugar a dudas: la actividad desarrollada tiene un sentido pleno para ellos.

[11] Las expresiones que utiliza Kilpatrick (1918) son “purposeful act” y “hearty purposeful act”.

Tabla 1
Sentido que dan los niños a distintas tareas escolares

Preguntas	***Respuestas al realizar una ficha***	***Respuestas al hacer el "platillo volante"***
¿Qué hacemos?	Rellenar la ficha.	Explicar lo que se necesita para hacer el platillo volante.
¿Por qué lo hacemos?	Para escribir números.	Para llevarlo a casa y poder hacerlo con mamá, papá y la abuela.
¿Dónde queremos llegar?	No sé.	A que mamá entienda lo que se necesita.
¿Qué queremos saber?	Escribir números.	Hacer la receta sin equivocarme.
¿Qué queremos responder?	Cuántos hay.	Qué necesitamos para hacer un platillo volante.
¿Qué deseamos hallar?	Nada.	Una manera de explicar que los otros me entiendan.

Resumiendo este punto, nos podemos preguntar:

- ¿Puede producir el método creencias "debilitadoras", actitudes negativas hacia las matemáticas, sentimientos de incapacidad, o incluso angustia, por el modo (mecánico, memorístico, etc.) de tratar las matemáticas?
- ¿Piensas que las actividades tienen en cuenta los intereses de los niños y que es fácil que los pequeños se impliquen en ellas sin tener en cuenta presiones, recompensas o por satisfacer a la maestra?
- ¿Pueden tener las actividades propuestas en el método sentido para los alumnos?
- ¿Tienen las actividades aplicación a la vida extraescolar, de modo que las matemáticas aparezcan como útiles para la vida diaria?

6. Idoneidad ecológica

Chevallard (2001) al escribir sobre los factores que condicionan el tipo de actividad matemática que es posible vivir en la escuela, establece distintos niveles de determinación didáctica:

Sociedad → Escuela → Pedagogía → Disciplina → Área → Sector → Tema → Cuestión

Por idoneidad ecológica nos referimos al grado en que un método para aprender matemáticas resulta adecuado dentro del entorno en que se utiliza. Por entorno entendemos todo lo que está fuera del aula, condicionando la actividad que se desarrolla en la misma. Así, nos podemos referir a todo lo que viene en general determinado por la pedagogía, la escuela y la sociedad. Sin embargo, nuestra mirada se centrará en el análisis en cuestiones más particulares: ¿Qué valoración podemos hacer del método desde el currículo de Educación Infantil? ¿Se ajusta el método al proyecto del centro? ¿Y al entorno social y familiar de la escuela? ¿Qué valores educativos, morales, o ideológicos parecen desprenderse del método?

Empecemos por la relación del método con el entorno familiar. En la Educación Infantil, debido a la edad de los niños, es fundamental la relación que se establece entre las escuelas y las familias. Copley (2000) señala como uno de los principios de enseñanza en que debe fundamentarse el aprendizaje de las matemáticas en este ciclo: "facilitar las relaciones entre escuela y familia" (p. 18). En muchas escuelas, los padres se ven obligados a comprar métodos de trabajo, elaborados por editoriales, para el aprendizaje matemático de sus hijos. En estos casos, es habitual que, en correspondencia a la obligación de pagar, se plantee la exigencia por parte de los padres de que los educadores saquen el máximo provecho de la inversión realizada. En algunos casos extremos, la actividad escolar de los niños llega a reducirse a la realización de fichas y a las rutinas diarias habituales. En esta situación, las fichas realizadas por los alumnos se convierten en el único testimonio válido del trabajo y el aprendizaje que realizan los niños en la escuela. Se produce un fenómeno de "esclavitud metodológico" según el cual la actividad infantil resulta muy empobrecida, ya que no queda tiempo para hacer otro tipo de actividad distinto de las fichas. Este es un ejemplo de cómo la relación que se establece entre la escuela y las familias puede condicionar decisivamente -en un sentido negativo- la actividad escolar.

También podemos preguntarnos si un método "encaja" con el proyecto curricular del centro o si respeta los mínimos prescritos por el currículo de Educación Infantil. En ambos casos, estamos discutiendo sobre la posibilidad de implantar un método en un centro. En el primer caso, es muy poco probable que cualquier iniciativa en un centro pueda ser coronada con el éxito si no es apoyada por el centro, o incluso compartida por el claustro. En el caso de no cumplir con los mínimos exigibles legalmente, el material puede no ser homologado o autorizado para su uso. Cabe recordar en este punto, como se advertía al describir la idoneidad matemática, que el hecho de que un método para aprender matemáticas sea aprobado por el ministerio y cumpla con los mínimos legales, no quiere decir en absoluto que tenga una idoneidad matemática alta.

Finalmente, podemos preguntarnos si un método para la enseñanza de las matemáticas promueve verdaderos valores educativos. Por ejemplo, Kamii (1995) propone que un objetivo fundamental de la Educación Matemática Infantil debe ser promover la autonomía intelectual de los niños. Kilpatrick (1918) pensaba en las acciones con sentido, a las que él identificaba con los "proyectos", como corazón de la vida democrática. Skovsmose (1999) se plantea cómo conseguir que la Educación Matemática permita a los ciudadanos ser parte activa de una sociedad democrática.

En definitiva, yendo más allá incluso del conocimiento matemático que pueda adquirirse a través de un método, podemos preguntarnos si dicho método es verdaderamente educativo o sólo un método de adiestramiento. Quizá la respuesta a esta pregunta nos dará la clave para valorar el método en relación con nuestra propia concepción de las matemáticas, su enseñanza, y las metas educativas que proponemos para la Educación Matemática de los niños y niñas de Educación Infantil. Así, para finalizar el análisis de la dimensión ecológica de la idoneidad didáctica del método, podemos preguntarnos:

- ¿Facilita el método una relación productiva escuela-familia de cara a promover el aprendizaje matemático de los niños?
- ¿Encaja el método con el proyecto curricular del centro? ¿Respeta las orientaciones mínimas del currículo de Educación Infantil?
- ¿Promueve el método verdaderos valores educativos o cabe considerarlo como un método de “adiestramiento matemático”?

Conclusiones

Los criterios de idoneidad didáctica nos proporcionan un marco teórico de referencia para valorar cualquier proceso de estudio de las matemáticas. En particular, sirven para evaluar métodos para el aprendizaje de las matemáticas en la etapa educativa de Educación Infantil[12]. También pueden utilizarse para evaluar libros de texto de matemáticas de Educación Primaria o Secundaria, siempre que se construya previamente el modelo de referencia que permita la evaluación de la idoneidad matemática. Los criterios de idoneidad didáctica, detallados en este trabajo, no sólo sirven para valorar la idoneidad de procesos de estudio planificados en un método o en un texto y prolongados en el tiempo, sino que han sido inicialmente aplicados a procesos de estudio menos extensos y, a cambio, con un detalle muy superior en el análisis de la idoneidad matemática (Godino, Font y Wilhelmi, 2006). Se debe señalar, además, que podemos valorar la idoneidad didáctica de un proceso de estudio implementado, no sólo de uno planificado.

Una última advertencia crucial es que debemos siempre distinguir entre el *método* y el *uso del método*. Un buen método puede utilizarse mal y un método regular puede mejorarse mucho en la práctica. La idea impulsora de este trabajo no es la de descalificar o etiquetar los métodos, sino la de fomentar una reflexión sistemática sobre los mismos. Así, los criterios de idoneidad pueden utilizarse también como herramientas para orientar a los profesionales sobre el uso adecuado de un método. El conocimiento de las posibles carencias y limitaciones del método servirá de ayuda para determinar el trabajo complementario que será necesario realizar para promover en los pequeños un aprendizaje adecuado de las matemáticas. Este comentario es especialmente relevante cuando se analiza un método de fichas o un libro de texto.

En este trabajo, se ha tratado de explicar los criterios de idoneidad de modo que puedan ser aplicados, no sólo por especialistas en Didáctica de las Matemáticas, sino especialmente por maestros especialistas en Educación Infantil. Esperamos que esta herramienta resulte de interés teórico y práctico para todos aquellos maestros y maestras de Educación Infantil interesados en reflexionar sobre su quehacer diario a fin de mejorar su docencia.

---

[12] En particular, en este trabajo nos hemos centrado en el segundo ciclo de Educación Infantil (de 3 a 6 años).

Bibliografía

- C. Alsina, C. Burgués, J. M. Fortuny, J. Jiménez, y M. Torra (1996). *Enseñar matemáticas*. Graó, Barcelona.
- A. J. Baroody (1989): “Manipulatives don’t come with guarantees”. *Arithmetic Teacher, 37*(2), 4-5.
- A. J. Baroody (1994): *El pensamiento matemático de los niños: Un marco evolutivo para maestros de preescolar, ciclo inicial y educación especial*. Visor, Madrid.
- A. J. Baroody (2003): “The development of adaptive expertise and flexibility: The integration of conceptual and procedural knowledge”. In A. J. Baroody, & A. Dowker (Eds.), *The development of arithmetic concepts and skills* (pp. 1-33). Lawrence Erlbaum Associates, Mahwah, NJ.
- R. Balfanz (1999): “Why do we teach young children so little mathematics? Some historical considerations.” In J. V. Copley (ed.), *Mathematics in the early years* (pp. 3-10): NCTM & NAEYC, Reston, VA.
- S. Bredekamp (2004): “Standards for preschool and kindergarten mathematics education.” In D. H. Clements, & J. Sarama (eds.), *Engaging young children in mathematics: Standards for early childhood mathematics education* (pp. 77-82). Lawrence Erlbaum Associates, Mahwah, NJ.
- G. Brousseau (1997): *Theory of didactical situations in mathematics: Didactique des mathématiques*. Kluwer, Dordrecht.
- L. Carbó y V. Gràcia (Coords.) (2004): *El mundo a través de los números*. Milenio, Lleida.
- D. H. Clements (2004): “Major themes and recommendations.” In D. H. Clements, J. Sarama, & A. M. DiBiase (eds.), *Engaging young children in mathematics: Standards for early childhood mathematics education* (pp. 7-72). Lawrence Erlbaum Associates, Mahwah, NJ.
- J. V. Copley (2000): *The young child and mathematics*. NAEYC & NCTM, Washington, DC & Reston, VA.
- I. Chevallard (2001): Aspectos problemáticos de la formación docente, *XVI Jornadas del SI-IDM*, Huesca. Organizadas por el grupo DMDC del SEIEM. Disponible en: www.aix-mrs.iufm.fr/formations/filieres/mat/fdf/textes/YC_2001_Osca.doc
- D. Chioffi y A. Spaggiari (2002): “Entre el seguro, el quizá y el imposible. El niño descubre la razón del probable”. En Escuelas Infantiles de Reggio Emilia (Eds.), *La inteligencia se construye usándola* (3ª ed.) (pp. 183-193). Morata, Madrid.
- M. Deaño (1993): *Los conocimientos lógico-matemáticos en la Escuela Infantil: desarrollo, diseño y observación*. CEPE, Madrid.
- J. Dewey (2002): *Democracia y educación: Una introducción a la filosofía de la educación*. 5 ed. Morata, Madrid.
- L. Dickson, M. Brown, y O. Gibson (1991): *El aprendizaje de las Matemáticas*. Labor & MEC, Barcelona.
- G. Doman y J. Doman (2005): *Cómo enseñar matemáticas a su bebé*. Diana, México, DF.
- M. Edo (2005): “Educación matemática versus Instrucción matemática en Infantil.” Em E. Rodrigues (coord.), *Actas do I Congresso Internacional de Aprendizagem na Educação de Infância -CIANEI* (pp. 125-137). Gailivro, Porto.
- J. D. Godino, M. C. Batanero, y M. J. Cañizares (1991): *Azar y probabilidad*. Síntesis, Madrid.

- J. D. Godino, D. Bencomo, V. Font y M. R. Wilhelmi (2006): "Análisis y valoración de la idoneidad didáctica de procesos de estudio de las matemáticas". Versión ampliada de la ponencia invitada en el X Simposio de la Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática (SEIEM), Huesca (España), 7-9 Septiembre 2006.
- J. D. Godino, V. Font y M. R. Wilhelmi (2006): "Análisis ontosemiótico de una lección sobre la suma y la resta". *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa, 9* (Especial): 133-156.
- I. M. Gómez (2000): *Matemática emocional: Los afectos en el aprendizaje matemático*. Narcea, Madrid.
- C. Kamii (1995): *El número en la educación preescolar*. 4ª ed. Visor, Madrid.
- L. G. Katz y S. C. Chard (2000): *Engaging children's minds: The project approach*. 2nd ed. Ablex, Stamford, CO.
- T. H. Kilpatrick (1918): "The Project Method". *Teachers College Record, 19*, pp. 319-34.
- F. Secadas (Coord.) (2004): *Contar es fácil: Fundamentos psicopedagógicos del aprendizaje del cálculo*. Madrid: CEPE.
- A. Sfard (2003): "Balancing the unbalanceable: The NCTM Standards in the light of theories of learning mathematics". In J. Kilpatrick, Martin, G., & Schifter, D. (Eds.), *A Research Companion for NCTM Standards* (pp. 353-392): Reston, VA: National Council for Teachers of Mathematics.
- O. Skovsmose (1999): Hacia *una filosofía de la Educación Matemática crítica*. Una empresa docente & Universidad de los Andes, Bogotá.

Carlos de Castro Hernández (Madrid, España, 1968) es Licenciado en Ciencias Matemáticas por la Universidad Complutense de Madrid (1994). Desde 1995, y en la actualidad, es profesor de Didáctica de las Matemáticas en la titulación de "Maestro", en el Centro Superior de Estudios Universitarios La Salle, adscrito a la Universidad Autónoma de Madrid. Desde 2006 es profesor asociado de Didáctica de las Matemáticas en la Universidad Complutense de Madrid. Sus líneas de investigación son la Educación Matemática Infantil y el Pensamiento Numérico.

REVISTA IBEROAMERICANA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA

Septiembre de 2007, Número 11, páginas 79-97
ISSN: 1815-0640

O Ensino-Aprendizagem de Matemática através da Resolução de Problemas e os Processos Cognitivos Superiores[1]

Edna Maura Zuffi y Lourdes de la Rosa Onuchic

Resumo

Neste trabalho apresentamos uma experiência de prática contínua da metodologia de ensino-aprendizagem de Matemática através da resolução de problemas, em uma escola pública do Ensino Médio, no Brasil. Apresentamos dados coletados em observações filmadas em sala de aula e através de entrevistas com a professora parceira. Concluímos pela viabilidade de tal metodologia para a realidade cultural das salas de aula de nossas escolas públicas, com melhorias no que diz respeito à aprendizagem dos alunos e o favorecimento de aspectos metacognitivos, ligados a processos mentais superiores.

Abstract

In this paper we present an experience on the teaching-learning of Mathematics through problem solving as a continued methodology, in a public Brazilian high school. We show a set of data collected in classroom, which were videotaped, or by interviews with the participating teacher. We concluded for the viability of such a methodology for the cultural reality of such classrooms, which reached better level of students' learning, as well as improvement of their metacognitive activity, related to superior mental processes.

Introdução

Neste artigo, trataremos da aplicação de atividades de ensino-aprendizagem de Matemática através da resolução de problemas, como parte do projeto "DESENVOLVIMENTO E AVALIAÇÃO DE UMA PEDAGOGIA UNIVERSITÁRIA PARTICIPATIVA NO ENSINO MÉDIO: atividades com ênfase em Matemática, Ciências e Comunicação". Este projeto originou-se no *campus* da Universidade de São Paulo, na cidade de São Carlos, Brasil, e tem o apoio de vários institutos deste campus.

Como parceira, foi selecionada uma escola da rede pública dessa cidade, devido à sua localização próxima à Universidade, à clientela de alunos bastante heterogênea, quanto ao aspecto sócio-econômico, e também pela aceitação da parceria por parte de seus diretores, coordenadores e professores.

[1] Parcialmente financiado pela FAPESP-Brasil

O projeto tem por objetivo geral promover a melhoria da qualidade do ensino de Ciências e Matemática nessa escola, em classes do Ensino Médio (alunos de 15 a 17 anos), e este fim desdobra-se na formação de aptidões para as ciências, em se tratando dos alunos, e na formação continuada dos professores envolvidos. Iniciou-se em 2000, de forma experimental, com uma turma de 40 alunos da 1ª série do Ensino Médio. No período de 2001 a 2005, o projeto contou com o financiamento da FAPESP (Fundação de Amparo à Pesquisa do Estado de São Paulo).

Nesse projeto, para o ensino de Matemática em sala de aula, foi confeccionado um texto didático, que tem como foco a *resolução de problemas* nas aulas que iniciam assuntos novos para os alunos. Não foi possível adotar esta mesma metodologia em todas as aulas do curso, devido aos seguintes fatores: i) os alunos não estavam habituados a resolver problemas naquela escola, e uma mudança total nos métodos de ensino nessas classes poderia gerar inconvenientes dentro da mesma; ii) um dos propósitos do projeto é o apoio aos alunos da escola pública que pretendem ingressar em cursos superiores públicos, através de exames vestibulares, principalmente na área de ciências exatas. Desse modo, não poderíamos desconsiderar o grande número de informações, conteúdos e processos da Matemática exigidos neste tipo de exames, no Brasil; iii) os professores envolvidos no projeto também não estavam habituados a trabalhar com a resolução de problemas, e apresentavam dificuldades iniciais em aplicar as situações-problemas.

Mesmo com as restrições acima, os resultados que encontramos na aplicação do que chamamos *metodologia de ensino-aprendizagem de Matemática através da resolução de problemas*, para este projeto, foram muito promissores e acreditamos que sejam inéditos, no Brasil, para o Ensino Médio, e com o grau de continuidade com que tal metodologia tem sido aplicada. Isto traz várias reflexões acerca da melhoria da qualidade do ensino nas escolas públicas, fato que tem sido objeto de inúmeras discussões e uma meta no Brasil, para a formação de nossos alunos e professores.

Um cenário para a Resolução de Problemas

A Resolução de Problemas tem sido foco de pesquisas na área de Educação Matemática, em diversos países. Desde a tradução, no Brasil, da obra organizada por Krulik & Reys (1997), o livro do ano de 1980 do NCTM[2], que esta linha de ensino e pesquisa ganhou mais fôlego entre a maioria de nossos pesquisadores. Este livro traz artigos de especialistas, em sua maioria americanos, e o primeiro deles é a reprodução de um texto de George Pólya, de 1949, cujas idéias desencadearam

[2] National Council of Teachers of Mathematics, dos E.U.A.

maiores discussões sobre a questão da Resolução de Problemas (R.P.) em Matemática, com seu clássico "How to solve it"[3].

No cenário internacional, encontramos vários trabalhos sobre essa temática, abordada sob diversos prismas e referenciais teóricos. Acabando a década de 1980, em que a ênfase em resolução de problemas era colocada sobre o uso de modelos e estratégias, novas discussões foram desencadeadas. A Resolução de Problemas passa, então, a ser pensada como uma metodologia de ensino, ponto de partida e meio de se ensinar Matemática. Sob esse enfoque, problemas são propostos de modo a contribuir para a construção de novos conceitos e novos conteúdos, antes mesmo de sua apresentação em linguagem matemática formal. A Resolução de Problemas, como uma metodologia de ensino, passa a ser o lema das pesquisas para os anos 90 (Onuchic, 1999).

English (1998) estuda, nesta temática, a proposta de atividades para os alunos nas quais eles possam gerar seus próprios problemas, em adição à resolução de outros pré-formulados. A autora investigou se crianças da 3ª série, que possuíam diferentes perfis para a noção de número, reconheciam o simbolismo formal como representando uma gama de situações-problemas, e como respondiam a atividades de proposição de problemas em contextos formais e informais.

Numa outra perspectiva, Lawson & Chinnappan (2000) examinaram a relação entre o desempenho na resolução de problemas e a qualidade de organização do conhecimento de 36 (trinta e seis) estudantes da 10ª série, em tarefas de geometria, na Austrália. Estes foram classificados em dois grupos (um de alto e outro de baixo rendimento) e os autores reportam suas análises estatísticas quanto a indicadores de conteúdo e conexão ("content" & "connectedness") para os dois grupos. Os indicadores de conexão de conhecimentos mostraram que os alunos de alto rendimento, em comparação aos outros, podiam retomar mais conteúdos espontaneamente e ativar mais ligações entre esquemas de conhecimentos dados e informações relacionadas. Comentam que estes indicadores de conexão foram mais determinantes para diferenciar os grupos quanto à base de seu sucesso na resolução de problemas.

Van Dooren, Verschaffel & Onghena (2002) investigaram estratégias e habilidades na resolução de problemas aritméticos e algébricos, com professores em formação inicial, para escolas primárias e secundárias da Bélgica, comparando-os no início e no final de seu curso. Analisaram aspectos de seu comportamento ao resolverem os problemas propostos e a maneira pela qual avaliavam a solução de seus alunos. Verificaram que os futuros professores da escola secundária preferiam usar a álgebra, tanto para suas soluções quanto para avaliar o trabalho dos alunos, mesmo quando uma solução aritmética parecia mais evidente. Alguns professores da escola primária tendiam a aplicar exclusivamente métodos aritméticos, mas, tomadas como um todo, concluíram que as avaliações dos professores primários estavam mais adaptadas à natureza da tarefa.

[3] No Brasil, "A Arte de Resolver Problemas".

Ainda, no IX Congresso Internacional de Educação Matemática (IX ICME), realizado em 2000, no Japão, instalou-se um grupo de discussão sobre a "Resolução de Problemas na Educação Matemática"[4]. Um dos pontos enfatizados nestas discussões foi quanto à pesquisa sobre a prática e os trabalhos desenvolvidos para ensinar através de, e sobre, a resolução de problemas.

González (2005) retoma a temática das investigações sobre a resolução de problemas e procura identificar suas tendências predominantes, refletidas nos títulos dos trabalhos apresentados em 5 (cinco) importantes reuniões de Educação Matemática, que ocorreram na América Latina entre 1998 e 2001. Isto reforça nossa hipótese de que a comunidade de pesquisadores em Educação Matemática ainda considera relevante e profícua esta temática.

No cenário brasileiro, Alves (2004) também coloca como um dos objetivos da Educação Básica, desenvolver no aluno a capacidade de solucionar problemas. Utiliza o "modelo de prontidão" para uma atividade matemática, proposto por Krutetskii (1976), para analisar como a habilidade para perceber um tipo generalizado de problema se manifesta em estudantes do Ensino Médio, com diferentes desempenhos na solução de problemas matemáticos. Esse componente, segundo a autora, seria responsável pela generalização rápida e imediata da estrutura do problema, que ocorre no momento em que o sujeito percebe e seleciona as características essenciais daquele tipo de problema, na leitura inicial. Os resultados da autora indicaram que os estudantes investigados não apresentavam tal componente desenvolvido satisfatoriamente.

O GTERP - Grupo de Trabalho e Estudo em Resolução de Problemas – coordenado por Onuchic desde 1992, Na Universidade Estadual Paulista, em Rio Claro, Brasil, tem sido o núcleo gerador de atividades de aperfeiçoamento, investigações e produção científica nesta linha e adota a Metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática através da resolução de problemas para todos os níveis de escolaridade. Algumas dissertações, teses e artigos produzidos sob a orientação da coordenadora desse grupo são: Pironel, 2002; Azevedo, 2002; Bolzan, 2003; Paulette, 2003; Pereira, 2004; Allevato (2005); Huaman, 2006; Onuchic & Allevato (2005)). Obviamente, nesta retomada de alguns trabalhos acerca da Resolução de Problemas como um objeto de estudos consistente dentro da Educação Matemática, deixamos de abordar muitos outros (Oliveira, 2000; Utsumi, 2000; Medeiros, 2001). Nossa intenção com tais citações é mostrar que o tema continua atual nas discussões junto a pesquisadores da área. Porém, no que diz respeito à real capacidade da metodologia de ensino-aprendizagem *através da* resolução de problemas provocar mudanças de longo prazo nas salas de aula de Matemática, principalmente no Brasil, e com todas as condições peculiares de nossa educação, ainda há investigações a se fazer. É nesta perspectiva que trazemos esta pesquisa ao debate.

[4] TSG-11: Problem Solving in Mathematics Education.

Aspectos teóricos da pesquisa

Em nosso projeto, tendo em vista que desejávamos um bom desenvolvimento junto aos alunos, tanto da linguagem matemática, quanto de sua aplicação para resolver problemas nas mais diversas áreas, optamos pelo desenvolvimento dos conceitos e conteúdos de Matemática *através da Resolução de Problemas.*

Encaramos nossa proposta como uma *metodologia*, porque ela não deve ser confundida com a mera introdução de problemas de aplicação, geralmente encontrados nos finais dos capítulos dos livros-textos de Matemática. Ela consiste em apresentar aos alunos, *já no início do tratamento* de um dado conteúdo, uma ou mais situações-problemas que possam levá-los a raciocinar sobre a necessidade de construir novos conceitos e processos, bem como a de associar outros periféricos, que venham a se conectar numa rede de significados (Machado, 1996, p. 117-176) e, também, para que possam trazer à tona as concepções prévias que eventualmente eles tenham sobre os campos conceituais envolvidos na resolução. Assim, este processo "requer um amplo repertório de conhecimento, não se restringindo às particularidades técnicas e aos conceitos, mas estendendo-se às relações entre eles e aos princípios fundamentais que os unificam. O problema não deve ser tratado como um caso isolado, mas como um passo para alcançar a natureza interna da matemática, assim como seus usos e aplicações" (Onuchic, 1999, p. 199-218). A partir, então, de seu envolvimento significativo com essas situações-problemas, e de uma síntese dos resultados alcançados pelos alunos, é que o professor pode ir à lousa e sistematizar os novos conhecimentos matemáticos discutidos e pesquisados durante o processo de busca das soluções, para depois retomá-los, então, em outros problemas e exercícios.

Adotamos a concepção de Onuchic (1999), segundo a qual se entende por *problema,* "tudo aquilo que não se sabe fazer, mas que se está interessado em resolver", isto é, qualquer situação que estimule o aluno a pensar, que possa interessá-lo, que lhe seja desafiadora e não trivial. Também é desejável que ela tenha reflexo na realidade dos alunos a que se destina.

Compreender os dados de um problema, tomar decisões para resolvê-lo, estabelecer relações, saber comunicar resultados e ser capaz de usar técnicas conhecidas são aspectos que devem ser estimulados em um processo de aprendizagem *através* da resolução de problemas. No decorrer desse processo, a formalização, o simbolismo e as técnicas precisas são introduzidas depois da resolução trabalhada, dando-se liberdade aos alunos, evitando-se direcioná-los para "o que pensar" ou "o que fazer", conduzindo-os somente em casos de maiores dificuldades, ou seja, quando eles não sabem como agir.

Nossa concepção aproxima-se daquilo que ressalta Contreras (1987, apud González, 1998, p. 71): uma situação constitui-se num problema para uma pessoa quando não lhe é familiar; quando a novidade é sua característica fundamental e quando ela requer um tratamento distinto de uma mera aplicação rotineira. Em termos de sua execução, quando esta necessita deliberação, identificação de hipóteses e comprovação de factibilidade, tendo o indivíduo que pôr em prova suas habilidades de raciocínio autônomo.

Também entendemos que nossa concepção de situação-problema reflete aquilo que González (1998, p.67) considera como uma Tarefa Intelectualmente Exigente (TIE), ou seja, “aquela que propicia um esforço de raciocínio e que não se realiza com o mero exercício de recordação e memória, nem com a utilização mecânica de esquemas algorítmicos, nem com a aplicação de receitas pré-concebidas; ao contrário, deve propiciar a realização de certo esforço intelectual”.

Segundo este autor, a vivência e realização de tais tarefas pelos alunos constituem-se numa oportunidade para aprender e estimular a ativação de seus processos de pensamento de ordem superior, levando-os a maior chance de se tornarem indivíduos intelectualmente competentes.

Seguindo a linha de Aguilar (1994), González (1998, p. 60) considera que as características cognitivas dos aprendizes se distinguem em dois níveis: o primeiro, considerado como *destrezas cognitivas de ordem inferior,* está constituído pelos processos associados com a codificação, armazenamento, recuperação e transformação de informações. O segundo se refere aos *processos mentais de ordem superior* (metacognitivos e auto-reguladores), usados para planejar, ativar, monitorar, avaliar e modificar os processos de nível inferior.

Desse modo, a Teoria Cognitiva pode dar suporte para se abordar o desempenho humano na realização de tarefas complexas, levando em conta as especificações do acionar cognitivo de quem executa tais tarefas.

Para González (1998, p.69-70), a prática reiterada de TIE´s oferece a oportunidade de exercitar tais processos superiores, porém a possibilidade de transformá-la em uma experiência generalizável e transferível requer tanto a realização de um grande número de tarefas, como a tomada de consciência do que se fez, e de como se fez, em cada uma delas. Isto é, para a adequada transferência, não basta a aplicação reiterada de um procedimento associado com a tarefa, mas é imprescindível que quem a executa preste atenção à sua própria atuação durante a mesma, e conscientize-se das relações entre as estratégias aplicadas e os resultados obtidos, positivos ou negativos. Isto tem a ver com a reflexão sobre os processos de pensamento implicados durante a execução da tarefa. A vinculação entre a metacognição e a TIE se estabelece quando o executor: (a) toma consciência dos objetivos que pode alcançar com a tarefa; (b) reconhece quando existe mais de uma via para levá-la a cabo, ou que não tem nenhuma disponível no momento, ou que o modo que conhece não é aplicável, ou se mostra inadequado; (c) identifica os aspectos da estratégia empregada que se mostram favorecedores ou obstaculizadores à solução da tarefa, estabelecendo condições para sua aplicabilidade, criando bases para a generalização e/ou transferência.

Concordamos com González (ibidem, p.74), quando este afirma que aprender Matemática consiste em apropriar-se dos processos que são próprios a essa disciplina e incrementar a experiência pessoal no manejo dos mesmos. Em conseqüência, de um ponto de vista cognitivo, o desempenho em Matemática está associado à ativação, por parte do aprendiz, de processos intelectuais de ordem superior demandados por tarefas próprias desta disciplina (especialmente a resolução de problemas) e a tomada de consciência de tais processos.

Isto não significa que desprezemos os aspectos da realidade sócio-cultural em que os alunos estão imersos, durante seu envolvimento na resolução de tarefas escolares. Aqui, procuramos também levar em conta como o ambiente cultural da escola pública brasileira pode influenciar os alunos em sua motivação para a dedicação às tarefas de resolver problemas.

Acreditamos, também, que a introdução da resolução de problemas como uma metodologia, no sentido que aqui expressamos para a área de Matemática, possa colaborar para que haja alguma mudança na perspectiva da ação docente, para além da organização do conhecimento em disciplinas. Pode-se dizer que esta intervenção é modesta, pois a organização da escola escolhida permanece pautada no modelo disciplinar. No entanto, com a aplicação reiterada desta metodologia, esperamos que os alunos sejam estimulados a relacionar os conhecimentos escolares adquiridos, não só à resolução de problemas matemáticos e suas generalizações, mas também com problemas relativos a outras áreas do conhecimento e outras disciplinas escolares.

Isto reforça nossa compreensão de que uma situação-problema aproxima-se daquilo que González (1998, p. 67-80) considera como uma Tarefa Intelectualmente Exigente (TIE). Este autor propõe um modelo para a Metacognição e a Resolução de Problemas (MRP), que compreende quatro componentes fundamentais:

(i) **os fins**, representados pelos propósitos que se deseja alcançar e, no caso da resolução de problemas, a obtenção de uma solução para os mesmos;
(ii) **as ações**, que englobam os desdobramentos de ordem intelectual que o resolvedor faz para atingir os fins (análises minuciosas de dados e partes do problema para elaborar um modelo matemático correspondente para o mesmo; análises de possíveis recursos e estratégias disponíveis; realização das decisões tomadas em termos de operações e procedimentos; verificação de resultados, parciais ou finais, e das condições iniciais da situação-problema);
(iii) **os conhecimentos**, que incluem as informações que a pessoa tem sobre si mesma como resolvedora de problemas; as exigências cognitivas para o processo de resolução e os fatores que os tornam mais ou menos difíceis; suas crenças sobre si mesmo e o processo de resolução e os recursos de que dispõe para abordá-lo;
(iv) **as experiências**, que se referem às vivências acumuladas, com base em seu envolvimento em tarefas análogas e à consciência do êxito ou fracasso experienciado ao aplicar alguma estratégia.

Podemos observar que a natureza metacognitiva desse modelo se manifesta nestas quatro componentes, as quais estão inter-relacionadas e não se dispõem linearmente. Quando se aplica a metacognição no processo de resolver problemas, se faz referência ao conhecimento consciente que o resolvedor tem acerca da especificidade desse processo e da auto-regulação deliberada que tem no mesmo, levando em conta os fatores que condicionam a situação-problema, planejando suas ações, executando e avaliando os resultados. Esta capacidade de dar conta de seu próprio processo de resolução marcaria, segundo González (ibidem, p. 81), a diferença entre os resolvedores exitosos e os não-exitosos. E mais ainda, quem teria "aprendido a aprender" e os que não são capazes de gerenciar sua própria aprendizagem, de modo que o bom resolvedor de problemas, assim como o aprendiz autônomo, tem consciência e é capaz de regular sua ação cognitiva durante esse processo.

Os participantes da pesquisa e a escola parceira

As três turmas participantes de nosso projeto (1ª, 2ª e 3ª séries) são formadas a partir da escolha espontânea dos alunos da série anterior ao Ensino Médio, tendo estes tomado prévio conhecimento de suas características. Também é levado em consideração o nível de empenho desses alunos em anos anteriores (13-14 anos), relativamente à Matemática e às Ciências, em casos de demanda excedente ao número máximo de 40 (quarenta) alunos por turma. Este número é determinado pela Secretaria Estadual de Educação.

Desde a implantação do projeto piloto em 2000, com a abertura da classe de 1ª série, temos acompanhado, através de entrevistas com os professores e coordenadores pedagógicos, o andamento do mesmo. Ao final do ano letivo de 2002, com a conclusão da primeira turma, após três anos de participação, foram aplicados questionários aos alunos e a seus pais, para se obter a percepção dos mesmos sobre o andamento do projeto. Os resultados foram divulgados por Zuffi, Barreiro & Mascarenhas (2003), mostrando um alto grau de satisfação dos participantes: pais, alunos e professores.

Destacamos que os dois professores de Matemática que trabalharam no projeto consideravam nossa proposta como algo novo, pois nunca haviam desenvolvido suas aulas com esta metodologia, anteriormente, de forma contínua e regular.

Para a análise que aqui apresentaremos, vamos utilizar dados coletados com a professora Isa, em filmagens realizadas em sala de aula, durante a execução de atividades de ensino através da resolução de problemas. A filmagem foi realizada em junho de 2004, na 1ª série, com uma atividade introdutória ao estudo de gráficos de funções. Houve uma outra filmagem, realizada em outubro de 2004, na 2ª série, com problemas introdutórios ao estudo de sistemas lineares. A turma do segundo ano já havia trabalhado com a metodologia de ensino-aprendizagem de Matemática através da resolução de problemas no ano anterior. Para a 1ª série, foi também solicitado que os alunos respondessem à pergunta de como a atividade contribuiu para sua compreensão sobre funções, para o que obtivemos as respostas por escrito. A professora também fez um relato sobre o desempenho dos alunos, após a realização da atividade filmada.

Na 1ª série estavam presentes, durante a filmagem, 35 (trinta e cinco) alunos e, na 2ª, 32 (trinta e dois). Eles foram convidados a formar grupos de quatro pessoas e prontamente atenderam à solicitação. Na 1ª série, houve um constrangimento inicial maior, com a presença da filmadora, assim como maior demora para que os alunos efetivamente iniciassem a resolução dos problemas. Na sala da 2ª série, os alunos mostraram-se mais à vontade com as atividades e iniciaram as discussões para a resolução mais rapidamente.

A partir dos dados obtidos, pretendemos explorar as seguintes questões: é possível implementar com êxito, e mais continuamente, a metodologia adotada através da R.P. nas condições atuais de ensino oferecidas pela escola pública brasileira? Quais as formas de ação e respostas dos alunos na implantação dessa metodologia de uma forma contínua? Quais características do modelo MRP, proposto por González (1998), para a resolução de problemas foram contempladas em nosso projeto e o que isto significou em termos da aprendizagem matemática dos alunos participantes?

Com a apresentação de alguns dados da 1ª série, na próxima seção, pretendemos dar mostras de como o modelo teórico MRP auxiliou-nos na análise sobre o modo como os alunos, ao trabalharem em grupos, alcançaram uma reflexão sobre os processos de pensamento implicados durante uma tarefa de resolver problemas. Ou seja, sobre como suas falas, acertos, dúvidas e angústias revelam uma tomada de consciência, em menor ou maior grau, para os vários grupos observados, daquilo que estavam fazendo para atingir os objetivos propostos na tarefa, já no primeiro ano de aplicação da metodologia, e como isto se consolidou para os alunos mais experientes com a mesma.

Entendemos que o modelo MRP, talvez, tenha sido concebido para analisar cada sujeito, individualmente, em seus processos cognitivos. Porém, a metodologia por nós utilizada previa o trabalho em grupos, justamente por acreditarmos que a comunicação intragrupal poderia estimular mais os processos metacognitivos individuais. Assim, optamos por aplicá-lo na análise de uma situação decorrida no ambiente natural de sala de aula, a fim de elucidar como o trabalho em grupos poderia contemplar as componentes previstas no modelo, para os indivíduos engajados na resolução de um problema, e como os processos superiores de pensamento (metacognição e auto-regulação) estiveram presentes, de modo a caracterizar a resolução como uma Tarefa Intelectualmente Exigente.

O ensino através da resolução de problemas e o desempenho dos alunos

Como comentado anteriormente, no episódio gravado com a 1ª série, os alunos mostraram maiores dificuldades em se engajarem imediatamente na resolução do problema proposto (abaixo) e apresentaram maiores resistências iniciais ao tipo de atividade:

> *"Numa certa empresa, há dois tipos de despesas mensais: uma fixa, de R$ 50.000,00 e outra variável, que depende da produção da firma e representa um quarto da arrecadação das vendas mensais. Sabendo-se que a arrecadação das vendas é igual às despesas mais o lucro obtido, montar uma relação entre vendas e lucros e esboçar o seu gráfico"*.

De início, a professora tinha que pedir várias vezes para lerem e interpretarem o enunciado, ao passar pelos grupos, porque vários deles mostraram demora em anotar os dados e discutir sobre o problema. Depois de algum tempo, todos, sem exceção, estavam engajados na resolução, porém dois grupos (G2 e G7) mostraram grande dificuldade em desenvolver uma estratégia para identificar variáveis e suas relações, no problema:

> [O grupo G2 conversa, tentando trocar idéias. Uma das alunas fala para o colega da frente]: "1/4 das despesas...Aí tá errado". [O colega da frente]: "1/4 das despesas..." [O colega da frente havia escrito apenas "50.000" em sua folha de anotações. Depois escreve "1/4" na frente de "50.000", sem saber por quê. Eles trocam dúvidas sobre o que seriam as despesas e continuam por longo tempo no mesmo ponto, sem alterar as anotações].

> [O grupo G7 recebe auxílio da professora, após alguns minutos de tentativas de escrever algo sobre o problema, sem êxito. A professora lê novamente o enunciado com eles e vai perguntando o que significa cada informação. Quando se refere à despesa variável, ela completa]: "...tem uma outra [despesa]. Ela é variável e depende da produção, e representa ¼ da arrecadação das vendas mensais. E dependendo das vendas, como é que varia essa outra despesa? Do que ela depende?" [Aqui a professora tenta fazer com que alunos atribuam a idéia de variável para as vendas, mas um aluno responde apenas "1/4". [Professora]: "1/4 de quê?... [pausa para esperar a resposta, **que não vem**].[Professora] Da arrecadação das vendas mensais...então, o que for a variável do exercício, associem a alguma letra, traduzindo o enunciado de uma situação matemática". [A professora lê novamente o enunciado completo, evitando dar a resposta aos alunos. Eles voltam a pensar sozinhos, enquanto ela vai atender outro grupo. O aluno que havia falado antes, escreve em seu caderno: "R$50.000". Depois de pensar um pouco, escreve: "$\frac{50.000}{x} = ...$" [Pára, olha para o caderno da outra colega, mas não trocam idéias. A colega da frente havia escrito]: "$\frac{50000}{x} \times \frac{1}{4}$". [Depois o menino escreve "$50000.\frac{1}{4}$" ao lado e conclui que "1x = 200.000". O menino volta a escrever: "$\frac{2}{\frac{1}{4}} = R\$50.000$" (Note que o número "2" aparece simplesmente por ele ter a informação de que há dois tipos de despesa - o aluno tem necessidade de operar com todos os números que aparecem, sem exceção). "Ah tá!! As despesas mensais não são 50.000?" [Continua lendo o enunciado, sem relacionar com as variáveis...]

Os trechos anteriores ilustram que a primeira dificuldade mostrada para esses dois grupos foi quanto à interpretação do enunciado do problema e à seleção de seus fins e de dados relevantes a serem destacados para compor relações que levassem a uma estratégia de solução (componentes (i) e (ii) do modelo MRP). Isto revela, para estes grupos, relativamente iniciantes com a metodologia, pouca familiaridade com os processos metacognitivos envolvidos na resolução do problema, bem como com a auto-regulação dos seus conhecimentos prévios, que poderiam ser acionados (componente (iii) do MRP).

A seqüência seguinte do diálogo do G7 ilustra bem a dificuldade deste grupo com a idéia de variável, a qual já havia sido detalhada em sala de aula, em outros problemas e pela sistematização da professora:

> [Após escrever: "$\frac{2}{\frac{1}{4}} = R\$50.000$" e reler o enunciado, o mesmo aluno mencionado anteriormente, do G7, fala]: "Sei lá... As vendas são iguais. Esses dois tipos são iguais... E as vendas também". [A colega da frente pergunta se é "1/4"]. " Não, porque... quer ver..." [não consegue explicar e apaga o que havia escrito. Depois escreveu]: "$50.000 + \frac{1}{4}$". [Uma aluna do grupo pergunta para a outra:] "você lembra como é que faz aqui?" [Tenta recorrer a algum procedimento já conhecido, mas este tipo de problema não havia sido tratado em atividades anteriores. Finalmente, a colega responde]: "A gente tem que substituir, se a gente não sabe o... a...[encabulada com a câmera]. Tem que colocar x ou y para a gente conseguir achar o valor". [A pesquisadora pergunta ao grupo o que eles acham que é "variável", na tentativa de aproximá-los dessa idéia. A menina que estava com dúvidas antes, responde]: " É a mesma coisa que ela falou..." [Mas não dá maiores explicações. O outro garoto]: "Variável? ...É... Espera aí! Por exemplo, uma despesa vai ser R$50.000, a variável, acho que ela não vai ser modificada, ela vai ser outra..." [A pesquisadora diz que não entendeu sua resposta]. "É assim, se uma despesa fixa mensal vai ser de 50.000, essa outra despesa vai variar, entendeu?" [A pesquisadora pergunta como representa uma coisa que vai ser variável]. Finalmente, a aluna que havia mencionado 'x' e 'y', anteriormente responde]: "Com letras! Tem que procurar quando a professora fala 'variável x', 'variável y'". [O aluno escreve]: "2= 50.000= x" [e logo abaixo de 50.000, escreve 100.000, provavelmente multiplicando 2 x 50.000] A pesquisadora pergunta de onde vem esse '2']. "Vem de 'dois tipos de despesas mensais'". [Volta a escrever]: "$50.000 = \frac{1}{4}$" [...]

Notamos, com esta seqüência, que o acesso a, e a auto-regulação dos conhecimentos prévios (componentes (iii) e (iv) do modelo MRP) sobre "variáveis" eram bastante precários para o grupo G7, enquanto outros grupos acionavam rapidamente estes conhecimentos. Mesmo após as tentativas da aluna que mencionou o uso de letras "x" e "y", o grupo não conseguiu incluir adequadamente esta informação em seus registros escritos e, no final deste excerto, aquele aluno com mais dificuldades abandona novamente a letra "x", que ainda não parecia fazer sentido para o grupo, naquele enunciado. Isto pode ser explicado, em parte, pela pouca experiência, neste momento, dos alunos da 1ª série com a resolução de problemas. Embora não os apresentemos aqui[5], nossos dados mostram que, na 2ª série, onde essa experiência era maior, a autonomia dos alunos para buscarem conhecimentos prévios mostrou-se bem maior.

Uma característica que permeou todos os grupos foi a dificuldade de trocas de informações entre seus componentes, evidenciando que a ação mental consciente de buscar outras experiências já vivenciadas (componente (iv) do modelo MRP) ainda era pouco acessada pelos alunos, no início de suas atividades envolvendo a Resolução de Problemas. Mesmo naqueles em que houve maiores discussões, geralmente as trocas eram feitas aos pares de alunos, sem perceberem a importância de uma socialização maior dos resultados alcançados, internamente ao grupo.

Observamos que em vários deles houve uma demora significativa para que os alunos chegassem a um modelo matemático que retratasse a situação de dependência entre os lucros obtidos e as vendas da empresa, relatados no problema, mostrando dificuldades nas ações e também com a regulação dos seus conhecimentos prévios (componentes (ii) e (iii)). Depois que alcançaram este nível de transcrição para a linguagem matemática simbólica, dois grupos tiveram dificuldades em efetivar o cálculo "$x - \frac{1}{4}x$", obtido ao se isolar uma das variáveis do problema ('x' foi, em geral, a variável escolhida para representar o montante de vendas, embora alguns grupos tenham usado letras como "*a*" para vendas e "L" para o lucro) (componente (ii) do MRP).

Finalmente, a segunda parte do problema, que pedia uma interpretação gráfica da situação de dependência entre as duas variáveis envolvidas, constituiu-se numa grande dificuldade para a maioria dos grupos, uma vez que o assunto "gráficos", ainda não havia sido detalhado previamente em classe. Anteriormente à situação-problema trabalhada, os alunos haviam tido apenas informações sobre o plano cartesiano, as coordenadas e a localização de pontos isolados no mesmo. Neste momento, observamos que vários alunos (seis, em grupos distintos) procuravam em suas anotações de classe, algum modelo que lhes permitisse prosseguir na atividade. Isto gerou certa frustração visível em suas faces, pois não encontravam "pistas" previamente discutidas, que os pudessem auxiliar. Dois alunos do G2 chegaram a desenhar um sistema de eixos ortogonais (olhando para suas últimas anotações sobre o plano cartesiano), mas a idéia de variável ainda lhes parecia ser precária, pois não conseguiam avançar atribuindo valores para uma, para verificar o que aconteceria com a outra e, eventualmente, montar uma tabela ou um gráfico. Isto se explica pela falta de experiências anteriores vivenciadas com este objeto matemático, mas mostra a tentativa de acionamento consciente da componente (iv) proposta por González, em seu modelo.

Neste momento, os tempos dos grupos, na resolução, eram totalmente diferentes. Enquanto alguns já faziam a tabela com valores correspondentes às

[5] A apresentação dos dados da 2ª série alongaria em demasia este artigo. Para maiores detalhes, ver Reis & Zuffi (2007)

variáveis, outros dois ainda não haviam conseguido montar uma equação que expressasse a relação de dependência entre as duas variáveis que apareciam na interpretação da situação-problema (inclusive o G7 mencionado anteriormente). Porém, foi bastante gratificante observar que a aula fluía com o engajamento de todos os presentes, sem nenhuma exceção, na tentativa de resolver o problema, mesmo com as dificuldades mencionadas, o que mostra que a tarefa proposta efetivou-se como motivadora à ação, como uma TIE. A aula foi se aproximando do final e a professora começou a fornecer algumas informações mais diretas aos grupos que não conseguiram registrar algebricamente a relação envolvida no problema. Terminou o tempo e a professora pediu que os grupos permanecessem com seus registros, para continuarem a pensar no problema na aula seguinte.

No dia posterior, ela pediu que os grupos permanecessem com as mesmas configurações e que os alunos continuassem a discutir o problema por mais um tempo. A professora comentou que logo pediria para que cada grupo entregasse uma folha com os registros do que havia sido feito, para que pudessem socializar os resultados. Pediu que os alunos se empenhassem, então, no esboço do gráfico, mas o G7 ainda estava inerte, sem ter conseguido montar a equação relativa à função do problema.

> [No início desta segunda aula, o registro de um aluno do G7 ainda constava de algo como: "$2 = \frac{1}{50.000} = 50 / \frac{1}{4} = 700$". A pesquisadora pediu que tentassem explicar o que estavam pensando, mas esse aluno apagou seu registro e voltou a olhar suas anotações anteriores à situação-problema, como que na esperança de ter algum modelo que lhe inspirasse a resolução. A outra menina do grupo finalmente tomou a iniciativa e escreveu no caderno: "$50.000 + \frac{1}{4}x$". Depois, ao lado, escreveu "50.000 $\times$ 4" e embaixo disso, "200.000", perdendo o registro da letra "x" que, aparentemente, ainda não lhes fazia sentido como uma variável. Notamos, aqui, grande dificuldade de operacionalização algébrica para os dados que ela obteve no problema. O grupo não se comunicava. A pesquisadora tentou fazer-lhes perguntas que os aproximassem novamente da idéia de quais variáveis poderiam se relacionar com as informações do problema. Pediu que lessem o enunciado novamente e vissem como apareceu o 'x' que usaram, para o que, o aluno respondeu enfaticamente]: "Eu sou péssimo nisso!". [A pesquisadora perguntou por que, na tentativa de que ele identificasse o que não estava entendendo, ao que ele respondeu]: "Porque não entra na minha cabeça!"].

Observamos, aqui, uma dificuldade deste aluno, que, consciente de suas lacunas para obter uma estratégia para a resolução do problema (componente (iii) do modelo MRP), simplesmente diz que não lhe entra na cabeça e acaba por abandonar, momentaneamente, a atividade. O grupo G7 mostrou ter sérias dificuldades com os registros, inclusive de compreender que a situação-problema exigia-lhe uma postura ativa, na busca do pensar demorada e criticamente, para poder sugerir estratégias compatíveis com o enunciado e com a pergunta do problema, mesmo após as "pistas" e perguntas induzidas pela professora. No entanto, a consciência do aluno para com suas lacunas sugere que ele já inicia uma auto-regulação dos processos envolvidos na R.P., embora de forma ainda precária. Com o tempo, conforme se acumulem maiores experiências com a R.P., esperamos que essa auto-regulação se aperfeiçoe e estes alunos passem a esclarecer melhor os fins envolvidos em cada situação-problema, a mobilizar mais conhecimentos e ações com maior segurança, a buscar a memória de suas experiências anteriores com problemas similares e a ampliar suas concepções pessoais quanto à atividade matemática. A falta de comunicação entre os membros do G7 parece sugerir o quanto a troca de idéias para a resolução de problemas poderia melhorar a metacognição acerca dos processos aí envolvidos. Por outro lado, talvez a pouca experiência desses alunos com a auto-regulação de seus processos mentais, também se constituísse em obstáculos para uma melhor comunicação, o que parece revelar uma interdependência cíclica entre esses dois processos. Isto evidenciou, assim como outras manifestações isoladas de alguns alunos de outros grupos, uma certa resistência inicial para com a R.P., o que não ocorreu com nenhum aluno observado na 2ª série. Atribuímos, a este fato, motivos como a maior familiarização da série posterior, com a metodologia adotada e a criação de um hábito de resolver problemas, o que confirma as hipóteses de González, de que a prática repetida da resolução de problemas, como uma TIE, facilita o acionamento da metacognição, dos processos de auto-regulação das ações cognitivas e caracteriza-se como importante forma para o desenvolvimento de processos mentais superiores.

Na segunda metade da aula, a professora pediu para recolher um registro de cada grupo. Observamos que, mesmo neste momento, a comunicação intragrupos continuou precária. Cada aluno fazia o registro por si e os que tinham maiores dificuldades tentavam apenas copiar o que os outros membros escreviam, sem indagações. Isto evidencia uma falha no contrato didático (Brousseau, 1988) estabelecido, a qual ainda não fora totalmente solucionada para a 1ª série. Alguns alunos, talvez por não darem a devida importância ao trabalho em grupo, ou por apresentarem maiores deficiências com os processos desenvolvidos no modelo MRP, não percebiam a riqueza do ambiente de aprendizagem que os colegas ao lado poderiam lhes proporcionar, com a troca de idéias. Na 2ª série, isto não ocorreu com a mesma freqüência, embora, em certos grupos, a comunicação interna ainda fosse precária. O contrato didático em vigência também não previa nenhuma “penalidade” ou “perda” para os grupos com pouca interação. Também, o grande número de alunos nas salas não permitia que a professora conseguisse dar muito apoio a todos os grupos que apresentavam dificuldades no intercâmbio de idéias. Entretanto, vimos que os alunos mais experientes com a prática da R.P. já haviam se libertado da dependência da professora e conseguiam, com poucas aproximações da mesma, resolver intrincadas situações-problemas.

Finalmente, a professora comentou sobre os registros das resoluções de cada grupo, anotando-os na lousa. Alguns inverteram sinais das variáveis e os gráficos apareciam com crescimento contrário ao esperado. Surpreendentemente, sem que tivessem tido estudos prévios mais detalhados com o plano cartesiano, a não ser a localização de pontos esparsos, um grupo de alunas chegou a alterar a escala de valores obtidos (usando uma escala diferente para as abscissas e outra para as ordenadas), de maneira a facilitar a visualização da reta que representava a função.

A professora também comentou sobre o significado expresso no gráfico, para a relação entre o lucro e as vendas, no problema, e o que significava, no esboço, o lucro negativo (ou prejuízo). Observou, ainda, que não poderia haver vendas negativas, mas lucros, sim.

No dia seguinte, a professora pediu que eles respondessem, por escrito, se aquela situação-problema, ou "desafio", lhes havia ajudado a compreender melhor o assunto "funções". Das 30 (trinta) repostas entregues pela 1ª série, 20 (vinte) alunos expressaram alto grau de satisfação com a atividade, ressaltando pontos como: o "desafio" estimulou-os à atenção e ao esforço nos raciocínios (motivação e componente (iii) do modelo MRP); auxiliou-os na compreensão de outros problemas (auxílio para a construção de estratégias e compreensão dos processos envolvidos – auto-regulação da atividade realizada para experiências futuras – componente (iv)); também evidenciou que as "funções" podem ser aplicadas a situações práticas da vida das pessoas (aspecto utilitário da Matemática). Duas respostas, dentre esses vinte alunos, mostraram uma metacognição bastante ampliada sobre os propósitos da situação-problema e as vantagens destas para a socialização e para seu próprio aprendizado:

(A1:) "Os exercícios foram bem produtivos para a resolução de outros que exigiam também um pouco mais de raciocínio e, principalmente, para visualizar em quê a matéria pode ser aplicada no dia-a-dia" [mostra consciência de que era preciso grande esforço para alcançar resultados, neste tipo de atividade, compreensão para sua realidade pessoal e indícios de que vislumbra possibilidades de generalizar os conhecimentos adquiridos com a atividade (componentes (iii) e (iv))].

(A2:) "A resolução dos problemas nos fez enxergar as funções sendo postas como úteis em situações cotidianas. Acredito que, como início de matéria [percebeu que se tratava de conhecimento novo envolvido] ajudou-nos na compreensão da mesma, estimulando também o raciocínio lógico e o raciocínio grupal" [percebeu que alguma estratégia geral de resolução estava sendo formada a partir daquele problema e que a comunicação dentro do grupo também era importante para isso – presença das componentes (iii) e (iv) do M.R.P].

Oito alunos, em suas respostas espontâneas, evidenciaram pouco aproveitamento da situação-problema, tanto no que diz respeito à ampliação de seus conhecimentos globais, quanto à maior compreensão sobre as "funções". E ainda, dois alunos forneceram respostas ambíguas. Estes números parecem evidenciar que a metodologia utilizada causou um impacto significativo nesta sala de aula, apesar de todas as resistências e dificuldades mencionadas anteriormente.

A professora relatou-nos que, mesmo nas ocasiões em que a pesquisadora não estava presente, o engajamento da turma da 1ª série, na resolução de problemas, era equivalente ao observado no episódio aqui descrito. Para a 2ª série, os relatos da professora confirmam também os dados que obtivemos com as filmagens, mostrando que a experiência prévia que estes alunos tiveram com a metodologia adotada, no primeiro ano, fizera-lhes, gradativamente, desenvolver maiores habilidades auto-reguladoras e uma postura mais autônoma na busca por novos conhecimentos. O mesmo foi relatado para alunos da 3ª série, porém não fizemos filmagens nesta sala.

Considerações Finais

Neste artigo, apresentamos várias referências a pesquisas que envolvem a temática “Resolução de Problemas”, sob diferentes enfoques, em nível mundial. Porém, como uma proposta metodológica relativamente contínua, para se ensinar e aprender matemática com mais compreensão, ela muito pouco se apresenta em salas de aula, principalmente no Brasil.

Os dados aqui trazidos, tanto para os alunos como para a professora envolvida, mostram que não é uma tarefa simples mudar a tradição dos processos de ensino-aprendizagem de Matemática. Esses processos são, em geral, pautados pela reprodução de algoritmos, regras, enunciados e técnicas de resolver problemas. Geralmente, estes últimos estão desconectados da geração de significados mais amplos, do levantamento de hipóteses e conjecturas, de processos de generalização, ou de tentativas de melhoria da comunicação de idéias do mundo que nos cerca, que façam uso da linguagem matemática como uma forma de compreendê-lo.

Mostramos que a implantação da metodologia de ensino-aprendizagem de Matemática através da resolução de problemas, de maneira continuada, nessa escola pública, trouxe fortes indícios de que é possível explorar tal metodologia com êxito, no ambiente natural da sala de aula, com todas as adversidades e facilidades que possamos aí encontrar. Os episódios aqui descritos levam-nos a afirmar que os alunos, embora tenham apresentado dificuldades iniciais com a “nova” metodologia, tiveram um envolvimento com sua própria aprendizagem muito superior àqueles de séries equivalentes, na mesma escola. Além de terem evidenciado grande participação e motivação, ao irem se familiarizando com essa forma de trabalho, os alunos ampliaram seus conhecimentos de Matemática de forma significativa (segundo os depoimentos da professora Isa, de pais (Zuffi, Barreiro & Mascarenhas, 2003) e segundo as avaliações comparativas realizadas durante o projeto). Vimos, durante as filmagens e em observações posteriores, com a continuidade da metodologia de ensino-aprendizagem de Matemática através da resolução de problemas nas séries seguintes, que foram capazes de levantar discussões de alto nível de sofisticação.

Nosso objetivo não era “ensinar **sobre** a resolução de problemas”, mas **através** dela. Mesmo que não tenhamos trabalhado explicitamente as quatro componentes propostas no modelo MRP, de González, os alunos foram capazes de criar, por si mesmos e com a ajuda da professora, estratégias gerais para isto, desenvolvendo importantes aspectos metacognitivos, que favoreciam as generalizações, ainda que, de início, isto ocorresse com certa precariedade.

Melhoraram, gradativamente, a identificação dos objetivos envolvidos nas situações-problemas (componente (i)), buscaram heurísticas de problemas já solucionados e conceitos prévios, em sua memória de conhecimentos (componentes (iii) e (iv)), executaram ações (algoritmos, operações aritméticas e algébricas – componente (ii)), ao traduzirem as situações para a linguagem matemática e, por fim, evidenciaram relativa consciência (metacognição) dos processos exigidos durante a resolução. Desse modo, acreditamos que o modelo MRP, embora não aplicado para uma análise individual dos comportamentos cognitivos dos sujeitos investigados, mostrou-se relevante para caracterizarmos o quanto as tarefas propostas foram significativas para os alunos e se aproximaram de TIE´s, de modo a conduzi-los a processos superiores de pensamento.

É claro que nem todos os grupos e/ou alunos alcançaram o mesmo nível de compreensão, em todas as situações exploradas, e alguns, em seu primeiro ano de trabalho com a "nova" metodologia, mostraram certas resistências e dificuldades para com a mesma. Porém, acreditamos que a continuidade de seu uso e a regularidade com que ela foi trabalhada, em cada aula introdutória de novos assuntos, trouxeram amadurecimento cognitivo (e metacognitivo) para uma parte significativa dos alunos.

Vemos que o contrato didático (Brousseau, 1988), nestas salas de aula, foi profundamente alterado em relação ao que elas apresentavam antes. As inter-relações entre alunos e a professora mudaram, porque os primeiros tiveram que aceitá-la, agora, como mediadora na busca pelo saber, e não mais como repositório de informações e respostas prontas, e passaram a explorar mais seus processos de "aprender a aprender".

Se levarmos em conta a reconceptualização, proposta pelas Ciências Cognitivas, da aprendizagem como um processo de construção de conhecimentos e não de mera aquisição dos mesmos, os esforços para entender como a resolução de problemas pode interferir cognitivamente nessa construção ainda se fazem totalmente válidos e oportunos. Esperamos que esta pesquisa tenha contribuído para elucidar um pouco mais sobre como as práticas dos alunos, durante a resolução de problemas, podem evoluir, se esta for proposta de maneira contínua, e se o professor estiver consciente das componentes e dos processos metacognitivos nela envolvidos.

Bibliografía

- J. Aguilar (1994). Algunas contribuciones de la teoría cognitiva a la educación. Tecnología y Comunicación Educativas, p. 24, 69-81.
- N.S.G. Allevato (2005). Associando o computador à Resolução de Problemas fechados: análise de uma experiência. Rio Claro, SP: IGCE – UNESP, (tese de doutorado).

- E.V. Alves (2004): Habilidades matemáticas: a percepção generalizada de um tipo de problema. Anais do VIII ENEM – Comunicação Científica- GT3- Educação Matemática no Ensino Médio (publicação em CD-ROM).
- E.Q. Azevedo (2002): Ensino-aprendizagem de equações algébricas através da resolução de problemas. Rio Claro, SP: IGCE – UNESP, (dissertação de mestrado).
- W. J. Bolzan (2003). A Matemática nos cursos profissionalizantes de Mecânica. Rio Claro, SP: IGCE – UNESP, (dissertação de mestrado).
- G. Brousseau (1988): Le Contrat Didactique: le milieu, Rechèrches en Didactique des Mathématiques, vol.9, n.3, p.309-336.
- L.D. English (1998). Children’s problem posing, within formal and informal contexts. Tournal for research in Mathematics Education, v. 29, 1, p. 83 – 106.
- F.E. González (1998): Metacognición y tareas intelectualmente exigentes: el caso de la resolución de problemas matemáticos. Zetetiké, CEMPEM-FE/UNICAMP, v.6, n.9, p. 59-87.
- F.E. González (2005): Tendencias de investigación en resolución de problemas matemáticos en Latinoamérica. Revista Educação em Questão, Universidade Federal do Rio Grande do Norte, Natal, Brasil, v.24, n.10, p. 29-67.
- R.R. Huaman (2006). A resolução de problemas no processo ensino-aprendizagem-avaliação de Matemática na e além da sala de aula. Rio Claro, SP: IGCE – UNESP (dissertação de mestrado).
- S. Krulik, R. Reys (orgs.) (1997): A resolução de problemas na matemática escolar.
- Trad. Hygino H. Domingues e Olga Corbo. S. Paulo: Atual.
- V.A. Krutetskii (1976): The Psychology of Mathematical Abilities in Schoolchildren. Chicago: The University of Chicago Press.
- M.J. Lawson, M.Chinnappan (2000): Knowledge connectedness in geometry problem solving. Journal for Research in Mathematics Education. Vol.31, no. 1, p. 26-43.
- N.J. Machado (1996) Epistemologia e Didática. São Paulo: Cortez.
- K.M. Medeiros (2001): O contrato didático e a resolução de problemas em sala de aula. Educação Matemática em Revista. Ano 8 – no.9/10, p.32-39.
- P.R. Oliveira (2000): Currículo e resolução de problemas em matemática: analisando relações. S. Paulo: USP (dissertação de mestrado).
- L.R. Onuchic (1999) Ensino-aprendizagem de Matemática através da Resolução de Problemas. In: Bicudo, M.A.V. (org.). Pesquisa em Educação Matemática: concepções e perspectivas. São Paulo: Editora UNESP.
- L.R. Onuchic & N.S.G. Allevato (2005). Novas reflexões sobre o ensino-aprendizagem de Matemática através da resolução de problemas. In Bicudo, M.A.V. & Borba, M.C. (orgs.). Educação Matemática: pesquisa em movimento. S. Paulo: Cortez.
- W. Paulette (2003): Novo enfoque da disciplina matemática e suas aplicações, no curso de administração de empresas da Universidade Paulista – UNIP. Rio Claro, SP: IGCE -UNESP. (tese de doutorado)
- M. Pereira (2004). O ensino-aprendizagem de Matemática através da resolução de problemas no terceiro ciclo do Ensino Fundamental. Rio Claro, SP: IGCE – UNESP, (dissertação de mestrado).
- M. Pironel (2002): A avaliação integrada no processo de ensino-aprendizagem da Matemática. Rio Claro, SP: IGCE – UNESP, (dissertação de mestrado).

▪ M.M.V. Reis & E.M. Zuffi. (2007- pré-print). Estudo de um Caso de Implantação da Metodologia de Resolução de Problemas no Ensino Médio. BOLEMA: Rio Claro, SP (artigo aceito para publicação).
▪ M.C. Utsumi (2000): Atitudes e habilidades envolvidas na solução de problemas algébricos: um estudo sobre o gênero, a estabilidade das atitudes e alguns componentes da habilidade matemática. Campinas, SP: FE – UNICAMP. (tese de doutorado).
▪ W. Van Dooren; L. Verschaffel, P. Onghena (2002): The impact of preservice teachers' content knowledge on their evaluation of students' strategies for solving arithmetic and algebra word problems. Journal for Research in Mathematics Education, Vol. 33, no.5, p. 319-351.
▪ E.M. Zuffi; A.C.M. Barreiro, Y.P. Mascarenhas (2003): Desenvolvimento e avaliação de uma pedagogia universitária participativa no Ensino Médio: atividades com ênfase em matemática, ciências e comunicação. Anais do XI CIAEM (CD-ROM), Blumenau, SC.

Edna Maura Zuffi. Professora Doutora do Departamento de Matemática do Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação - ICMC, da Universidade de São Paulo - USP, em São Carlos, Brasil.
edna@icmc.usp.br

Lourdes de la Rosa Onuchic. Professora Doutora Aposentada do ICMC, USP - São Carlos e Pesquisadora do Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática do Departamento de Matemática do Instituto de Geociências e Ciências Exatas da Universidade Estadual Paulista, Brasil.
lonuchic@vivax.com.br

UNIÓN
REVISTA IBEROAMERICANA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA

Septiembre de 2007, Número 11, páginas 99-111
ISSN: 1815-0640

Operaciones y funciones con tablero y dado

Omar Armando Cabrera

Resumen

Para favorecer el aprendizaje del cálculo aritmético en la escuela media (13 a 18 años) se comparten dos experiencias que intentan presentarlo de manera funcional y divertida. El material propuesto -juegos de consignas, tablero y dados- ofrece posibilidades de adaptación a distintos niveles de conocimientos e interés y, también, de que los estudiantes construyan sus propios juegos. Se incluyen además algunos ejercicios como los que pueden plantearse para avanzar en el estudio de funciones numéricas.

Abstract

To make the learning of the arithmetic calculation in the middle school, ages from 13 to 18, two experiences are shared trying to present it in a functional and amusing way. The proposed material - games of watchwords, board and dice - he/she offers possibilities of adaptation to different levels of knowledge and, also, this allow that the students build their own games. There are also including some exercises like those that can help to think about the development in the study of the numeric functions.

Propuesta didáctica

Son los clásicos juegos de tablero y consignas que indican avances y retrocesos, leídas después de arrojar un dado, como en el famoso Juego de la Oca. Se presentan dos juegos: el primero para operar con números enteros y el segundo sólo con naturales. El tablero es el mismo para ambos.

Las consignas son funciones numéricas adaptables a cada grupo de estudiantes, así como las causas de premios y castigos. El material fue presentado en primeros cursos de escuelas medias de distintos niveles socio-económicos de Buenos Aires (13-17 años y adultos) intentando favorecer el aprendizaje del cálculo con naturales y enteros (considerando algunas necesidades operativas del álgebra), introducir o repasar funciones numéricas y comprender cierta simbología y vocabulario matemáticos. Las discusiones surgidas entre los jugadores ofrecieron posibilidades para corregir errores y realizar fundamentaciones. Fue positivo detenerse en cada una, compartirla con todos (modo heurístico colectivo) y ofrecer ejercitación adicional relacionada con las operaciones conflictivas para poner el juego al servicio del desarrollo y fortalecimiento de los contenidos cognoscitivos.

La construcción colectiva de consignas permite la discusión de valores, en relación a las actitudes que se premian o castigan en la sociedad y la escuela. Si bien el contexto directo es el juego en sí, la referencia a dichos valores constituye un segundo nivel de contextualización relacionando la matemática con la vida real, no como herramienta de comprensión o transformación de la misma, sino como motivación afectiva o emocional. La presentación dinámica de funciones numéricas que movilizan al alumno para cambiar la ficha de lugar, puede ser una forma natural de comenzar a construir los conceptos de espacio recorrido y posición, así como la diferencia entre ambos, necesarios para los primeros estudios de cinemática.

El entusiasmo mostrado por alumnos de una zona muy marginada socialmente -algunos armaron juegos con sus propias funciones y consignas (sus valores)- estimuló esta presentación y la profundización y extensión de estos juegos didácticos. El desafío es que las "escuelas de contención[1]" sean realmente educativas. Un alumno de 13 años expresó: *profesor, traje un problema para resolver en clase*. *"Tengo 120 pares de zapatos. Debo vender la tercera parte a un precio tal que, devolviendo 230 pesos que debo, me queden 250 de ganancia. ¿A cuánto debo vender cada par?"* Muy bien, ¿cómo se te ocurrió ese problema? *Es que ayer se descompuso un camión con zapatos que pasaba por el barrio y…*

Proponiendo situaciones diversas, salvo casos puntuales como el problema de los zapatos o el cálculo del tiempo de condena a cumplir por algún familiar (interesantes por la relación directa con el entorno), estos juegos estuvieron entre las actividades más atractivas para la mayoría de los adolescentes (de "zonas desfavorables" o no) y, también, para adultos que retomaron sus estudios después de muchos años. La discusión sobre valores a premiar o castigar y las dificultades operatorias y expresivas relevadas en la construcción de juegos propios, fueron aportes positivos para el proceso de evolución conceptual de los temas estudiados.

Estas fueron algunas consignas en un juego construido por un alumno de 13 años de una escuela "de contención": *"Hablaste. Retrocedé al punto de partida"*; *"Le pegaste a tu amigo de al lado. Ubicate en la casilla* $\sqrt{144}$ -n+33*"; "Insultaste al profesor, pierdes un turno*" (el hecho y la benévola pena grafican cierta aceptación social e institucional del maltrato a los docentes)*; "Fuiste a buscar la tiza, retrocedé 5 casillas"* (el singular es revelador).

Se presentan a continuación

1. Un juego de consignas para trabajar con números enteros: *"Carrera presidencial".*
2. El tablero correspondiente.
3. Un juego de consignas para trabajar con naturales (el tablero es el mismo): *"Donde los malos alumnos también pueden ganar".*
4. Estudio de funciones planteado después de que los alumnos de tercer año (15-17) se familiarizaron con el juego de enteros.

---

[1] Término que otrora caracterizara en Argentina una oposición positiva a las escuelas expulsivas de regímenes dictatoriales, hoy suele ser un eufemismo de *escuelas para pobres*. En éstas se pretende que los docentes asuman un rol fundamentalmente asistencialista e intenten enseñar ciertos *contenidos mínimos*.

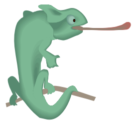
1.- Funcionando con números enteros

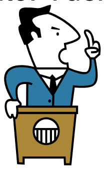
Carrera presidencial

Se juega con un dado. Al llegar a un casillero con círculo, reemplace la variable n por el número obtenido al arrojar el dado. Ante la indicación “muévase”, si el resultado de los cálculos es positivo debe avanzar tantas unidades como indique el mismo. Si es negativo debe retroceder. Gana el juego quien primero llega al casillero 113, o lo pasa.

3: Es un político camaleón: *cambia de colores según la ocasión*. Vaya al casillero $1+3.n$

5: No se durmió en la última sesión del parlamento. Vuelva al punto de partida.





8: A veces no miente. Muévase $3-n$ unidades.

11: Ubíquese en el casillero $-2.n+18$

13: Aceptó una coima para derogar leyes que benefician a los trabajadores.
Avance 3 unidades.

15: Si n es par, avance $3+\sqrt{n-2}$ unidades. Si n es impar vaya al casillero $-n^2+26$

19: Muévase $5-2.n$ unidades.

22: Pagó a cientos de fiscales para que anulen votos válidos de la oposición.
Ubíquese en el casillero 26.

23: Muévase $(n-2)^2-10$ unidades.

27: Si $n-4$ es divisor de 3, avance n^2 unidades. Si no, retroceda n unidades.

30: Dirige un sindicato en el que las bases no deciden nada. Siga hasta el casillero 32.
¡Momento! Amenazó al candidato de la lista de oposición. Siga hasta el 35.

32: Muévase $2^n:(2.n-4)$ casilleros.

37: Si $n > 2$ avance o retroceda $(-2)^{6-n}$ unidades. Si $n \le 2$ retroceda hasta el casillero 31.

40: Si $(-1)^n > 0$ avance 3 unidades. Si $(-1)^n < 0$ retroceda 4 unidades.

41: Si n es múltiplo de -2, avance la mitad de n, más cinco.
De lo contrario, muévase el duplo de: n menos cuatro.

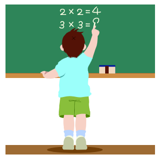
45: Muévase $(n-3)^{35} : (n-3)^{34}$ unidades.
Si el cociente es indeterminado quédese en el 45.

49: Muévase $\frac{(n+3).(n-6)}{n-3}-9$ unidades. Si el cociente no existe, retroceda n unidades.

53: Afirmó que $-2^4 = 16$. Avance hasta el casillero 58.

57: Avance $30:n$ unidades si $n \ge 4$ y $12:n$ si $n < 4$.

62: Votó a favor del pago de una deuda externa fraudulenta y contra el aumento del presupuesto para educación. Siga hasta el 70-n



66: Presentó un proyecto para restituir tierras a los aborígenes. Retroceda 7 unidades.

70: Tuvo un gesto de honestidad. Dijo: *"para que el país crezca los funcionarios debemos dejar de robar por dos años"*. Muévase $3-(n-3)^2$ unidades.

72: Se opone a expulsar del país a los "indocumentados". Retroceda al casillero 63.

74: Propone privatizar la universidad estatal. Adelante $|n-4|$ unidades.

76: Alardeando de su cultura griega dijo *"renaceré como el gato Félix"*. Avance 8 unidades.

79: Prometió cargos a todos los familiares y amigos. Avance $(6-n).(4-n).(1-n)+10$ unidades.

82: Si $\sqrt[n+1]{64} \in Z$ avance n unidades. Si no es así, ubíquese en el casillero 77.

85: Muévase $5-\sqrt{4.(n-3)^2}$ unidades.

88: Si n es un número primo, avance $2.n-1$ unidades. Si no, retroceda n unidades.

90: En su campaña contra la discriminación dijo que tiene un amigo mapuche, se fotografió con un inmigrante chino y consiguió besar un nenito negro. Avance $|8-2.n|+1$ casillas.

93: Pidió a un amigo que ocupe la banca de un diputado ausente (así surgió el *dipu-trucho*). Ubíquese cómodamente en el casillero 98.

96: Si $n+2 > 9-n$ avance 4 unidades. De lo contrario retroceda $3.n+1$ unidades.

99: Exigió reprimir a los defensores del medio ambiente que luchan contra la construcción de fábricas contaminantes. Avance 6 unidades.

102: Si $(n-2).(3-n).(5-n).(n-6) \neq 0$ avance n unidades. Si no, vaya al 108.

104: No realiza un crucero por el Caribe desde hace un año. Retroceda hasta el casillero 97.

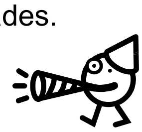
107: Si n es múltiplo de -2 y 3, avance hasta el 111. De lo contrario retroceda hasta el 98.

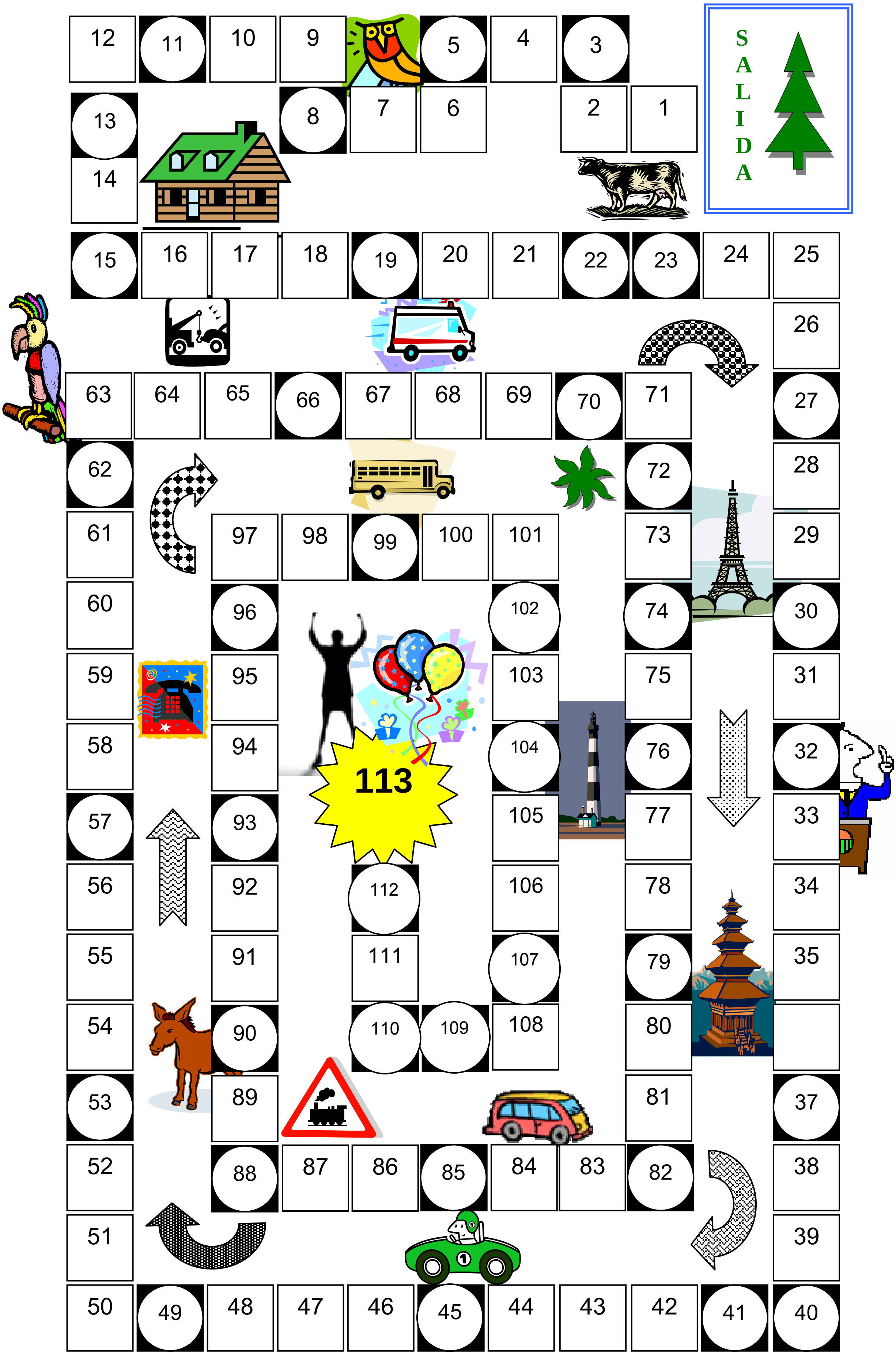
109: Votó contra la disminución de la edad mínima de imputabilidad penal. Retroceda $12-n$ unidades.

110: Propuso anular las leyes que amnistiaron a militares genocidas. Retroceda hasta el 103.

112: Rechazó su jubilación de privilegio como ex-diputado. Retroceda n unidades.

113: ¿Llegó o pasó el 113? ¡Felicitaciones!. **Es el presidente de la Nación**.




SALIDA
1
2
3
4
5
6
7
8
9
10
11
12
13
14
15
16
17
18
19
20
21
22
23
24
25
26
27
28
29
30
31
32
33
34
35
37
38
39
40
41
42
43
44
45
46
47
48
49
50
51
52
53
54
55
56
57
58
59
60
61
62
63
64
65
66
67
68
69
70
71
72
73
74
75
76
77
78
79
80
81
82
83
84
85
86
87
88
89
90
91
92
93
94
95
96
97
98
99
100
101
102
103
104
105
106
107
108
109
110
111
112
113

3.- Funcionando naturalmente

Donde los malos alumnos también pueden ganar

Se juega con un dado. Al llegar a un casillero con círculo hay que ejecutar una consigna. La variable n debe reemplazarse por el número obtenido al arrojar el dado. Gana el que llega primero al casillero 113, o lo pasa.

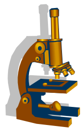
3: Es miembro activo del molesto grupito del fondo. Ubíquese en el casillero $1+3.n$

5: No se copió en la última evaluación de Geografía. Vuelva al punto de partida.

8: Estudió todas las materias. Retroceda $2+n$ unidades.

11: Ubíquese en el casillero $18-2.n$

13: Molesta en las clases de Biología. Avance 3 unidades.



15: Si n es par, avance $n-1$ unidades. Si n es impar vaya al casillero $26-n^2$

19: Si el resultado de $8-2.n$ es natural, avance 2 unidades.
De lo contrario, retroceda 3 unidades.

22: Aplaudió el discurso de una profesora. Para colmo lo escuchó.
Ubíquese en el casillero 14.

23: Si $n > 3$ retroceda $(n-2)^2+1$ unidades. Si $n \le 3$ avance $(n+1)^2-6$.

27: Si n es múltiplo de 2 avance $n:2+5$ unidades.
Si no lo es, retroceda $1+n^2$ casilleros.

30: Le tiró una tiza a un compañero. Siga hasta el casillero 31.
¡Momento! El compañero se agachó y le pegó al profesor. Siga hasta el 35.

32: Salió del aula sin permiso. Avance $2^n:(2.n-4)-2$ casilleros.
Si alguna operación no tiene solución en N siga hasta el 39.

37: Si n es divisor de 8 avance $2^{4-n}+1$ unidades.
De lo contrario retroceda hasta el casillero 31.

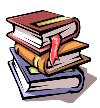
40: Si $3^{n-1} \ge 2.n+19$ avance 6 unidades. Si no lo es, retroceda 4 unidades.

41: Si n es 2 ó 3, avance el duplo de n , más tres.
Si no, retroceda el duplo de: n menos dos.

45: Ayudó a la compañera que usa silla de ruedas. Retroceda $(2+2.n):2+8$ unidades.

49: Si $1+\sqrt{n-1}$ tiene solución exacta en N, avance 5 unidades.
Si no, retroceda n unidades.

53: Afirmó que $2^4 = 4^2$. Retroceda hasta el casillero 50.

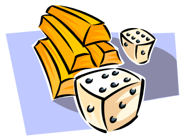


57: Avance 60:n unidades si $n \geq 4$ y 12:n si $n < 4$.

62: Dijo que los ángulos pueden ser agudos, graves o esdrújulos. Siga hasta el 70-n

66: Repartió el mate cocido y el pan de la merienda escolar. Retroceda 7 unidades.

70: Si $n < 5$ retroceda $\frac{6}{4-n}$ casilleros. Si no, avance n unidades.



72: ¡Lo eligieron abanderado! Retroceda al casillero 55+n

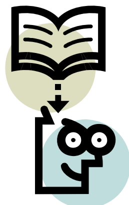
74: Se queja por todo y no aporta nada positivo. Adelante $\sqrt{n^2}+1$ unidades.

76: Bajó el trabajo de Historia por internet. Ni lo leyó y se sacó un diez.
Avance 8 unidades.

79: Nunca lleva útiles escolares. Si $n \neq 6$ avance (6-n).2 casilleros.
Si n = 6, siga hasta el 92.

82: Si $\sqrt[n+1]{64} \in N$ avance 5 unidades. Si no es así, retroceda n unidades.

85: Si $\frac{(n+1).(n-2)}{n-2}$ puede resolverse operando con referencial N, avance n unidades.
Si no, retroceda n+3 unidades.



88: Si n es un número primo, avance 2.n-1 unidades.
De lo contrario retroceda n unidades.

90: Pidió los apuntes de Lengua a un compañero y no se los devolvió.
Siga hasta la casilla 95.

93: Arroja útiles por el aire. Avance hasta el casillero 98.

96: Si n+2 > 9-n avance 4 unidades. De lo contrario retroceda 3.n+1 unidades.

99: Eludió la clase de Música escondiéndose en el baño. Avance 6 unidades.

102: Si (n+1):2 es exacta, retroceda 4.(5-n)+1 unidades.
Si no, siga hasta el 108.

104: Se anotó para pintar el aula el fin de semana ¡Y fue! Retroceda hasta el casillero 97.

107: Si n es múltiplo de 2 y 3, avance hasta el 111.
De lo contrario retroceda hasta el 103.

109: Sacó fotocopias para todo el curso. Retroceda 9-n unidades.

110: Consiguió tizas y borró el pizarrón voluntariamente. Retroceda hasta el 106.

112: Le gustó la clase de Matemática. Retroceda 4 unidades.

113: ¿Llegó o pasó el 113? **Es un pésimo alumno. Tiene un uno**.

4.- Algunas actividades propuestas en tercer año (15-17 años)

Estudiemos funciones con el juego de números enteros

Al arribar a los casilleros señalados con un círculo se lee una consigna. Algunas indican cuántos casilleros se deben adelantar o retroceder. A cada una de ellas le corresponde una *"función movimiento M"*. Otras indican directamente el casillero al que debe llevarse la ficha; están asociadas a una *"función posición P"*. Puede considerarse entonces que el conjunto de partida de las funciones *movimiento* y *posición* es, a priori, {1,2,3,4,5,6}. Considerando las restricciones propias del juego el dominio natural de cada función será uno de sus subconjuntos (propio o no), pues por ejemplo con n=6 nunca se llega al casillero 3, con n=3 no se llega al 8, etc. Siendo el *dominio natural* el formado por la mayor cantidad de elementos posibles, al hablar de "dominio" se hará implícita referencia al dominio natural, como es costumbre extendida. El *conjunto imagen* de cada función será el correspondiente a dicho dominio.

Identificaremos con P_3 la función posición de la consigna del casillero 3, con P_5 la del casillero 5, M_8 será la función movimiento del casillero 8, M_{13} la del 13, etc. Las funciones movimiento y posición tienen como variable independiente el número obtenido con el dado y como variable dependiente la cantidad de casilleros que el jugador debe avanzar o retroceder o el número de casillero al que debe dirigirse, respectivamente.

Para cada función movimiento podemos definir una función posición equivalente (que produzca el mismo efecto) y viceversa.

Cada función (numérica) es denominada con su fórmula para reducir el vocabulario y darle un tratamiento dinámico a la ejercitación.

Análisis colectivo

- Analicemos la consigna Nº 3:

  Es la función posición: $P_3(n) = 1+3.n$
  Tiene dominio {1, 2, 3}, siendo su conjunto imagen {4, 7, 10}. Podemos definir una función movimiento que produzca los mismos efectos analizando las regularidades de la tabla:

n	**1**	**2**	**3**
P_3(n)	4	7	10
M_3(n)	1	4	7

  Dicha función es: $M_3(n) = 3.n-2$
  Es decir, se producen los mismos cambios de ubicación de la ficha moviéndola 3.n-2 unidades que ubicándola en el casillero 1+3.n.
  El 10 indica que al llegar al casillero número tres obteniendo 3 con el dado (o sea, arrojándolo en la posición de salida), hay que llevar la ficha al casillero 10. El 7 señala que, como resultado de esa jugada, se debe avanzar siete unidades.

- Veamos la consigna Nº 5:

  Está planteada una función de posición $P_5(n)=0$
  Es una función constante. Podemos definir una función de movimiento, también constante, $M_5(n)= -5$, que produce su mismo efecto, esto es, el regreso al punto de partida.

- La función posición de la consigna 11 está dada por el polinomio –2.n+18, pues indica el número de casillero en el que se ubicará el jugador. Escribimos:

  $$P_{11}(n) = -2.n+18$$

  Definimos la función movimiento equivalente, ayudándonos con la tabla:

n	**$P_{11}(n) = -2.n+18$**	**$M_{11}(n) =$ ………**
1	16	5
2	14	3
4	10	-1
5	8	-3

  En la columna de $M_{11}(n)$ figuran efectivamente las unidades de avance o retroceso correspondientes a cada valor del dominio. Busquemos ahora el polinomio que define esa función. Observamos, por ejemplo, que cada valor de $M_{11}(n)$ es once unidades menor que el de su correspondiente $P_{11}(n)$, entonces:

  $$M_{11}(n) = P_{11}(n) -11 = -2.n+18 -11 = -2.n+7$$

  Por lo tanto, la función M_{11} queda definida así:

  $$M_{11}(n) = -2.n +7$$

  En el juego, la consigna “Ubíquese en el casillero -2.n+18” puede reemplazarse entonces por “Muévase -2.n+7” unidades, produciendo los mismos efectos. Los valores de la variable independiente 3 y 6 fueron excluidos de la tabla porque no es posible llegar al casillero 11 con esos números.

- La tabla de la consigna 15 es:

n	**$P_{15}(n)$**	**$M_{15}(n)$**
1	25	10
3	17	2
5	1	-14
6	20	5

  Son funciones definidas por tramos. La expresión de M_{15} es:

  $$M_{15}(n) = \begin{cases} -n^2 + 11 & \text{para } n = 1, n = 3 \text{ o } n = 5 \\ 3 + \sqrt{n-2} & \text{para } n = 6 \end{cases}$$

La de P_{15} es: $M_{15}(n)=\begin{cases} -n^2+26 & \text{para } n=1, n=3 \text{ o } n=5 \\ 18+\sqrt{n-2} & \text{para } n=6 \end{cases}$

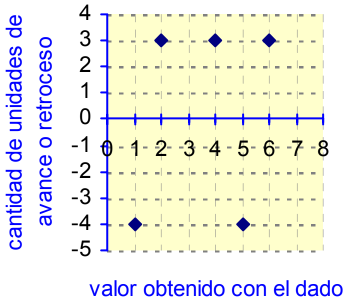
- Si estamos ubicados en el casillero 18 y obtenemos 1 al arrojar el dado, debemos aplicar la función

$$M_{19}(n)=5-2.n.$$

Como $M_{19}(1)=3$, avanzamos al casillero 22. En éste hay otra consigna que cumplir, establecida por la función de posición $P_{22}(n)=26$. Entonces, en el mismo turno habremos aplicado sucesivamente dos funciones, primero M_{19} y luego P_{22}, equivalente a $M_{22}(n)=4$, llevando en resumidas cuentas nuestra ficha del casillero 18 al 26. Podemos reemplazar esas dos funciones movimiento por una sola, también de movimiento, aplicable al llegar al casillero 19 con n=1. Diremos que estamos realizando una *composición de funciones.*
La función que reemplaza a M_{19} y $M_{22,}$ provocando el mismo efecto que ambas *en el mismo turno de juego*, una después de otra, se llama *función compuesta*. La función compuesta por M_{19} y M_{22}, en ese orden, es $M_{19,22}(n)=5-2.n+4=9-2.n$. Para verificar lo expuesto, podemos observar que $M_{19,22}(1)=9-2.1=7$, con lo cual para n=1, pasamos del casillero 18 al 26, directamente.
Sólo compondremos funciones movimiento.

Algunos ejercicios

1. Observando sus tablas, indique si las funciones movimiento M_8, M_{13}, M_{32} y M_{49} son inyectivas. Defina en cada caso los conjuntos dominio e imagen.
2. ¿Cuál es la función posición equivalente a $M_{19}(n)=5-2.n$?
3. Indique cinco funciones movimiento que sean constantes.
4. ¿Para qué valor de n es $M_{45}(n)=0$?
5. Construya las tablas de valores de M_{109} y P_{109}. Luego obtenga $M_{109}(n)$ y $P_{109}(n)$.
6. Construya la tabla de las funciones P_{96} y M_{96}.
7. ¿Cuál es la función posición con imagen constante 105 ?.
8. ¿Cuál es la preimagen de –4 en $M_{88}(n)$? ¿y la de 29 en $P_{23}(n)$?
9. ¿Cuál es la probabilidad de llegar al casillero 98 al arrojar el dado sólo una vez desde el casillero 92?
10. ¿Cuál es la probabilidad de ganar el juego arrojando el dado sólo una vez desde el casillero 111?, ¿y desde el 106?
11. ¿A qué función movimiento corresponde el siguiente gráfico cartesiano?



12. En gráficos cartesianos como el anterior, grafique las funciones M_{37}, P_8 y M_{22}.
13. Averigüe las funciones compuestas $M_{74,76}(n)$, $M_{11,8}(n)$ y $M_{62,66}(n)$. En cada caso indique para qué valor de la variable n está definida la composición.
14. ¿A qué función posición corresponde esta tabla?:

n	1	2	4	5	6
………	10	9	7	6	5

Respuestas

1.

n	$M_8(n)$
1	2
2	1
4	-1
5	-2
6	-3

n	$M_{13}(n)$
1	3
2	3
3	3
4	3
6	3

n	$M_{32}(n)$
1	-1
3	4
4	4
6	8

n	$M_{49}(n)$
1	1
2	11
3	-3
5	-13
6	-9

Las funciones M_{13} y M_{32} no son inyectivas. M_8 y M_{49} son inyectivas.

Dominio M_{13} = {1,2,3,4,6} Imagen M_{13} = {3}

Dominio M_8 = {1,2,4,5,6} Imagen M_8 = {-3,-2,-1,1,2}

Dominio M_{32} = {1,3,4,6} Imagen M_{32} = {-1,4,8}

Dominio M_{49} = {1,2,3,5,6} Imagen M_{49} = {-13,-9,3,1,11}

2. La relación constante entre una función posición y su correspondiente función movimiento es $P_i(n) = M_i(n)+i$, siendo i el número de consigna.

Entonces $P_{19}(n) = M_{19}(n)+19 = 5-2.n+19 = 24-2.n$

3. M_{22}, M_{66}, M_{93}, M_{99}, M_{104}.

4. Para n=3.

5.

n	1	3	4	6
$P_{109}(n)$	98	100	101	103
$M_{109}(n)$	-11	-9	-8	-6

$M_{109}(n) = -(12-n) = n-12$
$P_{109}(n) = n-12+109 = n+97$

6.

n	1	2	4	5
$P_{96}(n)$	92	89	100	110
$M_{96}(n)$	1	-7	4	4

7. P_{99}.

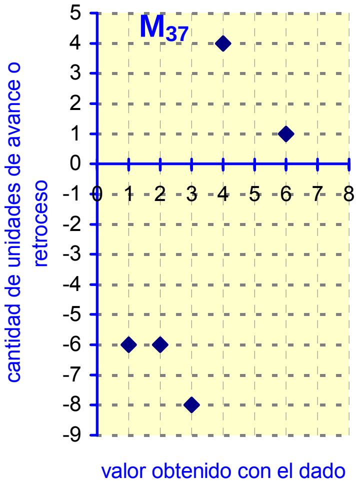
8. 4 y 6

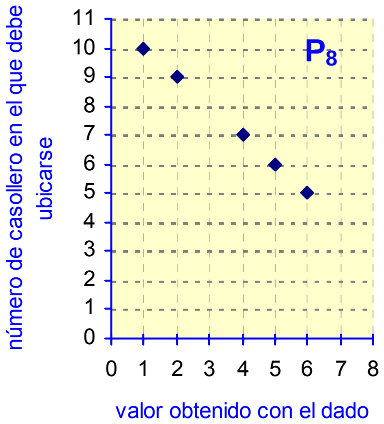
9. 1/3.

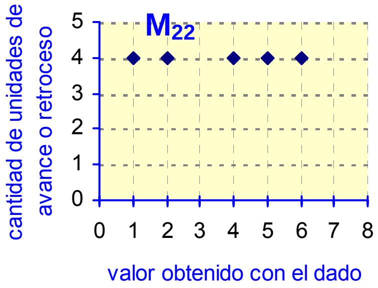
10. 5/6 y cero.

11. M_{40}.

12.







13. $M_{74,76}(n) = |n-4|+8$, definida para n=6.

$M_{11,8}(n) = 3-(-2.n+7) = 2.n-4$, definida para n=5.

$M_{62,66}(n) = 8-n-7 = 1-n$, definida para n=4.

14. Corresponde a la función $P_8(n)$.

Bibliografía

- Ángel Ruiz (2001): Asuntos de Método en la Educación Matemática. Revista Virtual Matemática, Educación e Internet, Instituto Tecnológico de Costa Rica, Cartago, Costa Rica.
- Leopoldo Varela y Juan A. Foncuberta (1981): Matemática Dinámica I. Editorial Magisterio Río de la Plata, Buenos Aires.
- J. W. A. Young (1947): Fines, Valor y Métodos de la Enseñanza Matemática, Editorial Losada, Buenos Aires

Omar Armando Cabrera es profesor en matemática en escuelas medias argentinas. Trabaja con el Dr. Aníbal Cortés (investigador del CNRS, Université Paris 8) realizando experiencias vinculadas a los invariantes operatorios (teoría de campos conceptuales) en la enseñanza de la matemática. Se publicó en Novedades Educativas (Buenos Aires, Nº170) el artículo de ambos autores: *Tres tareas invariantes en la resolución de ecuaciones*.
omararmandocabrera@yahoo.com.ar

UNIÓN
REVISTA IBEROAMERICANA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA

Septiembre de 2007, Número 11, páginas 113-132
ISSN: 1815-0640

Análisis de una propuesta didáctica para la enseñanza de límite finito de variable finita

A. Engler, S. Vrancken, M. Hecklein, D. Müller y M. I. Gregorini

Resumen

El concepto de límite es uno de los que más dificultades de aprendizaje traen aparejadas. En este trabajo analizamos la puesta en marcha de una secuencia didáctica diseñada teniendo en cuenta las nuevas tendencias de la didáctica y las dificultades recogidas de trabajos de investigación avalados por nuestra práctica de años con grupos de alumnos que inician su formación en el cálculo. Trabajamos: aproximaciones, límites laterales, la existencia de límite, la existencia o no de la imagen de la función en el valor hacia el cual tiende la variable, el valor de la función y el valor del límite.

Abstract

The limit concept is one of those that more learning difficulties presents. In this work we analyze the implementation in the classrooms of a didactic sequence designed with the new tendencies of the Didactics and the difficulties found in years of reserch, that students that begin studying Calculus showed. We work: approaches, lateral limits, the limit existence, the existence or not of the image of the function in the value toward which spreads the variable, the value of the function and the value of the limit.

Deja que los estudiantes hagan conjeturas antes de que tú les des apresuradamente la solución, déjales averiguar por sí mismos tanto como sea posible; deja a los estudiantes que hagan preguntas; déjales que den respuestas. A toda costa evita responder preguntas que nadie haya preguntado, ni siquiera tú mismo.
(Polya, 1957)

Introducción

Enseñar Matemática resulta un desafío importante. La necesidad del empleo de esta ciencia para el desarrollo del pensamiento lógico, la capacidad de razonamiento y la comprensión dinámica y cambiante de la realidad objetiva, obligan a perfeccionar cada vez más rápidamente los métodos y procedimientos de su enseñanza a fin de obtener logros de aprendizaje.

Hace más de veinte años, autores como Radatz (1980), consideraban el análisis de errores como “una estrategia de investigación prometedora para clarificar cuestiones fundamentales del aprendizaje matemático”. También Rafaela Borassi (1987) presentaba el análisis de errores en educación matemática “como un recurso motivacional y como un punto de partida para la exploración matemática creativa, implicando valiosas actividades de planteamiento y resolución de problemas”. Todos los estudiantes no construyen los mismos conocimientos sobre un mismo objeto matemático, es más, algunos pueden asignarles rasgos o características no pertinentes desde el punto de vista matemático. Es importante entonces reconocer sus diversos puntos de vista, conocimientos y creencias. Desde la psicología educativa se recomienda buscar la forma de conocer lo que el alumno ya sabe para poder enseñar adecuadamente. Este principio sirve de sustento para justificar el interés reciente de los estudios de la didáctica por las concepciones de los alumnos (Confrey, 1990). Para que los estudiantes cambien sus creencias, es necesario confrontar estas concepciones preexistentes.

Los obstáculos y errores en general juegan un rol muy importante en la organización de nuestra tarea docente que no siempre le asignamos.

La mayoría de las últimas teorías sobre educación son muy generales y no se dedican específicamente al estudio del saber matemático. Brousseau (1997, 1998) es el primero en desarrollar un modelo teórico de las situaciones didácticas.

La teoría de situaciones didácticas se ocupa de modelar situaciones de enseñanza de modo de permitir una elaboración y una gestión controlada y se fundamenta en un enfoque eminentemente constructivista, partiendo del principio que los conocimientos se construyen por adaptación a un medio que aparece problemático para el sujeto.

Esta teoría forma parte de la Matemática Educativa que Cantoral (2003) define como la disciplina que “estudia los procesos de constitución, transmisión y adquisición de los diferentes contenidos matemáticos en situación escolar”. Surge de la necesidad de disponer de un modelo de enseñanza y aprendizaje de la matemática en el que se encuentren representadas todas las relaciones y operaciones que intervienen en este proceso. En ella quedan comprendidos los contenidos matemáticos, las problemáticas del profesor y del alumno y todo lo relacionado con el estudio de la matemática.

La elaboración de las situaciones de actividades en el aula exige un análisis riguroso ya que deben ser ricas por la cantidad de conocimientos implicados pero no excesivos para que el alumno pueda relacionarlos y gestionar su aprendizaje. También deben ser abiertas para que puedan plantearse cuestiones no incluidas originalmente y utilizar distintos procedimientos.

La enseñanza y el aprendizaje de los contenidos básicos del cálculo es un proceso complejo. Las creencias de cómo se aprende el cálculo influyen sobre todos los aspectos de la enseñanza, gobiernan lo que se incluye en el currículum y cuándo deben enseñarse los contenidos, determinan la importancia que un educador da al empleo de técnicas o en aprovechar la curiosidad, el interés y la motivación del alumno e influyen en la forma en la que los docentes desarrollan metodologías, presentan conceptos, evalúan logros y corrigen errores y dificultades. Estas creencias guían la toma de decisiones e influyen en la eficacia de cómo los docentes enseñan el cálculo, es decir el tratamiento de las variables que inciden en el aprendizaje de los contenidos. A lo largo de nuestra experiencia docente y de investigación pudimos corroborar que son numerosas las variables que inciden en el rendimiento de nuestros alumnos: naturaleza de la matemática (disciplina con un simbolismo especial como lenguaje de abstracciones), tipos de aprendizajes matemáticos (axiomas, conceptos, definiciones, algoritmos, principios, teoremas, resolución de problemas), el ambiente escolar, el profesor (sus conocimientos, experiencia, afectividad, creatividad), el alumno (sus actitudes, motivación, valoración de sí mismo, responsabilidad, creatividad, nivel de ansiedad, dedicación), las variables cognitivas del alumno (capacidad de atención, de retención, nivel de desarrollo del pensamiento, transferencia), las variables del currículum escolar (contenidos y plan de estudio), la metodología de trabajo y finalmente la evaluación.

Michéle Artigue (1995) manifiesta: "Las dificultades de acceso al cálculo son de diversa índole y se imbrican y refuerzan en redes complejas. Por lo tanto es posible reagruparlas en grandes categorías". Las organiza en tres grupos diferentes asociadas con:

- la complejidad matemática de los objetos básicos del cálculo,
- la conceptualización y formalización de la noción de límite en el núcleo de su contenido y a su tratamiento en la enseñanza, y
- la ruptura álgebra / cálculo, la brecha entre el pensamiento analítico y el algebraico.

Al referirse a los trabajos de Cornu (1991) y Sierpinska (1985), Azcárate y cols. (1996) manifiestan, que la enorme dificultad de la enseñanza y del aprendizaje del concepto de límite se debe a su riqueza y complejidad tanto como al hecho de que los aspectos cognitivos implicados no se pueden generar puramente a partir de la definición matemática.

Los estudios de Cornu (1991) demostraron que los alumnos tienen “concepciones espontáneas personales” que provienen de su experiencia cotidiana. Las concepciones espontáneas personales son muy resistentes al cambio y permanecen durante mucho tiempo de manera que pueden contener factores contradictorios que se manifiestan según las situaciones.

Las investigaciones de Orton (1980) concluyen que los alumnos mostraron dificultades significativas en la conceptualización de los procesos de límite que sustentan el concepto de derivada y en la utilización apropiada de las representaciones gráficas.

El desarrollo de la investigación sobre la enseñanza y el aprendizaje de temas relacionados con el cálculo con las especificidades observadas en cada caso está abriendo la posibilidad de nuevas propuestas didácticas fundamentadas en el análisis de los procesos cognitivos involucrados en el aprendizaje de estos temas.

Para abordar el estudio del cálculo se requiere cierta madurez que permita abrir la mente a distintas formas de proceder. Esta madurez no siempre es alcanzada por los estudiantes. Por esto los docentes debemos propiciar cambios metodológicos que permitan que los alumnos descubran cómo se construyen los conceptos a partir de sus conocimientos previos.

El objetivo del presente trabajo es analizar una secuencia de actividades en el aula de modo que los alumnos gestionen con sentido el conocimiento matemático para que resulte un conocimiento vivo (que pueda evolucionar) y además que sea funcional (que permita resolver problemas).

Metodologia

Los contenidos básicos comunes de matemática para la Educación Polimodal[1] contemplan el estudio del límite de funciones, no desde un punto de vista formal sino realizando un trabajo dirigido a comprender su significado matemático. Plantean la importancia de estudiar este concepto con ejemplos de funciones elementales, introduciendo luego los conceptos de continuidad y derivada. Sin embargo, en la práctica, nuestra experiencia nos muestra que los contenidos relacionados con el cálculo no son incorporados. En realidad, el primer contacto directo con esta rama de la matemática lo tienen en este momento.

Diseñamos una situación didáctica orientada a que los alumnos estén suficientemente preparados para abordar el aprendizaje de límite finito de variable finita teniendo en cuenta el trabajo que realizaron con funciones considerando especialmente las distintas formas de representación y algunas cuestiones relacionadas con las aproximaciones. Se favoreció el trabajo en forma verbal, tabular, numérica, analítica y gráfica. Las actividades se organizaron para favorecer el desarrollo de habilidades para poder pasar sin inconvenientes de un sistema de representación a otro buscando que el estudiante entre en acción.

El trabajo se desarrolló considerando tres momentos: el diseño y discusión de las actividades según dificultades y errores observados en trabajos recogidos de años anteriores, la ejecución de las actividades diseñadas durante momentos determinados de clases en el aula y, finalmente, la valoración de los resultados obtenidos en función del objetivo general del proyecto de investigación que estamos realizando, "Errores y dificultades: organizadores didácticos en el aprendizaje del Cálculo en carreras no matemáticas", que es analizar errores y dificultades en el aprendizaje de los contenidos básicos del cálculo de alumnos de carreras universitarias no matemáticas.

Para la preparación de las diferentes actividades que forman parte de la propuesta de clase se tuvieron en cuenta contenidos ya trabajados por los alumnos. Ellos ya conocían la teoría de números, las distintas formas de trabajo sobre la recta real, la representación gráfica, el trabajo con desigualdades, la notación conjuntista,

[1] La reforma en educación comenzada en Argentina en los años 90, con la implementación de la Ley Federal de Educación nº 24.195 modificó la tradicional estructura de escuela Primaria y Secundaria. Incorpora como obligatorio el Nivel Inicial, establece un sistema llamado Educación General Básica (E.G.B.) dividido en tres ciclos de tres años cada uno, y completa con el nivel Polimodal de tres años de duración.

el manejo de intervalos y el concepto de valor absoluto y la noción de distancia asociada, funciones, la noción de dominio, aproximaciones, la idea de "tiende a", dado que para cursar Matemática I, en el momento de ingresar como alumnos a la carrera Ingeniería Agronómica deben, tener aprobada el área Matemática en el marco del Programa de Articulación Disciplinar exigido por la Universidad Nacional del Litoral a todos sus alumnos. Todos estos contenidos están desarrollados con claridad en el material que deben estudiar para aprobar la evaluación propuesta y así comenzar su trabajo como alumnos universitarios.

Además de esto, durante el cuatrimestre anterior, estos alumnos habían cursado y regularizado o aprobado Matemática I, materia en la cual se desarrolla ampliamente el tema Funciones Escalares haciendo hincapié en las distintas formas de representación, conocimiento previo con el que contaban para la resolución de la secuencia. El concepto de función es imprescindible para el aprendizaje de límite y es importante utilizar para su enseñanza las diferentes representaciones: gráfica, tabla numérica, algebraica y simbólica.

Además, de la experiencia de tantos años en el aula, de los resultados observados en distintas evaluaciones y del diálogo e intercambio de ideas entre todos los docentes de la cátedra se incluyeron aspectos que sabemos "generan dificultades".

La secuencia de actividades para el aula elaborada se aplicó a ciento dieciocho alumnos inscriptos en Matemática II de la carrera Ingeniería Agronómica. Se organizaron en grupos de a dos, por lo que se obtuvieron cincuenta y nueve producciones. El objetivo que perseguimos es que al resolverla los alumnos se encuentren lo suficientemente preparados para lograr el aprendizaje de este concepto que, en general, les resulta árido, poco atractivo y demasiado abstracto si se lo aborda desde lo formal.

Los alumnos se mostraron muy dispuestos al trabajo y, en especial, valoraron la posibilidad de discusión en la devolución donde los errores no estaban corregidos por el docente sino solamente observados. Posteriormente, los docentes analizamos y discutimos los resultados obtenidos. Los mismos se tuvieron en cuenta y favorecieron la toma de decisiones para la continuidad en el desarrollo del tema y las acciones futuras.

Presentación de la propuesta y análisis de los resultados

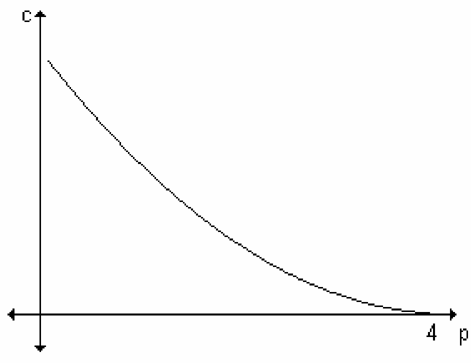
- De la observación y análisis de los trabajos detectamos errores comunes en determinados ejercicios. Realizamos el conteo de las respuestas discriminándolas en: correcta, incorrecta, no responde, regular e incompleta.
- A continuación, enunciamos algunas de las actividades propuestas y detallamos los principales errores detectados.

Actividad 1: Cada una de las funciones que se presentan a continuación describen la relación entre el precio p en pesos por kilogramo de tres productos diferentes y la cantidad c en kilogramos que los consumidores comprarán a ese precio.

Producto A

P	c
3	15,4
3,9	15,485
3,99	15,530
3,999	15,5254
3,9999	15,5015
3,99999	15,50001

Producto B

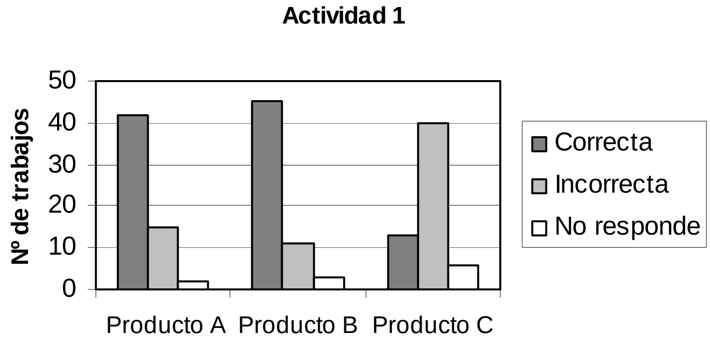


Producto C

$$c(p) = \frac{\sqrt{p} - 2}{p - 4}$$

Para cada uno de los productos, ¿a qué valor se aproxima la cantidad de kilogramos que los consumidores comprarán a medida que el precio por kilogramo se acerca a $ 4?

Los resultados se muestran en el siguiente diagrama:



Con relación al producto C, las cuarenta (67,8%) respuestas incorrectas fueron:

Respuesta	Cantidad
"se aproxima a cero" ó "se acerca a cero" ó "c tiende a 0" ó "0 kg."	32
"cuando el precio tiende a 4 la cantidad no tiene valor"	1
"se acerca a ∞" ó "c tiende a infinito"	2
"indeterminado" ó "es una indeterminación 0/0"	4
"tiende a 4"	1

Se observa que los alumnos no tuvieron mayores inconvenientes con la representación tabular (numérica) y la gráfica. Un alto porcentaje de alumnos no interpretan el significado al trabajar con la representación algebraica. En general, del diálogo posterior mantenido con ellos comprobamos que, para identificar la tendencia de una función, es decir, su límite, les resulta más sencillo en forma numérica o gráfica que en la algebraica. El sistema algebraico muestra una concepción formal de límite, estático y abstracto. En cambio, el numérico sugiere una forma dinámica vinculada con la realidad. Entre ambos tipos de representaciones se encuentra la gráfica que es más estática que la numérica y menos formal que la algebraica.

Actividad 2: A partir de la tabla, responda:

a) ¿A qué número a se acerca x?

b) ¿A qué número L se acerca f(x)?

c) Escriba una conclusión sobre el comportamiento de la función cuando x se aproxima a 3.

x	f(x)
2,9	14,21
2,99	14,9201
2,999	14,992001
2,9999	14,99920001
…………..	…………
3,0001	15,00080001
3,001	15,008001
3,01	15,0801
3,1	15,81

En esta actividad si bien se busca que los alumnos logren una idea numérica del límite. No les resulta sencillo determinar a qué valor se aproxima una secuencia de números. Tienen dificultades para identificar, por ejemplo, que el número creado por el proceso 2,9999... o 3,0001 es 3. En general se observan dificultades para expresar verbalmente lo que está expresado en la tabla.

Actividad 3: Si $f(x) = \dfrac{x-2}{x^2-4}$ complete:

x tiende a .... → | ← x tiende a ....

x	1,9	1,99	1,999	1,9999	2,0001	2,001	2,01	2,1
f(x)								

f(x) tiende a .... → | ← f(x) tiende a ....

En esta actividad se tienen en cuenta dos tipos de representaciones, simbólica y numérica. Los alumnos debían calcular las imágenes para valores de x dados y determinar a qué valor se aproxima cada secuencia de números. Observando los trabajos de nuestros alumnos, llama la atención que cometen más errores para encontrar a qué valor tiende la variable dependiente que para determinar a qué valores se aproxima la abscisa. Consideramos que esto se debe a la expresión de los números. Esta es una limitación del sistema numérico, además tal vez el hecho de que una tabla no proporciona suficientes valores para determinar a qué número tienden las variables o qué número es el límite. Estamos convencidas de que esta situación se puede abordar más satisfactoriamente si se complementa la actividad con la representación gráfica.

Algunas de las respuestas obtenidas son las siguientes:

3) Si $f(x) = \frac{x-2}{x^2-4}$ complete:

x tiende a AUMENTAR A 2

x	1,9	1,99	1,999	1,9999
f(x)	0,2564	0,2506	0,25006	0,250006

f(x) tiende a DISMINUIR A 0,25

x tiende a AUMENTAR A 2

2,0001	2,001	2,01	2,1
0,2499	0,2499	0,2493	0,2439

f(x) tiende a AUMENTAR A 0,24.

3) Si $f(x) = \frac{x-2}{x^2-4}$ complete:

x tiende a 2

x	1,9	1,99	1,999	1,9999
f(x)	0,25641	0,250626	0,250062	0,2500062

f(x) tiende a 0,2500062

x tiende a 2

2,0001	2,001	2,01	2,1
0,249993	0,24993	0,249376	0,2439

f(x) tiende a 0,249993

3) Si $f(x) = \frac{x-2}{x^2-4}$ complete:

x tiende a 1,9999

x	1,9	1,99	1,999	1,9999
f(x)	0,25641	0,25062	0,25062	0,250006

f(x) tiende a 0,25006

x tiende a 2,0001

2,0001	2,001	2,01	2,1
0,24999	0,24993	0,24937	0,24390

f(x) tiende a 0,24999

3) Si $f(x) = \frac{x-2}{x^2-4}$ complete:

x tiende a 2

x	1,9	1,99	1,999	1,9999
f(x)	0,256	0,2506	0,25006	0,250006

f(x) tiende a 0,25

x tiende a 2

2,0001	2,001	2,01	2,1
0,24993	0,2499	0,2493	0,2439

f(x) tiende a 0,25

En las respuestas se observa dificultad para percibir que 1,9999 representa 2 y desligarlo de un proceso que no se detiene. Diversas investigaciones en pensamiento matemático avanzado muestran cómo muchas de las dificultades en el aprendizaje del cálculo están relacionadas con la comprensión de un concepto como proceso o como objeto. En general, los alumnos comienzan manipulando objetos físicos o mentales construidos previamente para llegar a comprender el concepto como un proceso. Llega un momento en que esta concepción es insuficiente y es necesario considerar los conceptos como objetos.

En su teoría APOE (acción, proceso, objeto, esquema), Dubinsky (1991) analiza cómo se pasa de un estado de conocimiento a otro. Plantea que la construcción de conocimiento se da a través de un mecanismo de abstracción reflexiva, como un proceso que permite al individuo, a partir de las acciones sobre los objetos, inferir sus propiedades o las relaciones entre objetos en un cierto nivel de pensamiento, lo que implica la organización o toma de conciencia de esas acciones, separando la forma de su contenido e insertando esta información en un marco intelectual reorganizado en un nivel superior.

Artigue (1995) señala la "dificultad de separarse de una visión de límite en simples términos de proceso para disociar con claridad el objeto límite del proceso que ha permitido construirlo para dotarlo de una identidad propia".

En sus investigaciones referidas a las ideas relacionadas con proceso/ objeto para el caso del límite, Cottrill y cols. (1996) señalan que la dificultad en comprender el concepto de límite radica en que esto requiere la reconstrucción de dos procesos coordinados ($x \to a$, $f(x) \to L$) como un proceso descrito como $0 < |x - a| < \delta$ implica $|f(x) - L| < \varepsilon$. Este proceso coordinado tiene dificultad en sí mismo y no todos los alumnos pueden construirlo inmediatamente.

Actividad 4: Dada la función $f(x) = \dfrac{x^2 - 9}{x - 3}$

a) Determine su dominio.

b) Complete:

x	2,9	2,99	2,999	2,9999
f(x)				

3,0001	3,001	3,01	3,1

c) Represente gráficamente la función.

d) Considere el intervalo $\left(6 - \frac{1}{2}, 6 + \frac{1}{2}\right)$ alrededor de y = 6. Encuentre un intervalo abierto sobre el eje x alrededor de x = 3 que verifique que para cualquier x de ese intervalo, salvo quizás para 3, sus imágenes se encuentran en el intervalo dado. Interprete gráficamente.

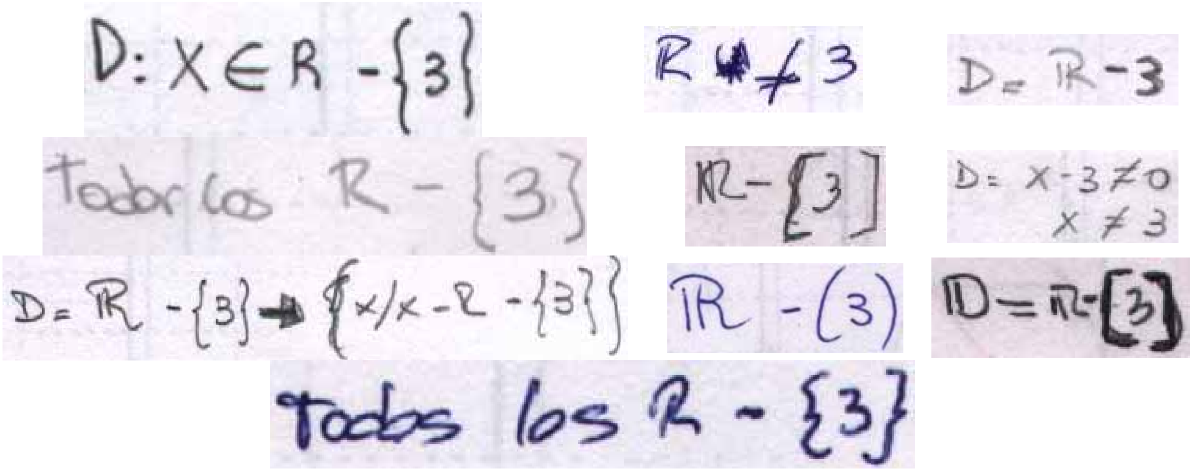
e) Realice el mismo procedimiento que en el inciso **c)** con el intervalo $\left(6 - \frac{1}{4}, 6 + \frac{1}{4}\right)$. ¿El intervalo encontrado es mayor o menor que el anterior? Interprete gráficamente.

f) Considere ahora el intervalo $\left(6 - \frac{1}{10}, 6 + \frac{1}{10}\right)$. ¿Qué puede observar?

g) ¿Podría repetir el procedimiento con cualquier intervalo que incluya a 6?

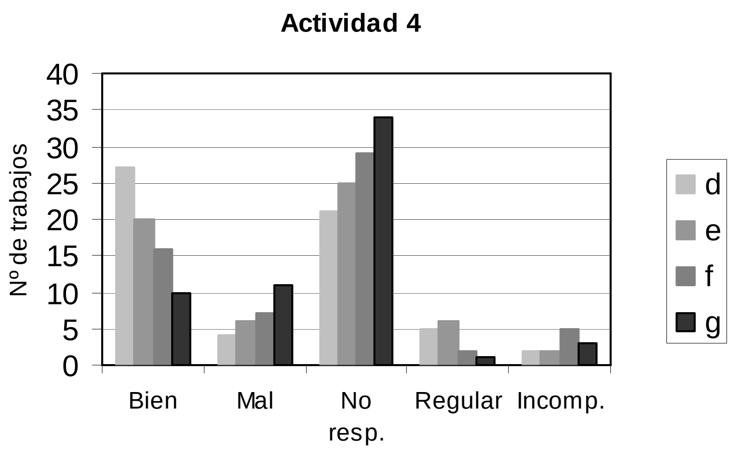
Esta actividad es muy importante y en ella se plantean diferentes interrogantes buscando preparar al alumno para llegar a la definición formal de límite.

En relación al ítem a, si bien se observa que logran formar una idea del dominio de la función presentan dificultades en el momento de su notación. Las expresiones y notaciones utilizadas por los alumnos son de lo más disímiles, como por ejemplo:



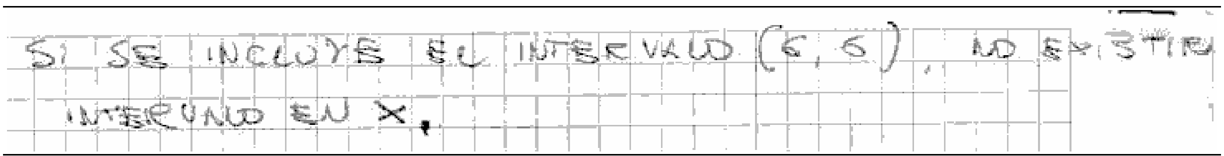
En el gráfico de barras se muestran los resultados obtenidos en los diferentes ítems.

Como se puede observar son numerosos los alumnos que no respondieron lo solicitado en **d**, **e**, **f** y **g**.



Estas cantidades denotan la falta de abstracción para la construcción de intervalos cada vez más pequeños y así poder observar qué sucede con su imagen, si bien el ítem **c** donde se solicitaba la gráfica de la función fue realizado correctamente en cincuenta y siete trabajos.

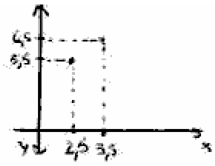
Algunas producciones de los alumnos son las siguientes:



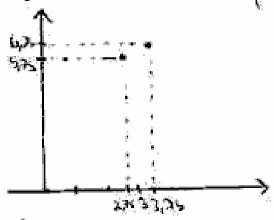
8 No, con el 6 no se podría, porque y=6, no posee dominio.

---

d) el intervalo es (2,5 , 3,5)

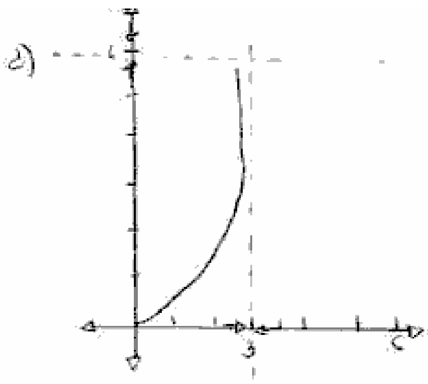


e) el intervalo es (2,75 ; 3,25) y el intervalo es menor q' el anterior.

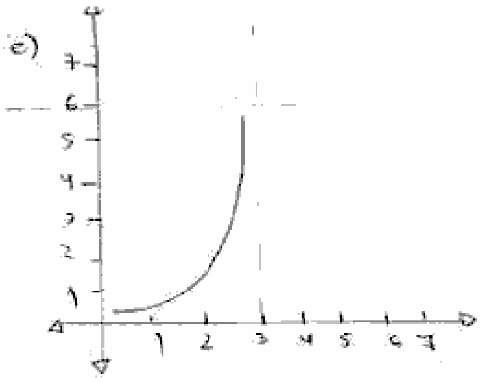


f) El intervalo sobre el eje x es menor q' los dos anteriores. g) Si

---



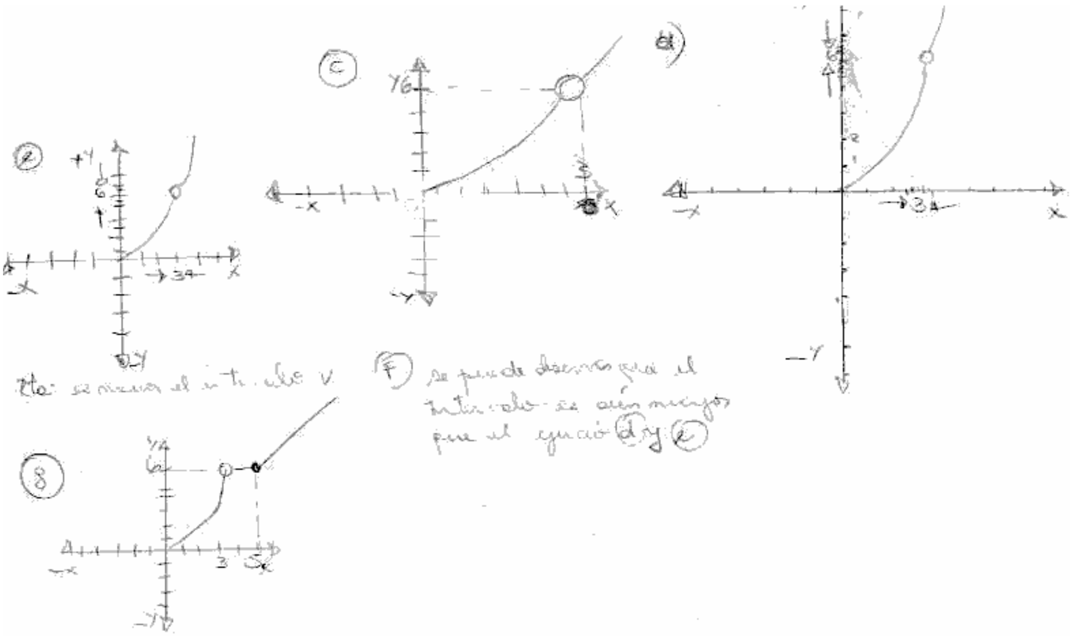
los valores de x deben estar [2,5 , 3,5]



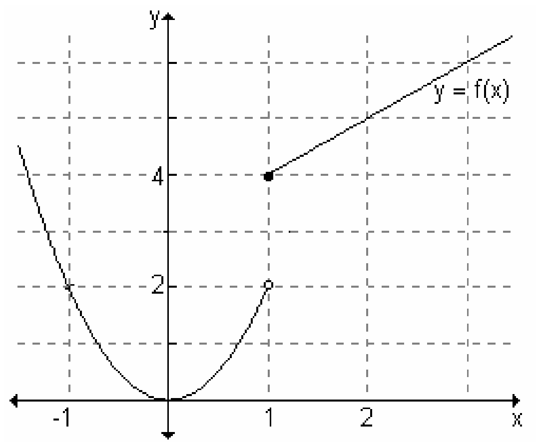
Los valores de x deben estar entre [2,75 ; 3,25]
El intervalo encontrado es menor.

f) Podemos observar que ese intervalo tiende a x=3

g) Si, ya que si incluye a 6, siempre va a tender a x=3.



Actividad 5: Dada la función definida gráficamente, ¿a qué valor se acerca f(x) cuando x tiende a 1?



a) Si en el eje y consideramos un intervalo alrededor de 2, por ejemplo $\left(\frac{3}{2},\frac{5}{2}\right)$. ¿Es posible encontrar un intervalo alrededor de x = 1 tal que sus imágenes estén en $\left(\frac{3}{2},\frac{5}{2}\right)$?

b) Si en el eje y consideramos un intervalo alrededor de 4, por ejemplo $\left(\frac{7}{2},\frac{9}{2}\right)$. ¿Es posible encontrar un intervalo alrededor de x = 1 tal que sus imágenes estén en $\left(\frac{7}{2},\frac{9}{2}\right)$?

En relación a la consigna *Dada la función definida gráficamente, ¿a qué valor se acerca f(x) cuando x tiende a 1?*, las respuestas fueron:

Correcta	Incorrecta	No responde
11,9 %	81,3 %	6,8 %

Algunas de las respuestas incorrectas encontradas son:

Respuesta	**Cantidad**	**Respuesta**	**Cantidad**
“se acerca a 4”	13	“f(x) se acerca a 2 y a 4”	1
“(2, 4] ”	1	“cuando x tiende a 1 f(x) tiende a 2 e incluye a 4”	1
“a 2 y a 4”	1	“ si $x \to 1^- \Rightarrow f(x) = 2$ si $x \to 1^+ \Rightarrow f(x) = 4$”	2
“se acerca a 2”	20	“f(1)= 4”	1
“se acerca a 2 pero toma el valor 4”	1	“$x^- \Rightarrow 1$ $y^+ \Rightarrow 2$” “$x^+ \Rightarrow 1$ $y^- \Rightarrow 4$”	1
“ $x \to 1^-$, $f(x) \to 4^-$ $x \to 1^+$, $f(x) \to 2^+$”	1	“$x \to 1^+ = 4$ $x \to 1^- = 2$”	1
“ si $x \to 1^-$, $y \to 2^-$ si $x = 1$, $y = 4$”	1	“$f(x) = 2$ $x \to 1$”	1
“se acerca a –2”	1	“$f(1) \to 4$”	1

Se destacan las respuestas en las que confunden:

- el límite lateral por derecha con la imagen de la función en el punto $x = 1$ (que es 4); esto surge pues gráficamente el punto (1, 4) está marcado y “relleno”, ó
- el límite lateral por izquierda con el punto (1, 2) que en la gráfica está marcado aunque no “relleno”.

En lo referente al trabajo con intervalos, muchos alumnos expresan que no es posible encontrarlo pero no pueden explicarlo correctamente. Para el ítem **a)** encontramos respuestas como: *“No porque* $\frac{5}{2}$ *no es imagen de ningún valor“, “No, porque* $s(x) = \frac{5}{2}$ *no existe”* y para el **b)** expresiones como: *“No.* $\frac{7}{2}$ *no es imagen de ningún valor”, “No porque* $f(x) = \frac{7}{2}$ *no existe”.*

En estos casos nos parece que entienden la situación pero justifican usando el valor extremo que no está incluido en los intervalos.

Otras respuestas que se obtuvieron son: *“No se puede encontrar un intervalo ya que la gráfica pertenece a dos funciones”*. En este caso no reconocen el concepto de función por tramos.

Algunos alumnos responden: *“No, porque no incluye al P(1, 2)”* en **a)** y *“Sí, porque incluye al P(1, 4)”* en lo solicitado en **b)**. A pesar de que los dos incisos tienen las mismas características, ya que sólo se pregunta la existencia de un intervalo, tiene mucho peso la imagen de $x = 1$ en uno de los tramos de la función.

Para continuar realizando las actividades, recibieron la siguiente consigna:

Antes de realizar la Actividad 6 tenga en cuenta la definición y las observaciones siguientes:

> *Definición.* El límite de la función f(x) cuando x tiende al número real *a* es igual al número real L si al aproximarse x a *a* por la izquierda y por la derecha, siendo $x \neq a$, resulta que f(x) se aproxima o incluso es igual a L. Se escribe: $\lim_{x \to a} f(x) = L$.

La expresión "al aproximarse x a ***a*** por la izquierda y por la derecha" de la definición anterior es muy importante. La notación $\lim_{x \to a^+} f(x)$ se utiliza para indicar el límite lateral por derecha y expresa el valor al que se aproxima f(x) cuando x tiende a ***a*** tomando valores mayores que **a**, es decir valores que se encuentran a su derecha. La notación $\lim_{x \to a^-} f(x)$ se utiliza para indicar el límite lateral por izquierda y expresa el valor al que se aproxima f(x) cuando x tiende a ***a*** tomando valores menores que ***a***, es decir valores que se encuentran a su izquierda.

Para que exista el límite de una función, deben existir los límites laterales y ser iguales.

Nota. Una función puede tener límite en un punto y no estar definida en ese punto.

Actividad 6: Grafique en cada caso una función que cumpla las condiciones siguientes:

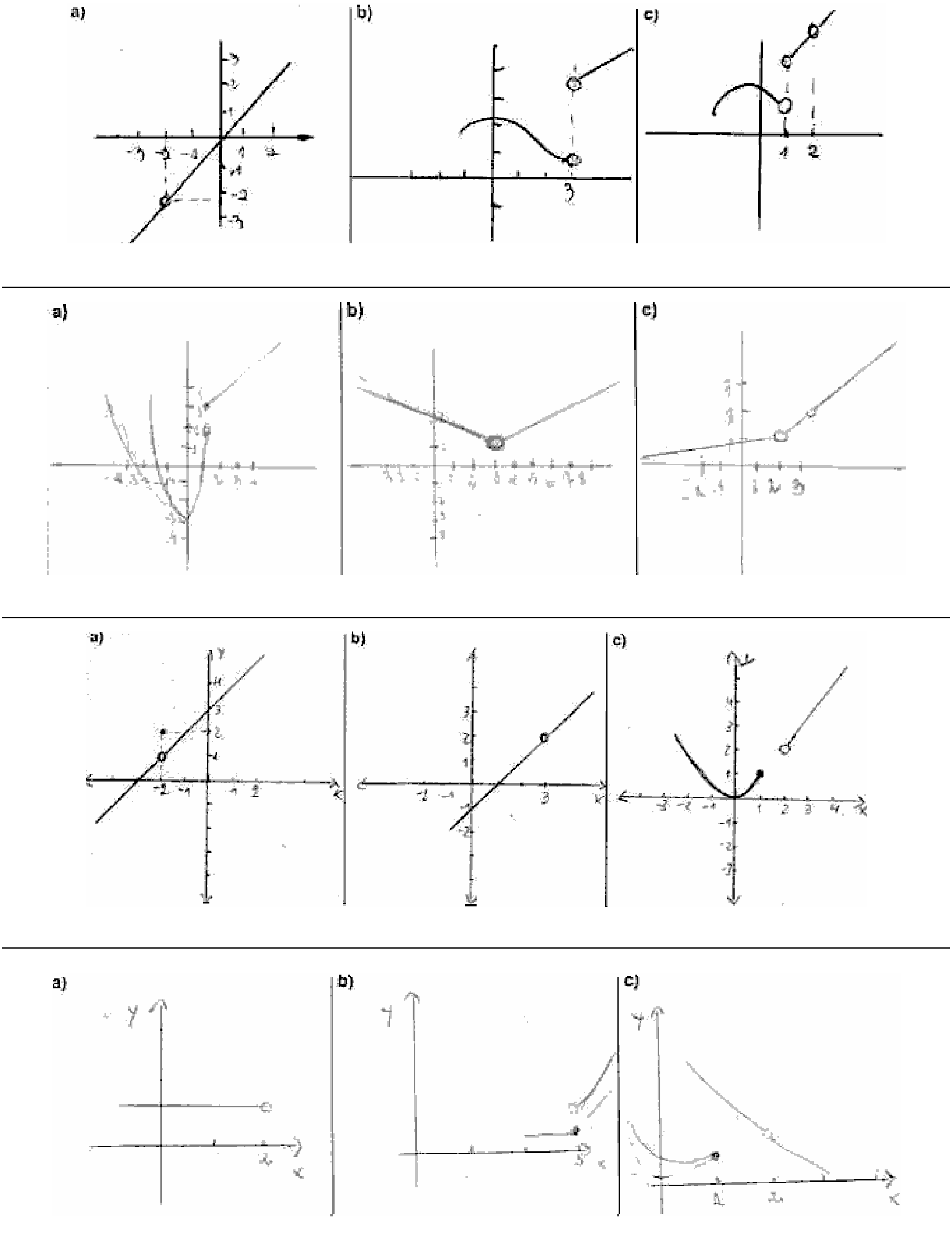
a) Dominio el conjunto de los números reales y que no tenga límite en $x = -2$.

b) Dominio el conjunto de los números reales excepto $x = 3$ que tenga límite en ese punto.

c) Dominio el conjunto de los números reales excepto $x = 2$ que tenga límite en $x = 1$ y no en $x = 2$.

En estas actividades se relacionan los sistemas de representación verbal, simbólico y gráfico. Se busca que los alumnos se familiaricen con la idea de límite, sean capaces de representar funciones con o sin límite y de distinguir entre el límite y el valor de una función en un punto. Sólo un 45% de los trabajos presentaron correcta la opción **c** mientras que la que menos dificultades les presentó fue la **b** en la que el 79% presentaba respuesta correcta. Llama la atención los inconvenientes que tienen para la construcción de gráficos de funciones a partir de condiciones dadas en forma verbal.

Compartimos las producciones de algunos de nuestros alumnos.



Actividad 7: Determine si son verdaderas o falsas las siguientes afirmaciones. Justifique sus respuestas utilizando gráficos:

a) Si $\lim\limits_{x \to 2} f(x) = 3 \Rightarrow f(2) = 3$

b) Si $f(2) = 3 \Rightarrow \lim\limits_{x \to 2} f(x) = 3$

c) Si $-3 \notin D_f$ (dominio de f) $\Rightarrow$ no existe $\lim\limits_{x \to -3} f(x)$

d) Si no existe $\lim\limits_{x \to -3} f(x) \Rightarrow -3 \notin D_f$

e) Si existe $\lim\limits_{x \to -3} f(x) \Rightarrow -3 \in D_f$

Como se observa en la siguiente tabla, la mayor cantidad de errores se presentaron en los ítems **a** y **b**.

Respuestas	**Ítem a**		**Ítem b**		**Ítem c**		**Ítem d**		**Ítem e**	
	Cant	**%**	**Cant**	**%**	**Cant**	**%**	**Cant**	**%**	**Cant**	**%**
Correcta	13	22.0	3	5.1	28	47.4	22	37.3	18	30.5
Incorrecta	32	54.2	32	54.2	16	27.1	12	20.3	18	30.5
No responde	5	8.5	7	11.9	7	11.9	9	15.3	15	25.4
Regular	8	13.6	14	23.7	3	5.1	9	15.3	4	6.8
Incompleta	1	1.7	3	5.1	5	8.5	7	11.8	4	6.8

De las treinta y dos (32) incorrectas en cada ítem, veintiocho (28) en el ítem **a** y veintisiete (27) en el ítem **b** colocaron verdadero y presentaron como justificación gráficas de funciones continuas. Para ellos el concepto de límite de una función en un punto es lo mismo que la imagen en dicho punto. Teniendo en cuenta ambos ítems, consideran una doble implicación

$$\lim_{x \to 2} f(x) = 3 \Leftrightarrow f(2) = 3$$

¿Cómo continuamos nuestro trabajo?

Dado que, del análisis de las producciones de los grupos de trabajo, se observan deficiencias y carencias en los conocimientos previos necesarios para abordar los temas de cálculo, poco nivel de abstracción y escaso nivel de conceptualización requerido para el desarrollo de los nuevos conceptos, y que, por manifestaciones de ellos (a través de encuestas y entrevistas), se nota algún miedo o disgusto hacia la matemática en general y el cálculo en particular, se decidió continuar la tarea con determinadas acciones.

Entre ellas, las más significativas fueron:

- propiciar el debate y discusión en forma grupal con los alumnos sobre los errores cometidos y las dificultades observadas en las clases sucesivas al reaparecer los contenidos involucrados,
- el debate y discusión en forma individual durante las clases de consulta organizadas especialmente para tratar esta situación,
- el análisis entre los docentes y con los alumnos de los resultados obtenidos en las preguntas del parcial correspondiente a estos tópicos y la discusión nuevamente sobre las producciones concretas de los alumnos,
- el trabajo continuo retomando cotidianamente estos contenidos al desarrollar los diferentes temas del programa analítico teniendo en cuenta que para lograr conocimiento matemático es necesario que se produzcan rupturas y reacomodaciones y,
- la reflexión permanente, como docentes, sobre el papel que juega el lenguaje en matemática, pues esto permitirá elaborar actividades en el aula que contribuyan a la correcta interpretación de las consignas y comunicación de los resultados.
- Es importante:
- brindar a los alumnos un espacio que les permita argumentar sobre los conceptos que se tratan en la clase exponiendo sus propias ideas,
- darles oportunidad para no estar de acuerdo ni con sus pares ni con el profesor,
- provocar y fomentar la discusión entre los estudiantes a fin de aclarar y ampliar aspectos matemáticos trabajados en esta actividad así como tomar nota de los aspectos nuevos que emerjan de la discusión de los propios estudiantes.

Reflexiones

Analizando los resultados, nos preocupan las dificultades cognitivas que presentan los alumnos ya que en general, no lograron el desarrollo del razonamiento formal requerido para comprender los conceptos de límite. Nos propusimos aprovechar los errores encontrados y de esa manera retomar los contenidos para que los alumnos descubran e identifiquen sus dificultades y organicen estrategias para superarlas. Nos preguntamos, ¿por qué tienen tantos inconvenientes? y, en especial, ¿cómo podemos ayudarlos? Estamos convencidas, entre otras cosas, que, algunas de las estrategias serían:

- favoreciendo un tratamiento curricular de los errores mediante el uso de situaciones que permitan incorporar al debate en el aula ideas correctas y equivocadas tendientes a generar un conflicto cognitivo que motive una discusión que permita la resolución del mismo,
- facilitando actividades que provoquen en el estudiante un conflicto y lo hagan reflexionar sobre sus estructuras cognitivas erróneas,
- motivando la apertura del pensamiento hacia nuevas hipótesis dado que descubrir hipótesis falsas y sus consecuencias facilita la incorporación de nuevos conocimientos y aporta nuevas ideas,
- propiciando el descubrimiento y la discusión grupal de los errores convirtiendo al alumno en un sujeto activo en busca de superación y,
- permitiendo al alumno superar el error y transformarlo gracias a situaciones de enseñanza adecuadas.

Como docentes es importante vivenciar el diseño y la puesta en marcha de diferentes actividades de aula y comprobar y reconocer la importancia de las mismas tanto como recursos valiosos para la enseñanza como para su propia formación. Si pretendemos enseñar un concepto para que nuestros alumnos lo aprendan debemos favorecer diferentes interpretaciones que puedan hacerse de los conocimientos y sus relaciones con preconceptos y conocimientos previos. Un desafío constante es poder desarrollar estrategias de enseñanza basadas en la cooperación, propiciando el trabajo en grupos a fin de reforzar conocimientos y compartir o disentir con las diferentes miradas sobre las actividades matemáticas.

Para una futura implementación y readecuación de la situación es particularmente importante la discusión en grupo de los trabajos.

Es primordial, al trabajar distintos profesores con diferentes grupos de alumnos, hacer el ejercicio de reunirnos y debatir y discutir entre nosotros buscando identificar las dificultades que consideramos tendrían nuestros alumnos al trabajar las distintas actividades propuestas. Esta instancia es tan importante como la puesta en común que se haga entre todos los docentes involucrados después de llevar al aula la situación diseñada.

Plantearnos qué enseñar y cómo hacerlo de la mejor manera, nos impone una reflexión continua sobre nuestro accionar que nos permita encontrar el significado de las distintas situaciones escolares, detectar problemas y hallar soluciones. Si las experiencias son variadas en relación a la enseñanza de un mismo concepto, aumentará la posibilidad de que el alumno actúe, realice los procesos de observación, establezca relaciones, generalice y llegue a la abstracción. Realizar una mirada reflexiva y crítica sobre nuestras acciones nos permite decidir, diseñar, implementar y experimentar estrategias de acción para obtener un aprendizaje de calidad.

Bibliografía

- M. Artigue, (1995): "La enseñanza de los principios del cálculo: problemas epistemológicos, cognitivos y didácticos". En: M. Artigue; R. Douady; L. Moreno y P. Gómez (editor). Ingeniería didáctica en educación matemática, 97-140. Una Empresa Docente. Grupo Editorial Iberoamérica. Bogotá.
- M. Artigue, (2000): "Enseñanza y aprendizaje del análisis elemental:¿Qué nos enseñan las investigaciones didácticas y los cambios curriculares?" En: R. Cantoral: El futuro del cálculo infinitesimal. ICME 8, Grupo Editorial Iberoamérica. Méjico.
- C. Azcárate; D. Bosch; M. Casadevall, y E. Casellas, (1996): Cálculo Diferencial e integral. Editorial Síntesis. España.
- S. Blázquez; T. Ortega (2001): "Los sistemas de representación en la enseñanza del límite". Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa. 4, Nº 3, 219-236.
- R. Borassi (1987): "Exploring Mathematics through the Analysis of Errors". For the Learning of Mathematis. 7, 2-9.
- G. Brousseau (1987): "Fondements et méthods de la didactique des mathématiques". Recherches en didactique des mathématiques 7.2, 33-115.
- G. Brousseau (1998) Théorie des situations didactiques. Grenoble. La Penseé Sauvage.
- R. Cantoral (2003): "Pensamiento Matemático Avanzado" En: R.Cantoral, R. Farfán, F. Cordero, J. Alanís, R. Rodriguez y A. Garza: Desarrollo del pensamiento matemático, 205-218. Editorial Trillas. México.
- J. Confrey (1990): A review of research on student conceptions in Mathematics, Science and Programming. Review of Research in Education 16, 3-55.
- B. Cornu (1991): "Limits". En: D. Tall, (Ed). Advanced Mathematical Thinking, 153-166. Dordrecht: Kluwer Academic Press.
- J. Cottrill, E. Dubinsky, D. Nichols, K. Schwing endorf, K. Thomas y D. Vidakovic (1996): "Understanding the Limit Concept: Beginning with a Coordinated Process Schema". Journal of Mathematical Behavior. 15, 167-192
- E. Dubinsky (1991): Reflective Abstraction in Advanced Mathematical Thinking. En D. Tall (ed.): Advanced Mathematical Thinking (pp 95-123).Kluwer Academic Publishers, Dordrecht.
- H. Lara Chávez (1997): "La enseñanza de los conceptos de límite y continuidad de funciones". Memorias del Seminario Nacional: Calculadoras y Computadoras en Educación Matemática, 127-132. Sonora.
- A. Orton (1980): A cross-sectional study of the understanding of elementary calculus in dolescentes and young adults. Tesis Doctoral. University of Leed.
- G. Polya (1957): Cómo plantear y resolver problemas (Traducción castellana, 1965). México, Trillas
- H. Radatz (1980): Student's Errors in the Mathematis Learning Process: A Survey. Learning of Mathematics. 1.1, 1-20.
- A. Sierpinska (1985): "Obstacles epistémologiques relatifs a la notion de limite." Recherches en Didactique des Mathématiques 6 (1), 5-67.

Adriana Engler es Licenciada en Matemática Aplicada y Magister en Educación PsicoInformática y se dedica a la investigación en Matemática Educativa ocupándose en especial de las dificultades de enseñanza y aprendizaje de los principios del cálculo y la incorporación de las nuevas tecnologías en el aula.
Facultad de Ciencias Agrarias - Universidad Nacional del Litoral
Esperanza - Santa Fe - Argentina
aengler@fca.unl.edu.ar

Silvia Vrancken es Profesora en Matemática y actualmente alumna de la Maestría en Didáctica Específicas. Se dedica a la investigación en Matemática Educativa ocupándose en especial de las dificultades de enseñanza y aprendizaje de los principios del cálculo.
Facultad de Ciencias Agrarias - Universidad Nacional del Litoral
Esperanza - Santa Fe - Argentina
svrancke@fca.unl.edu.ar

Marcela Hecklein es Licenciada en Matemática Aplicada y actualmente integra el equipo de trabajo del proyecto de investigación "Errores y dificultades: organizadores didácticos en el aprendizaje del Cálculo en carreras no matemáticas".
Facultad de Ciencias Agrarias - Universidad Nacional del Litoral
Esperanza - Santa Fe - Argentina
mhecklei@fca.unl.edu.ar

Daniela Müller es Profesora en Matemática y actualmente alumna de la Maestría en Didáctica de las Ciencias Experimentales. Se dedica a la investigación en Matemática Educativa y en especial a la incorporación de las nuevas tecnologías en el aula.
Facultad de Ciencias Agrarias - Universidad Nacional del Litoral
Esperanza - Santa Fe - Argentina
dmuller@fca.unl.edu.ar

María Inés Gregorini es Profesora en Matemática y Computación y actualmente integra el equipo de trabajo del proyecto de investigación "Errores y dificultades: organizadores didácticos en el aprendizaje del Cálculo en carreras no matemáticas".
Facultad de Ciencias Agrarias - Universidad Nacional del Litoral
Esperanza - Santa Fe - Argentina
migrego@fca.unl.edu.ar

UNIÓN
REVISTA IBEROAMERICANA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA

Septiembre de 2007, Número 11, páginas 133 - 145
ISSN: 1815-0640

Hacia una revisión crítica de la enseñanza del número de dos cifras

José Antonio Fernández Bravo

Resumen

A través de los resultados obtenidos de una investigación evaluativa y comparada, se presenta una intervención educativa para la enseñanza-aprendizaje del número de dos cifras, que evite dificultades de los alumnos en el estudio de este tema: Dificultad de comprensión, dificultad de diferencia posicional, error de cálculo, confusión entre decenas y unidades, error en la representación numérica, error de secuencia numérica en los cambios de decena, dificultad de aplicación a la resolución de problemas... El proceso de intervención consta de cinco bloques fundamentales: Comprender – Representar – Ordenar – Identificar - Establecer y Aplicar Relaciones.

Abstract

Based on an evaluative and comparative study, this paper presents a case of educational intervention aimed at teaching two-digit numbers that will avoid some of the most salient difficulties encountered by students. The latter include understanding difficulties, difficulties of positional difference, calculation errors, confusion of units and tens, errors in numeric representation, error in numerical sequence on changing tens, difficulties in problem-solving…The intervention process is composed of five main blocks: Understanding – Representing – Ordering – Identifying – Establishing and Applying Relations.

1. Introducción

> "*El lamentable tipo de educación que reciben los niños en el ámbito escolar con demasiado énfasis en los conceptos abstractos y la memorización rutinaria (…) estanca el desarrollo del substrato numérico instintivo y con ello se derrumba el soporte intuitivo para la adquisición de los nuevos conceptos. A partir de aquí el fracaso en el aprendizaje de las matemáticas está asegurado.*" (Dehaene, 1997)

Reconocidos neurocientíficos afirman que no se parte de cero para el aprendizaje del número[1]. Nuestro cerebro posee una capacidad numérica genéticamente impresa. Esta facultad que poseemos es el punto de partida para la construcción de un "órgano cerebral" dedicado a la representación de los conceptos numéricos. Aconsejan a la enseñanza de la Matemática: **el desarrollo del razonamiento intuitivo, la manipulación de materiales y el carácter lúdico de las actividades.**

[1] Dantzig (1954); Dehaene (1997); Miranda y Gil-Llario (2001); Starkey y Cooper (1980); Van Hout y Meljac (1998)

Los datos, obtenidos por la observación llevada a cabo durante varios años sobre el proceso de adquisición del número de dos cifras, muestran un bajo rendimiento de los alumnos en su comprensión y aplicación, sobre todo en los cursos escolares siguientes al que ha sido enseñado el número de dos cifras, según el curriculum educativo establecido[2]. La causa fundamental se debe al método utilizado en el proceso de su enseñanza[3]. Este método se apoya, básicamente, en el exagerado seguimiento de los libros de texto que se utilizan en las aulas. Todos los libros presentan el mismo proceso, que conlleva necesariamente a incorporar en los profesores creencias erróneas (Green, 1971; Garofalo, 1989; Thompson, 1992; Pehkonen y Torner, 1996), en este caso, sobre el aprendizaje del número de dos cifras.

Con el número de dos cifras el niño entra en las primeras experiencias que generan una estructura mental para el entendimiento de nuestro Sistema de Numeración. De ahí la importancia de comprender perfectamente lo que estas primeras experiencias ofrecen; los necesarios conocimientos para conquistar con éxito la Numeración y su extensión matemática.

El proceso presentado por los libros de texto enseña los números de dos cifras en orden, empezando por el número *diez* y terminando por el número *noventa y nueve*[4]. Posteriormente, exige la clara distinción entre decenas y unidades. Estudia más tarde sumas y restas con esos números a partir de la técnica de contar (Fernández Bravo, 2005) y recontar. Los resultados de la investigación nos muestran, en relación con la comprensión numérica en su proceso de adquisición: que los números cuyo cardinal de dieces es uno (10, 11, 12,…, 19) son más difíciles que aquellos cuyo cardinal de dieces es mayor que uno; que las decenas enteras (10, 20, 30, 40,…, 90) son más difíciles que otros números; que los números más difíciles de identificar por su nombre y comprender son del once al veinte; que la distinción de elementos *diez* y elementos *uno*, constituye la comprensión del número de dos cifras, -por lo que se sugiere que sea el punto de partida y no el punto de llegada-; que el número más difícil de comprender es el número diez (Fernández Bravo, 2004). Los resultados de la investigación muestran serias contrariedades entre la formación del pensamiento numérico del niño y el proceso presentado por los libros de texto.

2. El procedimiento

Los contenidos previos para entrar con éxito en la adquisición y el desarrollo del número de dos cifras, están en el dominio[5] del número de una cifra; con

[2] Habitualmente se enseña en las escuelas a los seis años de edad.
[3] "Más allá del término está su significado y, por tanto el prejuicio de su diagnóstico: cuándo podemos hablar, o no, de discalculia; son muchos los investigadores y estudiosos del tema los que agregan un problema importante y frecuente en su diagnóstico: la enseñanza inadecuada". (Rebollo y Rodríguez, 2006)
[4] Puede ojearse cualquier libro de texto de cualquier editorial.
[5] "Lo que llamamos desarrollo de una noción matemática, no es más que el pasaje de una experiencia vivida o de un conocimiento verbal a un plano de conciencia superior sobre el cual los datos dispersos, las adquisiciones más o menos intuitivas, se reagrupan y se estructuran progresivamente según las haga la lógica adulta" (…) "Entre los tres y cinco años, el niño aprende difícilmente los cinco o seis primeros números, si se considera que

independencia de la técnica de conteo[6]. Entendemos por dominio de una cifra, tanto la correcta asociación de cantidad y grafía, como las equivalencias por expresiones sumativas de composición-descomposición: 5 = 4 + 1; 3 + 2; sin necesidad de contar (Fernández Bravo, 2006).

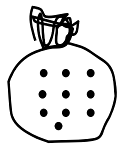
El proceso de enseñanza-aprendizaje del número de dos cifras, lo desarrollaremos en cinco bloques fundamentales y secuenciados; es decir, que no se puede trabajar uno cualquiera de estos bloques sin haber trabajado el anterior.

La comprensión del número de dos cifras

Presentamos los principios básicos del Sistema de Numeración Decimal, que constituyen la comprensión del número de dos cifras, en la diferenciación de sus elementos y su agrupación.

Presentación de un elemento al que podamos llamar diez

Por conteo el alumno sabe que el siguiente sonido que se pronuncia después de decir "nueve" es "diez". Por experiencia puedo decir que, aunque el alumno se exprese con esa palabra, e incluso sea capaz de identificarlo allí donde lo ve por su representación numérica, no demuestra nada de su saber sobre el concepto diez como elemento, de su importancia matemática en la construcción de nuestro sistema de numeración y de su extensión aritmética. Que el niño diga "diez" nada dice sobre la comprensión de su significado. Permitiremos que el niño mida la regleta naranja con tantas blancas como a ella equivalgan. O cierre una bolsa cuando pueda contar diez, y sólo diez[7].



Naranja (N)									
b	b	b	b	b	b	b	b	b	b

Fácilmente descubre que a la regleta naranja[8] la llamamos diez si a la blanca la llamamos uno[9]. Obsérvese que la regleta naranja es un elemento. En Matemáticas

el conocimiento puramente verbal de la serie de los números no corresponde a una verdadera adquisición" (Mialaret, 1967)

[6] "Enseñar a razonar sin enseñar a contar" (Bandet, 1969)

[7] Lo importante no es el material que utilizamos, sino el proceso didáctico que seguimos para la adquisición del número de dos cifras. En este artículo presentamos el proceso apoyándonos en un material estructurado como son las Regletas de Cuisenaire y, otro, fácil de construir como son unas simples bolsas. Se podría utilizar cualquier otro material que permitiera representar al elemento "diez" (como un solo elemento) y al elemento "uno". Para profundizar obre la utilización de materiales puede verse: Baroody y CoslicK (1998); Cascallana (1988); Godino (2004); Fernández Bravo (2003)

[8] Las regletas de Cuisenaire son listones de diferentes longitudes que van desde un cm. hasta diez cm., cada una de distinto color: blanca (b), roja (r), verde claro (v), rosa (R), amarilla (a), verde oscuro (V), negra (n), marrón (m), azul (A) y naranja (N). Para profundizar sobre la utilización de las regletas puede verse: Gattegno (1960, 1967); Goutard (1964); Fernández Bravo (2007)

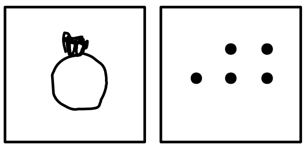
[9] Sólo podremos llamar diez a la regleta naranja, si a la regleta blanca la llamamos uno.

diez es un elemento. Esta intuición es fundamental para que el alumno desarrolle con éxito la comprensión del número de dos cifras.

Los alumnos pueden trabajar también con bolsas cerradas en cuyo interior tengan diez y solo diez elementos. Posteriormente, solo necesitaremos tarjetas con el dibujo de esas bolsas, sustituyendo la realidad física por el dibujo. A las bolsas cerradas las llamaremos “diez”. Obsérvese que la bolsa es un elemento.

Representar los elementos por el nombre convenido

Jugar con un elemento al que llamaremos diez (viendo a éste como un todo). Este elemento será representado con la regleta naranja o con una bolsa. El profesor mostrará al alumno la regleta naranja, al tiempo que le pregunta cómo llamamos ahora a esa regleta. Mostrará también, por ejemplo la regleta blanca, al tiempo que también pregunta cómo se la llama. Uniendo esas regletas por sus extremos a los ojos del niño se les preguntará cómo podemos llamar a lo que ven: diez y uno, dirán (Conviene dejar que el niño se exprese con la evidencia de lo que ve, después ya les diremos cómo convencionalmente se conoce a esos números: once, doce, quince; de momento el alumno entenderá perfectamente lo que se dice, si se expresa como: diez y cinco; o, diez y nueve; o, diez y tres).



diez y cinco

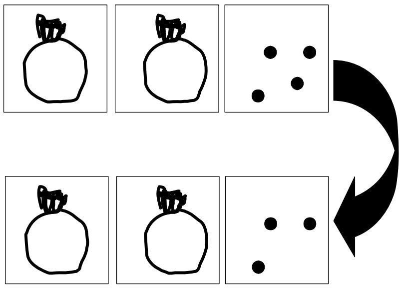
N	b
Diez	Uno

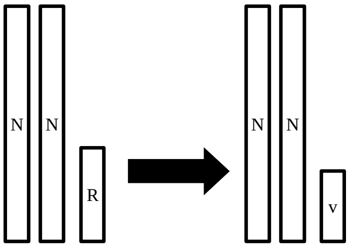
N	v
Diez	Tres

Distinción intuitiva del elemento diez y del elemento uno

Si algo es importante en la comprensión del número de dos cifras, esto es que el alumno distinga: el cardinal de elementos *diez,* del cardinal de elementos *uno*. Una posible forma de proceder es la siguiente: Dictaremos, por ejemplo: “Diez y diez y cuatro”. Los niños nos lo mostrarán sin dificultad alguna, ya que este aprendizaje pertenece a la actividad anterior. Posteriormente y, sin explicar nada al alumno, haremos variar sólo un cardinal: bien, el del elemento diez; bien, el del elemento uno. Así, por ejemplo, ya nos están enseñando: *diez y diez y cuatro*; entonces, podemos dictar: diez y diez y tres.

Obsérvese que se ha mantenido el cardinal del elemento *diez* y se ha variado únicamente el cardinal del elemento *uno*.

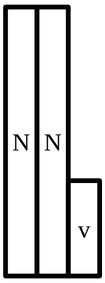




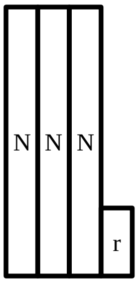
La agrupación de los distintos elementos. La percepción del cardinal por elementos

Durante varios años, la observación sirvió de prueba para concluir, que el cardinal de elementos se presente después, y sólo después, de haber establecido una correspondencia biunívoca entre esos elementos y su nombre.

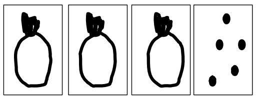
Hasta ahora, en las actividades anteriores a ésta en la que estamos, dictamos, estableciendo una correspondencia biunívoca entre el nombre y la representación física del elemento, así: diez y diez y tres. En esta actividad se trataría de acumular el número de dieces y dictar, por ejemplo: dos dieces y tres. En definitiva lo que hacemos es cardinalizar el número de dieces y cardinalizar el número de unos (ya estudiado anteriormente). Obsérvese que al decir, por ejemplo: cuatro dieces y tres, lo que el alumno oye es *cuatro* y también *diez* y también *tres*. Tiene que dar correcto sentido matemático a lo que oye, distinguiendo: el cardinal de elementos, del elemento en sí.



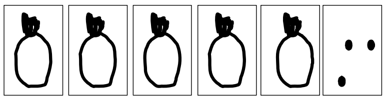
DOS DIECES Y TRES



TRES DIECES Y DOS



TRES DIECES Y CINCO



CINCO DIECES Y TRES

La representación simbólica del número de dos cifras

Para representar algo es necesario tener conocimiento de ese algo, con el que establecer correspondencia por asociación intelectual. En las actividades anteriores hemos permitido que el alumno perciba los cardinales de dos elementos distintos. No ha aparecido representación matemática alguna del número de dos cifras. Ahora, trabajaremos en ello; estudiar cómo se representa aquello que ya se conoce.

Actividad uno

Antes de escribir número alguno en la pizarra pediremos a los niños nos muestren con regletas (o bolsas) un cardinal de elementos *diez* y elementos *uno*, ya dado por nosotros. Este ejercicio es principal para poder continuar. En esta actividad dictaremos siempre, con independencia de orden alguno:

- Números, cuyo cardinal de dieces no coincida con el cardinal de unos.
- Números, cuyo cardinal de unos sea un número distinto de cero.
- Números, cuyo cardinal de dieces sea un número mayor que uno.
- Y también se deben dictar números de una cifra, que se intercalarán con el dictado de los anteriores.

Una vez que hayamos observado que los niños no tienen dificultad alguna en mostrarnos correctamente lo que pedimos, pasaremos a escribir en la pizarra el número pedido, de uno en uno[10], y haciendo siempre referencia a la distinción de cardinales.

Una posible intervención didáctica, a modo de diálogo, podría ser la siguiente:

Profesor: Enséñame con regletas (o con bolsas; a elegir): tres dieces y dos; nueve dieces y tres; cuatro dieces y cinco; siete; ocho dieces y tres;...

(Y esperaremos a que se realicen correctamente las actividades).

Profesor: Enséñame: diez y diez y diez y cinco.

Alumno: (Enseña tres dieces y cinco).

Profesor: ¿Cuántos dieces me enseñas? ¿Cuántos unos?

El profesor espera a que los niños respondan y, al mismo tiempo que éstos lo hacen, dibuja en la pizarra, aumentando considerablemente el tamaño del dibujo,

35

mientras lo dibuja se expresa diciendo: “Diez y diez y diez y cinco”, se dibuja así. No conviene añadir, a esa expresión, algo más en absoluto; explicación alguna o expresiones que pueden despistar la percepción del niño[11].

[10] En la pizarra sólo se puede ver la representación de un número; ya de una cifra, ya de dos. Esto obligará a borrar una representación para representar la siguiente.
[11] “El concepto de número es un concepto abstracto, que solamente existe en nuestra mente. El número no es un conjunto sino una cualidad del conjunto…” (Martínez, Bujanda y Velloso, 1981)

Actividad dos

El niño debe representar numéricamente cualquier número menor que cien, tanto en correspondencia con un material mostrado, como sin material alguno y sólo a través de la lectura convenida: diciendo el número de decenas y el número de unidades; así, por ejemplo: *nueve dieces y cuatro*, o, *cinco dieces*.

2 3	diez y diez y tres	Dos dieces y tres
1 3	diez y tres	Un diez y tres
4 0	diez y diez y diez y diez	Cuatro dieces
3 3	diez y diez y diez y tres	Tres dieces y tres

Durante muchos años, se observaban errores considerables en las respuestas de los niños a distintas actividades que se iban proponiendo con relación al número de dos cifras. Anotamos cuantas observaciones nos permitieron concluir que el orden didáctico de presentación habitual no coincidía con la formación del pensamiento numérico del niño. E incluso detenía considerablemente el desarrollo hacia el ortodoxo entender matemático. No se le podían presentar al niño los números en el orden establecido sin antes haberles dado la oportunidad de comprender el convenio de su escritura. No se podía dar ordenadamente algo que no conocían y más cuando hay distintos criterios de orden. Entonces, el orden debería aparecer posteriormente: una vez que los elementos a ordenar sean conocidos; luego, en primer lugar, había que abordar ese conocimiento[12].

Del mismo modo, se observaba que los libros de texto se empeñaban, con excesiva posterioridad a la debida, en distinguir *unos* y *dieces* o, si cabe: unidades y decenas. Pero al escuchar al niño nos dimos cuenta que, a veces, confundimos causa y consecuencia, y no podía exigirse la consecuencia sin estudiar lo que era causa necesaria de comprensión del número de dos cifras. Nuestro Sistema de Numeración es posicional y, por tanto, habría que distinguir ante todo posición, y ubicar correctamente la distinción del cardinal de *dieces* frente al cardinal de *unos*.

Ordenar los números de dos cifras

Como se ha expresado anteriormente, no se podía ordenar algo que no se conocía, y más, cuando hay distintos criterios de orden. La aparición del orden es posterior a la aparición de los elementos que ordenar; una vez conocido lo que hay que ordenar, se establece el criterio para poder ordenarlo. Ahora ya conocemos esos elementos y hay que trabajar con distintos criterios de orden. El más sencillo es “sumar uno”.

[12] “En la escuela primaria (6-12 años) se acostumbra a enseñar los nombres de los números, uno tras otro, recurriendo al contar, confundiendo constantemente los nombres de los números con los números mismos. Así resulta que el niño recita los números en lugar de construirlos.” (Goutard, 1966)

Partimos de una tabla de diez por diez

En esta tabla iremos ordenando los números por columnas de menor a mayor y de abajo hacia arriba. La primera columna que utilizaremos será la que esté más a su izquierda. Esta tabla será común para todos. El profesor completará la primera columna, tal y como se ha indicado, nombrando a la vez que representa; así dirá: cero, uno, dos, tres,... nueve. Posteriormente, empezará a completar la segunda columna, representando al tiempo que nombra: diez, diez y uno, diez y dos, diez y tres,... diez y nueve (dejando, a partir del diez y dos, que el niño participe libremente, tanto representando en la tabla de forma correcta, como nombrando esa representación).

9									
8									
7									
6									
5									
4									
3									
2									
1									
0									

Según el orden de los Números Naturales, el siguiente a *diez y nueve* es *diez y diez*

9	**19**	**29**	**39**	**49**	**59**	**69**	**79**	**89**	**99**
8	**18**	**28**	**38**	**48**	**58**	**68**	**78**	**88**	**98**
7	**17**	**27**	**37**	**47**	**57**	**67**	**77**	**87**	**97**
6	**16**	**26**	**36**	**46**	**56**	**66**	**76**	**86**	**96**
5	**15**	**25**	**35**	**45**	**55**	**65**	**75**	**85**	**95**
4	**14**	**24**	**34**	**44**	**54**	**64**	**74**	**84**	**94**
3	**13**	**23**	**33**	**43**	**53**	**63**	**73**	**83**	**93**
2	**12**	**22**	**32**	**42**	**52**	**62**	**72**	**82**	**92**
1	**11**	**21**	**31**	**41**	**51**	**61**	**71**	**81**	**91**
0	**10**	**20**	**30**	**40**	**50**	**60**	**70**	**80**	**90**

El siguiente a *diez y diez*, según el criterio de orden que estamos utilizando, será *diez y diez y uno*; así, seguiríamos con: diez y diez y dos, diez y diez y tres... El siguiente a *diez y diez y nueve* es *diez y diez y diez*. Serán los niños, a partir del *diez y diez y uno*, los que vayan construyendo esa tabla de números de forma ordenada, representando de uno en uno, todos y cada uno de los siguientes números, al tiempo que los nombra, tal y como hemos indicado.

Identificar por su nombre convencional los números de dos cifras

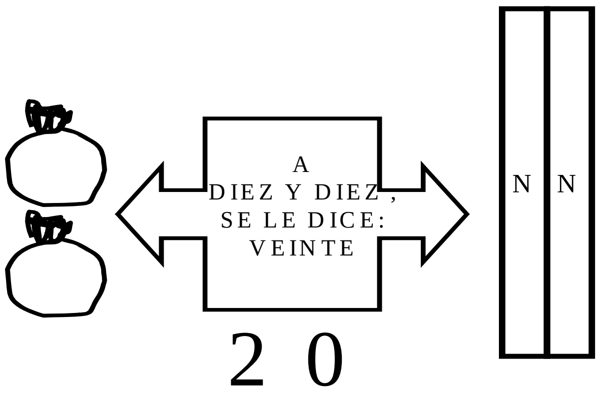
Una vez que el alumno ha comprendido, ha representado y ha ordenado los números de dos cifras, tendrá que enunciarlos tal y como se ha convenido culturalmente. Ahora, se trata de dar nombre, de identificar aquello que ya sabe lo que significa.

Hágase un recorrido por la Historia de la Matemática, pronto observaremos cómo el nombre identifica el significado de lo que ya se ha descubierto; o, piénsese en el ámbito lingüístico, y véase cómo en distintos idiomas el mismo significado se nombra de diferente forma; pregúntese cómo se dice *diez y diez y diez*, en inglés, en francés, en alemán, en vasco, en catalán, en gallego... Estamos, entonces, en estas dos situaciones con nuestros alumnos. En castellano, *diez y diez y diez* se dice*: treinta;* este es el trabajo que ahora nos ocupa.

Seguiremos trabajando con el mismo proceso para nombrar: CUARENTA. *A cuatro dieces se le dice: CUARENTA.* Generaremos ejercicios similares a los anteriores. Nombrar, por ejemplo el número 84, con los nombres dados hasta ahora: *treinta*, *cuarenta* y *diez*: cuarenta y cuarenta y cuatro; o, cuarenta y treinta y diez y cuatro; o, cuarenta y dos y cuarenta y dos;...

No es difícil observar la dicción lógica de los nombres presentados: a TREs dieces se le dice TREinta; a CUAtro dieces, se le dice CUArenta. Rápidamente saldrá, incluso de los mismo niños: CINCUENTA y SESENTA,... SETENTA, OCHENTA, NOVENTA.

El más difícil de todos es veinte, porque no tiene la misma dicción lógica, en función del número de dieces, que tienen los demás números presentados; por eso no lo presentaremos en primer lugar. Cuando lo presentemos, simplemente diremos: A *diez y diez* se le dice VEINTE.



Lo mismo ocurre con los números: once, doce, trece, catorce y quince. Serán presentados, después de presentar al número veinte[13].

A diez y uno, se le dice: ONCE
A diez y dos, se le dice: DOCE
A diez y tres, se le dice: TRECE
A diez y cuatro, se le dice: CATORCE
A diez y cinco, se le dice: QUINCE

Establecer y aplicar relaciones

Una vez que se asocia el nombre a la interpretación matemática de la representación, sólo queda establecer relaciones, extender el saber, abrirse a una pluralidad de alternativas matemáticas, aplicar correctamente aquello que sabemos y transferirlo a un sinfín de situaciones posibles.

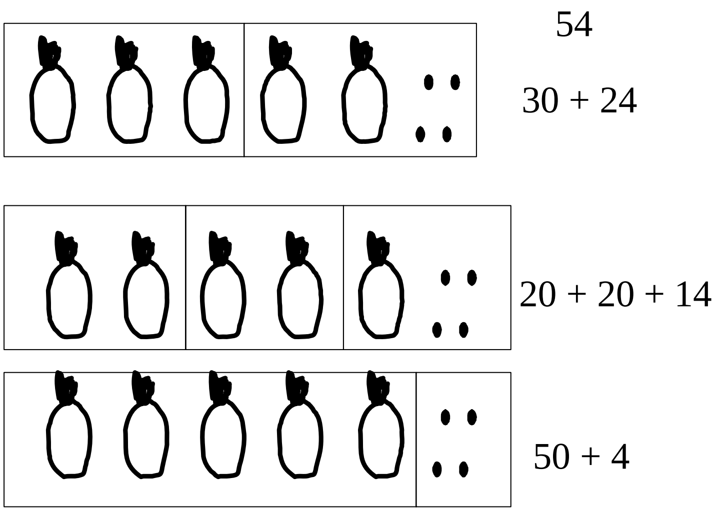
[13] El niño ha nombrado muchas veces con anterioridad a este momento los números: once, doce,... simplemente como canción aprendida al utilizar la técnica de contar. Pero esa pronunciación por el niño, de nada le sirve numéricamente, si antes o después no asocia correctamente el significado del número de dos cifras al que representa.

Descomposición y composición numérica

Lo primero que trabajaremos será la descomposición numérica de un número de dos cifras, como suma de otros números.

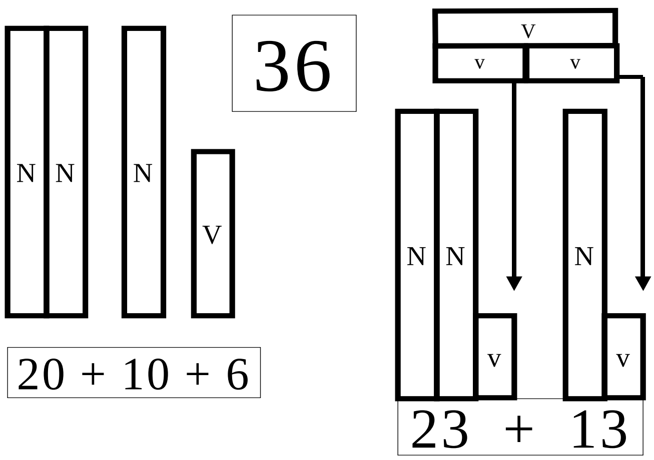
Partiremos de un número cualquiera; así, por ejemplo: 54. Les pediremos que lo lean de tres formas diferentes; podrían decir: cincuenta y cuatro; o, treinta y veinticuatro; o, veinte y veinte y catorce. Al tiempo que ellos van nombrando, nosotros vamos escribiendo en la pizarra:

54= 30 + 24
54= 20 + 20 + 14
54= 50 + 4



El niño escribirá estas descomposiciones, trabajando, en primer lugar, con material manipulativo. Después lo hará, prescindiendo de cualquier material.

36= 20 + 10 + 6
36= 13 + 23
36= 30 + 2 + 4 = 20 + 10 + 2 + 4 = 20 + 5 + 5 + 2 + 4 = 25 + 7 + 4

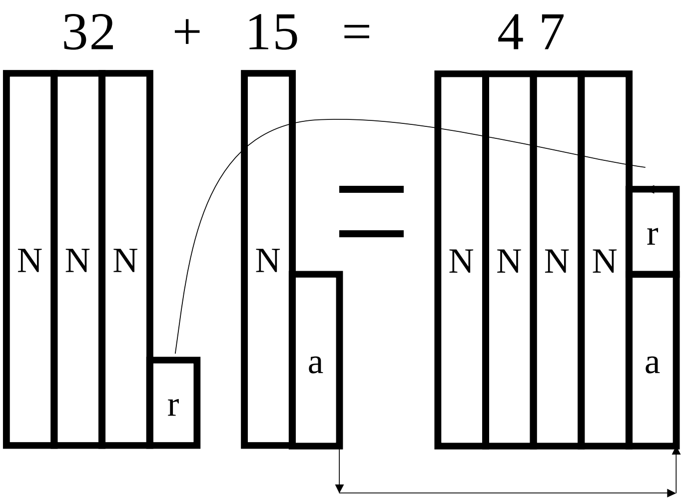


Ahora, el trabajo del alumno consistirá en encontrar la representación numérica de una descomposición dada. El alumno estará preparado para este ejercicio si antes ha descompuesto. Así, por ejemplo: 64 + 30 = ; el alumno tiene que escribir 94

Ante el siguiente ejercicio: 12 + 43 + 10 + 20 =, nos encontraremos con muchas formas distintas de llegar al resultado:

12 + 43 + 10 + 20 = 12 + 53 + 20 = 12 + 73 = 80 + 5 = 85
12 + 43 + 10 + 20 = 50 + 5 + 30 = 85
12 + 43 + 10 + 20 = (...)

EJEMPLO:



La sustracción

La sustracción no existe como operación independiente. Es la operación inversa de la adición. Esto, que parece que se sabe, no se tiene en cuenta. Bien podemos ver, como condición, que para restar es necesario saber sumar.

La expresión $a–b=c$, tiene sentido en matemáticas y es correcta sólo si $c+b=a$

La expresión 5–3=2 (cinco menos tres igual a dos) es correcta porque 2+3=5

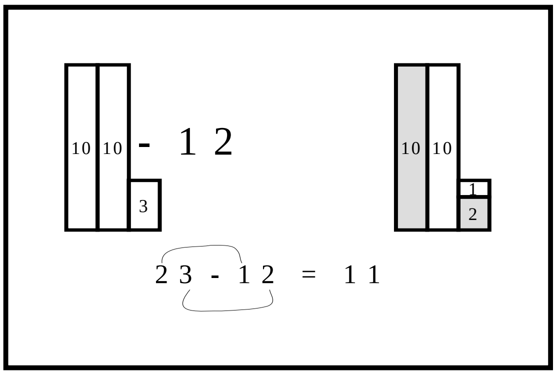
Si tuviéramos que calcular el resultado de: 7–2, tendríamos que saber qué número sumado con 2 equivale a 7. Si no sabemos sumar, ¿cómo vamos a restar?

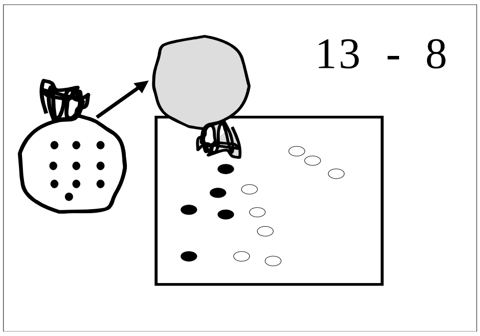
Distinguiremos cuatro respuestas de cuatro preguntas, ante la representación, por ejemplo, (5 – 2 = 3): ¿Qué significa? (Para que equivalga a 5 el número que hay que sumar con 2 es 3). ¿Cómo se dibuja? (5 – 2= 3). ¿Cómo se lee? (cinco menos dos es igual a 3). ¿Por qué obtenemos ese resultado? (porque tres más dos equivale a 5; 3 + 2 = 5).

Calcula: 23 – 12; 67 – 5; 13 – 8; etc.

El alumno deberá saber si el resultado obtenido es, o no, correcto.

Así, 23 – 12 = c, SÓLO SI *c + 12 = 23*





3.- Escribir los números como se leen

He observado que esta actividad de escribir los números como se leen, genera en muchos alumnos dificultades que impacientan al profesor:…el número 11 se escribe *once*; el número 87 se escribe *ochenta y siete*. La dificultad de escritura **aparecerá fácilmente en el alumno** si el profesor obliga a escribir como se lee el número, a la vez que el niño va descubriendo y comprendiendo esos números. Déjese tiempo para que el niño lo pronuncie correctamente, antes de escribirlo; déjese tiempo para que el niño vaya dominando la escritura, antes de escribirlo. Después, todo será automático y no necesitará prácticamente enseñanza. Una de las últimas actividades será la de escribir como se leen los números de dos cifras.

Bibliografía

- J. Bandet (1969): Hacia el aprendizaje de las matemáticas. Kapelusz, Buenos Aires.
- A. Baroody & R.T. Coslick (1998): Fostering Children´s Mathematical Power: An Investigative Approach to K-8 Mathematics Instruction. LEA, London.
- M. T. Cascallana (1988): Iniciación a la Matemática. Materiales y recursos didácticos. Santillana, Aula XXI, Madrid.
- T. Dantzig (1954): Number: The Language of Science. The Free Press, New York.
- S. Dehaene (1997): The Number Sense: How the Mind Creates Mathematics. Oxford University Press, Oxford.
- J. A. Fernández Bravo (2003): La numeración y las cuatro operaciones matemáticas. Editorial CCS, Madrid.
- J. A. Fernández Bravo (2004): El número de dos cifras. Investigación didáctica e innovación educativa. Editorial CCS, Madrid.
- J. A. Fernández Bravo (2005): Enséñame a contar. Investigación Didáctica sobre la técnica de contar como actividad Matemática. Grupo Mayéutica, Madrid.

▪J. A. Fernández Bravo (2006): Didáctica de la Matemática en Educación Infantil (3ª Ed.). Grupo Mayéutica, Madrid.
▪J. A. Fernández Bravo (2007): Números en color. Acción y reacción para la enseñanza-aprendizaje de la matemática. (Libro + CD) Editorial CCS, Madrid.
▪J. Garofalo (1989): “Beliefs and Their Influence on Mathematical Performance”. Mathematic Teacher 82 (7), 502-505.
▪C. Gattegno (1960): Aritmética con números en color. Cuisenaire de España, (Volúmenes de I a X), Madrid.
▪C. Gattegno (1967): Al fin Pepito puede aprender aritmética. Cuisenaire de España, Madrid.
▪J. D. Godino (2004): Didáctica de las Matemáticas para maestros. *Proyecto Edumat- Maestro.* http://www. ugr.es/local/jgodino/edumat-maestros/
▪M. Goutard (1964): Catorce charlas sobre los números en color. Cuisenaire de España, Madrid.
▪M. Goutard (1966): Las matemáticas y los niños. Cuisenaire de España, Madrid.
▪T.F. Green (1971): “Teaching and the Formation of Beliefs”. En: The Activities of Teaching. McGraw Hill, Book Co (Cap. 3), New York.
▪C. Kamii (1982): El número en la educación preescolar. Visor, Madrid.
▪J. Martínez; M. P. Bujanda; J. M. Velloso (1981): Matemáticas-1 Escuelas universitarias de profesorado de EGB. Editorial SM, Valladolid.
▪G. Mialaret (1967): Pedagogía de la iniciación en el cálculo. Kapelusz, Buenos Aires.
▪A. Miranda & M. D. Gil-Llario (2001): “Las dificultades de aprendizaje en las Matemáticas: concepto, manifestaciones y procedimiento de manejo”. Revista de Neurología Clínica 2 (1), 55-71
▪E. Pehkonen y G. Torner (1996): “Mathematical beliefs and different aspects of their meaning”. *ZDM*, 96(4); 101-108.
▪M. A. Rebollo y A. L. Rodríguez (2006): “Dificultades en el aprendizaje de las matemáticas”. Revista Neurol 42 (Supl. 2), S135-8.
▪P. Starkey & R.G.Cooper (1980): “Perception of numbers by human infants”. Science 210, 103-35.
▪A.G. Thompson (1992): “Teacher’ beliefs and conceptions: a synthesis of the Research”. En: Handbook for Research in Mathematics Teaching and Learning, 127-146. MacMillan-NCTM, New York.
▪A.Van Hout & C. Meljac (1998): Troubles du calcul et dyscalculies chez l’enfant. Masson, Paris.

José Antonio Fernández Bravo, nace en Madrid. Maestro, Licenciado y Doctor. Profesor universitario del Centro de Enseñanza Superior "Don Bosco", (Universidad Complutense de Madrid-España). Autor de numerosas obras, entre las que se destacan: Números en Color, 2007; Didáctica de la Matemática en Educación Infantil, 2006; La Enseñanza de la Matemática, 2004; Técnicas creativas para la resolución de problemas matemáticos, 2000; La Numeración y cuatro operaciones básicas, 2002.

ANTO1940@inicia.es fbravo@cesdonbosco.com

UNIÓN
REVISTA IBEROAMERICANA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA

Septiembre de 2007, Número 11, páginas 147 - 155
ISSN: 1815-0640

Números poligonales como disparadores de un proceso de validación

Nora Ferreira, Estela Rechimont y Carlos Parodi

Resumen

En este trabajo analizamos la respuesta de estudiantes de Profesorado en Matemática (Universidad Nacional de La Pampa, Argentina) a un problema cuya resolución, implica la búsqueda de relaciones, la producción de conjeturas y la validación de algunos supuestos surgidos del gráfico.
Observamos que el trabajo con números poligonales permite un acercamiento a la historia de los números naturales y además facilita la manipulación y producción de fórmulas a través de la visualización de las mismas en el campo geométrico.

Introducción

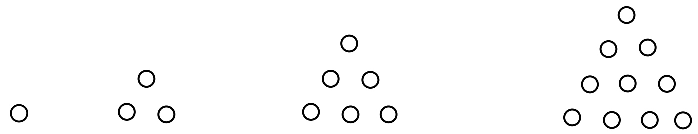
En el transcurso de distintos períodos de nuestra actividad como docentes del Profesorado en Matemática y Profesorado de EGB (Educación General Básica) 1ro y 2do Ciclos, carreras de grado correspondientes a la Universidad Nacional de La Pampa, Argentina, observamos en los alumnos de los primeros años, dificultades en el aprendizaje de algunos temas de matemática y en particular en los procesos de argumentación, justificación o validación de conceptos y procedimientos presentes en la solución de alguna situación-problema.

A partir de esta problemática y considerando numerosas investigaciones que aportan elementos a la enseñanza y aprendizaje de la matemática en general y la demostración en particular, iniciamos un trabajo de búsqueda y discusión de situaciones que contribuyan a superar las dificultades de los alumnos en la comprensión y elaboración de validaciones.

Números Poligonales

Una de las clasificaciones menos conocida de los números naturales, heredada de los Pitagóricos, es la asociada a diversas configuraciones geométricas. Cada número natural está representado por una colección de objetos que pueden ser dispuestos en un polígono determinado. Comenzando, en general, todas las sucesiones con un único elemento.

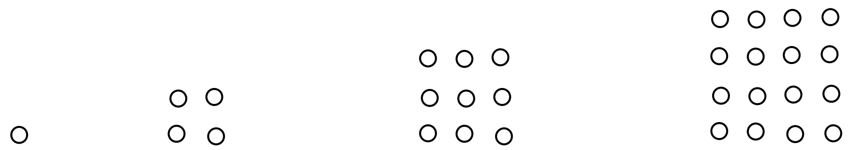
Por ejemplo, los números triangulares 3, 6, 10 se ubican en las siguientes configuraciones (Figura 1):



1 3 6 10

Figura 1

Los números cuadrados se disponen (Figura 2):

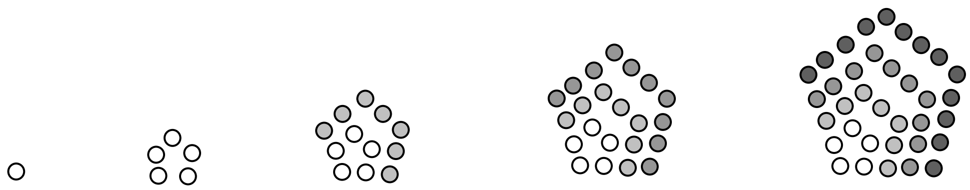


1 4 9 16

Figura 2

En general, el primer número poligonal es 1. El segundo número poligonal es *n*, considerando que el polígono en cuestión tiene *n* vértices, y cada lado tendrá 2 elementos. El tercer poligonal se obtiene agregando al conjunto los elementos necesarios para que cada lado del polígono tenga 3 elementos, y así sucesivamente.

Los primeros números pentagonales son 1, 5, 12, 22, 35,...(Figura 3)



1 5 12 22 35

Figura 3

De forma análoga se definen los números hexagonales, cuyos primeros representantes son: 1, 6, 15, 28, 45,...

A partir de la consideración de casos particulares se puede obtener no sólo una descripción general de un determinado número poligonal sino también interesantes propiedades del mismo.

Así, es sencillo afirmar que el *n*-ésimo número triangular se obtiene como la suma de los primeros *n* números naturales. Y utilizando expresiones algebraicas podríamos indicarlo: $T_n = \frac{n(n+1)}{2}$

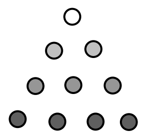


Figura 4

De forma análoga, podemos pensar el *n*-ésimo número cuadrado como n^2, y a cada uno de ellos como la suma de los sucesivos números impares, tal como surge de la configuración geométrica de los mismos.

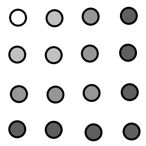


Figura 5

La expresión algebraica de dicha propiedad será:

$$C_n = n^2 = 1 + 3 + 5 + ... + (2n - 1) = \sum_{i=1}^{n} 2i - 1$$

Es sencillo deducir otras propiedades de los números poligonales analizando las disposiciones de los mismos. Por ejemplo: “la suma de dos números triangulares es igual a un número rectangular con una unidad de diferencia entre sus lados”.

Experiencia áulica

La resolución de un problema puede involucrar diversos contenidos y procedimientos muy variados. En este caso se planteó a los estudiantes un problema cuya resolución, en un análisis a priori, implica la búsqueda de relaciones, la producción de conjeturas como así también la validación de algunos supuestos surgidos del gráfico.

Sin embargo, el solo hecho de proponer un problema y disponer a los estudiantes a hallar una solución aceptable no es suficiente para garantizar que pongan en marcha un proceso de prueba. Las experiencias desarrolladas por Nicolás Balacheff (Balacheff, 2000) muestran que, aún en grupos habituados a resolver problemas, son pocos los estudiantes que ven la necesidad y se comprometen en la producción de una prueba de sus resultados.

Con la intención de analizar los procesos de validación utilizados por estudiantes de Profesorado en Matemática, presentamos, a un grupo de alumnos de segundo año de esta carrera, los números poligonales con una serie de preguntas e indicaciones.

Actividades:

a) Analiza los primeros números triangulares y escribe una fórmula general para obtener cualquiera de ellos (se mostró la disposición de dos triángulos simétricos formando un rectángulo).
b) Analiza operaciones entre pares de números triangulares consecutivos y plantea relaciones (Se prevé que obtengan: $T_n + T_{n+1} = (n+1)^2$ y $T_n - T_{n-1} = n$). ¿Puedes demostrarlas?
c) Visualiza y escribe los primeros 10 términos de las secuencias de números triangulares y de números cuadrados.
d) Compara ambas secuencias y sus configuraciones geométricas. Analiza la relación que hay entre los números triangulares y los cuadrados. Escribe tu conjetura. ¿Puedes demostrarla?
e) ¿Puedes visualizar y validar la siguiente aserción? "La suma de ocho números triangulares iguales, más una unidad, da un número cuadrado" (Sessa, 2005)
f) Construye los primeros números pentagonales. Intenta encontrar una fórmula para obtener el *n*-ésimo número pentagonal.
g) Busca una relación que permita calcular cualquier número pentagonal a partir de un número triangular.
h) Indaga en una relación entre números Pentagonales, Cuadrados y Triangulares. (Se prevé que hallen la relación $P_n = C_n + T_n$).
i) Intenta encontrar una fórmula para obtener cualquier número hexagonal.

En el transcurso de la actividad los estudiantes se mostraron sorprendidos y entusiasmados con las disposiciones geométricas analizadas. En algunos casos tenían algún conocimiento sólo de los números triangulares pero, en general, nunca habían escuchado hablar de esta clasificación de los números naturales a partir de configuraciones geométricas.

Propusieron el trabajo con material concreto (botones, gemas, etc.) para facilitar el desarrollo de los números pentagonales cuya representación gráfica resultó un poco más elaborada que en los casos anteriores.

Tímidamente en principio, luego con algo más de decisión comenzaron a plantear relaciones e igualdades. Las primeras validaciones algebraicas se produjeron como respuesta a los requerimientos de la actividad (apartados b), d) y e)), pero en los sucesivos problemas y en la discusión propiciada en la clase, esa demanda externa de una validación, se convirtió en una necesidad planteada por los propios resolutores.

Algunas de las conjeturas que se formularon y validaron en los trabajos presentados por los estudiantes son:

- La suma de dos números triangulares consecutivos puede calcularse como el cuadrado de la diferencia entre ambos: $T_{n+1} + T_n = (T_{n+1} - T_n)^2$.

- La suma de dos números triangulares consecutivos es igual a un número cuadrado: $T_{n+1} + T_n = C_{n+1}$.
- $C_n + C_{n+1} = 1 + 3 + 5 + ... + (2n-1) + (2n+1) + (2n-1) + ... + 5 + 3 + 1$, obtenida a partir de analizar la siguiente configuración geométrica (Figura 6).

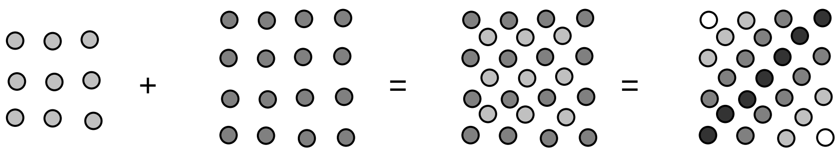


Figura 6

- $P_n = P_{n-1} + 4 + 3(n-2) \quad \forall n > 2$
- $P_n = P_1 + 4(n-1) + 3T_{n-2}$
- $P_n = T_n + n(n-1)$
- $P_n - C_n = T_{n-1}$
- $H_n = P_n + T_{n-1}$
- El n-ésimo número poligonal de k lados se obtiene mediante la fórmula $K_n = \frac{n(n+1)}{2} + (k-3)\frac{n(n-1)}{2}$.

Nos detendremos en la última propiedad mencionada, para estudiar en detalle el análisis realizado por los estudiantes para llegar a esta conjetura, el trabajo de validación, las dificultades encontradas y las utilidades reveladas en la presentación de esta tarea.

Conjetura y validación

Al trabajar en la fórmula para hallar los sucesivos números poligonales de orden *n*, para cada configuración geométrica en particular, los estudiantes fueron buscando generalizaciones, se plantearon relaciones de recurrencia entre números de distinto orden y también se encontraron fórmulas directas sin hacer referencia a términos anteriores de la sucesión.

Así, obtuvieron:

Nros. Triangulares: $T_n = \frac{n(n+1)}{2}$

Nros. Cuadrados: $C_n = \frac{n(n+1)}{2} + (4-3)\frac{n(n-1)}{2} = \frac{n(n+1)}{2} + \frac{n(n-1)}{2}$

Nros. Pentagonales: $P_n = \frac{n(n+1)}{2} + (5-3)\frac{n(n-1)}{2}$

Nros. Hexagonales: $H_n = \frac{n(n+1)}{2} + (6-3)\frac{n(n-1)}{2}$

Para un polígono de *k* lados, el *n*-ésimo número poligonal será:

Nros. *K*-gonales: $K_n = \frac{n(n+1)}{2} + (k-3)\frac{n(n-1)}{2}$

Los estudiantes manifestaron gran disposición en la búsqueda de regularidades y trabajaron con interés en la validación, sin embargo, no lograron concluir la demostración por sí mismos.

La propuesta de una demostración por inducción surgió en la clase a raíz de haber utilizado este tipo de pruebas con anterioridad elogiando en muchos casos la sencillez de una resolución de esta naturaleza.

Los estudiantes pudieron, sin dificultades, hallar una fórmula para el *n*-ésimo número poligonal cuando el número de lados del polígono era constante, sin embargo, surgió como un obstáculo, al momento de demostrar, el trabajo con las dos variables, por un lado el número *n* de orden de cada poligonal y por otro el número *k* de lados del polígono. En este momento fue necesaria la intervención del docente a cargo de la actividad para organizar la discusión y tratar de precisar la idea de dependencia, de cada número poligonal, de ambas variables, es decir, basándose en los sucesivos ejemplos genéricos presentados, justificar la nueva generalización. Por otro lado, fue necesario definir claramente sobre cuál de las variables se aplicaba la inducción en el proceso de demostración.

En un trabajo conjunto, los estudiantes desarrollaron la construcción general de un polígono de *k* lados, a partir de la definición considerada y del número de lados, agregando elementos al conjunto a medida que aumenta el orden.

Demostración por inducción sobre el número de orden:

- Si el polígono tiene 2 elementos en cada lado, el número de elementos es k y es sencillo verificar que la fórmula es válida para $n = 2$
- Supongamos que la fórmula es válida para un cierto n y tratemos de probar su validez para un $(n+1)$
- Dado el número poligonal de orden n, construimos el siguiente agregando las unidades necesarias como para que cada lado cuente con $(n+1)$ elementos.

Al primer lado sólo le añadimos 1 elemento, ése será un nuevo vértice, al lado siguiente sólo debemos agregar *n* elementos, y al siguiente también puesto que los vértices se comparten, así hasta llegar al último vértice que completará los $(n+1)$ elementos del último lado (Ver desarrollo sobre el pentágono en Figura 7).

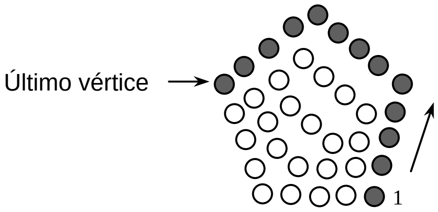


Figura 7

¿Cómo contar el número de elementos del poligonal de orden $(n+1)$?

Al poligonal de orden *n* le sumamos $1+n(k-2)$, esto es:

$K_{(n+1)} = K_n + 1 + n(k-2)$,

utilizando la hipótesis inductiva $K_n = \frac{n(n+1)}{2} + (k-3)\frac{n(n-1)}{2}$, tenemos:

$$K_{(n+1)} = \frac{n(n+1)}{2} + (k-3)\frac{n(n-1)}{2} + 1 + n(k-2) = k\frac{(n+1)n}{2} - (n^2-1)$$

que es igual a la obtenida al desarrollar la expresión $\frac{(n+1)(n+2)}{2} + (k-3)\frac{(n+1)n}{2}$,

con lo cual se concluye la validez de la fórmula para $(n+1)$ y con eso la demostración para todo *n*.

Demostración por inducción sobre el número de lados:

- Si el polígono tiene 3 lados, el número de elementos es $\frac{n(n+1)}{2}$ y es sencillo verificar que la fórmula es válida.
- Supongamos que la fórmula es válida para un cierto k y tratemos de probar su validez para un $(k+1)$
- Dado el número poligonal (k lados) de orden n, construimos el poligonal del mismo orden con $(k+1)$ lados agregando las unidades necesarias como para que en cada polígono anterior se cuente el correspondiente número de lados.

Al poligonal de orden dos se le debe agregar 1 elemento (puesto que se está agregando un lado), al de orden tres se le agregan 2, al de orden cuatro se le agregan 3 y así sucesivamente, con lo cual al de orden *n* se le agregarán $(n-1)$ elementos. (Ver desarrollo sobre el pentágono en Figura 8).

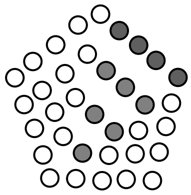


Figura 8

¿Cómo contar el número de elementos del $(k+1)$-poligonal de orden *n*?

Al *k*-poligonal de orden *n* le sumamos $1+2+\ldots+(n-1)$, esto es:

$$(K+1)_n = K_n + 1 + 2 + \ldots + (n-1),$$

utilizando la hipótesis inductiva $K_n = \frac{n(n+1)}{2} + (k-3)\frac{n(n-1)}{2}$ y la suma de los primeros $(n-1)$ naturales tenemos:

$$(K+1)_n = \frac{n(n+1)}{2} + (k-2)\frac{n(n-1)}{2}$$

con lo cual se concluye la validez de la fórmula para $(k+1)$ y con eso la demostración para todo *k*.

Comentarios Finales

En el comienzo de la actividad, parecía remota la posibilidad de generar una fórmula semejante a la demostrada, no sólo por la renuencia manifestada por los alumnos a producir sus propias conjeturas sino también por los escasos intentos de validación puestos en juego en la clase.

La producción de fórmulas para cada uno de los polígonos considerados requirió una generalización a partir de los ejemplos presentados. Al desarrollar una fórmula para cualquier número de lados del polígono, los estudiantes tomaron como ejemplo particular esas sucesivas generalizaciones obtenidas anteriormente. A raíz de esta observación, nos parece interesante considerar que la actividad también funcionó sobre las actitudes de los alumnos puesto que mostraron seguridad en la defensa de las fórmulas producidas e interés en hallar una justificación de las mismas.

A esta altura de su carrera los estudiantes han cursado asignaturas básicas del plan de estudios, en las cuales se utilizan diferentes mecanismos de validación. No obstante, a través de un análisis de las propuestas de trabajo en el estudio de las demostraciones por inducción, notamos que los ejercicios consisten en fórmulas ya planteadas sobre las que se debe actuar algebraicamente, obviando la etapa de búsqueda de características comunes, construcción de la expresión y formulación de una conjetura.

La propuesta de trabajo a partir de los números poligonales no sólo permite un acercamiento a los estudios de la escuela pitagórica sino que facilita la manipulación y producción de fórmulas a través de la visualización de las mismas en el campo geométrico

Consideramos que las actividades planteadas pueden ser utilizadas para completar el estudio de las demostraciones por inducción, incentivar el trabajo algebraico y promover la búsqueda de generalizaciones y actividades de validación en matemática.

Bibliografía

- Balacheff, N. (2000): *Procesos de prueba en los alumnos de matemática*. Una empresa docente, Universidad de los Andes, Bogotá.
- Sessa, C. (2005): *Iniciación al estudio didáctico del Álgebra. Orígenes y perspectivas*. Libros del Zorzal, Buenos Aires.

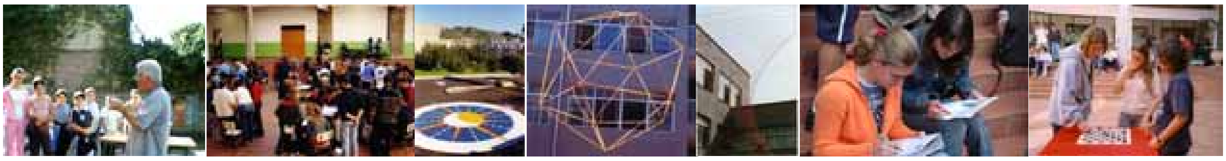
Nora Ferreira, nació en Ingeniero Luiggi, La Pampa, en 1966. Obtuvo los títulos de Profesor en Matemática y Física y Licenciada en Matemática. Ha participado en numerosos proyectos de investigación. Se desempeña como docente de la Universidad Nacional de La Pampa desde 1987. Ha presentado y publicado artículos en revistas, jornadas y congresos.
noraf@exactas.unlpam.edu.ar

Estela Rechimont, nació en Santa Rosa el 27 de agosto de 1947. Obtuvo los títulos de Profesor en Matemática y Física. Licenciada en Matemática y Magister en Didáctica de la Matemática. Ha dirigido numerosos proyectos de investigación. Se desempeña como docente de la Universidad Nacional de La Pampa desde 1973. Ha presentado y publicado artículos en revistas, jornadas y congresos.
rechimont@exactas.unlpam.edu.ar

Carlos Parodi, nació en 1962 en Carlos Tejedor, Provincia de Buenos Aires. Obtuvo los títulos de Ingeniero Electromecánico y Magister en Didáctica de la Matemática. Ha participado en numerosos proyectos de investigación. Se desempeña como docente de la Universidad Nacional de La Pampa desde 1992. Ha presentado y publicado artículos en revistas, jornadas y congresos.
Parodic@ing.unlpam.edu.ar

UNIÓN
REVISTA IBEROAMERICANA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA

Septiembre de 2007, Número 11, páginas 157-161
ISSN: 1815-0640



Dinamización matemática

I. E. S. Viera y Clavijo
La Laguna, Tenerife, España

Banderas, matemáticas y diversidad

1.- Introducción

El mundo de las banderas (nos referiremos solo a las banderas de naciones soberanas), ofrece un material que puede ser tratado no solo matemáticamente sino con otros objetivos.

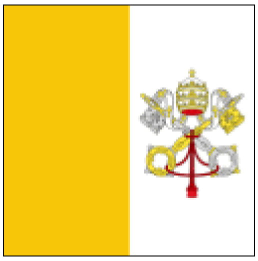
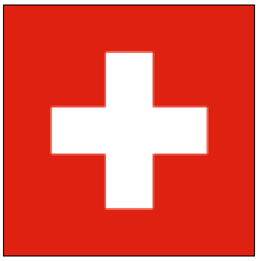
Se trata de objetos que encierran una gran cantidad de símbolos, de ideologías y sentimientos además de una capacidad de comunicación. Desde la más remota antigüedad, los pueblos y los colectivos de cualquier tipo han tratado de identificarse con distintos símbolos y, desde luego, la bandera ocupa un lugar destacado en ese intento, sobre todo después de que las naciones las utilizaran como emblemas, comunes a todos los ciudadanos.

Por otra parte, en nuestros días, las banderas de las distintas naciones se han convertido en elementos cotidianos, sobre todo en los lugares con atractivo turístico pues se izan y ondean en dependencias que requieren llamar la atención del potencial cliente (hoteles, restaurantes, etc.). Pese a esta aparente popularidad, sin embargo las personas, en general, ignoran lo que hay detrás de ese paño multicolor.

Pretendemos fijarnos solo en parte de las amplias posibilidades. Es obvio, por tanto, que el tema no queda, ni mucho menos, agotado. Y más, teniendo en cuenta también el carácter multidisciplinar que presenta.

2.- Proporciones

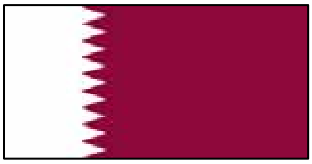
Todas las banderas del mundo, excepto tres (Nepal, Vaticano y Suiza), son rectangulares. Se llama *proporción* de una bandera a la relación que existe entre el ancho y el largo del rectángulo que la contiene. Así, por ejemplo, si se dice que una bandera tiene la proporción 2:3 se quiere decir que si el ancho mide dos unidades, entonces el largo mide tres. Con esta definición, la proporción es 1:1 significa que la bandera es cuadrada, y esta es la proporción de las banderas de Vaticano y Suiza.

Pues bien, uno de los errores más habituales con relación al mundo de las banderas es el considerar que se pueden reproducir en un rectángulo común para todas. Posiblemente esté inducido porque en ciertas enciclopedias y alguna obra no especializada aparecen así. Lo cierto es que hay veintiún modelos diferentes de proporcionalidad en las dimensiones. Si incluimos las cuadradas, las proporciones varían entre la 11:28 que es la proporción que guardan las dimensiones de la de Qatar y la cuadrada 1:1. Entre esas dos proporciones están diecinueve más. Realizar las correspondientes divisiones y comprobarán que hay números decimales periódicos de todos los tipos:

11:28

Qatar 11:28



1:2

10:19

Islas Salomón 5:9

5:9

Djibouti 21:38

21:38

4:7

Cabo Verde 10:17

10:17

3:5

11:18

5:8

7:11

2:3

7:10

5:7

18:25

8:11

3:4

28:37

4:5

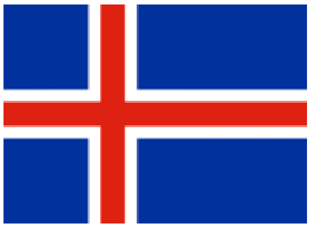
13:15

1: 1

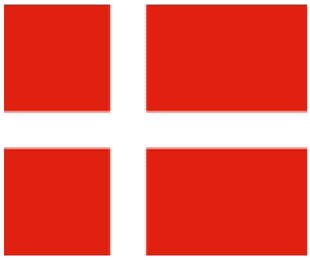
Estonia 7:11

Albania 5:7

Islandia 18:25

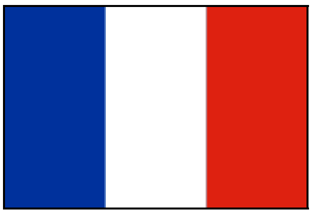


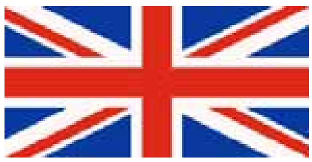
Dinamarca 28:37



Bélgica 13:15

Los dos modelos más abundantes son las de proporción 2:3 que es la que tiene la bandera de Francia, la famosa "tricolor", y las de proporción 1:2 que tiene la bandera del Reino Unido.





La Bandera de Nepal, como se ha indicado no es rectangular. No obstante, se puede inscribir en un rectángulo de proporciones 4:3.

3.- Simetría

Se trata de un recurso estético profusamente utilizado en las banderas. Como todas las banderas son rectangulares o cuadradas (menos una), las primeras solo pueden tener dos ejes de simetría: uno horizontal y otro vertical. Las cuadradas, en cambio pueden tener dos ejes más: las dos diagonales. Algunas banderas que no tienen eje de simetría horizontal se prestan a ser izadas de forma errónea. En ocasiones aparece la bandera de Alemania con la banda de color negro en la parte baja o la de Holanda con la azul en la parte alta.

Existe un conjunto de banderas que tienen un campo simétrico pero en las que la presencia de alguna carga rompe la simetría. Es el caso de Líbano, Liechtenstein o Granada. Si consideramos estos casos como banderas simétricas, resulta que casi el 80% de las banderas presentan algún tipo de simetría. En Europa es donde más abundan las banderas simétricas. Un caso especial lo representa la bandera de Suiza que presenta cuatro ejes de simetría.



4.- Distribución de colores

Es un aspecto interesante para estudiar. Es evidente que el atractivo mayor de las banderas es su colorido. Sin embargo, el número de colores distintos necesarios para pintar las banderas de todas las naciones no es elevado. Son solo diez, salvo matices.

Los colores suelen responder a determinadas simbologías de forma tal que un mismo color en banderas diferentes no tiene por qué significar lo mismo. Así, por ejemplo, el rojo de la bandera de Malawi significa la lucha por la libertad, mientras que en la de Colombia o Myanmar significa valor.

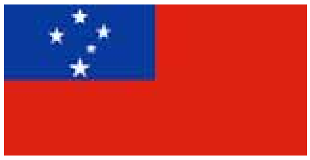
La distribución de los colores en las banderas de las distintas partes del mundo no es uniforme. Hay zonas en las que abunda un color de manera especial. Es el caso del verde en las banderas africanas que llega a estar presente en el 77% mientras que ese mismo color solo aparece en el 16% de las europeas.

El color rojo es el más abundante en el mundo. Lo tienen casi las tres cuartas partes de las banderas. Le sigue el blanco que está presente en el 54%.

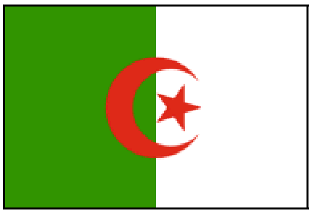
5.- Cargas de las banderas.

Se llama así a aquellos elementos que aparecen en el campo de una bandera. El 70% de las banderas posee algún tipo de carga. Su naturaleza es muy variada pues puede estar formada por el escudo de la nación, estrellas, animales, la luna, etc. La carga más abundante es la formada por estrellas. La simbología que encierran no siempre es la misma pues así como en la de Estados Unidos representan a cada uno de los estados que forman la federación, en la de Australia figura una gran estrella debajo del cantón cuyas puntas representan a cada uno de los territorios que conforman la nación. Precisamente en esta última bandera aparece también, a la derecha, las estrellas principales de la constelación La Cruz del Sur que se repite en las banderas de Nueva Zelanda, Papua-Nueva Guinea y Samoa.





La Luna aparece como “Media Luna” en varias banderas correspondientes a países con mayoría musulmana. Es el caso de Argelia, Mauritania, Turquía, etc.


6.- La diversidad en una experiencia

En los centros educativos suele ser habitual que asista alumnado de diversas naciones o de diversos lugares. En nuestro centro averiguamos que en uno de los años académicos había matriculados alumnos correspondientes a dieciséis naciones diferentes. Con motivo del Día de la Paz (30 de enero), se realizó un taller en el que participó un alumno o alumna de cada una de esas nacionalidades para hacer la bandera de su país que, una vez terminada se colocarían en el pasillo del centro. Se preparó un rectángulo con las dimensiones correspondiente a la bandera de la nación y los colores se obtenían recortando trozos de los folletos de propaganda de los centros comerciales cercanos y de revistas. Resultó una exhibición curiosa y colorista que informó a toda la Comunidad Educativa de la existencia de estudiantes de todos esos países. Cada alumno o alumna realizó también un diagrama de sectores para expresar en él la distribución de los colores en su bandera.

UNIÓN
REVISTA IBEROAMERICANA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA
Septiembre de 2007, Número 11, páginas 163-178
ISSN: 1815-0640
Formación Inicial en la Enseñanza Primaria

Formación de docentes de Educación Infantil y Primaria en España

María Sotos Serrano

Universidad de Castilla-La Mancha

Introducción

En el sistema educativo español, la formación de docentes se desarrolla en el seno de la enseñanza universitaria; pero la universidad en España se halla actualmente inmersa en un proceso de reforma, para su adaptación al denominado Espacio Europeo Universitario. Esta reforma plantea algunos cambios que afectarán, entre otros aspectos, a la estructura general de los estudios universitarios y al currículum de cada una de las titulaciones que se impartan.

No obstante, esta nueva reforma universitaria todavía no está definitivamente diseñada y, previsiblemente, comenzará su entrada en vigor en el año 2010, aunque en toda reforma educativa siempre es bueno considerar los plazos previstos con cierta flexibilidad, pues la realidad nunca se ajusta a lo que los políticos pretenden. En cualquier caso, este artículo se centrará en la situación actual, añadiendo solamente algunas de las cuestiones que planteará la nueva reforma y que modificarán parcialmente los estudios universitarios vigentes.

La formación de docentes en España

Actualmente, la universidad española establece tres ciclos diferentes: *diplomatura* (primer ciclo), *licenciatura* (segundo ciclo) y *doctorado* (tercer ciclo); y los estudios de maestra[1] se corresponden con el primero de ellos, que se desarrollan

[1] Aunque políticamente correcto, el uso de la terminología *maestros/as*, cuando se repite con cierta asiduidad, suele producir textos de lectura farragosa. Esta es la razón por la que sólo se utilizará un género para referirme a todo un colectivo profesional compuesto por mujeres y hombres. Como se da el caso de que, entre los profesionales que en España se dedican a la Educación Infantil y a la Educación Primaria, la mayoría son mujeres, en este artículo opto por el uso exclusivo del término *maestra*. La opción puede que no sea lingüísticamente correcta pero, ideológicamente, me parece pertinente.

a lo largo de tres cursos académicos (seis cuatrimestres)[2].

En estos estudios se distinguen siete especialidades diferentes: educación infantil, educación primaria, lengua extranjera, educación física, educación musical, educación especial y audición y lenguaje. En principio, podría parecer que cada una de estas especialidades están directamente relacionadas con el ámbito profesional que las futuras maestras desempeñarán en la Educación Infantil y Primaria (período escolar que comprende desde los tres hasta los once años de edad), en donde, junto a las maestras generalistas (especializadas en educación infantil y en educación primaria) también trabajan docentes del resto de las especialidades mencionadas. Pero esto no quiere decir que exista una correspondencia perfecta entre la especialidad estudiada y el ámbito profesional que se desempeñe, ya que, en primer lugar, para trabajar como maestra sólo se exige disponer de dicha titulación de maestra (independientemente de la especialidad que se haya cursado en la universidad)[3] y, en segundo lugar, porque al margen de la especialidad por la que se desempeñe el trabajo docente, se pueden impartir otras materias curriculares diferentes[4].

Evidentemente, esta cuestión refleja un claro desajuste entre los planes de formación docente y la práctica del ejercicio profesional, y obliga a que todas las especialidades existentes en la actualidad incluyan, en sus diferentes planes curriculares, una formación que abarque todas las materias de la Educación Infantil y Primaria. En este sentido, resulta más que dudosa la utilidad práctica de dichas especializaciones universitarias[5].

Previsiblemente, la futura reforma de adecuación al Espacio Europeo de Educación Superior puede añadir algo de racionalidad en este panorama. En primer lugar se sustituirán los tres niveles existentes (diplomatura, licenciatura y doctorado) por otros nuevos: *grado* y *postgrado*[6]. Así, la formación docente para la Educación Infantil y Primaria dejará de ser una diplomatura que se imparta en tres cursos, para ser un grado que se impartirá en cuatro cursos (ocho cuatrimestres). Con esto desaparecerán las actuales diferencias entre diplomaturas y licenciaturas y se producirá un aumento en la carga curricular respecto a la situación actual.

Además, también se producirá un importante cambio en el ámbito de las especialidades existentes, ya que la nueva reforma establecerá solamente dos

---

[2] Los estudios de licenciatura se desarrollan en cuatro ó cinco cursos académicos (ocho ó diez cuatrimestres), mientras que los estudios de doctorado tienen una duración variable, dependiendo del tiempo invertido en la realización de la tesis doctoral.

[3] Para concursar en las oposiciones para maestra, aunque se convocan según las especialidades existentes, se puede optar por cualquier especialidad diferente a la que la persona cursó durante sus estudios universitarios.

[4] Por ejemplo, una maestra que haya accedido al trabajo docente como especialista en educación física puede completar su carga docente impartiendo matemáticas ó lenguaje.

[5] En este artículo me centro en las actuales especialidades de educación infantil y de educación primaria. Porque son las que están diseñadas para dar respuesta a las necesidades formativas de aquellas personas que se encargarán de la educación de niñas y niños de entre tres y once años (dispongan o no de la colaboración de otros docentes procedentes del resto de especialidades), y porque, como más adelante se señala, son las únicas que permanecerán tras la próxima reforma universitaria.

[6] El grado constituirá el primer ciclo universitario, mientras que el postgrado incluye el segundo ciclo (que otorgará el título de master) y el tercer ciclo (que otorgará el título de doctor).

especialidades distintas (educación infantil y educación primaria), que se corresponden con los dos primeros niveles educativos contemplados en la legislación educativa nacional, mientras que el resto de las especialidades actuales pasarán a desarrollarse (con las mismas denominaciones ó con otras diferentes) como *menciones*[7].

El currículum de la formación de docentes

En España, los planes de estudio de las enseñanzas universitarias están organizados por *créditos*. Estos créditos establecen la carga lectiva de cada asignatura de las que componen el plan y, en principio, cada crédito equivalía a diez horas lectivas. Pero la organización de cada curso en dos cuatrimestres, teniendo en cuenta los períodos no lectivos para la realización de exámenes y los diferentes días festivos, hace imposible que se cumpla dicha equivalencia. Para intentar arreglar ese desajuste, se estableció que cada crédito equivaldría a ocho horas lectivas, justificando esa nueva regulación con el trabajo del alumno (fuera del horario lectivo), que con anterioridad no había sido tenido en cuenta[8].

Y junto al sistema de créditos como organizador de los planes de estudio, también hay que señalar que uno de los principios fundamentales que rigen la política universitaria en España es el de la autonomía, e influye en todos los ámbitos de esta institución. Por lo que respecta al tema del que aquí me ocupo, también la autonomía universitaria afecta al diseño del currículum de formación de maestras.

En general, todos los planes de estudio universitarios se elaboran, en España, en dos fases. La primera de ellas es competencia del Estado, y en ella se establecen las directrices generales del plan. Estas directrices son los contenidos que tiene que contemplar el plan de estudios definitivo, con indicaciones sobre la descripción básica de dichos contenidos y el número mínimo de créditos[9]. Estos contenidos que, lógicamente, son iguales en todas las universidades españolas, tienen la consideración de materias *troncales* de cada plan de estudios. En el caso de las especialidades de educación primaria y de educación infantil, las directrices generales establecidas por el Ministerio de Educación son las siguientes:

[7] Previsiblemente, las *menciones* se impartirán en uno ó dos cursos académicos, a continuación del grado, aunque será sólo el título de grado el requerimiento académico para poder optar al trabajo docente en los niveles de Educación Infantil y Primaria.

[8] De todos modos, este reajuste del tiempo lectivo al que equivale cada crédito fue, simplemente, una operación burocrática para dar respuesta a numerosas quejas existentes en la comunidad universitaria (los docentes disponían de menos horas reales para intentar desarrollar los contenidos de las asignaturas, el alumnado soportaba los mismos contenidos con menos tiempo de clases). El asunto era que la equivalencia de diez horas de clase por cada crédito era irreal y, por tanto, la universidad fue acusada de incumplir sus propios planes. En una especie de huída hacia delante, la universidad cambió esa equivalencia para que desaparecieran los problemas sin tener que cambiar absolutamente nada.

[9] En las directrices generales también figuran las áreas de conocimiento encargadas de cada una de las materias, pero aquí no se hace mención de ese tema para no ampliar las tablas incluidas. En cualquier caso, las asignaturas de matemáticas son las que corresponden al área de *Didáctica de las Matemáticas*.

DIRECTRICES GENERALES: Maestro-Especialidad de Educación Primaria	
Troncal y Descripción	**Créditos**
Bases psicopedagógicas de la Educación Especial Dificultades de aprendizaje y necesidades educativas especiales. Los trastornos del desarrollo y su incidencia sobre el aprendizaje escolar. La escolarización de los alumnos con déficits sensoriales, físicos y psíquicos. Integración educativa de alumnos con déficits sensoriales, físicos y psíquicos. Integración educativa de alumnos con dificultades.	**8**
Psicología de la Educación y del desarrollo en edad escolar Factores y procesos básicos del aprendizaje escolar. Contenidos y proceso de aprendizaje. Aprendizaje escolar y relaciones interpersonales. Teoría y modelos explicativos del desarrollo. Desarrollo cognitivo, desarrollo y adquisición del lenguaje, desarrollo social, físico, motor y afectivo-emocional.	**8**
Sociología de la Educación Conceptos básicos de sociología. Estructuras, relaciones e instituciones sociales. El sistema educativo como subsistema social. Sociología de la interacción en el aula. Sociología de la organización escolar. Sociología del currículum. Sociología de la infancia, la adolescencia y la juventud. Determinantes sociales del rendimiento escolar. Clase, género y grupo étnico en la educación. Transición a la vida activa y mercado de trabajo.	**4**
Organización del Centro Escolar La estructura del sistema escolar: características y niveles. El centro unidad organizativa: funciones directivas, de gestión pedagógica y de administración. Plan de centro. Organización de alumnos, profesores, recursos, espacios, horarios, actividades. El centro y la comunidad educativa. Derechos y deberes del profesor. Evaluación de centros. Análisis de experiencias de organización. Referencia de modelos y elementos estudiados a centros de educación infantil.	**4**
Teorías e Instituciones Contemporáneas de Educación Teorías contemporáneas de la educación. Movimientos e Instituciones educativas contemporáneos. Evolución histórica del sistema escolar. Instituciones y agentes educativos. La educación no formal.	**4**
Didáctica General Componentes didácticos del proceso de enseñanza-aprendizaje. Modelos de enseñanza y de currícula: Diseño curricular base y elaboración de proyectos curriculares. Las funciones del profesor. Tareas de enseñanza y organización de procesos de enseñanza. Análisis de medios didácticos. La evaluación del proceso enseñanza-aprendizaje.	**8**
Nuevas Tecnologías Aplicadas a la Educación Recursos didácticos y nuevas tecnologías: utilización en sus distintas aplicaciones didácticas, organizativas y administrativas. Utilización de los principales instrumentos informáticos y audiovisuales.	**4**
Ciencias de la Naturaleza y su Didáctica Conocimiento de las Ciencias de la Naturaleza. Contenidos, recursos didácticos y materiales para la enseñanza de las Ciencias de la Naturaleza.	**8**
Ciencias Sociales y su Didáctica Conocimiento de las Ciencias Sociales. Contenidos, recursos didácticos y materiales para la enseñanza de las Ciencias Sociales.	**4**
Educación Artística y su Didáctica Aproximación al fenómeno artístico. La expresión plástica y musical. El mundo creativo y expresivo del niño. Contenidos, recursos didácticos y materiales para educación artística	**4**
Educación Física y su Didáctica Actividades psicomotoras. Métodos y actividades de enseñanza en la educación física básica.	**4**
Idioma Extranjero y su Didáctica Conocimiento oral y escrito del idioma extranjero. Contenidos, recursos didácticos y materiales para la enseñanza del idioma extranjero.	**4**

Lengua y Literatura y su Didáctica Conocimiento de la lengua: aspectos descriptivos y normativos. La literatura en la enseñanza de la lengua. Lenguaje oral y escrito: comprensión y expresión. Contenidos, recursos didácticos y materiales para la enseñanza de la lengua y la literatura. En aquellas Comunidades Autónomas con dos lenguas oficiales, esta materia troncal se entenderá referida a una de ambas lenguas a elección del alumno.	**12**
Matemáticas y su Didáctica Conocimiento de las Matemáticas. Contenidos, recursos didácticos y materiales para la enseñanza de las Matemáticas.	**8**
Prácticum Conjunto integrado de prácticas docente a realizar en los correspondientes niveles del sistema educativo. Las prácticas deberán proporcionar asimismo el conocimiento del sistema escolar a través del conocimiento del centro concreto como unidad organizativa en sus distintas dimensiones y funciones así como de la Comunidad Educativa.	**32**

DIRECTRICES GENERALES: Maestro-Especialidad de Educación Infantil	
Troncal y descripción	**Créditos**
Bases psicopedagógicas de la Educación Especial Dificultades de aprendizaje y necesidades educativas especiales. Los trastornos del desarrollo y su incidencia sobre el aprendizaje escolar. La escolarización de los alumnos con déficits sensoriales, físicos y psíquicos. Integración educativa de alumnos con déficits sensoriales, físicos y psíquicos. Integración educativa de alumnos con dificultades.	**8**
Psicología de la Educación y del desarrollo en edad escolar Factores y procesos básicos del aprendizaje escolar. Contenidos y procesos de aprendizaje. Aprendizaje escolar y relaciones interpersonales. Teoría y modelos explicativos del desarrollo. Desarrollo cognitivo, desarrollo y adquisición del lenguaje, desarrollo social, físico, motor y afectivo-emocional.	**8**
Sociología de la Educación Conceptos básicos de sociología. Estructuras, relaciones e instituciones sociales. El sistema educativo como subsistema social. Sociología de la interacción en el aula. Sociología de la organización escolar. Sociología del currículum. Sociología de la infancia, la adolescencia y la juventud. Determinantes sociales del rendimiento escolar. Clase, género y grupo étnico en la educación. Transición a la vida activa y mercado de trabajo.	**4**
Organización del Centro Escolar La estructura del sistema escolar: características y niveles. El centro unidad organizativa: funciones directivas, de gestión pedagógica y de administración. Plan de centro. Organización de alumnos, profesores, recursos, espacios, horarios, actividades. El centro y la comunidad educativa. Derechos y deberes del profesor. Evaluación de centros. Análisis de experiencias de organización. Referencia de modelos y elementos estudiados a centros de educación infantil.	**4**
Teorías e Instituciones Contemporáneas de Educación Teorías contemporáneas de la educación. Movimientos e Instituciones educativas contemporáneos. Evolución histórica del sistema escolar. Instituciones y agentes educativos. La educación no formal.	**4**
Didáctica General Componentes didácticos del proceso de enseñanza-aprendizaje. Modelos de enseñanza y de currícula: Diseño curricular base y elaboración de proyectos curriculares. Las funciones del profesor. Tareas de enseñanza y organización de procesos de enseñanza. Análisis de medios didácticos. La evaluación del proceso enseñanza-aprendizaje.	**8**
Nuevas Tecnologías Aplicadas a la Educación Recursos didácticos y nuevas tecnologías: utilización en sus distintas aplicaciones didácticas, organizativas y administrativas. Utilización de los principales instrumentos informáticos y audiovisuales.	**4**

Conocimiento del medio natural, social y cultural Contenidos, recursos metodológicos y materiales en el conocimiento del medio natural, social y cultural.	**6**
Desarrollo de la expresión musical y su didáctica Educación auditiva, rítmica y vocal. Formas musicales y su valor en la educación infantil. Objetivos, contenidos y actividades en al educación musical. Metodologías para la formación musical.	**6**
Desarrollo de Habilidades Lingüísticas y su Didáctica Lenguaje oral y escrito: comprensión y expresión. Métodos y actividades de enseñanza para el desarrollo de habilidades lingüísticas.	**12**
Desarrollo de la Expresión Plástica y su Didáctica El lenguaje visual en la educación infantil. Valores educativos y elementos de la expresión plástica. La globalización en la expresión plástica. Recursos didácticos y materiales en la expresión plástica.	**6**
Desarrollo del Pensamiento Matemático y su Didáctica Contenidos, recursos metodológicos y materiales en el desarrollo del pensamiento matemático.	**6**
Desarrollo Psicomotor Actividades psicomotoras. Dominio del esquema corporal. Métodos y actividades de enseñanza en educación física infantil.	**6**
Literatura Infantil La literatura infantil y su Didáctica. Lenguaje infantil.	**4**
Prácticum Conjunto integrado de prácticas de iniciación docente en el aula, a realizar en los correspondientes niveles del sistema educativo. Las prácticas deberán proporcionar asimismo el conocimiento del sistema escolar a través del conocimiento del centro concreto como unidad organizativa en sus distintas dimensiones y funciones así como de la Comunidad Educativa.	**32**

A partir de estas directrices generales se pasa a una segunda fase, en la que cada universidad elabora su propio plan de estudios. El margen de maniobra en esta fase está delimitado por el número total de créditos que, al tratarse de estudios de primer ciclo universitario (diplomatura), pueden oscilar entre 180 y 270. En este punto, las universidades tienen que optar por aumentar los créditos de las materias troncales, establecer nuevas asignaturas obligatorias (que no figuran en las directrices generales), y organizar una oferta de asignaturas optativas para que cada alumno pueda completar el número de créditos exigidos en la titulación.

En este proceso intrauniversitario de elaboración del plan de estudios juegan un papel importante los departamentos universitarios implicados (que son los que tienen asignadas las áreas de conocimiento de las que dependen las materias incluidas en las directrices generales) y, por tanto, el resultado final suele depender de la relación de fuerzas que exista en cada campo universitario. En este sentido, el paso de las directrices generales a los planes de estudio puede suponer aumentos importantes de la carga lectiva en unos casos, e insignificantes en otros[10]. Ya se

[10] En el ejemplo del plan de estudios de la Universidad de Castilla-La Mancha (que se presenta más adelante), se observa cómo *Matemáticas y su Didáctica* y *Ciencias de la Naturaleza y su Didáctica*, que en las directrices generales cuentan con 8 créditos cada una, pasan a tener 15 y 16,5, respectivamente, en el plan de estudios. Otros ejemplos curiosos se encuentran en las materias de *Sociología de la Educación*, *Educación Física y su Didáctica* y *Ciencias Sociales y su Didáctica*: todas figuran con 4 créditos en las directrices generales, mientras que en el plan de estudios pasan a tener 4,5, 9 y 16,5 créditos respectivamente. Utilizando como ejemplo los planes de estudio de otras universidades también aparecerían casos similares, aunque con materias y

sabe que una mayor carga docente implica mayor dotación de profesorado y de asignación presupuestaria, y esto son asuntos que ya forman parte de la rutinizada vida universitaria.

En cualquier caso, aunque muy similares entre sí, cada universidad cuenta con un plan de estudios diferente, en donde la carga lectiva dedicada a las matemáticas suele variar ligeramente. Como ejemplo se incluyen los planes de estudio de la Escuela Universitaria de Magisterio de Albacete, de la Universidad de Castilla-La Mancha, de las especialidades de Educación Primaria y Educación Infantil[11].

PLAN DE ESTUDIOS DE LA UNIVERSIDAD DE CASTILLA-LA MANCHA (ALBACETE)

Maestro: Educación Primaria

CURSO	CUAT.	ASIGNATURA	CRÉD.
1º	1º	Didáctica General	4,5
		Psicología de la Educación	4,5
		Lengua Española y su Didáctica	4,5
		Matemáticas y su Didáctica I	**4,5**
		Sociología de la Educación	4,5
		ELEGIR UNO DE LOS DOS IDIOMAS: - Idioma Extranjero y su Didáctica: Inglés - Idioma Extranjero y su Didáctica: Francés	4,5
	2º	Didáctica General	4,5
		Psicología del Desarrollo en Edad Escolar	4,5
		Lengua Española y su Didáctica	4,5
		Organización el Centro Escolar	4,5
		Matemáticas y su Didáctica I	**4,5**
2º	1º	Bases Psicológicas de la Educación Especial	4,5
		Teorías e Instituciones Contemporáneas de la Educación	4,5
		Ciencias de la Naturaleza I	6
		Ciencias Sociales I	6
		Educación Física y su Didáctica	4,5
		Literatura Española y su Didáctica	4,5
	2º	Bases Pedagógicas de la Educación Especial	4,5
		Ciencias de la Naturaleza II	6
		Ciencias Sociales II	6
		Matemáticas y su Didáctica II	**6**
		Literatura Española y su Didáctica	4,5
		Educación Física y su Didáctica	4,5
3º	1º	Nuevas Tecnologías Aplicadas a la Educación	4,5
		Didáctica de la Expresión Plástica	4,5
		Didáctica de las Ciencias Experimentales	4,5
		Didáctica de las Ciencias Sociales	4,5
		Didáctica de la Expresión Musical	4,5
	2º	Prácticas de enseñanza	32

variaciones de créditos diferentes, lo que constituye un buen indicador sobre el reparto de poder en el campo universitario, pero esto no es materia sobre la que quiera profundizar aquí.

[11] En negrita se destacan las asignaturas dependientes del área de Didáctica de las matemáticas.

CUAT.	ASIGNATURAS OPTATIVAS	CRÉD.
1º	Métodos de Investigación y Diagnóstico en Psicopedagogía	6
	Historia regional	6
	Doctrina Católica y su Pedagogía II	6
	Orientación y Tutoría	4,5
	Geografía de Castilla-La Mancha	6
	Doctrina Católica y su Pedagogía III	6
	Geografía de España	5,5
	Historia Contemporánea de España	5,5
	El Mundo de la Energía	4,5
	Historia de los Movimientos Artísticos	4,5
	Resolución de Problemas	**4,5**
2º	Doctrina Católica y su Pedagogía I	6
	Procesos Psicológicos Básicos	6
	Psicología de la Personalidad	6
	Psicología Social	6
	Historia de la Ciencia	4,5
	Botánica Aplicada y Ecología	4,5
	Evaluación de la Práctica Docente	4,5

CUAT.	ASIGNATURAS ESPECÍFICAS DE LIBRE ELECCIÓN*	CRÉD.
1º	Geografía del Turismo en España	4,5
	La enseñanza/aprendizaje de la historia a través de las NNTT	6
	Unidades Didácticas en Lenguas Extranjeras	6

* Para cubrir los créditos de libre elección, cada alumno puede elegir cualquier materia de las que se imparten en su universidad (correspondiente a cualquier titulación), pero en este caso también se ofertan estas tres asignaturas específicas. El número de créditos de libre elección que hay que cursar en cada titulación es, como mínimo, el 10% de la carga lectiva total.

PLAN DE ESTUDIOS DE LA UNIVERSIDAD DE CASTILLA-LA MANCHA (ALBACETE)

Maestro: Educación Infantil

CURSO	CUAT.	ASIGNATURA	CRÉD.
1º	1º	Didáctica General	4,5
		Psicología de la Educación	4,5
		Lengua Española y su Didáctica I	6
		Desarrollo del Pensamiento Matemático y su Didáctica	**6**
		Conocimiento del Medio Social y Cultural y su Didáctica	4,5
		Sociología de la Educación	4,5
	2º	Didáctica General	4,5
		Psicología del Desarrollo en Edad Escolar	4,5
		Desarrollo de la Expresión Musical y su Didáctica I	6
		Organización el Centro Escolar	4,5

2º	1º	Bases Psicológicas de la Educación Especial	4,5
		Teorías e Instituciones Contemporáneas de la Educación	4,5
		Lengua Española y su Didáctica II	6
		Desarrollo Psicomotor	6
		Didáctica de las Matemáticas en Educación Infantil	**6**
		Conocimiento del Medio Natural y su Didáctica	4,5
	2º	Bases Pedagógicas de la Educación Especial	4,5
		Desarrollo de la Expresión Plástica y su Didáctica	6
		Didáctica de la Expresión Musical	6
		Ciencias del Medio Social, Cultural y su Didáctica	4,5
		Ciencias de la Naturaleza y su Didáctica	4,5
3º	1º	Literatura Infantil	4,5
		Didáctica de la Expresión Plástica	6
		Nuevas Tecnologías Aplicadas a la Educación	4,5
		Animación a la Lectura y Comentarios de Textos	4,5
		Educación Física y su Didáctica	6
	2º	Prácticas de enseñanza	32

CUAT.	ASIGNATURAS OPTATIVAS	CRÉD.
1º	Doctrina Católica y su Pedagogía II	6
	Formación Vocal y Auditiva	4,5
	Psicología del Desarrollo Cognitivo Infantil	6
	Doctrina Católica y su Pedagogía III	6
2º	Doctrina Católica y su Pedagogía I	6
	Historia de la ciencia	4,5
	Primeros Auxilios y Cuidados Básicos	4,5
	Evaluación de la Práctica Docente	4,5
	Métodos de Investigación y Diagnóstico en Psicopedagogía	6
	Procesos Psicológicos Básicos	6
	Psicología de la Personalidad	6
	Psicología Social	6
	Historia de la Educación Infantil	4,5
	Historia de la Educación en España	4,5
	Botánica Aplicada y Ecología	4,5
	Psicología de la Educación II	6

Cualquier otro ejemplo puede consultarse en internet, ya que los planes de estudio de las universidades españolas se encuentran directamente a través de la página web de cada una de ellas. En cualquier caso, se aprecia claramente que la mayoría de las asignaturas pertenecen al ámbito de las materias troncales.

Sólo hay que añadir una breve explicación sobre la aparición de asignaturas relativas a la doctrina católica: la razón de su existencia se encuentra en el propio Real Decreto1440/1991 por el que se establece el título universitario oficial de maestro, ya que en su disposición adicional establece que los planes de estudio se ajustarán a lo dispuesto en el acuerdo entre el estado español y la santa sede sobre enseñanza y asuntos culturales. No obstante, y pese a la legalidad de esta circunstancia, no deja de ser sorprendente que estas asignaturas alcancen los 18 créditos optativos[12], mientras que otras áreas, que forman parte del currículum obligatorio de la etapa escolar correspondiente a Educación Infantil y Educación Primaria, tengan una carga lectiva menor. Además, el estado no sólo se encarga del coste económico de este tipo de formación docente, sino que también asume el gasto del profesorado que imparte esa doctrina en el período de escolarización obligatoria (que abarca desde los tres hasta los dieciséis años de edad), mientras que es la iglesia católica la que se encarga de seleccionar a dicho profesorado. Evidentemente, no se trata de un ejercicio de racionalidad académica sino de dominación ideológica, y pienso que el estado debería dedicar todos sus recursos a la formación científica de los futuros docentes, dejando *al César lo que es del César, y a Dios lo que es de Dios*.

La próxima reforma de las directrices generales y, posteriormente, de los planes de estudio, va a suponer cambios cuantitativos en el ámbito del currículum de formación de docentes. El nuevo título de grado se impartirá a lo largo de cuatro cursos académicos (ocho cuatrimestres), y esto supondrá un aumento de los créditos[13] que integrarán los planes de estudio. Sobre este asunto aún no existen previsiones que permitan avanzar hipótesis plausibles, pero es predecible que se repita la lógica del campo universitario: las directrices generales serán bastante parecidas a las actuales, y los planes de estudio se elaborarán, por cada universidad, en función de las relaciones de poder entre los diferentes departamentos implicados. Así, los planes de estudio puede que sean similares a los actuales, con el incremento proporcional que supone pasar de disponer de seis cuatrimestres a disponer de ocho[14]. Una posibilidad que se está planteando es aumentar el período de *Prácticas de enseñanza* a un curso académico completo, dejando los otros tres cursos para el resto de asignaturas, aunque todavía no hay nada decidido al respecto.

[12] Se trata de créditos optativos, pero resulta obligatorio cursarlos para que la iglesia católica autorice a impartir enseñanza religiosa en las escuelas.

[13] Los créditos en el nuevo sistema europeo de educación superior tienen una consideración diferente a los actuales. El Real Decreto que establece el sistema europeo de créditos (disponible en: http://www.boe.es/boe/dias/2003/09/18/pdfs/A34355-34356.pdf) sólo hace referencia a la carga que supondrá para el alumnado, que será de entre 25 y 30 horas por crédito, pero no especifica cómo se repartirán esas horas entre clases, seminarios, trabajos, horas de estudio y de preparación y realización de exámenes). Según las experiencias que conozco, cada crédito equivaldrá a un total de, aproximadamente, 25 horas, de las que 3 horas corresponden a sesiones de seminario y 6-7 horas a clases. Esto supone un cambio metodológico importante, ya que se reduce el número de clases para potenciar más el trabajo autónomo del alumnado.

[14] Las dinámicas del campo universitario, por una cierta lógica reproductiva, no suelen sufrir cambios sustanciales cuando las circunstancias permanecen estables. En este sentido, las escuelas de magisterio de las universidades españolas arrastran una plantilla docente que se diseñó para unas titulaciones diferentes (cuando las especialidades existentes eran *Educación Preescolar*, *Lengua Extranjera*, *Ciencias* y *Ciencias Humanas*), de manera que el exceso de profesorado en el ámbito de las ciencias sociales y de las ciencias experimentales fue el motivo por el que dichas áreas aparecen sobrevaloradas en todos los planes de estudio actuales, sin respetar la proporcionalidad que plantean las directrices generales. Aquí, la autonomía universitaria sirvió para que determinados intereses corporativos prevalecieran sobre otras consideraciones pedagógicas y, en la medida en que las plantillas docentes sigan manteniendo la misma estructura, la situación se repetirá en la elaboración de los futuros planes de estudio.

Las matemáticas en el currículum de la formación de docentes

Como ya he indicado anteriormente, la carga lectiva dedicada a las matemáticas, en los planes de formación docente, varia entre diferentes universidades. En este sentido, puede resultar algo paradójico que diferentes maestras en España tengan una formación matemática que, según la universidad donde hayan cursado sus estudios, puede variar en más del triple. Aquí no voy a hacer un análisis exhaustivo de estas diferencias, pero puede ser revelador presentar sintéticamente algunos casos.

NÚMERO DE CRÉDITOS OBLIGATORIOS DE MATEMÁTICAS POR ESPECIALIDAD

	Ed. Primaria	Ed. Infantil
Universidad de Valencia	9	6
Universidad de Granada	13,5	10,5
Universidad de Castilla-La Mancha	15	12
Universidad Complutense de Madrid	18	21

En un modelo educativo diferente estas situaciones pueden ser absolutamente lógicas, pero en el caso español, en el que el diseño curricular del período de escolarización obligatoria es similar en todo el territorio nacional, estas diferencias formativas tan amplias no obedecen a lógica educativa alguna y, por tanto, las razones habría que buscarlas en las estructuras de cada campo universitario y en las estrategias que los actores de dicho campo (en este caso profesores y departamentos) utilizan para intentar maximizar beneficios.

Pero esta variabilidad del número de créditos no afecta tanto al contenido general de estas asignaturas, ya que existe un gran parecido en las materias que se imparten. En general, se tratan contenidos de geometría, de medida y de numeración, con especial atención a los procesos de enseñanza-aprendizaje de dichos contenidos en la escuela (infantil ó primaria), y que se desarrollan con mayor o menor detenimiento según el número de créditos disponibles.

En los temas de **geometría** se incluye la geometría del plano y del espacio, así como las transformaciones geométricas de isometrías y semejanzas.

Sobre la **medida** se introduce el concepto de magnitud y la medida de magnitudes, trabajando el proceso de construcción y medida de las magnitudes más habituales en la enseñanza escolar (longitud, superficie, volumen, masa, tiempo y amplitud).

En los temas de **números** se trabajan los distintos sistemas de numeración y los conjuntos numéricos (naturales, enteros y racionales), así como las distintas operaciones aritméticas (el sentido, la representación y el algoritmo) y la resolución de problemas aritméticos. En algunas universidades también se incluyen temas de probabilidad y estadística.

La importancia de la **resolución de problemas** como metodología didáctica de las matemáticas hace que, aunque se incluya en las asignaturas obligatorias, todas las universidades ofertan entre las optativas alguna específica sobre esta metodología.

En general, en todos estos temas, junto a los contenidos matemáticos se profundiza más en su didáctica: los contenidos curriculares que se incluyen en la enseñanza infantil y primaria, algunas teorías sobre el aprendizaje de las matemáticas, situaciones didácticas y recursos y materiales para trabajar los diferentes conceptos en el aula.

Como ejemplo de esto, se incluyen sintéticamente los temas de las asignaturas que se imparten en la Escuela Universitaria de Magisterio de Albacete (Universidad de Castilla-La Mancha), tanto en la especialidad de Educación Primaria como en la de Educación Infantil. En cualquier caso, en la correspondiente página de internet[15] se pueden consultar en un formato más amplio (objetivos, contenidos, metodología y bibliografía), de la misma manera que ocurre en otras universidades españolas[16].

ASIGNATURAS DE LA ESPECIALIDAD DE EDUCACIÓN PRIMARIA

MATEMÁTICAS Y SU DIDÁCTICA I (OBLIGATORIA)

Bloque 1.- Matemáticas y didáctica de las matemáticas: La actividad matemática (Creencias y concepciones sobre las matemáticas. Algunas características de las matemáticas). Enseñanza y aprendizaje de las matemáticas (Influencia de las actitudes en la educación matemática. Métodos de enseñanza y organización de clases. Algunas teorías en la educación matemática. Currículo matemático de Educación Primaria).

Bloque 2.- Geometría del plano y del espacio: Conocimientos matemáticos (La geometría y sus aplicaciones. Componentes elementales de las figuras geométricas. Curvas y polígonos. Los triángulos y su clasificación. Los cuadriláteros y su clasificación. La circunferencia y el círculo. Recubrimiento del plano con polígonos. Poliedros y cuerpos de revolución. Poliedros y criterios de clasificación. Relación entre elementos: fórmula de Euler. Generación de sólidos de revolución: cilindro, cono y esfera. Secciones planas de sólidos. Planos de simetría y ejes de rotación. Orientación espacial y sistemas de referencia). Didáctica de la geometría (Orientaciones curriculares. Desarrollo cognitivo y aprendizaje de la geometría:. Situaciones y recursos didácticos. Dificultades en el aprendizaje).

Bloque 3.- Isometrías y semejanzas: Conocimientos matemáticos (Isometrías: traslaciones, giros y simetrías. Composición de movimientos. Tipos de simetrías: axial, rotacional y central. Proporcionalidad geométrica.

[15] http://www.uclm.es/ab/magisterio/cdmagisterio/18-14.html .

[16] Solamente como ejemplos se pueden visitar las páginas web de la Universidad Complutense de Madrid (http://www.ucm.es/info/webdimat/Asignaturas0607.html), o de la Universidad de Granada (http://www.ugr.es/~dpto_did/).

Transformaciones de semejanza) Didáctica de las transformaciones geométricas (Orientaciones curriculares. Desarrollo cognitivo y aprendizaje. Situaciones y recursos didácticos. Dificultades en el aprendizaje).

Bloque 4.- Magnitudes y medida: Conocimientos matemáticos (Concepto de magnitud. Proceso de construcción de magnitudes: algunos ejemplos. Tipos de magnitudes. La medida como problema. Medida de magnitudes. Magnitudes geométricas). Didáctica de la medida (Orientaciones curriculares. Desarrollo cognitivo y aprendizaje. Situaciones y recursos didácticos. Dificultades en el aprendizaje).

MATEMÁTICAS Y SU DIDÁCTICA II (OBLIGATORIA)

Tema 1.- Matemáticas y didáctica de las matemáticas: La actividad matemática (Creencias y concepciones sobre las matemáticas. Algunas características de las matemáticas). Enseñanza y aprendizaje de las matemáticas (Influencia de las actitudes en la educación matemática. Métodos de enseñanza y organización de clases. Algunas teorías en la educación matemática. Currículo matemático de Educación Primaria).

Tema 2.- La construcción del número natural y la numeración: Conocimientos matemáticos (Los números naturales. Diferentes usos y formalizaciones. Técnicas de recuento. Tipos de sistemas de numeración y aspectos históricos). Didáctica de la numeración (Orientaciones curriculares. Desarrollo cognitivo y progresión en el aprendizaje. Situaciones y recursos. Análisis de textos escolares. Diseño de unidades didácticas).

Tema 3.- El cálculo en la Enseñanza Primaria: La adición y la sustracción: Conocimientos matemáticos (Formalización de la operación de adición y sustracción de números naturales. Estructura lógica de situaciones aditivas. Técnicas de cálculo de sumas y restas). Didáctica del cálculo aditivo (Orientaciones curriculares. Desarrollo cognitivo y progresión en el aprendizaje. Situaciones y recursos. Análisis de textos escolares. Análisis de problemas propuestos por los niños y de estrategias aditivas).

Tema 4.- Las relaciones multiplicativas: El cálculo multiplicativo y la división: Conocimientos matemáticos (Estructura de los problemas multiplicativos. Formalización de la multiplicación y división de números naturales. Técnicas de cálculo de la multiplicación y división entera. Modelización aritmética de situaciones físicas o sociales. La estimación en el cálculo aritmético. Divisibilidad en el conjunto de los números naturales). Didáctica del cálculo multiplicativo y de división (Orientaciones curriculares. Desarrollo cognitivo y progresión en el aprendizaje. Situaciones y recursos. Análisis de textos escolares. Diseño de unidades didácticas).

Tema 5.- Relatividad aditiva y números enteros: Conocimientos matemáticos (Contextos, usos e importancia social y cultural de los números enteros. Otra manera de resolver los problemas aritméticos: El método algebraico. Situaciones que motivan el uso de los números con signo. Reglas de cálculo de los números enteros. Construcción formal del sistema de números enteros. Modelización y representación de los números enteros). Didáctica de los números enteros (Orientaciones curriculares. Desarrollo cognitivo. Conflictos en el aprendizaje. Situaciones y recursos. Análisis de textos escolares. Diseño de unidades didácticas).

Tema 6.- Números racionales: Conocimientos matemáticos (Fracciones y razones. Equivalencia de fracciones. Números decimales. Propiedades. Operaciones con números racionales. Técnicas para resolver problemas de fracciones. Fracciones decimales. Números decimales. Los números decimales como subconjunto de Q. Expresiones decimales. Técnicas de obtención de expresiones decimales. La introducción de los decimales a partir de la medida. Operaciones con decimales. La aproximación decimal de racionales. Números reales). Didáctica de los números racionales (Orientaciones curriculares. Desarrollo cognitivo y progresión en el aprendizaje. Contextos y usos de las fracciones y números decimales. Representaciones y modelos para fracciones y números decimales. Análisis de textos escolares y de experiencias didácticas).

RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS (OPTATIVA)

Tema 1.- Los problemas y la enseñanza de las matemáticas: Concepto de problema matemático. Clasificación de problemas. La resolución de problemas en la enseñanza de las matemáticas.

Tema 2.- Resolución de problemas: modelos por fases: El modelo de Polya: la introspección y el resolutor ideal. El modelo de Schoenfeld: el análisis de protocolos. El modelo de Burton: el punto de vista de la instrucción.

Tema 3.- Ideas, pautas y estrategias heurísticas para la resolución de problemas: Ideas, tendencias y creencias sobre la resolución de problemas. Análisis de algunas estrategias heurísticas.

Tema 4.- Experiencias sobre resolución de problemas de matemáticas en el aula: Metodología seguida para la resolución de problemas. Tipos de problemas propuestos. Reflexiones finales.

ASIGNATURAS DE LA ESPECIALIDAD DE EDUCACIÓN INFANTIL

DESARROLLO DEL PENSAMIENTO MATEMÁTICO Y SU DIDÁCTICA (OBLIGATORIA)

Primera parte: GEOMETRÍA

1. Sobre la enseñanza de la geometría espacial.
2. El mundo de los sólidos. Algunas familias.
3. Análisis en el mundo de los poliedros. Descripción, definición y clasificación.
4. Del espacio al plano y del plano al espacio. Representaciones y desarrollos.
5. Polígonos.
6. Geometría de las transformaciones.
7. Introducción general a la medida.

Segunda parte: NÚMEROS

8. Números naturales.
9. Sistemas de representación de números.
10. Operaciones aritméticas. Sentido y algoritmo de las operaciones.
11. Cálculo mental.

12. Divisibilidad.
13. Números enteros.
14. Números racionales.

DIDÁCTICA DE LAS MATEMÁTICAS EN EDUCACIÓN INFANTIL (OBLIGATORIA)

1. Desarrollo del pensamiento lógico-matemático.
   Etapas del pensamiento lógico-matemático en los niños.
   Importancia del material. Distintos materiales
   Actividades con conjuntos, "relaciones" y "operadores".
2. Números y cálculo.
   Noción de cantidad.
   Materiales y juegos para la iniciación al concepto de número.
   Cálculo con material y cálculo escrito.
3. Exploración del espacio. Geometría
   Proceso del niño en el conocimiento del espacio.
   Estudio de algunas figuras planas y cuerpos espaciales.
   Materiales: sólidos, varillas, geoplano, geoespacio…
4. Medida.
   Construcción de la magnitud y su medida.
   Ejemplos de algunas magnitudes.
   Materiales para la medida de magnitudes.

Estas materias constituyen la base para poder trabajar sobre el aprendizaje de las matemáticas escolares, de manera que, al margen de futuros planes de estudios, seguirán formando parte de los mismos. En cualquier caso, la adopción de los nuevos créditos europeos tendría que significar un giro importante en las maneras de desarrollar la enseñanza universitaria en España.

Hasta ahora, esta enseñanza universitaria ha estado presidida por las clases magistrales y el trabajo (muchas veces memorístico) del alumnado de manera individual. La pretensión es que las clases magistrales pierdan terreno a favor del trabajo autónomo (y muchas veces cooperativo) del alumnado. En esta estrategia parece que se quiere avanzar, al menos si nos atenemos a la profusión de cursos sobre nuevas metodologías docentes[17], a los numerosos textos (comunicaciones en congresos, artículos y libros) que circulan por la geografía nacional, y a los incentivos económicos (incluidos en los denominados complementos de calidad) que reciben los docentes universitarios para empezar cuanto antes este nuevo sistema.

Pero a veces las casas se empiezan por los tejados. Las décadas de trabajo universitario que nos preceden han instaurado dos cuestiones que suponen un freno

[17] No hay universidad en España que no haya impartido, entre sus profesores, cursos sobre la adaptación al Espacio Europeo de Educación Superior, sobre el uso de tecnologías informáticas aplicadas a la educación (con atención incluida al denominado *e-learning*)y/o sobre aprendizaje cooperativo.

para cualquier proceso de innovación educativa: la forma de ejercer su profesión del profesorado universitario y las circunstancias que conforman dicho trabajo (espacios, recursos, volumen de trabajo, etc.). En este sentido, ese intento de innovación se tienen que realizar en aulas que tienen cerca de 100 estudiantes, por profesores que acumulan el trabajo de enseñar a cerca de 400 alumnas/os y que, en muchos casos, las clases magistrales es el único recurso que han utilizado durante décadas. No es menos cierto que, a la vez, también se están desarrollando experiencias con grupos reducidos de estudiantes, y por profesores que soportan mucho menos volumen de trabajo. Los problemas pueden venir, como casi siempre, cuando, en lugar de racionalizar las plantillas de profesorado universitario, se consoliden estas situaciones tan desiguales que pueden desembocar en que unos se dediquen a la *excelencia universitaria* y otros, amparados en la libertad de cátedra, mantengan las formas de trabajo más clásicas, como la única manera de dar respuesta a su carga de trabajo.

María Sotos Serrano, profesora de Didáctica de las Matemáticas en la Escuela Universitaria de Magisterio de Albacete (universidad de Castilla-La Mancha). España.

UNIÓN REVISTA IBEROAMERICANA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA
Septiembre de 2007, Número 11 páginas 179-188
ISSN: 1815-0640
Historia
Coordinador: Wagner Rodrigues Valente

Teoria e representação geométrica na obra de Albrecht Dürer: um ensino de matemática para pintores e artesãos[1]

Cláudia Flores[2]

Albrecht Dürer nasceu em 1471 em Nurembergue, na Alemanha, onde passou a maior parte de sua vida, até sua morte em 1528. Filho de um ourives, ele dedicou-se, aos quinze anos de idade, à aprendizagem da pintura artística, realizando várias viagens de formação que o levaram a outros lugares do mundo. Dentre estas viagens ele fez duas à Veneza (1490 -1496 e 1505 -1507), ficando fascinado pela cultura dos pintores desta região que, diferentes de seus companheiros alemães, liam e escreviam o latim, tocavam música e sabiam dançar. Além disso, oportunizaram-lhe a familiarização com o italiano e o acesso aos escritos teóricos da arte do século XV, tais como os de Leon Batista Alberti, Piero della Francesca, Leonardo da Vinci e do amigo matemático deste último, Luca Pacioli.

Após sua segunda viagem à Itália Dürer completa seus estudos teóricos e se envolve na composição de um tratado que seria dirigido aos pintores e artesãos alemães. O projeto inicial de Dürer era o de fazer da pintura uma arte liberal, fundamentada na geometria. O projeto, amplo e enciclopédico, deveria atender a uma educação matemática dos artistas e artesãos alemães, era inspirado nos moldes italianos, sobretudo nos escritos de Leon Batista Alberti3.

Seu projeto revelou-se muito vasto e foi abandonado em sua globalidade, dando lugar a dois tratados separados que Dürer publicou nos últimos anos de

[1] Este trabalho tem o apoio do CNPq.

[2] Professora do Departamento de Metodologia de Ensino/CED/UFSC e do Programa de Pós-Graduação em Educação Científica e Tecnológica/PPGECT/CED/CFM/UFSC. E-mail: crf@mbox1.ufsc.br

[3] Leon Batista Alberti, italiano, escreveu o tratado *Da Pintura* (1435) dirigido aos artistas para a aprendizagem, entre outras, das técnicas de representação do espaço em perspectiva.

sua vida: sua obra sobre geometria publicada em Nurembergue, em 1525, e um tratado acerca das proporções do corpo humano, em 1528.

Particularmente, o tratado de geometria intitulado *Underweysung der messung / mit dem zirckel und richtscheyt/ in Linien ebnen unnd gantzen corporen/ durch Albercht Dürer zu samen getzogen/ und zu nutz aller kunstliebhabenden mit zu gehörigen figure/ in truck gebracht/ im jar M. D. XXV.*(Fig. 1), é, segundo a edição de Jeanne Peiffer (2000), uma das mais belas obras impressas no Renascimento alemão.


Underweysung der messung/ mit dem zirckel vñ richt
scheyt/ in Linien ebnen vnnd gantzen corporen/
durch Albrecht Dürer zů samen getzogẽ/
vnd zů nutz allẽ kunstliebhabenden
mit zů gehörigen figuren/ in
truck gebracht/ im jar.
M. D. X X V.

Figura 1: Título original da obra de Dürer

Instruções para a medida/ com régua e compasso/ das linhas, planos e corpos sólidos/ reunidas por Albrecht Dürer/ e impressas com as figuras correspondentes/ para o uso de todos os amadores da arte/ no ano de 1525.

O texto da obra é escrito em alemão, e mesmo aconselhando os aprendizes pintores a dominar o latim, Dürer dirige seu tratado a todos aqueles que não conhecem a geometria de Euclides, aos artesãos que se servem das medidas, aos gravuristas, aos ourives, aos talhadores de pedras, aos marceneiros, carpinteiros, assim como aos pintores.

O título da obra de Dürer sugere a relação pretendida entre a teoria matemática e a prática do artesão. Ele designa a geometria, nem tanto quanto geometria prática orientada para a medida de áreas e volumes, nem geometria demonstrativa (euclidiana), mas como uma geometria construtiva.

A terminologia empregada é em conformidade com o conteúdo e a forma que Dürer quis dar em seu livro. Ela reflete o duplo objetivo que foi fixado: fundar a pintura sobre a certeza matemática e tornar as instruções reunidas em sua obra amplamente acessíveis aos leitores pintores, artesãos e matemáticos.

A obra é divida em quatro livros que são consagrados, respectivamente, às linhas (retas e curvas), às figuras planas e, nos dois últimos, aos corpos sólidos, com aplicações à arquitetura e um método, a perspectiva, para representar os corpos no plano, tal como o vemos. Este último livro levou Dürer a ser considerado o primeiro artista do Norte Europeu, segundo Hamou (1995), que sucumbiu à fascinação da teoria da perspectiva desenvolvida na Itália, empregando a definição da perspectiva como visão transparente e atribuindo à arte a função de representar a natureza com a fidelidade, a verdade com que o olhar apreende a realidade externa.

Formado nos ateliers de ourives e de pintores, Dürer aprendeu os saberes práticos, recolhendo receitas e procedimentos de construção geométrica que eram transmitidos oralmente de geração para geração, sem terem sido codificados e escritos. Notando suas próprias dificuldades, aliado ao Humanismo, ao desejo em fornecer à arte um embasamento matemático, Dürer dedicou-se a escrever tal obra. No entanto, o objetivo era não tão somente o de dar à pintura um caráter de certeza matemática, mas o de ensinar os fundamentos geométricos e saberes matemáticos necessários para o exercício da arte do pintor e do artesão. O interesse destacado aqui era, então, o de ensinar matemática aos jovens pintores e artesãos.

Mas, como Dürer, ele mesmo, apropriou-se de conhecimentos práticos e diversos a fim de colocá-los num corpo escrito, sistematizá-los num compêndio ao serviço de outros, seus contemporâneos e futuros artistas? Sabe-se que Dürer conhecia pouco ou muito mal o latim, necessitando da ajuda de amigos para o estudo de textos antigos, dentre eles, *Os Elementos* de Euclides. Em particular, seu amigo alemão e humanista Willibald Pirckheimer (1470-1530), a quem dedicou sua Geometria, desempenhou papel fundamental em seus estudos e avanços.

Quando Dürer começou a se interessar pelos fundamentos teóricos de sua arte, ele passou a pesquisar acerca dos conhecimentos da ótica, indissociáveis da perspectiva dos artistas. Em particular, seus conhecimentos em relação à teoria da perspectiva podem ter sido originados da leitura de tratados italianos, como a Divina Proporção de Luca Pacioli, De Prospectiva Pingendi de Piero della Francesca, ou até mesmo um tratado de Leonardo da Vinci, pois numerosos desenhos de Dürer se parecem com figuras saídas deste tratado e retomadas por sua memória.

No que se refere aos problemas puramente matemáticos, Dürer teria se aconselhado, em especial, com o astrônomo Johann Werner (1468-1528). Note-se, portanto, que com a ajuda de eruditos, humanistas que freqüentavam a mesa de Pirckheimer, Dürer obteve informações matemáticas variadas que o auxiliavam a compreender o feitio da arte da época.

No entanto, o projeto de transcrever, reunir, sistematizar, organizar num corpus de saber, fundado na medida aos artistas, aos artesãos e a todos aqueles do qual seu trabalho é fundado na medida, o que Dürer pode reunir de conhecimentos geométricos e matemáticos não lhe eram suficientes para compor seu projeto, uma vez que ele só dispunha do alemão e de sua arte pictural. Precisaria conceber uma obra em que pudesse ser lida e compreendida e, sobretudo, aplicada no desenvolvimento do trabalho dos diversos artistas. Ou seja, precisaria de uma obra que levasse os jovens artistas à aprendizagem dos princípios da geometria e da matemática, levando-os a assimilação e capacitando-os ao uso dos conceitos e à criação de novas estratégias de usos.

Dentre suas estratégias pedagógicas Dürer optou em não partir de termos latinos para transpor em alemão as nomenclaturas de objetos matemáticos, mas do próprio objeto, designando-o por palavras que o evocassem e que o sugerissem, bem como, por expressões imaginadas estreitamente ligadas à forma do objeto matemático. Dürer conhecia as construções geométricas rudimentares usadas nos ateliers alemães. Destas, ele retomou suas terminologias e inventou outras, criando palavras novas para designar certos objetos matemáticos.

A título de exemplo notemos as curvas estudadas no Livro I que foram nomeadas de “linhas serpentinas” ou “linhas tortuosas” para a curva formada pela justaposição de dois semi-círculos de convexidade oposta; de “linhas em caracol” para algumas espirais e hélices. Ainda, ao lado da terminologia clássica, tais como os termos de Apollonius (parábola, hipérbole e elipse), Dürer inventa outras expressões, tais como, “linha em ovo” ou “oval” para a elipse que parece totalmente com um ovo; “linha em incandescência” para a parábola, pois um espelho parabólico traz a incandescência, e ainda, “linha em forquilha” para a hipérbole, pois se parece com uma forqueta, um lugar de confluência. Mas, se ele aproxima a terminologia clássica a sua própria, ele também retoma algumas expressões usuais nos ateliers, como “espinha de peixe”, “croissant” ou “lua nova” para algumas configurações elementares obtidas pela interseção de dois arcos de circunferências e freqüentes nos ornamentos góticos.

Os artistas e artesãos, aos quais se endereçava a obra de Dürer, não poderiam receber as noções matemáticas de modo muito abstrato, mesmo descritas em alemão. Se Dürer criou sua própria terminologia foi antes de tudo, para facilitar a comunicação e para melhor se fazer compreender. Vale notar, ainda, que as construções descritas em seu texto poderiam ser melhor assimiladas se fossem apoiadas em figuras. Isso faria do texto uma versão não tão teórica e mais compreensível. Logo, visualmente, textos e figuras se organizam compondo a unidade da narrativa de Dürer. Diferentes dos textos do final do século XV, em que as figuras apareciam na margem, Dürer as incorpora no meio da página, entre os textos, fazendo o leitor interagir entre a imagem e o escrito, pontualmente.

A questão das figuras pode ser considerada didaticamente importante para a aprendizagem dos saberes matemáticos. Se Dürer tinha dois públicos bem distintos para a leitura de sua obra, os artistas e os matemáticos, o tratado precisaria ser lido, compreendido e utilizado por estas duas categorias de público. Neste caso, as figuras e as adaptações desempenhavam um papel de mediação entre a abstração e a prática.

Tal concepção, a de uma aliança entre o saber e a habilidade prática, colocou à disposição dos artistas e artesãos um catálogo de formas com infinitas variações. O texto de Dürer desenvolve-se pelas figuras e suas transformações no espaço visual incitando, como um bom pedagogo, seus leitores a interagir, levando-os mais além nas investigações variando as formas descritas, encorajando a seguir vias pessoais, a usar conhecimentos próprios e a imaginar variantes e prolongamentos de seu ensino.

A especificidade do texto de Dürer é a concretização, a materialização, de noções matemáticas abstratas. Ele inclui em sua geometria algumas construções de polígonos regulares (pentágono, eptágono, eneágono) que provém dos ateliers reconhecendo o caráter matemático e geométrico. O método de representação de um sólido por dupla projeção, plano e elevação, sem dúvida de origem prática, é aplicado por Dürer a objetos matemáticos abstratos. A título de exemplo tomemos a representação da seção plana hiperbólica de um cone com base circular (Fig. 2). Segundo Taton (1986), encontra-se no tratado de Dürer “

(...) a primeira concepção clara do papel do método das projeções e o emprego de procedimentos próximos em seu espírito da geometria descritiva elementar.” (p.166).

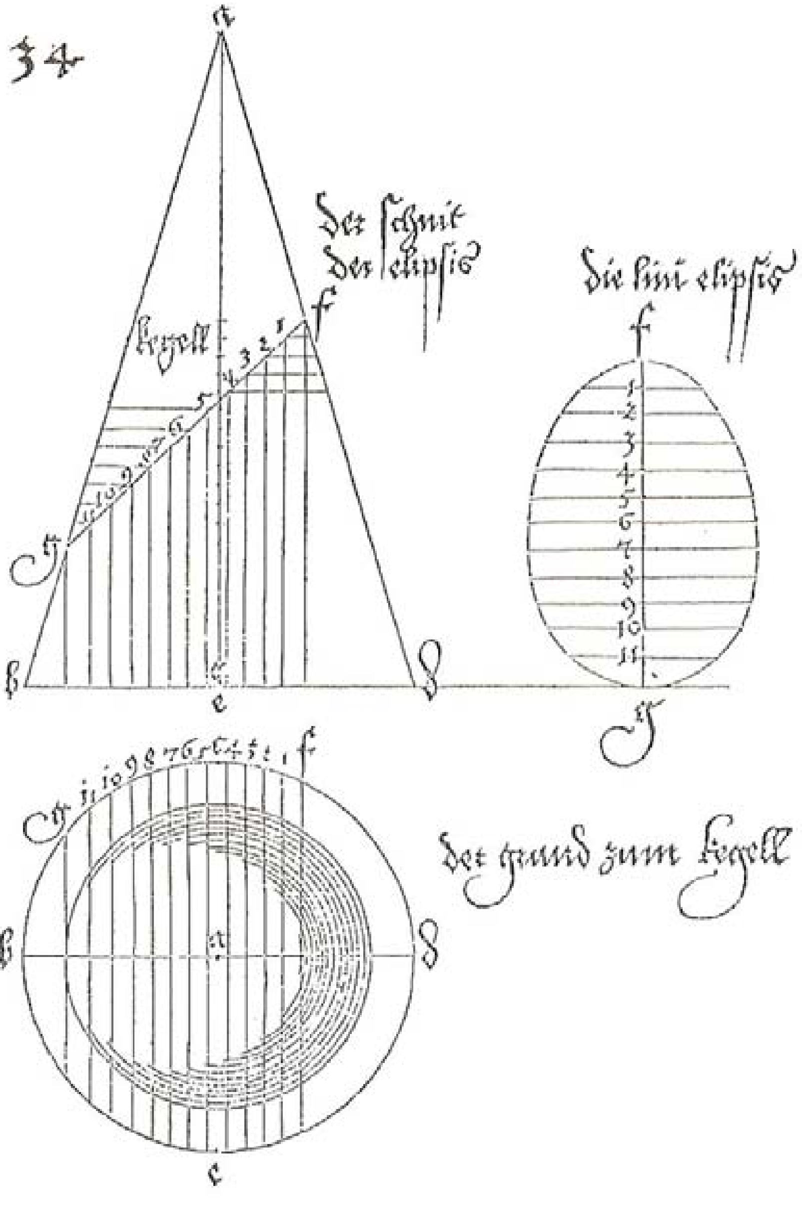


Figura 2: Dürer, Underweysung der Messung…, Nürembergue, 1525.
Figura 34 do Livro I: a elipse ovóide de Dürer.

Não se pode negligenciar que as figuras de Dürer impactaram a matemática. Em especial, citam-se os estudos acerca das seções cônicas que inspiraram Gaspard Monge, no fim do século XVIII, que o levaram a codificar as técnicas subjacentes à geometria descritiva.

Orientado a carrear as aplicações da geometria em direção à arte, a obra de Dürer procura, essencialmente, fornecer regras que permitam construir curvas, superfícies e sólidos suscetíveis de serem utilmente representados para fins artísticos. É assim que, na parte onde consagra a geometria do espaço, o autor estuda os métodos da perspectiva e constata o grande papel que elas desempenham na geometria. Segundo Flacon e Taton (1994), o novo modo racional de representar o espaço no Renascimento italiano, ou seja, por meio da perspectiva, levou Dürer a se empenhar, não tão necessariamente num estudo teórico sobre esta técnica, mas na construção de máquinas que, nada mais eram, do que instrumentos para representar em perspectiva - os perspectógrafos. Para Suárez et al (2006), Dürer é o primeiro artista do Renascimento a construir e documentar um aparato para fazer desenhos em perspectiva, que baseava seu funcionamento na materialização das retas visuais com fios, concretizando alguns dos princípios da perspectiva central.

O modo como Dürer empregou uma terminologia matemática; reuniu saberes dispersos e bizarros provenientes dos ateliers, da geometria prática da Idade Média, dos textos antigos e dos tratados italianos; explorou situações aparentemente simples na prática, mas difíceis de representar no papel com fundamento geométrico e matemático; usou a régua e o compasso para unir teoria com a representação; criou máquinas para desenhar em perspectiva, dá a obra de Dürer um caráter que alia problemas teóricos e suas aplicações prática. Ele parte de uma definição matemática, a espiral de Arquimedes por exemplo, congela num modelo material, construído com a ajuda de círculos e de regras sobre as quais se deslocam os pontos materiais. Depois assinala uma série de aplicações possíveis na arquitetura, na pintura, na gravura, etc.

Tudo isso faz com que a geometria, para Dürer, seja o fundamento de toda pintura. Muito mais, que a aprendizagem, a assimilação e a elaboração de conhecimentos matemáticos passam, necessariamente, pelo olho e pela mão, fazendo da geometria uma propedêutica à pintura. Segundo Peiffer (2000),

> “(...) a geometria de Dürer não é demonstrativa, sua estrutura não é dedutiva e a ordem de exposição nem sempre parece coerente aos olhos de um matemático. Mas, tampouco, é uma simples compilação, nem uma geometria prática (...). A geometria de Dürer é construtiva e exata, no sentido em que persegue a construção a partir de regras, exata, aproximativa, de todas as formas naturais, animais ou vegetais, ou de artefatos, por exemplo, das cônicas, utilizadas na arte e na arquitetura de sua época. (p.117)

Em particular, acerca da repercussão da obra de Dürer, como artista, para a matemática, a geometria, destaca-se uma tradução latina, efetuada por um humanista filólogo, que pode, talvez, ter facilitado sua entrada no mundo científico, e até mesmo nas Universidades enquanto livro para ensinar. No entanto, não se poderia, sem um estudo mais aprofundado, garantir que o livro de Dürer teria sido utilizado por professores, sendo seu conteúdo objeto de ensino de geometria nas universidades alemãs, por exemplo.

Por fim, o que nos vale notar é o modo como o tema obsessivo acerca da utilidade do livro para a aprendizagem de jovens artistas fez com que Dürer criasse uma forma própria de expor e de se fazer compreendido. Assim, não só se destaca a importância desta obra como fundamento para a geometria descritiva, demonstrativa e para a arte da medida, mas como possibilidade de alcance educacional instaurando uma aprendizagem matemática pelos jovens artistas alemães do século XVI.

Referências

- DÜRER, A. Underweysund der messung..., Nurembergue, 1525. Alberto Durero, De la Medida.. Edição de Jeanne Peiffer. Tradução do texto original alemão por Jesús Espino Nuno. Editiciones Akal, S. A.: Madrid, Espanha, 2000.
- FLACON, A; TATON, R. La Perspective. 6 ed. Paris: PUF, 1994.
- HAMOU, P. La Vision Perspective (1435-1740). Paris: Payot & Rivages, 1995.
- PEIFFER, J. Durero Geômetra. Alberto Durero, De la Medida. Editiciones Akal, S. A.: Madrid, Espanha, 2000.
- SUÁREZ, C. A. C. et al. La Geometria de Alberto Durero. Estúdio y modelación de sus construcciones. Bogotá: Fundación Universidad de Bogotá Jorge Tadeo Lozano, 2006.
- TATON, R. Le Problème historique des rappts entre perspective et géométrie. In Destin de l´Art, desseins de la Science. Actes du Colloque A.D.E. R.H.E.M. Université de Caen, 1986, p.129-39.

UNIÓN
REVISTA IBEROAMERICANA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA

Septiembre de 2007, Número 11, páginas 189-195
ISSN: 1815-0640

¡¡Esto no es serio!!

José Muñoz Santoja

Las Otras Efemérides

Nota del autor:

Desde el principio de esta sección hemos animado a nuestros lectores, suponiendo que haya alguno, a que participen con nosotros mandando sus ideas u otros elementos que hayan recogido por ahí y que se puedan incluir en esta sección de la revista. Por eso, normalmente procuramos no agotar un tema a fin de que podamos retomarlo en cualquier momento según las aportaciones recibidas. Esto fue lo que hicimos en la entrega del número pasado de UNION y vamos a continuar en esta ocasión. Este trimestre vamos a retomar las elucubraciones del artículo publicado en el número 8 de UNION con el título de Las Otras Efemérides. Como en aquella ocasión, hemos solicitado ayuda a los amigos para que nos ilustraran algunas de las ideas que teníamos in mente, y que mejoraran estéticamente los textos incluidos. Así, mi excompañero y amigo Antonio de Castro Jiménez, que recientemente ha pasado a mejor vida (se ha jubilado antes del verano) nos ha hecho unas preciosas ilustraciones a color. También Samuel Rebollo, que actualmente estudia Ingeniería Informática, pero que fue alumno mío de bachillerato, ha creado varias imágenes que complementan los textos.

Pudo suceder,

TAL DÍA COMO HOY

La historia nos habla de cosas que fueron muy importantes para la sociedad en las mismas fechas en la que nosotros vivimos, pero en años pasados. Grandes inventos, catástrofes naturales, acciones heroicas, etc. Sin embargo, a muchas personas famosas les ocurrieron en su momento sucesos importantes que pasaron desapercibidos, porque más adelante les ocurrieron cosas aún más importantes. En esta sección queremos reseñar algunos de esos momentos que no han pasado a la historia, pero sin los cuales muchas de las personas que aquí aparecen quizás no hubiesen llegado a ser famosas.

José Muñoz Santoja

A diferencia de la entrega anterior, en esta vamos a añadir no sólo a matemáticos (aunque serán la mayoría) pues aunque es una materia imprescindible para la vida que nos rodea, a veces también uno se hace famoso si no se es matemático.

540 a.C. El conocido filósofo Zenón de Elea, es pillado copiando en un examen de Cálculo Integral y, lógicamente, suspendido. Esto significará para él tal trauma, que años después crearía sus famosas Paradojas en colaboración con Aquiles, tortugas, flechas y multitud de perversos elementos, con el único fin de volver loco a su profesor de Matemáticas. Hay que añadir que lo consiguió.

510 a.C. Pitágoras sufre una indigestión de habas que le lleva a coger una tremenda aversión a dicho comestible, lo que años más tarde le provocará la muerte pues, según la leyenda, al ser perseguido por una horda furibunda no quiso esconderse en un campo de dicho vegetal, siendo alcanzado con nefastas consecuencias. Por cabezón.

José Muñoz Santoja

490 a. C. El griego Cotillágoras, alumno de 2º de E.S.O. (Estudios Superiores de Oratoria) en la escuela pitagórica de Metaponto, recibe una tanda de collejas[1] por divulgar, en un ejercicio práctico de oratoria, la demostración del Teorema de Pitágoras a personas no pertenecientes a la escuela. Esta fea manía de contar más de la cuenta no le desaparecería con el tiempo y así, años más tarde, daría a la luz pública el descubrimiento de los números irracionales. Su castigo no fue sólo perecer en un naufragio, no se sabe si "ayudado" por algún compañero de la escuela pitagórica, sino que su nombre desapareciera prácticamente de la historia.

60 a.C. La futura reina de Egipto, Cleopatra, visita por primera vez un zoológico quedándose maravillada por la gran colección de serpientes. Tan contenta quedó con su descubrimiento que se empeñó en que su padre le comprara una serpiente. Así comenzó una amplia colección personal de reptiles, a pesar de que su padre le advirtió de que esa afición le haría acabar mal. Y no se equivocaba, ya que según la leyenda se suicidó con la mordedura de una venenosa áspid.

[1] Coscorrones, cocachos, etc.

José Muñoz Santoja

1198. Con el fin de realizar un estudio práctico de su famosa sucesión, el matemático Leonardo de Pisa (más conocido por Fibonacci) adquiere una pareja fértil de conejos. Dos años más tarde es obligado por su mujer a abandonar su casa junto con varios cientos de voraces animalitos.

1487. El hijo de Johan Gutemberg le quema a su padre el mejor ejemplar de la Biblia que tenía en su biblioteca. Tras pedir una nueva copia y enterarse de que tardarían como mínimo diez años en hacerle una reproducción tan primorosa como la que tenía, decide investigar para encontrar una solución al problema del tiempo que se tardaría en hacer una copia manuscrita fidedigna de un libro importante. Cinco años más tarde inventaría la imprenta.

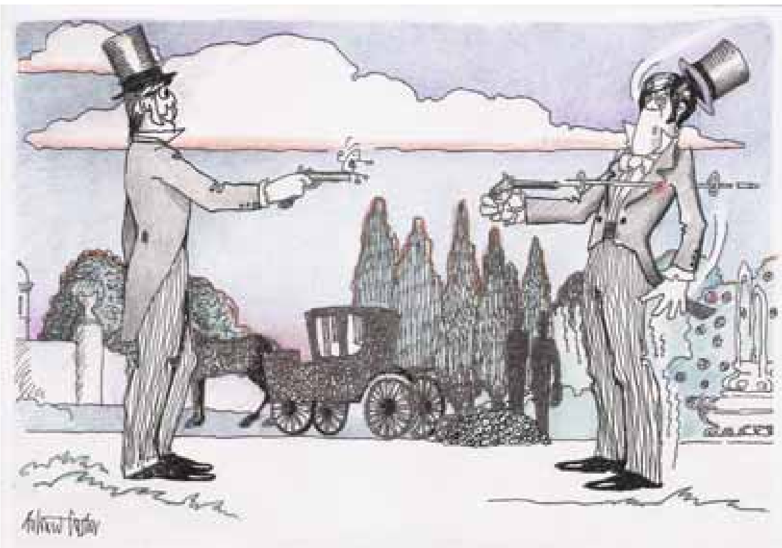
1567. El genial escritor Cervantes, se da un corte en la mano derecha mientras cortaba jamón con un cuchillo no muy bien afilado. Esta herida, que no fue bien curada, ya que la medicina de la época dejaba bastante que desear, se le gangrenó y le hizo perder la mano. Años más tarde, ya famoso debido a su obra cumbre El Quijote, inventaría otro hecho más glorioso para explicar tal suceso con el fin de hacer la historia de su vida más interesante.

José Muñoz Santoja

1602. El tierno infante Renatito Descartes es un gran aficionado a entretenerse con sus barcos de juguetes, algo que no es raro en los niños que serán grandes matemáticos (véanse las otras efemérides del número 8 de UNION). Sin embargo como su ciudad natal es muy lluviosa, durante muchas semanas no puede salir a disfrutar de su afición en el lago cercano, lo que le apena bastante. Años más tarde, al idear un juego que recree esa afición y que pueda jugarse en interior, inventa el sistema de ejes de coordenadas, paso indispensable para la invención del juego de los barquitos.

1785. El insigne estratega y emperador Napoleón Bonaparte, quizás pensando en sus futuras conquistas, pasa el verano en una playa de la costa andaluza que, en vez de tener la bandera azul[2], tenía más bien asignada la bandera marrón, debido a las pésimas condiciones higiénicas y sanitarias. Como resultado del baño en esas aguas, adquiere una infección en la piel que le dura hasta su muerte. Esta es la causa de su profunda tirria hacia España. Otra consecuencia de esa dichosa infección era que sentía constantes picores en el abdomen, lo que le obligaba a estar constantemente rascándose. De ahí la imagen habitual que nos ha llegado de Napoleón siempre con la mano dentro de la chaqueta.

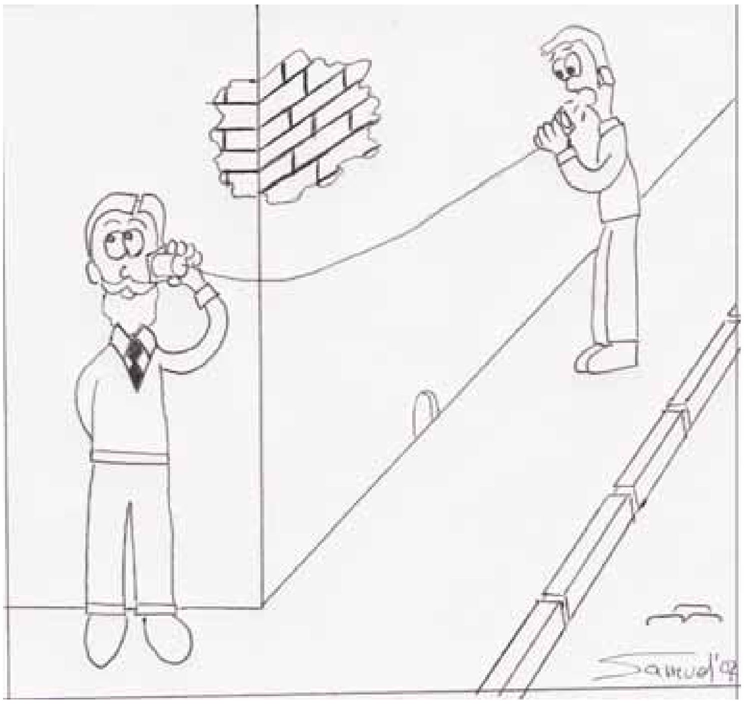
1778. Gauss deduce por sus propios méritos que dos y dos son cuatro. Posteriormente, y con el fin de poder ampliar su capacidad de cálculo, decide no volver a chuparse el dedo gordo del pie derecho mientras esté en la cuna.



1830. Evaristo Galois es favorecido en un sorteo con un cursillo gratuito de tiro con pistola de duelo, que sin embargo rechaza. Dos años más tarde, se vería lo imprudente de su decisión cuando muere en un duelo de honor debido a una infame coqueta.

[2] La bandera azul la concede la Comunidad Europea a aquellas playas que están en perfectas condiciones para el baño.

1881. Tres años después de fundar la Bell Telephone Company, el inventor del teléfono, Alexander Graham Bell, está totalmente arruinado debido a que su mujer se lleva todo el día enganchada al aparato hablando con amigas y familiares de todo el país.



1894. El conocido inventor de la radio, Gughielmo Marconi, comienza con las pruebas de su futuro invento. En este año consiguió mandar una señal desde su jardín a un receptor situado en el otro lado de la calle. La magnitud del momento se vio empañada cuando desde el otro lado le contestaron a viva voz sin necesidad de receptor ni inventos.

Para terminar la sección por hoy, quiero incluir un chiste que trata también sobre el tema de este número. El dibujo lo he recuperado de un número antiguo de la revista *El Jueves*, la mejor (en mi opinión) y más longeva revista de humor de España y que actualmente está en candelero al haber sido secuestrada judicialmente por una portada *real*. El chiste es de un dibujante ya fallecido, Jaume Perich, que a veces incluía matemáticas en sus dibujos y frases. Actualmente preparo una entrega de trabajos de “el Perich” para dentro de dos números de la revista UNION.

UNIÓN
REVISTA IBEROAMERICANA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA

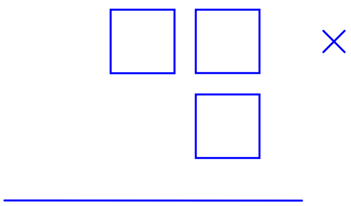
Septiembre de 2007, Número 11, páginas 197-204
ISSN: 1815-0640

El rincón de los problemas

Uldarico Malaspina Jurado
Pontificia Universidad Católica del Perú
umalasp@pucp.edu.pe

Problema

Juan escribió en la pizarra los números 2, 5, 6 y 3. Escoge tres de estos números, que sean diferentes entre sí, y escríbelos en las siguientes casillas, de modo que el producto de los números sea el mayor posible



Este es un problema que puede ser abordado por alumnos de primaria que ya sepan multiplicar números de dos dígitos por otro de un dígito. Plantea una situación sencilla de búsqueda de un valor óptimo, ofrece interesantes posibilidades de explotarlo didáctica y matemáticamente, y hace más entretenido el ejercicio de multiplicar, al hacer varias multiplicaciones en el marco de un desafío alcanzable o tratar de hacer el menor número posible de cálculos buscando una racionalidad para obtener lo pedido. Presentamos una experiencia didáctica en el nivel de educación primaria y hacemos algunos análisis – primero para este nivel y luego para niveles más avanzados – usando criterios del enfoque ontosemiótico del conocimiento y la instrucción matemática que se viene desarrollando por Juan Godino, Vicenç Font y otros investigadores[*].

[*] Ver, por ejemplo:
Godino, J. D., Font, V. y Wilhelmi, M. R. (2006). Análisis ontosemiótico de una lección sobre la suma y la resta, *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa (RELIME),* Vol. Especial, 131-155.
Un artículo que muestra relaciones con otros enfoques didácticos, se encuentra en:
Godino, J. D., Font, V., Contreras, A. y Wilhelmi, M.R. (2006). Una visión de la didáctica francesa desde el enfoque ontosemiótico de la cognición e instrucción matemática. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa (RELIME) 9*(1), 117-150.

Una experiencia didáctica

A manera de ilustración, comento la experiencia tenida al pedirle a David, de11 años y cursando el quinto grado de primaria, que resuelva este problema.

Es pertinente mencionar que en el enunciado que tenía la hoja que se le entregó a David, no decía explícitamente que los números que escoja tenían que ser diferentes entre sí. David escogió el número 6, lo escribió en todas las casillas y efectuó la multiplicación.

Estrictamente, su solución es correcta y revela el criterio intuitivo de usar el máximo de un conjunto finito de números para la obtención de otro máximo. David encontró el mayor número que se puede obtener efectuando una multiplicación de un número de dos dígitos por otro de un dígito, escogiendo los dígitos del conjunto $\{2,\ 5,\ 6,\ 3\}$.

A David se le pidió que continúe trabajando con el problema, pero ahora escribiendo tres números diferentes en las casillas y escogiendo tales números de los que escribió Juan en la pizarra, que son el 2, el 5, el 6 y el 3

David efectuó diecisiete multiplicaciones y su conclusión fue:

$$\begin{array}{r} \boxed{5}\ \boxed{3}\ \text{X} \\ \boxed{6}\phantom{\ \text{X}} \\ \hline 3\ 1\ 8\phantom{\ \text{X}} \end{array}$$

Su respuesta es correcta y al preguntársele si estaba seguro, respondió que sí. Al preguntársele por qué, respondió que ya no se puede conseguir otro número más grande.

Cuando se le propuso el problema, cambiando el conjunto de números a escoger por $\{3,\ 5,\ 7,\ 4\}$, David efectuó sólo seis multiplicaciones y su conclusión fue:

$$\begin{array}{ccc} \boxed{7} & \boxed{4} & \times \\ & \boxed{5} & \\ \hline 3\;\;7 & 0 & \end{array}$$

El máximo buscado es 378 (54 x 7) y vemos que David obtuvo el producto más próximo a tal máximo. Cabe anotar que cuando propusimos este problema a varios estudiantes universitarios y a algunos profesores, 370 es el producto que inicialmente consideraron como el máximo. Parece que una primera aproximación intuitiva a la solución del problema, lleva a considerar que el máximo se obtendrá poniendo el dígito mayor en el lugar de las decenas.

Al percibir que David estaba mostrando una capacidad intuitiva de encontrar un valor óptimo en este contexto aritmético, le pedimos que escoja los números, siempre diferentes entre sí, del mismo conjunto $\{3,\ 5,\ 7,\ 4\}$ y que los escriba en las casillas, de modo que al efectuar el producto indicado el resultado sea el número ***menor*** posible.

David efectuó cinco multiplicaciones, tres de ellas considerando al 3 como factor de un solo dígito (en las otras dos consideró el número 5) y ninguna de las cinco considerando al 7 en el lugar de las decenas. Dio como solución:

$$\begin{array}{ccc} \boxed{4} & \boxed{5} & \times \\ & \boxed{3} & \\ \hline 1\;\;3 & 5 & \end{array}$$

Es la solución correcta y podríamos afirmar que David ha ido desarrollando una “intuición optimizadora” para resolver las dificultades planteadas.

Uno de los aportes concretos de David es que en el enunciado del problema ahora se diga explícitamente que los números que se escojan sean diferentes entre sí o no.

Una mirada más sistemática

Resulta interesante examinar la solución del problema inicialmente planteado, considerando elementos del enfoque ontosemiótico del conocimiento y la instrucción matemática. Un importante instrumento de análisis en tal enfoque es la noción de *configuración epistémica.* Para resolver un problema la persona necesita una serie de conocimientos (conceptos, propiedades y procedimientos) tiene que utilizar representaciones (lenguaje) y tiene que hacer algún tipo de argumentación. También podemos considerar que tiene unas *capacidades y habilidades* de tipo general*.* La unidad formada por la situación-problema, el lenguaje, los conceptos, las proposiciones, los procedimientos y las argumentaciones que son necesarios para su resolución recibe el nombre de *configuración epistémica* si adoptamos un punto de vista institucional o referencial y de *configuración cognitiva* si adoptamos un punto de vista *personal*. El análisis de dichas configuraciones nos informa de la “anatomía de la actividad matemática”. Si además de la “estructura” interesa analizar su “funcionamiento” con alumnos, son necesarias otras herramientas, en especial los procesos asociados.

Una situación-problema podría resolverse por diferentes métodos, y así podría formar parte de dos o más configuraciones epistémicas/cognitivas diferentes que, a su vez, pueden formar parte de bloques matemáticos muy diferentes (por ejemplo geometría y álgebra)

Una de las ventajas de tener una configuración epistémica institucional es que tenemos una referencia para valorar la configuración cognitiva personal que ha utilizado el alumno en su resolución del problema.

En este marco, resumido muy brevemente, pasemos ahora a examinar soluciones del problema propuesto. Haremos una primera configuración epistémica institucional teniendo en cuenta el uso del problema con alumnos de primaria, y luego la configuración cognitiva de la solución de David.

Consideremos una solución con la siguiente pauta:

Observar que para obtener el producto máximo, usando sólo tres de los cuatro dígitos dados, no será necesario usar el dígito 2.

Escribir las seis maneras posibles de ubicar en las casillas los dígitos 3, 5 y 6. Efectuar las multiplicaciones y escoger el mayor de los productos obtenidos.

Configuración epistémica:

Lenguaje: números, multiplicación, producto, mayor, menor.

Situación-Problema: Búsqueda de un valor máximo en un problema intramatemático, de contexto aritmético.

Conceptos: Multiplicación, producto, relación de orden entre números naturales, numeración posicional, decenas y unidades.

Proposiciones: Dados los dígitos positivos *a*, *b* y *c*, si en el producto $\overline{ab} \times c$ se reemplaza cualquier dígito por un número positivo menor que los tres, el nuevo producto siempre es menor que $\overline{ab} \times c$.

Propiedad transitiva de la relación de orden.

Procedimientos: Comparar números naturales. Seleccionar los casos relevantes. Efectuar las multiplicaciones en tales casos. Comparar los productos obtenidos y escoger el máximo.

Argumentos: Cuanto mayores sean los dígitos de los factores de un producto, mayor será el producto que se pueda obtener. Verificación empírica.

Hagamos ahora la *configuración cognitiva* de la solución de David.

Lenguaje: números, producto, multiplicación, mayor, menor

Situación - Problema: Encontrar el mayor producto efectuando multiplicaciones de números de dos dígitos por un número de un dígito.

Conceptos: multiplicación, producto, relación de orden entre números naturales.

Proposiciones: Si *a*, *b* y *c* son números naturales, tales que $a < b$ y $b < c$, entonces $a < c$.

Procedimientos: Comparación de números naturales. David advierte que usando el mayor de los números dados en todas las casillas obtendrá el mayor producto que se puede obtener multiplicando números de dos dígitos y un dígito. Con dígitos diferentes para cada casilla, David hace inicialmente multiplicaciones al azar, y va descartando las que le dan un número menor que otro producto. Luego advierte que es mejor usar los dígitos mayores.

Argumentos: Cuanto mayores sean los dígitos de los factores de un producto, mayor será el producto que se pueda obtener. Verificación empírica.

Podemos observar que la diferencia fundamental con la configuración epistémica tomada como referencia, está en los procedimientos, pues David no inicia sus cálculos descartando el número 2, por ser el menor de los dígitos dados y tener que escoger sólo tres; sin embargo, una aproximación a esta manera de resolver un problema como éste se percibe en la solución de David al problema de encontrar el producto mínimo, pues usa muy poco el 7 (que es el mayor de los dados en ese problema) y cuando lo usa, no lo ubica en el lugar de las decenas.

Descartar el menor de los números dados supone intuir la proposición dada en la configuración epistémica y nos sugiere la posibilidad de proponer ejercicios previos que faciliten esta intuición, o proponer el problema considerando como paso previo uno que haga pensar al alumno cuál de los números dados no usaría en sus cálculos para buscar el producto máximo.

La proposición aludida y explicitada en la configuración epistémica que hicimos de este problema, es una formalización y generalización de la acción intuitiva de descartar el número 2 por ser el menor de los cuatro dados. Es ilustrativo demostrar que la proposición es verdadera, como una manera de hacer evidente la relación entre intuición y formalización en la actividad matemática.

<u>Proposición</u>: Dados los dígitos positivos a, b y c, si en el producto $\overline{ab} \times c$ se reemplaza cualquier dígito por un número positivo menor que los tres, el nuevo producto siempre es menor que $\overline{ab} \times c$.

<u>Demostración</u>: Sea $h <$ mín $\{a, b, c\}$.

$\overline{ab} \times c > \overline{hb} \times c$, pues $\overline{ab} > \overline{hb}$

$\overline{ab} \times c > \overline{ah} \times c$, pues $\overline{ab} > \overline{ah}$

$\overline{ab} \times c > \overline{ab} \times h$, pues $c > h$.

Para otros niveles

Otra solución referencial y su configuración epistémica, considerando la aplicación del problema a estudiantes de secundaria o post secundaria, sería siguiendo la pauta que describimos a continuación, observada en algunos casos que el problema fue propuesto a estudiantes universitarios y a profesores:

Descartar el uso del número 2.

Siendo 6 y 5 los dígitos dados más altos, examinar las dos posibilidades de obtener en el producto un número que tenga más de 6x5 decenas:

$$\begin{array}{r} 63 \times \\ \underline{\quad 5} \\ 315 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 53 \times \\ \underline{\quad 6} \\ 318 \end{array}$$

Descartar 63 x 5 y concluir que el máximo buscado es 318, obtenido como producto de 53 y 6. (Observar que en 63 x 5 hay 30 decenas más 15 unidades y en 53 x 6 hay 30 decenas más 18 unidades.)

Configuración epistémica:

El *lenguaje, la situación–problema*, los *conceptos* y el *procedimiento* general son los mismos que los explicitados en la configuración epistémica anterior.

Veamos los otros dos objetos matemáticos restantes:

Proposiciones: Dados los dígitos positivos a, b y c, si en el producto $\overline{ab} \times c$ se reemplaza cualquier dígito por un número positivo menor que los tres, el nuevo producto siempre es menor que $\overline{ab} \times c$.

Dados los dígitos positivos a, b y c, tales que $a < b < c$, el mayor número que se puede obtener como producto de un número con dos de estos dígitos y otro de uno de estos dígitos, es un número que tenga por lo menos $b \times c$ decenas.

(Dejamos como ejercicio para el lector la demostración de esta proposición)

Propiedad transitiva de la relación de orden.

Argumentos:

Cuanto mayores sean los dígitos de los factores de un producto, mayor será el producto que se pueda obtener.

Los casos más relevantes corresponden a la obtención del mayor número de decenas.

Verificación empírica.

Esta configuración epistémica, nos abre otras posibilidades para proponer y orientar ejercicios, problemas, juegos y demostraciones previos y posteriores al trabajo con el problema presentado. Un juego atractivo puede ser pedir a un grupo de estudiantes que resuelva el problema, estableciendo que el ganador será el que encuentre el número máximo con el menor número de multiplicaciones y justifique su procedimiento.

El enfoque ontosemiótico propone que las entidades matemáticas pueden ser consideradas desde diversas facetas o dimensiones duales y una de ellas es la dualidad entre ejemplar y tipo, en la cual se refiere a una de las actividades fundamentales de la matemática, que es la generalización. Ya ha estado presente esta dualidad en las configuraciones epistémicas realizadas, pues a partir del caso concreto se ha construido proposiciones generales, pero es enriquecedor mostrar algunas otras posibilidades de generalización del problema presentado y proponerlo – inclusive en un contexto lúdico – por ejemplo en cursos de formación o de capacitación de profesores. A continuación dos posibilidades:

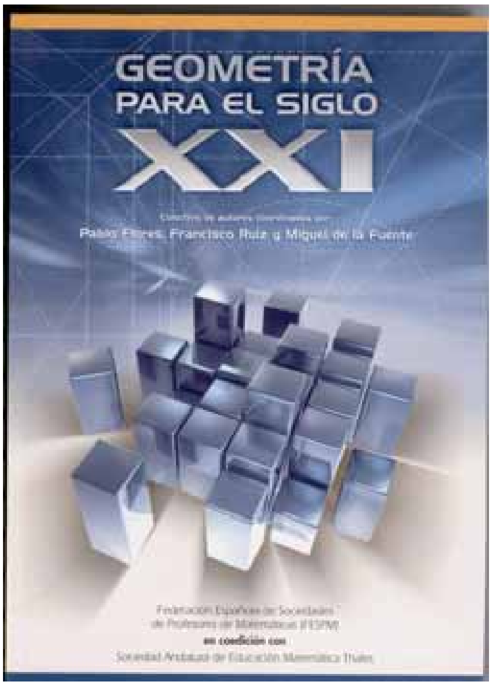
a) Juan dice que es capaz de resolver el problema propuesto sin necesidad de hacer multiplicación alguna. ¿Es esto posible? ¿Cuál podría ser el procedimiento de Juan? ¿Cómo se puede justificar?
b) María propone otro desafío: Escribe en la pizarra cinco dígitos positivos a, b, c, d y e tales que $a < b < c < d < e$ y pide elegir tres de esos dígitos, diferentes entre sí, para formar el multiplicando, y otro más para formar el multiplicador, de manera que el producto sea el menor posible.

Invitamos al lector a justificar un procedimiento para elegir y ubicar los dígitos.

UNIÓN
REVISTA IBEROAMERICANA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA

Libros

Septiembre de 2007, Número 11, páginas 205-209
ISSN: 1815-0640



Geometría para el siglo XXI

Autores: Colectivo de autores (Ángel Gutiérrez Rodríguez; Damián Aranda Ballesteros; Claudi Alsina; Francisco Ruiz López y Luís Rico Romero; Rafael Pérez Gómez; Maria Ángeles Benítez y Flores Serrano; Ricardo Barroso y José Maria Gavilán y Pablo Flores) coordinados por Pablo Flores, Francisco Ruiz y Miguel de la Fuente.

Edita: Federación Española de Sociedades de Profesores de Matemáticas en coedición con la Sociedad Andaluza de Educación Matemática Thales

Año: 2006

248 páginas

La Sociedad Andaluza de Educación Matemática (S. A. E. M.) ha comprendido la necesidad de ofrecer al profesorado una serie de libros, con carácter periódico, que aporte un "*estado de la cuestión*" sobre tópicos importantes de la Educación Matemática. El primer paso está ya realizado, con la publicación de **Geometría para el siglo XX**I, esperamos que siga en este camino y que la Federación siga apoyando estas iniciativas.

Como escribe Antonio Marín en la Introducción: "*A nadie se le esconde que hoy la Geometría es un pariente pobre de la educación matemática obligatoria y, a la vez, está incorporando en su haber nuevos y poderosos instrumentos para su enseñanza. Las nuevas tecnologías han abierto un camino de aplicaciones muy potente y, a su vez, están permitiendo que el estudiantado se sienta más cómodo al representar o razonar con herramientas casi instantáneas. Esta situación plantea nuevos problemas educativos a cuya solución pretende contribuir este material.*"

El libro se compone de tres partes perfectamente diferenciadas. La denominada **PARTE 1: Elementos teóricos** se compone de dos capítulos, Ángel Gutiérrez Rodríguez (Universidad de Valencia) nos presenta: **La investigación sobre enseñanza y aprendizaje de la geometría**, en el que se presenta: distintas secciones dedicadas a temas importantes en los que se investiga actualmente, resultados destacados de las investigaciones, los marcos teóricos utilizados y los problemas de investigación abiertos. En la primera de las secciones describe *el modelo de razonamiento* matemático de los esposos holandeses *Van Hiele*, sin duda el marco teórico predominante, actualmente, para organizar la enseñanza de la geometría. En la segunda sección, denominada: *la enseñanza de geometría en micromundos informáticos*, aborda la enseñanza de la geometría con la ayuda de ordenadores y software específico, que ha supuesto, en los últimos años, la aparición de nuevas estrategias de enseñanza y de organización de las clases, desde el popular y potente lenguaje de programación Logo o el Cabri que le saca mucho rendimiento a las redes informáticas. En la siguiente sección plantea uno de los temas claves en la enseñanza de las matemáticas en la etapa de la educación secundaria, el aprendizaje del razonamiento abstracto y las demostraciones matemáticas, bajo el título: *Pruebas, justificaciones, demostraciones,...* La cuarta sección, *la visualización en geometría*, tiene como fin reflexionar sobre las estrechas relaciones entre el uso de la visualización (o imaginación) espacial y el aprendizaje de la geometría. Ángel Gutiérrez finaliza describiendo los resultados de algunas investigaciones relacionadas con el aprendizaje de conceptos geométricos elementales estudiados en los niveles de Primaria y Secundaria.

El segundo capítulo lo presenta Damián Aranda Ballesteros (Córdoba) y tiene como título: **La circunferencia: Una revisión epistemológica**. Realiza una *aproximación histórica del uso de la circunferencia*: La circunferencia es la figura más regular de todas las figuras geométricas planas y además de ser uno de los grandes logros de la Humanidad ha cautivado a muchas civilizaciones. Realiza un análisis exhaustivo desde la época de los griegos hasta el siglo XIX. Damián Aranda finaliza con un análisis de las *tipologías de los problemas matemáticos*, y en el caso particular de la circunferencia, y posteriormente desarrolla algunos *métodos geométricos de resolución de problemas, diversos teoremas y problemas sobre la Geometría de la circunferencia (Problema de Apolunio, Problema de Castillón,...)*.

La denominada **PARTE 2: Partes de la Geometría**, se compone de tres capítulos, en el primero de ellos Claudi Alsina (Universidad de Barcelona) nos hace una **Invitación a la tridimensionalidad**, afirmando que recuperar la Geometría es en el fondo recuperar para las aulas el gusto por descubrir el espacio, por vivir la matematización y poder usar diversos modelos matemáticos. Claudi Alsina invita al profesorado a que avance en el reto docente de educar en la tridimensionalidad. Para ello, después de unas breves referencias a los temas básicos de realidad, aspectos históricos y materiales docentes (presenta una propuesta de ocho principios que podrían guiar nuestra labor educativa a cerca de la cultura espacial), enseña los principios que cree debería guiar la transmisión de una cultura espacial, incluyendo una muestra de sorpresas geométricas espaciales y de problemas sugestivos con la esperanza de que captando el interés por el tema, el profesorado, se anime a incorporar elementos de tridimensionalidad en sus clases.

El segundo capítulo, **Un enfoque geométrico para la enseñanza de nociones aritméticas** de Francisco Ruiz López y Luís Rico Romero (Universidad de Granada) presenta una investigación realizada en el campo de la formación inicial de maestros con el propósito de explorar y buscar conexiones entre la enseñanza de las matemáticas y otras disciplinas y más concretamente subrayar las conexiones entre Aritmética y Geometría. Entre los campos relacionados con la educación matemática implicados en este trabajo se destacan, los Sistemas de Representación, la Visualización y las Tablas Numéricas, y más concretamente la Tabla-100 o tabla de los 100 primeros números naturales. Francisco Ruiz y Luís Rico, en la presentación de los resultados de la investigación, han seleccionado tres actividades, organizadas por sesiones, realizadas por los estudiantes que participaron en esta experiencia: *Divisibilidad y operaciones aritméticas en la Tabla-100*, *Divisibilidad y Geoplano* y *Divisibilidad y Geoplano: Fórmula de Pick*, en la que se incluyen los objetivos que se pretende en la sesión, presentación de la tarea tal y como se les planteó al alumnado, además se señalan los criterios para la valoración de las producciones de los alumnos y, finalmente, se presenta y comentan los resultados principales obtenidos.

El último capítulo lo presenta Rafael Pérez Gómez (Universidad de Granada) abordando **La enseñanza de las Matemáticas aplicada a la Arquitectura**. La Escuela de Arquitectura, que es donde trabaja el autor, le ha dado la oportunidad de tener una asignatura optativa en la que puede unir parte de su investigación como matemático con la docencia que en ella desarrolla. Nos presenta los principios generales de la asignatura que aunque se denomine Ampliación de Matemáticas, realmente se hace Matemáticas Aplicada a la Arquitectura, junto con sus contenidos y el programa de prácticas (viajes programados, visitas a la Alambra,...). Además comenta la proyección social del trabajo de sus estudiantes (participación en programas de televisión, publicaciones, exposiciones,...). Plantea el método de evaluación y, Rafael Pérez, como Epílogo nos presenta un trabajo entregado por uno de sus alumnos, que aunque presenta algunos errores se puede observar el modelo y tipo de trabajo del alumnado que se matricula en la mencionada asignatura optativa.

La **PARTE 3: Recursos en Geometría**, se compone también de tres capítulos. En el primero denominado **El entorno y la enseñanza de la Geometría**, de María Ángeles Benítez y Flores Serrano (Córdoba) nos analiza la importancia del uso del entorno como recurso didáctico en la enseñanza de la Geometría, pudiendo enfocarse desde distintos puntos de vista: Problemas en contexto, Modelización y Actividades fuera del Aula. Aseguran que es, sin duda, trabajando fuera del aula (*certámenes de fotografía, certámenes matemáticos, paseos matemáticos por poblaciones, matemáticas en la calle, Gymkhanas matemáticas, visitas a edificios y monumentos,...*) cuando se ponen de manifiesto todo el potencial del entorno como recurso didáctico en la enseñanza de la Geometría. María Ángeles Benítez y Flores Serrano culminan su trabajo presentando una seleccionada serie de problemas propuestos en distintas ediciones de la Gymkhana (problemas en los que se puede ver la vinculación de la Geometría con el arte y el patrimonio así como el soporte geométrico de algunos oficios y tareas; problemas que permiten valorar la estética de los elementos geométricos y comprobar su uso repetido en el arte y en la publicidad; problemas que fomentan el gusto por afrontar retos matemáticos,...)

El segundo capitulo lo desarrollan Ricardo Barroso y José María Gavilán y trata sobre la **Resolución de problemas de Geometría**. Los autores presentan ocho problemas, después de hacer referencias a la diferencia entre resolver o plantear *ejercicios* en clase y resolver o plantear *problemas* en clase, donde muestran en cada uno de ellos una *clasificación de la tarea*, dentro de qué criterio de Polya se encuentra el problema (problemas de rutina – denominados ejercicios –, problemas por resolver y problemas por demostrar); el nivel educativo al que va dirigido (Primaria, Secundaria, Bachillerato o Universidad); la perspectiva geométrica (sintética, analítica, de transformaciones); la dimensión geométrica (plana – 2D –, tridimensional – 3D) y temas matemáticos relacionados (teoría de números, análisis, probabilidad, etc.).

Ricardo Barroso y José María Gavilán hacen un repaso en los ocho problemas presentados a conocidas figuras geométricas: triángulo, cuadrilátero, cubo y tetraedro.

El último capítulo del libro es responsabilidad de Pablo Flores y se denomina **Pirámides rellena de...Pirámides. Puzzles espaciales que favorecen la visualización**.

Se presenta un puzzle de 15 piezas, llamado *Pirámide rellena de pirámides*.

Pablo Flores plasma una serie de propuestas para realizar en clase, con pautas de actuación: *Presentación de la tarea*: ¿Rellena el espacio los tetraedros? o ¿se puede construir un tetraedro más grande con tetraedros idénticos?; J*uego libre con piezas*: usando las piezas de la pirámide de Keops, formar una pirámide cuadrada con todas las piezas del mismo; *Análisis de las piezas del puzzle*: el objetivo es la familiarización con las formas, estudiando las características de las figuras.

El trabajo conjunto de los problemas ligados al puzzle y al modelo geométrico de rellenado resulta acorde con las recomendaciones que se derivan de los artículos de la revista Arithmetic Teacher (nº 6 del volumen 37 de 1990) en los que se aboga por el tratamiento conjunto de la geometría con el *sentido espacial*.

Por último indicar que hay que considerar la amplia bibliografía que ha sido utilizada para la realización de las diferentes colaboraciones por los diferentes autores, cosa que siempre se agradece tener a mano tantas referencias en un solo libro.

Reseña: M. Eloy Morales Santana
I.E.S. La Minilla (Las Palmas de Gran Canaria)
Gran Canaria, España

UNIÓN
REVISTA IBEROAMERICANA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA

Septiembre de 2007, Número 11, páginas 211-219
ISSN: 1815-0640

Coordinado por
Agustín Carrillo de Albornoz

Actividad interactiva en el aula: funciones lineales

Manuel Amaro Parrado

Resumen

Se muestra a continuación una actividad interactiva encaminada a que el alumnado que se inicia en el estudio de funciones observe y entienda las funciones de tipo lineal y su comportamiento a medida que cambian sus parámetros. Se utilizarán para ello varias herramientas de software libre tales como el programa Gnuplot y un java applet.

Abstract

This is an interactive activity directed to that the students that begin in the study of functions observe and understand the functions of linear type and their behavior as they change their parameters. There will be in use for it several such tools of free software as the program Gnuplot and a java applet.

Objetivos de la actividad

-Conocer la función de proporcionalidad y=mx

-Conocer la función y=mx+n

Esta actividad forma parte de la Unidad Didáctica: Funciones y su representación gráfica, cuyos conceptos, procedimientos y actitudes se detallan a continuación:

Núcleo: Funciones y su Representación Gráfica

Unidad didáctica 14: Funciones.

- *Conceptos:*

  - Función. Variable independiente. Variable dependiente.
  - Tabla de valores y ecuación de una función.
  - Gráfica de una función. Ejes de coordenadas. Unidades y escalas.
  - Crecimiento y decrecimiento de una función.
  - Máximos y mínimos relativos.

- Puntos de corte con los ejes.
- Dominio de una función.
- Continuidad y discontinuidad.
- Función lineal o función de proporcionalidad directa. y = mx. Función y=mx+n. Pendiente.

- *Procedimientos:*

  - Identificación de relaciones funcionales en situaciones cotidianas.
  - Reconocimiento de las variables de una función.
  - Descripción de una función mediante un enunciado, una tabla, una ecuación o una gráfica.
  - Diferenciación entre gráficas que representan funciones y otras que no lo hacen.
  - Reconocimiento de la escala utilizada en cada eje en la representación gráfica.
  - Detección de errores en las gráficas (en la elección de la escala) que deforman la información .
  - Construcción de tablas de valores a partir de un enunciado, de la ecuación sencilla de una función o de una gráfica.
  - Construcción de gráficas a partir de tablas de valores.
  - Interpretación de gráficas.
  - Obtención de la tabla de valores, de la ecuación y de la gráfica de una función lineal.

- *Actitudes:*

  - Reconocimiento y valoración de la utilidad de las funciones matemáticas para representar, interpretar y resolver situaciones relacionadas con la vida cotidiana.
  - Actitud crítica hacia las representaciones gráficas incorrectas que deforman la información.
  - Valoración de la presencia de las funciones en las ciencias de la naturaleza, ciencias sociales y entorno cotidiano.
  - Rigor y precisión en la interpretación y representación gráfica de las funciones.
  - Gusto por una presentación limpia y ordenada de tablas y gráficas.

Temporalización: 2 horas

Criterios de Evaluación: Los programas expuestos en esta actividad sólo sirven como apoyo para la comprensión de los conceptos que se intentan instruir. La evaluación será la que corresponda a la unidad correspondiente.

Manuel Amaro Parrado

Programas que se utilizan:

Gnuplot, y un interesante applet java de representación de funciones.

Algo de teoría:

La función de proporcionalidad tiene como ecuación y=mx, y se representa mediante una recta que pasa por el origen (0,0).

A m la llamaremos constante de proporcionalidad (es un número positivo o negativo) o también pendiente de la recta. El término “pendiente” se debe a que, como veremos a continuación, el valor de m tiene mucho que ver con la pendiente o inclinación de la recta.

Ejercicio 1.- *Representa las rectas y=x e y=4x ¿Qué observas? ¿Qué diferencias encuentras entre ellas?*

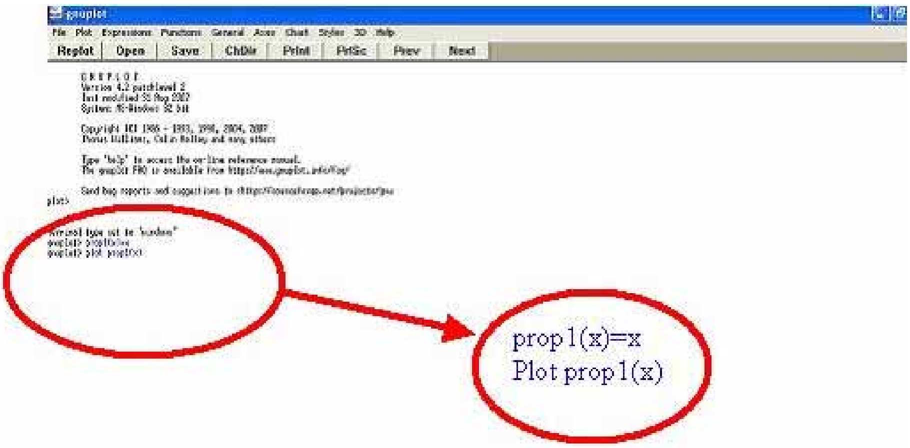
Abrimos **gnuplot** y picamos en Functions-Define User function. Llamamos prop1 a la función y la variable será (x). De esta forma hemos definido una función a la q podemos dar el valor que queramos, y en nuestro caso le damos el valor x.

De forma análoga definiremos prop2(x)=4*x

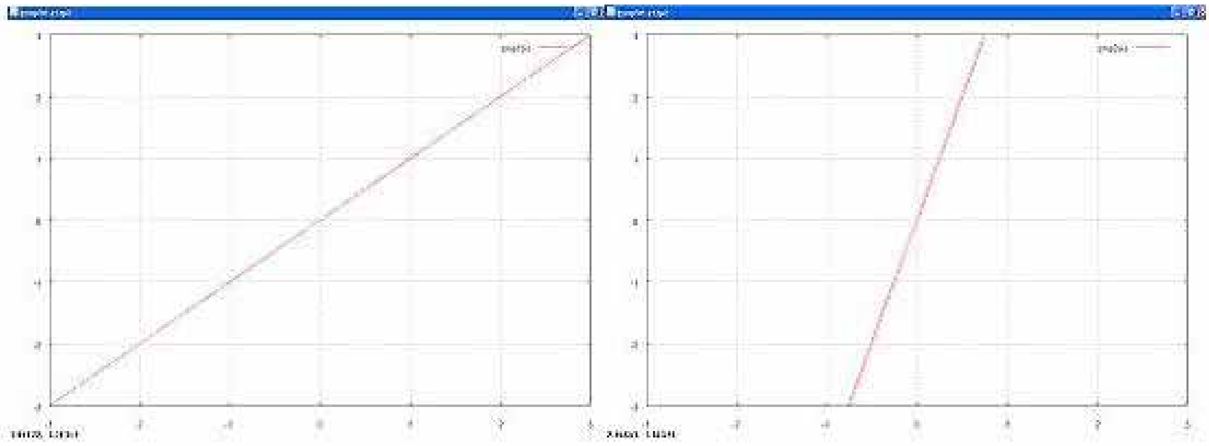
Una vez realizado esto, pasamos a representar las funciones y observar. Si la escala del visor de funciones no es la adecuada, podemos cambiarla en Axes-Xrange o Axes-Yrange.

Para representar las funciones, ejecutamos el comando Plot.

Plot prop1(x)



obtendremos como resultados



A la vista de esto, debe empezar a quedar claro que la pendiente m está relacionada con la inclinación de la función de proporcionalidad.

Ejercicio 2.- *Representa las funciones y = 2x ; y = -2x*

Para realizar esta actividad, vamos a utilizar un **applet**, por tratarse de una herramienta de uso mucho más sencillo para alumnos de este nivel. Entramos en la página:

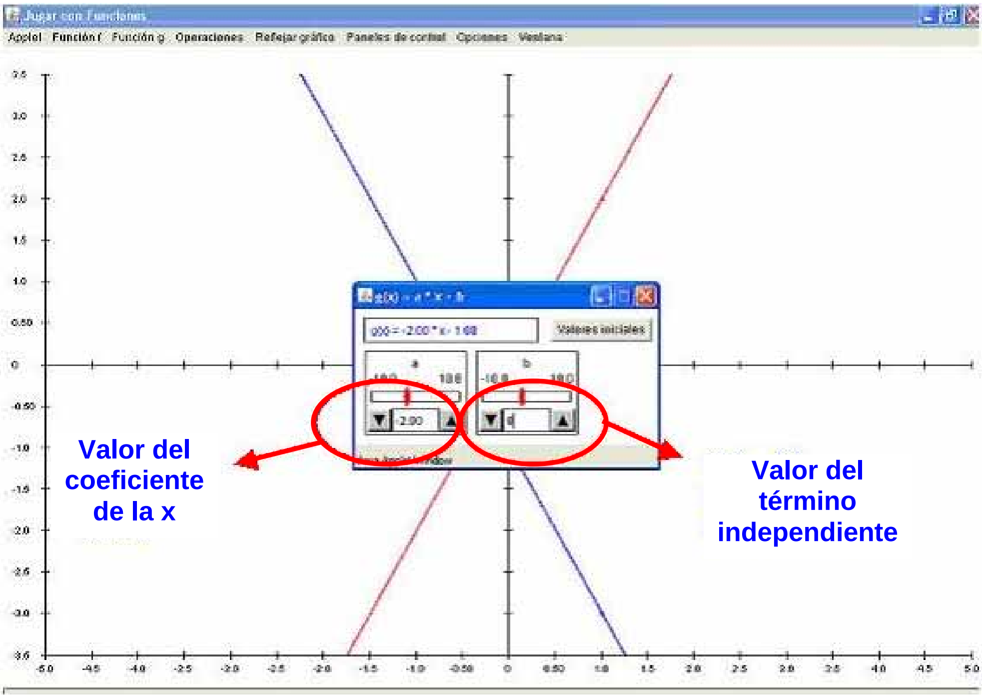
http://www.fi.uu.nl/toepassingen/00167/leerling_es.html

e iniciamos el applet "*jugar con funciones*". Este applet permite representar dos funciones a la vez y compararlas directamente.

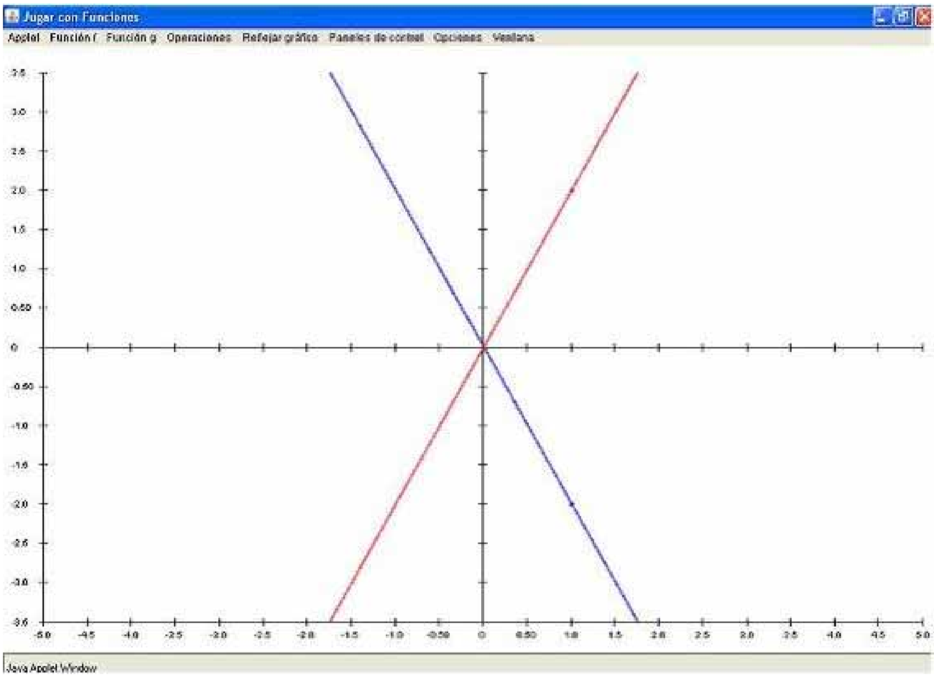
En función f le damos a lineal y nos aparecerá un menú desde el cual podemos introducir los parámetros.

Ponemos y=2x

Picamos en función g, y hacemos lo mismo para la función y=-2x

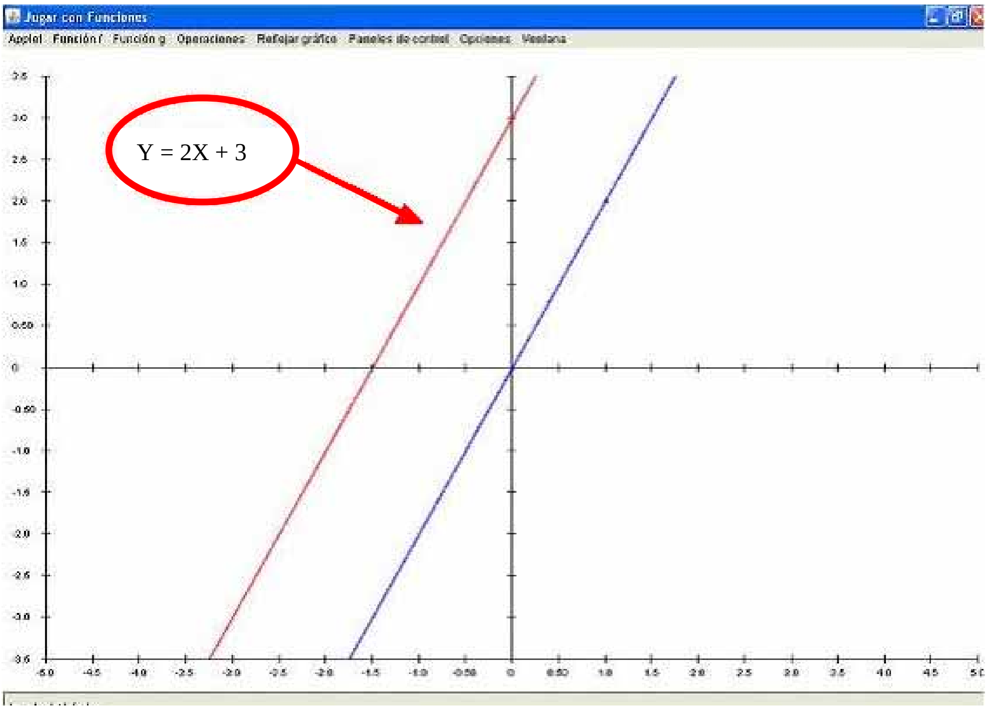


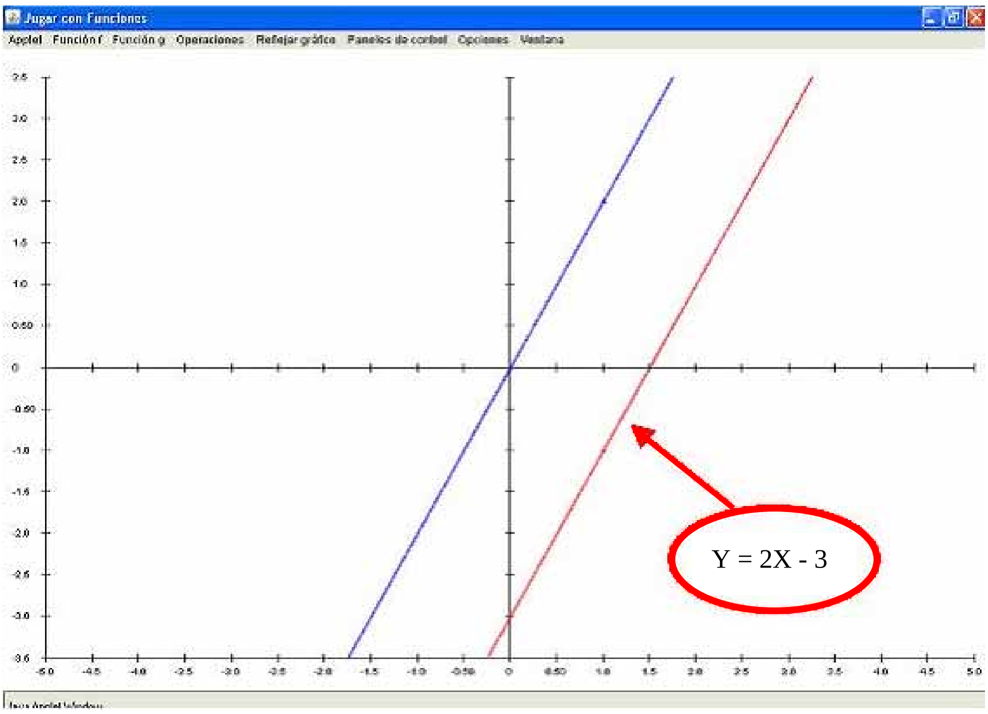
Observamos las dos rectas: y=2x en rojo, y=-2x en azul, y decidimos que el valor m=-2 negativo hace que la función tenga una inclinación “hacia abajo”.



Ejercicio 3.- *Representa las funciones Y=2x e Y=2x+3 y compáralas. Después compara la primera con Y=2x-3 ¿Qué conclusión obtienes? ¿De qué manera influye el término independiente en la función lineal?*

Procediendo igual que antes, tenemos las funciones





Se ve claro que el término independiente produce un desplazamiento vertical de la función de longitud igual al de dicho término.

Ejercicio 4.- *Explora tú mismo cambiando los parámetros de las funciones lineales f y g y explica los resultados.*

Con este ejercicio, se pretende que el alumno se familiarice con el applet y desarrolle el gusto por la investigación.

Otras actividades propuestas relacionadas:

Ejercicio 5.- *Representa las funciones*

a) $Y = x$
b) $Y = -x$
c) $Y = 0$
d) $Y = 5/3\,x$
e) $Y = 0{,}25x$
f) $Y = 3 - 2x$
g) $Y = 3x - 2$
h) $Y = -1{,}5x - 1$
i) $Y = -2$

Ejercicio 6.- *¿Qué recta estará más inclinada, $Y = 0{,}5x$ ó $Y = 3/5x$? Razónalo por ti mismo y después usa el applet para comprobar tu respuesta.*

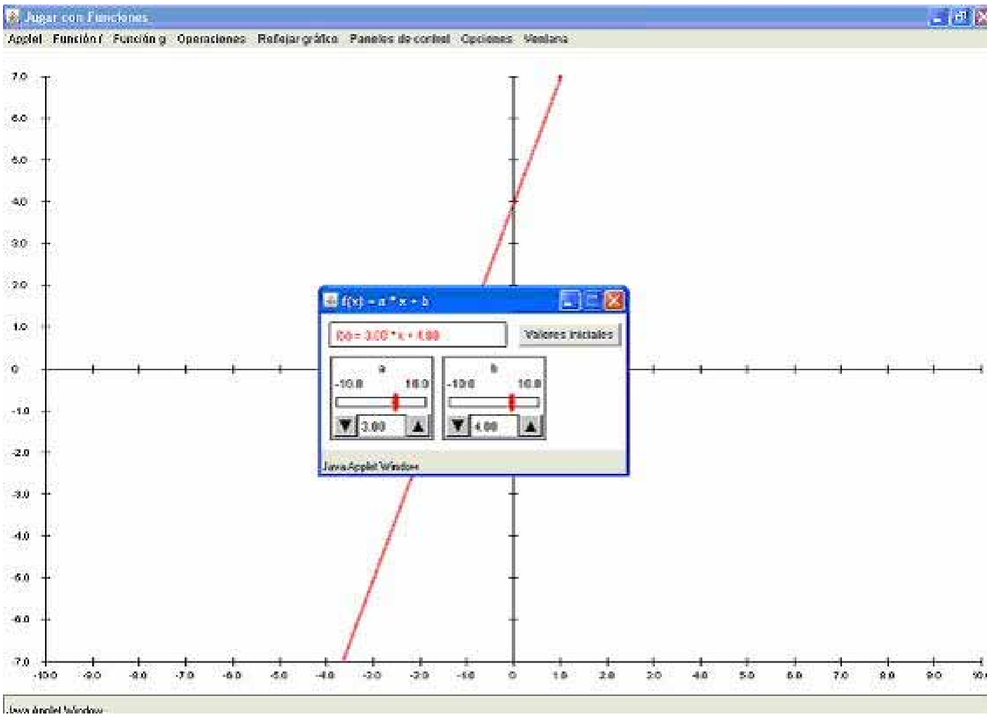
Ejercicio 7.- *Si el ciclista Menchov circula por la recta $Y = 3$, y el ciclista Valverde por la recta $Y = 0{,}1x + 2$, ¿cuál de ellos está realizando un menor esfuerzo?*

Ejercicio 8.- Dada la función $Y = 3x + 4$, obtén una tabla de valores con puntos que pertenezcan a la función.

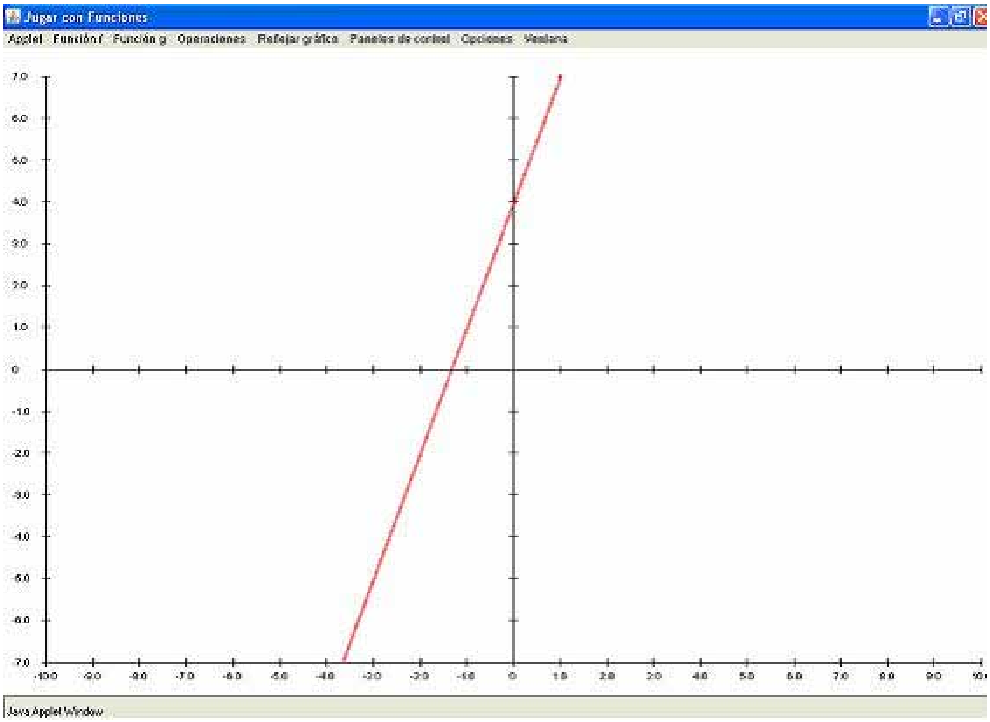
Habitualmente, resolver este ejercicio es tan sencillo como dar valores a la variable independiente x, y obtener su variable dependiente asociada.

En nuestro caso, abriremos de nuevo el applet y usaremos una nueva opción que nos ofrece.

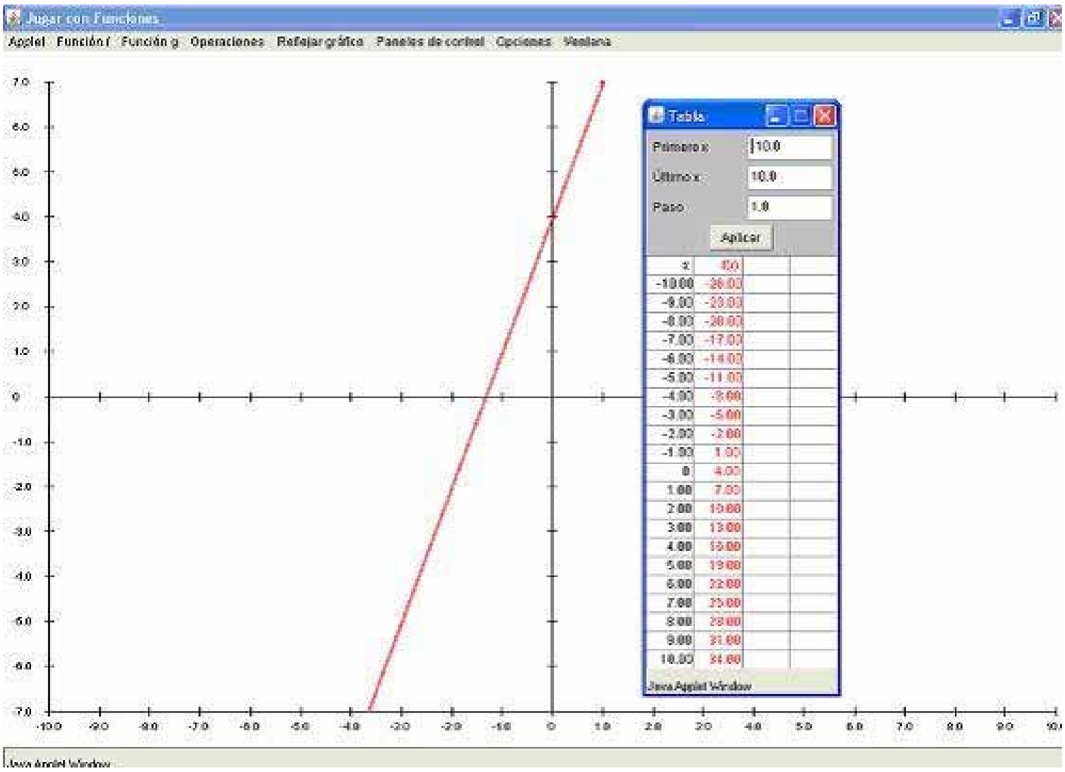
Introducimos los valores 3 para la x, y 4 para el término independiente en nuestro cuadro de diálogo.



Observamos la función obtenida, una recta con pendiente positiva bastante pronunciada y desplazada cuatro unidades hacia arriba respecto del origen.



En la pestaña opciones, marcamos mostrar tabla, y nos ofrece una tabla con los valores de la función:



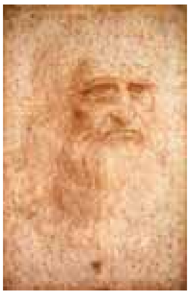
Ejercicio 9.- Obtén una tabla de valores para la función Y = 4 ¿Qué observas de extraño?

Manuel Amaro Parrado (1976, Andujar, España) es Licenciado en Ciencias Matemáticas y en Ciencias y Técnicas Estadísticas por la Universidad de Extremadura. Actualmente es profesor de enseñanza secundaria en el IES Virgen de la Cabeza de Marmolejo (Jaén)

Septiembre de 2007, Número 11, páginas 221 - 224
ISSN: 1815-0640

Por Santiago López Arca

Matemáticas como recurso literario



La lectura es una de las actividades más gratificantes que puede realizar un ser humano. Los libros nos descubren el mundo, nos provocan sensaciones y sentimientos, derriban las fronteras, nos hacen libres…

Muchos libros están directamente relacionados con las matemáticas. Además, las matemáticas son un elemento básico para construir el argumento de muchas obras literarias. En la actualidad, un importante número de *bestsellers* utilizan las matemáticas como recurso literario.

¿Sabrías decir a que obra pertenece el siguiente texto? ¿Cuántos elementos directamente relacionados con las matemáticas puedes detectar en él? ¿Quiénes son los personajes que aparecen representados en esta página?

[…] Llegaron a la salida de emergencia, y Sophie abrió la puerta con mucho cuidado. No sonó ninguna alarma. El sistema sólo se activaba si se abría desde fuera. Guió a Langdon escaleras abajo en dirección a la planta inferior, cada vez más deprisa.

-Su abuelo -se interesó él, intentando seguir su ritmo-, cuando le habló del pentáculo, ¿le mencionó el culto a la diosa o le dio a entender que tuviera algún tipo de resentimiento hacia la Iglesia católica?

Sophie negó con la cabeza,

-A mí me interesaban más sus aspectos matemáticos: la Divina Proporción, el Phi, la Secuencia de Fibonacci, esas cosas.

Langdon se sorprendió.

-¿Su abuelo le hablaba del número Phi?

-Claro. La Divina Proporción. -Sonrió con falsa modestia-. En realidad, muchas veces decía en broma que yo era medio divina... ya sabe, por las letras de mi nombre.

Langdon se quedó un momento pensativo y después masculló algo en señal de asentimiento.

«So-PHI-e.»

Seguían bajando por la escalera, y Langdon se concentró en el Phi. Estaba empezando a darse cuenta de que las pistas de Saunière eran más coherentes de lo que en un principio había supuesto.

«Da Vinci... la serie de Fibonacci... el pentáculo.»

Por increíble que pareciera, todas esas cosas estaban relacionadas mediante una idea tan básica de la historia del arte que Langdon dedicaba muchas clases a exponerla. […]

El Código Da Vinci. Dan Brown. Umbriel.

1.- ¿Qué es una sucesión numérica? ¿Cuándo una sucesión es una progresión aritmética o geométrica?

2.- ¿Qué es una sucesión dada por recurrencia?

3.- Investiga sobre los siguientes temas: Sucesión de Fibonacci, número Phi, Divina proporción.

Santiago López Arca

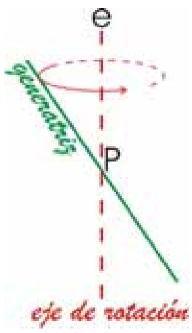
Elipse

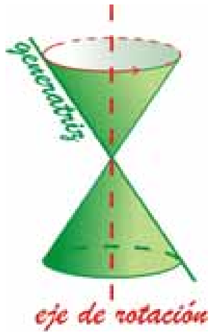
el amor verdadero es una elipse

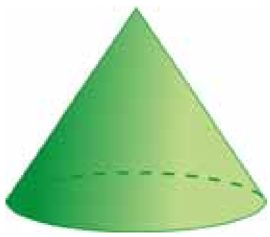
Era un círculo la base del cono
y paralelas todas las secciones.
Contigo en medio y solo,
tú sólo eras el centro.
Entonces yo llego.
A mi manera oblicua,
yo corto tu universo
y te coloco en uno de los focos,
y a mí en el otro.
Desde que entré en tu vida
impuse un nuevo orden,
pero no tengas miedo de nuestra geometría:
sumará una constante la distancia
que a ti y a mí nos separe del borde.

Inés Toledo.

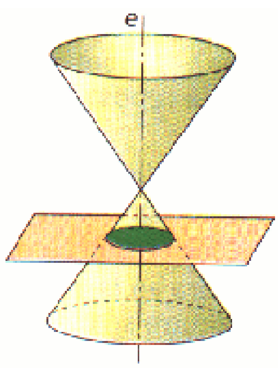
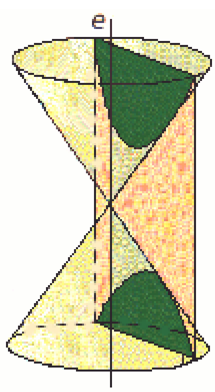
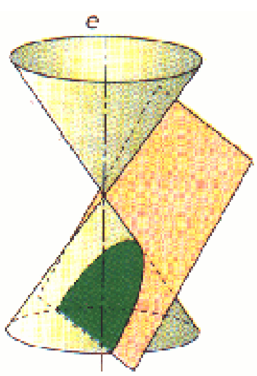
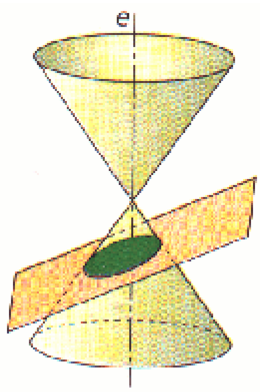
Supongamos *dos rectas* que se cortan en un *punto* P. La *primera recta*, que llamaremos ***e,*** permanecerá fija y la tomamos como ***eje de giro*** para hacer que la otra, la ***generatriz***, gire alrededor de ella. Obtenemos de este modo lo que se denomina una ***superficie cónica de revolución***. A partir de esta superficie, cortándola con un *plano* perpendicular al eje de giro, se obtiene con facilidad un ***cono recto*** (un *cono recto* es un *cuerpo de revolución* que tiene un *círculo* por *base*).







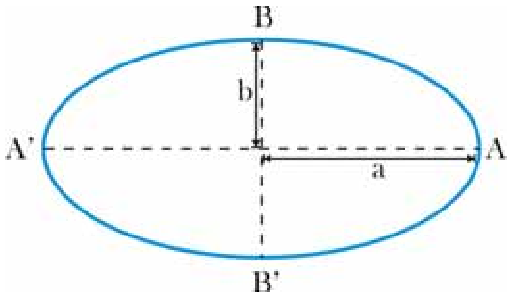
Las curvas cónicas son las secciones producidas por *un plano secante* sobre una *superficie cónica de revolución*.
Dependiendo del ángulo que forme el plano secante con el eje de la superficie cónica, podremos obtener cuatro curvas cónicas diferentes.
Si el plano secante es perpendicular al eje de la superficie cónica, y no pasa por el vértice, obtenemos una ***circunferencia***. Una *circunferencia* es una curva cerrada y plana que se define como el lugar geométrico de los puntos del plano equidistantes de un punto fijo llamado ***centro***. La porción del plano encerrada dentro de una circunferencia, se denomina ***círculo***.

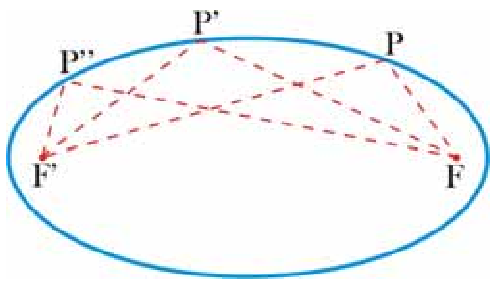
Obtención de las curvas cónicas			
			
circunferencia	*hipérbola*	*parábola*	*elipse*

Cuando el plano secante es paralelo al eje de la superficie cónica, la intersección del plano con la superficie se denomina ***hipérbola***, y es una curva que consta de dos ramas, una en cada una de las “hojas” de la superficie cónica.

Si el plano secante es paralelo la una generatriz de la superficie cónica, la intersección del plano con la superficie determina una curva abierta llamada ***parábola***.

Si el plano secante es ***oblicuo*** al eje de la superficie cónica, corta a todas sus generatrices y no pasa por el vértice, la intersección que se obtiene es una curva que recibe el nombre de ***elipse***.



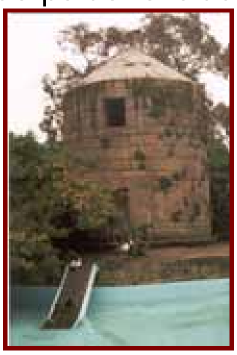


La elipse tiene dos ***ejes de simetría***, AA’ y BB’ que se cortan perpendicularmente en sus puntos medios. La medida del eje mayor, AA’, es ***2a*** y la del eje menor, BB’, es ***2b***. Los puntos A, A’, B y B’ son los ***vértices*** de la elipse.
Los ***focos*** de la elipse son dos puntos fijos situados en el eje mayor y simétricos respeto al eje menor. Se denominan ***radios vectores*** a los segmentos que unen cada punto de la elipse con los focos.
Todos los puntos de la elipse cumplen una propiedad muy importante: tomado uno cualquiera, la suma de las medidas de los segmentos que tienen extremos en ese punto y en los dos focos es siempre la misma y vale 2a; es decir, PF+PF’ = P’F+P’F’ = P’’F+P’’F’ = 2a. Por esta razón, se da la siguiente definición de elipse: *es una curva cerrada formada por los puntos del plano para los que la suma de distancias a otros dos puntos fijos, llamados focos, es constante.*

Eva R. P.

CUERPOS DE REVOLUCIÓN

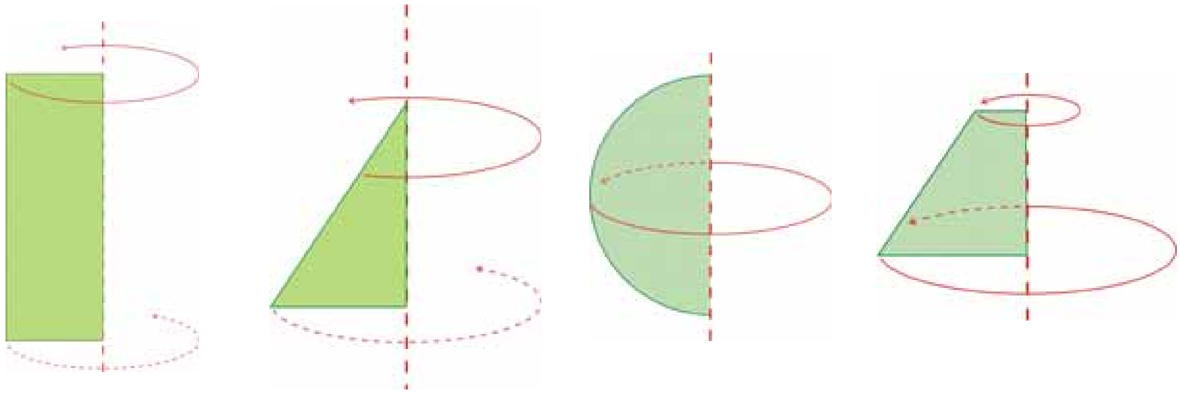
En nuestra casa, en el instituto, en la calle,… por todas partes podemos encontrar ***cuerpos de revolución***. De hecho, estamos a su lado a todas horas sin apenas prestarles atención. No podríamos jugar al baloncesto o al tenis si no existieran, ya que la pelota que utilizamos es un cuerpo de revolución.


Muchos elementos de iluminación también lo son. La mayoría de los jarrones que tenemos en casa, envases, utensilios de cocina y del hogar, etc,… ya que un cuerpo de revolución *es aquel que se genera al hacer girar, una vuelta completa, una figura plana alrededor de un eje*.

Fijémonos en algunos de los ejemplos más característicos:

El ***cilindro*, ** que es el cuerpo generado por un rectángulo cuando gira alrededor de un eje que contenga a uno de sus lados. Los círculos que se determinan al girar los lados perpendiculares al eje de giro son las ***bases del cilindro***; la distancia entre las dos bases es su ***altura***.



El ***cono*** es el cuerpo que se obtiene al hacer girar un triángulo rectángulo alrededor de un eje que contenga a uno de sus catetos. La intersección del eje con la hipotenusa da lugar al ***vértice del cono***, el círculo generado por el otro cateto es la ***base del cono***, la medida del cateto que está sobre el eje de giro es la ***altura del cono*** y la hipotenusa la ***generatriz***.

El ***tronco de cono*** es el cuerpo generado por un trapecio rectángulo. ¿Cual debe ser el lado situado sobre el eje de giro para obtener un tronco de cono a partir de un trapecio rectángulo? ¿Podremos obtener un tronco de cono al hacer girar un trapecio isósceles? ¿Dónde colocaremos el eje de giro en este caso?

La ***esfera*** es el cuerpo que obtenemos cuando hacemos girar un semicírculo alrededor de un eje de giro que contenga su diámetro. La superficie de la esfera se llama ***superficie esférica*** y estará generada por la semicircunferencia correspondiente al semicírculo.

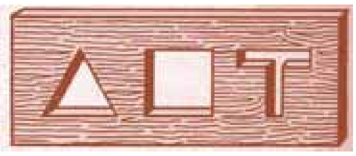
Muchos otros ejemplos de cuerpos de revolución se pueden encontrar cuando trabajamos en matemáticas y también en la vida cotidiana,… ¿Cuántos eres capaz de encontrar tú?

Marta F. C.

PENSAR ES DIVERTIDO

Tres en uno

¿Seremos capaces de diseñar una pieza que encaje en estos tres orificios?



UNIÓN
REVISTA IBEROAMERICANA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA

Septiembre de 2007, Número 11, páginas 225-227
ISSN: 1815-0640

Convocatorias y eventos

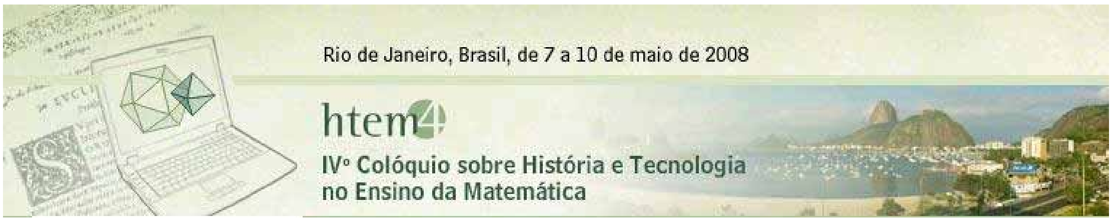
AÑO 2007

IV Congresso Internacional de Ensino da Matemática
Universidad Luterana de Brasil
ULBRA Canoas/RS, Brasil
Fecha: 25 al 27 de octubre, 2007
http://www.ulbra.br/ciem07/index.htm

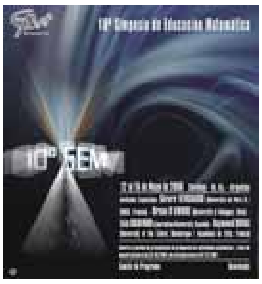
AÑO 2008

Séptimo Congreso Nacional de Matemática Educativa en Panamá (CONAMEP-7)
Universidad de Panamá, Panamá
Fecha: 18 al 22 de Febrero, 2008
http://www.up.ac.pa/ftp/f_ciencias/congreso/CONAMEP.htm

Symposium on the Occasion of the 100th Anniversary of ICMI
Roma, Italia
Fecha: 5 al 8 de Marzo, 2008
http://www.unige.ch/math/EnsMath/Rome2008/



IV Colóquio de História e Tecnologia no Ensino de Matemática
Universidad Federal de Río de Janeiro, Brasil
Fecha: 7 al 10 de Mayo, 2008
http://www.limc.ufrj.br/htem/



10º Simposio de Educación Matemática
Chivilcoy, Argentina
Universidad Nacional de Luján
Fecha: 12 al 15 de Mayo, 2008
www.edumat.org.ar

VII Conferencia Argentina de Educación Matemática (VII CAREM)
Ciudad de Santa Fe, Argentina
Sociedad Argentina de Educación Matemática
Departamento de Matemática de la Facultad de Humanidades y Ciencias Universidad Nacional del Litoral
Fecha: 15 al 17de Mayo, 2008
http://www.soarem.org.ar/CAREM/base_3/carem.htm

Joint ICMI /IASE Study Statistics Education in School Mathematics
Monterrey, México
Instituto Tecnológico y de Estudios Superiores
Fecha: 30 de Junio al 4 de Julio, 2008
http://www.stat.auckland.ac.nz/~iase/

ICME, the International Congress on Mathematical Education
Monterrey, México
Fecha: 6 al 13 de Julio 6, 2008
http://icme11.org/

IV Congreso Iberoamericano de Cabri (IBEROCABRI-2008)
Ciudad de Córdoba, Argentina
Universidad Nacional de Córdoba y Cabrilog
Fecha: 23 al 26 de Septiembre, 2008
http://www.iberocabri.org/

UNIÓN
REVISTA IBEROAMERICANA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA
Septiembre de 2007, Número 11, páginas 229-232
ISSN: 1815-0640

Información

"Un día alegre, divertido y formativo, el día de las Matemáticas en el Instituto Eduardo Laredo de Cochabamba – Bolivia"

El pasado día 24 de septiembre, se celebró por primera vez y de manera experimental, el DÍA ESCOLAR DE LAS MATEMÁTICAS en el Instituto Eduardo Laredo de Cochabamba – Bolivia.

El Instituto Eduardo Laredo es un colegio que brinda a sus alumnos formación humanística y artística, en los niveles de Primaria y Secundaria.

El "Día de las Matemáticas" fue organizado por el equipo de profesores de Matemáticas, dirigido por la profesora Begoña Grigoriu, quién también preside. la Sociedad Boliviana de Educación Matemática (SOBOEDMA). Contaron con el apoyo pleno y decidido del Equipo Directivo del colegio.

Durante ese día se desarrollaron varias actividades:

En Primaria se organizó una "gymkhana" en la que los alumnos, organizados en pequeños grupos de trabajo, debían pasar por diferentes "experiencias matemáticas", entre las que se destacan:

- actividades de razonamiento lógico que no implican cálculos con lápiz y papel,
- el tangram chino,
- origami,
- rompecabezas,
- sudokus,
- dominós y trinominos, que fueron creados para relacionar conceptos de música y matemáticas. etc.,
- concluyendo con un animado campeonato de Otelo o Reversi.

El tangram chino

En Secundaria, los estudiantes presentaron investigaciones sobre la influencia de la Matemática y la Física en las diferentes formas de expresión del arte.

En este nivel, los grupos de trabajo se organizaron teniendo en cuenta la especialidad artística o musical de cada estudiante (música, danza, teatro, ballet, etc.). Participaron además como evaluadores de las actividades programadas para Primaria.

Origami

La valoración de los estudiantes fue "muy positiva" pues la mañana les resultó muy corta" y divertida. Solicitaron que, la edición del año próximo, sea de todo el día para así poder participar con más calma en cada actividad e inclusive repetirla.

Los profesores, que en un principio no estaban muy convencidas y, por lo tanto, tampoco muy comprometidas, poco a poco, se fueron entusiasmando y contagiando su entusiasmo a los niños y jóvenes; habiendo comprobado que:

- esta actividad **es posible**,
- los **frutos** son **buenos**,
- es una forma de ofrecer a los estudiantes **caminos diversos** para acercarse a la Matemática,
- es un recurso que permite cambiar la concepción de "***que la Matemática es muy difícil y aburrida", "que no tiene nada que ver con la vida",*** por ***"la Matemática es fácil, divertida y está en la vida"***
- los estudiantes que tienen "***matemáticofobia"***, superen esta fobia y **confíen en sus posibilidades** para trabajar esta área.

- es una ayuda en el proceso de enseñanza-aprendizaje de la Matemática **que permite responder a la diversidad**,
- como educadoras, **ante nuevos retos**, pueden ir **descubriendo y construyendo estrategias y recursos materiales**.
- el **trabajo en equipo** es **una "riqueza al alcance de todos".**

La percepción de los Padres de Familia, al ver la actitud de sus hijos, fue de aceptación e impulso para los organizadores de este evento.

La Comunidad Educativa del Instituto Eduardo Laredo de Cochabamba, ya está trabajando para el "DIA DE LAS MATEMÁTICAS 2008".

Rompecabezas

Sudokus

Dominós y trinominos, que fueron creados para relacionar conceptos de música y matemáticas. etc.

Concluyendo con un animado campeonato de reversi.

UNIÓN
REVISTA IBEROAMERICANA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA

Septiembre de 2007, Número 11, página 233
ISSN: 1815-0640

Normas para publicación en Unión

1. Los trabajos para publicar se deben enviar a union.fisem@sinewton.org. Deben ser originales y no estar en proceso de publicación en ninguna otra revista. Serán remitidos a varios evaluadores y el Comité editorial de la Revista decidirá finalmente sobre su publicación.
2. Los artículos remitidos para publicación deben ser escritos en Word, preferentemente usando la plantilla establecida al efecto (descargar plantilla) y, en todo caso, cumpliendo las siguientes normas: letra tipo **arial**, tamaño **12 puntos**, interlineado simple, márgenes de 2,5 cm. como mínimo en los 4 bordes del papel, tamaño DIN A-4. La extensión no debe ser superior a las 15 páginas, incluyendo figuras, que deben estar situadas en el lugar del texto donde deben ser publicadas. La simbología matemática necesaria se escribirá con el editor de ecuaciones de Word, se insertará como una imagen o se realizarán utilizando los símbolos disponibles en el juego de caracteres “Arial”. Es importante no cambiar el juego de caracteres, especialmente **evitar el uso del tipo “Symbol”** u otros similares.
3. Las **ilustraciones y fotografías** deben estar situadas en el lugar del texto donde deben ser publicadas. Si es posible, los “pie de foto” se escribirán dentro de un “cuadro de texto” de Word (con o sin bordes) que estará “agrupado” con la imagen de referencia. Se deben numerar usando: Fig. 1, Fig. 2,… Tabla 1, Tabla 2,…
4. El artículo deberá comenzar con un **resumen o abstract**, que tendrá una longitud máxima de 6 líneas. Preferiblemente se redactará también en inglés, además de la lengua original utilizada (español o portugués).
5. Teniendo en cuenta el carácter internacional de la revista, se hace indispensable que cuando los autores se refieran a un determinado sistema educativo nacional lo hagan constar expresamente y que siempre que se trate de un nivel educativo se indique la edad normal de los alumnos, lo que permitirá la comparación con el sistema educativo nacional del lector.
6. Los datos de identificación de los autores deben figurar en la última página del mismo documento word que contiene el artículo. Con el fin de garantizar el anonimato en el proceso de evaluación, solamente estarán los **datos identificativos en** esta **última página**. En ella se hará constar los siguientes datos:
   - **De contacto**: nombre, dirección electrónica, dirección postal, teléfono.
   - **Para la publicación**: centro de trabajo, lugar de residencia y/o del centro de trabajo, así como una breve reseña biográfica de unas cinco líneas (lugar y fecha de nacimiento, títulos, centro de trabajo, publicaciones...).
7. Las referencias bibliográficas se incluirán al final del trabajo (y antes de la hoja de datos identificativos) y deben seguir los formatos que se indican a continuación.

Para un libro:

Bourbaki, N. (1972). *Elementos de historia de las matemáticas.* Alianza, Madrid.

Bermejo, A. (1998). *La enseñanza de la geometría en la educación primaria.* Editorial Pico Alto, Buenos Aires.

Para un artículo:

Ibáñez, M. y Ortega, T. (1997). “La demostración en matemáticas. Clasificación y ejemplos en el marco de la educación secundaria”. *Educación Matemática* 9, 65-104.

Díaz, C. y Fernández, E. (2002). “Actividades con ordenador para la enseñanza de la suma”. *Revista de didáctica de las matemáticas* 19, 77-87.

Para un capítulo de libro:

Albert, D. y Thomas, M. (1991). “Research on mathematical proof”. En: Tall, D. (ed.), *Advanced Mathematical Thinking,* 215-230. Kluwer, Dordrecht.

Hernández, G., Juárez, I. y Lorenzo, K. (1998). “Recopilación de datos estadísticos y su tratamiento en la enseñanza secundaria”. En: Nuez, M. y Pérez, O. (eds.), *Segundo Congreso Americano de Educación Matemática,* 223-234. Editorial JJ, Caracas.

NOTA: Las normas que se indican en los puntos 2, 3 y 7 pretenden dar uniformidad a los trabajos que se reciban en la redacción y simplificar así el trabajo de composición y maquetación de la revista. Si alguien tiene dudas sobre su aplicación, puede dirigir sus preguntas (lo más concretas posible) a union.fisem@sinewton.org