UNIÓN

REVISTA IBEROAMERICANA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA

# Número 12

Diciembre de 2007

## Índice

UNIÓN
REVISTA IBEROAMERICANA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA

Diciembre de 2007, Número 12, páginas 2
ISSN: 1815-0640

**Unión. Revista Iberoamericana de Educación Matemática** es una publicación de la Federación Iberoamericana de Sociedades de Educación Matemática **(FISEM)**. Tiene una periodicidad trimestral, de modo que se publican cuatro números al año, en los meses de marzo, junio, septiembre y diciembre.

UNIÓN
REVISTA IBEROAMERICANA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA

Diciembre de 2007, Número 12, página 3
ISSN: 1815-0640

firma invitada

## Célia Maria Carolino Pires

### Breve reseña

Concluiu Mestrado em Matemática pela Pontifícia Universidade Católica de São Paulo (1982) e Doutorado em Educação pela Universidade de São Paulo (1995). Atuou como docente em Matemática na Educação Básica como professora, diretora de escola e supervisora de ensino na rede pública do Estado de São Paulo/Brasil. Desde 1980 atua na educação superior e atualmente é professora titular do Departamento de Matemática e professora do Programa de Estudos Pós Graduados em Educação. Desenvolve projetos de pesquisa sobre os temas “Inovações curriculares na Educação Básica" e "Formação de Professores de Matemática”. Participou como elaboradora e coordenadora da equipe de elaboração dos Parâmetros Curriculares Nacionais do Ministério da Educação, para o Ensino Fundamental e Educação de Jovens e Adultos. Recebeu o título de Cavaleiro da Ordem Nacional do Mérito Educativo, Ministério da Educação do Brasil (2002). Recebeu o Prêmio Jabuti, de melhor livro didático da Câmara Brasileira do Livro (1994) e o Premio Capes de Teses da Área de Ensino de Ciências e Matemática, como orientadora de tese de doutorado (2006). Foi presidente da Sociedade Brasileira de Educação Matemática (2001/2004) e Presidente da Federação Iberoamericana de Educação Matemática (2003/2004). Foi coordenadora do Curso de Licenciatura em Matemática da PUC/SP(2005/2007). Atualmente é vice-coordenadora do Curso de Pós-Graduação em Educação Matemática da PUC/SP. Organizou e coordenou vários cursos Programas de Formação de Professores na rede pública de São Paulo. Atualmente, coordena o Programa de Orientações Curriculares da rede municipal de São Paulo.

Para acessar o curricculo completo, no Brasil temos a Plataforma Lattes, http://lattes.cnpq.br/, em que há a opção "Buscar curriculo e basta digitar o nome (Célia Maria Carolino Pires).

UNIÓN
REVISTA IBEROAMERICANA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA

Diciembre de 2007, Número 12, páginas 5-26
ISSN: 1815-0640

firma invitada

# Implementação de inovações curriculares em matemática e embates com concepções, crenças e saberes de professores: breve retrospectiva histórica de um problema a ser enfrentado

**_Célia Maria Carolino Pires_**[1]

## Resumo

No presente artigo analisamos a trajetória histórica de reformas curriculares no Brasil, para a etapa correspondente à Educação Fundamental (que atende a alunos de 6 a 14 e é de caráter obrigatório), buscando resgatar avanços e dificuldades enfrentadas no processo de implementação de inovações na sala de aula. Apresentamos reflexões a respeito da desarticulação entre formação de professores e processos de mudança, inovação e desenvolvimento curricular, que sempre caracterizou as ações das políticas públicas em nosso país. Por não levar em conta as concepções, crenças, conhecimentos e atitudes de um dos principais protagonistas da implementação, o professor, as concepções norteadoras das propostas, via de regra, passaram a fazer parte do discurso pedagógico sem, no entanto, penetrar na raiz das questões que se procurava enfrentar. A produção de pesquisas na área de formação de professores, que se expandiu e aprofundou a partir dos anos 80, fornece pistas importantes para a compreender e buscar encontrar soluções, de modo que o processo de inovação curricular promova uma educação matemática dos alunos, com a qualidade desejada. Mas na prática, os problemas permanecem e demandam respostas urgentes.

## Resumen

En el actual artículo analizamos la trayectoria histórica de reformas del plan de estudios en el Brasil, para la etapa correspondiente a la educación básica (la que atiende a los alumnos y alumnas de 6 a 14 años y es de carácter obligatorio; presentaré los avances realizados y las dificultades tenidas en el proceso de la puesta en práctica de innovaciones en el aula. Incluiré unas reflexiones en torno a la poca articulación realizada entre la formación de profesores y los procesos de cambio, de la innovación y del desarrollo del plan de estudios, acciones de la política en nuestro país que se caracterizaron siempre. Por no tener en cuenta los conceptos, creencias, conocimientos y las actitudes de uno de los protagonistas principales de la puesta en práctica, el profesor, las concepciones de las propuestas pasaban a ser parte del discurso pedagógico pero sin penetrar realmente en la raíz de los problemas que deseaba resolver la reforma. La producción de la investigación en el área de la formación de profesores, que se extendió profusamente a partir de los años 80 ofrece pistas importantes para comprender y encontrar soluciones de modo que el proceso de innovación curricular promueva una educación matemática de la calidad deseada. Pero en la práctica los problemas permanecen y demandan respuestas urgentes.

[1] Professora do Programa de Estudos Pós-Graduados em Educação Matemática. PUC/SP

Célia Maria Carolino Pires

## Abstract

In this article we analyze the historical trajectory of curricular reforms in Brazil, for the corresponding stage to Basic Education (compulsory schooling for students aged between 6 and 14), it highlights the mismatch between teacher education and the processes of change, innovation and curriculum development that has always characterized public policy in our country. In not taking into account the beliefs, knowledge and attitudes of the principal protagonist of curriculum implementation, the teacher, the conceptions behind the proposals generally become part of the pedagogic discourse without penetrating the roots of the issues they seek to address. Researches in the area of teacher education, that have been growing in number and in depth since the 80s, point to factors important in both developing understandings and searching for solutions that will enable the realization of process of curriculum innovation that supports students' learning. But in practical one, the problems remain and demand urgent answers.

## 1. Introdução

O presente artigo é um dos produtos do projeto de pesquisa que coordenamos no âmbito do Programa de Estudos Pós-Graduados em Educação Matemática da PUC/SP, denominado "Formação de Professores e Inovações Curriculares nos Ensinos Fundamental e Médio", que reúne mestrandos e doutorandos e tem como finalidade investigar os processos de organização, desenvolvimento e implementação curricular nos Ensinos Fundamental e Médio no sistema educacional brasileiro e as relações entre esses processos e a formação inicial e continuada de professores.

Os trabalhos desenvolvidos dedicam-se a análises sobre a trajetória da organização curricular brasileira para essas etapas da escolaridade e, em especial, das atuais propostas de ensino de Matemática, focalizando diferentes variáveis que intervêm na formulação de propostas curriculares. Discutem como as diretrizes veiculadas por documentos oficiais são traduzidas na prática dos professores em sala de aula e nos livros didáticos. Desse modo, o projeto visa também investigar não apenas as prescrições dos documentos oficiais, mas também o currículo efetivamente desenvolvido nas salas de aula.

Uma das preocupações que emergiram ao longo do desenvolvimento do projeto refere-se à relação entre processos de mudança, inovação e desenvolvimento curricular e os processos de formação inicial e continuada de professores. Embora esses dois processos sejam alvo de estudos importantes na área de educação Matemática, em especial o da formação de professores, geralmente tais estudos são feitos isoladamente.

A leitura de autores como Garcia (1998) que discute a necessidade de integrar a formação de professores em processos de mudança, inovação e desenvolvimento curricular despertou o interesse do grupo de pesquisa pelo tema e mostrou que o problema é bastante comum também em outros países. Esse autor considera que a formação de professores deve ser analisada em relação com o desenvolvimento curricular e deve ser concebida como uma estratégia para facilitar a melhoria do ensino. Garcia cita Escudero (1992) que se refere à dissociação que existe atualmente entre os processos de mudança curricular e a formação de professores. Do ponto de vista de Escudero,

> "a formação e a mudança tem de ser pensadas em conjunto; como duas faces da mesma moeda. Hoje é pouco defensável uma perspectiva sobre a mudança para a melhoria da educação que não seja, em si mesma, capacitadora, geradora de sonho e compromisso, estimuladora de novas aprendizagens e, em suma, formativa para os agentes que têm de desenvolver na prática as reformas. Simultaneamente, a formação, se bem entendida, deve estar preferencialmente orientada para a mudança, ativando reaprendizagens nos sujeitos e na sua prática docente que dever ser, por sua vez, facilitadora de processos de ensino e de aprendizagens dos alunos" (Escudero, 1992, p.57, apud Garcia 1998, p.28)

Ao reconstituir a trajetória histórica das reformas curriculares no Brasil, incluindo o período mais recente, constatamos que a participação e o envolvimento dos professores que atuam em sala e aula no processo de elaboração, discussão e implementação de inovações curriculares sempre foi bastante restrita.

Desse modo, muitas questões podem ser formuladas a respeito das relações entre a implementação de inovações curriculares e a participação de professores. Dentre elas, destacamos: Por que professores aparentam ser resistentes às novas idéias que, em geral, são veiculadas nos documentos curriculares? A pouca participação dos professores no processo de discussão de propostas pode ser um dos elementos responsáveis por essa "resistência"? Como essa resistência poderia ser enfrentada?

Neste artigo, com base em pesquisa documental que realizamos, em alguns dados coletados no âmbito do grupo de pesquisa e ainda em nossas experiências em processos de reformas curriculares[2], reunimos alguns elementos da trajetória histórica das reformas buscando evidenciar essa relação entre implementação de inovações curriculares e o envolvimento de professores que ensinam Matemática nesse processo.

[2] Ao longo das décadas de 70 e 80 participamos de projetos de implementações curriculares na Secretaria de Educação do Estado de São Paulo. Integramos a equipe de coordenação e de elaboração dos Parâmetros Curriculares Nacionais, para o Ensino Fundamental e para a Educação de Jovens e Adultos, do Ministério da Educação do Brasil, no período de 1995 a 2002. Em 2007, coordenamos um programa de orientações curriculares e definição de expectativas de aprendizagem desenvolvido pela Secretaria Municipal da cidade de São Paulo.

## 2. Reformas curriculares: processos de mudança

Os termos "reorientação", "inovação", "revisão" são inerentes aos processos de reformas curriculares. Poder-se-ia interpretar que quando um reforma curricular é posta em ação isso acontece em função da constatação de que algo não vai bem e precisa ser modificado. A retrospectiva das reformas, no entanto, mostra que nem sempre isso ocorre ou, pelo menos, nem sempre as motivações ficam tão explícitas nos documentos curriculares.

No Brasil, de modo geral, as reformas de projetos curriculares das disciplinas, são atreladas a alterações na estrutura do sistema de ensino como, por exemplo, a expansão do período de escolaridade obrigatória. Outra motivação para as reformas, num período mais recente, é a necessidade de organizar currículos que se adaptem às avaliações internacionais, e não o contrário. Esse fato, que ocorre em diferentes países, é destacado por Keitel e Kilpatrick (1998):

> As investigações comparativas internacionais têm-se tornado cada vez mais sofisticadas. Em conjunto com os julgamentos dos especialistas sobre o modo como o currículo da Matemática deve ser representado internacionalmente, têm sido feitas análises cuidadosas de documentos oficiais e materiais escritos. Foram efetuadas análises a variáveis como o tempo reservado para vários tópicos em diferentes sistemas, a proporção de sistemas que tratam um dado tópico em cada ano, a forma como varia, nos manuais, o espaço concedido a um tópico, e como difere a organização dos manuais nos diferentes sistemas. Mesmo assim, o currículo internacional idealizado, definido por um conjunto comum de tarefas organizadas por tópicos de conteúdo, continua a ser a norma para medir o desempenho. Não é concedida nenhuma tolerância pelo fato de existirem objetivos, questões, histórias e contextos que são diferentes entre os currículos de Matemática dos sistemas em estudo. Ninguém aborda realmente em que medida os alunos de um dado sistema estão aprendendo o currículo de Matemática que o seu sistema lhes oferece[3].

Esses mesmos autores destacam um ponto bastante importante sobre a participação dos professores, quando fazem referência a "currículos planejados" e "currículos implementados":

> Uma tentativa para lidar com a complexidade curricular foi a de distinguir entre o currículo planejado e o currículo implementado. Uma distinção entre o currículo planejado (tal como está representado em documentos oficiais, manuais, ou em ambos) e o currículo implementado (normalmente medido através de questionários aos professores) foi feita no Second International Mathematics Study — SIMS (Travers e Westbury, 1989). A

[3] In: The Rationality and Irrationality of International Comparative Studies. Christine Keitel e Jeremy Kilpatrick. Capítulo 16. International comparisons in mathematics education (studies in mathematics education series 11, pp. 241-256). Editado por G. Keiser, E. Luna e I. Huntley e publicado pela Falmer Press (Londres) em 1998.

> distinção já tinha sido antecipada no First International Mathematics Study — FIMS (Husén, 1967) — pela utilização de classificações dos professores das oportunidades de aprendizagem dos conteúdos relativos a cada item testado. Apesar dos termos planejado e implementado transportarem a infeliz conotação de que as únicas intenções que contam são as oficiais, e de que os professores não passam de meros executores que implantam no terreno planos de outras pessoas, esta distinção foi útil, na medida em que ajudou a distinguir o planejado do que é a realidade curricular.

Em artigo publicado em 2003, destacamos que no Brasil, um fenômeno comum a diferentes níveis do sistema de ensino é a introdução, em determinados períodos, de mudanças curriculares que não têm o apoio de experiências concretas anteriores nem o envolvimento dos professores, protagonistas de sua implementação. Historicamente, uma das marcas das políticas públicas brasileiras no que se refere a questões curriculares é, sem dúvida, a falta de ações de implementação curricular, como se novas idéias se transformassem em prática num passe de mágica. Além da ausência de ações de implementação, outra marca é a falta de acompanhamento/avaliação das inovações propostas, o que não permite fazer um “julgamento” adequado, contabilizando acertos e erros.

Em função disso, destacamos algumas conseqüências bastante conhecidas: a convivência “eterna” de currículos prescritivos (os dos documentos oficiais) e os currículos reais (os da sala de aula, que os professores realizam) e a falta de dados consistentes para promover as mudanças necessárias ou investir fortemente naquilo que vem dando bons resultados.

Enfatizamos ainda a presença de um descompasso freqüente entre as orientações curriculares e as avaliações institucionais no Brasil. Geralmente, as avaliações pautam-se em matrizes curriculares elaboradas especialmente com a finalidade de “medir” algumas competências dos estudantes, deixando de avaliar (às vezes pelas próprias limitações de uma prova) outras competências importantes, em particular as que envolvem, por exemplo, atitudes, valores etc. Ademais, cobram o domínio de conteúdos matemáticos, que nem sempre os professores trabalharam em sala de aula por falta de orientações curriculares mais claras. O baixo desempenho dos estudantes divulgado pelos órgãos de avaliação provocam espanto e inquietude na sociedade, sem no entanto aprofundar as causas dessa ocorrência: a ausência do debate curricular nos sistemas de ensino e nas escolas.

## 3. Os professores e as reformas curriculares

Os termos “saberes”, “conhecimentos”, “concepções”, “crenças” têm sido objeto discussões teóricas de vários autores que estudam a formação de professores e que procuram caracterizar cada um deles para melhor compreender as variáveis que interferem na formação e na atuação profissional docente. Embora esse não seja o foco deste artigo, indicaremos os autores que tomamos como referência na utilização desses termos.

Destacamos inicialmente a contribuição de Thompson (1992), sobre o fato de que o conhecimento dos professores para ensinar Matemática está muito ligado às crenças e concepções que eles têm sobre a Matemática e seu ensino. Para essa autora, tanto as concepções como as crenças têm uma componente cognitiva, mas a diferença entre elas é que as primeiras são mantidas pelas convicções, são consensuais e têm procedimentos para valorizar sua validade e as segundas não.

Ball (1991), por sua vez, considera que os pressupostos e crenças do professor interagem com o conhecimento que eles têm da Matemática, influenciando a tomada de decisões e as ações do professor para ensinar Matemática.

Para Tardif (2002), as crenças e representações que os futuros professores possuem a respeito do ensino agem como conhecimentos prévios que calibram as experiências de formação e orientam seus resultados. Tardif (2002, p.72) destaca:

> "o professor em sua atuação profissional, baseia-se em juízos provenientes de tradições escolares que ele interiorizou, em sua experiência vivida, enquanto fonte viva de sentidos a partir da qual o passado lhe possibilita esclarecer o presente e antecipar o futuro".

Elbaz (1983) afirma que todas as espécies de conhecimento do professor são integradas e filtradas pelos valores e crenças pessoais, constituindo assim, um saber que orienta a prática profissional.

Cury (1999) chama a atenção para o fato de que para os termos "concepções" e "crenças" não há definições unânimes e que muitas vezes são até conflitantes. Com relação às concepções de professores de Matemática, Cury (1999) afirma que

> os professores de Matemática concebem a Matemática a partir das experiências que tiveram como alunos e professores, do conhecimento que construíram, das opiniões de seus mestres, enfim das influências sócio-culturais que sofreram durante sua vidas, influências que vêm sendo construídas passado de geração para geração, a partir das idéias de filósofos que refletiram sobre a Matemática. (CURY, 1999, p. 40)

A autora comenta ainda que a essas idéias somam-se todas as opiniões que os professores formam sobre a Matemática como disciplina, sobre seu ensino e aprendizagem, sobre seu papel como professores de Matemática, sobre o aluno como aprendiz, idéias essas nem sempre bem justificadas. (CURY, 1999, p. 41)

## 4. Reformas curriculares no Brasil: o que trouxeram de novo? como os professores foram incorporados?

A pesquisa de documentos que permitem reconstituir partes da história das reformas curriculares no Brasil evidenciam dois importantes marcos, na primeira metade do século XX. A chamada reforma Francisco Campos, em 1931 e a reforma Gustavo Capanema, em 1942. Na primeira, o educador brasileiro Euclides Roxo teve papel importante, ao propor a unificação dos campos matemáticos - Álgebra, Aritmética e Geometria - numa única disciplina, a Matemática, com a finalidade de abordá-los de forma articulada inter-relacionada, uma vez que anteriormente cada um deles era estudado como disciplina independente. Roxo defendeu ainda a idéia de que o ensino da geometria dedutiva deveria ser antecedido de uma abordagem prática da geometria. Se na Reforma Francisco Campos, a concepção de currículo foi ampliada para além da mera listagem de conteúdos a serem ensinados, incluindo uma discussão de orientações didáticas, na reforma seguinte, de 1942, essas inovações não se mantiveram, o que revela que as decisões curriculares, no Brasil, foram historicamente, marcadas por procedimentos bastante questionáveis, influenciados por questões políticas ou influências de poder de alguns grupos ou mesmo de pessoas.

Na história mais recente, que será objeto de nossa análise, podemos identificar três períodos marcantes: o primeiro, caracterizado pela influência do Movimento Matemática Moderna (de 1965 a 1980); o segundo, caracterizado por reformas que buscavam se contrapor ao ideário do Movimento Matemática Moderna (de 1980 a 1994) e lideradas por Secretarias Estaduais e Municipais de Ensino; o terceiro, organizado em nível nacional e consubstanciado num documento divulgado ao conjunto das escolas brasileiras, denominado Parâmetros Curriculares Nacionais (a partir de 1995).

### 4.1. O período de influência da Matemática Moderna

O Movimento Matemática Moderna foi, sem sombra de dúvida, um dos principais marcos de reformas, provocando alterações curriculares em países com sistemas educativos e realidades diversas. No Brasil, a Matemática Moderna foi veiculada inicialmente por meio de livros didáticos, sem adequada preparação dos educadores nem suficiente discussão de seus propósitos. A Matemática Moderna surgiu no Brasil como substituta definitiva da velha Matemática, com a qual parecia não manter relação alguma.

As primeiras manifestações oficiais da introdução de novos programas bem como a introdução da linguagem da Matemática Moderna, destinada aos alunos da escola secundária, foram feitas nos Congressos Brasileiros do Ensino de Matemática, realizados em Salvador (1955), Porto Alegre (1957), Rio de Janeiro (1962) e Belém (1967), com a participação de grupos restritos de professores.

No artigo "Introdução da Matemática Moderna no Brasil", Oswaldo Sangiorgi, professor de Matemática e um dos pioneiros na divulgação do movimento no Brasil, relata:

> "...nos dois primeiros congressos, o problema da introdução da Matemática Moderna foi tratado como um simples aceno traduzido em algumas resoluções aprovadas em plenário e, no realizado no Rio de Janeiro, foram aprovadas decisões no sentido de serem experimentadas estas novas áreas da Matemática e os resultados serem apresentados no congresso seguinte; foi no congresso de Belém que se tratou com objetividade a introdução da Matemática Moderna no ensino secundário". (p. 9).

No sistema de ensino público do Estado de São Paulo, a presença da Matemática Moderna ficou especialmente registrada na elaboração dos chamados Guias Curriculares, organizados para orientar as escolas de 1º grau, que se estruturavam em cursos de oito séries, por força da Lei de Diretrizes e Bases da Educação Nacional (L.F. nº 5692/71).

Neles, observa-se também a preocupação da Secretaria da Educação em oferecer sugestões de caráter metodológico, definir objetivos, além da apresentação dos conteúdos. Trechos extraídos da "Introdução" desse documento evidenciam a tentativa de incorporar algumas críticas que já vinham sendo feitas à implantação da Matemática Moderna.

Com relação à orientação a ser dada à Matemática - clássica ou moderna – dizia-se no documento:

> "Achamos conveniente dizer algumas palavras quanto à assim chamada Matemática Moderna. Esse assunto tem dado oportunidade a muitas polêmicas, a nosso ver estéreis. Pensamos que todo problema se resume na infeliz escolha do nome: Matemática Moderna. A Matemática não é moderna, nem clássica: é simplesmente a Matemática. Ocorre que, como muitas outras ciências, ela experimentou nos últimos tempos uma evolução extraordinária, provocando uma enorme defasagem entre a pesquisa e o ensino da matéria. O que deve ser feito, e isso é importante, é uma reformulação radical dos programas, para adaptá-los às novas concepções surgidas, reformulação essa que deve atingir as técnicas e estratégias utilizadas para a obtenção dos objetivos propostos. Nessa acepção, achamos que o movimento que levou a uma orientação moderna no ensino da Matemática é irreversível, no sentido de um maior dinamismo na aprendizagem da mesma, em contraste com a maneira estática como era apresentada. Sentimos, portanto, que a orientação dada a um curso de Matemática deve ser moderna e, para isso, é necessário que se dê ênfase, no estudo da matéria, a certos aspectos que visam destacar a indiscutível unidade da Matemática, mostrando-a como uma construção única sem compartimentos estanques. Dentre esses aspectos, gostaríamos de evidenciar dois deles, que consideramos de importância fundamental: o papel central desempenhado pelas estruturas matemáticas, estruturas essas que podem ser evidenciadas no estudo dos campos numéricos bem

> como na geometria, e o importantíssimo conceito de relação e, mais especificamente, o conceito de função, que pode ser abordado não só no estudo das funções numéricas, como também no estudo das transformações geométricas. Além disso, é de importância primordial destacar o papel do raciocínio matemático". (p.171).

O documento explicava ainda:

> "Para a apresentação do programa foi adotado um agrupamento dos assuntos que, por ser um programa de transição, não atinge a unidade completa que consideramos ideal, mas que pode ser sentida principalmente no primeiro tema, que é indiscutivelmente o fator unificador da Matemática. A divisão foi feita em quatro temas enumerados a seguir:
> I. Relações e funções.
> II. Campos numéricos.
> III. Equações e Inequações.
> IV. Geometria." (p.172)

Para cada tema, foram explicitados os objetivos e a distribuição ao longo dos níveis e séries. A título de exemplo, reproduzimos indicações referentes ao tema "Relações e funções".

## *Tema I: Relações e Funções*

### *Objetivos*

- *Adquirir uma linguagem e conceitos que se constituem em elementos unificadores da Matemática e aplicá-los sempre que necessário.*
- *Desenvolver habilidades de construir e interpretar gráficos cartesianos e diagramas de relações.*

| | *Nível I* | | *Nível II* | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| *Conteúdo* | *1ª.* | *2ª.* | *3ª.* | *4ª.* | *5ª.* | *6ª.* | *7ª.* | *8ª.* |
| *Conjuntos; elementos; pertinência; diagramas.* | *X* | *X* | *(*)* | *X* | *X* | | | |
| *Igualdade e inclusão* | *(*)* | *(*)* | *(*)* | *(*)* | *X* | | | |
| *Reunião e intersecção* | *(*)* | *(*)* | *(*)* | *(*)* | *X* | | | |
| *Partição* | *(*)* | *(*)* | *(*)* | *(*)* | *X* | | | |
| *Par ordenado;produto cartesiano* | *(*)* | *(*)* | *(*)* | *(*)* | *X* | | | |
| *Relações* | *X* | *X* | *X* | *X* | *X* | | | |
| *Propriedades das relações: reflexiva, simétrica e transitiva. Relações de equivalência.* | *(*)* | *(*)* | *(*)* | *(*)* | *X* | *X* | | |
| *Propriedade antissimétrica. Relação de ordem.* | *(*)* | *(*)* | *(*)* | *(*)* | *(*)* | *X* | | |
| *Aplicações ou funções.* | *(*)* | *(*)* | *(*)* | *(*)* | *X* | *X* | *(*)* | *X* |
| *Equipotência.* | *(*)* | *(*)* | *(*)* | *(*)* | *X* | | | |

*X : indica que o conteúdo é trabalhado explicitamente.*
*(*) : indica que o conteúdo é trabalhado implicitamente nas atividades.*

Quanto à utilização da linguagem da Teoria dos Conjuntos no tratamento de todos os temas, o documento alertava:

> “... contribui, como fator unificador, para obtenção desse objetivo. Cabe apenas alertar o professor no sentido de não transformar essa linguagem auxiliar em objetivo principal no ensino da disciplina...” (p. 172).

A reforma “Matemática Moderna” no Brasil foi implantada inicialmente, por meio de sua incorporação aos livros didáticos, sem discussão mais profunda de seus princípios ou finalidades junto aos professores, aos quais foram oferecidos cursos treinamentos bastante pontuais. Em São Paulo, em 1961, foi fundado o Grupo de Estudos do Ensino de Matemática (GEEM), que englobava em seus quadros professores universitários, secundários, psicólogos, pedagogos e trabalhava de forma cooperativa com a Secretaria de Estado da Educação, no treinamento de professores, procurando conceituar os novos métodos de abordagem da Matemática. Esses “treinamentos” consistiam em ensinar aos professores a "linguagem dos conjuntos" e passar-lhes sugestões de como trabalhar com relações de pertinência, inclusão, as operações de reunião e intersecção (especialmente com a utilização de Blocos Lógicos), as propriedades reflexiva, simétrica, transitiva de algumas relações.

No entanto, as motivações da reforma, sua dimensão internacional e seus propósitos não foram discutidos com a profundidade que sua complexidade exigia. Como se sabe mesmo em países como a França, a implantação dessa proposta trouxe problemas. O próprio Dieudonné, um dos mentores da reforma, denunciava em 1974, uma nova escolástica, em seu famoso artigo "Devons-nous enseigner les mathématiques modernes?", publicado num Boletim da APMEP. A aparição dessa nova "escolástica" era uma perversão. Ela se transformou exatamente naquilo que eles não queriam que fosse. Definir a Matemática como linguagem acabou orientando seu ensino para a aprendizagem de palavras transformando-o em discussão sobre palavras. Em resumo, a reforma acabou se traduzindo bem mais por um jargão impenetrável, por um excesso de simbolismo, por austeras abstrações, do que por uma pedagogia ativa e aberta, como se pretendia. Outro fato marcante consta do artigo escrito em 1973, por Choquet, "L’ École libératrice", em que ele desabafa:

> Eu estou estarrecido com o que constato no ensino da escola primária e secundária. Fui um dos promotores da reforma de ensino da Matemática, mas o que eu preconizava era simplesmente uma poda de galhos mortos, atravancadores, e a introdução de um pouco de álgebra. Pois bem, em suma, os novos programas e as instruções correspondentes são mais satisfatórios que os antigos, em que pesem erros razoáveis: mas, há toda uma atmosfera nociva, que tem acompanhado seu desenvolvimento. Em particular, um ataque contra a Geometria e contra os recursos da intuição: foi dito aos professores que seria lastimável que eles estudassem os triângulos e que a Álgebra Linear substituiria toda a velha geometria... o resultado é tal que, sem uma forte reação de base, eu penso que a geração atual de nossa escola receberá uma formação matemática que

> não a prepara nem para a pesquisa, nem para a utilização da Matemática em técnicas ou ciências experimentais. (Apud Charlot, 1986, pp.18/19).

Pode-se afirmar que, mesmo com os “treinamentos”[4] desenvolvidos e os materiais de apoio veiculados, como uma série de publicações da Secretaria de Educação de São Paulo, não foram suficientes. As mudanças em jogo eram bastante complexas pois envolviam:

- conhecimentos matemáticos desconhecidos dos professores (polivalentes ou especialistas), como os elementos da teoria dos conjuntos, as estruturas algébricas, a simbologia etc

- conhecimentos didáticos “novos”, trazidos pela perspectiva construtivista piagetiana de aprendizagem e por decorrências como a do uso de materiais didáticos.

- conhecimentos curriculares trazidos pela necessidade de transformar programas traduzidos por listagem de conteúdos em propostas pedagógicas que explicitassem objetivos, conteúdo, metodologia e avaliação.

Na prática, o que se consolidou foi o trabalho com os conjuntos no início de todas as séries, reprisando sempre os mesmos exemplos e buscando “concretizar” idéias bastante abstratas como as de conjunto, conjunto vazio, conjunto unitário etc. A resolução aritmética de problemas foi colocada de lado e o apoio da álgebra foi proposto desde as séries iniciais, ficando conhecidos como “problemas de quadradinho” (pois na equação que traduzia o problema, a incógnita era representada por um quadradinho no lugar de uma letra). O estudo de Geometria era feito como tema ilustrativo dos conjuntos ou da álgebra e o estudo das medidas foi complemente abandonado. Positivamente, o que os treinamentos veiculavam era a preocupação em tornar a aula de Matemática mais atraente, com o uso de jogos, de materiais didáticos (como o Material Dourado Montessori, os Blocos Lógicos, a escala Cuisenaire, entre outros), embora nem sempre tenham sido explorados nessa perspectiva.

Do mesmo modo que não houve preparação adequada para a entrada dos professores no Movimento Matemática Moderna, também não houve discussão suficiente para que pudessem entender o que estava sendo criticado no trabalho com os conjuntos ou os prejuízos acarretados pelo excesso de algebrismo, ou abandono da Geometria, ou da falta de vínculos com o cotidiano.

## 4.2. Propostas que orientaram os currículos nas décadas de 80 e 90

Os anos 80 no Brasil foram marcados politicamente pelo processo chamado de abertura democrática que colocava fim ao longo período de ditadura militar que se

[4] Termo utilizado na época para a formação de professores.

implantou em 1964. O novo contexto político e social era favorável para a apresentação de propostas para a construção de uma escola inspirada em valores democráticos, grande aspiração da sociedade brasileira.

No caso específico dos currículos de Matemática, os debates travados em torno do Movimento Matemática Moderna, as discussões motivadas por concepções e distorções que ficavam cada vez mais evidentes, impulsionaram Secretarias Estaduais e Municipais de Educação a elaborarem novas propostas curriculares para o ensino de Matemática.

Na rede pública estadual de São Paulo, teve início em 1985, o processo de elaboração da chamada Proposta Curricular para o ensino de 1º grau. Na apresentação dessa proposta (p.7), eram apresentados os principais problemas diagnosticados:

- a preocupação excessiva com o treino de habilidades, com a mecanização de algoritmos, com a memorização de regras e esquemas de resolução de problemas, com a repetição e a imitação não com uma aprendizagem que se dê, inicialmente, pela compreensão de conceitos e de propriedades, pela exploração de situações-problema nas quais o aluno é levado a exercitar sua criatividade, sua intuição;
- a priorização dos temas algébricos e a redução ou, muitas vezes, eliminação de um trabalho envolvendo tópicos de Geometria;
- a tentativa de se exigir do aluno uma formalização precoce e um nível de abstração em desacordo com seu amadurecimento.

Nessa proposta, conferia-se à Matemática uma dupla função, defendendo-se que "ela é necessária em atividades práticas que envolvem aspectos quantitativos da realidade, como são as que lidam com grandezas, contagens, medidas, técnicas de cálculo " e que "ela desenvolve o raciocínio lógico, a capacidade de abstrair, generalizar, transcender o que é imediatamente sensível" (p. 9).

Outra sugestão explicitada era a de apresentar o conteúdo, em diferentes níveis de abordagem, em que se procura respeitar a integração dos temas a serem trabalhados, bem como seu desenvolvimento "em espiral", conforme preconizava Jerome Bruner (1972). Esse modelo apoiava-se no pressuposto de que qualquer matéria oferece elementos interessantes para a educação da criança, de forma que algo pode ser ensinada a ela, honradamente, em qualquer momento e que, portanto, um plano de estudos deve ser elaborado em torno de grandes questões, princípios e valores que uma sociedade estima dignos do interesse contínuo de seus membros. Defendia-se a idéia de que dominar as idéias básicas e usá-las eficientemente, exige constante aprofundamento da compreensão que delas se tem, o que se pode conseguir aprendendo-se a utilizá-las em formas progressivamente mais complexas.

Contrariamente às finalidades de mensuração dos resultados para fins de classificação do aluno em candidato à aprovação ou retenção, a proposta apregoava que a avaliação deveria buscar um diagnóstico do processo de aprendizagem do aluno e levantar elementos para corrigir distorções observadas nesse processo. Assim, tanto os progressos como as dificuldades de aprendizagem do aluno deveriam ser observados por constituírem parâmetros importantes e permanentes para o replanejamento das ações do professor e aperfeiçoamento do seu trabalho pedagógico.

A proposta defendia que o conteúdo a ser ensinado deveria ser compreendido como veículo para o desenvolvimento de uma série de idéias fundamentais, convenientemente articuladas, tendo em vista as grandes metas que são a instrumentação para a vida e o desenvolvimento do raciocínio. Tais idéias fundamentais, como por exemplo, as de proporcionalidade, equivalência, semelhança, têm como suporte, muitas vezes, mais de um assunto da lista de conteúdos. Elas, no entanto, é que são fundamentais e não os assuntos em si. Embora relativizando a importância de um rol fixo de conteúdos, a proposta apresentava quadros de conteúdo, por série.

Três grandes temas foram tomados como eixos organizadores do currículo:

- *Números*– indicando-se como fio condutor a história da matemática, em lugar das propriedades estruturais;
- Geometria– explorando-se a manipulação dos objetos, o reconhecimento das formas, as suas características e propriedades, até chegar a uma sistematização.
- *Medidas*– apontando-se como o fio que tece a junção entre Números e Geometria.

A participação dos professores de Matemática da rede pública estadual de São Paulo na construção dessa proposta foi bastante significativa. O clima de abertura política favorecia e estimulava o envolvimento das bases do sistema educativo, em especial dos professores. Diferentes versões do documento, elaborado por uma equipe de professores de Matemática com assessoria de especialistas da área, foram submetidas à análise dos professores que também apresentavam suas críticas e sugestões.

No entanto, nesse período, um princípio da reforma confrontou-se com algumas crenças manifestadas por grupos bastante numerosos de professores. Os documentos oficiais preconizavam uma educação democrática, que incluísse cada vez mais as camadas menos favorecidas da sociedade brasileira. No caso da Matemática, defendia-se que todos os alunos podem aprender e fazer matemática em sala de aula, o que significa construí-la, fabricá-la, produzi-la. Pretendia-se enfrentar um problema evidenciado em estudos oficiais, dee que a Matemática era uma das disciplinas que mais reprovavam alunos, sendo em grande parte responsável pela evasão de estudantes.

Nesse ponto, sem dúvida, um conflito nem sempre explicitado estava estabelecido: muitos professores revelavam crenças arraigadas como a de que "Matemática é algo para quem tem dom", para quem é “geneticamente dotado de certas qualidades” ou de que “é preciso ter um certo capital cultural para atingir o universo matemático”.

Também na Secretaria Municipal de Educação de São Paulo, capital, o projeto denominado "Movimento de Reorientação Curricular", desenvolvido no período de 89 a 92, em que a interdisciplinaridade era o eixo do projeto curricular para a ação pedagógica da escola, os professores foram envolvidos no debate.

A Secretaria fez uma opção por "temas geradores" para desenvolver propostas interdisciplinares. Os temas geradores indicados pelas escolas foram: Transporte, Moradia, Saúde, Saneamento Básico, Trabalho, Lazer, Convivência.

Segundo os documentos oficiais publicados pela Secretaria...

> “a opção pelos temas geradores se traduz numa nova relação a ser estabelecida entre o currículo da escola e a realidade da comunidade local. Os temas geradores enunciam situações problemáticas significativas de uma dada comunidade que, em sendo trazida para escola, devem ser compreendidas criticamente, apontando possibilidades de intervenção nessa realidade histórica... Os temas refletem uma realidade que é global, interdisciplinar na sua natureza. Por serem situações amplas, permitem uma abordagem interdisciplinar, menos fragmentada possível, gerando relações entre essa realidade e o conhecimento produzido e acumulado historicamente pela humanidade, permitindo, ao mesmo tempo, a compreensão do tema gerador pela apropriação do conhecimento e a criação e/ou reconstrução de novos conhecimentos”.

Também neste caso, embora tenha sido incentivada a participação dos professores, na implementação surgiram muitas críticas quanto ao que se considerava um imposição das articulações interdisciplinares que acabava limitando e descaracterizando o papel das disciplinas para a formação dos alunos.

De modo geral, nas décadas de 80 e 90, as novas gerações de professores de Matemática foram construindo um discurso, provavelmente esclarecedor de suas concepções e crenças. Dentre elas, a mais recorrente foi a de que a Matemática a ser ensinada tem que estar de acordo com a realidade dos alunos e deve enfatizar as suas aplicações no cotidiano.

### 4.3. Propostas de âmbito nacional elaboradas no final da década de 1990

De 1995 a 2002, o Ministério da Educação desencadeou o processo de elaboração de Parâmetros Curriculares Nacionais - PCN, para diferentes níveis e modalidades de ensino. Também nesse período, o Conselho Nacional de Educação apresentou Diretrizes Curriculares Nacionais, com força de lei. Nesse processo, envolto em muita polêmica, alguns dilemas clássicos da educação brasileira voltaram à discussão.

Um deles refere-se ao caráter de centralização ou descentralização que deve estar presente na tomada de decisões curriculares. Os programas nacionais obrigatórios explicitados ao tempo das reformas Campos e Capanema foram sendo substituídos por guias/propostas não obrigatórios elaborados pelas secretarias estaduais e secretarias municipais de educação, ao longo das décadas de 70/80. Essa descentralização, se por um lado tinha aspectos positivos, em termos da flexibilização curricular e da possibilidade de incluir aspectos regionais, por outro lado acarretava problemas bastante graves.

Ao deixar essa atribuição aos estados e municípios, o reflexo das desigualdades regionais nos currículos ficava evidente: regiões mais desenvolvidas economicamente e socialmente, com maior acesso à produção de conhecimentos científicos, reuniam melhores condições de elaborar projetos curriculares contemporâneos, incluindo os avanços das pesquisas tanto das áreas de conhecimento específico, como das áreas didático-pedagógicas.

Em contrapartida, as demais regiões continuavam reproduzindo listas de conteúdos sem maior reflexão sobre a relevância destes e sem discutir questões referentes à sua abordagem. Esse fato foi revelado claramente num estudo feito pela Fundação Carlos Chagas (1996), que buscava identificar o que se ensinava nas diferentes regiões brasileiras a partir da análise de documentos curriculares oficiais.

Nesse estudo constatou-se que a profunda segmentação social, decorrente da iníqua distribuição de renda, que sempre funcionou como um entrave para que a população pobre fizesse valer seu direito à educação era também um obstáculo para que tivessem acesso a um ensino "contemporâneo" e de qualidade.

Foi por força da Lei Federal n.º 9.394, em 20/12/96, que se estabeleceu a competência da União, em colaboração com estados, Distrito Federal e municípios, de definir diretrizes para nortear os currículos, de modo a assegurar uma formação básica comum. Esse dispositivo legal conduziu à elaboração Diretrizes gerais e de Parâmetros Curriculares para as diferentes disciplinas escolares. Equipes foram constituídas para a formulação de um texto preliminar que foi analisado e discutido por professores e especialistas, tanto nas secretarias de educação como nas universidades.

A tarefa implicou no enfrentamento de várias tensões e na tentativa de buscar respostas a questões como por exemplo: Como construir referências nacionais de modo a enfrentar antigos problemas da educação brasileira e ao mesmo tempo, enfrentar novos desafios colocados pela conjuntura mundial e pelas novas características da sociedade, como a urbanização crescente? O que significa indicar pontos comuns do processo educativo em todas as regiões mas, ao mesmo tempo, respeitar as diversidades regionais, culturais e políticas existentes, no quadro de desigualdades da realidade brasileira? Como equacionar problemas referentes à possibilidade de acesso aos centros de produção de conhecimento, tanto das áreas curriculares quanto da área pedagógica, e que se refletem na formação dos professores que colocaram as idéias curriculares em prática? Que Matemática deve ser ensinada às crianças e jovens de hoje e com que finalidade? De que modo teorias didáticas e metodológicas devem ser incorporadas ao debate curricular, sem que sejam distorcidas e tragam prejuízos à aprendizagem dos alunos?

Os Parâmetros Curriculares Nacionais da área de Matemática para o Ensino Fundamental (7 a 14 anos) buscaram expressar a contribuição das investigações e das experiências na área de Educação Matemática. Eles explicitaram o papel da Matemática pela proposição de objetivos que evidenciam a importância de o aluno valorizá-la como instrumental para compreender o mundo à sua volta e de vê-la como área do conhecimento que estimula o interesse, a curiosidade, o espírito de investigação e o desenvolvimento da capacidade para resolver problemas.

Os Parâmetros indicaram a Resolução de Problemas como ponto de partida da atividade Matemática e discutiram caminhos para "fazer Matemática" na sala de aula, destacando a importância da História da Matemática e das Tecnologias da Comunicação. Apontara também a importância de estabelecer conexões entre os blocos de conteúdos, entre a Matemática e as outras áreas do conhecimento e suas relações com o cotidiano e com os chamados Temas Sociais Urgentes (como Meio Ambiente, Saúde, Pluralidade Cultural, Ética etc). Nesse contexto, as investigações e projetos pilotos, desenvolvidos em áreas como a da Modelagem e da Etnomatemática, focalizando a interferência de aspectos sociais e culturais nos currículos, também são possibilidades de trabalho abertas nesse documento.

Os PCN destacaram a importância de o aluno desenvolver atitudes de segurança com relação à própria capacidade de construir conhecimentos matemáticos, de cultivar a auto-estima, de respeitar o trabalho dos colegas e de perseverar na busca de soluções. Adotaram como critérios para seleção dos conteúdos sua relevância social e sua contribuição para o desenvolvimento intelectual do aluno. Indicaram conteúdos não apenas na dimensão de conceitos, mas também na dimensão de procedimentos e de atitudes. Enfatizaram a importância de superar a organização linear dos conteúdos e a necessidade de explicitar as conexões entre eles, inspirando-se na metáfora de construção do conhecimento como "rede".

Ainda em relação aos conteúdos, os Parâmetros incorporaram, já no ensino fundamental, o estudo da probabilidade e da estatística e evidenciaram a importância da geometria e das medidas para desenvolver as capacidades cognitivas fundamentais. Os blocos de conteúdos para o ensino fundamental são os seguintes: Números e Operações. Espaço e Forma. Grandezas e Medidas. Tratamento da Informação.

Os Parâmetros discutiram orientações didáticas relativas a conceitos e procedimentos matemáticos, analisando obstáculos que podem surgir na aprendizagem de certos conteúdos e sugerindo alternativas que possam favorecer sua superação.

De modo geral, as propostas apresentadas nos PCN não significaram um rompimento radical com as propostas dos anos 80, em termos de seus princípios mais amplos. No entanto, trouxeram alguns aspectos novos, incorporando as mais recentes contribuições das investigações em Educação Matemática e que também esbarram em concepções e crenças de professores.

Os PCN indicam a necessidade de incluir no trabalho da sala de aula, o que se pode denominar como componentes social e cultural do currículo, além da componente simbólica, conceitual. Nesse contexto, emergem propostas de trabalho com projetos que estimulem a interpretação e explicação da realidade, permitindo aos alunos um processo de análise crítica de valores e idéias, mediante atividades apresentadas em contextos significativos para os alunos, centradas em problemas ou tarefas estimulantes referentes ao entorno físico e social mais amplo. Surgem também propostas de trabalho de "investigação em sala de aula", com o objetivo de aproximar o fazer do aluno do fazer matemático, ou seja, de atividades inerentes ao processo de construção histórica do conhecimento, como a experimentação, a validação, a comunicação por escrito da experiência, entre outros.

Evidentemente, tais propostas, embora potencialmente interessantes, pressupunham conhecimentos do professor muito mais amplos e profundos dos que ele constituiu em sua formação. Conhecimentos contemplando não apenas uma diversidade significativa de conteúdos, temas, mas também, de métodos de investigação, de aplicações, de relações com outras áreas etc, mostrando a Matemática como fenômeno cultural e como rica fonte de explicações. Sem tais conhecimentos, idéias como as de interdisciplinaridade ou propostas de se trabalhar os conteúdos de forma contextualizada, acabam sendo distorcidas em sua implementação. É o caso, por exemplo, do entendimento do que vem a ser contextualização. Observa-se uma relação muito forte entre "contextualização" e "cotidiano/realidade" e não de outras possibilidades de contextualização, inclusive as internas à própria Matemática, o que pode conduzir a um empobrecimento de outros aspectos do conhecimento que deixariam de ser tratados nos currículos, por não serem automaticamente usados no dia-a-dia dos alunos.

Outro ponto que ainda encontra resistências refere-se ao fato de que o professor deve identificar conhecimentos prévios e hipóteses levantadas pelos alunos, com um ponto de partida do trabalho a ser programado para a sala de aula. As crenças mais freqüentes são as de que os alunos só podem resolver problemas que já conhecem, que já viram resolvidos e que podem tomar como modelo. Essa convicção dificulta a aceitação de que o ponto de partida da atividade matemática não deve ser a definição, mas o problema. E que o problema não é certamente um exercício em que se aplica, de forma quase mecânica, uma fórmula ou um processo operatório. Ainda é bastante discutida a atividade matemática essencialmente elaboração de hipóteses, de conjecturas, que são confrontadas a outras e testadas na resolução do problema.

Estudos como os que evidenciam hipóteses que as crianças elaboram sobre as escritas numéricas, sobre as operações, as diferentes formas que encontram para resolver uma mesma situação problema também ainda são pouco conhecidos pela grande maioria dos professores. Da mesma forma, pouco se conhece sobre o papel do erro na aprendizagem dos alunos, as diferenças entre obstáculos didáticos e epistemológicos que interferem na aprendizagem.

## 5. Panorama atual

A dificuldade de implementar inovações curriculares no Brasil é um dos problemas mais complexos a serem enfrentados pelos sistemas educacionais brasileiros em seus diferentes níveis. Em seus estudos KOBASHIGAWA (2006) revela que professores de Matemática de uma região do estado de São Paulo que participaram de sua pesquisa embora declarem que conhecem as orientações contidas nos Parâmetros Curriculares Nacionais, não foram capazes de discuti-los em profundidade e fazem um discurso bastante contraditório a respeito deles. Embora mostrem concordância com princípios como resolução de problemas, conexões com temas de outras disciplinas, com o cotidiano e articulações internas, apontam dificuldades em implementá-las em sala de aula.

No grupo pesquisado, 63% afirmam que planejam suas aulas utilizando os PCN, enquanto 22% utilizam parcialmente e 15% não utilizam em seu planejamento. Para ilustrar, transcrevemos alguns depoimentos do estudo de KOBASHIGAWA[5]:

> "Sim, procurando orientar os objetivos e estratégias por eles, de forma que ocorra a contextualização tendo como prioridade o cotidiano do aluno." (S26)
> "Sim, existe uma necessidade no uso, pois enriquece o planejamento deixando-o "amarrado" com o que devemos ensinar e contextualizar com os nossos alunos." (S65)
> "Sim, procuro sempre as orientações, além disso utilizo jogos matemáticos, paradidáticos (História da Matemática), jornal (encartes), problemas (resolução práticas), filmes (muito utilizados nos grupos de reforço)." (S62)
> "Sim, como inspiração e roteiro." (S25)
> "Não discordo, porém acho muito extenso(o PCN) e nem sempre há aplicabilidade possível no atual ano letivo." (S2)
> "Não se trata de discordar, mas encontro dificuldades para colocá-lo em prática." (S46)
> "Não concordo com o uso de calculadora no ensino fundamental." (S18)

[5] Pesquisadora integrante do Projeto de Pesquisa "Formação de Professores e Inovações Curriculares nos Ensinos Fundamental e Médio" mencionado no início do texto, que envolveu 70 professores de Matemática.

> "Não conheço os PCN direito, dei uma olhada mas foi muito superficial. Acho que isso tem que estudar durante muito tempo. É um livro, ele assusta para mim que sou de exatas ... Para maioria, acho que é possível, ou então para o pessoal que gosta de ler , eu não gosto de ler ... Eu gosto de ler resumo ...Eu tenho dificuldade. Eu acho muita coisa." (S63)
>
> "Nós discutimos sim, no começo do ano, durante o planejamento, mas ainda existe muita resistência, muitos não conhecem e pedem, uns pegaram, leram, comentaram, mas outros não se interessaram..." (S7)
>
> "O problema maior é que nós aprendemos de um jeito e temos que ensinar de outro modo, e esse novo cria um atrito dentro da gente, eu pelo menos que sou o mais velho aqui de todos, aprendi de um método arcaico: tinha um tablado na frente.... e com medo danado, pois o professor era o ser supremo, o dono da verdade... Hoje não, o que nós ensinamos no ano, o aluno aprende em meia hora pela Internet e isso cria um atrito em nós mesmos, pois às vezes queremos até estar mudando, trazendo o novo, mas o íntimo nosso não permite, fica na dúvida, talvez sejam os motivos das interrogações daí... Eu acho que o aluno também está com falta de perspectiva de vida, pois no meu tempo a gente via professor com casa própria, carro do ano, bem de vida... Hoje não, o que a gente vê bem de vida é o analfabeto que joga bola e mal sabe escrever o nome; o traficante, o assaltante de banco... Essa falta de perspectiva de emprego é que desmotiva o aluno para o estudo."(S57)
>
> "A gente leu e entende, agora na sala de aula a coisa acontece diferente, na sala de aula, você se depara com alguns problemas que a gente pára e pensa como vou aplicar isso nesse problema, nessa situação? O que preciso fazer com que meu aluno se interesse por isso? Que caminho devo seguir? E uma série de pontos de interrogação e você sozinho fica difícil. Eu acho que deveria ser colocado em discussão com os professores de Matemática, mas no sentido de achar soluções para o nosso do dia a dia dentro disso aqui (PCN)" (S26)

No segundo semestre de 2007 participamos, como consultora, de um Programa desenvolvido pela Secretaria Municipal de São Paulo denominado "Orientações curriculares e proposição de expectativas de aprendizagem para o ensino fundamental" que tinha como objetivos contribuir para a reflexão e discussão sobre o que os estudantes precisam aprender, relativamente a cada uma das áreas de conhecimento e subsidiar as escolas no processo de seleção e organização de conteúdos de ensino mais relevantes a serem trabalhados ao longo dos nove anos do Ensino Fundamental e que precisam ser garantidos a todos os estudantes (na faixa de 6 a 14 anos).

Um conjunto de expectativas de aprendizagem forma submetidos à discussão dos professores que deveriam analisá-los em função de critérios como por exemplo relevância social, potencialidade para a formação dos alunos e acessibilidade. A tabulação dos resultados das escolas mostraram que as solicitações de exclusão ou modificação referem-se a temas que tradicionalmente não são desenvolvidos na sala de aula ou porque são "novos" no currículo como o "Tratamento da Informação" ou porque os professores têm grande dificuldade em ensiná-los como é o caso dos conteúdos de Geometria. Com relação às turmas de Ciclo I (alunos da faixa de 6 a

10 anos) revelou-se uma perspectiva ainda muito forte de que nos anos iniciais basta ensinar os "números" e as "quatro operações". No Ciclo II (alunos da faixa de 11 a 14 anos) os resultados foram similares, no sentido de manter os conteúdos tradicionais, particularmente os que envolvem manipulações algébricas. Ainda foi possível observar muita resistência em relação a expectativas de aprendizagem que envolviam "leitura e escrita" nas aulas de matemática e as que faziam menção ao uso da calculadora, que ainda é vista como algo "perigoso" para a aprendizagem em Matemática. O argumento mais freqüente utilizado para exclusões, tanto no Ciclo I como no Ciclo II, foi o de que "os estudantes não são capazes de aprender as noções matemáticas envolvidas (particularmente as relacionadas a geometria, grandezas e medidas e tratamento da informação).

## 6. Comentários finais

Como vimos, no período do Movimento Matemática Moderna, o que se colocou em prática estava distante de ser um ensino renovado e democrático da Matemática, preparando o aluno para a compreensão da ciência, mas um ensino formalizado ao extremo, decepado de todo suporte intuitivo, apresentado a partir de situações artificiais e, além de tudo, bastante seletivo.

No período que sucedeu o declínio da Matemática Moderna, as concepções norteadoras das propostas novas propostas como a resolução de problemas, a contextualização e a interdisciplinaridade, passaram a fazer parte do discurso dos professores sem, no entanto, alterarem suas práticas.

Assim, ao longo do tempo, o processo de implementação de inovações curriculares mostrou um grande distanciamento entre o que se pretendia e o que de fato é desenvolvido em sala de aula.

Sem dúvida, no Brasil, há fatores bastante decisivos como os referentes a baixos salários, extensas jornadas de trabalho, rotatividade de professores nas escolas, que interferem negativamente num processo de construção de um projeto curricular e que ainda não foram devidamente equacionados pelas políticas públicas que deveriam tratar da valorização dos professores.

No entanto, para nós educadores matemáticos que atuamos na formação inicial e continuada de professores, há um ponto estratégico que precisa ser considerado: é freqüente, entre egressos dos cursos de Licenciatura em Matemática, um desconhecimento completo sobre debates curriculares. Excluído desse debate, o professor tem enormes dificuldades em refletir sobre os processos que, historicamente, imprimiram à efetivação das propostas curriculares, o caráter de seleção de conteúdos e montagem de tarefas, a serem desenvolvidas cronologicamente, numa seqüência linear, sem considerar as finalidades da educação, a reconstrução de conhecimentos pelos alunos e sem as necessárias elaborações na transmissão de conhecimentos, considerando-se a amplitude do capital cultural disponível e as diferenças naturais entre gerações.

Faz algum tempo Shulman (1992) alertou para o fato de que o professor deve compreender a disciplina que vai ensinar a partir de diferentes perspectivas. E incluiu o conhecimento do currículo como uma das vertentes do conhecimento do professor. Considero fundamental destacar a importância de que nos cursos de formação inicial de professores de Matemática passemos a considerar a necessidade de integrar os futuros professores na discussão sobre currículos e sobre as formas de implementação.

Outra medida importante é a de debater com professores de diferentes países, sobre as algumas questões formuladas ao início deste artigo: Por que professores aparentam ser resistentes às novas idéias que, em geral, são veiculadas nos documentos curriculares? A pouca participação dos professores no processo de discussão de propostas seria um dos elementos responsáveis por essa “resistência”? Como essa resistência poderia ser enfrentada? Essa foi a grande motivação que me levou a escrever este artigo, atendendo ao amável convite da UNIÓN.

## Referências bibliográficas


- Ball, Deborah. Knowledge and reasoning in mathematical pedagogy: examining what prospective teachers bring to teacher education. Tese (Doutoramento). 1991. Disponível – bem como outros artigos e textos – em: <http://wwwpersonal.umich.edu/~dball/>. Acesso em: 25 set. 2003.
- Charlot, B. Histoire de lá réforme des "maths modernes"; idées directrices et contexte institutionnel et socio-économique". Bulletin APMEP nº 35. IREM du Mans. França, 1986.
- Garcia, C. M. Formação de Professores para uma mudança educativa. Portugal: Porto, 1998.
- Cury, Helena Noronha. Concepções e crenças dos professores de matemática: pesquisas realizadas e significados dos termos utilizados. *Bolema*, São Paulo: Unesp, ano 12, n. 13, p. 29-44, 1999.
- Elbaz, Freema. *Teacher thinking*: a study of practical knowledge. Londres: Croom Helm, 1983.
- Keitel, C. E Kilpatrick, J. Racionalidade e irracionalidade dos estudos comparativos internacionais. Educação e Matemática 55, p.71-80. Portugal. 1999.
- Kobashigawa, M. Das prescrições ao currículo praticado nas aulas de matemática. Dissertação de Mestrado. Programa de Estudos Pós Graduados em Educação Matemática da Pontifícia Universidade Católica de São Paulo. 2006.
- Ministério da Educação. Brasil. Secretaria do Ensino Fundamental. *Parâmetros Curriculares Nacionais*. Matemática. 1º e 2º ciclos. 1997.
- Pires, Célia Maria Carolino. Matemática. Currículos de matemática: da organização linear à idéia de rede. São Paulo: FTD, 2000.

- ______. As decisões sobre Currículos no Brasil: os descaminhos das políticas públicas e suas conseqüências. E agora, para onde vamos? In: Anais do XV Encontro Regional de Educação Matemática – UNISINOS. São Leopoldo, 2003.
- ______. Formação inicial e continuada de professores de matemática: possibilidades de mudança. In: Anais do XV Encontro Regional de Educação Matemática – UNISINOS. São Leopoldo, 2003.
- ______. Educación Matemática e su influencia en el processo de reorientación curricular del sistema educacional brasileño. Comunicação científica apresentada nas XI Jornadas sobre Aprendizaje y Enseñanza de las Matemáticas, realizadas em Tenerife, Ilhas Canárias, Espanha, promovidas pela Federação Espanhola de Sociedades de Educação Matemática, em julho de 2003.
- ______. Articulando ações de formação continuada com trajetória escolar de professores. Artigo apresentado na reunião do GT de Formação de professores, durante a realização do II SIPEM, publicado juntamente com Edda Curi. Santos. 2003
- Ponte, João Pedro. Da formação ao desenvolvimento profissional. In: Conferência Plenária apresentada no Encontro Nacional de Professores de Matemática ProfMat, 1998.
- Sacristán, J.G. O Currículo: uma reflexão sobre a prática. Porto Alegre: ArtMed, 2000.
- Serrazina, Lurdes. Reflexão, conhecimento e práticas letivas em matemática num contexto de reforma curricular no 1.º ciclo. Quadrante, Lisboa: APM, n. 8, p. 139-168, 1999.
- Shulman, Lee. Renewing the pedagogy of teacher education: the impact of subject-specific conceptions of teaching. In: Mesa, L. Montero; Jeremias, J. M. Vaz. Las didácticas específicas en la formación del profesorado. Santiago de Compostela; Tórculo, 1992.
- Thompson, Alba. A relação entre concepções de matemática e de ensino de matemática de professores na prática pedagógica. Zetetiké, Campinas: Unicamp, v. 5, n. 8, p. 9-45, jul.-dez. 1997.
- São Paulo (Estado) Secretaria da Educação. Coordenadoria de Estudos e Normas Pedagógicas. Guias Curriculares para o Ensino de Matemática: lº grau. São Paulo, SE/CENP, 1976.
- ________. Proposta Curricular para o Ensino de Matemática: Primeiro grau. São Paulo, SE/CENP,1986.
- São Paulo. Secretaria Municipal de Educação. Um primeiro olhar sobre o projeto. Cadernos de Formação. Série: Ação Pedagógica da Escola pela via da interdisciplinaridade. São Paulo, 1990.

UNIÓN
REVISTA IBEROAMERICANA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA

Diciembre de 2007, Número 12, páginas 27 - 36
ISSN: 1815-0640

# *Resolución de problemas y contextos matemáticos*

***Juana Contreras Sepúlveda y Claudio del Pino Ormachea***

## Resumen

En la actividad de resolución de problemas, eje fundamental en la enseñanza y aprendizaje de la matemática, en general, es poco vivenciado por alumnos y profesores, que la mayoría de los problemas, se dejan resolver en distintos contextos matemáticos, es decir, que en sus resoluciones se pueden usar, juntos o separados, resultados y procedimientos geométricos, o algebraicos, o numéricos. En este trabajo se entrega una reflexión sobre este importante aspecto y se presenta un problema resuelto en diferentes contextos matemáticos.

## Abstract

One of the core topics in learning mathematics involves problem solving. Students as well as teachers tend to have a very narrow approach believing that there is just one way to solve a particular problem. In general, they lack a broader point of view. In problem solving one can use either separately or simultaneously techniques and results from Algebra, Geometry or Arithmetic. In this work we present some thoughts about this issue. We show an example that can be solved using different mathematical techniques.

## Introducción

Como todos los estudios que dicen relación con estrategias para resolver problemas coinciden (de Guzmán, 1993; González, 1995; Polya, 1970), para empezar a resolver un problema, junto con la etapa de familiarización, es importante elegir un ambiente matemático donde éste se formula, o eventualmente se re-formula. Una vez puesto el problema en un contexto determinado, tal como lo propone Schoenfeld (Schoenfeld, 1992), pasan a tener una importancia decisiva los recursos atingentes al conocimiento y manejo de proposiciones y procedimientos, que la persona que intenta resolver el problema, tenga en el contexto matemático donde se ha puesto el problema. Esta importancia se refleja en el hecho que, en este momento el problema a resolver pasa a ser un problema de carácter numérico, algebraico o geométrico.

## Problemas y contextos

Relacionado con la resolución de problemas y contextos, poco referido en la literatura sobre resolución de problemas, se pueden plantear las siguientes consideraciones:

- Un problema no pertenece, de por sí, a un determinado contexto matemático. El problema pasa a ser de un contexto matemático en el momento que el *resolvedor* lo formula o re-formula (proyecta) en él.
- Es importante que el alumno comprenda que la matemática es un conjunto integrado de resultados y procedimientos, los cuales se separan para su enseñanza solamente por razones metodológicas. Por lo tanto un problema que surge, por ejemplo, en geometría, puede perfectamente ser resuelto con herramientas del álgebra y viceversa.
- En la medida que el *resolvedor* se sienta más seguro y confiado en el manejo de resultados y procedimientos de un determinado ámbito de la matemática, lo hará formular o re-formular, cuando sea posible, sus problemas en dicho ámbito.
- El *resolvedor* debe tener, como es de suponer, la suficiente flexibilidad para que una vez puesto el problema en un determinado contexto, si la solución no se vislumbra, reformular el problema en otro contexto que le parezca razonable. Este ejercicio se podrá repetir las veces que sea necesario, es decir, hasta que una solución aparezca (de Guzmán, 1993; Schoenfeld, 1992).
- Como la práctica lo corrobora, es posible que, con el problema planteado en un contexto matemático, se obtengan avances parciales en la búsqueda de la solución y luego proyectando el problema en otro contexto matemático y usando los avances obtenidos, se pueda acceder a una solución del problema (Polya, 1970).
- Una vez resuelto un problema, también es de alto interés, preguntarse que habría pasado si el problema se hubiese planteado en otro contexto matemático (de Guzmán, 1993; González, 1995). Es posible que de esta manera surjan soluciones más simples o *elegantes*.

Es altamente recomendable que el profesor de matemática enfatice explícitamente este aspecto con sus estudiantes, pues de esta manera permitirá que ellos, por una parte incrementen sus habilidades para resolver problemas, y por otra aprecien y valoren la riqueza y variedad de recursos que ofrece la matemática para resolver problemas.

## Un problema y diversas soluciones

A modo de ejemplo y para ilustrar las ideas anteriores, se presenta un problema, clásico y sencillo, y se exploran diversas soluciones por medio de *proyecciones* de él en diversos contextos matemáticos.

En cada solución expuesta, se presenta: *Ambiente matemático* (algebraico, numérico o geométrico) en el cual se busca la solución[1], *Contenidos Matemáticos* que se utilizan en la solución, *Pre-requisitos específicos de contenidos* y un breve *Bosquejo de solución*.

**Problema**: Determinar un número real positivo $x$ de modo que la expresión $A = x^2(16 - x^2)$ alcance su mayor valor, y determinar este valor.

- **Solución 1**.
  1. *Ambiente Matemático*: Numérico.
  2. *Contenidos Matemáticos*: Evaluación de expresiones algebraicas.
  3. *Pre-requisitos específicos de contenidos*:
     a) Números racionales
     b) Construcción de tabla de valores
     c) Orden en los números racionales
  4. *Bosquejo de solución*:

Para empezar, se construye una tabla de valores de $x^2(16 - x^2)$ para, por ejemplo, valores de $x$ entre 0 y 6, con incrementos de 1:

| $x$ | 0 | **1** | 2 | 3 | **4** | 5 | 6 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $x^2(16 - x^2)$ | 0 | 15 | 48 | 63 | 0 | $-225$ | $-720$ |

Por inspección de esta tabla, se puede concluir que el valor de $x$ buscado, debería estar entre 1 y 4, pues el valor de la expresión en 0.999 es 14.972 (aproximadamente) y para valores mayores que 4 es, claramente, negativa. Con esta observación, es posible refinar la tabla. Construyendo una nueva tabla para valores de $x$ entre 1 y 4, con incrementos de 0.2, se puede concluir que el valor buscado de $x$ se debería encontrar entre 2 y 3. Construyamos entonces una tabla, para valores de $x$ entre 2 y 3 con incrementos de 0.1:

| $x$ | 2 | 2.1 | 2.2 | 2.3 | 2.4 | 2.5 | 2.6 | 2.7 | **2.8** | 2.9 | 3 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $x^2(16 - x^2)$ | 48 | 51.11 | 54.01 | 56.65 | 58.98 | 60.94 | 62.46 | 63.49 | **63.97** | 63.83 | 63 |

De esta tabla de valores, se concluye que, aproximadamente, el máximo de $x^2(16 - x^2)$ se alcanza cuando $x \approx 2.8$ y que el valor de este máximo es 63.97 (aproximadamente). Como es de suponer, este proceso se puede iterar hasta obtener un valor aproximado de $x$ con la cantidad de decimales exactos que se desee. Este trabajo con tablas de valores se puede apoyar eficientemente con el uso, por ejemplo, de una planilla Excel.

[1] Como es de suponer, algunas soluciones combinan estos métodos. En tales casos, el ambiente matemático elegido es el que, a nuestro parecer, tiene *mayor peso* en la solución entregada.

- **Solución 2.**
  1. *Ambiente Matemático*: Gráfico.
  2. *Contenidos Matemáticos*: Funciones.
  3. *Pre-requisitos específicos de contenidos*:
     a) Nociones básicas de funciones
     b) Gráfica de funciones. Interpretación de gráficos.
  4. *Bosquejo de solución*:

Con apoyo de un programa computacional que grafique funciones o una calculadora gráfica, se grafica la función $y = x^2(16 - x^2)$, y por inspección del gráfico obtenido (revisando los correspondientes valores de $y$, para valores de $x$ entre 0 y 4), se estima una solución aproximada, del problema.

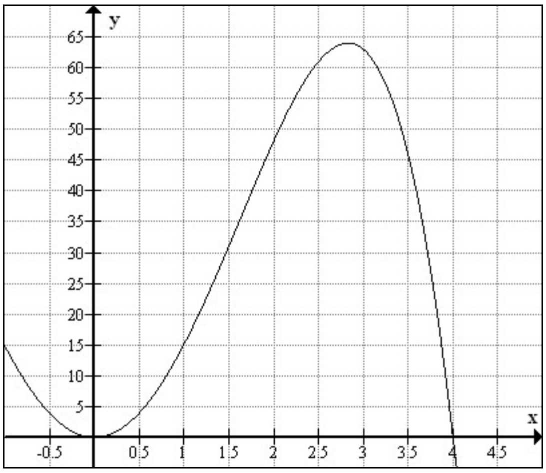



Gráfico de $y = x^2(16 - x^2)$

- **Solución 3**.
  1. *Ambiente Matemático*: Algebraico.
  2. *Contenidos Matemáticos*: *Manipulación* de expresiones algebraicas.
  3. *Pre-requisitos específicos de contenidos*:
     a) Completación de cuadrados
     b) Propiedad: Para cada real $a$, se cumple que $a^2 \geq 0$.
  4. *Bosquejo de solución*:

Completando cuadrado en $x^2$, se obtiene que la expresión propuesta es igual a

$$A = 64 - \left(x^2 - 8\right)^2$$

Analizando algebraicamente esta expresión, se concluye que $A$ alcanza su mayor valor cuando $x^2 = 8$, es decir cuando $x = \sqrt{8} \approx 2.828427124$ y que este valor es igual a 64.

- **Solución 4**.
  1. *Ambiente Matemático*: Geométrico-algebraico.
  2. *Contenidos Matemáticos*: Función cuadrática.
  3. *Pre-requisitos específicos de contenidos*:
     a) Gráfica de la función cuadrática (parábola).
     b) Coordenadas del vértice de una parábola.
     c) Cambio de variable.
  4. *Bosquejo de solución*:

Es claro que $A = x^2(16 - x^2) = -x^4 + 16x^2$. Haciendo $u = x^2$, se tiene que $A = A(u) = -u^2 + 16u$ es una función cuadrática en $u$. Luego, en el plano $u\,A$ el gráfico de $A = A(u)$ es una parábola. Como el coeficiente principal de $A$ es negativo, ella se *abre* hacia abajo, luego los valores de $u$ y $A$ que dan la solución del problema son las coordenadas del vértice de esta parábola: $(u, A) = (8,64)$. Luego $A$ es máximo cuando $x = \sqrt{8}$ y su máximo valor es 64.

- **Solución 5**.
  1. *Ambiente Matemático*: Algebraico.
  2. *Contenidos Matemáticos*: Funciones.
  3. *Pre-requisitos específicos de contenidos*:
     a) Cálculo de pre-imágenes.
     b) Recorrido de una función.
     c) Ecuaciones cuadráticas.
  4. *Bosquejo de solución*:

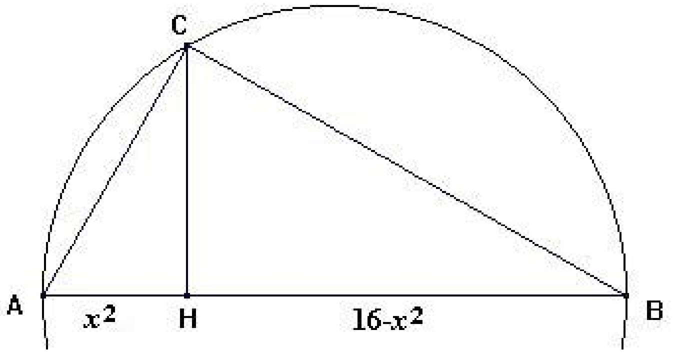
Para buscar el recorrido de la función $A = x^2(16 - x^2) = -x^4 + 16x^2$, se despeja la variable $x$ (positiva) obteniendo dos valores de $x$: $\sqrt{8 \pm \sqrt{64 - A}}$. De donde se obtiene que el recorrido es igual a $\{A \in IR / A \leq 64\}$. Luego, el mayor valor que toma la expresión propuesta es 64. Buscando la pre-imagen (positiva) de este valor, se obtiene que el máximo de la expresión dada es alcanzado en $x = \sqrt{8}$.

- **Solución 6**.
  1. *Ambiente Matemático*: Algebraico.
  2. *Contenidos Matemáticos*: Desigualdades.
  3. *Pre-requisitos específicos de contenidos*:
     a) Resolución de ecuaciones cuadráticas.
     b) Propiedades de la relación $\leq$.
     *c)* Conocer el siguiente resultado: *Si $a$ y $b$ son números reales positivos, entonces la media geométrica entre $a$ y $b$ es menor o igual a su media aritmética, con igualdad solamente cuando $a = b$, es decir $\sqrt{ab} \leq \dfrac{a+b}{2}$.*
  4. *Bosquejo de solución*:

Es claro que el valor de $x$ buscado debe ser tal que $16-x^2$ es positivo. Usando la desigualdad mencionada con $a=x^2$ y $b=16-x^2$, se obtiene $x^2(16-x^2)\le\left(\dfrac{x^2+(16-x^2)}{2}\right)^2=64,$ de donde el máximo valor que puede tomar la expresión propuesta es 64. El valor correspondiente de $x$ que alcanza este máximo es la solución positiva de la ecuación $x^2=16-x^2$.

- **Solución 7**.
    1. *Ambiente Matemático*: Geométrico.
    2. *Contenidos Matemáticos*: Triángulos semejantes.
    3. *Pre-requisitos específicos de contenidos*:
        a) Triángulos rectángulos.
        b) Proyección de un segmento sobre otro.
        c) Segmentos proporcionales.
        d) Teorema de Euclides: *En todo triángulo rectángulo, la altura correspondiente al ángulo recto es media proporcional entre las proyecciones de los catetos sobre la hipotenusa*.
    4. *Bosquejo de solución*:

Se construye una semi-circunferencia de 16 unidades de diámetro. Sea AB un diámetro. Sea H un punto cualquiera del segmento AB. Si se denota por $x^2$ la longitud del segmento AH, entonces la longitud de HB será $16-x^2$. Se construye el triángulo ABC (rectángulo en C).




Por Teorema de Euclides, $CH^2=AH\cdot HB=x^2(16-x^2)$. De aquí, $x^2(16-x^2)$ alcanza su máximo valor cuando $CH^2$ es máximo. Claramente esto sucede cuando $CH$ es un radio de la circunferencia, es decir cuando $H$ es el punto medio de $AB$. Luego, $x^2(16-x^2)$, alcanza su mayor valor cuando $x^2=16-x^2$, es decir, cuando $x=\sqrt{8}$.

- **Solución 8**.
  1. *Ambiente Matemático*: Algebraico.
  2. *Contenidos Matemáticos*: Polinomios.
  3. *Pre-requisitos específicos de contenidos*:
     a) Polinomios: Raíces e igualdad de polinomios.
     b) Sistema de ecuaciones.
     c) Conocer el principio de Huygens[2]: *Si* $p(x)$ *es un polinomio y el valor de* $p(a)$ *es un máximo, entonces cuando* $z < p(a)$, *con* $z$ *"cerca" de* $p(a)$, *la ecuación* $p(x) = z$ *tendrá dos soluciones distintas, que serán la misma (solución doble) cuando* $z = p(a)$.
  4. *Bosquejo de solución*:

Haciendo $p(x) = x^2(16 - x^2)$, el punto $a$ buscado, de acuerdo al principio de Huygens debe cumplir

$$p(x) - p(a) = (x-a)^2(bx^2 + cx + d)$$

de donde

$$-x^4 + 16x^2 + a^4 - 16a^2 = bx^4 + (c - 2ab)x^3 + (a^2b - 2ac + d)x^2 + (a^2c - 2ad)x + a^2d$$

Como los polinomios precedentes son iguales, se obtiene que sus coeficientes satisfacen el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{array}{rl|}
b = & -1 \\
c - 2ab = & 0 \\
a^2b - 2ac + d = & 16 \\
a^2c - 2ad = & 0 \\
a^2d = & a^4 - 16a^2 \\ \hline
\end{array}$$

Resolviendo este sistema se obtiene que $a = \sqrt{8}$.

- **Solución 9**.
  1. *Ambiente Matemático*: Algebraico.
  2. *Contenidos Matemáticos*: Polinomios.
  3. *Pre-requisitos específicos de contenidos*:
     a) Desigualdades: Conocer la propiedad: Si $a < b + h$, para todo $h$ positivo, entonces $a \leq b$.
     b) Sistema de ecuaciones.

[2] **Christiaan Huygens (**1629 – 1695). Matemático Holandés.

c) Conocer el principio: *Si* $p(x)$ *es un polinomio y el valor de* $p(c)$ *es un máximo, entonces para todo* $h$ *(positivo y pequeño) se cumple que* $p(c+h) < p(c)$ y $p(c-h) < p(c)$.

4. *Bosquejo de solución*:

Sea $c$ un número real tal que el valor de $p(c)$ *es un máximo* y $h$ un número real positivo y *pequeño*, aplicando el principio precedente se tienen las siguientes desigualdades:

$$16(c+h)^2 - (c+h)^4 < 16c^2 - c^4 \quad \text{y} \quad 16(c-h)^2 - (c-h)^4 < 16c^2 - c^4$$

Desarrollando y ordenando se tiene que estas desigualdades son equivalentes a:

$$32c + 16h < 4c^3 + h(6c^2 + 4ch + h^2) \ \text{ y } \ 32c - 16h > 4c^3 - h(6c^2 - 4ch + h^2).$$

De donde, como $h$ es positivo:

$$32c < 4c^3 + h(6c^2 + 4ch + h^2) \quad \text{y} \quad 32c > 4c^3 - h(6c^2 - 4ch + h^2)$$

como

$$6c^2 + 4ch + h^2 = 2c^2 + (2c+h)^2 > 0 \ \text{ y } \ 6c^2 - 4ch + h^2 = 2c^2 + (2c-h)^2 > 0$$

y estas relaciones son válidas para todo $h$ (positivo y pequeño), se deduce que $32c = 4c^3$, de donde $c = \sqrt{8}$.

- **Solución 10**.
    1. *Ambiente Matemático*: Algebraico.
    2. *Contenidos Matemáticos*: Aplicaciones de la derivada.
    3. *Pre-requisitos específicos de contenidos*:
        a) Método para calcular extremos de una función, usando derivadas.
        b) Resolución de ecuaciones.
        c) Evaluación de expresiones algebraicas.
    4. *Bosquejo de solución*:

En este caso, al igualar a 0, la derivada de $y = -x^4 + 16x^2$, se tiene que $x = \sqrt{8}$ es un candidato donde la función puede presentar un extremo (valor crítico). Evaluando la derivada, $4x\left(8 - x^2\right)$, para una valor *un poco menor* y para un valor *un poco mayor* que $x = \sqrt{8}$, se observa que la derivada cambia de signo, pasando de positivo a negativo. Por lo tanto, $y$ es máximo cuando $x = \sqrt{8}$.

- **Solución 11.**
  1. *Ambiente Matemático*: Algebraico.
  2. *Contenidos Matemáticos*: Aplicaciones de las derivadas parciales.
  3. *Pre-requisitos específicos de contenidos*:
     a) Método de los multiplicadores de Lagrange.
     b) Resolución de sistemas de ecuaciones.
  4. *Bosquejo de solución*:

Se plantea el problema de maximizar la función de dos variables $z = f(x,y) = x^2 y$ sujeto a la restricción $y = 16 - x^2$. Aplicando el método de los multiplicadores de Lagrange se obtiene el sistema de ecuaciones a resolver: $2xy = \lambda(2x),\quad x^2 = \lambda$, $y + x^2 = 16$, de donde para $x = \sqrt{8}$ el valor de $z$ alcanza un valor máximo igual a 64.

## Comentarios finales

En este trabajo, se ha presentado un problema elemental de optimización y expuesto diversas resoluciones, que varían de acuerdo al ambiente matemático y las correspondientes técnicas propias de éstos. La idea, como es de suponer, es trabajar este problema con nuestros estudiantes y a medida que avancen en sus cursos de matemática, ir retomando este problema y resolverlo con nuevas técnicas. Por ejemplo, se podría comentar la solución 1, al estudiar evaluación de expresiones algebraicas, la solución 3 en la temática de los números reales y expresiones algebraicas, la solución 4 en la temática de la función cuadrática, la solución 7 cuando se estudie en la unidad de geometría, el teorema de Euclides, etc. Al mismo tiempo que el estudiante va experimentando con nuevas técnicas para abordar la resolución del problema comentado, va incrementando sus *recursos* para enfrentar nuevos problemas. De esta manera el alumno, por una parte, aumenta su capacidad para resolver problemas, y por otra, incrementa su confianza en este importante ámbito de la matemática.

Desde el punto de vista de la enseñanza y enseñanza de la matemática, es altamente interesante reflexionar sobre diversas técnicas y diferentes ambientes donde resolver un problema determinado, ya que ello nos obliga a profundizar en aspectos que generalmente se descuidan, como son: ambiente donde *vive* el problema, ambiente donde *viven* los recursos matemáticos utilizados, etc. y al mismo tiempo a disfrutar de la riqueza, variedad y poder de la matemática en el desafío de resolver problemas.

## Bibliografía


- De Guzmán, M. (1993): “Tendencias Innovadoras en educación matemática”. Ediciones OEA.
- De Guzmán, M. (1995): “Aventuras matemáticas: una aventura hacia el caos y otros episodios”. Ediciones Pirámide. Madrid.
- Contreras, L. y Carrillo, J. (1998): “Diversas concepciones sobre resolución de problemas en el aula”. Educación matemática. Vol. 10 Nº 1. 26-37.
- González, F. (1995): “El corazón de la matemática”. Copiher.
- Polya, G. (1970): “How to solve it”. Editorial Trillas.
- Schoenfeld, A. (1992): "Learning to think mathematically: Problem Solving, metacognition, and sense making in mathematics". En Grouws, D.A. (Ed): Handbook of research on Mathematics teaching and learning. Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning. New York Macmillan Publishing Company. 334-370.
- Selden, A. Et all. (1997): “What does it take to be an expert problem solver?” MAA Archivo html disponible en http://www.maa.org/t_and_l/sampler/rs_4.html.
- Spare, J. (1865): “The differential calculus”. Boston: Bradley, Dayton and Company.


**Juana Contreras Sepúlveda** es profesora y magíster en matemática. Actualmente es académica del Instituto de Matemática y Física de la Universidad de Talca, Chile.
e-mail: jcontres@utalca.cl

**Claudio del Pino Ormachea**, profesor y magíster en matemática. Actualmente es académico del Instituto de Matemática y Física de la Universidad de Talca, Chile.
e-mail: cdelpino@utalca.cl

REVISTA IBEROAMERICANA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA
Diciembre de 2007, Número 12, páginas 37 - 51
ISSN: 1815-0640

# Un estudio exploratorio de dificultades de comprensión del intervalo de confianza

***Eusebio Olivo y Carmen Batanero***

## Resumen

En este trabajo presentamos los resultados de un cuestionario orientado a evaluar la comprensión que tienen los estudiantes de ingeniería sobre los intervalos de confianza pasado a una muestra de 48 estudiantes. Los resultados apuntan a que el concepto podría ser comprendido por la mayoría de los estudiantes, aunque aparecen errores conceptuales y procedimentales, algunos no descritos en las investigaciones previas.

## Abstract

We present results of a questionnaire directed to assess students' understanding of confidence intervals in a sample of 48 students of engineering. Results suggest that this concept might be easy to understand, although conceptual and procedimental errors appear, some of them not previously described in research.

## Introducción

El intervalo de confianza es un tema estudiado en todos los cursos universitarios de estadística e incluso en la educación secundaria; por ejemplo en España se incluye en el Bachillerato de Ciencias Sociales. Por otro lado, diferentes asociaciones profesionales, como la American Psychological Association (APA) o la American Educational Research Association (AERA), recomiendan su uso por parte de los investigadores, para complementar los contrastes de hipótesis y mejorar de este modo los errores denunciados en la práctica de la inferencia estadística (Morrison y Henkel, 1970; Vallecillos, 1994, Harlow, Mulaik y Steiger, 1997; Batanero, 2000). En este sentido se expresa Davies (1998), quien sugiere que los intervalos de confianza proporcionan la misma información que un valor *p*, pero añaden información sobre el tamaño de los efectos.

Este cambio metodológico, requiere asegurar que las dificultades sobre los tests de hipótesis no se repiten –o al menos no con tanta intensidad– en los intervalos de confianza, tema donde la investigación didáctica es todavía incipiente. Es por ello importante llevar a cabo estudios de evaluación sobre esta comprensión, que pudiera no ser inmediata, puesto que el intervalo de confianza se apoya en otros conocimientos previos y tiene un doble carácter, como concepto y como procedimiento. Considerado como concepto, y en el contexto de estimar un parámetro poblacional, un intervalo de confianza es un rango de valores (calculado a partir de los datos de una muestra) en el cual podría encontrarse el verdadero valor del parámetro, junto con un coeficiente de confianza que indica el porcentaje de muestras tomadas en las mismas condiciones, en las cuales el intervalo cubriría el verdadero valor del parámetro.

Como procedimiento, da una regla general de construcción de dicho rango de valores a partir de un estadístico calculado en los datos de la muestra, para el parámetro correspondiente. Calculada la desviación típica del estadístico (error estándar) y obtenido un valor crítico correspondiente a la mitad del valor del coeficiente de confianza elegido, el producto del valor crítico por el error estándar se sumaría y restaría al valor del estadístico en la muestra, obteniendo así los límites del intervalo. Este procedimiento general se particulariza dependiendo del parámetro a estimar (media, proporción, varianza, etc.) y según las condiciones (tipo de distribución, qué se conoce de la misma, etc.), puesto que ellos determinan la distribución muestral del estadístico. Vemos, entonces, que la comprensión del intervalo de confianza requiere una serie de otros objetos matemáticos previos (tanto conceptos como procedimientos) como población y muestra, estadístico y parámetro, error estándar, y cálculo del mismo para diversos estadísticos, distribución muestral, valor crítico o uso de las tablas de diferentes distribuciones.

En este trabajo continuamos las investigaciones previas de Cumming, William y Fidler (2004), Behar (2001) y Terán (2006), presentando los resultados obtenidos en el estudio piloto de un cuestionario en proceso de elaboración. El objetivo principal de dicho instrumento de evaluación es hacer diagnóstico sobre la comprensión que tienen del concepto intervalos de confianza, los alumnos universitarios, aunque la mayoría de sus ítems podrían ser aplicados en el bachillerato en aquellas especialidades que incluyen el tema.

## Antecedentes

Como hemos indicado, las investigaciones sobre comprensión del intervalo de confianza son pocas y, en su mayor parte, se centran en investigadores y no en estudiantes o bien no llegan a un análisis completo, como pretendemos realizar en nuestro estudio. Entre las investigaciones centradas en investigadores, encontramos las de Cumming, William y Fidler (2004), quienes estudian los errores de interpretación de intervalos de confianza, para el caso particular de la media. La mayoría de investigadores en su estudio esperaban (erróneamente) una alta probabilidad de replicación, esperando que en una nueva muestra la media caiga de nuevo en el intervalo de confianza original. Otra creencia errónea muy común en los investigadores (Schenker y Gentleman, 2001) es que los intervalos de confianza de dos medias de muestras independientes son sólo significativamente diferentes cuando se tocan justo extremo con extremo. También confunden el cálculo de intervalos de confianza para medias independientes y relacionadas.

Respecto a los trabajos con estudiantes universitarios, Fidler y Cumming (2005) indican que al estudiar la evidencia a favor de la hipótesis nula, el 44% de los estudiantes interpreta incorrectamente un *valor p* pequeño en un contraste de hipótesis, pero sólo el 18% interpreta incorrectamente los resultados cuando se presentan mediante intervalos de confianza. Otros estudiantes en la investigación de Fidler y Cumming sólo consideran a los intervalos de confianza como estadísticos descriptivos, ignorando su naturaleza inferencial o tienen ideas equivocadas sobre cómo los distintos conceptos que intervienen en los intervalos de confianza se relacionan entre sí. Por ejemplo, sólo el 16% de los estudiantes en la investigación citada pudo contestar correctamente a la relación entre ancho del intervalo y tamaño de la muestra.

Garfield, delMas y Chance (1999) usando un software de simulación (Sampling SIM program) tratan de favorecer el aprendizaje de conceptos básicos de la estadística, entre ellos los intervalos de confianza. Los autores plantean un modelo en el cuál destacan los elementos conceptuales que el estudiante debería de entender acerca de los intervalos de confianza, las competencias básicas que el estudiante debería adquirir y algunas concepciones erróneas. También diseñan un conjunto de actividades, así como un pretest sobre los conocimientos requeridos antes de la enseñanza.

En base al trabajo anterior, Behar (2001) construye un cuestionario sobre comprensión del intervalo de confianza y contraste de hipótesis. Concluye, de las respuestas al cuestionario, que los alumnos no relacionan la influencia del ancho del intervalo sobre el nivel de confianza. También observa dificultad de comprensión de la definición del intervalo de confianza, porque se piensa que los valores que lo constituyen son los que toma la variable aleatoria que define la población, o valores del estadístico que se usa como estimador, lo cual podría deberse al propio procedimiento de construcción del intervalo, que se deduce de la distribución muestral del dicho estadístico. Los participantes en su estudio no asocian la confianza a un mecanismo aleatorio generador de intervalos, a partir de muestras aleatorias, ni el nivel de confianza, con la frecuencia relativa a la larga, de que los intervalos generados por tal mecanismo aleatorio incluyan al verdadero parámetro de la población. La utilidad de los intervalos de confianza para tomar decisiones sobre hipótesis, parece no ser comprendida; posiblemente por no considerar los valores del intervalo como un conjunto de valores plausibles del parámetro.

## La investigación

Como hemos indicado, el fin de nuestra investigación es profundizar y continuar las anteriormente descritas. En concreto, pretendemos construir un cuestionario comprensivo de evaluación de las dificultades de comprensión, cálculo e interpretación de intervalos de confianza, incluyendo algunas propiedades o el cálculo de intervalos para algunos parámetros que no fueron considerados en las investigaciones citadas. Este cuestionario se ha construido siguiendo el modelo de metodológico de Díaz (Batanero y Díaz, 2006; Díaz y de la Fuente, 2007). El primer paso en la construcción del cuestionario fue llevar a cabo una definición semántica precisa de la variable objeto de medición. Puesto que la *comprensión del intervalo de confianza* es un constructo psicológico inobservable, es preciso llevar a cabo una definición detallada de los contenidos que serían evaluados. Ya que el estudio se centra en estudiantes de ingeniería, se llevó a cabo un análisis del contenido relacionado con los intervalos de confianza en una muestra de 18 libros de estadística dirigidos la enseñanza en ingeniería. Del análisis se dedujo las propiedades y relaciones del intervalo de confianza con otros objetos matemáticos, así como los procedimientos de construcción de intervalos de confianza que serían objeto de evaluación. El estudio se ha recogido en Olivo (2006).

Seguidamente se procedió a la elaboración y depuración de ítems que pudieran evaluar cada uno de los contenidos fijados. También se adaptó su formato y redacción, para seguir las pautas marcadas en Osterlind (1989) sobre claridad del enunciado, número de distractores, formulación de la pregunta, etc y se realizaron pruebas de legibilidad con un grupo reducido de estudiantes. La colaboración de 10 expertos (profesores de estadística e investigadores en educación estadística) sirvió para seleccionar los ítems que finalmente formarían parte del cuestionario, mediante juicio de expertos. El cuestionario que analizaremos a continuación está compuesto por once ítems de opciones múltiples y cuatro problemas abiertos que en su mayoría fueron recopilados de diversas investigaciones. En este trabajo presentamos los resultados de un total de 48 estudiantes de ingeniería en el Instituto Tecnológico y de Estudios Superiores de Monterrey.

## Ítems de opciones múltiples

En la Figura 1 se reproducen los once ítems de opciones múltiples. El ítem 1 (Cruise, Dudley y Thayer, 1984) corresponde a la definición de intervalo de confianza, tratando de detectar los siguientes sesgos: el intervalo es constante (distractor a), contiene siempre al parámetro (distractores b y d). El ítem 2 (Gardfield y delMas, 2004) evalúa la comprensión del efecto del tamaño de muestra sobre la precisión (ancho de intervalos) cuando se mantiene constante el coeficiente de confianza. Los ítems 3 y 4 (Cruise, Dudley y Thayer, 1984) evalúan la comprensión del efecto del coeficiente de confianza sobre el ancho del intervalos y el 5 (Behar, 2001) el efecto de la varianza sobre el ancho de los intervalos.

El item 6 (Behar, 2001) evalúa la comprensión de la variabilidad del intervalo en diferentes muestras y la interpretación de su resultado. El distractor b) da una interpretación contraria y el c) el error de que el intervalo se refiere a la variable y no al parámetro. Los ítems 7 y 8 evalúan el conocimiento procedimental en la construcción de intervalos de confianza para la media. El ítem 7 (Cruise, Dudley y Thayer, 1984) se refiere al caso de distribución normal con desviación típica conocida. El distractor a) incluye un error sobre la desviación típica del estimador (no dividir por el tamaño de la muestra); el d) no multiplica los límites por el valor crítico y el c) contiene los dos errores simultáneamente. El ítem 8 (Miller, Freund y Johnson, 1997) corresponde al caso de muestra grande, por lo que se puede usar la distribución normal. El distractor a) incluye un error en la determinación del valor crítico a partir de la tabla de la distribución normal, el c) error en la desviación típica al no dividir por n y el d) los dos errores simultáneamente.

Figura 1. Ítems de opciones múltiples

Ítem 1. En un intervalo de confianza:

a. De una muestra a otra, el intervalo es constante.
b. Se especifica un rango de valores dentro de los cuales cae el parámetro con seguridad.
c. **Indica un intervalo de posibles valores para el parámetro, y un porcentaje de intervalos que cubrirán, aproximadamente dicho valor, para el mismo tamaño de muestra.**
d. Siempre contienen el parámetro poblacional.

Ítem 2. Dos muestras diferentes se toman de una población donde la media poblacional y la desviación estándar poblacional son desconocidas. La primera muestra tiene 25 datos, y la segunda muestra 64 datos. Se construye un intervalo de confianza de 95 % para cada muestra para estimar la media poblacional. ¿Qué intervalo de confianza esperaría que tenga mayor precisión?

a. Espero que ambos intervalos de confianza tengan la misma precisión.
**b. Espero que el intervalo de confianza basado en una muestra de 64 datos sea más preciso**
c. Espero que el intervalo de confianza basado en la muestra de 25 datos sea más preciso.
d. No puedo determinar cuál de los dos tendrá más precisión

Ítem 3. Si, manteniendo todos los demás datos fijos, el nivel de confianza se reduce (por ejemplo de 90% a 80%):

a. El intervalo de confianza no cambia.
b. El intervalo de confianza será más ancho
**c. El intervalo de confianza será más angosto**
d. El cambio en el intervalo de confianza no es predecible.

Ítem 4. En un intervalo de confianza, el ancho del intervalo puede ser reducido:

e. Disminuyendo el tamaño de la muestra.
**f. Bajando el nivel de confianza (por ejemplo de 0.99 a 0.90)**
g. Aumentando la magnitud de $\sigma_{\bar{x}}$ .
h. Un aumento en el tamaño de la población.

Ítem 5. ¿Cuál de las siguientes afirmaciones es verdadera?

a. Si la desviación estándar de la población disminuye, la anchura del intervalo de confianza no cambia
**b. Si la desviación estándar de la población disminuye, la anchura del intervalo de confianza disminuye.**
c. Si la desviación estándar de la población aumenta, la anchura del intervalo de confianza disminuye
d. Si la desviación estándar de la población aumenta, la anchura del intervalo de confianza no cambia.

Ítem 6. Un intervalo del 95% de confianza para la diferencia media en la producción de leche de una ganadería después de un tratamiento resultó ser (1.5- 3.5) Litros/vaca. ¿Cuál de las siguientes afirmaciones es verdadera?

a. No sabemos el verdadero aumento medio en la producción, pero en el 95% de intervalos calculados con el mismo tamaño de muestra y población se incluye el aumento medio en la producción.
**b. Debido a que el intervalo de confianza no contiene el cero, hay 95% de probabilidad de que el tratamiento no produce ningún efecto.**
**c.** Debido a que el intervalo de confianza no contiene el cero, hay 95% de probabilidad que el verdadero aumento en la producción es 2.5 Litros/vaca.

Figura 1. Ítems de opciones múltiples (continuación)

Ítem 7. La media muestral de 100 observaciones en una prueba de matemáticas es 75. Encuentre el intervalo de confianza al 95% para la media de la población, asumiendo que σ =7.

a. (61.28, 88.72)
b. **(73.63, 76.37)**
c. (68, 82)
d. (74.3 , 75.7)

Ítem 8. Se han obtenido los siguientes datos de emisión diaria de óxidos de azufre, para una muestra de tamaño *n=100*, media: $\bar{x}$ = 18 y cuasivarianza $s^2$=36. Elabore un intervalo de confianza de 95% para la verdadera emisión diaria promedio de óxidos de azufre.

**a.** (17.016, 18.984)
**b. (16.824, 19.176)**
c. (6.24, 19.76)
d. (8.16, 27.84)

Ítem 9. La distribución Muestral utilizada en la construcción de intervalos de confianza para la varianza en muestras pequeñas, tomadas de una población normal, es:

a. Distribución t de Student
**b. Distribución Ji-cuadrada**
c. Distribución Normal
d. Distribución F

Ítem 10. Al calcular un intervalo de confianza del 90% para la media poblacional, para un grupo de puntuaciones distribuido normalmente, usted pudiera usar un valor z de:

a. 1.96
b. **1.65**
c. 0.90
d. 1.29

Ítem 11. Considere el gráfico siguiente del rendimiento medio de cebada en 1980,1984 y 1988 junto con un intervalo de 95% de confianza

```
 Intervalos del 95% para la media

Año    N  Media    StDev   ----+---------+---------+---------+--
1980   6  184.00    2.61      (----*---)
1984   5  212.40   14.36                        (-----*----)
1988   5  182.40    1.82    (-----*----)
                             ----+---------+---------+---------+--
Desv. Típica conjunta =.19      180       195       210       225
```

¿Cuál de las siguientes afirmaciones es verdadera?:

a. Puesto que los intervalos de confianza para 1980 y 1988 tienen considerable solape, hay buena evidencia que las medias de las muestras difieran.
b. La estimación de la media de la población en 1980 es menos precisa que en 1988.
c. Puesto que los intervalos de confianza para 1980 y 1984 no se solapan, hay poca evidencia que las medias de las poblaciones respectivas difieran.
**d. Puesto que los intervalos de confianza para 1980 y 1988 tienen considerable solape, hay poca evidencia que las medias de las poblaciones difieran.**

El ítem 9, de elaboración propia, evalúa el conocimiento de la distribución muestral necesaria para calcular un intervalo de confianza para la varianza. El ítem 10 evalúa el conocimiento de determinación de valores críticos en la distribución del estadístico. El distractor a) incluye el error de considerar un coeficiente de confianza 95% en la determinación del valor crítico el c) confunde el coeficiente de confianza (90%) con el valor crítico y el d) hace un error al determinar el valor crítico acumulando el coeficiente .90 solo en la parte inferior de la distribución. Finalmente el ítem 11, tomado de Behar (2001) evalúa la interpretación de gráficos de intervalos de confianza para tomar una decisión sobre la diferencia de medias. Los distractores a) y c) dan la interpretación contraria (los intervalos han de coincidir para que exista diferencia); el b) evalúa la confusión sobre el concepto de precisión.

En la tabla 1 presentamos la frecuencia de respuestas a cada opción de cada ítem, la proporción de respuestas correctas y el índice de discriminación, definido como diferencia en proporción de aciertos entre el grupo que tiene puntuación superior e inferior en el total de la prueba (dividido el grupo en tres partes de acuerdo a su puntuación). Se considera discriminativo el ítem si la diferencia es mayor a 0.3.

Tabla 1. Resultados[1] en los ítems (n=48)

| Ítem | Frecuencia | | | | % correcto | Índice discriminación | Contenido del ítem |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | A | B | C | D | | | |
| 1 | 6 | 5 | **36** | 1 | 75 | 0.81 | Definición de intervalo de confianza |
| 2 | 2 | **12** | 31 | 3 | 25 | -0.56 | El ancho del intervalo disminuye cuando aumenta el tamaño de la muestra |
| 3 | 9 | 3 | **34** | 2 | 70 | 0.88 | El ancho del intervalo aumenta con el nivel de confianza |
| 4 | 14 | **10** | 3 | 21 | 20 | 0.39 | El ancho del intervalo aumenta con el nivel de confianza |
| 5 | 4 | **14** | 14 | 16 | 29 | -0.31 | El ancho del intervalo aumenta con la varianza |
| 6 | **31** | 6 | 10 | -- | 64 | 0.01 | Variación del intervalo en diferentes muestras |
| 7 | 9 | **33** | 2 | 4 | 68 | 0.88 | Construir un intervalo para la media en una muestra grande, σ conocida |
| 8 | 5 | **33** | 7 | 2 | 68 | 0.63 | Construir un intervalo para la media en una muestra grande, σ desconocida |
| 9 | 17 | **27** | 3 | 1 | 56 | 0.91 | Elegir un modelo de distribución muestral del estadístico |
| 10 | 5 | **36** | 4 | 3 | 75 | 0.63 | Determinar valores críticos en la distribución del estadístico |
| 11 | 10 | 2 | 3 | **33** | 68 | 0.75 | Interpretar intervalos de confianza en forma gráfica |

[1] Soluciones correctas en negrita)

En general se observa un buen conocimiento del intervalo de confianza, con la mayoría de los ítems resueltos por más de la mitad de los alumnos en la muestra.

Las principales excepciones son los ítems: 2,4 y 5. En el ítem 2 sólo el 25% de los estudiantes conoce la relación correcta entre precisión y tamaño de muestra, coincidiendo con la investigación de Fidler y Cumming (2005) en cuya investigación sólo el 16% de los alumnos dieron la respuesta correcta en este ítem. En los ítems 4 y 5 sobre el mismo contenido (efecto de la varianza de la población sobre la anchura del intervalo), los resultados son consistentes. Las respuestas se reparten prácticamente al azar (los estudiantes piensan por igual que el aumento de varianza hace crecer, disminuir o deja igual el intervalo). Estos resultados coinciden de nuevo con los de Cumming y Fidler (2005) en cuya investigación el 20% de los estudiantes pensaban que el ancho del intervalo de confianza se incrementaría si se aumentara el tamaño de la muestra, un 29% que el ancho del intervalo de confianza no se vería afectado y el 36% de los estudiantes no sabía si existía alguna relación. Hubo también algunas dificultades en recordar la distribución Chi Cuadrada necesitada para la estimación de la varianza (ítem 9), donde el 35% de los estudiantes eligieron erróneamente la distribución *T*.

En menor proporción se presentan los siguientes errores: en distintas muestras se obtendrá el mismo intervalo (12% en ítem 1), el coeficiente de confianza no hace cambiar el intervalo (18% en el ítem 3), si el intervalo no contiene el cero, es indicio de falta de efecto (12% en ítem 6), el intervalo se refiere al valor de la variable y no al parámetro (21% en el ítem 6), error en el cálculo de la desviación típica del estimador (18% en el ítem 7 y 14% en el ítem 8) , error en la determinación del valor crítico en la distribución del estadístico debido a una falla en la comprensión del nivel de confianza (10% en el ítem 10) y error en la interpretación gráfica, incluido en ello error en la comprensión de que la inferencia es sobre las medias poblacionales y no sobre las medias muestrales (20%, ítem 11). Los ítems en general discriminan a los estudiantes con alto y bajo rendimiento, excepto los ítems 2 (efecto del tamaño de la muestra sobre el ancho del intervalo), 5 (efecto de la varianza sobre la anchura del intervalo) y 6 (interpretación del intervalo de confianza).

## Items abiertos

El cuestionario también contenía cuatro ítems abiertos, con objeto de evaluar las estrategias de resolución y argumentación de los estudiantes. A continuación analizamos el contenido de estos problemas y las posibles soluciones que se han puntuado en escala 0-2 atendiendo a su corrección.

**Ítem abierto 1.** Explica con tus propias palabras la diferencia entre una estimación puntual y un intervalo de confianza.

Este problema es de elaboración propia y evalúa el conocimiento de la *definición de intervalo de confianza. Se* ha puntuado bajo el siguiente criterio:

- *Definición correcta* (2 puntos; en total 43 casos). Un ejemplo es el siguiente: "*Una estimación puntual es un solo valor numérico utilizado para estimar el parámetro correspondiente de la población. En tanto que un intervalo de confianza es un intervalo aleatorio que consta de dos valores numéricos que,* *con un grado de confianza específico, se considera incluya el parámetro que se está estimando”* (Alumno HV). El estudiante utiliza correctamente los conceptos estimación puntual, parámetro y población, intervalo de confianza, aleatorio y grado de confianza; comprende el carácter aleatorio de los límites del intervalo, y su definición incluye los elementos esenciales.

- *Explicación parcialmente correcta* (1 punto; 5 estudiantes). Cuando el alumno define correctamente solo una de los dos conceptos (1 caso) o las definiciones son incompletas (4 casos), como la siguiente: *“Una estimación puntual es cuando tratamos de “adivinar un valor” directamente diciendo un solo número ej. 65. Un intervalo de confianza es cuando estimamos que la respuesta va a estar entre ciertos números ej. entre 62 y 67. Así tenemos más confianza de nuestra estimación”* (alumno JJA). Este alumno da definiciones no muy rigurosas, sin hacer mención a la diferencia entre estadístico y parámetro o población y muestra, coeficiente de confianza o el carácter aleatorio de los límites del intervalo.
- No ha habido definiciones totalmente incorrectas en esta pregunta.

**Ítem abierto 2**. Construya un intervalo de confianza al 95% para la media de una población normal de desviación típica σ desconocida si en una muestra de tamaño 10, la media de la muestra es $\bar{x}$ =25 y la estimación de la desviación típica en la muestra es $s$ = 6

Este problema tomado de Cruise, Dudley y Thayer (1984) evalúa el conocimiento procedimental en la construcción de intervalos de confianza para la media de una población normal con desviación típica no conocida**.** Se ha puntuado bajo el siguiente criterio:

- *Solución correcta* (2 puntos; 28 estudiantes): El estudiante determina el intervalo, empleando la distribución muestral correcta; encuentra correctamente el valor crítico y a partir de él los límites del intervalo. Puesto que el tamaño de la muestra es pequeño y *σ* es desconocida se debe usar la distribución *T* de student. Un ejemplo es el siguiente: *“Sea μ la media. Se verifica* $\bar{x} - t_{\alpha/2}\frac{S}{\sqrt{n}} < \mu < t_{\alpha/2}\frac{S}{\sqrt{n}}$, *entonces* $25 - t_{\alpha/2}\frac{6}{\sqrt{10}} < \mu < 25 + t_{\alpha/2}\frac{6}{\sqrt{10}}$, *es decir,* $25\text{-}\frac{2.262*6}{\sqrt{10}} < \mu < 25\text{+}\frac{2.262*6}{\sqrt{10}}$. *Sustituyendo en las inecuaciones se llega al intervalo 20.708 < μ < 29.292”* (Alumno JR). *El* estudiante usa correctamente las expresiones simbólicas*, media* distinguiendo la media de la población y la muestra y sabe que el intervalo se refiere a la de la población. El alumno recuerda la distribución muestral de la media para el caso de muestras pequeñas; al referirse al subíndice $\alpha/2$ manifiesta que comprende la relación del valor crítico con el nivel de confianza 95%. Recuerda las probabilidades necesarias para calcular el intervalo, sustituye los datos del problema en las inecuaciones anteriores y calcula los valores críticos en la distribución de *T* de Student, usando correctamente las tablas. Finalmente lleva a cabo varias operaciones algebraicas con inecuaciones para llegar finalmente al intervalo pedido.

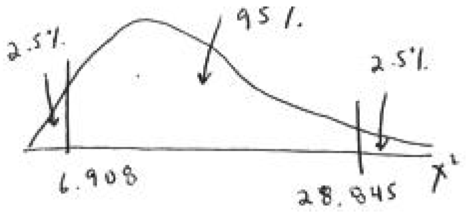
- *Solución parcialmente correcta* (1 punto; 12 estudiantes). El estudiante plantea el intervalo con la distribución muestral correcta, pero hace algunos errores. Un caso es cuando confunde los grados de libertad de la distribución *T.* Otros alumnos cometen un error en la varianza del estimador, dividiendo por la raíz cuadrada del tamaño de muestra. Dos alumnos conocen todos los pasos la construcción del intervalo, pero no llegan a encontrar el valor crítico, por hacer un manejo incorrecto de las tablas de la distribución.
- *Respuesta incorrecta* (0 puntos, 8 estudiantes): No se responde o se responde en forma incorrecta. Los errores se producen porque confunde la distribución muestral (8 casos) usando la distribución normal en lugar de la *T*. En general estos estudiantes conocen el procedimiento general de construcción de intervalos, pues dividen la probabilidad total bajo la curva normal en tres partes, dejando el coeficiente de confianza (95% en el centro) y el nivel 5% dividido en dos parte a cada lado (procedimiento y propiedades). Calcula el valor crítico en la tabla de la normal estándar (procedimiento) usando las tablas (lenguaje) correctamente. Luego lleva a cabo correctamente varias operaciones algebraicas (procedimientos), pero no llega al intervalo correcto por usar una distribución incorrecta.

**Ítem abierto 3.** Sea $\sigma^2$ la varianza de la distribución de la tensión disruptiva. El valor calculado de la varianza muestral es $s^2$=13700, n =16. Calcular el intervalo de confianza de 95% para σ.

Este problema tomado de Devore (2005, pg. 310) evalúa el conocimiento del procedimiento de construcción de intervalos para la estimación de una varianza. Se ha puntuado bajo el siguiente criterio:

- *Solución correcta* (2 puntos; 20 casos): El estudiante determina el intervalo, empleando la distribución Chi cuadrado; determina correctamente el valor crítico y a partir de él los límites del intervalo. Un ejemplo es el siguiente (Alumno AC): *"Sea $\sigma^2$ la varianza. Sabemos que se verifica* $\frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{\alpha/2}} < \sigma^2 < \frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{(1-\alpha/2)}}$, *entonces* $\frac{(16-1)13700}{\chi^2_{\alpha/2}} < \sigma^2 < \frac{(16-1)13700}{\chi^2_{(1-\alpha/2)}}$, *es decir,* $\frac{(16-1)13700}{27.488} < \sigma^2 < \frac{(16-1)13700}{6.262}$. *Sustituyendo en las inecuaciones se llega al intervalo 7975.9895< $\sigma^2$ <32816.991; luego obteniendo raíz cuadrada a ambos lados de la desigualdad se obtiene el intervalo de confianza para la desviación estándar poblacional 89.308< σ <181.154".* El estudiante diferencia la varianza de la población y la muestra (conceptos) y saber que el intervalo se refiere a la de la población (propiedad). Recuerda la distribución muestral de la varianza para el caso de muestras pequeñas (propiedad), en este caso la Chi cuadrado (concepto). Además se refiere a los valores críticos α/2; (1-α/2) correspondientes al nivel de confianza 95% (conceptos y propiedades). Por otro lado debe recordar que las probabilidades necesarias para calcular el intervalo son precisamente estas, siendo 1-α el coeficiente de confianza (propiedad). El alumno sustituye los datos del problema en las inecuaciones anteriores y calcula los valores críticos en la tabla del Chi cuadrado (procedimientos), usando correctamente las tablas (lenguaje). El alumno lleva a cabo varias operaciones algebraicas (procedimientos) con inecuaciones (concepto), para llegar finalmente al intervalo pedido.

- *Solución parcialmente correcta* (1 punto; 20 estudiantes). El estudiante plantea el intervalo con la distribución muestral correcta, pero hace algunos errores. Un caso es cuando confunde los grados de libertad de la distribución Chi cuadrado (13 alumnos), como en el ejemplo siguiente (Alumno EG), donde además hay una confusión de la notación:




$$\frac{(15)13700}{28.845} < \sigma < \frac{(15)13700}{6.908}$$

7124.28 < σ < 29748.11
Intervalo de confianza para la varianza

El alumno introduce una representación gráfica de la distribución Chi cuadrado que ha identificado correctamente. Divide la probabilidad total bajo la curva en tres partes, dejando el coeficiente de confianza (95% en el centro) y el nivel 5% dividido en dos parte a cada lado (procedimiento y propiedades). Sin embargo tiene un conflicto al confundir los grados de libertad, tomando 16 en vez de 15. Calcula los valores críticos en la tabla del Chi cuadrado (procedimiento) y usa las tablas (lenguaje) correctamente, pero al ser los grados de libertad incorrectos el valor obtenido es incorrecto. Tiene también un conflicto de notación, al usar la terminología de la varianza con la correspondiente a la desviación típica. El alumno lleva a cabo correctamente varias operaciones algebraicas (procedimientos) con inecuaciones (concepto), para llegar finalmente al intervalo pedido. Pero, por la razón señalada el resultado es incorrecto. Otros alumnos puntuados como parcialmente correctos, los alumnos conocen la construcción del intervalo, pero no llegan a encontrar el valor crítico, por hacer una lectura incorrecta de las tablas de la distribución (4 casos) o bien hacen errores en los cálculos al no manejar las inecuaciones (2 casos) o bien sencillamente no completa los cálculos (1 caso).

- *Respuesta incorrecta* (0 puntos; 8 estudiantes): No se responde o se responde en forma incorrecta. Los errores se producen porque confunde la distribución muestral (5 casos) llegando a escribir la distribución *T* en el intervalo o recuerda levemente un límite de la fórmula del intervalo de confianza para la varianza (3 casos), como en el caso siguiente (Alumno MV): $\sigma^2 = \frac{(n-1)s^2}{\chi_{1-\alpha/2,\nu}} = \frac{(15)(13700)}{\chi_{1-\alpha/2,\nu}}$ (1-α)% = 95% ; α = 1-95%; α = 5%, $\frac{(15)13700}{\chi^2_{.025,16}} = \frac{205500}{28.845} = 7124.284$ El alumno recuerda solamente un límite de la fórmula del intervalo de confianza para la varianza. Sabe como identificar el valor α, que al dividir por dos, y usará posteriormente para obtener el valor crítico de la distribución chi cuadrada. Calcula el valor crítico en la tabla del Chi cuadrado (procedimiento) y usa las tablas (lenguaje) correctamente, pero confunde los grados de libertad. Luego lleva a cabo correctamente varias operaciones algebraicas (procedimientos), pero no finaliza la solución.

**Ítem abierto 4.** La siguiente salida de computadora presenta una muestra simulada de una población normal con $\mu$=130 y $\sigma$=10. Luego se usó un comando para establecer un intervalo de confianza del 95% para $\mu$.

118.69 144.22 138.82 125.93 136.19 148.73 133.39 134.18 127.26 145.34 121.96 125.43 141.23 150.021 126.89 118.49 137.22 136.78 119.52 125.62 134.86 116.41 134.31 138.05 140.82

| Mean | Median | TrMean | StDev | 95% Confidence Interval | |
|---|---|---|---|---|---|
| 132.82 | 134.31 | 132.78 | 9.74 | 128.798 | 136.840 |

Escriba el intervalo de confianza que se obtuvo e interprete el resultado.

Este ítem es una adaptación de un problema tomado de Johnson y Kuby (2004, pg.363) y se usa para evaluar la competencia para interpretar intervalos de confianza obtenidos de un programa de ordenador. Las respuestas obtenidas se han puntuado en una escala 0-1-2 bajo el siguiente criterio:

- *Solución correcta* (2 puntos; 35 alumnos). El alumno reconoce la terminología asociada a los extremos del intervalo en la salida del ordenador. Además, da la interpretación correcta, que se refiere al porcentaje de intervalos que incluirían la media de la población, en las mismas condiciones. Un caso es el siguiente (Alumno RF): *"Las dos últimas columnas de la tabla en la salida nos indican los extremos del intervalo de confianza para la media de la población a un nivel de confianza de 95%. Simbólicamente podemos escribirlo:* 128.7978 < μ < 136.840. *La interpretación es que en el 95% de muestreos ejecutados en estas mismas condiciones estará contenido el verdadero valor de la media, aunque no sabemos si esta muestra particular lo contiene".* El alumno reconoce los extremos del intervalo de confianza y usa los conceptos de intervalo, extremos, media de la población y nivel de confianza. Transforma adecuadamente el intervalo dado en términos numéricos en una tabla a expresión simbólica. Su interpretación correcta relaciona el coeficiente de confianza con el porcentaje de intervalos que cubre el parámetro, si el muestreo se ejecuta en las mismas condiciones. También indica que no sabemos si esta muestra particular lo contiene. (razonamiento)

- *Respuesta parcialmente correcta* (1 punto; 13 alumnos): Identifica el intervalo pero no lo interpreta o bien da una interpretación errónea, por ejemplo, que la probabilidad de que el intervalo dado incluya a la media es del 95%, lo cual sería una interpretación bayesiana y no frecuencial, como el caso siguiente (Alumno BT): "*128.7978 < μ < 136.840. Esto significa que tenemos un 95% de probabilidad de que el valor verdadero de la media poblacional (μ) se encuentre entre 128.79 y 136.84".* El alumno identifica el intervalo y lo escribe simbólicamente en forma correcta, usando una notación correcta. Da sin embargo una interpretación bayesiana al intervalo, considerando los límites fijos (fija el intervalo) y el parámetro como aleatorio (hay una probabilidad de que la media esté en el intervalo particular). En realidad la interpretación clásica es que el parámetro (media) está fijo y los límites del intervalo varían de un intervalo a otro; es por esto que sólo el 95% los cubren. No hubo respuestas incorrectas en este ítem.

Tabla 2. Resultados en los problemas abiertos

| | Ítem abierto 1 | | Ítem abierto 2 | | Ítem abierto 3 | | Ítem abierto 4 | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Respuesta | Frecuencia | Porcentaje | Frecuencia | Porcentaje | Frecuencia | Porcentaje | Frecuencia | Porcentaje |
| Incorrecta | 0 | 0.00 | 8 | 0.17 | 8 | 0.16 | 0 | 0.00 |
| Parcialmente correcta | 5 | 0.11 | 12 | 0.25 | 20 | 0.41 | 13 | 0.27 |
| Correcta | 43 | 0.89 | 28 | 0.58 | 20 | 0.41 | 35 | 0.72 |

En la Tabla 2 se muestran los resultados; los porcentajes de los alumnos que han contestado correctamente los cuatro ítems abiertos son superiores al 50%, excepto el ítem abierto 3, que evalúa la estimación de la varianza, donde sólo se alcanza el 41% de respuestas totalmente correctas. En este ítem un 41% de los estudiantes tienen una confusión en la obtención de los grados de libertad de la distribución correspondiente o bien hacen un mal manejo de las tablas y un 16% confunde la distribución muestral o sólo recuerda la fórmula de un límite del intervalo. Algunos estudiantes dieron definiciones incompletas o imprecisas en el Ítem abierto 1, un 25% confunde los grados de libertad en la distribución *T* o la desviación típica del estimador y un 17% trata de usar la distribución normal en vez de la *T* en el ítem 2. En el ítem 4 un 27% de los estudiantes no interpretan el intervalo o dan una interpretación bayesiana del mismo.

## Discusión

Aunque el estudio es exploratorio, debido al tamaño de muestra reducido, sus resultados sugieren una amplia variedad de posibles dificultades conceptuales, procedimentales e interpretativas de los estudiantes en relación al intervalo de confianza, que extienden los citados en investigaciones previas. Como ejemplo citamos la confusión de la distribución muestral, sus grados de libertad o la desviación típica del estadístico; olvido de la fórmula que da uno de los límites del intervalo en el caso de la estimación de la varianza o error en la determinación del valor crítico. Asimismo se repiten errores denunciados por otros autores, como falta de relación entre precisión y tamaño de muestra o entre ella, variación en los datos y coeficiente de confianza o la interpretación bayesiana de un intervalo de confianza, o pensar que se refiere al estadístico y no al parámetro.

Algunos de estos errores pueden estar relacionadas con el hecho de que muchos estudiantes visualizan los Intervalos de confianza como estadísticos descriptivos, ignorando su naturaleza inferencial (Cumming y Fidler, 2005). Pero también se observa una debilidad conceptual en la comprensión de la manera como se relacionan los distintos conceptos asociados con un intervalo de confianza (Behar, 2001). Tampoco parece ser comprendida la utilidad de los intervalos de confianza para tomar decisiones sobre hipótesis, posiblemente por no considerar los valores del intervalo como un conjunto de valores plausibles del parámetro.

La importancia del intervalo de confianza y las recientes sugerencias de la necesidad de su uso en la investigación recomiendan tener en cuenta estos resultados y tratar de mejorar su enseñanza. Una posibilidad sería diseñar unidades didácticas basadas en la simulación que incrementa la relevancia del aprendizaje, pues los estudiantes exploran y experimentan el significado de los intervalos y el efecto del tamaño de muestra, varianza y coeficiente (Terán, 2006). Sería asimismo necesario relacionar este tema con el estudio de las distribuciones de probabilidad y hacer ver a los estudiantes la importancia de la distribución muestral en el cálculo de los intervalos de confianza.

## Agracecimientos

El trabajo ha sido realizado dentro del Proyecto SEJ2007-60110. MEC/FEDER, España.

## Bibliografía


- C. Batanero (2000): “Controversies around significance tests”. Journal of Mathematics Thinking and Learning, 2(1-2), 75-98.
- C. Batanero y C. Díaz (2006). “Análisis del proceso de construcción de un cuestionario sobre probabilidad condicional”. Educação e Pesquisa, 8(2), 197-223.
- R. Behar (2001): “Aportaciones para la mejora del proceso de enseñanza-aprendizaje de la estadística”. Tesis Doctoral. Universidad Politécnica de Cataluña.
- R. Cruise, R. Dudley y J. Thayer (1984): A resource guide for introductory statistics. New York: Kendall/Hunt Publishing company
- G. Cumming y F. Fidler (2005): “Interval estimates for statistical communication: problems and possible solutions”. IASE/ISI Satellite.
- G. Cumming y S. Finch (2005): “Inference by eye: Confidence intervals, and how to read pictures of data”. American Psychologist, 60,170-180
- G. Cumming, J. Williams y F. Fidler (2004): “Replication, and researchers` understanding of confidence intervals and standard error bars”. Understanding Statistics, 3, 299-311.
- H. Davies (1998): “What are confidence intervals?” On line: http://www.evidence-based-medicine.co.uk.
- C. Díaz, C. e I. de la Fuente, I. (2007). “Validación de un cuestionario de razonamiento probabilístico condicional”. REMA, 12(1), 1-15.
- L. L. Harlow, S. A. Mulaik y J. H. Steiger (1997): “What if there were no significance tests?” Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum.
- I. Miller, J. Freund y R. Johnson (1997): Probabilidad y estadística para ingenieros. Quinta edición. México: Prentice Hall

- D. Montgomery y G. Runger (2004): Probabilidad y estadística aplicadas a la ingeniería. Segunda edición. México: Limusa.
- D.E. Morrison y R.E. Henkel (1970): "The significance test controversy". Chicago: Aldine.
- E. Olivo (2006): "Análisis de la presentación de intervalos de confianza en textos de estadística para ingenieros". Departamento de Didáctica de la Matemática. Universidad de Granada.
- S.J. Osterlind (1989): Constructing test ítems. Boston: Kluwer.
- T. Terán (2006): "Elements of meaning and its role in the interaction with a computacional program". En A. Rossman y B. Chance (Eds.), Proceedings of the Seventh International Conference on Teaching Statistics. Salvador (Bahia): IASE.
- A. Vallecillos (1994): "Estudio teórico - experimental de errores y concepciones sobre el contraste de hipótesis en estudiantes universitarios". Tesis doctoral Departamento de Didáctica de la Matemática. Universidad de Granada.

**Eusebio Olivo**, Ingeniero Mecánico Administrador, ITESM, Campus Monterrey. Maestro en Ciencias con especialidad en Estadística. Universidad de Texas, Campus El Paso, USA. Diploma de Estudios Avanzados. Programa de Didáctica de la Matemática, Universidad de Granada. Profesor del Departamento de Matemáticas en el ITESM, Campus Monterrey. Ha publicado manuales dirigidos a estudiantes de probabilidad y estadística de las carreras de ingeniería y algunos trabajos de investigación en educación. Ha participado en el Comité Organizador de la XII Reunión de Investigación y Desarrollo Tecnológico del ITESM, Comité de Evaluación Premio Rómulo Garza y el Comité para estudiar el sistema de clasificación de profesores del ITESM, Campus Monterrey.

**Carmen Batanero**, Licenciada en Matemáticas en la Universidad Complutense de Madrid y Doctora en Matemáticas (Estadística) por la Universidad de Granada, España. Profesora de Didáctica de las Matemáticas en la Universidad de Granada. Ha publicado libros dirigidos al profesorado y artículos en diferentes revistas de educación matemática. Es miembro del Comité Ejecutivo de ICMI (International Commission on Mathematical Instruction) y fue Presidenta de IASE (International Association for Statistical Education). Ha coordinado la organización del VII Congreso Internacional sobre Enseñanza de la Estadística, ICOTS-7. Fue editora de la revista Statistics Education Research Journal.

UNIÓN
REVISTA IBEROAMERICANA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA

Diciembre de 2007, Número 12, páginas 53 - 62
ISSN: 1815-0640

# La enseñanza de la Matemática en Ciencias Económicas ¿en contexto o fuera de contexto?

***Raquel Susana Abrate, Ivana Beatriz Gabetta y Marcel David Pochulu***

## Resumen

El trabajo resume un estudio de naturaleza diagnóstico-descriptiva, que se llevó a cabo en las Carreras de Ciencias Económicas de la Universidad Nacional de Villa María (Argentina). Tuvo por finalidad realizar un diagnóstico de situación del aprendizaje logrado por los estudiantes, al realizar una comparación entre los objetivos planteados desde la cátedra de Análisis Matemático, a través de su planificación, y las apreciaciones vertidas por los alumnos en un cuestionario que se diseñó para tal fin.

## Abstract

This work abridges a study of diagnosis-descriptive nature, that has been carried out in the College of Economics Science at Villa Maria National University (Argentina). Its aim was to achieve a diagnosis of the students learning situation, making a comparison between the objectives posed from the class of Maths Analysis, across its planning and the appreciation given by the students in a questionnaire written with that purpose.

## Introducción

Hace 17 años, Santaló (1990) expresaba, en la Conferencia inaugural del I Congreso Iberoamericano de Educación Matemática (Sevilla, España), que:

> La elección de la matemática para quienes van a ser matemáticos profesionales es relativamente fácil, pues basta mostrar las grandes líneas generales y enseñar a aprender, dejando que cada educando vaya seleccionando según sus gustos y su vocación la matemática que más le interese, pues tiene toda la vida por delante para ir completando la formación recibida en la escuela.
>
> El problema radica en la selección de la matemática para la educación de quienes no tienen interés particular por ella y sólo la aceptan como una necesidad que les ayude a desempeñar mejor sus ocupaciones y a entender mejor su sostén básico. Para ellos es fundamental que los encargados de diseñar los planes de estudio tengan en cuenta el valor formativo de la matemática y también los temas de los que es necesario informar en cada ciclo de la enseñanza y en cada particular carrera profesional. (p. 26)

En este sentido, muchos son los libros de texto que intentan abordar la Matemática en contexto para las diferentes formaciones profesionales. Por ejemplo, Haeussler y Paul (1997), comunican en su prefacio:

> Una gran variedad de aplicaciones destinadas al lector aparecen en esta obra; de manera continua, los estudiantes ven cómo las matemáticas que están aprendiendo pueden ser usadas. Estas aplicaciones cubren áreas tan diversas como administración, economía, biología, medicina, sociología, psicología, ecología, estadística, ciencias de la tierra y arqueología. Muchas situaciones del mundo real fueron sacadas de la literatura existente y las referencias están documentadas. En algunas se dan los antecedentes y el contexto con el fin de estimular el interés.

Ahora bien, sabemos que la contextualización sociocultural de la práctica profesional choca con la limitación de tiempo de las asignaturas e implica afrontar el problema de la selección de los contenidos, metodologías de enseñanza y tipo de evaluación. No obstante, existen hoy en día numerosas investigaciones en Didáctica de la Matemática que han puesto de manifiesto que la contextualización también puede facilitar: (1) la comprensión de los alumnos al proporcionar la conexión de los contenidos objeto de estudio con sus conocimientos previos, (2) la motivación de los alumnos, etc. (Ramos, 2006, p. 3).

Las situaciones planteadas anteriormente han dado origen a algunos trabajos de investigación en nuestro entorno laboral inmediato: las Carreras de Ciencias Económicas (Contador Público, Licenciatura en Administración y Licenciatura en Economía) de la Universidad Nacional de Villa María (UNVM), pues se ha pretendido que sus aportes hicieran posible una reflexión sobre las prácticas docentes que sirviese para potenciar los valores y aspectos positivos de la institución, permitiendo subsanar deficiencias y mejorar los procesos de enseñanza y aprendizaje que en ella se realizan.

Así, en Abrate y Pochulu (2000) se declaraba:

> La metodología de enseñanza que se emplea actualmente en Análisis Matemático de las carreras de Ciencias Económicas de la UNVM, se la puede caracterizar de la siguiente manera:
>
> - Construcción lineal de los conceptos, que respeta una secuencia jerárquica que va de lo simple a lo complejo, evidenciada a través de un programa rígido y pautado en tiempos destinados a cada unidad de aprendizaje, sin ninguna conexión con la resolución de problemas.
> - Se introducen las nociones básicas sin el planteamiento de un problema, o a partir de problemas muy lejanos al estudiante, en el sentido que no están relacionados con el campo de la Administración y/o Economía, sino más bien, con la Matemática pura en sí.
> - Enseñanza centrada en el discurso del profesor. Posiblemente esta razón se deba a que el número de alumnos con el que cuenta cada comisión de trabajo sea superior a los 50 y en algún caso llega a 100 alumnos.

- No se promueve un enfoque constructivista del aprendizaje, en tanto que el alumno recibe por parte del docente la explicación de los contenidos teóricos y la explicación de ejercicios tipo, que le permite aplicar y afianzar técnicas básicas. (p. 40)

Mientras que en Pochulu (2004), haciendo un análisis de las prácticas docentes de Matemática en las carreras de Ciencias Económicas de la UNVM, se expresaba:

> Como característica más notable, hallamos que los procesos de enseñanza de la Matemática se encuentran intensamente guiados por los profesores, basados tal vez en la creencia de que el alumno aprende viendo y el docente enseña mostrando. A su vez, las prácticas docentes han tenido como punto de apoyo y referencia los contenidos conceptuales – los que se presentaron alternadamente con los contenidos procedimentales – y la función principal de los alumnos se circunscribió a tomar notas de los registros textuales que se dejaban en la pizarra y las exposiciones que fueron realizadas por el profesor. (p. 53)
>
> Otra característica distintiva que hallamos en las prácticas docentes universitarias de Matemática deviene del hecho que adolecen de una cantidad apreciable de aplicaciones y problemas relacionados con las Ciencias Económicas, puesto que las mismas se circunscribieron, en general, a un contexto abstracto de la Matemática. Además, los problemas que plantearon los profesores fueron artificiales, en el sentido que forman parte de la cotidianeidad de la enseñanza de la Matemática pero no se encuentran efectivamente en la vida real, por lo que los alumnos aprenden a utilizar las operaciones y métodos que ellos involucran y no aprenden a resolver problemas de su futuro campo profesional. (p. 54)

Estas características de los procesos de enseñanza y aprendizaje de la Matemática para Carreras de Ciencias Económicas en la UNVM conducen necesariamente a que nos cuestionemos ¿Qué utilidad tiene la Matemática para un egresado de estas carreras? ¿Es realmente útil para un administrador de empresas, un contador, o para un economista conocer la Matemática con su marcado rigor formalista? ¿No le será, quizás, de mayor provecho utilizar la Matemática que aprende para interpretar información y aplicar su conocimiento en los problemas y decisiones que se le presenten en su campo profesional?

Por otra parte, si nos situamos en un enfoque formalista y estructuralista, en el que los alumnos aprenden a calcular derivadas y complejas integrales, pasando previamente por ejercicios sobre límites, enunciando y demostrando teoremas fundamentales, cabe preguntarse: ¿Qué contenidos de Análisis Matemático recuerdan los alumnos de cursos avanzados de las carreras de Ciencias Económicas? Además, si no se abordó una enseñanza de la Matemática en contexto ¿logran los alumnos relacionar el Análisis Matemático con otras disciplinas de su campo profesional? Para dar respuestas a estos dos últimos interrogantes, nos planteamos para esta investigación los siguientes objetivos:

- Precisar el nivel de retención de contenidos específicos básicos del Análisis Matemático que aún recuerdan los alumnos de años superiores de las carreras de Ciencias Económicas de la UNVM;
- Determinar si los alumnos de las carreras de Ciencias Económicas de la UNVM relacionan los contenidos de Análisis Matemático con otras disciplinas del área específica de su formación.

## Metodología

La investigación es de naturaleza diagnóstico-descriptiva y además, presenta las siguientes características: a) hermenéutica: ya que se pretendió comprender los acontecimientos tal y como los interpretaban los sujetos investigados; b) puntual: la información fue obtenida en un período de tiempo breve; c) de campo: la información se obtuvo en el lugar de trabajo de los sujetos investigados.

A fin de dar cuenta con los objetivos propuestos para el trabajo, diseñamos un cuestionario que fue administrado a 71 estudiantes que se encontraban cursando la cátedra de Estadística, perteneciente al tercer año de las carreras de Ciencias Económicas de la UNVM, el día jueves 21 de junio de 2007.

La intención de este cuestionario fue la de realizar un diagnóstico de situación del aprendizaje logrado por estos estudiantes, los cuales consideramos avanzados dentro de las carreras de Ciencias Económicas, y realizar una comparación entre los objetivos planteados desde la cátedra Análisis Matemático, a través de su planificación, y las apreciaciones vertidas por los alumnos.

Para tal fin, seleccionamos 10 actividades que generalmente son propuestas en los trabajos prácticos y exámenes de Análisis Matemático, que involucran conceptos básicos emergentes de los siguientes ejes temáticos: (1) Límites, (2) Continuidad, (3) Derivadas, y (4) Integrales. Si bien en cada actividad originalmente se solicitaba indicar si las expresiones eran verdaderas o falsas, con su correspondiente fundamentación, consideramos oportuno conservar el enunciado, pero dando como opciones de respuestas:

- Sí lo recuerdo y es verdadero.
- Sí lo recuerdo y es falso.
- No lo recuerdo porque en su momento no lo estudié lo suficiente.
- No lo recuerdo porque no lo apliqué en otras materias.

Estas alternativas de respuestas fueron escogidas puesto que no se buscaba con el cuestionario poner a los estudiantes en situación de examen, y sí se pretendía recuperar aquellos conocimientos que el equipo docente a cargo del desarrollo de la asignatura Análisis Matemático, consideró en ese tiempo que debían ser manejados por los estudiantes. Las actividades seleccionadas fueron las siguientes:

a) Cualquier función g(x) que tenga un punto de mínimo en x = a, es derivable en x = a y g'(a) = 0.

b) Si f(x) es continua en el intervalo [a , b] , f(a) > 0 y f(b) < 0, entonces existe algún punto c perteneciente al intervalo (a , b) tal que f(c) = 0.

c) Si una función f(x) es derivable en x = a, y tiene un punto de máximo relativo en el punto (a, f(a)), entonces la recta tangente a la función es paralela al eje x.

d) Si F(x) es una primitiva de una función f(x), entonces F(x) + 7 es también una primitiva de f(x).

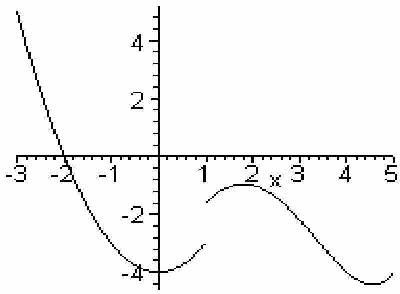
e) Si $\int f(x)dx = G(x) + c$ entonces f '(x) = G(x).

f) $f(x) = \dfrac{5x^2 + 4}{x + 3}$ es derivable en x = –3.

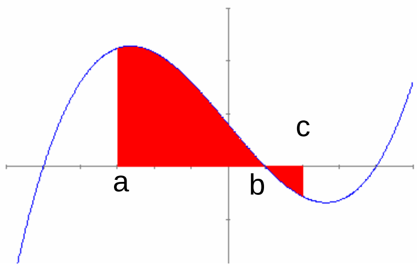
g) Si una función tiene un único punto de máximo, entonces ese máximo es el máximo absoluto de la función.

h) Si $\lim_{x \to a} f(x) = 5$, esto implica que f(a) = 5.

i) La función f(x) del gráfico es continua en el intervalo cerrado [ -2 , 2 ].




j) Dado el siguiente gráfico:




El área sombreada se puede calcular como $\int_a^b (f(x) + \int_b^c f(x)dx$

El cuestionario se complementó con otros datos generales, tales como: sexo, edad, calificación con la que aprobó Análisis Matemático, cantidad de veces que se presentaron a examen y año en que aprobaron la materia. A su vez, destinamos una sección donde se les solicitaba a los alumnos que:

- Puntualizaran si habían encontrado, o no, relaciones entre el Análisis Matemático y temas propios del campo profesional de su carrera.

En caso afirmativo al cuestionamiento anterior, también se les pidió que:

- Especificaran las relaciones encontradas;
- Expresaran si las relaciones encontradas se las habían enseñado en Análisis Matemático, en otras asignaturas específicas de la carrera o en ambas.

Finalmente, resta por aclarar que el cuestionario se estructuró teniendo como base los instrumentos que utilizaron Abrate y Pochulu (2000), en su investigación, la cual tuvo como objetivo general analizar y caracterizar la metodología de enseñanza del Análisis Matemático que se implementa en las carreras de Ciencias Económicas de la UNVM.

## Resultados

La población de estudiantes encuestados, con un promedio ponderado de edad de 20 años, se compone de un 79% mujeres y un 21% varones. Además, el 65% de los estudiantes aprobó Análisis Matemático en primera convocatoria, con un promedio ponderado de 6 puntos sobre 10 (la aprobación se logra con 4 puntos o más), el 21% lo hizo en la segunda presentación a examen y el 14% necesitó de 3 o más oportunidades. Asimismo, el 84% de los alumnos no ha excedido los dos años de haber aprobado Análisis Matemático.

A continuación, sistematizamos en una tabla la información que arrojó el apartado 3 del cuestionario, el cual contenía la selección de 10 actividades que habitualmente se les presentan a los alumnos en los trabajos prácticos y exámenes. Este ítem tenía por finalidad recabar alguna información respecto del nivel de retención de contenidos específicos básicos del Análisis Matemático, que aún recuerdan los alumnos de años superiores de las carreras de Ciencias Económicas de la UNVM.

| *Ítem del cuestionario* | Nivel de retención de contenidos específicos | | | | Razones por las cuales se argumenta no recordar las situaciones planteadas | | | | No responde | Ejes temáticos del Análisis Matemático |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | Responde En forma Correcta | | Responde En forma Incorrecta | | No lo recuerdo porque en su momento no lo estudié lo suficiente | | No lo recuerdo porque no lo apliqué en otras materias | | | |
| | Alumnos | (%) | Alumnos | (%) | Alumnos | (%) | Alumnos | (%) | | |
| (h) | 7 | 10 | 39 | 55 | 4 | 6 | 20 | 28 | 1 | Límite |
| (b) | 45 | 63 | 3 | 4 | 1 | 1 | 22 | 31 | 0 | Continuidad |
| (i) | 61 | 86 | 4 | 6 | 2 | 3 | 4 | 6 | 0 | |
| (a) | 4 | 6 | 30 | 42 | 4 | 6 | 31 | 44 | 2 | Derivadas |
| (c) | 22 | 31 | 8 | 11 | 6 | 8 | 34 | 48 | 1 | |
| (f) | 26 | 37 | 6 | 8 | 4 | 6 | 33 | 46 | 2 | |
| (g) | 5 | 7 | 55 | 77 | 4 | 6 | 7 | 10 | 0 | |
| (d) | 33 | 46 | 9 | 13 | 9 | 13 | 19 | 27 | 1 | Integrales |
| (e) | 12 | 17 | 37 | 52 | 3 | 4 | 19 | 27 | 0 | |
| (j) | 37 | 52 | 16 | 23 | 1 | 1 | 16 | 23 | 1 | |

Tabla Nº 1: Nivel de retención de contenidos del Análisis Matemático por parte de los estudiantes

De las 710 respuestas (71 encuestas con 10 actividades cada una) que tuvo el apartado 3 del cuestionario, 459 (65%) son respuestas afirmativas en las que los alumnos manifiestan recordar contenidos de Análisis Matemático, pero sólo 252 (35%) respuestas las hacen correctas.

Un total de 243 (34%) de respuestas son negativas (los alumnos manifiestan no recordar los conceptos de Análisis Matemático sobre los que se le interroga) y el 1% de los ítems no se responden. Del total de las respuestas negativas, 38 respuestas (5%) se argumenta no recordar por no haber estudiado esos contenidos lo suficiente en su momento y 205 respuestas (29%) hacen responsable al hecho de no haber utilizado los conceptos en otras asignaturas.

Ahora bien, si se analiza el grado de cumplimiento de los objetivos generales que se proponen en la planificación de la asignatura Análisis Matemático para las carreras de Ciencias Económicas de la UNVM, contrastándolos con los resultados que se evidencian en las encuestas, se tiene:

Para el objetivo general: “Comprender los conceptos básicos del análisis matemático”, los resultados de los cuestionarios revelan que sobre los contenidos relacionados con “límites”, el 10% de las respuestas son correctas; sobre “continuidad” lo son, en promedio, un 75%; acerca de “derivadas” son correctas el 20% de las respuestas y sobre integrales el 38%.

Según el criterio de quienes realizan el presente trabajo, que consideran logrado el objetivo si al menos el 50% de las respuestas son satisfactorias (porcentaje mínimo que se solicita en la UNVM para aprobar la asignatura), podemos notar que el porcentaje de respuestas correctas no alcanza un nivel de logro adecuado, en tanto los valores se mantienen por debajo de este umbral. Exceptuamos en este caso las respuestas vertidas para las actividades que correspondían al eje temático "continuidad", las cuales alcanzan un nivel satisfactorio, aunque muy posiblemente esto se debió a que las mismas eran muy intuitivas y fáciles de deducir con escasos conocimientos de Análisis Matemático.

El análisis anterior se ve agravado si se tiene en cuenta que los alumnos han aprobado Análisis Matemático con una calificación que en promedio no es la más baja, que la mayoría no supera los dos años de presentación a examen, y que fueron cuestionados sobre contenidos teóricos de la asignatura con idénticas consignas a las que ellos estaban habituados, sin la tensión propia de una situación de examen.

Con relación a los objetivos generales que se formulan en la planificación de Análisis Matemático como: "Aprender a utilizar dichos conceptos mediante técnicas adecuadas en la resolución de problemas cotidianos de su profesión relacionados con el análisis" y "Relacionar los conocimientos adquiridos con otras materias de la carrera", podemos ver que sólo 10 estudiantes (14%) argumentaron haber encontrado relaciones entre la asignatura y temas propios del campo profesional de sus carreras. No obstante, las relaciones que mencionan no son totalmente claras ni suficientemente contundentes como hubiésemos esperado. Algunos argumentos han sido:

- *Si, algunos con Álgebra y otros c/estadística, pero pocos.*
- *Con Álgebra, necesité Análisis Matemático para poder resolver algunos problemas. En Estadística.*
- *Me acuerdo que hicimos ejercicios de aplicación a la realidad en la materia, pero no recuerdo sobre qué se trataban.*
- *Porque me parece fundamental esta materia en la cultura profesional de toda persona que estudia Ciencias Económicas. Para poder explicar en un ámbito educativo inferior al Nivel Terciario.*
- *Las gráficas de las funciones lineales y cuadráticas las utilizamos en materias como en Microeconomía o en Macroeconomía.*
- *Con algunos temas de Estadística.*

Llama la atención el hecho de que no encuentran relaciones concretas del Análisis Matemático con temas propios de su campo profesional, confundiendo que lo son asignaturas como Álgebra y Estadística, siendo que integran el área de formación matemática del plan de estudios de cada carrera, al que tienen acceso los estudiantes por encontrarse en los folletos de difusión.

Por otro lado, cabe consignar tres apreciaciones que dan indicio de relaciones, aunque no se especifican las mismas, como por ejemplo:

- *Relaciones establecidas entre problemas referidos a Costos, Economía y Contabilidad.*
- *Con una parte donde calculamos un costo.*
- *En Análisis Macroeconómico. En Estadística, muy poco.*

La situación descrita anteriormente nos lleva a cuestionarnos hasta qué punto el Análisis Matemático les ha resultado valioso y de utilidad a estos alumnos, en tanto no recuerdan adecuadamente conceptos básicos, ni encuentran relación de esta asignatura con su campo profesional.

## Conclusiones

Si consideramos que para un profesor enseñar se refiere a las condiciones que producirán la apropiación del conocimiento por parte de los estudiantes y, para un estudiante, aprender significa involucrarse en una actividad intelectual cuya consecuencia final es la disponibilidad de un conocimiento con su doble status de herramienta y objeto (Artigue, Douady, Moreno y Gómez, 1995), podemos decir que los estudiantes de las carreras de Ciencias Económicas de la UNVM no aprecian al Análisis Matemático como herramienta en tanto no establecen relaciones con otras áreas de su campo de formación; ni como objeto, pues no logran apropiarse del conocimiento matemático en sí, en la medida que no reconocen conceptos básicos de la asignatura.

Estas consideraciones nos permiten decir que existen indicios de que no se han incorporado significativamente los datos a la estructura cognitiva de los estudiantes, y por ello el aprendizaje ha resultado memorístico o verbalista, tardando poco tiempo en olvidarse, pues quedó desconectado y descontextualizado.

Pensamos que la enseñanza de la Matemática para futuros profesionales que no centran sus actividades en esta ciencia, debería interrelacionar los contenidos matemáticos con las aplicaciones del campo profesional de la carrera, de tal forma que se integre la realidad específica de cada sector y los intereses de los estudiantes. Trabajar de esta forma conduciría, por otra parte, a mostrar una Matemática como cuerpo de conocimientos no terminado y en constante evolución, donde se pueden discutir estrategias, emplear ejemplos y contraejemplos, criticar y valorizar los resultados, y comprender que la búsqueda de argumentos sólidos es esencial en la resolución de problemas reales.

## Bibliografía


- Abrate, R y Pochulu, M. (2000). *Hacia una perspectiva teórica-instrumental de la enseñanza del Análisis Matemático – Estudio de un caso: Carreras de Ciencias Económicas de la Universidad Nacional de Villa María*. Tesis de grado no publicada. Universidad Blas Pascal. Córdoba, Argentina.

- Artigue, M; Douady, R; Moreno, L. y Gómez, P. (Ed.). (1995). *Ingeniería didáctica en educación matemática – Un esquema para la investigación y la innovación en la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas*. Grupo Editorial Iberoamérica S.A. de C.V. Bogotá.
- Haeussler, E. y Paul, R. (1997). *Matemáticas para Administración, Economía, Ciencias Sociales y de la Vida*. Prentice-Hall Hispanoamericana S.A. México.
- Pochulu, M. (2004). "Configuraciones en las prácticas docentes de Matemática en la Universidad - Estudio de un caso: Álgebra en las carreras de Ciencias Económicas de la Universidad Nacional de Villa María". *Revista de Informática Educativa y Medios Audiovisuales*, 2, 4, 31–61.
- Ramos, A. (2006). *Objetos personales, matemáticos y didácticos, del profesorado y cambios institucionales - El caso de la contextualización de las funciones en una facultad de ciencias económicas y sociales*. Tesis doctoral no publicada. Universitat de Barcelona. Barcelona.
- Santaló, L. (1990). "Matemática para no matemáticos". En: Parra, C. y Saiz, I. (comps). (2001). *Didáctica de matemáticas – Aportes y reflexiones*. 21 – 38. Editorial Paidós Educador. Buenos Aires.


**Raquel Susana Abrate**. Es profesora en Matemática y Computación, y Licenciada en Pedagogía de la Matemática por la Universidad Blas Pascal (Argentina). Docente de Matemática del nivel medio, superior no universitario y universitario. Sus investigaciones actuales se centran en: La resolución de problemas en la formación de profesores y el uso de metáforas en el discurso docente. Contacto: Chile 280, Villa María, Córdoba (Argentina).
E-mail: raquelsabrate@arnet.com.ar

**Ivana Beatriz Gabetta**. Es profesora de Matemática por la Universidad Nacional de Villa María (Argentina). Docente de Matemática del nivel medio y universitario. Sus investigaciones actuales se centran en el uso de metáforas en el discurso docente. Contacto: Bv. Cárcano 474, Villa María, Córdoba (Argentina).
E-mail: gabettaivana@hotmail.com

**Marcel David Pochulu**. Es profesor en Matemática y Computación, y Licenciado en Pedagogía de la Matemática. Además, tiene una Maestría en Docencia Universitaria y es Doctor en Didáctica de la Matemática. Docente de Matemática del nivel medio, superior no universitario y universitario. Sus investigaciones actuales se centran en la resolución de problemas en la formación de profesores y el uso de metáforas en el discurso docente. Contacto: Río Tercero 90, Barrio Vista Verde, Villa María, Córdoba (Argentina).
E-mail: mpochulu@arnet.com.ar

UNIÓN
REVISTA IBEROAMERICANA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA

Diciembre de 2007, Número 12, páginas 63 - 100
ISSN: 1815-0640

# Las matemáticas y la atención a la diversidad. Un ejemplo de aplicación para alumnos con NEE´s [1]

***Sixto Romero Sánchez***

## Resumen

Pretendemos, con este trabajo dar una visión global sobre determinadas estrategias a seguir en la enseñanza de las Matemáticas para alumnos con Necesidades Educativas Especiales (NEE's). Hacemos un conjunto de reflexiones teóricas sobre lo que entendemos por atención a la diversidad, y más concretamente en la enseñanza de las Matemáticas. Abordamos problemas que se plantean en la educación matemática para alumnos y alumnas que presentan dificultades en el aprendizaje de esta disciplina.

Para dar solución a esas dificultades, en la que se encuentran algunos alumnos del Colegio Público Federico García Lorca de Huelva, en el Sur de España, y en especial aquellos con NEE's, se consideró necesario crear un Espacio de Encuentro (EE), sin ningún tipo de discriminación, permitiendo que los familiares-normalmente madres y padres-tengan la posibilidad de compartir e intercambiar experiencias con otras familias en situaciones análogas. Este espacio de encuentro lo denominamos TOCA LAS MATES. Es una experiencia realizada durante los cursos 2001 al 2004 en la que han participado alumnos/as con una gran heterogeneidad en su problemática: Síndromes de DOWN, Hipomelanosis de Ito, problemas de autoestima, disrupción, inmigración…

En definitiva, como principio fundamental, para los estudiantes no se propone un currículo distinto sino un currículo de adaptación. Es decir, es el currículo el que se tiene que adaptar a nuestros estudiantes y no al contrario, supone, por tanto, una nueva concepción del binomio enseñanza/aprendizaje donde la diversidad debe materializarse en un conjunto de pautas y comportamientos que orienten tanto la programación de las actividades como su ejecución en el aula.

## Abstract

We seek, with this work to give a global vision on determined strategies to continue in the teaching of the Mathematics for students with Special Educational Necessities (SEN's). We make a group of theoretical reflections on what we understand for attention to the diversity, and more concretely in the teaching of the Mathematics. We approach problems that think about in the mathematical education for students and students that present difficulties in the learning of this discipline.

To give solution to those difficulties, in which some students of the Public School are Federico García Lorca of Huelva, in the South of Spain, and especially those with SEN's, it was considered necessary to create a Space of Encounter (SE), without any discrimination type, allowing that those family-usually mothers and parent-have the possibility to share and to exchange experiences with other families in similar situations. This space of the finds the we denominate PLAYS THE MATHS. It is an experience carried out during the courses 2001 at the 2004 in the one that you have participated students with a great heterogeneity in their problem: Syndromes of DOWN, Hipomelanosis of Ito, problems of self-esteem, immigration….

In definitive, like fundamental principle, for the students doesn't intend a different curriculum but a curriculum of adaptation. That is to say, it is the curriculum the one that has to adapt to our students and not on the contrary, it supposes, therefore a new conception of the binomial teaching and learning where the diversity should be materialized in a group of rules and behaviors that guide the programming of the activities like its execution so much in the classroom.

[1] Conferencia Inaugural impartida en Maturín (Venezuela) el 21 de junio de 2006 con motivo de la celebración de las Jornadas Internacionales de Educación Matemática

## Introducción

"La razón: ¡Ay, quién alcanza la verdad!
El corazón: Vanidad. La verdad es la esperanza"
**A. Machado**

Amigas y amigos, colegas todos.

En primer lugar, quiero iniciar mi intervención agradeciendo a la Junta Directiva de la Sociedad Venezolana de Educación Matemática, y en especial, al Profesor Fernando Castro al proponerme inaugurar con esta conferencia las Jornadas Internacionales de Educación Matemática.

Mis primeras palabras quiero que sean para recordar Al Prof. Dr. Miguel de Guzmán. Toda la comunidad matemática, no solo española sino los compañeros hermanos de Iberoamérica y de otros países nos conmovimos por tan irreparable pérdida. No es este el momento, desde lo que significan los recuerdos, para hacer una semblanza de tan importante matemático, pero Miguel fue una persona que quiso siempre comprender el mundo en que vivía y aportó a la comunidad matemática internacional unos de los valores más importantes a tener en cuenta por las actuales y futuras generaciones: la regeneración de los valores educativos. Nos ha dejado muy joven, le quedaba mucha vida por delante para el maestro de matemáticos pero ahí queda su obra. Una visión integral de la matemática, desde el rigor hasta lo lúdico. La infinidad de artículos escritos por Miguel ponen de manifiesto su interés para que el profesor de Matemáticas sintiese la belleza y la utilidad de éstas: la curiosidad y la heurística organizada de las demostraciones representan dos parámetros que debían estar presentes en las tareas docentes e investigadoras de todo profesor. Es una delicia leer, entre otros, sus libros: Mirar y Ver (1997), Aventuras matemáticas (1987) o El rincón de la pizarra (1996. Pero también, a nivel personal les puedo decir que como consecuencia del año 2000, Año Internacional de las Matemáticas, la Real Academia de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales publicó un magnífico libro denominado Horizontes Culturales- Las Fronteras de la Ciencia. En él un bello artículo Miguel nos hizo un espléndido y bello recorrido sobre los ***Caminos de la matemática hacia el futuro***. Aquí deja plasmado unos enunciados que, a mi juicio, resume la labor de Miguel de Guzmán en torno a la relación de la Matemática con la cultura y Sociedad:

- Muchos aspectos de nuestro quehacer matemático involucran fuertemente nuestro sentido de la responsabilidad.
- Se puede pensar que, en gran parte, hemos abandonado actitudes básicas del quehacer matemático que fueron centrales en otros periodos de nuestra larga historia.
- La naturaleza misma del quehacer matemático implica el estímulo de ciertos valores específicos.
- La creciente matematización de la ciencia y de la cultura implica fuertes riesgos a los que es necesario prestar atención.
- La conveniencia de colocar en un lugar destacado de nuestra actividad estas actitudes constituye un gran reto para el futuro.

Tuve el honor de compartir con él muchas horas de discusión, y la última fue como miembros de un tribunal de tesis que él presidía y yo como vocal, en de diciembre de 2003, en Málaga (España). ¡Dios mío como pasa el tiempo!

Como dice mi gran amigo Claudi Alsina, en una bellísima carta publicada en la revista SUMA:

> Ya en el cielo de los profesores de matemáticos buenos, con Gonzalo Sánchez Vázquez y con Luis A.Santaló y tantos otros, le pido a Miguel que nos ilumine el camino del trabajo diario para hacer una matemática mucho más creativa y atractiva.

Bien, después de esta introducción emotiva, quiero comenzar esta conferencia recordando a otro gran matemático español, el Prof. Dr. Pedro Puig. Hace ya cincuenta años, nos dejaba un legado a modo decálogo:

1. No adoptar una didáctica rígida, sino amoldarla en cada caso al alumno, observándole constantemente
2. No olvidar el origen de las Matemáticas ni los procesos históricos de su evolución.
3. Presentar las Matemáticas como una unidad en relación con la vida natural y social.
4. Graduar cuidadosamente los planos de abstracción.
5. Enseñar guiando la actividad creadora y descubridora del alumno.
6. Estimular dicha actividad despertando interés directo y funcional hacia el objeto del conocimiento.
7. Promover en todo lo posible la autocorrección.
8. Conseguir cierta maestría en las soluciones antes de automatizarlas.
9. Cuidar que la expresión del alumno sea traducción fiel de su pensamiento.
10. Procurar a todo alumno éxitos que eviten su desaliento.

Muchas de las propuestas metodológicas que hemos realizado en mi Departamento en la Universidad de Huelva, a lo largo de muchos años, han estado cimentadas en el pensamiento del Prof. Puig Adam.

Si nos fijamos, precisamente en el punto 1, ¿qué representa la adopción de no adoptar una didáctica rígida...? La respuesta a esta propuesta del año 1955, no es sino lo que hoy denominamos ATENCIÓN A LA DIVERSIDAD.

Considero que estamos ante uno de los temas más controvertidos y polémicos en educación. Los planteamientos teóricos de la atención a la diversidad parecen lejos de toda duda el problema es... ¿cómo llevar esto a la práctica?

A modo de introducción y de forma genérica antes de entrar en detalles me gustaría hacer algunas reflexiones sobre la diversidad en las aulas.

## 1. ¿Qué se entiende por atención a la diversidad?

"Si buscas resultados distintos, no hagas siempre lo mismo"
**A. Einstein**

Bajo mi óptica la atención a la diversidad se basa en tres aspectos:

**a)** Hay que dirigir nuestra atención a personas con su propia individualidad; por tanto procuramos una educación personalizada.

**b)** Conseguir el desarrollo de todas las facetas de la personalidad; es decir una educación integral.

**c)** Así asumido el objeto de nuestro trabajo, es decir, facilitar una educación personalizada e integral hemos de concluir que la atención a la diversidad y la orientación no son fenómenos aislados o especiales dentro de nuestra actividad sino que está integrada en el currículum, es una faceta más de nuestra responsabilidad.

Este planteamiento corre el riesgo de reducirse a opiniones más o menos vacías de contenido real aunque de los mismos se derivan distintos tipos de actuaciones que deben ser objeto de este y otros programas del Centro. Por ejemplo es necesario:

***Asegurar** una oferta de opcionalidad suficientemente amplia y en función de las necesidades del alumnado.

***Asesorar y facilitar** la toma de decisiones sobre opciones e itinerarios educativos y, en su caso, profesionales.

***Definir los** objetivos, contenidos y actividades de enseñanza/aprendizaje acordes a la realidad del alumnado. Ello implica decisiones concretas en la elección de contenidos y su secuenciación, en la metodología y en la evaluación de los aprendizajes y todo ello tanto en el currículo ordinario del centro, en cuestión, como en las adaptaciones y programas específicos (apoyos, diversificación, etc.) que se adopten. Todo ello bajo el objetivo prioritario de ofrecer una enseñanza de calidad.

En esta línea los Proyectos Curriculares -especialmente el de secundaria- deben asumir como líneas prioritarias la integración de los alumnos con NEE´s y la prevención e intervención en el fracaso escolar.

**d)** Coordinar la acción educativa entre las distintas áreas a través de los responsables pedagógicos y entre los distintos profesores que forman un equipo docente coordinados por el tutor.

**e)** Prevenir las dificultades de aprendizaje y de adaptación y asegurar que el centro tenga una respuesta adecuada en el caso de que éstas se produzcan.

## 2.- Atención a la diversidad y prevención de las dificultades de aprendizaje

"El hombre que hace que las cosas difíciles
parezcan fáciles es el educador"
**Emerson**

A partir de esta concepción de la atención a la diversidad debemos reflexionar en torno a la prevención de las dificultades de aprendizaje y del fracaso escolar.

El fracaso escolar se debe a múltiples causas que, aunque no es objeto de estudio en profundidad en esta ocasión, es importante reseñar la información acerca de las causas que lo favorecen, no obstante puede apuntarse:

1.- Desde el punto de vista intelectual.
2.- Desde el punto de vista curricular.
3.- Desde el punto de vista socioafectivo.

En factores de personalidad se han encontrado diferencias significativas en los siguientes aspectos:

*Los alumnos que no promocionan tienden a ser influenciados por la presión de los grupos sociales, especialmente de iguales, y por tanto confían menos en sus propios cursos.
*Los alumnos que no promocionan tienden a ser más "entusiastas", más confiados en la *buena suerte.*
*Los alumnos que promocionan tienden a ser más reservados y más estables emocionalmente.
*Los alumnos que promocionan tienden a aceptar con más facilidad las normas y valores de los adultos y tienden a ser más autocríticos con su conducta.

Asimismo, basado en la experiencia, los alumnos que puntúan más alto en un factor secundario de extroversión tienden a tener peores resultados académicos ya que si bien tienen la ventaja de ser menos inhibidos socialmente es cierto que no es un buen predictor del éxito escolar.

En relación con la autoestima, los alumnos con fracaso escolar desarrollan una teoría de sí mismo caracterizada por expectativas negativas sobre su rendimiento y la personalidad que conducen a una conducta definible como *indefensión aprendida*, depresión o agresividad que en los aspectos académicos supone la renuncia a aprender.

El control externo de la conducta por la institución escolar tiende a fracasar mientras que el control interno es inexistente o débil.

Las interacciones escolares percibidas por estos alumnos como una estructura social que facilita el rechazo, por trato duro *o* por *indiferencia*, de aquellos alumnos que no responden al concepto de buen escolar.

Los alumnos que no se adaptan a los ambientes escolares normalizados comienzan a moverse, en un clima escolar caracterizado por normas sociales asistemáticas, indiscriminadas, externas y paulatinamente extrañas a él.

Estos datos deben ser relativizados pero en tanto que parecen estar en *sintonía* con la experiencia docente: pueden ser tenidos en cuenta como elementos de reflexión.

En conclusión y partir de las consideraciones planteadas hasta ahora hay que decir que una propuesta educativa para la prevención debe sustentarse en estos planteamientos:

1.- Todo programa debe incluir a toda la comunidad escolar para que resulte rentable, viable, y capaz de producir cambios. Ciertamente el alumnado es *el centro* de atención pero en modo alguno el único elemento de la institución escolar y centrarse exclusivamente en ellos conduce a enmascarar parte de la realidad.
2.- Puede reducirse el riesgo de fracaso escolar si las programaciones prevén de manera sistemática la inclusión de actividades que supongan el uso de técnicas del "aprender a aprender". Parece claro que se esta exigiendo al alumnado un nivel de abstracción por encima de sus posibilidades por lo que si no se aumentas sus capacidades mediante los propios contenidos terminará siendo un círculo vicioso.
3.- Es necesario conseguir un clima escolar en el centro que sirva para desarrollar determinadas actitudes que tienen una incidencia clara e incluso determinante en el fracaso escolar.

En realidad la mayoría de los contenidos actitudinales previstos en la enseñanza secundaria van en esa dirección pero es necesario marcar prioridades y concretarlas:

A) Desarrollar la autoestima.

B) Aceptar normas que regulen la vida colectiva al tiempo que desarrollan la convivencia.

C) Desarrollar y cultivar la atención.

D) Proponer actuaciones que favorezcan el orden en el espacio y el material utilizado.

E) Elaborar y presentar correcta y rigurosamente los trabajos.

F) Valorar el esfuerzo y superación personal.

G) Desarrollar el sentido crítico y la responsabilidad.

H) Asegurar la participación real en la vida del Instituto.

I) Proporcionar medios para el desarrollo de la sociabilidad que se concrete, por ejemplo, en actividades extraescolares u otras actividades.

## 3.- Características del alumnado

"Haced que los niños busquen aquello que sean
capaces de hallar por sus solas fuerzas"
**Pestalozzi**

La realidad revela la necesidad de dar respuesta educativa a los alumnos/as. En este sentido es importante tener en cuenta que ésta se contemple en las leyes educativas elaboradas por los gobiernos. Así, por ejemplo, en nuestro país la Enseñanza Secundaria Obligatoria (ESO), dentro de una enseñanza de carácter comprensivo, habrá de enfrentarse a problemas como el de proporcionar una respuesta educativa adecuada a un colectivo heterogéneo de alumnos con diversas necesidades de formación y diferentes intereses personales, trabajando en un mismo centro escolar y con un currículum en gran parte común. La educación se considera un derecho social y por tanto debe dirigirse a todos los ciudadanos en un plano de igualdad con ausencia de cualquier discriminación, por ello se concibe una formación básica común para todos que se organiza de manera comprensiva. Al mismo tiempo la necesidad de adaptarse a las diferencias existentes en los intereses de los alumnos, sus capacidades y necesidades implican que a lo largo de la etapa se vaya implantando una progresiva diversificación en los contenidos. Por ello, aunque las características, en estos momentos no se expresen todas, voy a centrar mi discurso en dos:

GRUPO I: Alumnos/as con características socioeducativas en torno al fracaso escolar.
GRUPO II: Alumnos/as con necesidades Educativas Especiales.

### 3.1. Alumnos con fracaso escolar (Experiencia recogida de varios Institutos de Enseñanza Secundaria del Centro y Sur de España)

#### *3.1.1. Estudio de casos*

La necesidad de resolver este problema ligado a motivos culturales, de emigración, de etnia, de nacionalidad y/o causas socioeconómicas y familiares u otras causas conlleva necesariamente a una adaptación del currículo para acercar las necesidades de estos alumnos/as a unos contenidos que tienden a rechazar por razones culturales o por la propia experiencia del fracaso previo en la escuela.

El alumnado tradicional procede en su mayoría de familias de clase media. En los últimos cursos se ha producido una importante incorporación de alumnos con necesidades de compensación procedentes de la inmigración de diferentes países. ¡Es una situación que ha ido aumentando en España, en los últimos diez años!

Con independencia del origen nacional, étnico o cultural, se constata un importante aumento del número de alumnos con necesidades de compensación educativa, es decir, alumnos en clara desventaja socioeducativa.

Alguno de estos alumnos recibe apoyo mediante el programa de diversificación curricular y en otros no están suficientemente evaluada la necesidad ya que en cualquier caso se carecía, hasta ahora, de recursos para su atención en el segundo ciclo de ESO.

Las desventajas se concretan en la siguiente tabla:

| **Escolarización** | **Competencias curriculares** | **Problemas sociales** | **Adaptación a la escuela** |
|---|---|---|---|
| Irregularidad | Ciertos desfases temporales | Inmigrante | Inadaptación consecuencia de su desfase curricular |
| Periodos largos sin escolarizar | Conocimiento insuficiente del español (inmigrantes) | Minorías con cierta desventaja social | Desmotivación |
| | | Familias o grupos socialmente desfavorecidos | Abandono prematuro |

### *3.1.2. Propuesta de soluciones*

Para ello proponemos un espacio sociocultural de cooperación con el entorno orientado a mejorar y enriquecer el proceso educativo de alumnos en situación de desventaja, a través de la planificación de acciones complementarias dirigidas a favorecer:

a) La continuidad y regularidad de la escolarización.
b) La inserción.
c) La participación en el centro del alumnado.

Efectivamente, muchos adolescentes se encuentran inmersos en una dinámica social dónde el tiempo es sinónimo de sedentarismo y de consumo: No cabe espacio para el aprendizaje, para el enriquecimiento personal.

No podemos olvidar tampoco que estos proyectos tienen un elemento preventivo básico del fracaso escolar ya que algunos de estos adolescentes caminan hacia la marginación social con todo lo que ello significa.

Tampoco puede obviarse la importancia de la estructura grupal en los adolescentes por lo que todo trabajo de supone trabajar desde y en el grupo.

Integrar a este alumnado no solo en el centro sino también en su entorno social desarrollando hábitos de convivencia y mejorando su autoestima supone intervenir en las variables que llevan al fracaso escolar y personal.

Nuestro interés en prevenir y compensar se centra por un lado en lo curricular mediante programas complementados con elementos de educación no formal, habilidades sociales y conocimiento de las nuevas tecnologías.

Desde el punto vista psicosocial todo programa de estas características debe perseguir los siguientes objetivos:

- Compensar las carencias educativas de los destinatarios del proyecto para garantizar el enriquecimiento de la oferta educativa y la igualdad de oportunidades en educación.
- Fomentar la participación del individuo en su entorno para proporcionar alternativas a través del desarrollo de actividades educativas.

Ambos objetivos generales se concretan en los siguientes:

A) Crear ambientes propicios para la integración.
B) Fomentar las interacciones entre sujetos de diferentes culturas.
C) Desarrollar habilidades sociales.
D) Desarrollar la integración y relación con personas de otros entornos sociales.
E) Trabajar de forma integrada con la familia fomentando su implicación en el proceso educativo.
F) Fomentar el desarrollo personal y social de los alumnos con la organización y participación de actividades de ocio.
G) Ofrecer nuevas alternativas de ocio y tiempo libre.
H) Trabajar la autoestima.
I) Ayudar a descubrir los intereses y capacidades individuales y sacar el mejor rendimiento de ellas.
J) Reforzar los aprendizajes instrumentales básicos.
K) Fomentar una actitud de curiosidad por la información que reciben tanto de sus compañeros como de los profesores.
L) Fomentar el conocimiento y uso de las nuevas tecnologías.

## 3.2. Alumnos con Necesidades Educativas Especiales

"El fuerte determina los acontecimientos;
el débil sufre los que el destino le impone"
**Vigny**

### *3.2.1. Objeto de la denominada Educación Especial*

Siempre han existido sujetos que no han sido considerados *normales* por el resto de sus semejantes. En la mayoría de los casos, estos sujetos que presentaban ciertos *déficit*, se tenían que enfrentar a un constante abandono y falta de oportunidades por parte de la sociedad en la que se encontraban. Desde entonces, la Educación Especial ha recorrido un largo camino. Cuando se comenzó la escolaridad obligatoria se pudo comprobar que muchos de los niños considerados hasta entonces como *normales* no alcanzaban el nivel medio exigido. Estamos hablando de una escuela competitiva donde predominaban los valores intelectuales y donde el alumno que no llegaba a ese nivel medio era considerado como alumno de educación especial. Durante mucho tiempo la educación especial fue vista como la última oportunidad de estos sujetos. En la actualidad se tiende a abandonar el concepto de Educación Especial ya que el mismo término lleva implícito su aceptación como algo diferente del hecho educativo general. Debemos considerar que toda educación ha de ser "especial" ya que la educación ha de adaptarse al ritmo individual de cada sujeto. Cada alumno es diferente, por lo tanto, es adecuado que la educación trate las diferencias individuales. Los alumnos con NEE´s no pueden ser excluidos del sistema ordinario de enseñanza por lo que la Educación Especial tiende a desaparecer integrándose en la educación general. Hasta llegar al concepto de *sujetos con NEE´s* la sociedad y, por supuesto, la educación ha tenido que recorrer un largo camino. Siempre han existido diferentes clasificaciones para estos sujetos: individuos sordos, ciegos, deficientes mentales, multideficiente, etc., o grado de pérdida de visión, de audición, de cociente intelectual.... considerados muchas de ellas desde un punto de vista clínico. Debemos tener presente que es muy difícil proclamar un cuadro general de inadaptaciones porque es complicado establecer diagnósticos diferenciales, dados que algunos trastornos (la mayoría) van asociados con otros. Siempre ha existido un afán clasificador de los sujetos de Educación Especial. Actualmente surge un nuevo enfoque en el que se trata de dar más importancia a las necesidades educativas que tiene un individuo para incorporarse plenamente a su entorno social y familiar. La categorización es sustituida por un concepto muy amplio de "Necesidades Educativas Especiales" que abarca a sujetos con cierta clase de dificultades de aprendizaje, cualquiera que sea su causa. El considerar como sujetos de Educación Especial a unos determinados niños es porque, considerados desde una visión integrativa, tienen unas necesidades educativas especiales, es decir, que van a precisar unas determinadas ayudas pedagógicas o servicios para el logro de sus fines educativos. Así pues, lo que va a determinar al sujeto de Educación Especial no será ya su deficiencia sino las condiciones que afectan al desarrollo personal de los mismos y que justifican la provisión de determinadas ayudas o servicios educativos poco comunes. La era de las escuelas especiales, donde el tratamiento a los alumnos se centraba en el déficit que padecía, tuvo su fase de crecimiento en España al igual que en otros países. Pero, al mismo tiempo, se fue iniciando un declive en favor de diversos movimientos y teorías que conciben al niño con problemas, inserto en las aulas ordinarias, como el mejor medio educativo. En los años sesenta se da un conjunto de circunstancias (nuevas corrientes de pensamiento, asociacionismos de padres, declaraciones de los derechos del deficiente mental, programas de atención, etc.) que vienen a cuestionar la calidad de los servicios prestados a las personas con deficiencias, proponiendo prácticas alternativas, basadas en los principios de normalización e integración. Normalización e integración son conceptos estrechamente ligados, relacionados; aunque para algunos se entiende de diferentes formas. Para Mikkelsen, la normalización es el objetivo a conseguir y la integración sería el método para lograrlo; otros conciben la integración social como el resultado de la normalización. Normalización significa la aceptación de las personas con su deficiencia dentro de la sociedad "normal" con los mismos derechos, responsabilidades y oportunidades a disposición de los demás. Se trata de poner a disposición de todas las personas con deficiencias unas condiciones y unas formas de vida, que se aproximen lo más posible a las circunstancias y al estilo de vida considerado normal en la sociedad, a fin de que puedan desarrollar al máximo su personalidad. Estos principios no sólo buscan adaptar las condiciones de vida del deficiente, para ajustarlas a las de la sociedad, sino que pretenden al mismo tiempo modificar las mismas condiciones sociales establecidas. Sólo una sociedad diferente puede integrar a personas diferentes.

Se justifica, según el informe Warnock, la tendencia a abolir la segregación de los niños que necesitan educación especial, por las siguientes razones:

1) La dificultad de incluir a un niño en una categoría determinada.
2) El hecho que pueda dejar secuelas lógicas –estereotipos.
3) Porque implica que los expertos y profesores esperan un bajo rendimiento del individuo.
4) Disminuye la propia autoestima e imagen personal del niño.
5) Predominio del diagnóstico basado en carencias en vez de capacidades.
6) Importancia del desarrollo conseguido sobre el no logrado.

Por todo lo cual, a la categorización debe sustituirla un amplio concepto de N*ecesidades Educativas Especiales* que abarque a alumnos con cierta clase de dificultades de aprendizaje, cualquiera que sea su causa. Se entiende por NEE´s el conjunto de recursos educativos puestos a disposición de los alumnos que podrán necesitarlos de forma temporal o continuada. Cuando decimos que un alumno presenta NEE´s. estamos haciendo referencia a que este alumno necesita una serie de ayudas (pedagógicas y/o de servicios) no comunes, para lograr los fines educativos. Lo que en realidad debe preocupar no es establecer categorías entre las personas, sino las condiciones que afectan al desarrollo personal de los alumnos y que justifican la provisión de determinadas ayudas o servicios educativos menos comunes.

Deja de tener sentido hablar de niños diferentes, centrándonos en el déficit que presenta, las necesidades educativas especiales forman un continuo que va desde la ayuda temporal o transitoria hasta la adaptación permanente a lo largo de toda la educación. Este profundo cambio en la educación especial y en la concepción de deficiencia de los sujetos ha sido favorecido, según Marchesi (1990), por las siguientes razones:

- Por una diferente concepción de deficiencia. Antes se le asignaba todo el valor a los rasgos hereditarios o constitucionales, mientras que ahora, el factor ambiental ha pasado a desempeñar un papel muy relevante.
- Considerar la importancia del aprendizaje como motor del desarrollo.
- Las técnicas evaluativas dejan de ser tan cuantitativas para cobrar más relevancia los procesos de aprendizaje y los métodos cualitativos.
- Las críticas que recibía el sistema dual (ordinario y especial) de los numerosos profesionales que trabajaban con sujetos discapacitados.
- El tener que enfrentarse en las escuelas con la diversidad de alumnado en cuanto a capacidades, intereses o motivaciones.
- Los escasos resultados obtenidos por las escuelas especiales en cuanto a integración social de sus alumnos.
- La existencia, en todos los países desarrollados de una corriente normalizadora que abarcaba todos los planos de la sociedad planteando la educación bajo supuestos integradores y no segregadores.

### *3.2.2. Organización de la Educación Especial*

#### I. Introducción

En las sociedades desarrolladas y en sus comunidades educativas se ha ido extendiendo en los últimos años una nueva visión de las condiciones de vida y de escolarización de las personas con algún tipo de déficit o minusvalía. Este cambio de mentalidad, que empieza a forjarse en los años 60, ha llevado, a estas sociedades, a comprender que el mundo de este tipo de personas no debe ser diferente al mundo de los demás. Estas mentalidades, que se encuadran dentro de lo que se ha dado por llamar el movimiento integracionista son, hoy en día, el principal motor de cambio para el mundo de la deficiencia mental y para todos aquellos sujetos que presentan ciertos hándicaps en la configuración física o psicológica de su persona. Dentro de esta corriente integracionista, un concepto se destaca, frente a otros, por su idea de globalidad: normalización. Normalización significa poner a disposición de todas las personas con ciertas deficiencias unas pautas de vida y condiciones para la vida diaria lo más parecida posible a las circunstancias y modo de vida de la sociedad" (Nirje, 1969).

Cuando el concepto de normalización se traslada al plano educativo hablamos de integración escolar. Esta integración escolar está suponiendo una auténtica revolución en las prácticas educativas habituales así como en la concepción y diseño de los servicios educativos. El antiguo modelo de atención a alumnos, según el déficit que presentaban, ha dado paso a un nuevo concepto de educación especial y de la población a la que va dirigida. El cambio fundamental es la introducción del concepto de necesidades educativas especiales. Hemos de darnos cuenta que la escuela es el primer entorno no familiar con el que en niño ha de enfrentarse. Nuestras escuelas son organizaciones muy parecidas a las distintas organizaciones sociales y por lo tanto es el primer tanteo para la verdadera integración del niño con déficit en la sociedad. Dependiendo del éxito que se tenga en la integración escolar dependerá el éxito de la verdadera integración, la integración social.

Es por esto por lo que debe surgir una escuela que de respuesta a las individualidades de cada uno, como se decía en el apartado 1, independientemente de sus características y de su entorno, una concepción de escuela que responda a la diversidad que caracteriza a todo grupo humano.

## II. Aulas y Centros específicos

La toma de decisión respecto a las necesidades de servicios y/o apoyos educativos que necesita un determinado alumno ha de estar fundamentada en propuestas curriculares teniendo en cuenta un principio básico: procurar que los servicios y apoyos sean resueltos en el entorno menos restrictivo posible. Así, la decisión sobre el centro al que un determinado alumno debe ir debe adoptarse en base a una correcta evaluación psicopedagógica. En esta decisión, en la cual, el ambiente y las características familiares, así como las posibilidades del entorno jugarán un papel decisivo, se procurará, siempre que sea posible, la escolarización se realice en el centro ordinario de su entorno.

El tipo de ayuda dependerá no del déficit sino de la necesidad educativa que presente un determinado alumno para esto la Administración contempla dos tipos de centros: centros ordinarios y centros de Educación Especial. Y tres modalidades de escolarización que, desde un entorno más restrictivo a otro menos restrictivo serán:

1.- Centros Específicos de Educación Especial.
2.- Aulas de Educación Especial en centros ordinarios
3.- Aulas ordinarias en centros ordinarios.

## III. Integración de alumnos con NEE's en la escuela ordinaria

### A.- El origen

En los años sesenta surge en los Países Nórdicos, concretamente en Suecia y Dinamarca, una corriente de pensamiento que critica la segregación social de que son objeto las personas deficientes. Esta corriente de pensamiento irá impregnando, durante los setenta a toda el área latina, quedando al margen de estos planteamientos tanto los Países Bajos como los de Europa del Este. (Parrilla, 1992). La diferencia entre los países europeos fueron que, mientras que en los países nórdicos fue la administración la que se encargó de promover, redactar y aplicar una legislación integradora, en otros países como es el caso de España e Italia son las asociaciones de afectados las que demanda a la Administración la elaboración de esas leyes. Concretamente, en España, la legislación ha tenido un carácter experimental y progresivo, siendo los Claustros y los Consejos Escolares los que en definitiva aceptaban o no la integración escolar. En E.E.U.U. se sigue un proceso paralelo e incluso se toman acciones legales contra el gobierno para reclamar el derecho de todos los niños, a pesar de sus déficit a una educación pública y apropiada a partir de tres ejes o principios:

* Normalización
* Integración escolar
* Ambiente menos restringido.

Todo este movimiento social basado, sobre todo en el principio de *Normalización,* trata de denunciar y poner de manifiesto la situación social y condiciones de vida que la sociedad deparaba a los deficientes. Este principio de normalización no sólo abarca el plano social sino también el educativo.

### B.- Definición

La integración escolar consiste, en sentido amplio, en el abandono de la visión dualista que dominó la educación hasta hoy para acceder a una nueva perspectiva, un nuevo sentido de lo que es la escuela y la educación. El eje a través del cual se puede vertebrar la integración es trasladando en énfasis desde el individuo como objeto de estudio sobre el que intervenir (el déficit), al énfasis en la sociedad y el sistema educativo como deudores de respuestas a todos los individuos (necesidades educativas). Monereo (1985), define la integración escolar como un proceso que reúne a los alumnos con o sin hándicap en el mismo contexto, bajo distintas situaciones o modalidades escolares, en base a necesidades del propio alumno. Ya en el año 1982 la ley 13 de integración social de los minusválidos, artículo 25 formula el principio de integración:

> "La educación especial se impartirá en instituciones ordinarias, públicas o privadas del sistema educativo general de forma

continuada, transitoria o mediante programas de apoyo, según las condiciones de las deficiencias que afecten a cada alumno y se iniciará tan precozmente como lo requiera cada caso, acomodando su ulterior proceso al desarrollo psicobiológico de cada sujeto y no a criterios estrictamente cronológicos".

## C.- Principios de integración

***C.1.- Principio de Normalización***: Este principio fue enunciado por Ben Nirje (Director de la Asociación Sueca pro Niños Deficientes), aunque el primero en utilizarlo fue Bank-Mikelsen (Director de los Servicios para Deficientes de Dinamarca). Este principio (ya definido en la introducción al tema) propone un nuevo modo de pensar y actuar que permita a los deficientes mentales obtener una existencia lo más parecida a lo normal que sea posible. Wolfensberger hará que este principio se extienda por Estados Unidos y Canadá e incluso lo desarrolla acuñando la expresión "valoración del rol social" con el que se puede captar y reflejar con mayor claridad la esencia de este principio (Parrilla 1992). El mismo hace referencia a cualquier ambiente, ya sea médico, educativo, psicológico, social o político, exige tener en cuenta la aproximación de cada individuo a las oportunidades de la vida para:

a) Llevar un ritmo de vida diario, semanal y anual normal.
b) Experimentar el desarrollo de experiencias normales en el ciclo vital, a lo largo de los distintos estadios de desarrollo: infancia temprana, edad escolar, etapa adulta y tercera edad.
c) Recibir el respeto y consideración normal ante las elecciones y deseos, así como el derecho a la auto-determinación.
d) Vivir en un mundo heterosexual como el de los demás.
e) Aplicar las mismas normas económicas como un prerrequisito para una vida lo más normal posible.
f) Guiarse por las mismas normas que las demás personas a la hora de tomar decisiones ambientales.

***C.2.- Principio de sectorización***: Cuando trasladamos principio de normalización al terreno de los servicios podemos hablar de sectorización.

La normalización del entorno supone acercar los servicios al lugar donde se produce la demanda. Sectorizar va a significar acercar los servicios al lugar, regiones y/o localidades donde se produce la demanda, descentralizar los servicios ya que las necesidades de las personas deben ser satisfechas allí donde se producen y no en lugares especiales y distantes.

La normalización pasa forzosamente por la sectorización. Obligando a un individuo o a su familia a trasladarse y fijar su residencia en el lugar donde se encuentran los servicios que precisa, se está rompiendo los vínculos de unión del sujeto con su comunidad natural, descontextualizándolo y obstaculizando la normalización de sus experiencias vitales (Monereo, 1985).

***C.3.- Principio de integración***: Cuando trasladamos principio de normalización al terreno de las relaciones entre individuos podemos hablar de integración.

La integración social hace referencia a un cambio de valores que lleva a apreciar el carácter inherente de la diversidad humana y a considerar que, una sociedad democrática no sólo ha de ofrecer las mismas oportunidades a todos sus miembros, sino que puede beneficiarse de todos ellos (Parrilla 1992).

Por integración podemos entender que todos compartimos los mismos valores y derechos básicos siendo muy importante el reconocimiento de la integridad del otro. (Nirje, 1980)

Monereo (1985) destaca el carácter activo, unificador e interdependiente del principio de integración. Lo considera como proceso que supone no sólo la unión o adición de elementos de un todo a integrar, sino también y esencialmente la relación de interdependencia que se establece entre los mismos sobre una base de igualdad.

El desarrollo de estos principios ha llevado a una tendencia progresiva de descentralización y desinstitucionalización, dando paso a iniciativas de carácter local y comunitario en el terreno de los servicios sociales para las personas con déficits y al movimiento de integración Escolar en el educativo.

Por tanto el concepto de integración escolar, quizás el más importante, es un concepto derivado de la aplicación de la integración al terreno educativo.

**D. Modelo de integración**

El informe Warnock distingue tres formas de integración:

a) La integración física o local que existe cuando las clases especiales se encuentran en escuelas ordinarias compartiendo el mismo entorno físico pero su funcionamiento y organización es totalmente independiente.
b) La integración social, que se da cuando los niños que asisten a clases especiales dentro de un centro ordinario pero participan con los demás en actividades extracurriculares.
c) La integración funcional, que se consigue cuando los niños con NEE´s. y sus compañeros participan conjuntamente, a tiempo parcial o completo, en los programas educativos y en aulas ordinarias.

A modo de decálogo se exponen, a continuación, diez tipos de servicios para niños con NEE´s:

1) Educación a tiempo completo en una clase ordinaria con la ayuda y apoyos necesarios.
2) Educación en una clase ordinaria de la cual saldrá el alumno durante los períodos necesarios en el día para ir a una clase especial de apoyo o ayuda.
3) Educación en una clase o unidad especial, pero con períodos de asistencia a una clase ordinaria y total participación en la vida de la comunidad y en las actividades extraescolares de la escuela ordinaria.
4) Educación a tiempo completo en una clase o unidad especial con contactos sociales con la escuela ordinaria principal.

5) Educación en una escuela especial, diurna o residencial con algunas lecciones compartidas con una escuela ordinaria.
6) Educación a tiempo completo en una escuela especial diurna, con contactos sociales con una escuela ordinaria.
7) Educación a tiempo completo en una escuela especial residencial con contactos sociales con unas escuelas ordinarias.
8) Educación temporal corta en hospitales u otros establecimientos.
9) Educación temporal larga en hospitales u otros establecimientos.
10) Educación a domicilio.

## E.- MÉTODOS O ENFOQUES DE INTEGRACIÓN ESCOLAR

La integración escolar, a falta de una perspectiva única, ha pasado por distintas interpretaciones.

Para analizar estas interpretaciones habrá que tener en cuenta las variables que se ponen en juego en el proceso educativo: objetivos, espacios, temporalización, profesionales implicados y modelo de organización

En concreto se puede hablar de tres métodos o enfoques diferentes de integración:

***E.1.- La Integración Escolar Centrada en el Emplazamiento de los alumnos.*** Entraría aquí las prácticas educativas y metodología que entienden la normalización del entorno escolar como el trasvase o traslado de alumnos desde el sistema educativo especial al ordinario y su permanencia en el mismo.

Su tesis básica es la ***hipótesis de contacto***, que alude a los efectos del simple acercamiento entre los alumnos. Según esto, el simple acercamiento o contacto entre los alumnos pertenecientes a distintos grupos acortará las distancias entre ellos.

Esto necesita una escuela que prevea y preste un continuum de servicios y emplazamientos, desde los especiales a los ordinarios. Una escuela que permita que cada alumno se ubique en el emplazamiento menos especial, es decir, en el más ordinario en el que sea capaz de integrarse.

Así, nos podemos situar en un continuum en el que surgen cuatro modalidades de integración escolar (Parrilla, 1992):

a) Una referida a la integración física como el acercamiento puro y simplemente a nivel geográfico-espacial. En ella, los alumnos asisten a un aula especial, dentro de un edifico escolar ordinario, reduciéndose el contacto entre alumnos de distintas aulas a algunas actividades extra-académicas como el recreo, comedor...
b) La segunda modalidad consiste en la asistencia del alumno a un aula especial, que se tiene como punto de referencia, pero simultaneando algunas actividades en el aula ordinaria (Artística o educación Física, por ejemplo). Es la integración parcial.

c) Una tercera, la integración combinada, consiste en tomar como punto de referencia la asistencia del alumno al aula ordinaria, combinando, sin embargo, la misma con la asistencia a un aula especial o grupo específico, para la atención a las determinadas áreas, generalmente instrumentales.
d) Finalmente la asistencia y pertenencia a un aula ordinaria a tiempo completo constituye la modalidad de integración escolar denominada total.

Este tipo de enfoque, **da excesiva importancia a la ubicación de los alumnos, relegando a un segundo plano los aspectos curriculares y sociales de la integración**. No es lo mismo integración y emplazamiento o ubicación. Un alumno puede ser emplazado o colocado en un aula sin estar integrado, aunque no puede estar integrado en un aula sin hallarse emplazado en la mismo.

***E.2.- La Integración Escolar centrada en Proyectos de Intervención Sectorial.*** El emplazamiento no es criterio suficiente para integrar al alumno. En este nuevo enfoque es el niño integrado el verdadero protagonista de la integración, a partir de las NEE´s que presenta se programa el currículum y las adaptaciones que precisa dando lugar a la elaboración de programas de integración donde el alumno participe y sea aceptado por los demás miembros del grupo entrando en juego otras dimensiones como la instructiva, social, profesional, etc.

Así, las contribuciones metodológicas hechas bajo este enfoque son (Parrilla1992):

a) Se da por sentado que la integración no se producirá linealmente con el simple contacto físico entre alumnos, sino que es preciso contemplar y planificar, además, las dimensiones instructiva y social de la misma.
b) esta visión de la integración presta una especial importancia a la respuesta escolar a las diferencias individuales de los alumnos integrados.
c) Al mismo tiempo, es preciso abordar las competencias personales y sociales que los alumnos integrados deben poseer para interactuar en el aula y ser aceptados por sus compañeros ordinarios.
d) Este enfoque requiere el apoyo estructurado de nuevos profesionales y con ello, la redefinición de roles y responsabilidades entre estos y los profesores ordinarios.
e) Por último, se asume la necesidad de que los profesionales de la integración tengan una formación acorde a las demandas de esta.

Podríamos afirmar que este enfoque, que es el más utilizado en nuestros centros, aporta una visión racional, tecnicista de la educación. La integración escolar tendrá éxito si el alumno integrado está físicamente emplazado en el aula ordinaria al menos durante una parte de la jornada escolar, y si las respuestas a sus necesidades educativas especiales se concreta en la adaptación curricular individualizada.

***E.3.- La Integración Escolar desde el Enfoque Institucional.*** Este es el enfoque que ha recogido la LOGSE y, también, la actual ley, la LOE, ya que se basa en la unificación de la acción educativa general y especial donde todo el centro esté implicado en el proceso. Se trata de poner en marcha todos los mecanismos que posea el centro para atender a la diversidad desde el currículo.

Los presupuestos de este enfoque institucional son:

a) Se asume un principio de educación comprehensiva con un marcado carácter individualizado.
b) Es toda la escuela, en su globalidad, la que ha de enfrentarse al cambio que produce la integración.
c) Se necesita una fuerte formación de los agentes implicados en el proceso de integración.
d) La vinculación al contexto de este enfoque hace que algunos autores hablen de un modelo ecológico que servirá para adaptar la integración a cada situación, a cada contexto educativo.
e) Las responsabilidades son compartidas entre todos los profesionales (profesores tutores, profesores de apoyo, especialistas, etc.) basada en la cooperación, participación y trabajo en equipo.

## IV. Criterios de escolarización

En España, hay que destacar, las aportaciones que nos hacen las leyes nacionales y desarrollos ulteriores de las mismas en Comunidades Autónomas:

- Los colegios públicos y privados tienen la obligación de escolarizar al alumnado con necesidades educativas especiales.
- Para la escolarización se actuará de la siguiente forma:
  a) Los equipos de orientación escolar, tras la evaluación psicopedagógica, informará al padre, madre o tutor del procedimiento a seguir, recabará su opinión por escrito y le comunicará el dictamen adoptado sobre la modalidad de escolarización más adecuada.
  b) Su dictamen será remitido a la Inspección Educativa, quién lo elevará al Delegado Provincial de Educación y Ciencia que resolverá la modalidad de escolarización teniendo en cuenta las opiniones del padre, madre o tutor. Dicha resolución se comunicará al director del centro, al padre, madre o tutor y al equipo orientador.
- En la escolarización inicial en Educación Secundaria Obligatoria del alumnado que promocione desde la Educación Primaria, se procederá a la revisión del dictamen sobre la modalidad de escolarización adoptada.
- También se escolarizarán en centros ordinarios de Educación secundaria aquellos alumnos afectados por discapacidad, sin perjuicio de que, de acuerdo con la evaluación psicopedagógica, puedan canalizarse en función de la gravedad y tipología de la minusvalía, hacia centros específicos de educación especial o hacia centros ordinarios de Educación Secundaria que oferten una atención sectorizada en esta modalidad educativa.
- Existe la modalidad de Aprendizaje de Tareas en los Centros específicos de Educación Especial y en los Centros de Enseñanza Secundaria y de Enseñanzas Medias autorizados para la integración.

Son las Comunidades Autónomas las que elaboran la relación alumnos/ unidad de Educación Especial donde pueden aparecer alumnos con problemas :

- Psíquicos
- Sensoriales
- Físicos
- Autistas o Psicóticos
- Alumnado Plurideficiente

Las unidades que escolaricen alumnado con necesidades educativas especiales en régimen de integración, escolarizarán un máximo de tres alumnos o alumnas de estas características por aula.

**Las condiciones para la integración** se pueden resumir en los siguientes factores:

1. Educación pública para la integración a través de campañas de información pública para educar a todos los ciudadanos acerca de la integración.
2. Normas acerca del procedimiento para llevarla a cabo y aclaraciones de responsabilidades.
3. Formación del profesorado
4. Bajar las ratios
5. Currículo abierto y flexible.
6. Preparación de la clase para recibir al niño que se desea integrar.
7. Participación de los padres
8. Evaluación de programas integradores.

### *3.2.3. Modos de trabajo en el aula*

En nuestro país, la integración escolar y social ha sido, y está siendo, el resultado de un gran esfuerzo de diversos colectivos y asociaciones que observan y denuncian la marginación y la falta de oportunidades de los sujetos con minusvalías. La integración no fue una decisión de las Administraciones (al contrario que en los países escandinavos, en los que la Administración educativa cerró los centros específicos de Educación Especial, obligando así a las instituciones a la realizar la integración), sino el resultado del esfuerzo de muchos ciudadanos y profesionales del tema que observaban cómo las prácticas educativas que se ponían en marcha no lograban el éxito esperado de integración social.

El modelo educativo adoptado en su día por la la LOGSE, y actualmente con la LOE pone en primer plano la necesidad pedagógica, la capacidad de articular unas modalidades de actuación eficientes para alumnos diferentes. Es por ello que el término diversidad ha adquirido un importante relieve en las actuaciones docentes. El objetivo de la educación obligatoria es ofrecer al alumno una cultura común a la que debe tener acceso cualquier ciudadano. En esta clara intención educativa se condensan las aspiraciones de igualdad de oportunidades que deben caracterizar a la educación escolar.

El reto de la organización escolar consiste en ser capaz de ofrecer a cada alumno la ayuda pedagógica que él necesite, ajustando la intervención educativa a la individualidad del alumnado. No es un reto fácil, sobre todo si tenemos en cuenta el modelo educativo más reciente de nuestro país, en el que la selección, la competitividad y la homogeneización formaban la base de las prácticas educativas. Atender a la diversidad, no sólo es atender a las diferencias individuales de los alumnos, sino también el poner en juego todos los elementos organizativos (materiales, espacios, agrupamientos, horarios, infraestructura, coordinación docente, estrategias, etc.) en aras a cubrir las necesidades educativas especiales o no especiales que presentan.

### *3.2.3.1. Organización y modos de trabajo en el aula con alumnos con necesidades educativas especiales*

Anteriormente se han enunciado diferentes métodos de integración. Dependiendo del enfoque que se lleve a cabo en un determinado centro educativo, así será la problemática organizativa y de trabajo que plantea en el aula. Es por esto por lo que vamos a considerar la organización y modos de trabajo en el aula con alumnos con necesidades educativas especiales.

#### A.- Problemática organizativa desde el enfoque centrado en el emplazamiento de alumnos

Considera la integración como el trasvase de alumnos desde las escuelas especiales a los centros ordinarios. Parte de la idea que el simple acercamiento de los sujetos con necesidades educativas especiales a las aulas y centros ordinarios es suficiente como para producir la integración escolar (hipótesis de contacto). Este enfoque, hoy día, está desfasado y superado. Muchas investigaciones han puesto de relieve la inoperancia del mismo.

- *Implicaciones organizativas a nivel de Centro*: se consideraba las aulas de Educación Especial como clases aparte, espacios especializados para atender a grupo de alumnos durante algunas horas diarias. Aparece la figura del profesional o, mejor dicho, del especialista: terapeuta, logopeda psicólogo... No existe implicación de otros profesores en la integración, es una función especializada o voluntaria.
  El compromiso de muchos centros en la integración se queda tan sólo en aprobar los proyectos de integración o en la solicitud de material y especialistas.
- *Implicaciones organizativas a nivel de aula:* estas aulas funcionaban como aulas autosuficientes y separadas del resto. Las aulas con niños con necesidades educativas especiales no sufren variaciones notables y se elaboraban programas para estos niños.

#### B.- Problemática organizativa desde el enfoque centrado en proyectos de intervención sectorial

Aquí es el alumno integrado y sus necesidades educativas el objeto de la integración. Se programan actividades para que el alumno se integre en el aula.

Parte de la base de que es necesario planificar la integración desde la óptica educativa, curricular y social.

- *Implicaciones organizativas a nivel de Centro:* aunque todavía el trabajo de integración recae, sobre todo, en el aula, podemos identificar algunas cuestiones.
  Sigue existiendo los especialistas como figuras imprescindibles para lograr la integración pero comienzan a aparecer otras instituciones que colaboran (ONCE, hospitales, etc.).
  El Centro, a nivel global, no se implicaba totalmente en la integración.
- *Implicaciones organizativas a nivel de aula:* son el profesor tutor y el profesor de apoyo los responsables de llevar a cabo la integración.
- *Se organizan los apoyos como aspecto prioritario*. Los apoyos externos encauzan su trabajo dentro del aula mediante un trabajo interdisciplinar y en equipo. Se suelen realizar dos programaciones paralelas: una, dirigida al alumno objeto de la integración y otra, dirigida al resto de alumnos.

**C.- Problemática organizativa desde el enfoque institucional**

Nos vamos a detener mucho más en este enfoque ya que es el recogido en la ley, y es el adoptado en la mayoría de nuestros centros. Parte de dos premisas fundamentales:

a) La idea de la fusión de la acción educativa general y especial en una síntesis unitaria.
b) La implicación institucional del centro en este proceso.

Desde este planteamiento será todo el centro el que ha de enfrentarse al cambio que introduce la integración. Este enfoque supone la adopción de un punto de vista sobre el niño que antepone la globalidad y la individualidad del mismo a cualquier otro planteamiento, de ahí la necesidad de adaptar la enseñanza y el currículum a las necesidades de cada sujeto. La organización del centro educativo ha de coordinar todos los elementos que intervienen en el proceso de enseñanza-aprendizaje para facilitar la participación de los niños con necesidades educativas especiales en la vida del centro.

- *Implicaciones organizativas a nivel de Centro:* El Centro como motor de cambio debe recoger en las Finalidades Educativas y en su Proyecto de Centro, todos los aspectos esenciales para llevar a cabo la integración con éxito. El centro debe estar abierto al contexto ya que no podemos olvidar que el fin último de la integración escolar es la integración social.
  Cuando el Centro establezca sus objetivos generales, organice y distribuya los recursos y espacios, se formen los grupos, se planifiquen las actividades extracurriculares, se plantee la formación de los profesores y el sistema de evaluación, especifique sus normas de convivencia, etc., ha de tener presente el conseguir la plena integración de los niños con necesidades educativas especiales. Para ello se debe avanzar hacia fórmulas organizativas eficientes y hacia la implicación del alumnado y de los padres en la tarea educativa.
  Desde este planteamiento llegamos a una concepción educativa curricular adaptada, en primer lugar, al contexto del centro (Proyecto Curricular de Centro),

en segundo lugar al aula (programaciones de aula), para finalizar con una adaptación al alumno en particular (adaptaciones curriculares).

- *Implicaciones organizativas a nivel de aula:* en el aula trataremos de combinar todos los elementos (personales y materiales), para llevar a cabo una educación acorde con la diversidad. Analizaremos estos elementos:
  - **Recursos personales**: el dar respuesta a las diferencias individuales implica la coordinación de todos los recursos humanos existentes en los diferentes ámbitos profesionales que puedan incidir en el campo educativo. Los equipos orientadores médicos, psicólogos, logopedas, asistentes sociales, etc.), deben realizar las tareas de prevención, detección, valoración y seguimiento de los alumnos con necesidades educativas especiales. Los datos que nos aporten nos servirán para elaborar adaptaciones del currículum para estos alumnos. Los profesores de apoyo facilitan al profesor tutor una asistencia técnico-específica aportando datos, estrategias, métodos, etc., para llevar a cabo la atención a las individualidades. El profesor tutor debe tener una formación de base que le permita acomodarse a las diferencias individuales que tenga en el aula y, al mismo tiempo, debe de ser capaz de crear un ambiente de acogida y aceptación hacia el niño deficiente. Es muy importante la formación de este tutor en estrategias de aprendizaje y modos de trabajo en el aula con niños que necesitan adaptaciones curriculares.
  - **Recursos materiales**: los primeros problemas que surgen en muchos casos de integración es la eliminación de las barreras arquitectónicas. El centro y el aula han de poder permitir al alumno integrado la plena libertad de movimiento utilizando una distribución flexible del espacio y del mobiliario en diferentes áreas o actividades. El material didáctico a utilizar en el aula ha de estar igualmente adaptado en función del hándicap que presentan determinados alumnos (necesidades motóricas, visuales, auditivas, etc.)

### *3.2.3.2. Actuaciones específicas con alumnos con necesidades educativas especiales.*

Entendiendo la integración escolar bajo el enfoque de institucionalidad consideraremos como actuaciones específicas con estos alumnos todas aquellas modalidades de agrupamientos que podemos llevar a cabo, así como los criterios en cuanto a espacio-tiempo, objetivos, contenidos y estrategias de aprendizaje.

### A.- AGRUPAMIENTOS DE ALUMNOS

Según el Seminario Permanente del Centro Nacional de Recursos para la Educación Especial podríamos utilizar los siguientes criterios de agrupamiento de alumnos

#### a) Modelo organizativo de grupo-clase/pequeño grupo.

En este modelo se contempla la unidad del grupo clase y, dependiendo de las situaciones de aprendizaje, se trabajaría en pequeño grupo. Las actividades a realizar en el grupo clase serían las asambleas, comunicación de experiencias y explicaciones colectivas. El pequeño grupo se utilizaría para actividades de investigación.

**b) Modelo de grupos flexibles**.

Con los grupos flexibles se responde a las necesidades educativas de cada alumno en las diferentes áreas de desarrollo posibilitando su participación activa en el grupo, consiguiendo sus propios objetivos. Los criterios para formar grupos flexibles podrán ser el nivel madurativo, el ritmo de aprendizaje, los problemas conductuales y el nivel de interacción con el grupo. Los alumnos podrán pasar de un grupo a otro en función de sus propios progresos. En este tipo de agrupamiento, los grupos de nivel madurativo más bajo son menos numerosos por lo que es posible lograr una atención más individual. Se suelen realizar entre alumnos de un mismo nivel o ciclo.

**c) Modelo de grupo-taller.**

Es el equipo de profesores el que fija las actividades a realizar en cada taller. Utilizando un sistema de rotación de talleres se garantiza que todos los alumnos pasen por todos los talleres. Este sistema facilita el proceso de aprendizaje ya que consigue una extraordinaria motivación ante las diferentes tareas a realizar. Refuerza también el autoconcepto y la autoestima ya que los contenidos del taller se adaptan a las posibilidades e intereses de los alumnos. Tiene como especial dificultad la gran coordinación de profesores y de trabajo en equipo que requiere.

**B.- ORGANIZACIÓN DEL ESPACIO Y EL TIEMPO**

**B.1. Cuando organicemos el espacio** tendremos que tener en cuenta el tipo de aprendizaje que queremos conseguir y el tipo de interacciones que pretendemos.
De todos modos, con respecto a los alumnos con necesidades educativas especiales hay que tener en cuenta que:

- Los alumnos con necesidades auditivas deben situarse donde puedan sacar más partido de lo que se vea o se oiga en clase, en el centro de la clase normalmente.
- Dependiendo de la dificultad visual adoptaremos una u otra medida sobre el lugar idóneo (luminosidad, cercanía a la pizarra, etc.), teniendo como criterio fundamental aprovechar los restos visuales que tenga el alumno.
- Los alumnos con problemas motóricos se podrán colocar en algún sitio especial de la clase dependiendo del equipo que necesite (silla de ruedas, mesa adaptada, silla con taco,etc.)

**B.2. En cuanto al tiempo**, debemos tener en cuenta, dentro de la flexibilidad que debe caracterizar el tratamiento con sujetos que presentan necesidades educativas especiales, qué momentos son más apropiados para determinados tipos de aprendizaje, también es importante fijar en los que van a intervenir los diversos profesionales. Según el apoyo que reciban podemos tener dos modalidades principales:

a) Apoyos temporales dentro del aula.

En este sistema el profesor de apoyo trabaja el currículum, dentro del aula ordinaria, con el alumno con necesidades educativas. El objetivo es permitir al profesor ordinario llevar un ritmo Anormal" mientras que se le garantiza al alumno con necesidades, el apoyo en el área y los contenidos que se imparten en la clase.

b) Apoyos temporales fuera del aula.

En determinadas áreas o actividades (principalmente las instrumentales) el alumno con necesidades educativas especiales sale de su grupo-aula para ser atendido por el profesor de apoyo. Esta atención irá dirigida a realizar las adaptaciones curriculares pertinentes.

Otras veces el apoyo a alumnos con necesidades educativas, podrá recibir el refuerzo educativo fuera del aula por parte del profesor tutor o profesor de área, mientras que el profesor de apoyo permanecerá con el grupo-clase desarrollando otras tareas curriculares que no requieran especial dificultad y explicación.

## C.- OBJETIVOS Y CONTENIDOS

Si partimos de un planteamiento curricular abierto y flexible, que ha de tener sucesivos niveles de concreción, será el profesor, junto con el profesor de apoyo y los distintos profesionales que atiendan al alumno con necesidades educativas quienes realizarán el último nivel de concreción, es decir, el desarrollo del currículum en la actividad docente y en el aula. Hemos partido de la idea de que el currículum (objetivos, contenidos, metodología, evaluación) de los sujetos con necesidades educativas especiales no puede ser otro que el currículum ordinario de la enseñanza obligatoria, realizando en él las adaptaciones necesarias para dar cuenta de aquellas exigencias distintas que tienen algunos sujetos. Es en este contexto donde se plantea la atención a la diversidad desde el currículum, aspectos tales como la optatividad, la diversificación curricular y las adaptaciones curriculares, tienen aquí un papel relevante, entendiendo por adaptación curricular la acomodación o ajuste de la oferta educativa común a las necesidades y posibilidades de cada alumno.

## D.- ESTRATEGIAS DE APRENDIZAJE

Siguiendo a Parrilla (1992) vamos a hacer un recorrido por las principales estrategias de aprendizaje que se pueden utilizar en las aulas de integración. Las dividiremos en estrategias de aprendizaje, estrategias conductuales, y estrategias centradas en contenidos curriculares.

### D.1.- Estrategias de aprendizaje.

*a) Métodos Cooperativos*

Se trata de una serie de métodos en los cuales se les anima a los estudiantes o se les pide, que trabajen juntos en tareas académicas. El aprendizaje se realiza en base a la interacción entre compañeros. Estos métodos en los últimos años han experimentado una gran popularidad, debido a:

- Su viabilidad ante grupos de alumnos heterogéneos, que asumen que los grupos de aprendizaje incrementan la socialización y el aprendizaje de los alumnos con necesidades educativas especiales, así como el tiempo del profesor para atender a las diferencias individuales.
- Su flexibilidad, ya que puede usarse con alumnos de cualquier edad, en cualquier materia, etc.

Los métodos de aprendizaje cooperativos pueden ser tan simples como tener a estudiantes sentados para discutir o ayudarse uno al otro en las tareas de clase, o pueden ser bastante complejos. Pueden usar recompensas grupales, como los grupos de contingencia, (recompensa a los grupos en función de los logros de su grupo), o pueden no hacerlo.

El cambio en la estructura de recompensas interpersonales es otro rasgo esencial en la caracterización de la enseñanza cooperativa. Esta estructura hace referencia a las consecuencias para un alumno de los resultados de sus compañeros. El éxito del grupo depende del aprendizaje individual de cada miembro, es por lo que todos están motivados para intentar asegurar que los componentes del grupo dominen el material que está siendo tratado.

Otro elemento diferenciador del aprendizaje cooperativo es la estructura de autoridad que se mantiene en la clase. Esta estructura hace referencia al control que los alumnos ejercen sobre sus propias actividades, como opuesto al control ejercido por los profesores.

En la enseñanza cooperativa se puede distinguir una estructura cooperativa de objetivos, caracterizada por la ayuda, y otra por la mutualidad. En la cooperación mutua es la propia relación con un objetivo compartido lo que une a los alumnos. Sin embargo en las estrategias de ayuda la cooperación se produce para ayudar a otros alumnos a conseguir la aportación individual que realiza cada miembro al grupo.

Las ventajas de este tipo de trabajo para la integración escolares son:

- Se produce una revalorización del aprendizaje por los alumnos que supera el valor individual que tradicionalmente se otorga al mismo.
- Motiva a los alumnos a ayudarse unos a otros, ya que el resultado final es un producto del grupo, cuando un alumno debe ayudar a otro, a la vez, aprende al hacerlo.
- Los alumnos se proporcionan atención y ayuda individual inmediata unos a otros dentro del propio grupo.

*b) Tutorías*

Las estrategias de enseñanza entre alumnos o tutorías entre iguales suponen otra novedosa contribución a los estudios sobre integración. Su principal característica diferenciadora es que va ser un alumno el que haga las funciones de profesor.

Suponen trasladar parte del énfasis de la integración desde el profesor hasta el alumno, la búsqueda de estrategias de enseñanza individualizada y la búsqueda de soluciones al problema del apoyo instructivo al alumno integrado. A continuación vamos a tratar tres tipos de estudios o estrategias:

b1.- *La tutoría entre iguales:* es una estrategia que trata de adaptarse a las diferencias individuales en base a una relación entre los participantes. Suelen ser dos compañeros de la misma clase y edad, uno de los cuales hace el papel de tutor y el otro de alumno. El tutor enseña y el alumno aprende.

b2.- *Tutoría entre compañeros de distinta edad:* es una variante de la tutoría entre iguales. Es condición indispensable que exista diferencia de edad entre el tutor y su alumno, y que la ayuda ocurra invariablemente en forma de interacción diádica.

b3.- *Tutoría con inversión de roles:* es el propio alumno con necesidades educativas especiales(¡no siempre será posible!) el que realiza las funciones de tutor de los alumnos ordinarios. Por ejemplo, alumnos con trastornos de aprendizaje y de conducta como tutores de alumnos ordinarios más jóvenes.

**D.2.- Estrategias conductuales**

Estas estrategias hay que enmarcarlas dentro del concepto de la socialización, que abarca las destrezas y habilidades sociales. Para la identificación de éstas se han utilizado tres métodos: las mediciones sociométricas, las valoraciones del profesor y la observación en el medio natural del aula.

Las técnicas que se han empleado para mediar en los resultados sociales de la integración escolar son:

a.- *Manipulación de antecedentes*: consiste en manipular acontecimientos para que se produzca una interacción social. Tienen la ventaja de que la provocación puede ser llevada a cabo tanto por un alumno con por el profesor. Su aplicación es para aquellos alumnos que aunque poseen las destrezas sociales necesarias para la integración no la utilizan, así como para aquellos alumnos integrados que no son aceptados por sus compañeros por no interactuar con ellos.

*b.- Manipulación de consecuencias:* consiste en ofrecer una consecuencia al alumno en virtud de su conducta social. Las estrategias más utilizadas para manipular las consecuencias son:

- El refuerzo social contingente, que se lleva a cabo cuando el profesor o un alumno sistemáticamente refuerzan en público al "niño objetivo" cuando éste interactúa apropiadamente o coopera con sus compañeros.
- Los programas de refuerzo en base a fichas o puntos, consisten en administrar al alumno puntos o fichas cuando éste tiene intercambios o actuaciones sociales apropiadas con sus compañeros. Cada uno de los comportamientos-objetivos tiene un determinado valor en fichas. Estas además tienen un valor simbólico que permite canjearlas por algún premio o regalo. En estos programas el comportamiento no apropiado suele ser castigado según el coste de las fichas.
- Las contingencias grupales, consisten en aplicar consecuencias a todo el grupo en base a las conductas e los niños.

*c.- Modelado:* consiste en exponer al alumno objetivo a la conducta de un modelo, reforzando la conducta del modelo y la imitación. Se ha utilizado con un objetivo triple: aprendizaje de nuevas destrezas sociales, inhibición o desinhibición de comportamientos o conductas que presenta el alumno, y la reaparición de destrezas que el alumno observador posee pero no utiliza. Podemos distinguir dos tipos básicos de influencia modeladora: a través de vídeos o películas y el modelado a través de situaciones reales.

**D. 3.- Estrategias centradas en contenidos curriculares**

Esta vía para promover las interacciones entre alumnos ordinarios e integrados consiste en formar a los alumnos ordinarios para ello. El objetivo es modificar las actitudes y comportamientos de los alumnos ordinarios hacia los integrados. Algunas líneas de trabajo en este sentido podrían ser las siguientes:

- Consideración de los objetivos y contenidos como elementos indicativos de referencia y no como un programa cerrado de metas a conseguir y de metas a desarrollar.
- Articulación de los contenidos alrededor de macro-actividades con sentido explícito e interesante para el alumno concreto.
- La participación efectiva del alumnado en las decisiones didácticas a través de diferentes instrumentos, tanto en lo que se refiere al temario y su desarrollo como a las actividades, normas de trabajo.
- Desarrollo de actividades de autorregulación del aprendizaje por el propio alumno, individualmente o en cooperación , a través de diferentes estrategias e instrumentos.
- Seguimiento cotidiano por el profesorado del proceso de aprendizaje a través del equipo educativo y, en el aula, por medio de instrumentos como la observación sistemática, el diario de clase...
- Alternancia de las relaciones de comunicación en el aula entre períodos de trabajo cooperativo, trabajo individual...
- Elaboración de materiales didácticos multimedia.
- Articulación de los recursos del centro y del entorno con la programación didáctica realizada.
- Flexibilidad en la gestión del espacio y del tiempo de aprendizaje previsto para adecuarlos a los ritmos reales, tanto del colectivo como de las personas.

## 4. Atención a la diversidad a través de la resolución de problemas. Proyecto toca las mates

"Nos hallamos frente al hecho paradójico de que la educación
se ha convertido en uno de los principales obstáculos
en el camino de la inteligencia y de la libertad del pensamiento".
**B. Rusell**

### 4.1. La diversidad en matemáticas

Todo lo anterior puede aplicarse a los alumnos de la enseñanza obligatoria. Como se ha puesto de manifiesto en el apartado 3, presentan una gran diversidad en cuanto a intereses, motivaciones, expectativas y capacidades. Si esto es cierto a nivel general, resulta especialmente llamativo en las clases de matemáticas.

Dentro de una misma clase nos encontramos con una tipología amplia de actitudes y aptitudes ante las matemáticas; hay alumnos motivados frente a otros con problemas de conducta, unos son intuitivos y otros reflexivos, con iniciativas propias o amantes del aprendizaje rutinario, intuitivos o con buena capacidad de abstracción, lentos o rápidos en la asimilación de conceptos y destrezas, alumnos con serias lagunas de aprendizaje previas frente a alumnos brillantes... La forma de aprender e incluso de acercarse a las matemáticas de estos alumnos son muy distintas y hacen inviable una enseñanza uniforme, basada en una metodología tradicional basada en la pizarra , el libro de texto y la lección magistral como únicos recursos didácticos.

El reconocimiento de la diversidad es un elemento positivo y realista a la hora de abordar la existencia de diferencias individuales en nuestro alumnado, en cuanto a estilos y ritmos de aprendizaje, experiencia escolar, capacidades e intereses. Este hecho parece obvio, pero, generalmente, se descuida en la práctica educativa. *El alumno medio* no existe y el profesor no debe caer en el error de atender sólo a aquellos que están próximos a los valores de la media en la campana de Gauss que supone cada clase. Es más, la diversidad en el aula puede aprovecharse como principio enriquecedor y optimizador del aprendizaje de todos y cada uno de nuestros alumnos y alumnas.

Existen mecanismos obvios que pueden contribuir a un eficaz tratamiento de la diversidad en matemáticas, como los desdobles de las clases, la presencia simultánea de dos profesores en determinados grupos, un plan intensivo de formación del profesorado..., pero somos realistas y sabemos que las limitaciones económicas de la Administración Educativa hacen, hoy por hoy, esas opciones imposibles.

Probablemente los más barato y por la tanto lo más viable sea enfocar el tratamiento de la diversidad desde la óptica de la diversificación de los materiales y recursos utilizados en el aula.

La mejor metodología es aquella que utiliza estrategias, formas de trabajo, materiales y contextos variados, de modo que se pueda conectar en un momento u otro con el mayor número de alumnos. La utilización en esta etapa de materiales manipulables, calculadoras gráficas, medios audiovisuales, medios informáticos y telemáticos permite atender las demandas y necesidades de la inmensa mayoría de los alumnos, permitiendo adecuar los ritmos de aprendizaje a sus características individuales.

Al mismo tiempo potencia otras actitudes como el trabajo cooperativo y la capacidad de expresión de su forma de aprender y de pensar. La utilización de materiales informáticos y audiovisuales, además del potencial motivador que significan, suponen una excelente aproximación a las nuevas tecnologías para los alumnos.

Los principios psicopedagógicos que subyacen en este proyecto se enmarcan en una concepción constructivista del aprendizaje escolar y de la intervención didáctica.

Según este modelo:

- Lo primero que conviene tener en cuenta es lo que el alumno experimenta por sí mismo. Esto implica una enseñanza personalizada, con los materiales y recursos adecuados, en la que se debe intentar que cada alumno encuentre su ritmo óptimo y que parta de sus experiencias e intereses personales.

- En segundo lugar, en el proceso de enseñanza-aprendizaje, los contenidos deben mostrar su sentido de *funcionalidad*; el alumno ha de saber para qué le sirve lo que estudia, es decir, la utilidad de la materia para la solución de sus propios problemas.
- En tercer lugar, los alumnos, como constructores de su aprendizaje, deben relacionar los nuevos conceptos con el esquema que ya poseen. De este modo, dan sentido a lo que aprenden al comprobar su utilidad

En el aprendizaje significativo, los materiales y recursos adecuados cobran una especial importancia en su faceta de motivadores del proceso y sus objetivos son: interesar al alumno y alumna en la exploración de la realidad para su mejor comprensión y favorecer una enseñanza-aprendizaje de las Matemáticas con significados reales.

## 4.2. Alumnos grupo I

El modelo metodológico seguido tanto en la elaboración como en la experimentación de los materiales está inspirado en el modelo de la escuela de Van Hiele. Aunque este modelo está pensado para la enseñanza de la geometría hemos intentado, en la medida de lo posible extenderlo al resto de los bloques.

La secuenciación de actividades dentro de una misma experiencia se ajusta a los niveles y fases del citado modelo:

**Primera Fase: Información-pregunta**

El profesor y los alumnos toman contacto con el material y los objetos a estudiar. Se hacen las primeras preguntas y se realizan las primeras observaciones, surgen las primeras cuestiones y se introduce el vocabulario específico. El objetivo de las actividades de esta fase es doble:

Por una parte le deben servir al profesor para conocer los conocimientos previos de los alumnos.

En segundo lugar permitirán a los alumnos saber la dirección del estudio a seguir.

**Segunda Fase: Orientación dirigida**

Los alumnos exploran el tópico propuesto utilizando el material según las orientaciones del profesor. Las actividades permitirán descubrir a los alumnos las propiedades de los objetos o ideas matemáticas exploradas.

**Tercera Fase: Explicación**

Los alumnos construyen y expresan sus propios descubrimientos. El profesor realizará las correcciones de lenguaje necesarias.

**Cuarta Fase: Orientación libre**

Los alumnos realizan tareas más complicadas pudiendo ellos mismos orientar sus investigaciones más o menos abiertas, utilizando otros materiales complementarios. Habrán de explicar y justificar sus resultados

**Quinta Fase: Integración**

Los alumnos revisan los resultados y se forman una idea global de las relaciones y propiedades aprendidas. El profesor vigilará y ayudará a realizar esta síntesis de conocimientos.

## 4.3. Proyecto toca las mates (alumnos grupo II)

### *4.3.1. Contextualización*

No es fácil poner en marcha, y en la práctica real todos los planteamientos teóricos que he esbozado en páginas precedentes por razones obvias. El proyecto que presento en páginas siguientes quiere enfatizar la idea de la integración de conocimientos, habilidades y aptitudes para alumnos con Necesidades Educativas Especiales.

Ya, la Ley Orgánica General del Sistema Educativo (LOGSE) y la actual LOE como se indicó con anterioridad, ha supuesto y supone, respectivamente, opciones en pro de una educación abierta a la diversidad. La atención a la diversidad representa un mecanismo de ajuste de la oferta pedagógica a las capacidades, intereses y necesidades de nuestros alumnos, actuando asó como un elemento corrector de desigualdades en las condiciones de acceso a una educación y cultura básica. La idea de la LOGSE era buena y pretendió una educación integradora y de no discriminación: había que dar respuesta a la enorme tela de araña que representa la conjunción de intereses, problemas y necesidades que nacer y surgen diariamente en la escuela. Había que compensar desigualdades y hacer efectivo el principio de igualdad de oportunidades. Para dar respuesta a la diversidad nació el concepto de adaptabilidad del currículo a las características de los centros y el alumnado.

Como principio fundamental está bien: para los estudiantes no se propone un currículo distinto sino un currículo de adaptación. Es decir, es el currículo el que se tiene que adaptar a nuestros estudiantes y no al contrario, supone, por tanto una nueva concepción del binomio enseñanza/aprendizaje donde la diversidad debe materializarse en un conjunto de pautas y comportamientos que orienten tanto la programación de las actividades como su ejecución en el aula.

A pesar de que en los últimos años ha habido un gran avance y mayor sensibilidad hacia la diversidad y la resolución de los problemas adyacentes, y reconociendo que el núcleo ha sido, y es, el estudiante en edad escolar, no es menos cierto, como lo manifiesta Burkhadt (1989) los cambios a gran escala – en nuestro caso la Ley Orgánica de Educación – se ven impedido por cuestiones prácticas, pero fundamentalmente por la falta de atención a los aspectos del propio sistema. Es esto precisamente lo que queremos poner de manifiesto con el taller de matemáticas *Toca las Mates*.

En el marco de la escuela pública española podríamos resumir la diversidad en diferentes niveles:

- Cada centro es un mundo distinto, constituye una singularidad con su propio funcionamiento.
- Cada clase es un mundo, en general, y en particular, en un mismo centro.
- Los estudiantes son distintos

Existen diferencias, y proceden del tipo de interacciones que se establecen entre las personas que intervienen en el proceso de enseñanza/aprendizaje pero lo más grave son las diferencias que se crean y que aumentan desde las propias instituciones. Por eso la diversidad es un hecho que merece una atención especial desde el punto de vista pedagógico.

Ya lo indicaba anteriormente, la experiencia del taller, que comento a continuación , nos ha permitido hacer una intervención docente desde el punto de vista de la aparición del padre y la madre como elementos nucleadores del proyecto. Es esta la innovación, y creemos que única, al menos hasta la actualidad no tenemos noticias que en nuestro país se haya realizado una experiencia análoga, que presenta características diferentes frente al aprendizaje. Se ha puesto en evidencia un interés y una forma diferente por aprender, una manera de presentar una matemática creativa y recreativa.

### *4.3.2. Una experiencia innovadora: TALLER DE MATEMÁTICAS, toca las mates (TM, tm)*

Con esta experiencia se atiende a la diversidad como un elemento integrado en el proyecto del Centro, Colegio Público Federico García Lorca (Huelva), donde se formulan objetivos y contenidos para tratar de dar solución a situaciones sociales.

### *¿En qué consiste la experiencia?*

Un grupo de madres y padres del CP *Federico García Lorca (Huelva-España)* para intentar dar solución a ciertas dificultades, en la que se encuentran, relativa al aprendizaje de la Matemáticas, algunos alumnos del citado colegio, y en especial aquellos con Necesidades Educativas Especiales (NEE) , consideran necesario crear un Espacio de Encuentro (EE), en el que obviamente no existirá ningún tipo de discriminación, que bien podrían ser los Grupos de Auto-Ayuda (GAA) entre familias, permitiendo que:

Los familiares-¡normalmente madres y padres!-tendrán la posibilidad de compartir e intercambiar experiencias con otras familias en situaciones análogas.

Se reciba formación especializada y adaptada-en la medida de las posibilidades-a la resolución de problemas donde aparece la Matemática Cotidiana (MC).

Los familiares de personas con cierto tipo de discapacidad, experimentan en la mayoría de los casos un estrés excesivo, ya que se ven afectados por la necesidad de afrontar el trauma inicial y los cambios neuropsicológicos y emocionales que se producen en el seno familiar con niños/as con especiales características. Se produce un fuerte impacto en las familias, debido a que son ellas las que le deben, fundamentalmente, proporcionar apoyo y asistencia durante mucho tiempo, en algunos casos toda la vida. Podemos decir, sin temor a equivocarnos, que el trauma en las familias puede ser devastador, y son las *víctimas reales*, ya que tienen más posibilidades de tener conciencia del problema. Antiguamente los familiares no estaban preparados para enfrentarse a un problema de estas características: *¿y en la actualidad?*

Responder a esta cuestión, es harto complejo. Más arriba se ha indicado que es verdad que la sociedad ha avanzado en el cumplimiento de la resolución de problemas sociales, pero no es menos cierto que el esfuerzo que se está realizando, por las administraciones responsables, no es suficiente. Consideramos por tanto esta actividad como un necesario factor de dinamización del Centro.

### *Objetivos Generales (OG)*

A través de la creación de un Taller de Matemáticas (TM) se desarrollarán de manera amplia las capacidades (de los alumnos/as) matemáticas de *forma lúdica*. De esta manera con los EE se *apoyarían y formarían* a los familiares de los estudiantes del CP *Federico García Lorca*, con preferencia a aquellos con NEE´s. Es decir, se da intervención a madres y padres, profesores y alumnos. En definitiva a toda la comunidad educativa.

Con el TM se conseguirían ciertas destrezas y habilidades, sin olvidar que no nos proponemos alcanzar metas concretas. La única meta es

*"Aprender, jugando y tocando, Matemáticas"*

### *Perfil del alumno/a*

La experiencia va dirigida a todos los estudiantes del CP *Federico García Lorca*, con preferencia a aquellos con NEE's.

### *Recursos Humanos*

Es esencial tener en cuenta los esfuerzos que se comprometen en una actividad de estas características. Para desarrollar la tarea del taller *Toca las Mates (TM)* se cuenta con

- Prof. Dr. D. Sixto Romero. Universidad de Huelva (Director del proyecto)
- Asociación de Madres y Padres de Alumnos (AMPA).
- C.P. *Federico García Lorca*: José Romero, Julia Rodríguez
- Madres Colaboradoras: Ramoni Bravo, Rosa González, Isabel Sánchez, Ángeles Domínguez, María del Dolor Lavado

que de forma voluntaria, podrán ofrecer a las familias un marco de apoyo en la adquisición de conocimientos y aprendizaje de pautas de actuación que contribuyan a una mejor y clara aceptación de las Matemáticas, a través de juegos, manipulaciones, destrezas, colores, papiroflexia, radio, prensa, etc.

## *Lugar de realización del TM*

El TM ha estado ubicado en el CP *Federico García Lorca* en un aula para quince alumnos (primer ciclo, segundo y tercer ciclo de primaria) con presencia de chicos y chicas con necesidades educativas especiales: síndrome de DOWN, hipomelanosis de Ito, autismo, problemas de autoestima, problemas familiares y algunos alumnos disruptivos

## *Temporización*

A priori se organizó un curso piloto en el curso 2001-2002 donde las clases se impartieron en horarios extraescolares de 1h.30m- cada sesión y una frecuencia semanal. Hasta la actualidad se ha venido realizando con regularidad en los cursos 2002/2003 y 2003/2004

## *Contenidos*

A la hora de establecer una tabla de contenidos mínima para alcanzar los objetivos citados es conveniente realizar un estudio detallado sobre conceptos y actitudes en los diferentes ciclos de educación primaria. A continuación se presenta una tabla con los contenidos describiendo *el objetivo general del proyecto, objetivos específicos y desarrollo de los contenidos*.

## *Objetivos General y Específicos del Proyecto*

| **Objetivo general del proyecto**: ***Desarrollar de manera lúdica las capacidades (de los alumnos) matemáticas de forma lúdica*** | |
|---|---|
| **Objetivos específicos:** (Tres Ciclos) | **Contenidos** |
| **1.** ***Desarrollar la capacidad de discriminación de conceptos básicos*** | **1.1** Discriminar conceptos básicos de cantidad (mucho, poco, ninguno, todo...).<br>**1.2** Conocimiento y uso de las unidades de medida: longitud, capacidad, tiempo, masa,...<br>**1.3** Conocimiento y uso de la moneda. |
| **2.** ***Desarrollar la capacidad de cálculo*** | **2.1** Sumas y restas mediante objetos, dibujos y signos.<br>**2.2** Sumar y restar dígitos y resolver problemas.<br>**2.3** Sumar y restar “llevándose” resolver problemas.<br>**2.4** Multiplicar y dividir.<br>**2.5** Adquirir el concepto de fracción y realizar operaciones básicas. |
| **3.** ***Desarrollar la capacidad de razonamiento abstracto*** | **3.1** Solucionar puzzles y construcciones.<br>**3.2** Relacionar sucesiones y series numéricas.<br>**3.3** Clasificar y establecer series de objetos de acuerdo a un criterio establecido: color, tamaño, volumen, ...<br>**3.4** Encontrar relaciones de igualdad.<br>**3.5** Encontrar diferencias.<br>**3.6** Dar soluciones prácticas a situaciones concretas |

## *Desarrollo de los contenidos*

| Objetivos | Primer Ciclo | Segundo Ciclo | Tercer Ciclo |
|---|---|---|---|
| **El número** | - Conocer, identificar, clasificar, descomponer, hacer series, ordenar. | -Composición y descomposición.<br>- Decena, centena,..<br>- Valor posicional de las cifras.<br>- Uso de décimas, centésimas,...<br>-Número ordinal, romano,...<br>- Fracciones: medio, tercio,... | -Lectura y escritura de un número con varias cifras.<br>-Ordenar y clasificar por criterios<br>-Apreciar el valor del número en la vida cotidiana.<br>- El número como expresión polinómica.<br>- Idea de fracción como relación numérica dentro de la totalidad. |
| **Operaciones con el número** | - Sumar, restar, multiplicar y dividir.<br>- Realizar cálculo mental. | -Reconocer situaciones donde aparezca la suma, resta, multiplicación, división.<br>-División exacta e inexacta.<br>-Realizar cálculo mental rápido. | -Identificar situaciones de +, -, x, :,..<br>-Operaciones con fracciones y decimales.<br>-Relaciones de proporcionalidad.<br>-Concepto de porcentaje.<br>-Utilización de paréntesis en las operaciones. |
| **Unidades de medida** | - Longitud, masa, peso, tiempo, ordenar días de la semana, capacidad, uso de la botella, monetaria, pagar y comprar, conocer la hora y la lectura de la hora. | -Longitud (largo, ancho, altura) con pies, pasos, centímetro, metro, kilómetro.<br>-Lectura de la hora.<br>-Cálculo del valor de un consumo de monedas.<br>-Uso de la regla, una botella.<br>-De un litro, el peso de un kilo.<br>-Tiempo: trimestre, semestre, siglo,... | -Longitud: equivalencias/transformacio-nes (E/T).<br>-Superficie: unidades arbitrarias/convencionales.<br>-Capacidad: E/T.<br>-Masa: E/T.<br>-Tiempo: E/T.<br>-Sistema Monetario.<br>- Uso de las unidades múltiplos/submúltiplos. |
| **Figuras geométricas** | - Reconocer figuras circulares, cuadradas, triangulares.<br>- Trazado de líneas.<br>- Comparar y clasificar figuras. | -Líneas en el plano: rectas, curvas, segmentos, paralelas...<br>-Ángulos, polígonos, circunferencias. | -Nociones de paralelismo, perpendicularidad y ángulo.<br>-Identificación, descripción. Construcción, reproducción, ordenación de figuras. |

Para la consecución de los objetivos marcados se utilizó diferente tipo de material manipulativo dirigido, entre otras, hacia las tareas siguientes:

- Psicomotricidad
- Coordinación espacio-tiempo
- Seriaciones: clasificaciones
- Juegos
- Software educativo
- Estudio de los colores
- Etc

### *4.3.3. A modo de conclusión*

La experiencia acumulada durante estos tres últimos cursos ha demostrado que la presencia de los padres como elementos activos en el aula dentro del proceso enseñanza/aprendizaje para alumnos con dificultades ha sido altamente positiva.

Como consecuencia queremos poner de manifiesto cinco razones que han nacido del estudio detallado de los resultados obtenidos, y que no objeto de exposición en este trabajo:

- Han de establecerse Programas de Diversificación en el Currículo mucho más serio y más comprometidos con un amplio sector de la sociedad que desgraciadamente sufren el problema de la integración: presentan dificultades de aprendizaje en la mayoría de las disciplinas y más concretamente en el área de Matemáticas.
- La resolución de problemas como camino hacia una solución válida y contrastada en la enseñanza de las matemáticas, en estas situaciones de graves dificultades aún se hace patente más su presencia y por lo tanto aporta una actitud de abertura importante a la hora del diseño de las estrategias para enseñar determinados conceptos matemáticos.
- No reglar este tipo de actividades. Debe enmarcarse en el contexto del currículo pero de manera tal que no entorpezca ni solape la enseñanza reglada del colegio. En definitiva, estas actividades no debe considerarse como clases particulares. Es precisamente el aula el elemento constituyente en el que se pone de manifiesto las diferencias en cuanto a capacidades, interés y motivación.
- La presencia de los padres y madres en experiencias de estas características autentifica el hecho de que representan un eslabón clave en la educación para estudiantes con NEE's.
- Debe existir una mayor concienciación por parte de los poderes públicos para abordar este tipo de enseñanza con mayor rigor: los/las estudiantes con NEE's necesitan propuestas de actividades diferenciadoras que completen el proceso de enseñanza/aprendizaje que de manera natural, y por razones obvias, se ve frenado.

## Bibliografía

▪Abrantes, P. (2001). *Revisión de los objetivos y la naturaleza de las matemáticas para todos en el contexto de un plan de estudio de estudios nacional* (Matemáticas en Europa: diversas perspectivas.) Barcelona. Ed. Grao.

▪Ahmed, A; et al. (2001). Cultural Diversity in mathematics (Education). Chichester (England). Horwood.

- Arco, J. L. y Fernández Castillo, A. (Coord.). (2004). *Necesidades educativas especiales. Manual de evaluación e intervención psicológica*. Ed. Mac Graw Hill, Interamericana de España, Madrid.
- Dutsh Smith, D. (2003). *Bases psicopedagógicas de la Educación Especial*. Ed. Prentice Hall, Madrid.
- Guzmán, M.de. (1991). *Para pensar mejor*. Madrid. Ed. Labor.
- Guzmán, M. De. Tendencias actuales de la enseñanza de la matemática, Studia Paedagogica. Revista de Ciencias de la Educación, 21 (1989),19-26.
- Keitel, C.; Kilpatrick, J. (1998). *Rationality and irrationality of international comparative studies*. London. Falmer press.
- Keitel, C;et al. (1989) *Mathematics, Education and Society.* París. UNESCO. Document Series nº35.
- Keitel, C. (2000) Cultural diversity, internationalisation and globalisation: challenges and perils for mathematics education" In: A. Ahmed, J.M. Kraemer, and H. Williams (Eds.) *Cultural Diversity in Mathematics Education.* Chichester: Ellis& Horwood, 41-60.
- Marchena R. y Martín Espino, J.D. (2002). *De la integración a una educación para todos: la atención a la diversidad desde la educación primaria a la universidad*. Madrid, CEPE.
- Marchesi, A.; Coll, C. y Palacios, J. (2001). *Desarrollo psicológico y educación. Trastornos del desarrollo y necesidades educativas especiales*. Alianza Editorial. Madrid, 2ª edic.
- Mason, J; et al. *Pensar matemáticamente.* Madrid. Ed.Labor
- Perrenoud, P (1998). *Construire des compétences des écoles*. Ginebra.
- Rodríguez Tejada, R.M. (2000). El profesor de educación especial, ¿necesario en una escuela inclusiva? *Siglo Cero*, 31(1)
- Romero, S. (2004). *Atención a la diversidad a través de la resolución de problemas :"toca las mates" .*La actividad matemática en el aula : homenaje a Paulo Abrantes / *coord. por Joao Pedro da Ponte, Joaquim Giménez, Leonor Santos*.
- Romero, S. (2006). *Atención a la diversidad. Un ejemplo de aplicación en Matemáticas.* Jornadas de Educación Matemática. SAEM Thales. Aracena (Huelva).
- Romero, S. (2007). *Las Matemáticas y la atención a la diversidad. Un ejemplo de aplicación en Matemáticas.* Jornadas Internacionales de Educación Matemática. SOPEMAT. PUCP. Lima (Perú).
- Sierpinska, A.& Kilpatrick, J. (1998)(eds.) *Mathematics Education as a Research Domain: A Search for Identity.* Dordrecht: KLuwer
- Woodrow, D. (2003) *Mathematics, mathematics education and economic conditions*. In: Bishop, A., Clements, K., Keitel, C., Kilpatrick, J., Leung, F. (eds.) Second International Handbook of Mathematics Education. Dordrecht: Kluwer.

## Recursos en Internet


- Atención a la diversidad

  http://centros5.pntic.mec.es/ies.salvador.dali1/proyectoinnovacion.htm
- Boletín Oficial del Estado

  http://www.mec.es/mecd/gabipren/documentos/A17158-17207.pdf
- Guzmán, M. de*,* Artículos en Internet.

  http://platea.pntic.mec.es/aperez4/miguel/articulos.htm
- Varios autores (2004). *Atención a la diversidad*

  http://www.terra.es/personal/fjgponce/diversida.htm


**Sixto Romero Sánchez**. Doctor en Matemáticas por la Universidad de Sevilla. Profesor de la Universidad de Huelva (España) en el Área de Matemática Aplicada. Sus trabajos de investigación se centran, por un lado en Educación Matemática sobre el estudio de la Diversidad en Matemáticas y la Popularización de Matemáticas; y por otro, en Investigación Matemática, en el Tratamiento Digital de Imágenes. Ha sido Director de la Revista SUMA y Vicerrector de la Universidad de Huelva. Actualmente es Vocal de Relaciones con Iberoamérica de la FESPM y Miembro de la Comisión Internacional sobre Mejora y Aprendizaje de las Matemáticas (CIEAEM)

UNIÓN
REVISTA IBEROAMERICANA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA

Diciembre de 2007, Número 12, páginas 101 - 107
ISSN: 1815-0640

# Los problemas sin letra

***Francisco Morales Villegas***

## Resumen

La dificultad que los alumnos de primaria encuentran en resolver problemas de cualquier tipo, me ha llevado a plantear otras estrategias que se salgan del clásico aprendizaje basado en la mera aplicación de uno o varios algoritmos. Esta propuesta, pretende hallar otro mecanismo para que el alumno logre el éxito en la difícil tarea de resolver un problema.
La propuesta metodológica que presento en este trabajo tiene como finalidad facilitar a los alumnos la resolución de problemas de matemáticas. Se basa en escuchar un problema, traducirlo a un lenguaje icónico y resolverlo tomando los dibujos como apoyo. La he experimentado con alumnos de 10 a 12 años durante tres cursos obteniendo buenos resultados.

## Abstract

The handicap that children of primary school find in solving any kind of problem has focused me to work on other type of strategies different than the classic learning stile based on the application of one or several operations. This proposal tends to find another mechanism for the child to achieve the success in the difficult task of solving a problem.
The methodological proposal that I present in this work has the meaning to facilitate children the resolution of mathematics problems. It is based on listening the problem, translating it into a drawing language and solving it by using the draws as support. I have experimented this with children from 10 to 12 years old during three academic years obtaining good results.

## Introducción

La resolución de problemas ha sido el eje de la enseñanza de las matemáticas en nuestro centro en los últimos años. Muchos han sido los cambios que se han hecho en este proceso, pero los avances, que los hay, no han colmado nuestras expectativas.

En una clase de 6º de primaria (alumnado de 11 años, último curso de primaria antes de ir a la educación secundaria), y a modo de prueba, hemos introducido otra forma de plantear la resolución de los problemas y lo hemos llamado “Problemas sin letra”.

## Justificación

La idea surgió del trabajo que realizan los atletas en su entrenamiento competitivo en los deportes individuales que se basan más en una correcta ejecución de la técnica que en aspectos como fuerza, resistencia o velocidad. En mi labor de monitor deportivo en el tiro con arco, con frecuencia se adiestran diferentes aspectos de la técnica aislados unos de otros, entonces, ¿Por qué no extrapolar esta forma de aprendizaje al aula de matemáticas?

Para mejorar en la resolución de problemas, trabajamos en la asignatura de lengua la lectura comprensiva, así conseguimos entender la situación que nos plantea el problema y lo que se espera de nosotros. En la propia clase de matemáticas dedicamos gran parte de nuestro tiempo al cálculo y a los algoritmos, para realizar los cálculos, “tan necesarios”, que darán la esperada solución. Dedicamos algo menos a estudiar en los enunciados cuales son los datos y cuales los distractores y quizás nada a la representación gráfica del problema.

Este último aspecto, de gran importancia en la educación infantil (al no saber el alumnado leer o escribir), se olvida totalmente al llegar a la etapa primaria, pues damos más importancia a que quede impresa en el cuaderno la solución con un determinado tipo de anotación que damos como correcta: números colocados verticalmente, colocación de unas cantidades, signos correspondientes, número que dice la solución y expresión escrita de las unidades. Parece que por promocionar el alumno a primaria, se adquiera automáticamente la capacidad de abstraer. Es un error, pues manipular y visualizar el concepto matemático ayuda a interiorizarlo.

El alumno, bajo la presión escolar y familiar inducida por la creencia de que cuantos más cuadernos y libretas rellene, más sabrá, realiza lo que se espera de él: resuelve gran cantidad de ejercicios en el menor tiempo posible. Nosotros, en vez de sentirnos culpables por tal desatino, mostramos con orgullo a padres y compañeros de profesión los kilos de papel completados cada trimestre.

¿Es esto lo que queremos conseguir? Nosotros, no. Cuando un alumno nos dice que ha acabado de resolver un problema no queremos que nos dé un número, pretendemos que sepa en principio si realmente se trata de un problema, cuáles son los datos necesarios para su resolución, que partes del problema son irrelevantes, que relación hay entre los datos y la operación que ha elegido (si es que hace falta alguna), las posibles soluciones que responden a la pregunta, y en el caso de que haya varias, la más adecuada, si se corresponde con las estimaciones que hizo al principio, etc. Esto implica una toma de decisiones a lo largo del proceso que requiere trabajar menos problemas, pero hacerlo con más profundidad.

Lo primero que se necesita es un verdadero problema, presentado como parte de nuestra vida real, sin sus cantidades expresadas numéricamente y seguidas de sus unidades correspondientes. Dentro de un contexto cercano al aula y que despierte un interés por su resolución.

Después, usando las estrategias que conocemos, abordaremos el problema. No existen fórmulas mágicas para resolverlo, ni hay un único método que al aplicarlo correctamente nos lleve forzosamente a su resolución.

## Desarrollo de la experiencia

De todas las pruebas, controles, exámenes o como queramos llamarlo, hay uno que hago con mis alumnos de vez en cuando. Consiste en resolver una serie de problemas sencillos, no más de tres o cuatro, en una sesión de clase de matemáticas. La diferencia con otras pruebas, es que yo les voy leyendo lentamente el problema y ellos van tomando nota de lo que les parece relevante sin escribir ninguna letra en la hoja (salvo las unidades).

El día antes aviso a la clase de que vamos a realizar la prueba. Algunos lo agradecen, vienen preparados con variedad de colores.

Con dibujos, tablas, gráficos, flechas, etc., van creando una representación gráfica de la imagen mental que se van haciendo del problema, memorizando o plasmando gráficamente las relaciones entre los datos. Estas anotaciones les tienen que servir para resolver el problema.

Después de un tiempo prudencial, les dicto el siguiente.

Al finalizar, hacemos una corrección colectiva y discutimos sobre las diferentes estrategias que se han utilizado. Aunque todos pueden participar y dar su opinión, procuro dedicar más tiempo a aquellos alumnos que han resuelto con éxito el problema puesto que aportan una visión adecuada que me interesa reforzar.

Más tarde, les reparto los enunciados. En muchos casos, se dan cuenta de que con la información escrita y sus dibujos, les resulta mucho más fácil enfrentarse a los problemas. Llegamos por tanto a la conclusión de que la representación gráfica ayuda a organizar la información y ver las relaciones existentes entre los datos.

Como tantos otros aspectos de las matemáticas, la capacidad de representar el problema gráficamente es entrenable, y a medida que se repite la experiencia, los resultados van siendo cada vez mejores.

El proceso de resolución, tan importante o más que la propia respuesta final, es más pausado, y se evitan las situaciones el las que los alumnos cogen datos al azar y operan con ellos sin saber por qué. Al final, ellos mismos valoran más la comprensión y razonamiento empleados para la resolución del problema, que el simple cálculo mecánico.

La ventaja que tiene este sistema está en que el alumno ha de esforzarse por comprender el problema cuando lo escucha para poderlo representar gráficamente. No puede perder el hilo de la historia, pues sus dibujos son el único referente que va a tener cuando el profesor deje de leer. Forzamos a nuestra memoria en todos los casos, pues hay detalles que no quedaran plasmados en el dibujo pero pueden ser importantes. Además, y muy importante, es divertido.

## Trabajo previo

Todo esto nos puede parecer adecuado, pero, ¿Surge de forma espontánea? Está claro que no. Al igual que hemos trabajado unos heurísticos desde la etapa infantil para dotar al alumnado de estrategias suficientes, hemos de orientarles en la mejor forma de tomar anotaciones.

Lo primero es aprender a identificar los elementos que son necesarios de los que no lo son. Esto estará en función de los complicados que sean los enunciados: número y tipo de datos, y relaciones existentes.

Nuestra labor es plantear situaciones diversas en las que se practiquen de forma gradual esta actividad, crear debate entre el alumnado para que defiendan sus estrategias, explicar las ventajas o inconvenientes de las soluciones propuestas en clase.

## Competencias básicas implicadas

1.- Competencia matemática, pues utilizamos los números, sus operaciones, símbolos y las formas de expresión y razonamiento matemático, para interpretar distintos tipos de información, y para resolver problemas relacionados con la vida cotidiana.

Estamos interpretando y expresando informaciones, datos y argumentaciones siguiendo determinados procesos de pensamiento (inducción y deducción,) y aplicando algoritmos de cálculo.

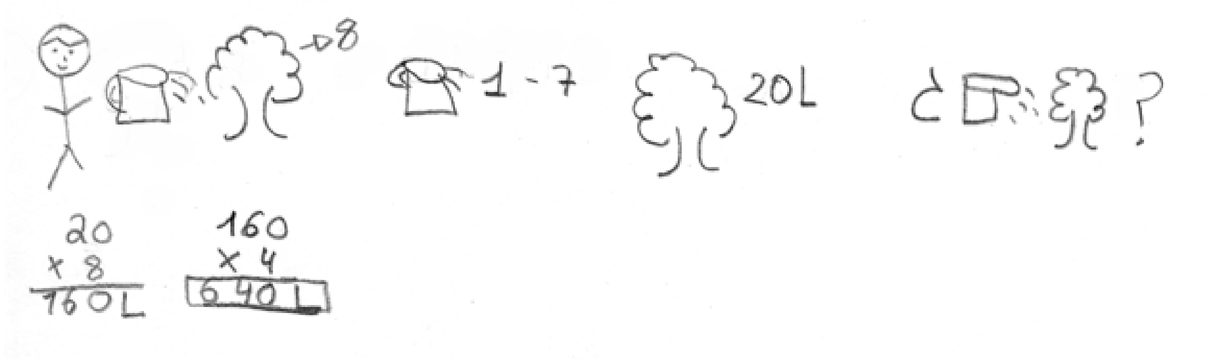
2.- Competencia en comunicación lingüística. Tras la resolución individual de los problemas, necesitamos utilizar del lenguaje como instrumento de comunicación oral que nos permita organizar nuestro conocimiento para comunicárselo al resto de la clase. Escuchar, exponer y dialogar implica ser consciente de los principales tipos de interacción verbal.

3.- Tratamiento de la información, pues tenemos que disponer de habilidades para buscar, obtener, procesar y comunicar información, representarla y transformarla en conocimiento

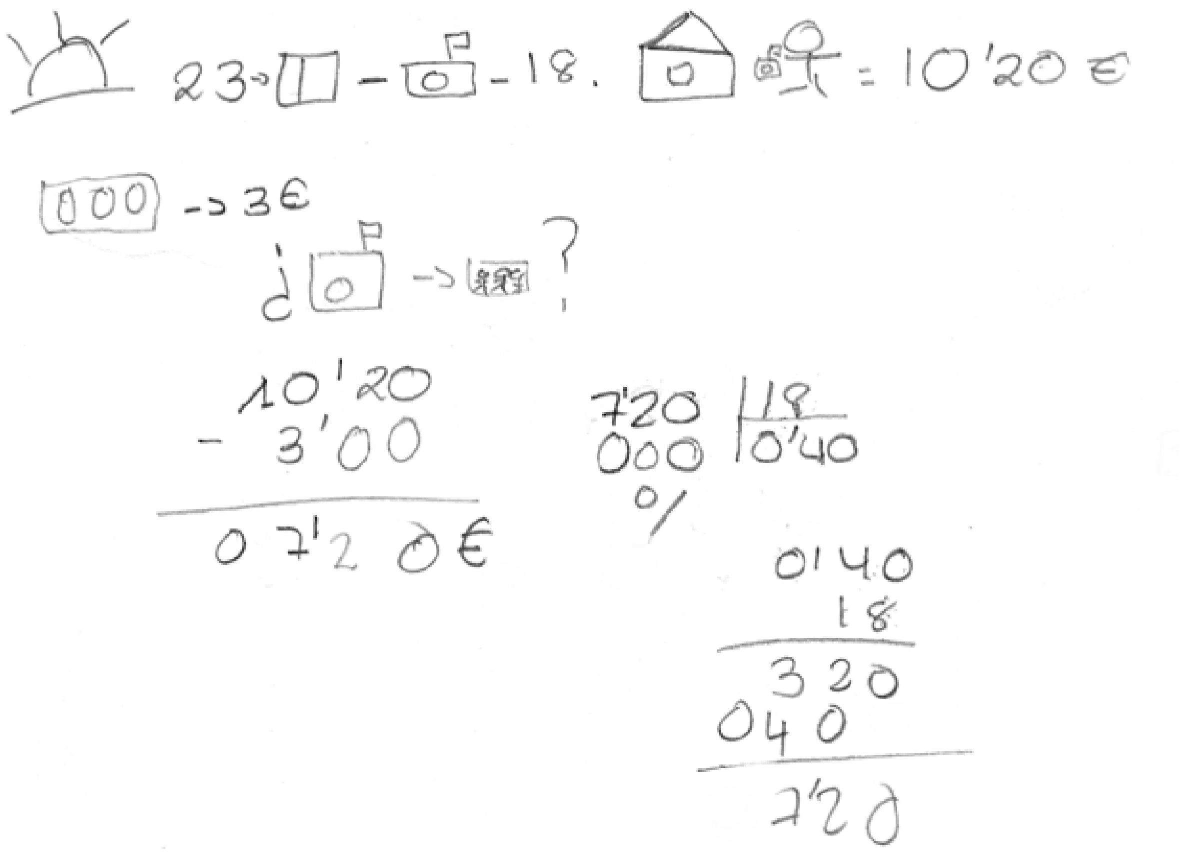
4.- Autonomía e iniciativa personal, pues hay que elegir con criterio propio la forma de trabajo, llevando a cabo las acciones necesarias para la resolución del problema.

## Algunos ejemplos con niños de 6º (11 años)

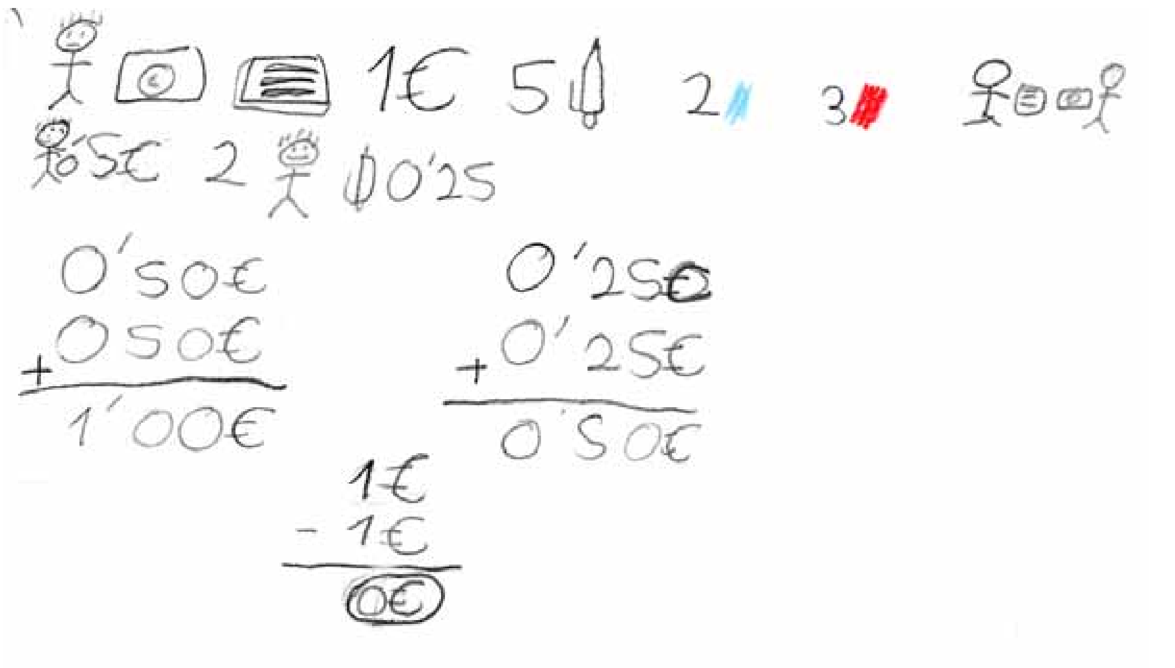
Vicente regó ayer los 8 árboles del patio. Lo hace una vez por semana de 10 a 11 de la mañana para que se mantengan verdes. A cada árbol le echa unos 20 litros de agua. ¿Cuánta agua emplea cada mes en regar los árboles?



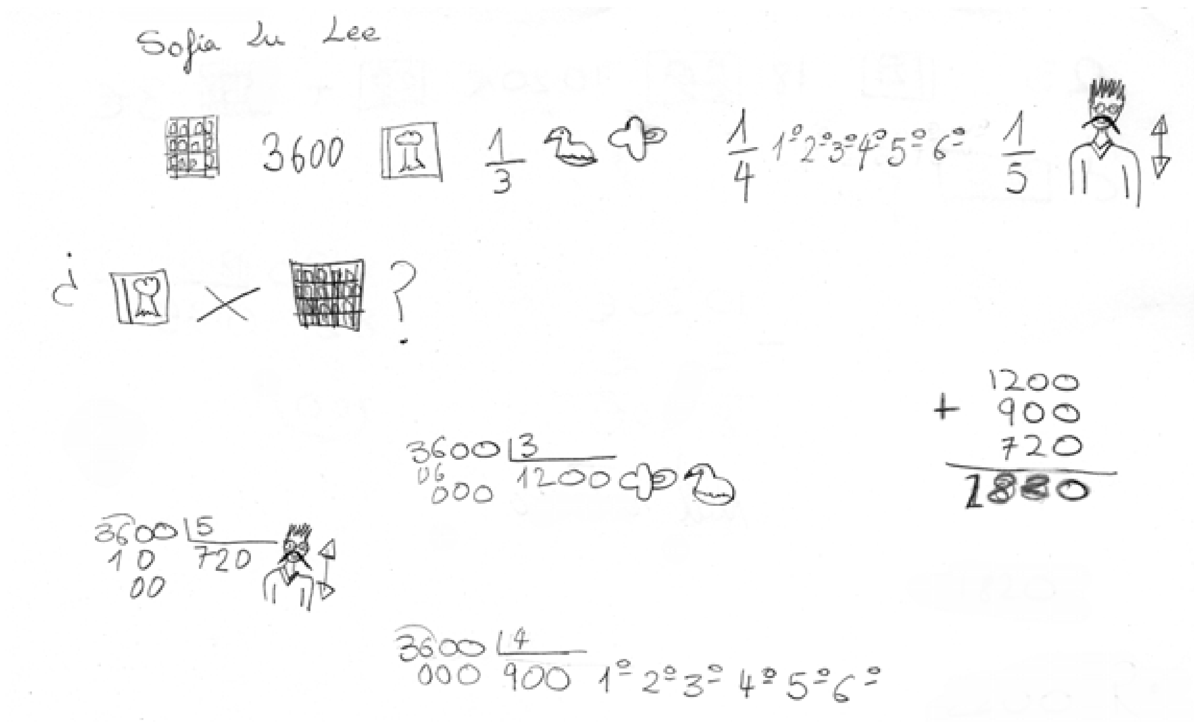

El día 23 de abril, en la fiesta del libro hice 18 fotos. Las llevé a revelar y me cobraron 10,20 € por las fotos y por un paquete de pilas que valía 3 €. ¿A cuánto sale cada foto?



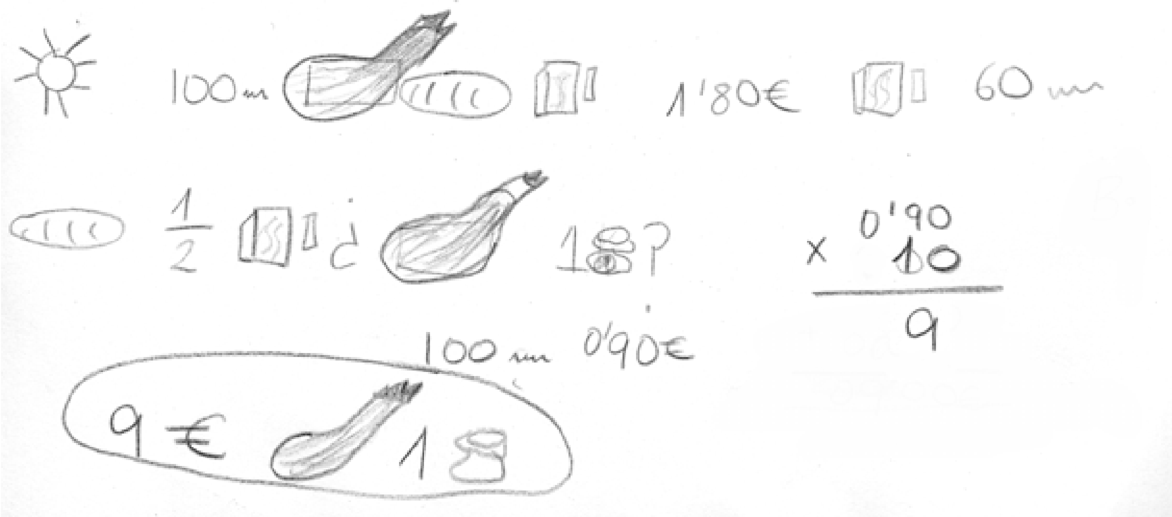

Billy compró una caja de bolígrafos en los chinos que le costó un euro. En la caja había dos bolígrafos azules y tres rojos. Como no le hacían falta los cinco, vendió uno a Antonio por 50 céntimos y dos a Ibrahím a 25 céntimos cada uno. Después de sus negocios, ¿a cuánto le salieron los bolígrafos que se quedó Billy?



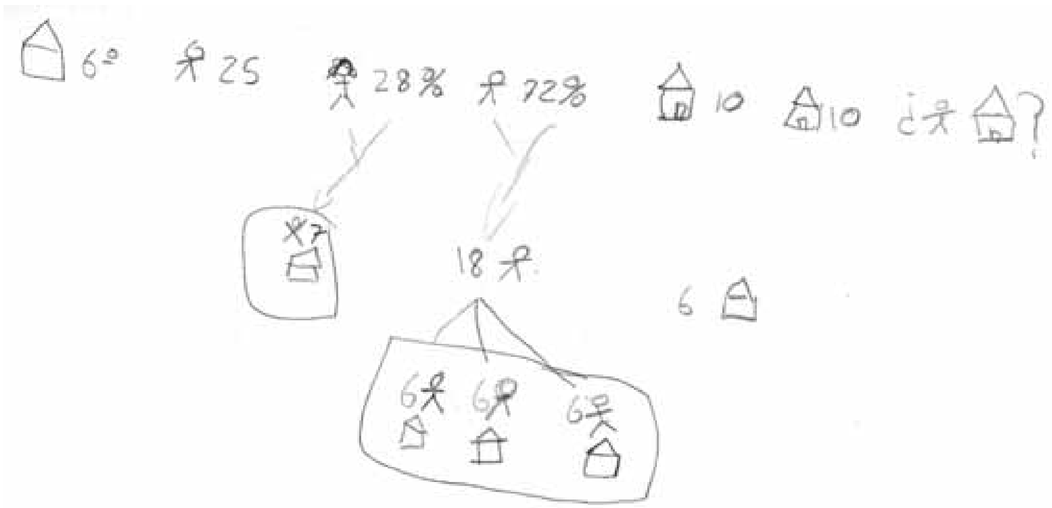
En la biblioteca del colegio hay aproximadamente 3600 libros. 1/3 están en la estantería de infantil, 1/4 en la de primaria, 1/5 en la de adultos y 1/6 en la de consulta. ¿Cuántos libros están sin colocar?



Por la mañana compro en la venta 100 gramos de jamón, un pan y un jugo para comer en el recreo a las 12. Esta mañana me gasté 1,80 €. Si el jugo cuesta 60 céntimos y el pan la mitad, ¿Cuánto cuesta el kilo de jamón?



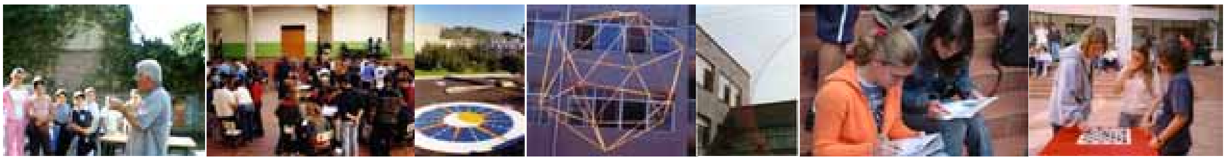

De la clase de 6º, van 25 alumnos a la acampada. El 28% son chicos. Se quedarán en cabañas que tiene una capacidad de 10 personas, agrupadas por sexo. Queremos que en cada cabaña, a ser posible, haya un número similar de personas. ¿Cuántas irán a cada cabaña?




**Francisco Morales Villegas** Nació en Santander (España) en 1962. Lleva 22 años dando clase en Tenerife (España) y más de la mitad dedicado a las matemáticas. Hace unos 12 años que prepara sus propios cuadernillos adaptados al alumnado que tiene en cada momento y lo complementa con textos de diferentes editoriales, ahora está comenzando a aprovechar el ordenador para completar su programación. Sus clases son tanto dentro como fuera del aula, con un enfoque constructivista. Desde el año 1999 trabaja en el CEIP (Centro de Educación Infantil y Primaria) La Estrella, en Arona (Tenerife, España) y junto al resto del profesorado, llevan diferentes proyectos de matemáticas.
elarquero@wanadoo.es

UNIÓN
REVISTA IBEROAMERICANA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA

Diciembre de 2007, Número 12, páginas 109-113
ISSN: 1815-0640



# Dinamización matemática

*Colegio Dr. Ignacio A. Pane*
*Ypacarai , Paraguay*

## TOJULOG


En agosto del 2007, se realizó en mi país, Paraguay, el Primer Congreso de Matemática Educativa.

Tuve la suerte de asistir y participar de la ponencia sobre dinamización matemática, del profesor Luís Balbuena Castellano.

Como profesora de Lógica Matemática, me llamó la atención, una de sus propuestas, el torneo de juegos TOJUMAT, y decidí realizarlo con mis alumnos del colegio, recibiendo mucho apoyo del profesor Balbuena, a quien agradezco profundamente.

El colegio al que me refiero, es el “Dr. Ignacio A. Pane”, que es realmente una comunidad educativa porque tiene todos los niveles de enseñanza, y se encuentra en Ypacarai, a la vera del lago cuyo nombre adoptó y que es conocida mundialmente por la música “Recuerdos de Ypacarai”.

Desde mi propuesta inicial, percibí mucho entusiasmo de parte de los alumnos, y así surgió el torneo de juegos lógicos, TOJULOG, con algunas variantes con respecto al TOJUMAT.

Empleamos dos meses en prepararlo, empezando con la búsqueda y distribución de los juegos, de manera que no haya repetición, participaron en la preparación los dos últimos cursos del nivel secundario, que son los que tienen Lógica Matemática dentro del currículo, y algunos alumnos del profesorado en Matemática.

Los juegos fueron preparados en su mayoría por los alumnos, y a medida que iba controlando los mismos, en forma individual, notaba el interés creciente que despertaba, ya que veía a los demás, sentados en el piso, jugando los juegos de los compañeros.

Fueron más de setenta juegos muy variados, desde sopa de números y de letras hasta ajedrez, diferentes tipos de rompecabezas, solitarios, etc.

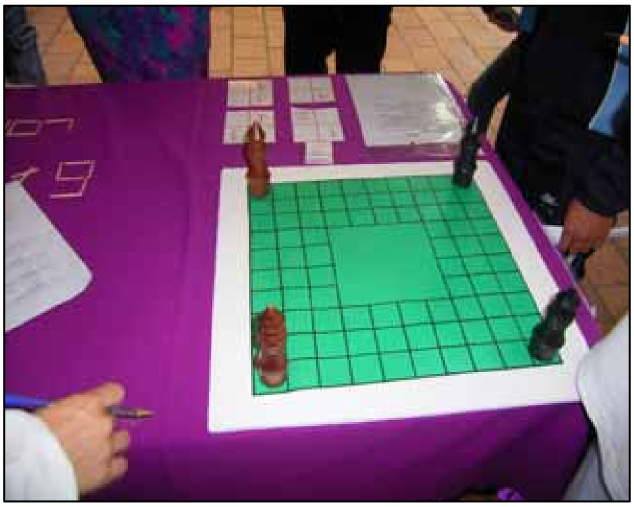
Los alumnos se encargaron de clasificar los juegos, de acuerdo al grado de dificultad que presentaban, y de redactar las reglas de juego.

Las variantes principales con respecto al TOJUMAT fueron las siguientes:

- Se realizó en un solo día, el de la feria que realiza el colegio como culminación de las actividades del año.
- Invitamos a los padres. y a alumnos de otros colegios.
- Se podía participar. en la competencia, en forma individual o en equipos de hasta cuatro participantes.
- La participación era abierta (cualquier edad, cualquier colegio, cualquier curso).

Los que no querían competir podían jugar cualquier juego, sin restricción. Considero que este punto fue el que le dio más dinámica a los juegos.

TOJULOG



Fue sumamente gratificante y hermoso ver participar a los padres y alumnos, hasta a los más pequeños, que buscaban un espacio y jugaban de igual a igual con los demás.

Sugiero a los profesores del área que lo hagan, los resultados son increíbles.

Prof. Alba Clara Shueveren

Ypacarai, Paraguay

Shueveren@gmail.com

**Juegos lógicos presentados en el TOJULOG**

1. Tangram
2. Atrapado
3. Eles (rompecabezas)
4. Sopa de números (varias versiones)
5. Las cuatro torres
6. Cuadrado mágico
7. La estrella mágica
8. El nin
9. Crucigrama
10. Cola nait hacia arriba
11. Polvo de estrella (estrellas con letras, para formar nombres de constelaciones)
12. Del 1 al 8
13. El juego de las señalizaciones
14. Con las cerillas no se juega
15. Pasatiempo numérico
16. Numerograma
17. Juego de los palotes
18. Símbolo cartográfico
19. Armar un triángulo con trapecios
20. Jugando con cerillas
21. Dama
22. 3 en raya
23. Entre números
24. El salto de la rana
25. Simetría con espejo
26. Arma la T (con triángulos de manera que se formen rombos de colores )
27. K (rompecabezas)
28. Busca la secuencia (de números)
29. Pentominós
30. Tembleque
31. Solitario
32. Dominó adición
33. Dama china
34. Tutti fruti
35. El juego de las preguntas
36. Desafío con fósforos
37. Jugá 15
38. Sudoku (varias versiones)
39. Torre de Hanoi
40. Ingenio con palitos
41. Tres en raya
42. Ta Te Ti
43. Rompecabezas de números
44. Sopa de letras (varias versiones)
45. Laberinto numérico
46. Tangram alemán
47. Busca su par (con letras del abecedario boca abajo)
48. Laberinto
49. Rompecabezas chino
50. Ajedrez
51. Tembleque (número par/color)
52. Encerrado
53. Palitos chinos
54. Dominó
55. Mini crezy
56. Ahorcado

UNIÓN
REVISTA IBEROAMERICANA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA

Historia

Diciembre de 2007, Número 12 páginas 115-134
ISSN: 1815-0640

Coordinador: Wagner Rodrigues Valente

# La cicloide: un recorrido histórico por sus propiedades[1]

***Domingo Hernández Abreu*** [2]

## La cicloide: primeras propiedades, primeras disputas

La curva cicloide ha sido considerada durante mucho tiempo una curva muy especial, tanto por sus fascinantes propiedades como por las disputas científicas que promovió principalmente a lo largo del siglo XVII. Tal es así que es conocida en la literatura como **la Helena de la Geometría** o **la Helena de las curvas**. Este sobrenombre le fue otorgado muy probablemente en honor a Helena de Troya, en relación bien con la belleza de ésta, bien con las disputas que ésta causó en vida. Según la mitología griega, Helena de Troya (esposa de Menelao, rey de Esparta) fue raptada por Paris (hijo menor de Príamo, rey de Troya), dando pie así a la famosa guerra de Troya, narrada en la "*Ilíada"* de Homero.

En la actualidad la curva cicloide resulta de poca relevancia matemática frente a otro tipo de curvas trascendentes como pueden ser las curvas trigonométricas, exponenciales, logarítmicas o hiperbólicas. No obstante, pocas curvas en la historia han jugado un papel tan decisivo en el asentamiento de las bases de una rama de las matemáticas como en el caso de la curva cicloide y el origen y evolución del cálculo infinitesimal. Hasta la fecha, este hito tal vez sólo sea comparable al estudio de las curvas elípticas en conexión con el desarrollo de la geometría algebraica y la demostración del célebre teorema de Fermat a finales del siglo XX.

La curva cicloide se define como el lugar geométrico de un punto fijo de una circunferencia que gira sin deslizamiento a lo largo de una recta. Siendo $\alpha$ el

[1] Dedicado a D. José Luis Montesinos Sirera en agradecimiento por fomentar en mí la pasión por las matemáticas por medio de esta maravillosa curva que nos ocupa.

[2] domingo.ha@gmail.com

desplazamiento angular de una circunferencia de radio R, se obtienen las ecuaciones paramétricas

$$\left\{ \begin{array}{lll} x & = & R(\alpha - sen\alpha) \\ y & = & R(1 - cos\alpha) \end{array} \right.$$

La aparición de la curva cicloide por primera vez en la escena matemática no tiene una fecha clara. Debemos notar que esta curva no había sido considerada previamente por los matemáticos de la Grecia Clásica. Parece ser que el filósofo y teólogo francés Charles de Bouvelles (1471-1553) fue pionero en trabajar con la curva cicloide, orientando sus estudios sobre dicha curva en relación con el problema de la cuadratura del círculo [Sch]. En 1501, tratando de resolver este problema, introdujo además la hipotrocoide, esto es, la curva trazada por un punto P de un círculo que gira sin deslizamiento dentro de otro círculo fijo [ver I-Pro]. Considerando estas curvas fue capaz de dar una interpretación mecánica de la cuadratura del círculo. Influenciado por la geometría pitagórica, es autor de la primera obra científica impresa en Francia (*"Géométrie en françoys",* 1511).

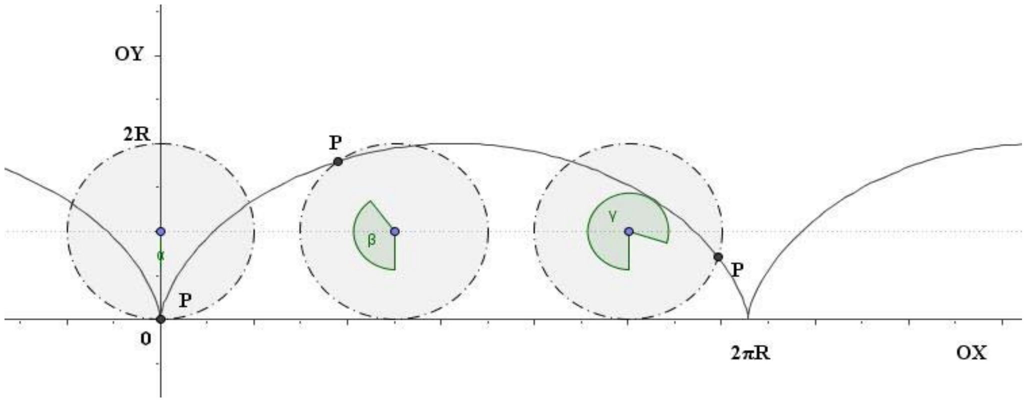



Figura 1: Generación de la cicloide por el giro de una circunferencia a lo largo de una recta.

La aparición en 1544 en Basilea de la primera traducción de las obras completas de Arquímedes (287-212 a.C.) provocaron una inspiradora influencia en científicos de la talla de Johannes Kepler (1571-1630) y Galileo Galilei (1564-1642).

En particular, el método de exhausción[3], que el propio Arquímedes atribuye a Eudoxo de Cnido (390-338 a.C.), había permitido al primero obtener demostraciones rigurosas de muchos resultados relacionados con fórmulas de cuadratura y cubatura. El nivel de rigor matemático y deducción lógica presente en las argumentaciones de Arquímedes no volvería a hacer presencia en la escena matemática hasta dos milenios después con motivo de la crisis de fundamentos a finales del siglo XIX. Hay que mencionar que los resultados obtenidos por Arquímedes resultaban tan fascinantes a priori[4], que muchos investigadores eran de la opinión de que éste debía poseer algún *método* que le permitía intuir tales resultados antes de demostrarlos rigurosamente por la vía geométrica.

El misterio que envolvía al modo de proceder de Arquímedes para intuir sus resultados sería finalmente resuelto a principios del siglo XX al descubrirse, por casualidad, un pergamino conteniendo un escrito de Arquímedes dirigido a Eratóstenes (276-194 a. C.) en el que describe su método. En *"El Método"*[5] Arquímedes hace uso de las primeras consideraciones de tipo infinitesimal, al considerar un área como suma de segmentos. Aunque Arquímedes es consciente de que estos procedimientos carecen de rigor, este modo de proceder no reaparecería hasta el siglo XVII. Por este motivo, muchos historiadores consideran que el cálculo infinitesimal habría hecho aparición mucho antes en la historia de no ser por el extravío del método de Arquímedes [Dur1, p. 25-26].

Alrededor de 1599, Galileo acuña el término *cicloide* para la curva que nos ocupa y se encarga de estudiar por primera vez el área que encierra un arco de

---

[3] Tal como se recoge en la Proposición 1 del libro X de los "*Elementos*" de Euclides [Euc, Tomo 3, p.12] el método de exhausción indica que: *Dadas dos magnitudes desiguales, si se quita de la mayor una (magnitud) mayor que su mitad y, de la que queda, una magnitud mayor que su mitad y así sucesivamente, quedará una magnitud que será menor que la magnitud menor dada.*

[4] G.H. Hardy (1877-1947) muestra su fascinación por la geometría griega en [Har, p. 82] con la célebre frase "*Arquímedes será recordado cuando Esquilo haya sido olvidado, porque las lenguas mueren pero las ideas matemáticas no".*

[5] El libro de Arquímedes "*El Método"* fue recuperado casualmente en el año 1906 en la iglesia del Santo Sepulcro de Jerusalén en Constantinopla por el investigador danés L. Heiberg. El libro, que fue encontrado junto a otras obras de Arquímedes, formaba parte de un palimpsesto, o pergamino, del siglo X que había sido *reciclado* para contener escritos de carácter religioso.

dicha curva en base a consideraciones de carácter mecánico. En particular, Galileo efectuó la comparación entre el peso de dos figuras, hechas de idéntico material, para la región que encierra un arco de cicloide y la región circular de la circunferencia que genera a la cicloide, habiendo hallado que los pesos correspondientes se encontraban en una razón aproximada de 3 a 1, pero decidió que no debía ser exactamente 3, ya que intuía (erróneamente) que dicha razón no debía ser un número racional. En carta fechada el 24 de febrero de 1640, Galileo escribe a Bonaventura Cavalieri (1598-1647), a quien se atribuye el famoso *método de indivisibles* para el cálculo de áreas y volúmenes, admirando la elegancia de la curva cicloide y proponiéndola como modelo ideal para soportar los arcos de un puente [Str, p. 232]:

> "Hace más de 50 años esta línea curva vino a mi mente y quise describirla, admirándola por su graciosa curvatura, adaptable a los arcos de un puente. Hice varios cálculos relacionados con ella y con el espacio comprendido entre ella y su cuerda, para demostrar algún resultado. Al principio parecía que tal espacio podría ser tres veces el círculo que la describe, pero no era así."

En el primer cuarto del siglo XVII, el monje francés Marin Mersenne (1588-1648) había establecido la igualdad entre la longitud de la circunferencia generatriz y la base de un arco de cicloide. Mersenne mantenía correspondencia habitual con matemáticos como Pierre de Fermat (1601-1665) y Galileo, entre otros, y contribuyó en la difusión de las novedosas ideas de René Descartes (1596-1650). A partir de 1623, Mersenne organizó reuniones matemáticas semanales en París creando así un excelente ambiente de investigación matemática. Hacia 1628, Gilles Personne de Roberval (1602-1675) llega a París e ingresa en la academia de Mersenne, quien rápidamente reconoce el talento de Roberval y le propone estudiar la cicloide como elemento de prueba para los recientes métodos que trataban con cantidades infinitesimales. Pronto se convertiría la cicloide en una de las curvas más estudiadas provocando agrias disputas entre diversos matemáticos, justificando así el sobrenombre de "Helena de los geómetras" [Struik, p. 232].

Hacia 1632, Roberval había obtenido un método similar al método de los indivisibles de Cavalieri que aparece en su obra "*Traité des indivisibles*" (que data de 1634 aunque no se publicó hasta 1693). Roberval, que fue uno de los pocos matemáticos profesionales del siglo XVII, ocupó desde 1632 hasta su muerte la cátedra Ramus en el Collège Royal de París y al parecer prefirió no hacer públicos su métodos para conservar dicha cátedra. Por esta razón, se vio envuelto en diversas polémicas relacionadas con la autoría de varios resultados matemáticos. En particular, en 1634, logró calcular el área encerrada por un arco de cicloide usando su método de indivisibles, hallando que en efecto el área encerrada por un arco de cicloide era igual al triple del área del círculo que genera la cicloide. El método seguido por Roberval para hallar el área encerrada por un arco de cicloide puede encontrarse en [Kli, Tomo 1, p. 463]. La no publicación de estos resultados le involucraría posteriormente en una desagradable disputa con Evangelista Torricelli (1608-1647) en relación con la prioridad en la justificación de tal propiedad.

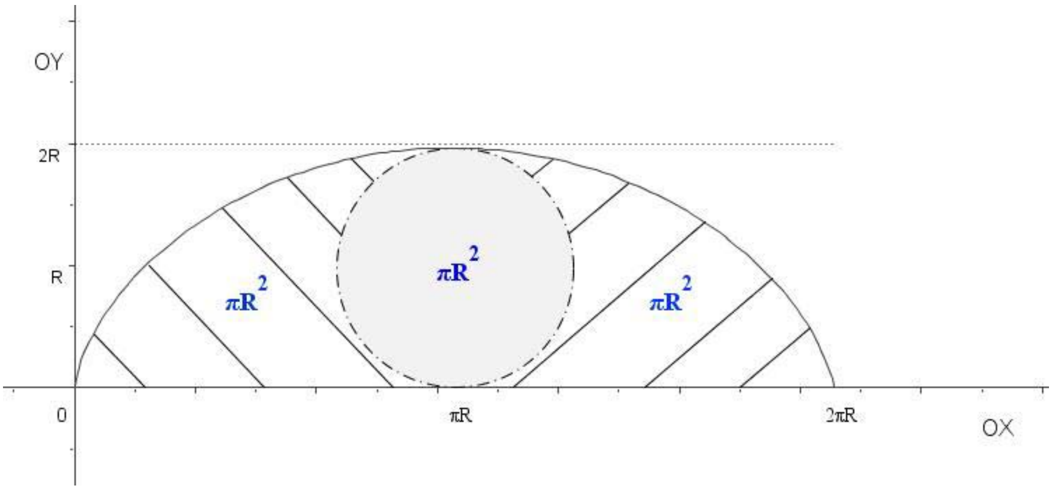



Figura 2: Área encerrada entre un arco de cicloide y su cuerda.

En la misma época, Descartes, Fermat y Roberval habían resuelto el problema de determinar la recta tangente a un arco de cicloide, siendo el método de tangentes de Fermat un claro precursor del actual cálculo de tangentes basado en el cálculo diferencial [GU, Cap. 3]. Así en 1638, Mersenne comunicó a Galileo tanto la resolución de la cuadratura de la cicloide como la determinación de la tangente en los puntos de la curva. Debido a su avanzada edad, Galileo deja estos resultados en manos de su discípulo Torricelli, quien, sobre 1641, establecería sus propias demostraciones de estos resultados. En el año 1644, Torricelli publica como apéndice de su obra *"De parabole"* tanto la cuadratura como el cálculo de la tangente de la cicloide, sin citar los métodos de Roberval. Aunque no parece haber dudas de que Torricelli llegó al mismo resultado de forma independiente, la controversia sobre la primicia de la solución se prolongó hasta su muerte [Dur1, p. 258].

En 1637, a la temprana edad de 14 años, el joven Blaise Pascal (1623-1662) comienza a asistir con asiduidad a las reuniones organizadas por Mersenne en París. Influenciado por los trabajos de Girard Desargues (1591-1661), los primeros trabajos matemáticos de Pascal guardarían relación con el estudio de las cónicas y la geometría proyectiva. Posteriormente, establecería junto a Fermat las bases para una teoría de la probabilidad. Aunque durante un tiempo renunció a las matemáticas, tras sufrir un serio empeoramiento de su salud en 1658 renueva su interés por las matemáticas dedicando parte de su atención a la curva cicloide en los últimos cuatro años de su corta vida.

Tras obtener nuevos resultados relacionados con la curva cicloide, Pascal decide convocar un concurso, bajo el pseudónimo de Amos de Dettonville, en el que se debían responder cuestiones relacionadas con el centro de gravedad de la región plana encerrada por la cicloide y así como con el volumen y área lateral de los sólidos obtenidos por revolución de dicha curva respecto a un eje [Kli, Tomo 1, p. 466]. Las relaciones que ligan el centro de gravedad de una región plana con el volumen y área lateral del sólido de revolución que genera dicha región se conocen como Teoremas de Guldin[6]. Estas relaciones, que ya aparecían en las obras de Pappus de Alejandría en el siglo IV, habían sido redescubiertas por Cavalieri haciendo uso de su método de indivisibles, pero sus métodos poco rigurosos fueron

[6] Los teoremas de Guldin indican que *"la superficie encerrada por una curva al girar alrededor de un eje que no la corta, equivale al producto de la longitud de dicha curva por la longitud de la circunferencia que describe su centro de gravedad"* y que *"el volumen del sólido generado por una región plana al girar alrededor de un eje que no la corta, equivale al producto del área de dicha región plana por la longitud de la circunferencia que describe su centro de gravedad".*

duramente criticados por el matemático y astrónomo suizo Paul Guldin (1577-1643), a pesar de que este último tampoco fue capaz de justificar rigurosamente tales métodos. Paradójicamente, en la actualidad estos resultados llevan el nombre de Guldin y no el de Cavalieri o de Pappus [Dur1, p. 117].

Retomando el concurso de Pascal, sólo dos propuestas de solución por parte de John Wallis (1616-1703) y Antoine de Lalouvère (1600-1664) llegaron en el periodo por el que fue convocado el concurso (junio de 1658 – octubre de 1658), aunque ninguna de ellas fue del agrado de Pascal y Roberval, jueces del concurso. Así pues, pese a las protestas de Wallis, el premio fue declarado desierto y la resolución definitiva de las cuestiones planteadas por Pascal tuvo que esperar a la aparición de la obra *"Histoire de la roulette*[7]*",* publicada por Pascal a finales de ese año bajo el pseudónimo de Amos de Dettonville. La publicación de esta obra promovió nuevas controversias pues no hacía referencia a los trabajos previos de Torricelli.

Una vez cerrado el plazo de presentación de propuestas al concurso convocado por Pascal, el arquitecto inglés Christopher Wren (1632-1723) comunicaría a Pascal un novedoso resultado en el estudio de la cicloide [Bou, p. 249]. A saber, Wren había logrado la rectificación de la cicloide, hallando que la longitud de un arco de cicloide era igual a cuatro veces el diámetro de la circunferencia que genera la curva.

## La propiedad tautócrona y el péndulo isócrono de Huygens

A pesar del desagrado que el desenlace del reto lanzado por Pascal causó en algunos matemáticos, el reto en sí tuvo un efecto colateral digno de mención. En 1658, el astrónomo, físico y matemático holandés Christiaan Huygens (1629-1695) trataba de mejorar el diseño de los relojes de péndulo, puesto que había notado que el periodo de oscilación de un péndulo circular depende de la amplitud de su

[7] *Roulette* era el nombre por el que tanto Roberval como Pascal conocían a la curva cicloide.

trayectoria. En otras palabras, si a un péndulo de trayectoria circular se le modifica la amplitud de oscilación entonces deja de medir correctamente el tiempo puesto que se altera también el periodo de su oscilación. Pensemos por ejemplo en un péndulo circular sometido a alteraciones en la oscilación ubicado en un barco en movimiento o en cualquier móvil que describa un movimiento variado.

Por entonces, los avances científicos requerían urgentemente relojes precisos para realizar mediciones en áreas tan diversas como la astronomía, la mecánica celeste o, muy especialmente, la navegación. Al respecto de la navegación, un problema fundamental era el denominado *problema de la longitud*, relacionado con la determinación de la posición de barcos en altamar. La latitud terrestre podía ser calculada sin excesiva dificultad mediante la observación astronómica. La elevación del sol sobre el horizonte al mediodía permite obtener la distancia en grados de latitud desde el ecuador. De este modo podía determinarse la latitud con cierta exactitud midiendo la elevación del Sol en distintas épocas del año o bien midiendo la posición de la estrella Polar (en el caso del hemisferio norte terrestre) o de la Cruz del Sur (en el caso del hemisferio sur).

No obstante, el problema del cálculo de la longitud resultaba de una complejidad mucho mayor. Notemos que las estrellas no pueden tomarse como referencia por sí solas por cuanto la esfera celeste está en continuo movimiento de rotación. Para poder determinar la longitud resultaba necesario medir la posición de una estrella en un instante determinado, lo cual requiere dos mediciones: una relativa al tiempo local y otra relativa a la del tiempo en el lugar de referencia. A mediados del siglo XVII era prácticamente imposible conocer la hora local y la hora de referencia al mismo tiempo ante la imprecisión de los relojes en alta mar a causa de las continuas perturbaciones. Dicho de otro modo, era necesario disponer de un reloj de una precisión suficiente para poder determinar la longitud. De esta manera, cuando se tiene un reloj preciso, entonces la diferencia de tiempos en los que el sol alcanza su punto más alto en dos lugares distintos puede entonces usarse para obtener la distancia angular entre esos dos lugares. [Eul, Tomo 3] es una excelente e instructiva referencia para conocer más acerca de los métodos para el cálculo de la latitud y la longitud, entre otros aspectos.

Inspirado por el reto de Pascal, Huygens se ocupó de estudiar el periodo de un péndulo forzado a seguir una trayectoria cicloidal, descubriendo que éstos son isócronos, esto es, la frecuencia de tales péndulos cicloidales es independiente de la amplitud de su movimiento. Huygens caería en la cuenta de que un péndulo basado en la curva cicloide no se vería afectado por variaciones en la amplitud de su oscilación. En otras palabras, aunque la amplitud de la oscilación fuera puntualmente modificada, el periodo de oscilación del péndulo no se vería afectado y su valor únicamente dependería del radio de la circunferencia generatriz de la cicloide y de la aceleración de la gravedad, a saber

$$4\pi \cdot \sqrt{\frac{R}{g}}$$

Así pues, Huygens había descubierto en base a diversas consideraciones geométricas que la curva cicloide invertida es una curva tautócrona[8]. Huygens fue pionero en demostrar que la curva cicloide satisface la propiedad tautócrona y en su obra "*Horologium oscillatorium sive de motu pendulorum ad horologia aptato demostrationes geometricae*" [ver I-Huy] (publicada en París, 1673) da una demostración geométrica de este hecho.

La construcción del péndulo isócrono, que puede verse en [I-Huy], aprovecha una propiedad fundamental de la curva cicloide, que consiste en que su evoluta[9] es otra cicloide.

---

[8] Una curva se dice *tautócrona* (o isócrona) si tiene la propiedad de que un objeto material que se desplace uniformemente en caída por efecto de la gravedad y sin rozamiento a través de ella hasta un punto dado de la misma, lo hace en el mismo tiempo independientemente de la posición inicial del objeto. Del griego, tautos (ταυτος) significa el mismo, mientras que cronos (χρονος) significa tiempo.

[9] La evoluta de una curva es la curva envolvente de la familia de rectas normales a la curva original en todos sus puntos, en el sentido de que dichas rectas normales son tangentes a la evoluta en puntos correspondientes.

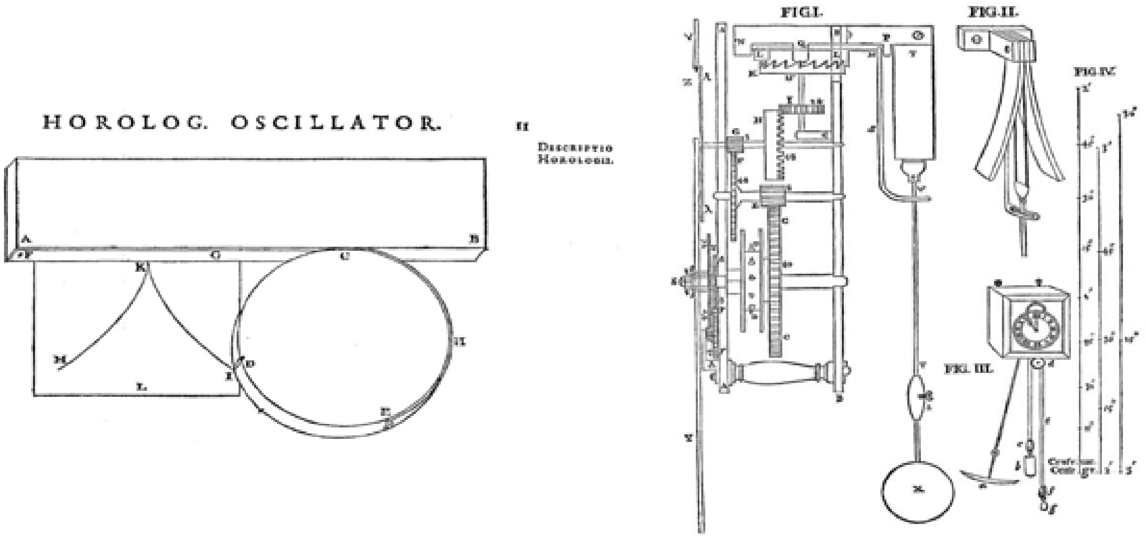



Figura 3: Huygens y la construcción del péndulo isócrono (Horollogium oscillatorium, [I-Huy, p. 1-20])

En otro orden de cosas, Huygens conocía que la suma de la longitud del segmento que une un punto cualquiera P de la cicloide y el punto de intersección C de la normal trazada desde P con la evoluta, y la longitud del arco que une el punto C y el vértice V de la evoluta, es constante e igual a el doble del diámetro de la circunferencia que genera la cicloide

$$\overline{PC} + \overset{\frown}{CV} = 4R$$

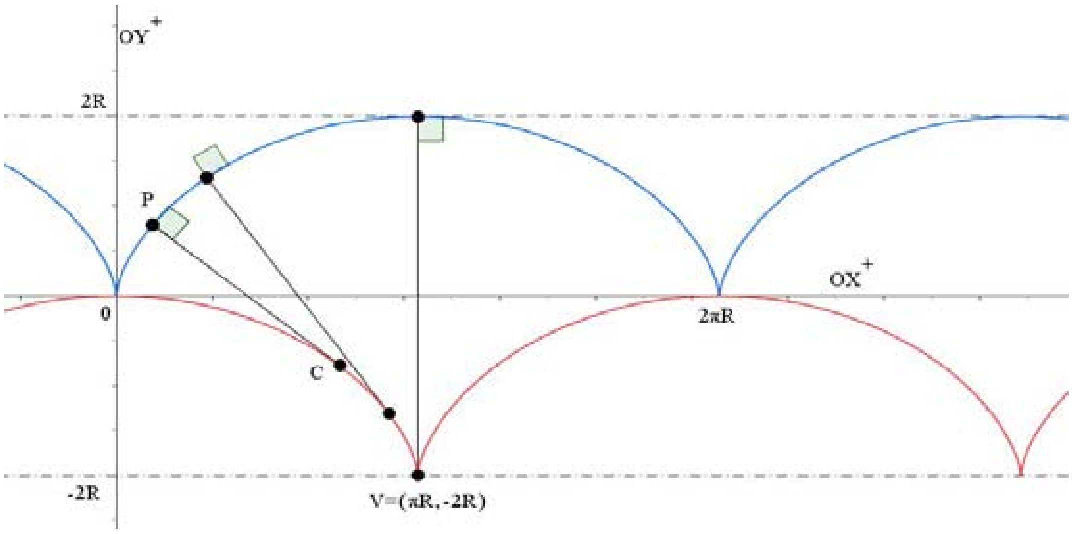



Figura 4: La cicloide (en azul) y su evoluta (en rojo).

Esta última propiedad es fundamental para la construcción de un tal péndulo isócrono forzado a moverse a lo largo un arco de cicloide. Para ello se fija un extremo de una cuerda dada como vértice de la evoluta de la cicloide que se desea describir. El mecanismo consistía en desplazar un punto variable de la cuerda a lo largo de la evoluta mientras el extremo libre de la cuerda oscila siguiendo una curva cicloide. Desafortunadamente, aunque el péndulo ideado por Huygens era preciso en teoría, en la práctica resultó poco útil debido a que el rozamiento de la cuerda a lo largo de los arcos de la cicloide causaba un error superior al que se trataba de corregir en la medición del tiempo.

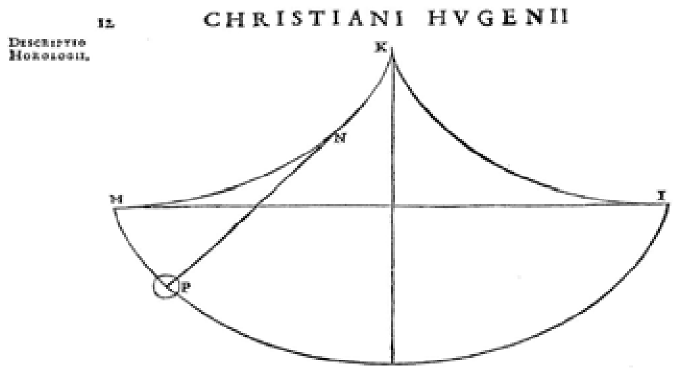



Figura 5: Huygens y la construcción del péndulo isócrono.

Años más tarde, los métodos infinitesimales de Gottfried Wilhelm Leibniz (1646-1716) ejercerían una profunda influencia en los matemáticos europeos continentales. En particular, su discípulo suizo Jakob Bernoulli (1654-1705) publicaría en mayo de 1690 un trabajo en la revista Acta Eruditorum (primera revista científica germana, publicada de 1682 a 1782, de la que Leibniz era su editor principal) donde establece la propiedad tautócrona de la cicloide haciendo uso del cálculo diferencial e integral. Más precisamente, Jakob Bernoulli había mostrado que el problema de la curva tautócrona se reducía a la resolución de una ecuación diferencial de primer orden. Los trabajos de Jakob en este año 1690 son de particular importancia para la historia del cálculo infinitesimal por cuanto la denominación integral surge por primera vez con su sentido actual de proceso inverso a la diferenciación.

El problema de la tautócrona seguiría planteando nuevos retos y abriendo nuevos frentes de estudio en los siglos XVIII y XIX. En particular, Joseph Louis Lagrange (1736-1813) comenzó alrededor de 1754 a trabajar en el problema de la tautócrona por vías puramente analíticas, y a finales de ese año ya había obtenido importantes resultados que instaurarían las bases actuales del Cálculo de Variaciones (término acuñado por Leonhard Euler (1707-1783) unos años más tarde). En agosto del año siguiente, Lagrange (teniendo por entonces 19 años) comunica por correspondencia a Euler sus avances en la resolución del problema de la tautócrona, así como su método para la resolución de máximos y mínimos condicionados (método de los multiplicadores).

Posteriormente, en 1823, Niels Henrik Abel (1802-1829) propone una generalización del problema de la tautócrona, basada en determinar la curva tal que un objeto material que se desplace uniformemente en caída por efecto de la gravedad y sin rozamiento a través de ella hasta un punto dado de la misma, lo haga en un tiempo prefijado de antemano para cada altura posible desde la que deba caer el objeto. Claramente, si el tiempo se exige independiente de la altura desde la que debe caer el objeto entonces se obtiene el problema original de la tautócrona. Los trabajos de Abel acerca de la curva tautócrona son pioneros en el desarrollo del Cálculo Fraccionario y el análisis de las Ecuaciones Integrales.

## La curva braquistócrona: los Bernoulli y las garras del león

A finales del siglo XVII, los métodos infinitesimales de Leibniz habían puesto de manifiesto su potencia y eficacia en la resolución de numerosos problemas novedosos en la época. Hasta entonces, el cálculo infinitesimal se había ocupado fundamentalmente de resolver problemas de tangentes y cuadraturas. Tras demostrar por métodos infinitesimales la propiedad tautócrona de la cicloide, Jakob Bernoulli concluye un trabajo de 1690 en Acta Eruditorum planteando a la comunidad matemática el célebre problema de la catenaria: *encontrar la forma que toma una cuerda, perfectamente flexible y homogénea, por la acción sólo de su peso* *si se encuentra fija en sus extremos*. La novedad en sí de estos nuevos problemas era notoria, pues no se trataba de encontrar extremos relativos de una curva, sino que la incógnita buscada es la propia curva. El problema de la catenaria sería resuelto posteriormente por C. Huygens por la vía geométrica, así como por Johann Bernoulli (1667-1748) y Leibniz reduciendo el problema a la resolución de una ecuación diferencial de primer orden.

Hasta la fecha los dos hermanos Bernoulli habían llevado a cabo una fructífera colaboración científica, hallándose ambos entre los pocos matemáticos en entender y aplicar con éxito las teorías de Leibniz. Jakob había iniciado a su hermano menor en las técnicas propias del cálculo diferencial, de tal suerte que en un principio ambos colaboraban en la resolución de problemas similares. No obstante, la resolución del problema de la catenaria por parte de Johann Bernoulli unido a la jactancia pública de éste supuso el detonante de agrias desavenencias entre ambos hermanos. En carta dirigida a Pierre Raymond de Montmort (1678-1719), Johann escribe lo siguiente en referencia a la resolución del problema de la curva catenaria [SV2, p. 92]:

> *“Los esfuerzos de mi hermano no tuvieron éxito; en cuanto a mí, tuve más fortuna, ya que fui capaz (lo digo sin alarde, ¿Por qué habría de ocultar la verdad?) de resolverlo completamente y reducirlo a la rectificación de la parábola.”*

Aparte de la rivalidad científica y el singular temperamento de cada uno de los hermanos Bernoulli, el hecho de que Jakob Bernoulli ocupara la cátedra de matemáticas en Basilea, ciudad natal de ambos hermanos, limitando las posibilidades de promoción de Johann, es un factor fundamental para entender el origen de las disputas entre ambos hermanos.

En junio de 1696, Johann Bernoulli, que por entonces se había trasladado a Groningen (Holanda) para ocupar la cátedra de matemáticas de aquella universidad, propone en Acta Eruditorum el problema de la braquistócrona[10], consistente en

[10] Del griego, braquistos (βραχιστος) significa el más breve.

determinar la curva por la que un cuerpo desciende en el menor tiempo posible entre dos puntos que no están ni en posición vertical ni horizontal, movido únicamente por efecto de la gravedad.

El propio Johann había añadido sarcásticamente que dicha curva era bien conocida entre los matemáticos, a pesar de no ser una línea recta (siendo ésta la curva que minimiza la distancia entre dos puntos) [Str, p. 392]. El reto lanzado por Johann, dirigido a los más brillantes matemáticos del mundo, fue pensado especialmente para poner a prueba a su hermano Jakob, esperando que éste llegara a una solución errónea. [HNW, p. 7]

> *"Profundioris in primis Mathesos cultori, Salutem!*
>
> *Problema novum ad cujus solutionem mathematici invitantur. Datis in plano verticali duobus punctis A et B assignare mobili M, viam AMB per quam gravitate sua descendens et moveri incipiens a puncto A, brevissimo tempore perveniat ad alterum punctum B."*

El plazo para la recepción de soluciones fue establecido hasta finales de ese año, aunque Johann aseguraba que media hora de profunda reflexión sería más que suficiente para una mente capaz [Dur2, p. 101]. No obstante, finalizado el plazo de seis meses, únicamente Leibniz había logrado resolver el problema en cuestión, solicitando además a Johann Bernoulli la ampliación del plazo de resolución de tal suerte que otros matemáticos, en especial, franceses, italianos y, sobre todo, los matemáticos ingleses pertenecientes a la Royal Society de Londres, pudieran conocer y estudiar el problema planteado. En carta fechada el día de año nuevo de 1697, Johann Bernoulli se dirige *a los más agudísimos matemáticos que a lo largo del mundo florecen* planteando dos problemas, uno de los cuales era el problema de la braquistócrona, y proponiendo la ampliación del plazo de resolución hasta la Semana Santa de 1697. En sendas cartas remitidas a las revistas Philosophical Transactions of The Royal Society y Journal des sçavans, Johann Bernoulli indica [SV1, p. 38]:

> *"Ya se sabe con certeza que raramente hay algo que de forma más grata excite a los espíritus nobles e ingeniosos a esfuerzos que conducen al*

> *aumento del conocimiento que proponer problemas difíciles y al mismo tiempo útiles..." "...he decidido anunciar yo mismo la prolongación del plazo y ahora se verá quien ataca esta excelente y difícil cuestión y, después de un plazo tan largo, finalmente la domina."*

En febrero de 1697, Leibniz escribe a Johann Bernoulli conjeturando que sólo cinco matemáticos vivos estaban en condiciones de resolver el problema de la braquistócrona, a saber, ambos hermanos Bernoulli, Guillaume Antoine François marqués de L'Hôpital (1661-1704), Isaac Newton (1643-1727) y el propio Leibniz (éstos junto con Huygens, que había fallecido años atrás, eran los únicos matemáticos que estaban en condiciones de hacer uso del cálculo diferencial e integral para resolver el problema). Finalizado el plazo, Leibniz se encargaría de publicar las soluciones recibidas en el volumen del mes de mayo de Acta Eruditorum.

En total se recibieron cuatro propuestas de solución por parte, respectivamente, del propio Leibniz, del marqués de L´Hôpital, así como de los dos hermanos Jakob y Johann Bernoulli. Todas las soluciones propuestas a excepción de la de L'Hôpital establecían que la curva braquistócrona era una curva cicloide [Dur2, p. 102]. El hecho de que Huygens identificara años atrás a la cicloide como curva tautócrona hizo a Johann Bernoulli escribir como introducción a su propuesta [Str, p. 392]:

> *"Con justicia admiramos a Huygens porque fue el primero en descubrir que una masa cae por la cicloide en el mismo tiempo, sin importar el punto de inicio del movimiento. Pero el lector quedará atónito cuando diga que esta misma cicloide, la tautócrona de Huygens, es la braquistócrona que estamos buscando."*

La solución dada por Johann Bernoulli apareció en Acta Eruditorum bajo el nombre "*Curvatura radii in diaphanis non uniformibus*" ("La curvatura de un rayo en un medio no uniforme"), y consistía en establecer una analogía entre la curva de descenso más rápido con la trayectoria que seguiría un rayo de luz en un medio plano con índice de refracción adecuadamente elegido. Haciendo uso de la denominada ley de Snell[11] y de la ley de Galileo, por la cual la velocidad de caída de un cuerpo es proporcional a la raíz cuadrada de la distancia desde donde cae, Johann obtiene la ecuación diferencial de la cicloide

$$y'(x) = \sqrt{\frac{x}{2R - x}}$$

La solución propuesta por su hermano Jakob Bernoulli aparece bajo el sugerente título *"Solutio Problematum Fraternorum, una cum Propositione reciproca aliorum"* (*"Resolución del problema de mi hermano, a quien yo a mi vez planteo otro"*). El método de resolución propuesto por Jakob Bernoulli es mucho más general que la solución propuesta por su hermano, y ejerció una profunda influencia en L.Euler, quien, junto a J.L. Lagrange, instauraría las bases del Cálculo de Variaciones, disciplina matemática dedicada a la búsqueda de extremos relativos de funcionales definidos sobre algún espacio de funciones. Las soluciones propuestas por ambos hermanos Johann y Jakob Bernoulli pueden consultarse en [Str, p. 392-399].

En otro orden de cosas, el problema de la curva de tiempo más breve ya había sido considerado cerca de setenta años antes por Galileo, quien, sin poseer la potente herramienta del cálculo infinitesimal, había propuesto que dicha curva debía ser un arco de circunferencia. En tiempos de Galileo, era bien conocido que el tiempo de descenso a lo largo de una recta era mayor que el tiempo de descenso a lo largo de un arco de circunferencia. En particular, en el escolio al Teorema 22, Proposición 36, de la tercera jornada, sobre el movimiento naturalmente acelerado, de *"Discorsi e demostrazioni matematiche: intorno a due nuove scienze attenenti alla mecanica & movimenti locali"* [Gal], Galileo estudia el tiempo de caída a lo largo de poligonales hallando que, en el límite de la familia de poligonales, el tiempo a lo largo de una recta es superior al obtenido a lo largo de una circunferencia:

[11] La ley de Snell indica que un rayo de luz al pasar de un medio a otro de densidad diferente se desvía de modo que la relación entre la velocidad y el seno del ángulo que forma la curva con la vertical permanece constante.

*"De lo demostrado hasta ahora, parece que se puede inferir que el movimiento más veloz de un extremo a otro, no tiene lugar a lo largo de la línea más corta, sino a lo largo de un arco de círculo"*

232 DIALOGO TERZO

vel D C ex quiete in D: ſed ex quiete in A citius abſolvitur D C, quam duæ A D C: ſed per duas D E C ex quiete in A veriſimile eſt citius abſolvi deſcenſum quam per ſolã C D. Ergo deſcenſus per tres A D E C abſolvitur citius quã per duas A D C. Verum ſimiliter præcedente deſcenſu per A D E, citius fit latio per duas E F C quam per ſolam F C. Ergo per quatuor A D E F C citius fit motus quam per tres A D E C. Ac tandem per duas

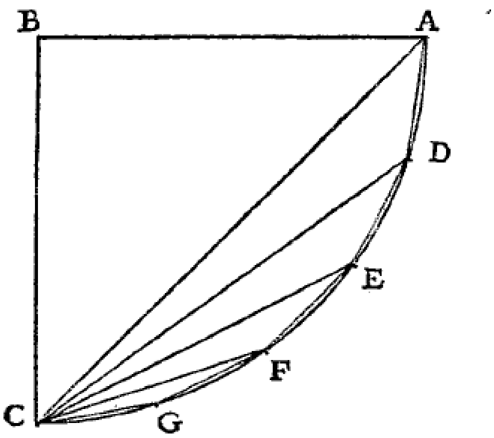



Figura 6: Galileo y la curva de descenso más breve (ver [I-Gal])

En palabras del propio Leibniz en la presentación en Acta Eruditorum de las soluciones al reto de Johann Bernoulli, Galileo no pudo demostrar que la curva braquistócrona era una curva cicloide al desconocer el cálculo infinitesimal recientemente descubierto.

Retomando el reto de Johann Bernoulli, cuatro soluciones al problema de la braquistócrona fueron presentadas en el segundo plazo propuesto y publicadas en el volumen de mayo de 1697 de la revista Acta Eruditorum. El hecho de que Isaac Newton no hubiera respondido al reto en el primer plazo establecido hizo pensar tanto a Johann Bernoulli como a Leibniz que el problema había desconcertado a Newton, y que, por tanto, el método de fluxiones de Newton era más limitado que el método de diferenciales de Leibniz. Observemos que por entonces Newton se hallaba al margen de la vida académica y científica, pues había sido nombrado Interventor de la Casa de la Moneda de Londres en abril de 1696, y desde entonces se hallaba entregado en cuerpo y alma al proceso de reacuñación de monedas que se había abierto para abordar el grave problema financiero que azotaba a Inglaterra a causa de los turbios negocios dedicados a la falsificación de monedas.

Así pues, Bernoulli optó por remitir, también en enero, copias independientes a Newton y Wallis para cerciorarse la superioridad de los métodos diferenciales de Leibniz frente al cálculo de fluxiones defendido por los matemáticos británicos. Asimismo, la carta a Newton y Wallis indicaba irónicamente que tanto Leibniz como el propio Johann Bernoulli publicarían sus soluciones en la Pascua de 1697 [Wes, p. 292-293]:

> *"Si los geómetras examinan cuidadosamente estas soluciones...valorarán nuestros descubrimientos tanto más cuantos menos son los que plausiblemente puedan resolver nuestros excelentes problemas, sí, menos incluso entre los mismos matemáticos que se jactan de que, mediante los notables métodos que en tal modo encarecen, no sólo han penetrado en profundidad en los rincones secretos de la geometría esotérica, sino asimismo han extendido extraordinariamente sus límites por medio de los áureos teoremas que (creían ellos) no eran conocidos de ninguno, pero que de hecho habían sido previamente publicados por otros hacía tiempo."*

Newton interpretó esta comunicación como un reto dirigido hacia su persona y por tanto hizo registrar la fecha de la recepción del reto: 29 de enero de 1697. Charles Montagu, presidente de la Royal Society de 1695 a 1698, recibiría una carta fechada el 30 de enero de 1697, conteniendo una solución al problema de la braquistócrona. Así, en el volumen de febrero de 1697 de las Philosophical Transactions aparecería una brillante y escueta propuesta de autor anónimo, que con tan sólo setenta y siete palabras resolvía el reto de Bernoulli. Cuando el trabajo anónimo llegó a manos de Johann Bernoulli, éste no vaciló en apreciar la potencia del razonamiento expuesto, e impresionado por la elegancia de la solución, no tuvo la menor dificultad en identificar a Newton como autor del trabajo, y lo expresó con la célebre frase *"tanquam ex ungue leonem"* ("*como se reconoce al león por sus garras*") [Dur2, p. 102]. En declaraciones de la sobrina de Newton, que por entonces vivía con su tío, a su biógrafo, John Conduitt, Newton recibió la comunicación de Bernoulli el 29 de enero a las cuatro de la tarde tras una agotadora jornada del proceso de reacuñación de monedas en el que trabajaba. En la colección de anécdotas de Conduitt se refleja que Newton no durmió hasta que hubo resuelto el problema cerca de las cuatro de la madrugada [Wes, p.293].

Así pues, los hechos acaecidos en torno a la curva cicloide en la última década del siglo XVII representan un punto de referencia indiscutible en la historia de las matemáticas. Pocas curvas en la historia de las matemáticas cuentan con el honor de poseer un monumento en su nombre. De hecho, coincidiendo con el tricentésimo aniversario del reto planteado por Bernoulli, en 1996 se erigió un monumento en la Universidad de Groningen en honor a Johann Bernoulli y la curva cicloide.

Figura 7: Monumento a la cicloide en la Facultad de Matemáticas de la Universidad de Groningen.

## Bibliografía


- [Bou] N. Bourbaki. *"Elementos de historia de las matemáticas".* Alianza Universidad (1976)
- [Dur1] A.J. Durán. *"Historia, con personajes, de los conceptos del cálculo"*. Alianza Universidad (1996).
- [Dur2] A.J. Durán. *"La polémica sobre la invención del cálculo infinitesimal. Escritos y documentos"*. Crítica (2006).
- [Euc] Euclides. *"Elementos"*. Editorial Gredos (1991, 1994, 1996).

- [Eul] L. Euler. *"Cartas a una princesa de Alemania sobre diversos temas de Física y Filosofía"*. Edición de Carlos Mínguez Pérez, Prensas Universitarias de Zaragoza (1990).
- [Gal] G. Galilei. *"Discorsi e dimostrazioni matematiche, intorno à due nuove scienze attenenti alla mecanica e i movimenti locali"*. Servei de publicacions de la Universitat Autònoma de Barcelona (1988).
- [GU] P.M. González Urbaneja. *"Las raíces del cálculo infinitesimal en el siglo XVII: una investigación histórica sobre las técnicas y métodos que condujeron al descubrimiento del cálculo infinitesimal "*. Alianza Universidad (1992).
- [Har] G.H. Hardy. *"Apología de un matemático"*. Nivola (1999).
- [HNW] E. Hairer, S.P. Norsett, G. Wanner. *"Solving Ordinary Differential Equations I. Nonstiff Problems"*. Springer-Verlag (1993).
- [Kli] M. Kline. *"El pensamiento matemático de la antigüedad a nuestros días"*. Alianza Universidad (1992).
- [Sch] H.C. Schepler. *"The chronology of Pi"*. Mathematics Magazine, Vol. 23 (1950).
- [Str] D.J. Struik. *"A source book in mathematics, 1200-1800"*. Princeton University Press (1986).
- [SV1] C. Sánchez Fernández, C. Valdés Castro. *"De los Bernoulli a los Bourbaki. Una historia del arte y la ciencia del cálculo"*. Nivola (2004).
- [SV2] C. Sánchez Fernández, C. Valdés Castro. *"Los Bernoulli. Geómetras y viajeros"*. Nivola (2001).
- [Wes] R.S. Westfall. "*Newton. Una vida*". Cambridge University Press (2000).


## Referencias en internet


- [I-Gal] G. Galilei. *"Discorsi e dimostrazioni matematiche, intorno à due nuove scienze attenenti alla mecanica e i movimenti locali"* (1638).

  Enlace a *Gallica, bibliotèque numérique de la bibliotèque nationale de France*

  http://gallica.bnf.fr/ark:/12148/bpt6k3354x
- [I-Huy] C. Huygens. "*Horologium oscillatorium sive de motu pendulorum ad horologia aptato demostrationes geometricae*" (1673).

  Enlace a *Gallica, bibliotèque numérique de la bibliotèque nationale de France*

  http://gallica.bnf.fr/ark:/12148/bpt6k3360z
- [I-Pro] R. Proctor. *"A treatise on the cycloid and all forms of cycloidal curves"*. Longmans, Green & Co (1878).

  Enlace a *The Cornell Library Historical Mathematics Monographs*

  http://historical.library.cornell.edu/cgi-bin/cul.math/docviewer?did=02260001

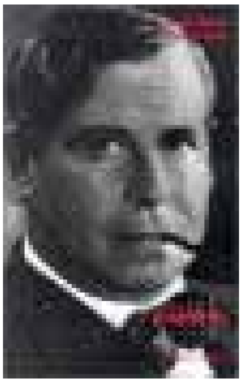
UNIÓN
REVISTA IBEROAMERICANA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA

Diciembre de 2007, Número 12, páginas 135-142
ISSN: 1815-0640

¡¡Esto no es serio!!

José Muñoz Santoja

# D. Ramón y las Matemáticas

| | |
|---|---|
|  | Humorismo + Metáfora = Greguería<br><br>*Ramón Gómez de la Serna* |

Uno de los escritores españoles más curiosos del siglo XX fue sin duda don Ramón Gómez de la Serna. Llegó a tener tal fama en su época que se citaba simplemente por su nombre *Ramón*. Nació en Madrid en 1888 y murió en 1963 en Buenos Aires, donde vivía desde que emigró de España durante la Guerra Civil.

Don Ramón escribía novelas, ensayos, ejercía como periodista………. Fue uno de los tres miembros no franceses de la Academia de Humor de París junto con Chaplin y Pitigrilli. Escribió muchos géneros: humor, biografías, críticas de arte, etc.

Fue inspirador y alma mater de la *Tertulia del Pombo*, celebre tertulia madrileña por donde pasaban multitud de personas célebres, tanto escritores como pintores o diversos intelectuales: Pío Baroja, Picasso, Julio Romero de Torres, Solana, José Bergamín, Azorín, Jorge Luis Borges, etc.

Lo traemos hoy aquí por ser el inventor de la greguería, una frase corta en la que suele unir varios aspectos de la vida cotidiana de una forma sarcástica y crítica, dando lugar muchas veces a frases del absurdo. La Real Academia Española de la Lengua la definió como: “Greguería: agudeza o imagen en prosa que presenta una visión personal y sorprendente de algún aspecto de la realidad y que ha sido lanzada y así denominada caprichosamente hacia 1912 por el escritor Ramón Gómez de la Serna”. Desde 1910 en que las inventó, publicó miles de greguerías. Tuvo muchos imitadores y bastantes escritores fueron influidos por ellas, por lo que no es raro encontrar greguerías escritas por discípulos o seguidores de don Ramón.

José Muñoz Santoja

En nuestra sección, vamos hoy a recoger una pequeña selección de las muchas greguerías que existen con contenido matemático. Algunas de ellas fueron ilustradas por el propio autor. También incluimos fotografías realizadas por el que suscribe para un panel que se presentó en el I.C.M.E. celebrado en 1996 en Sevilla (España). Espero que disfruten ustedes de la gran inventiva de don Ramón Gómez de la Serna.

| | |
|---|---|
|  | El 4 tiene la nariz griega.<br><br>El 11 son los dos hermanos que van al colegio. |

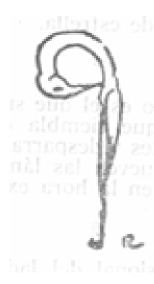
El 9 es la oreja de los números.

El 5 es un número que baila.

El 6 es el número que va a tener familia.

El 8 tumbado parecen las gafas de mi hermana.

| | |
|---|---|
|  |  |
| El 6 es el número langostino. | El 8 es el reloj de arena de los números. |

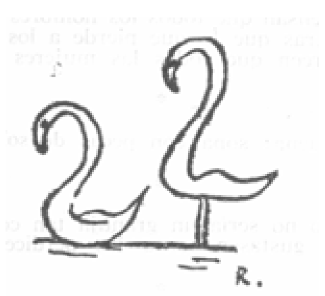
| | |
|---|---|
| Siguiendo la formación espontánea de cifras en que incurre la Naturaleza, después de ver cómo la serpiente hace la L, encontramos en la silueta del marabú, cuando se rasca en el pecho con el pico, la verdadera figura del 9.<br><br>La D es un Cero partido por Dios. |  |

Angulo recto: el que hace al doblar la esquina el que persigue a una mujer.

Cuando al irnos a levantar nos incorporamos en la cama hacemos el ángulo capitular del día.

Los ceros son los huevos de los que salieron las demás cifras.

La línea recta no es igual para todos: la del ladrón, por ejemplo, es la que va desde su mirada a la caja de caudales.

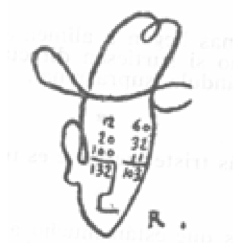


Las parejas de cisnes parecen que señalan siempre una misma cifra, el 22; pero a veces, cuando uno de ellos está entrando en el agua y el otro está en pie, a la orilla, señalan el 24.

Hay pájaros que tiesos sobre una sola pata señalan en el paisaje las cuatro y pico.

0 + 0 = beso

Después de todo, las *Mil y una noches* duran unos dos años y pico, y a los niños se les entretiene con cuentos más tiempo aún.



Hay un modo de fruncir la frente en el que va preocupado por una cantidad, que se ve cómo va sumando *in mente* y las cejas son las rayitas entre los sumandos y el resultado.

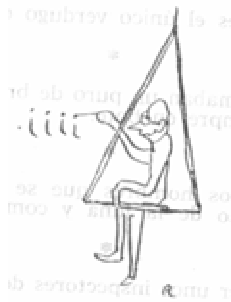
Caja de compases: los bisturíes de la Geometría, la Mecánica y la Arquitectura.

José Muñoz Santoja

| | |
|---|---|
|  |  |
| Los números son los mejores equilibristas del mundo: se suben unos encima de otros y no se caen. | La Geometría se columpia en el trapecio. |

Elevador de trigo: el pan elevado al cubo.

Los que beben pegados al mostrador del bar resultan divididos por el mismo común denominador.

| | |
|---|---|
| El que pone los puntos sobre las íes está en el trapecio de la puntuación.<br><br>Las calvas son medias circunferencias.<br><br>La elipse es la curva que describe el panecillo que tira uno de los comensales a otro, en la cena fraternal. |  |

A la media botella de vino siempre le faltará la otra mitad.

El grillo mide por milímetros la noche.

El punto está hecho de XXX que son las incógnitas de si se caerá o no al pasar el tren.

Vitamina: fórmulas matemáticas tomadas por la boca.

Trigonometría es andar por el más difícil de los alambres y el más peligroso de los trapecios.

Doña Álgebra: la gran directora de colegio.

El que mejor traza una perpendicular es el que se tira del balcón a la calle.

# D. Ramón y las Matemáticas

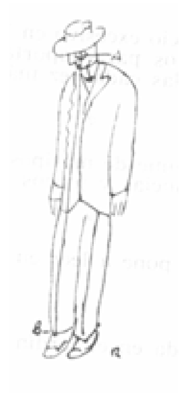
José Muñoz Santoja

El hombre pendiente de la raya del pantalón, rectilínea y perfecta, es un geómetra con mucho ojo que está disparando siempre la plomada de su mirada para ver si va bien o mal planchada la línea capital de su existencia.

Los tornillos son clavos peinados con la raya al medio.

Al calvo el peine le sirve para hacerse cosquillas paralelas.

El ovalo es el círculo que adelgazó.



El triángulo escaleno lo vemos con escalerilla propia para subir al vértice.

El racimo es un triángulo pletórico y juguetón.

Ese semicírculo que hacemos sobre la arena del jardín, con nuestro bastón, mientras estamos sentados, es la justa medida de nuestro nicho.

Una media circunferencia es el ocaso geométrico.

$\pi r^2$ es también la fórmula del grillo.

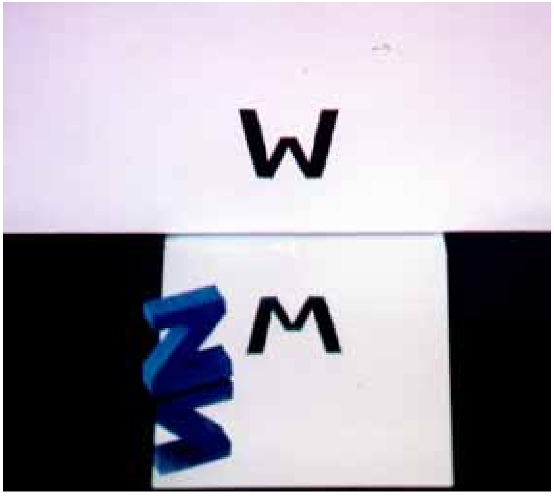
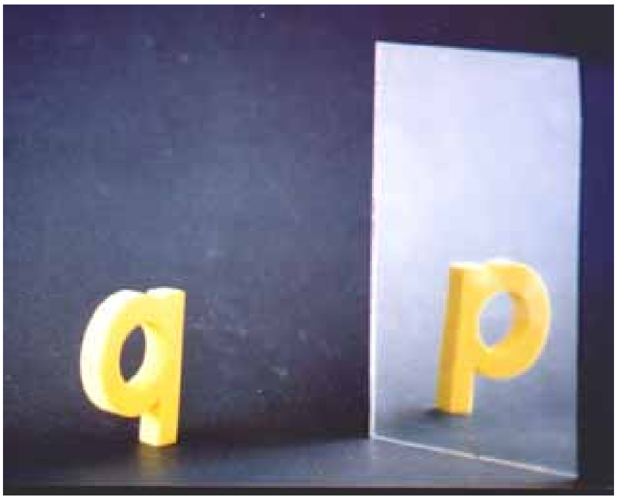
Al revés, R.I.P. resulta la fórmula matemática de la inmortalidad: P.I.R.

¿Qué es eso de “elevado al cubo” cuando el cubo suele estar siempre abajo?

Lo que más sorprende del tetraedro es que no tenga tres lados, sino cuatro. ¡Hay palabras engañosas!

Las pirámides son las jorobas del desierto.

Descartes: el que se descartó de muchas ideas para quedarse sólo con las buenas.

| | |
|---|---|
|  |  |
| La W es la M haciendo la plancha. | La “q” es la “p” que vuelve del paseo. |

El ruedo taurino es una circunferencia en la que el punto central, que es el torero, tiene derecho a desplazarse sin dejar de ser el centro del espectáculo.

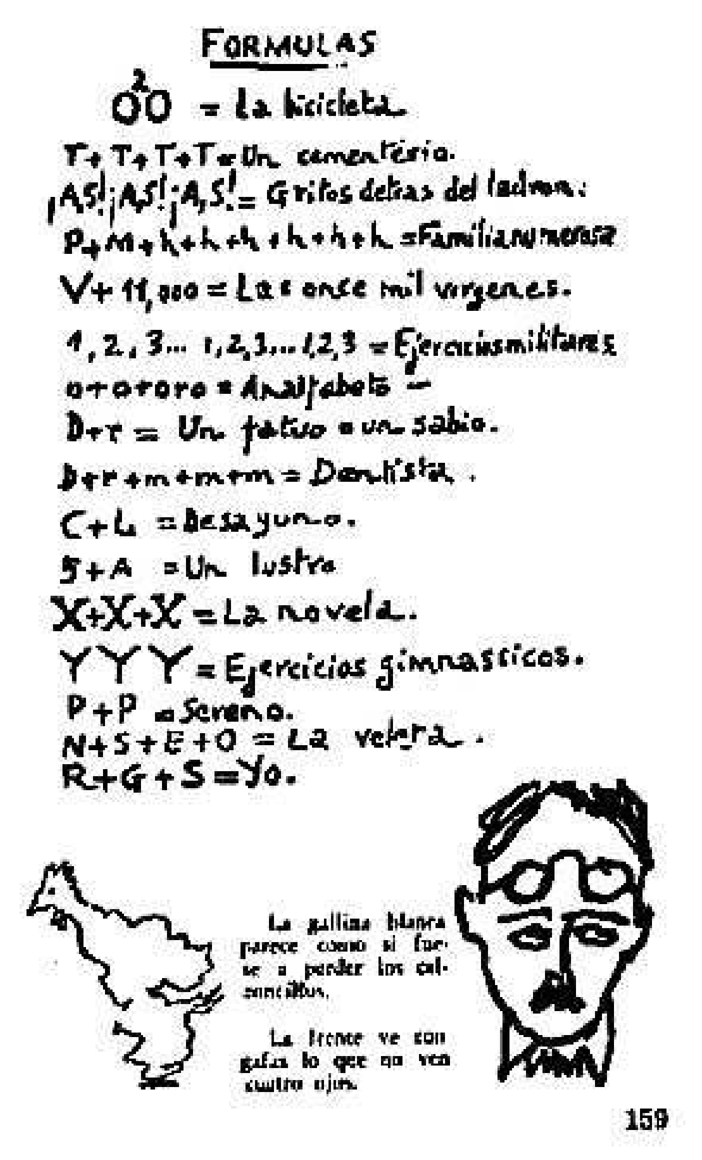
| | |
|---|---|
|   | Hay un momento en que el reloj prepara el compás para trazar su circunferencia.<br><br>La guillotina es el triángulo fatal.<br><br>La serpiente mide el bosque para saber cuántos metros tiene y decírselo al ángel de las estadísticas. |

Aquel trío o triángulo era un tetraedro por lo opulenta que era ella.

Como hemos visto, Ramón Gómez de la Serna era muy dado a dibujar pequeñas imágenes que ilustraban sus trabajos. A la derecha podemos ver una página de su obra *Trampantojo* publicada en 1947 en Buenos Aires.

Podemos observar como suele usar signos matemáticos en la creación de lo que el llama “fórmulas”.

A lo largo de estas páginas creo haber dejado clara la inventiva de este escritor, sus referencias matemáticas localizables en muchos momentos de sus escritos y la potencialidad visual que muchas de sus pequeñas frases guardan.



FORMULAS

$O^2O$ = La bicicleta

T+T+T+T = Un cementerio.

¡AS! ¡AS! ¡AS! = Gritos detrás del ladrón.

P+M+h+h+h+h+h+h+h = Familia numerosa

V+11,000 = Las once mil vírgenes.

1, 2, 3... 1, 2, 3... 1, 2, 3 = Ejercicios militares

0+0+0+0 = Analfabeto

D+T = Un fatuo o un sabio.

D+r+m+m+m = Dentista.

C+L = Desayuno.

5+A = Un lustro

X+X+X = La novela.

YYY = Ejercicios gimnásticos.

P+P = Sereno.

N+S+E+O = La veleta.

R+G+S = Yo.

La gallina blanca parece como si fuese a perder los calzoncillos.

La frente ve con gafas lo que no ven cuatro ojos.

159

Para finalizar y dejar constancia de las posibilidades visuales que comento, quiero añadir una imagen que he encontrado en Internet perteneciente al libro

“100 greguerías ilustradas” de César Fernández Arias.


Corresponde a la greguería:

La verdadera perpendicular es la mirada que el del palco número 4 echa sobre el escote de la del palco principal número 4.

Todas las imágenes de Ramón Gómez de la Serna así como la mayoría de las greguerías están sacadas del libro:

Gómez de la Serna, Ramón (1962): *Total de greguerías*. Aguilar, Madrid. 2ª edición.

También pueden consultar la siguiente referencia donde encontrarán más greguerías, así como actividades interdisciplinares para trabajar con ellas en clase.

Muñoz Santonja, José (2007): “Las matemáticas son las greguerías de la razón”, *Suma*, nº 55, Junio, Madrid, pp. 31-39.

UNIÓN
REVISTA IBEROAMERICANA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA

Diciembre de 2007, Número 12, páginas 143-149
ISSN: 1815-0640

# El rincón de los problemas

Uldarico Malaspina Jurado

Pontificia Universidad Católica del Perú
umalasp@pucp.edu.pe

## Problema[1]

*Decimos que un polígono formado únicamente pegando fichas cuadradas de lado 1 es incaico si todos sus lados tienen longitud 1. Demostrar que para todo entero N $\geq$ 11, se puede construir un polígono incaico formado con N fichas de lado 1.*

Este es un problema de carácter lúdico, que es natural comenzar a resolverlo constructivamente. Puede usarse muy bien para aclarar algunos conceptos relacionados con el manejo de definiciones, con el concepto de polígono, los conjuntos infinitos numerables, las sucesiones y las demostraciones inductivas. Una manera de explotar sus potencialidades es –como lo hicimos en un taller con profesores– presentándolo por partes, a partir de una situación descrita y proponiendo actividades grupales con dificultades crecientes, como se muestra a continuación:

## Situación:

Cada casilla de la siguiente cuadrícula es de lado 1. Los polígonos que se forman sombreando casillas de la cuadrícula, con la característica de tener todos sus lados de longitud 1, reciben el nombre de polígonos *incaicos*.

(Se presenta una hoja con una cuadrícula de unos 20 por 22 cuadraditos, asumiendo cada cuadradito de lado 1)

***Actividades grupales*** (grupos de tres o cuatro participantes)

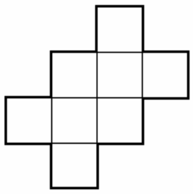
*a.* Construir cuatro polígonos incaicos y tres no incaicos.
*b.* Construir seis polígonos incaicos sombreando 11, 12, 13, 14, 15 y 16 casillas respectivamente.
*c.* Examinar rigurosamente si existen infinitos polígonos incaicos.
*d.* Demostrar que para todo entero *N* $\geq$ 11, se puede construir un polígono incaico sombreando *N* casillas.

[1] Problema creado por los ex olímpicos peruanos J. Tipe, C. Espinoza, S. Vera y J. Cuya, especialmente para considerarlo en la prueba de la fase final de la olimpiada nacional escolar de matemáticas en el Perú, en el 2007.

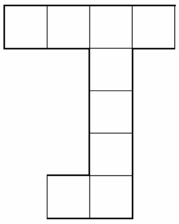
## Comentarios

1. La actividad *a* permite familiarizarse con una definición nueva, como tienen que hacerlo nuestros alumnos cuando les damos una definición de álgebra, aritmética, geometría u otra materia, en el desarrollo de un curso de sus estudios. En matemáticas es muy importante reconocer elementos que cumplen y elementos que no cumplen una definición dada. Esta actividad inicial y las siguientes, también brindan la oportunidad de reflexionar sobre la definición de polígono y de trabajar lúdica y constructivamente con polígonos no convexos.

   A continuación mostramos un polígono incaico y uno no incaico:



Polígono incaico
de 8 cuadraditos



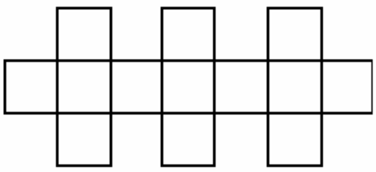
Polígono no incaico
de 9 cuadraditos

   Surge de manera natural la pregunta sobre la existencia o no de un polígono incaico de dos cuadraditos. La respuesta negativa conlleva recordar que en un polígono –convexo o no– cada vértice debe pertenecer sólo a dos lados del polígono.

2. Las actividades pedidas en *b* estimulan la creatividad constructiva, con el manejo adecuado de la definición dada de polígono incaico. Es una excelente ocasión para comentar también sobre afirmaciones de existencia y unicidad, que tanto se usan en las matemáticas, y paralelamente hablar de ejemplos y contraejemplos. Así, puede examinarse la verdad o falsedad de la proposición

   *Existe un polígono incaico de 13 cuadraditos*

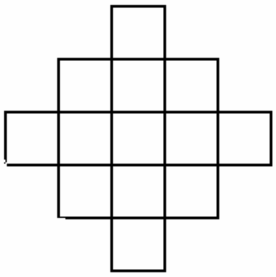
   Una manera correcta de demostrar que tal proposición es verdadera, es exhibiendo uno de tales polígonos, como el siguiente:



Y luego examinar la verdad o falsedad de la siguiente proposición:

*Existe un único polígono incaico de 13 cuadraditos*

Una manera correcta de demostrar que tal proposición es falsa, es mostrando un contraejemplo; es decir, exhibiendo un polígono incaico de 13 cuadraditos, que sea diferente al polígono anteriormente mostrado; por ejemplo el siguiente:

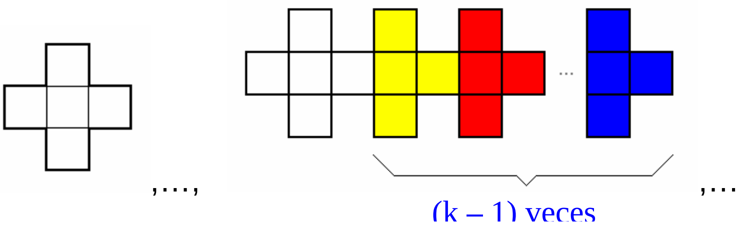


Pueden suscitarse discusiones interesantes con preguntas relacionadas a las actividades pedidas, como

*¿Existen polígonos incaicos de 6, de 7, de 9, de 10 cuadraditos?*

3. La actividad c permite reflexionar sobre los conjuntos infinitos numerables. En nuestra experiencia didáctica, hemos tenido casos en los que algunos participantes pensaron de primera intención que al no existir polígonos incaicos con dos cuadraditos, ya no se puede afirmar que haya infinitos polígonos incaicos. Estas apreciaciones iniciales se aclararon rápidamente recordando, por ejemplo, que hay infinitos números naturales mayores que 3 y que entre ellos no están el 2 ni el 1.

   Para demostrar que existen infinitos polígonos incaicos, bastará mostrar una manera de construirlos, como una sucesión de elementos que respondan a un determinado patrón de construcción; por ejemplo




   En esta sucesión, el primer elemento es un polígono incaico de 5 cuadraditos (podemos llamarlo "cruz básica") y los siguientes se construyen pegando al anterior una T horizontal de 4 cuadraditos, como la amarilla, la roja y la azul, de la forma en que se ilustra en la figura.

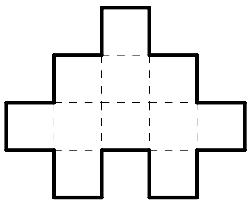
Así, el segundo término de la sucesión es un polígono incaico de 5 + 4 cuadraditos (imaginar sólo la cruz básica con la T amarilla); el tercer término de la sucesión es de 5 + 8 cuadraditos (la cruz básica con las T amarilla y roja); y en general, el término k-ésimo de la sucesión es un polígono incaico de 5 + 4 (k – 1) cuadraditos.

Ciertamente, hay otras sucesiones de polígonos incaicos, y es interesante encontrar varias de ellas.

4. Las actividades *a, b,* y *c* desarrolladas, permiten afrontar con naturalidad y facilidad la actividad *d*, que es el problema original. A continuación escribimos en detalle una demostración:

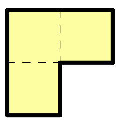
Por facilidad para la exposición, volvemos al enunciado original del problema, considerando fichas cuadradas de lado 1, en lugar de cuadraditos unitarios de una cuadrícula.

Vemos que se puede formar un polígono incaico usando 11 fichas:

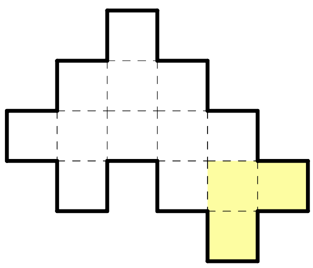


$N = 11$

Si colocamos adecuadamente la siguiente pieza (que llamaremos *triminó*):

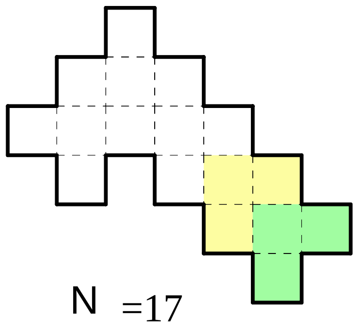


podemos conseguir un polígono incaico formado por 14 fichas:



$N = 14$

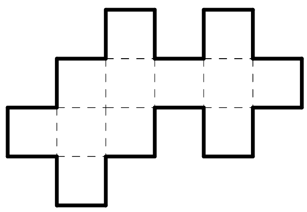
Si seguimos colocando triminós en la parte inferior derecha del polígono incaico conseguiremos otros formados por 17, 20, 23, 26,... fichas:



$N = 17$

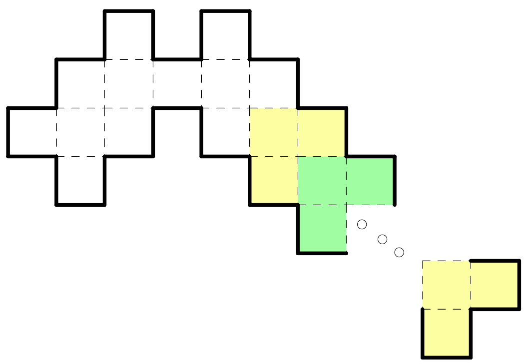
En general, si colocamos k triminós en la forma indicada $(k \geq 1)$ podemos conseguir un polígono incaico formado por 11+3k fichas. Es decir, hemos resuelto el problema cuando *N* es de la forma 11 + 3k, con k entero no negativo.

De forma similar, vemos que es posible formar un polígono incaico con 12 fichas:



$N = 12$

Colocamos triminós de la misma forma que en el caso anterior:



$N = 12+3k$

Así podemos construir polígonos incaicos formados por 12, 15, 18, 21, ... fichas.

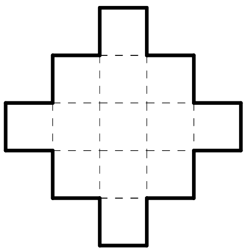
En general, si colocamos k triminós en la forma indicada ($k \geq 1$) podemos conseguir un polígono incaico formado por 12+3k fichas.

Así queda resuelto el problema cuando N es de la forma 12 + 3k, con k entero no negativo. En este caso, siendo 12 múltiplo de 3, podemos decir más sencillamente que el problema queda resuelto cuando N $\geq$ 11 y es múltiplo de 3.

Observemos que 11 es 12 – 1; es decir, un múltiplo de 3, menos 1. Entonces todos los números de la forma 11 + 3k , con k entero no negativo, son múltiplos de 3 mayores que 11 a los que se les ha restado 1.

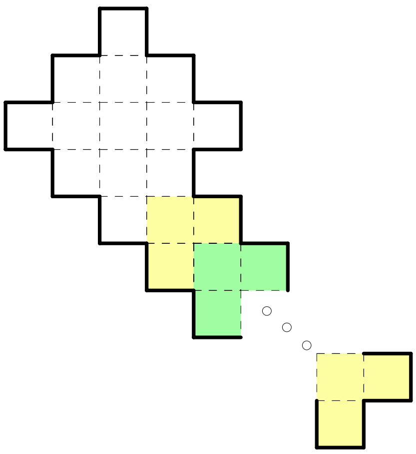
Como todos los números enteros mayores o iguales que 11 pueden expresarse como múltiplos de 3, menos 1; como múltiplos de 3; o como múltiplos de 3, más 1, sólo nos resta analizar este último caso y el problema queda resuelto.

Ya vimos el ejemplo para N =13:



N =13

Colocando triminós como en los casos anteriores, conseguimos polígonos incaicos formados por 16, 19, 22, 25, ... fichas



N =13+3k

Observemos que 13 es 12 + 1; es decir, un múltiplo de 3, más 1. Entonces todos los números de la forma 13 + 3k , con k entero no negativo, son múltiplos de 3 mayores que 11 a los que se les ha sumado 1.

En resumen:

Observemos que cualquier número entero $N \geq 11$ necesariamente es un número de uno de los siguientes conjuntos:

$$\{11, 14, 17, \dots\} = \{N \in Z \ / \ N = 3p - 1,\ p \in Z, \quad p \geq 4\}$$
$$\{12, 15, 18, \dots\} = \{N \in Z \ / \ N = 3p,\ p \in Z, \quad p \geq 4\}$$
$$\{13, 16, 19, \dots\} = \{N \in Z \ / \ N = 3p + 1,\ p \in Z, \quad p \geq 4\}$$

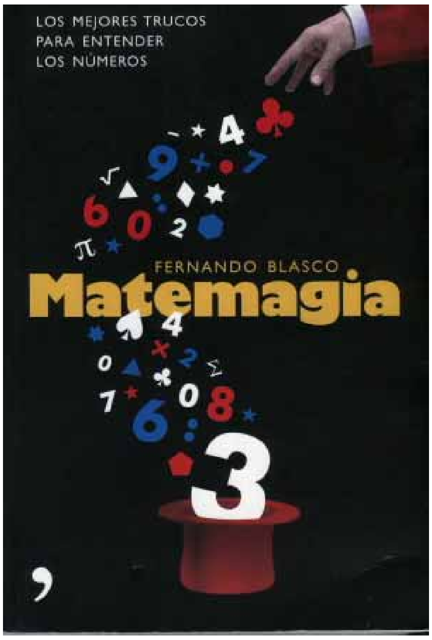
Como para cada uno de estos tres conjuntos hemos mostrado cómo se puede construir un polígono incaico, queda demostrado que para cada entero $N \geq 11$ se puede formar un polígono incaico con *N* fichas.

El lector queda invitado a pensar en problemas a partir de la situación presentada; por ejemplo considerando áreas de los polígonos incaicos o construcciones de estos con palitos de fósforos.

UNIÓN
REVISTA IBEROAMERICANA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA

Libros

Diciembre de 2007, Número 12, páginas 151-155
ISSN: 1815-0640




## Matemagia. Los mejores trucos para entender los números

**Autor:** Fernando Blasco

**Edita**: Ediciones Temas de Hoy, SA (TH)

**Año:** 2007

**278 páginas**

**ISBN:** 978-84-8460-611-6

El gran interés de esta obra tiene dos fundamentos, de un lado parte de la idea de que independientemente de nuestro gusto por la matemática, ésta aparece, aunque de forma oculta, en multitud de conceptos y objetos que utilizamos todos los días. Relojes, ordenadores, antenas parabólicas, descodificadores, reproductores mp3 y teléfonos móviles utilizan algoritmos matemáticos en su funcionamiento. Incluso los códigos de barras que ahora aparecen por todas partes están diseñados matemáticamente. Por otra parte se pueden acercar conceptos matemáticos a través de los juegos de magia. Explica de forma clara qué matemática hay en los objetos enunciados. Es una forma “mágica” de mostrar que las matemáticas son útiles y que en el mundo tecnológico que nos movemos es fundamental afianzar los conocimientos matemáticos.

Describe de un modo sencillo y ameno, por magia, por ilusionismo, alguna de las matemáticas que aparecen en nuestra vida cotidiana. La primera página de cada capitulo contiene un juego de magia que se desvela al final del mismo.

El libro contiene once capítulos numerados del cero al diez y en cada uno de ellos subraya la importancia y significado del número al que hace referencia.

Constata que a los estudiantes no les gusta conocer la prueba de los resultados matemáticos, suelen decir que ellos se lo creen, sin embargo, quieren saber en qué se basan las proezas mágicas. Seguro que como elemento didáctico, la matemagia es interesante, puesto que permite preguntar el por qué de algunos resultados.

El autor pretende acercar al lector a esas dos maravillosas disciplinas, una artística y otra científica por medio del asombro y el entretenimiento, desvelando algunos secretos que pueden servir para atraer al lector a que profundice bien en la matemática o bien en la magia, si no en ambas.

### Capítulo 1. Pitágoras: todo es número

Nos propone un juego para repasar las sumas y lo que es mas importante nos presenta una de las ideas fundamentales en matemáticas, la idea de generalización.

Expone los sistemas de numeración como base matemática de juegos así como la importancia de utilizar una notación posicional de las cifras para escribir los números.

Hace un comentario interesante sobre “magia, ciencia y religión” ya que Pitágoras es contemporáneo de Confucio, Buda y Lao-Tse. La magia y la ciencia aparecen unidas en Heron de Alejandría y además lo hacen a favor de la religión.

Con los mismos conceptos expone un juego con las cartas e incluso con la ruleta y las apuestas. También hay juegos con los números cíclicos.

### Capítulo 2: Pares o nones

Inicia el capitulo con un juego de magia que consiste en adivinar un número del uno al quince mediante la suma de números que encabezan cuatro listas en las que aparezca el número pensado.

Comenta el sistema binario y como esta presente en casi todos los utensilios tecnológicos que utilizamos o que podemos utilizar: las comunicaciones por teléfono móvil son comunicaciones digitales, la TV por satélite son sistemas digitales en las que el sistema binario es fundamental. Ahora la música y la fotografía son también digitales.

Resalta la importancia de la paridad con un juego sencillo de monedas. Explica un divertido juego con cartas en el que a fuerza de un número de movimientos pares o impares se conoce en qué carta se sitúa el jugador.

Se detiene en la teoría de grafos en la que la paridad juega un papel muy importante: grafos para dibujar de un solo trazo. Los puentes de Königsberg. Hay un juego interesante de magia con tarjetas de adivinación (con números del 1 al 60) basado en la descomposición de los números como suma de potencias de dos. Por último expone como la idea de tarjetas perforadas para el ordenador pueden utilizarse en un juego de magia.

## Capitulo 3: Papel, geometría, tijeras y magia

El triangulo es el protagonista de este capitulo. Tenemos una demostración china del teorema de Pitágoras y otra cortando papel. Hay construcciones geométricas para juegos de magia, cortando y reordenando triángulos y trapecios aparece o desaparece una unidad de área. Hay juegos geométricos también de Paul Curry y todos ellos se basan en la misma idea: en algún momento hay algo que damos por supuesto que no es correcto, para explicar el juego del aumento y disminución del área se hace referencia al teorema de Thales. Permite trabajar además conceptos de concavidad y convexidad. También es posible llegar al enunciado del teorema de Pitágoras calculando el área del trapecio.

Termina este capitulo haciéndonos ver que cada vez que doblamos un papel y cortamos, el corte resultante es simétrico respecto del eje que representa el pliegue del papel e incluso construye la estrella de 5 puntas: el pentagrama místico.

## Capitulo 4: Picas, corazones, tréboles y diamantes

Matemáticas, cartas y juego. Numerosos principios que pueden aplicarse a la magia hecha con cartas, desde juegos probabilísticas hasta juegos deterministas. La teoría sobre mezclas en las cartas puede ayudar para presentar muchos conceptos matemáticos, invariantes, importancia del orden, números cíclicos, base tanto para sistemas numéricos, espacios vectoriales, espacios topológicos, etc.

Hay un juego de 21 cartas que permite introducir la idea matemática de proceso iterativo y también permite hablar del teorema del punto fijo. Lo que hacemos se basa en la misma idea que utilizamos al resolver una ecuación por medio de un proceso iterativo.

## Capitulo 5: Bajo la influencia de la sección áurea

Aparecen los números irracionales, valores aproximados de la razón áurea, la sucesión de Fibonacci, concepto de sucesión, límite de una sucesión, rectángulos de Fibonacci y espiral logarítmica.

En este capitulo tenemos también cuadrados mágicos, 3x3, 4x4 e incluso 5x5, indicando una forma muy sencilla de construir estos últimos y cualquier otra dimensión impar.

También hay un juego en el que interviene la sucesión de Fibonacci junto con los cuadrados mágicos con un fuerte impacto que esconde muchos conceptos matemáticos.

## Capitulo 6: Trileros y probabilidad

Nos permite hablar de permutaciones, números combinatorios, propiedades interesantes del triángulo de Tartaglia, etc., describe un primer triler en el que Marco Aurel, en el libro donde aparece descrito este juego, utiliza ecuaciones algebraicas para la explicación, aunque dado que el número de casos posibles a analizar es pequeño, se puede hacer un análisis sencillo de los casos.

## Capitulo 7: La medida del tiempo

La baraja de cartas tiene similitud con el calendario, el número de estaciones del año coincide con el de palos de la baraja y el número de cartas 52 es igual al de semanas que tiene un año…además hay doce figuras, que pueden ser relacionadas con los doce meses.

La disposición de los calendarios en filas y columnas ofrece muchas posibilidades mágicas y nos pueden ayudar en claridad en la exposición de matrices.

Hay un juego de adivinación del día de la semana, otro de semanas y sumas, incluso uno de horóscopos. En todos los casos se trabaja también la aritmética modular.

## Capitulo 8: Atando cabos

Con los nudos construimos ángulos rectos. Usamos los nudos como “curvas cerradas simples en el espacio tridimensional” Kart Reidemeister descubrió que todas las diferentes transformaciones que pueden hacerse sobre los nudos tiene su origen en tres únicos movimientos. Todos los juegos en los que intervienen cuerdas son juegos que, de algún modo, involucran conocimientos geométricos y topológicos. Describe nudos utilizando una sola mano, colección de nudos (enlaces), movimientos para la clasificación de nudos, nudos falsos,…

## Capitulo 9: Dígitos de control

Aparece la prueba del nueve, triángulos numéricos, y otro juego con cartas que se basan en la aritmética modulo 9 y en el triángulo de Tartaglia. Estos juegos permiten volver a incidir en la idea de recurrencia y si estiramos este concepto, se puede hablar del método de inducción matemática.

Da una explicación práctica de los códigos de barras y del NIF. Propone un juego con 9 cartas y el juego del 9, con 24 monedas.

## Capitulo 10: El círculo se cierra

Algunos problemas clásicos, tratando la circunferencia, la cuadratura del circulo, la duplicación del cubo, trisección del ángulo con regla y compás están en este último capitulo.

Aquí se encuentran también juegos tan amenos como: el problema de Josefa, separación en dos grupos y otro que nos explica como una persona puede pasar por una carta.

Al final del libro detalla algunos de los textos a los que hace referencia y da lecturas recomendadas tanto para la magia matemática, para la historia de la matemática, para la historia de la magia así como para la magia general.

En resumen, el libro aporta buenas ideas y diversos materiales que seguro ayudaran al profesor a cambiar la actitud de los alumnos hacia las matemáticas. Puede utilizarse muy bien en Bachillerato, en los cursos de la ESO e incluso en algunos cursos de la etapa anterior seguro que algunos trucos de magia despertaran el interés de los estudiantes en cualquier nivel académico. El conocimiento de esta obra puede ser útil también para muchos alumnos que no gustándoles las matemáticas tengan curiosidad por ordenadores, reproductores mp3, teléfonos móviles o/y especialmente que les motive el arte de ilusionar

**Reseña: Mariana Cuesta**
**I.E.S. Geneto (La Laguna)**
**Tenerife, España**

UNIÓN
REVISTA IBEROAMERICANA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA

Diciembre de 2007, Número 12, páginas 157-170
ISSN: 1815-0640

Coordinado por
Agustín Carrillo de Albornoz

# La calculadora gráfica como recurso didáctico en la enseñanza de las matemáticas: resolución de sistemas de ecuaciones lineales

***Elena Díaz Domínguez***

## Resumen

La introducción en el aula de las Tecnologías de la Información y Comunicación, TIC, permite la creación de un entorno interactivo de enseñanza-aprendizaje que fomenta, entre otras, el pensamiento lógico-matemático, la motivación y el autoaprendizaje de los alumnos.
En este artículo se presenta el uso de la calculadora gráfica como herramienta para la resolución de los sistemas de ecuaciones lineales que se estudian en la Educación Secundaria Post-obligatoria.

## Introducción

La utilización de la calculadora gráfica en el aula de matemáticas resulta interesante por varios motivos, entre otros:

- Es muy útil en actividades de ampliación tales como situaciones más complicadas y que requieran la aplicación de métodos aproximados.
- Los alumnos la pueden usar de manera autónoma como herramienta auto-correctora y de comprobación para la revisión de los ejercicios que han realizado.
- Permite dedicar más tiempo a trabajar aspectos interpretativos al simplificar los cálculos.

Su uso didáctico se organiza a través de actividades de aprendizaje diseñadas por el profesor. De este modo, los alumnos aprenden con la calculadora y de la calculadora los contenidos escolares (conceptos, hechos, principios, procedimientos, estrategias, etc.), alcanzando así la consecución de los objetivos del currículo correspondiente a las distintas unidades didácticas.

A continuación se exponen una serie de actividades que se pueden realizar con ayuda de la calculadora gráfica ClassPad 300 para el desarrollo de los contenidos correspondientes a la unidad didáctica “Resolución de sistemas de ecuaciones lineales” de la asignatura Matemáticas II que se imparte actualmente en el 2º curso de Bachillerato (16-17 años) de la modalidad de Ciencias de la Naturaleza y de la Salud / Tecnología, del sistema educativo español.

## Resolución de sistemas lineales con la calculadora

En el currículo de Bachillerato se contempla la discusión y resolución de sistemas de ecuaciones lineales de dos o tres incógnitas pudiendo éstos depender de un parámetro. La discusión de dichos sistemas se realiza utilizando el criterio de compatibilidad que proporciona el teorema de Rouché-Fröbenius, mientras que su resolución se puede llevar a cabo mediante los métodos de Gauss, de Gauss-Jordan, la regla de Cramer y la matriz inversa.

Las siguientes actividades muestran todas las posibilidades que se pueden presentar en un sistema lineal de tres incógnitas. En algunas de ellas se indica la resolución por todos los métodos.

ACTIVIDAD 1: Resolución de un sistema incompatible:

$$\begin{cases} x + 2y + z = 1 \\ 2x + y + 2z = 2 \\ 3x + 3y + 3z = 4 \end{cases}$$

Creamos la matriz del sistema y el vector de los términos independientes. Combinándolos mediante la función augment obtenemos la matriz ampliada:

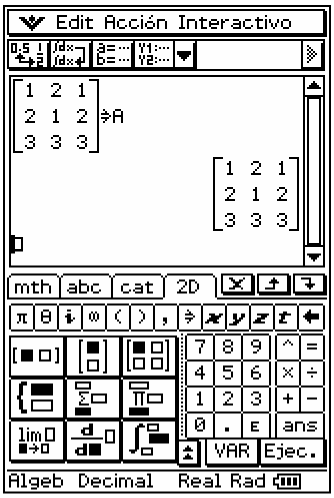


Fig. 1

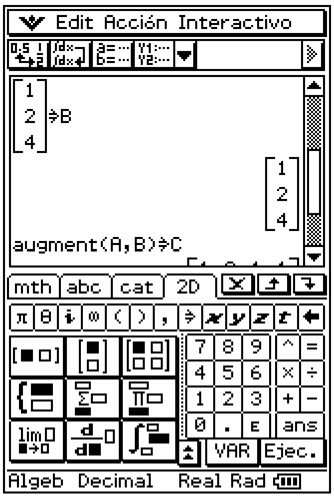


Fig. 2

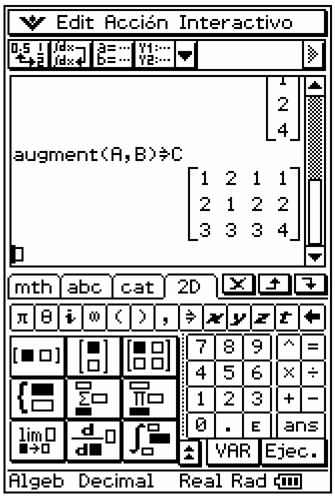


Fig. 3

Hallamos los rangos de ambas para estudiar la compatibilidad del sistema según el criterio que proporciona el teorema de Rouché-Fröbenius. Dos formas:

La primera sería calculando el determinante de la matriz de los coeficientes y el determinante de los menores de orden 3 de la matriz ampliada (función det). Obtenemos dichos menores mediante la función submat combinada con las funciones trn –trasponer- y swap –intercambiar dos filas de una matriz.

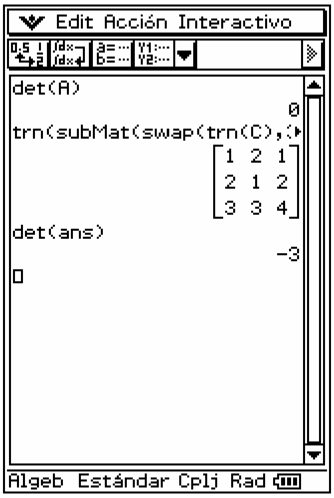



Fig. 4

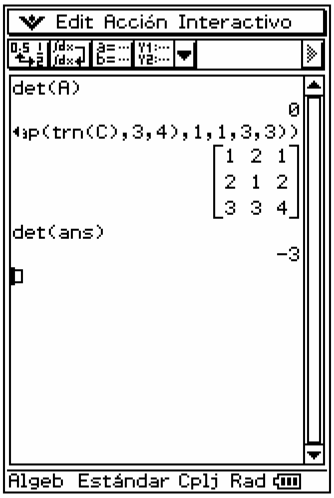



Fig. 5

La segunda mediante la forma escalonada de ambas matrices que se obtiene al usar la función ref.

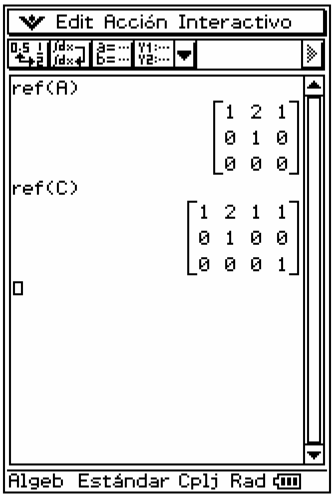



Fig. 6

Puesto que el rango de la matriz de los coeficientes es 2 (su determinante es nulo y al hallar la forma escalonada de la matriz obtenemos una fila de ceros, lo que significa que ésta es linealmente dependiente de las otras dos) mientras que el de la matriz ampliada es 3 (al menos un menor de orden 3 tiene determinante distinto de cero), deducimos que el sistema es incompatible.

Si quisiéramos que los alumnos trabajasen el método de Gauss o el de Gauss-Jordan para la obtención de la forma triangular de la matriz, también lo podríamos hacer a través de las opciones que ofrece la calculadora (mrow multiplica los elementos de una fila de una matriz por una expresión y con mrowadd sumamos ese resultado a otra fila):

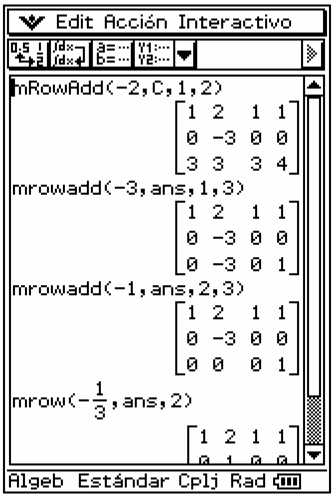


Fig. 7

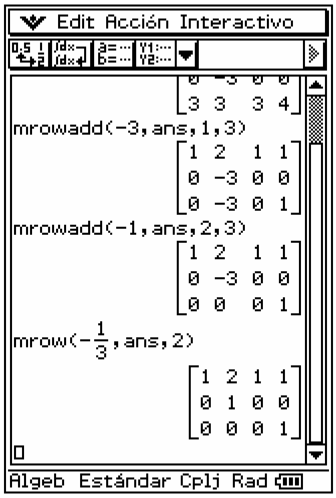


Fig. 8

ACTIVIDAD 2: Resolución de un sistema compatible determinado:

$$\begin{cases} 2x + y - z = 5 \\ x - y + 2z = -3 \\ 3x - 2y + z = -2 \end{cases}$$

Formamos la matriz del sistema y la ampliada:

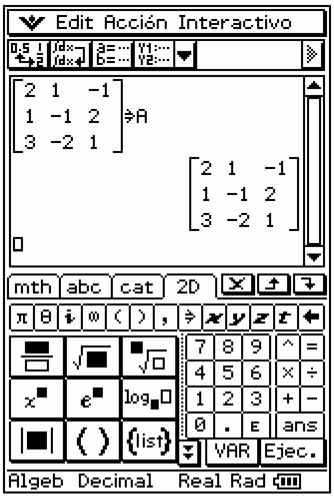


Fig. 9

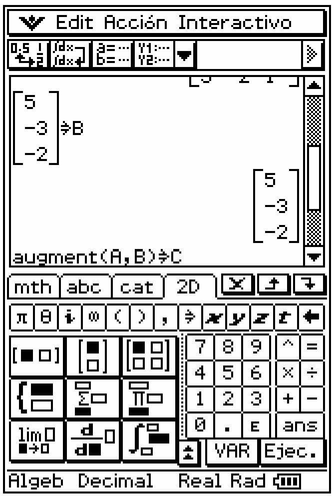


Fig. 10

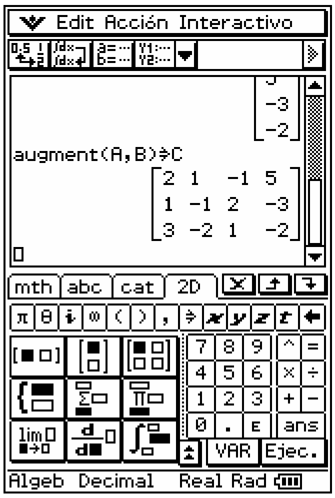


Fig. 11

Determinamos la compatibilidad/incompatibilidad del sistema mediante los rangos de la matriz de los coeficientes y de la ampliada:

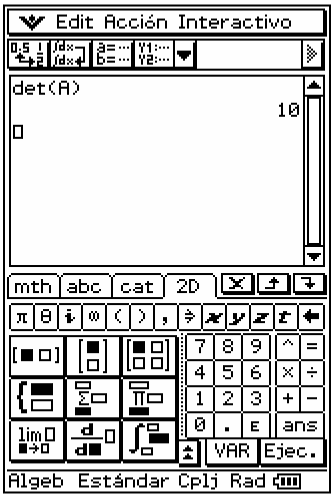



Fig. 12

Puesto que el determinante de la matriz de los coeficientes es no nulo, significa que tanto su rango como el de la matriz ampliada es 3, que es el número de incógnitas, luego por el teorema de Rouché-Fröbenius el sistema es compatible determinado, esto es, tiene solución única.

Resolvemos por todos los métodos:

- Método de Gauss: podemos hallar el sistema equivalente triangular superior mediante la función ref aplicada a la matriz ampliada, por lo que por sustitución regresiva obtenemos la solución:

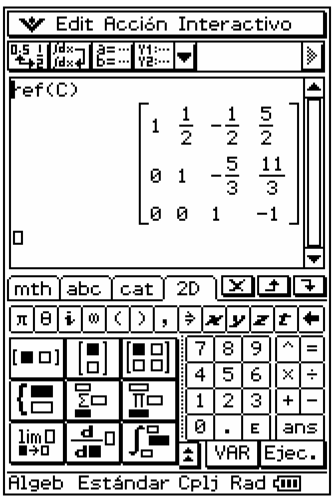



Fig. 13

$$z = -\mathbf{1}$$

$$y = \frac{\mathbf{11}}{\mathbf{3}} + \frac{\mathbf{5}}{\mathbf{3}} z = \frac{\mathbf{11}}{\mathbf{3}} - \frac{\mathbf{5}}{\mathbf{3}} = \frac{\mathbf{6}}{\mathbf{3}} = \mathbf{2}$$

$$x = \frac{\mathbf{5}}{\mathbf{2}} + \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}} z - \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}} y = \frac{\mathbf{5}}{\mathbf{2}} - \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}} - \frac{\mathbf{2}}{\mathbf{2}} = \mathbf{1}$$

Fig. 14

- Método de Gauss-Jordan: con la orden rref aplicada a la matriz ampliada se obtiene el sistema reducido de Gauss-Jordan, por lo que por sustitución directa se halla la solución:

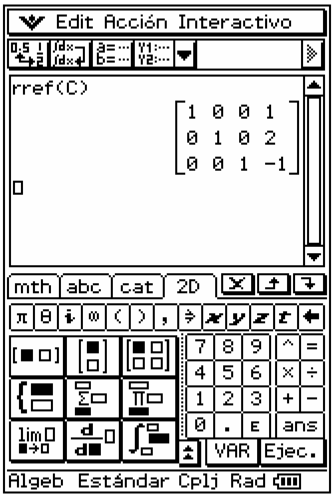



Fig. 15

$$z = -1, y = 2, x = 1$$

- Resolución por la matriz inversa: $AX = B \Leftrightarrow X = A^{-1}B$

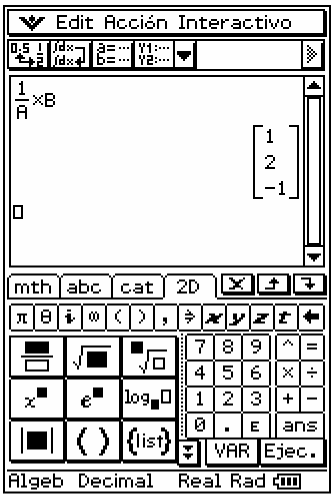



Fig. 16

- Regla de Cramer: lo primero es verificar que el sistema es de Cramer, esto es, mismo número de ecuaciones que de incógnitas y determinante de la matriz del sistema no nulo (ya lo hemos comprobado al hallar el rango). Una vez verificado, hallamos las soluciones de Cramer:

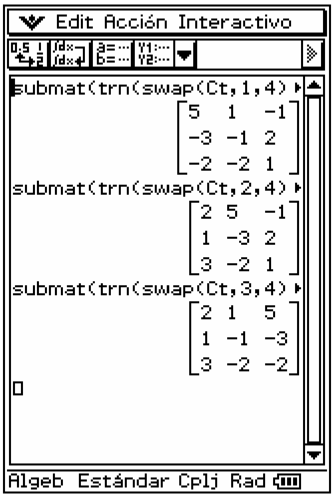



Fig. 17

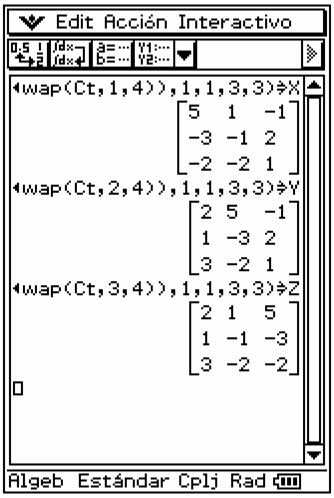



Fig. 18

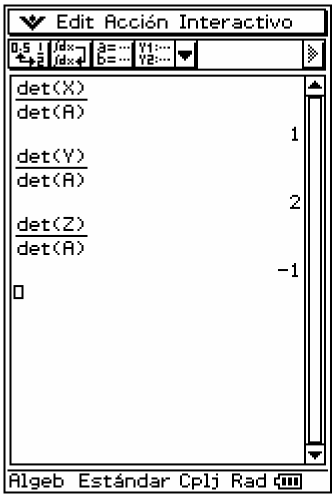



Fig. 19

ACTIVIDAD 3: Resolución de un sistema compatible indeterminado:

$$\begin{cases} 2x - y + z = 4 \\ x - y + 2z = 6 \\ 4x - 3y + 5z = 16 \end{cases}$$

Formamos la matriz de los coeficientes y la ampliada y hallamos sus respectivos rangos:

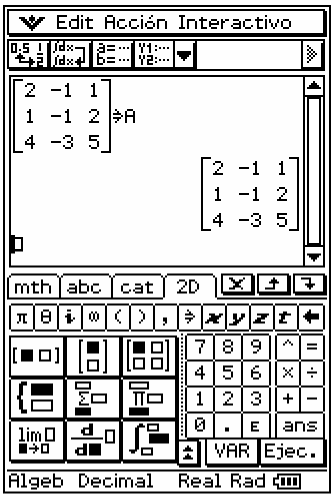



Fig. 20

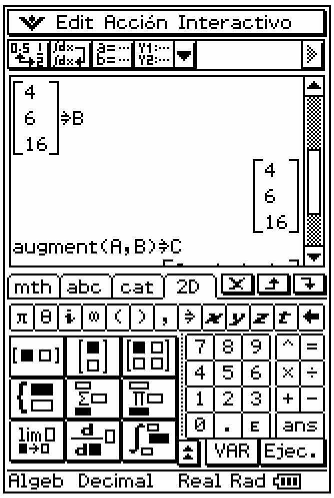



Fig. 21

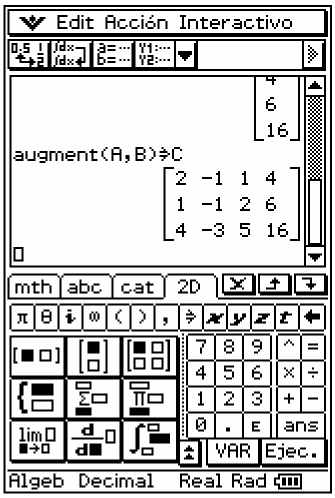



Fig. 22

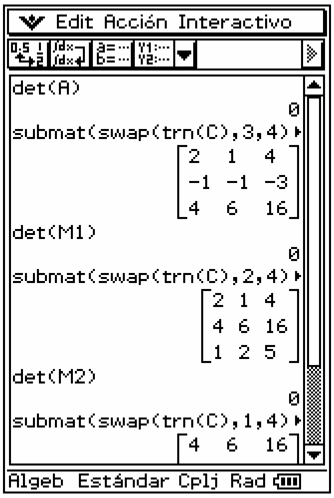



Fig. 23

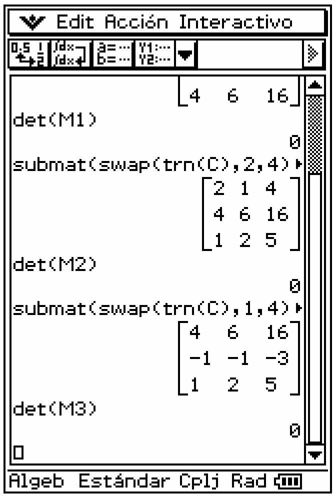



Fig. 24

Tanto el determinante de la matriz de los coeficientes como el de los menores de orden 3 de la ampliada son nulos, lo que significa que ambos rangos son menores que 3. Los hallamos con la función rref.

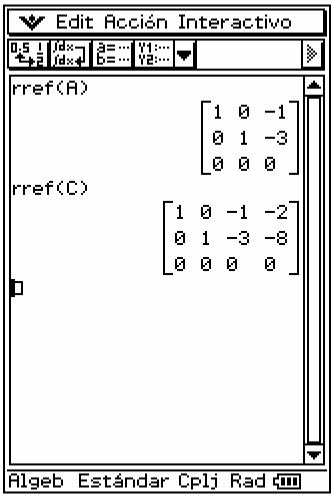



Fig. 25

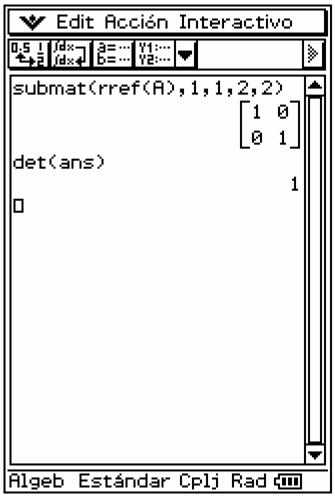



Fig. 26

Observamos que los rangos son iguales a 2 pero el número de incógnitas es 3, luego por el teorema de Rouché-Fröbenius el sistema es compatible indeterminado. Fijándonos en un menor no nulo de orden 2 (el formado por la submatriz 1,1,2,2) podemos resolver el sistema (para ello pasamos la variable z al término independiente convirtiéndola así en un parámetro). Así pues, por sustitución directa al aplicar el método de Gauss-Jordan, obtenemos las infinitas soluciones:

$$\begin{cases} x = -2 - z \\ y = -8 - 3z \\ z \in \Re \end{cases}$$

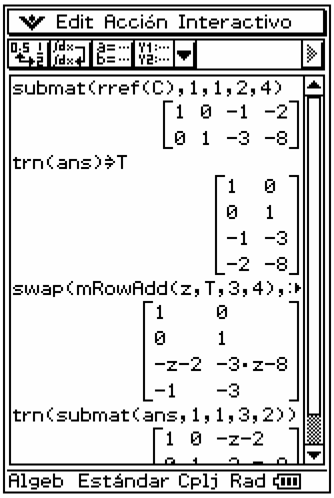



Fig. 27

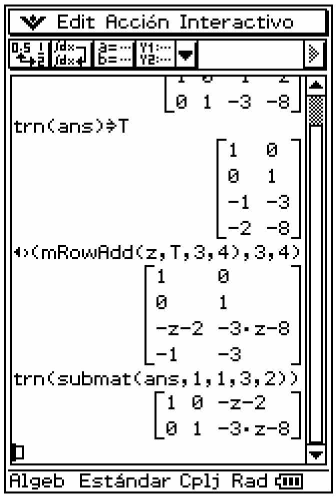



Fig. 28

ACTIVIDAD 4: Estudio de la compatibilidad del siguiente conjunto de sistemas dependientes del parámetro a:

$$\begin{cases} x+ay-z=1 \\ 2x+y-az=2 \\ x-y-z=a-1 \end{cases}$$

Formamos la matriz del sistema y la ampliada y con la función solve determinamos los valores del parámetro para los cuales el determinante de la matriz del sistema se anula:

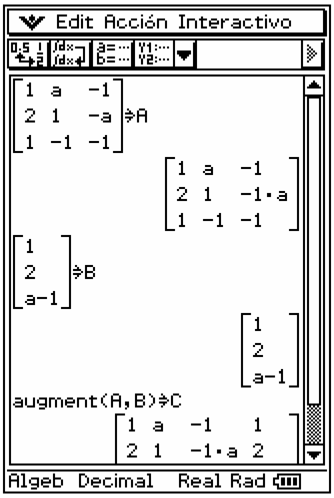



Fig. 29

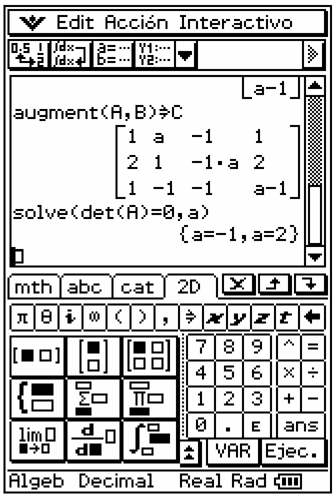



Fig. 30

Discusión:

- ✓ Si $a=-1$, el sistema es incompatible puesto que el rango de la matriz de los coeficientes es 2 (-1 es un valor de los que anulan el determinante) mientras que el de la ampliada es 3 (lo vemos al usar su forma escalonada reducida por filas que proporciona la función rref) Fig. 31:

✓ Si $a = 2$ , sistema compatible indeterminado (ambos rangos son 2) Fig. 32:

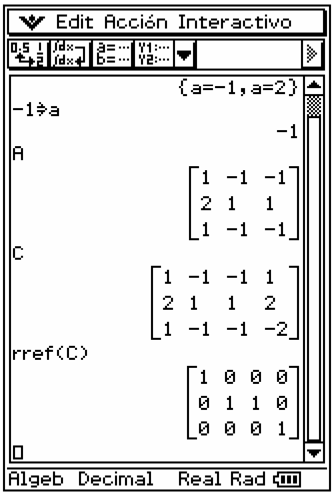


Fig. 31

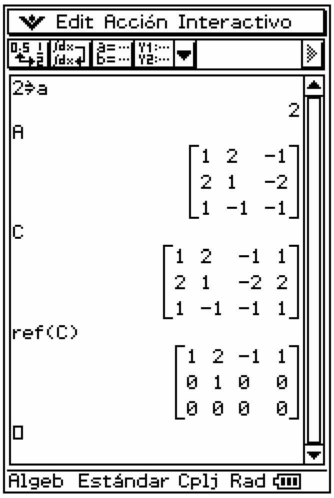


Fig. 32

Resolviendo por Gauss (y sustitución regresiva):

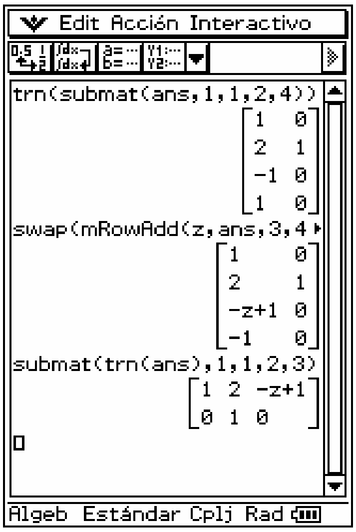


Fig. 33

$$y = 0$$
$$x = 1 - z - 2y = 1 - z$$
$$z \in \Re$$

✓ Si $a \neq -1,\ 2$, el sistema es compatible (pues el determinante de la matriz de los coeficientes es no nulo y, por tanto, el de la ampliada también). Podemos resolverlo por el método de Gauss-Jordan o bien con la función solve:

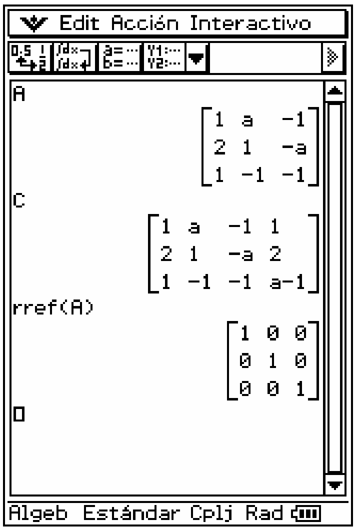



Fig. 34

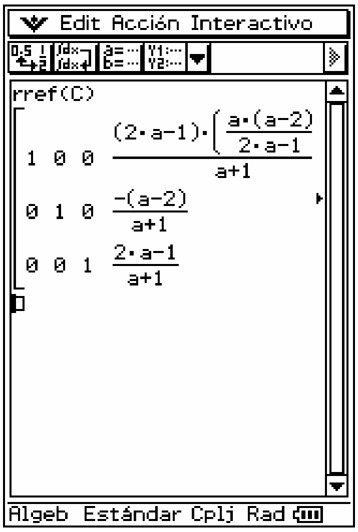



Fig. 35

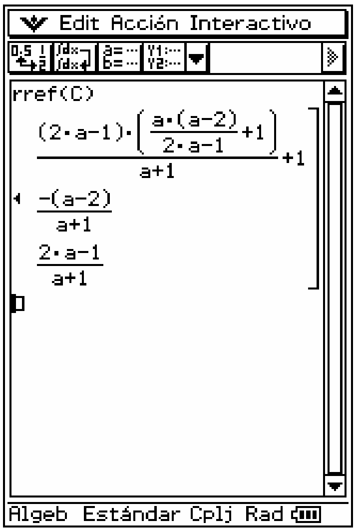



Fig. 36

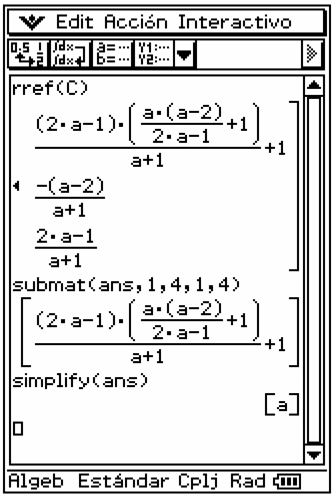



Fig. 37

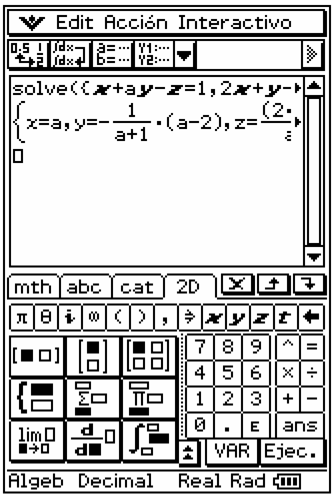



Fig. 38

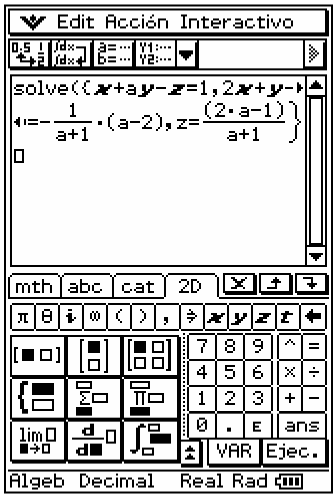



Fig. 39

ACTIVIDAD 5: Discusión y resolución del sistema dependiente de un parámetro:

$$\begin{cases} -3x + ky - 5z = -4 \\ 2x + ky - 5z = -4 \\ x + y + z = 2 \end{cases}$$

Matriz de los coeficientes y ampliada y determinante de la primera:

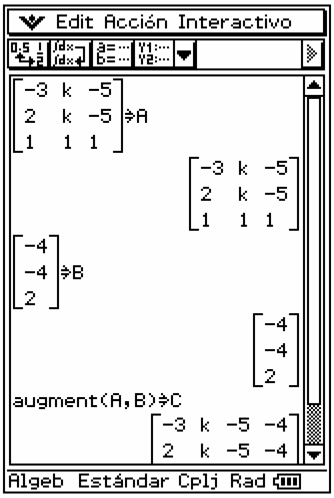



Fig. 40

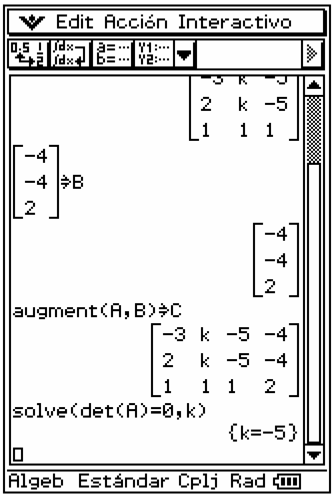



Fig. 41

Discusión:

i) Si $k \neq -5$, $r\begin{pmatrix} -3 & k & -5 \\ 2 & k & -5 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = r\begin{pmatrix} -3 & k & -5 & -4 \\ 2 & k & -5 & -4 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} = 3$

y por tanto, el sistema es compatible determinado:

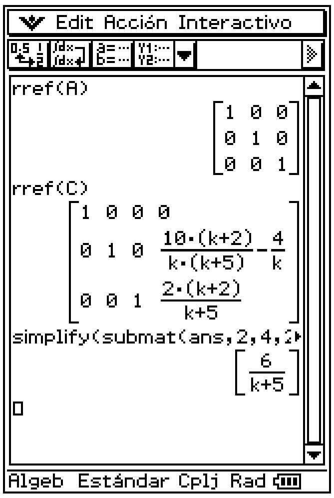



Fig. 42

Al haber calculado los rangos a través de Gauss-Jordan tenemos directamente la solución. Podríamos también calcularla por Cramer:

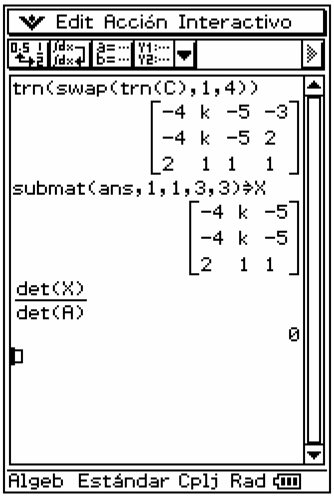



Fig. 43

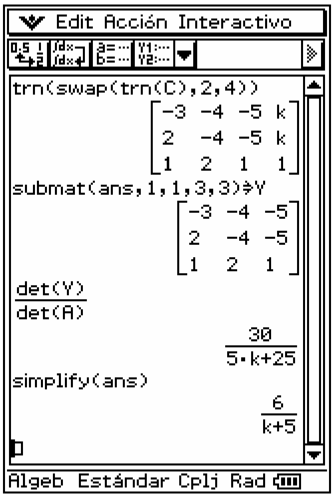



Fig. 44

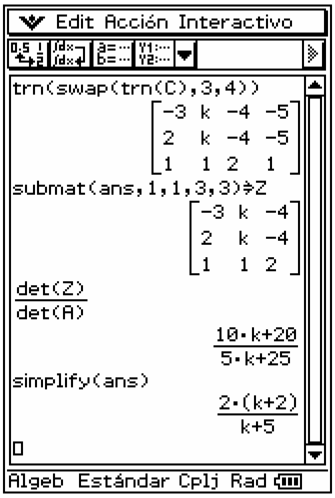



Fig. 45

$$x=\frac{\begin{vmatrix}-4 & k & -5\\ -4 & k & -5\\ 2 & 1 & 1\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}-3 & k & -5\\ 2 & k & -5\\ 1 & 1 & 1\end{vmatrix}}=\frac{0}{-5(k+5)}=0 \qquad y=\frac{\begin{vmatrix}-3 & -4 & -5\\ 2 & -4 & -5\\ 1 & 2 & 1\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}-3 & k & -5\\ 2 & k & -5\\ 1 & 1 & 1\end{vmatrix}}=\frac{-30}{-5(k+5)}=\frac{6}{(k+5)} \qquad z=\frac{\begin{vmatrix}-3 & k & -4\\ 2 & k & -4\\ 1 & 1 & 2\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}-3 & k & -5\\ 2 & k & -5\\ 1 & 1 & 1\end{vmatrix}}=\frac{-10(k+2)}{-5(k+5)}=\frac{2(k+2)}{(k+5)}$$

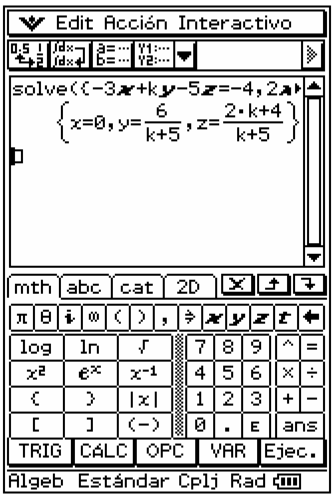



Fig. 46

ii) Si $k=-5,\ r\begin{pmatrix}-3 & -5 & -5\\ 2 & -5 & -5\\ 1 & 1 & 1\end{pmatrix}=2\neq 3=r\begin{pmatrix}-3 & -5 & -5 & -4\\ 2 & -5 & -5 & -4\\ 1 & 1 & 1 & 2\end{pmatrix}$

y por tanto, el sistema es incompatible:

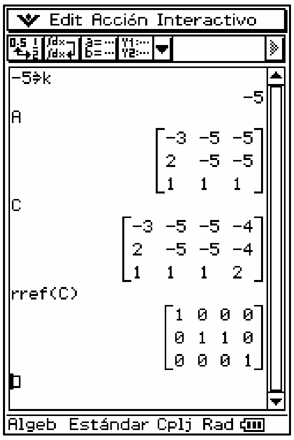


Fig. 47

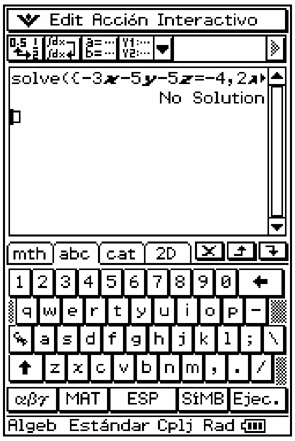


Fig. 48

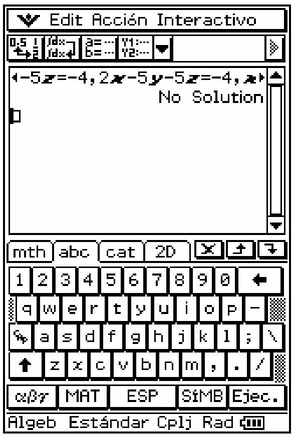


Fig. 49

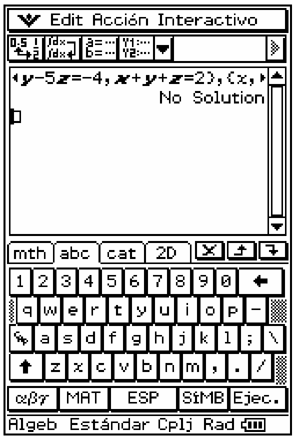


Fig. 50

## Bibliografía

- J.R. Vizmanos, M. Anzola (2005): “Algoritmo matemáticas II”. SM Bachillerato, Madrid, España.
- Material del curso de formación a distancia Thales-CICA 2007 “La calculadora CLASSPAD 300 como recurso didáctico en el área de matemáticas”.

**Elena Díaz Domínguez** es Licenciada en Matemáticas y Máster en Ingeniería Matemática por la Universidad Complutense de Madrid. Ha trabajado en el campo de la Investigación de Mercado y en la actualidad es técnico en bioestadística de la Fundación para la Investigación Sanitaria en Castilla-La Mancha (FISCAM). Interesada en la enseñanza de las Matemáticas obtuvo el Certificado de Aptitud Pedagógica de la Universidad Complutense y ha realizado varios cursos de formación de la Sociedad Andaluza de Educación Matemática Thales.

Diciembre de 2007, Número 12, páginas 171 - 174
ISSN: 1815-0640

DOS UNIÓN 10
La sección de unión para los estudiantes más jóvenes.

Por Santiago López Arca

# SÓLIDOS PLATÓNICOS

Los *poliedros* son los cuerpos con múltiples caras poligonales (del griego: *polys*, múltiples, y *hedra*, cara). Debemos aclarar que, para que todo "funcione bien matemáticamente", cuando se habla de un poliedro no se debe pensar en un *sólido* sino en una ***superficie poliédrica***.

Los ***poliedros regulares*** son aquellos en los que sus caras son *polígonos regulares* iguales y, además, en cada vértice concurren siempre el mismo número de caras.

Un poliedro es ***convexo*** cuando todo segmento que una dos de sus vértices esté formado sólo por puntos que pertenezcan a la superficie poliédrica o al espacio "interior" que ésta limita.

En la siguiente tabla se resumen algunas propiedades de los poliedros regulares convexos. En las diferentes fórmulas que se mencionan, se representa con ***a*** la medida de la arista del poliedro que se esté considerando

| POLIEDRO | HEXAEDRO REGULAR | TETRAEDRO REGULAR | DODECAEDRO REGULAR | ICOSAEDRO REGULAR | OCTAEDRO REGULAR |
|---|---|---|---|---|---|
| CARAS | 6 cuadrados | 4 triángulos equiláteros | 12 pentágonos regulares | 20 triángulos equiláteros | 8 triángulos equiláteros |
| VÉRTICES | 8 | 4 | 20 | 12 | 6 |
| ARISTAS | 12 | 6 | 30 | 30 | 12 |
| ARISTAS POR VÉRTICE | 3 | 3 | 3 | 5 | 4 |
| SENO DEL ÁNGULO ENTRE CARAS | 1 | $\frac{2}{3}\sqrt{2}$ | $\frac{2}{5}\sqrt{5}$ | $\frac{2}{3}$ | $\frac{2}{3}\sqrt{2}$ |
| ÁREA | $6a^2$ | $\sqrt{3}\,a^2$ | $3\sqrt{25+10\sqrt{5}}\,a^2$ | $5\sqrt{3}\,a^2$ | $2\sqrt{3}\,a^2$ |
| VOLUMEN | $a^3$ | $\frac{\sqrt{2}}{12}a^3$ | $\frac{15+7\sqrt{5}}{4}a^3$ | $\frac{5\sqrt{3}+\sqrt{5}}{12}a^3$ | $\frac{\sqrt{2}}{3}a^3$ |
| RADIO DE LA ESFERA CIRCUNSCRITA | $\frac{\sqrt{3}}{2}a$ | $\frac{\sqrt{6}}{4}a$ | $\frac{\sqrt{15}+\sqrt{3}}{4}a$ | $\frac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{4}a$ | $\frac{\sqrt{2}}{2}a$ |
| RADIO DE LA ESFERA INSCRITA | $\frac{1}{2}a$ | $\frac{\sqrt{6}}{12}a$ | $\frac{\sqrt{250+110\sqrt{5}}}{20}a$ | $\frac{\sqrt{42+18\sqrt{5}}}{12}a$ | $\frac{\sqrt{6}}{6}a$ |

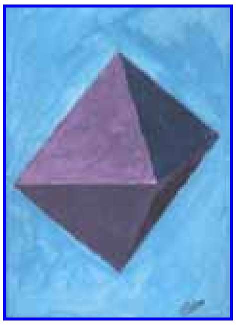
Platón
(427 a.C.– 347 a.C.)

Hay autores que sostienen que fueron los *pitagóricos* los que primero observaron que solamente existen ***cinco*** poliedros regulares convexos; ese es el motivo por el que denominan a los poliedros regulares como sólidos “pitagóricos”. Constatar que existen exactamente cinco poliedros regulares es relativamente sencillo, ¿puedes hacer un razonamiento que sirva de comprobación?

Los *poliedros regulares* se denominan también ***sólidos platónicos***. ¿Cuál es la razón para adoptar esta denominación?

**Platón** (filósofo griego discípulo de Sócrates) asoció cada uno de los cuatro *elementos* que, según los antiguos griegos, constituían el universo, Tierra, fuego, aire y agua, con su correspondiente poliedro regular: cubo, tetraedro, octaedro e icosaedro, respectivamente.






Platón aseguraba que las caras que componen estos cuatro poliedros regulares están constituidas por dos tipos de “partículas elementales” que se corresponden con dos familias de triángulos rectángulos: la de los triángulos rectángulos isósceles, la escuadra, que se obtienen cortando un cuadrado por su diagonal; y la de los triángulos rectángulos escalenos con hipotenusa de doble medida que la del cateto menor, cartabón, que se obtiene cortando un triángulo equilátero siguiendo una de sus alturas.

Las características que presenta a simple vista cada poliedro llevan a Platón a hacer su interpretación:

La *Tierra* es el *cubo* ya que él tiene la forma más sólida y, por tanto, la mas segura y la que presenta más cohesión. El cubo está formado por veinticuatro triángulos elementales isósceles que determinan seis caras cuadradas.

El *tetraedro* representa el *fuego* pues es el poliedro regular con el aspecto más afilado, ligero y movible. Se forma con veinticuatro triángulos elementales escalenos que generan cuatro caras triangulares equiláteras.

El *octaedro* es la representación del *aire* porque, siendo afilado ligero y móvil, tiene una naturaleza intermedia entre el fuego y agua. El octaedro se compone de cuarenta y ocho triángulos elementales escalenos.

El agua se asocia al *icosaedro* pues es el cuerpo menos afilado, ligero y móvil entre los que tienen las caras triangulares. Está formado por ciento veinte triángulos elementales escalenos que producen sus veinte caras.

El poliedro regular de doce caras pentagonales, el *dodecaedro regular*, lo utiliza Platón para designar el *Universo* en su totalidad; la sustancia generadora de los planetas y las estrellas. De él dice: *"Dios lo ha utilizado para establecer el orden final"*.

L. A. F.

## ALREDEDOR DE LOS NÚMEROS PRIMOS

Cuando hablamos de números ***primos*** estamos pensando en aquellos números que tienen únicamente dos divisores: el propio número y la unidad. Por el contrario, los números que se pueden descomponer cómo producto de otros factores, son los que llamamos ***números compuestos***. Así, por ejemplo, el 13 es un número primo porque el único producto de dos factores que nos permite expresarlo es 13x1; mientras que 12 no es primo pues podemos obtenerlo, como producto de dos factores, de varias formas: 12x1, 6x2 o 3x4.

***Eratóstenes de Cirene*** (Cirene, 276 a.C. – Alejandría, 194 a.C.) matemático, astrónomo, geógrafo, filósofo y poeta griego, escribió los números naturales en una tabla (como en la figura A) y procedió de la siguiente manera: fue tachando los múltiplos de 2 (exceptuando el 2); después borró los múltiplos de 3 (salvo el 3); los múltiplos de cuatro ya habían sido eliminados al borrar los múltiplos de 2, pues todo múltiplo de cuatro es un múltiplo de 2; luego quitó los múltiplos de 5 (salvando el 5); los múltiplos de 6 ya se habían eliminado por ser simultáneamente múltiplos de 2 y 3; y así sucesivamente… Este procedimiento se conoce con el nombre de ***criba de Eratóstenes*** y el resultado de su aplicación se muestra en la figura B.


Este matemático dio conclusión a otros importantes trabajos: midió la inclinación del eje de la Tierra, fijó un catálogo de 675 estrellas, determinó la medida de la circunferencia máxima de la Tierra con una extraordinaria precisión para su tiempo, etc.

Volvamos con los números primos. Si os fijáis en la cuarta columna de la figura A, observaréis la sucesión:

4, 8, 12, 16, 20, 24...

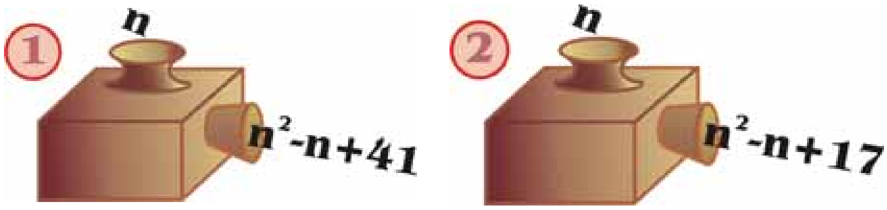
formada por los múltiplos de 4 y, por lo tanto, su término general será $a_n = 4n$ (es una progresión aritmética de primer término 4 y diferencia 4).

Los números primos (ver figura B) quedaron situados en las columnas primera y tercera, formando parte de las sucesiones:

5, 9, 13, 17, 21, 25, 29, ... ,4n+1, ... y 3, 7, 11, 15, 19, 23, 27, ... , 4n-1, ...

por lo que podemos afirmar que ***"todo número primo es un múltiplo de cuatro más 1 o un múltiplo de cuatro menos 1"***. Pero además, en esas familias hay otros muchos elementos que no son números primos: por ejemplo, 33 = 4x8+1 es un número compuesto.


Los números primos pertenecientes a la primera familia, 5, 13, 17, 29, 37, 41..., ***se pueden poner cómo suma de dos cuadrados*** (*Teorema de Fermat*): 5 = 1+4, 13 = 4+9, 17 = 1+16, 29 = 4+25... propiedad que no verifican los primos pertenecientes a la segunda familia (trata de constatar estas afirmaciones).





Existen muchas curiosidades que tienen que ver con números primos. Fíjate en la colección de números que mostramos al margen o en las dos máquinas que sirven para "fabricar" números primos. La primera produce primos para valores de *n* comprendidos entre 1 y 41 y la segunda para valores de n comprendidos entre 1 y 16, ¡compruébalo!

Brenda Rodríguez Seoane

## PENSAR ES DIVERTIDO

### ¿Supersticioso?

Alrededor de una mesa, unos amigos participan en un juego. ¿Cuál? ¡Esa no es la cuestión! Lo que sabemos es que uno de ellos gana y que recibe de cada uno de los otros tantas fichas como participantes. El ganador recibe de este modo 156 fichas. ¿Cuántos son los jugadores?

### Modelo reducido

Un cilindro macizo de madera tiene 3 metros de altura y pesa 60 kg. Hicimos un modelo reducido de 30 cm de alto, fabricado con la misma madera, respetando las proporciones. ¿Cuál es el peso de este modelo reducido?

### Dos palomas se amaban tensamente

Una pareja de palomas volaba apaciblemente en línea recta a una velocidad de 10 km/h. De pronto, una de ellas ávida probablemente de aventuras, se pone a volar, siempre sobre la misma línea recta, a una velocidad de 20 km/h. Después de recorrer 80 km decide dar media vuelta y volver, a la misma velocidad de 20 km/h, al encuentro de su compañera que había seguido su vuelo a la velocidad de 10 km/h. ¿Cuánto tiempo transcurrió hasta que volvieron a encontrarse?

***XV Rally Matemático sin Fronteras 2007.***

UNIÓN
REVISTA IBEROAMERICANA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA

Diciembre de 2007, Número 12, páginas 175-177
ISSN: 1815-0640

# Convocatorias y eventos

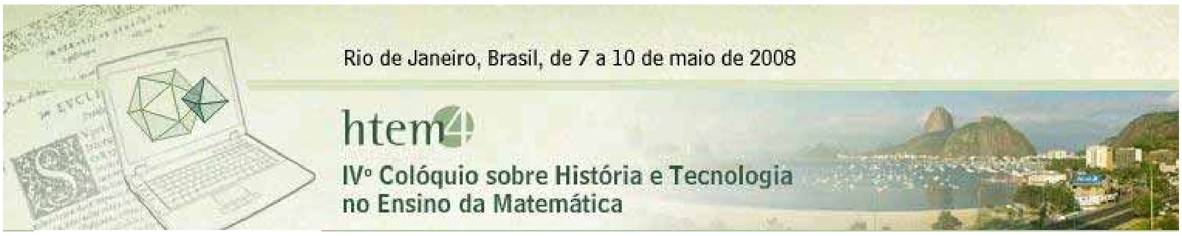
## AÑO 2008


**Séptimo Congreso Nacional de Matemática Educativa en Panamá (CONAMEP-7)**
Universidad de Panamá, Panamá
**Fecha**: 18 al 22 de Febrero, 2008
http://www.up.ac.pa/ftp/f_ciencias/congreso/CONAMEP.htm

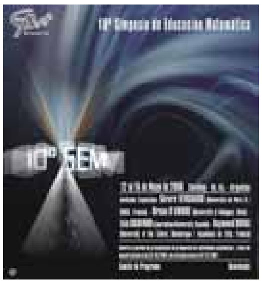
---

**Symposium on the Occasion of the 100th Anniversary of ICMI**
Roma, Italia
**Fecha**: 5 al 8 de Marzo, 2008
http://www.unige.ch/math/EnsMath/Rome2008/

---




**IV Colóquio de História e Tecnologia no Ensino de Matemática**
Universidad Federal de Río de Janeiro, Brasil
**Fecha**: 7 al 10 de Mayo, 2008
http://www.limc.ufrj.br/htem/



**10º Simposio de Educación Matemática**
Chivilcoy, Argentina
Universidad Nacional de Luján
**Fecha**: 12 al 15 de Mayo, 2008
www.edumat.org.ar

**VII Conferencia Argentina de Educación Matemática (VII CAREM)**

Ciudad de Santa Fe, Argentina
Sociedad Argentina de Educación Matemática
Departamento de Matemática de la Facultad de Humanidades y Ciencias Universidad Nacional del Litoral
**Fecha**: 15 al 17de Mayo, 2008
http://www.soarem.org.ar/CAREM/base_3/carem.htm


**Joint ICMI /IASE Study Statistics Education in School Mathematics**
Monterrey, México
Instituto Tecnológico y de Estudios Superiores
**Fecha**: 30 de Junio al 4 de Julio, 2008
http://www.stat.auckland.ac.nz/~iase/


**ICME, the International Congress on Mathematical Education**
Monterrey, México
**Fecha**: 6 al 13 de Julio 6, 2008
http://icme11.org/

**HPM 2008**

**Historia y Pedagogía de las Matemáticas**
**The HPM Reunión Satélite del ICME**

**14 al 18 de Julio de 2008, Ciudad de México, MÉXICO**
**Primer Anuncio**

**Historia y Pedagogía de las Matemáticas**
HPM Reunión Satélite del ICME
Ciudad de México, MÉXICO
**Fecha:** 14 al 18 de Julio de 2008,
http://www.red-cimates.org.mx/HPM2008.htm


**IV Congreso Iberoamericano de Cabri (IBEROCABRI-2008)**
Ciudad de Córdoba, Argentina
Universidad Nacional de Córdoba y Cabrilog
**Fecha**: 23 al 26 de Septiembre, 2008
http://www.iberocabri.org/

UNIÓN
REVISTA IBEROAMERICANA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA
Diciembre de 2007, Número 12, página 179
ISSN: 1815-0640

# Información

SOCIEDAD ARGENTINA SOAREM DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA

## CURSOS A DISTANCIA POR INTERNET

Destinados a docentes de matemática y estudiantes de carreras docentes

### ENSEÑAR GEOMETRIA CON SU HISTORIA

Irene Zapico – Silvia Tajeyan
Fecha de inicio: 14 de abril de 2008
Costo: AR $160 Extranjeros: US$ 80

### GEOMETRIA DESDE DISTINTAS PERSPECTIVAS

Fecha de inicio: 20 de mayo de 2007
Costo: AR $160 Extranjeros: US$ 80

### MATEMÁTICA EN LA LITERATURA

Irene Zapico – Silvia Tajeyan
Fecha de inicio: 29 de mayo de 2008
Costo: AR $160 Extranjeros: US$ 80

Cualquier información pueden encontrarla en www.soarem.org.ar
o escribirnos a cursosoarem@gmail.com

Descuento de 10% a los socios de SOAREM que tengan pago el año 2007 o paguen por VISA mensualmente.
Los socios nuevos deberán abonar todo el año 2008 para obtener este descuento.
Los cursantes extranjeros que sean socios de Sociedades de Matemática de su país de origen abonan U$ 70. Con constancia emitida por la Sociedad.

**ATENCIÓN**: La ficha de inscripción se debe enviar desde veinte días previos al inicio del curso (no antes) con el comprobante de pago escaneado o los datos del mismo: Sucursal bancaria, fecha de depósito, importe.

UNIÓN
REVISTA IBEROAMERICANA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA

Diciembre de 2007, Número 12, página 181
ISSN: 1815-0640

# Normas para publicación en Unión

1. Los trabajos para publicar se deben enviar a union.fisem@sinewton.org. Deben ser originales y no estar en proceso de publicación en ninguna otra revista. Serán remitidos a varios evaluadores y el Comité editorial de la Revista decidirá finalmente sobre su publicación.
2. Los artículos remitidos para publicación deben ser escritos en Word, preferentemente usando la plantilla establecida al efecto (descargar plantilla) y, en todo caso, cumpliendo las siguientes normas: letra tipo **arial**, tamaño **12 puntos**, interlineado simple, márgenes de 2,5 cm. como mínimo en los 4 bordes del papel, tamaño DIN A-4. La extensión no debe ser superior a las 15 páginas, incluyendo figuras, que deben estar situadas en el lugar del texto donde deben ser publicadas. La simbología matemática necesaria se escribirá con el editor de ecuaciones de Word, se insertará como una imagen o se realizarán utilizando los símbolos disponibles en el juego de caracteres "Arial". Es importante no cambiar el juego de caracteres, especialmente **evitar el uso del tipo "Symbol"** u otros similares.
3. Las **ilustraciones y fotografías** deben estar situadas en el lugar del texto donde deben ser publicadas. Si es posible, los "pie de foto" se escribirán dentro de un "cuadro de texto" de Word (con o sin bordes) que estará "agrupado" con la imagen de referencia. Se deben numerar usando: Fig. 1, Fig. 2,… Tabla 1, Tabla 2,…
4. El artículo deberá comenzar con un **resumen o abstract**, que tendrá una longitud máxima de 6 líneas. Preferiblemente se redactará también en inglés, además de la lengua original utilizada (español o portugués).
5. Teniendo en cuenta el carácter internacional de la revista, se hace indispensable que cuando los autores se refieran a un determinado sistema educativo nacional lo hagan constar expresamente y que siempre que se trate de un nivel educativo se indique la edad normal de los alumnos, lo que permitirá la comparación con el sistema educativo nacional del lector.
6. Los datos de identificación de los autores deben figurar en la última página del mismo documento word que contiene el artículo. Con el fin de garantizar el anonimato en el proceso de evaluación, solamente estarán los **datos identificativos en** esta **última página**. En ella se hará constar los siguientes datos:
   - **De contacto**: nombre, dirección electrónica, dirección postal, teléfono.
   - **Para la publicación**: centro de trabajo, lugar de residencia y/o del centro de trabajo, así como una breve reseña biográfica de unas cinco líneas (lugar y fecha de nacimiento, títulos, centro de trabajo, publicaciones...).
7. Las referencias bibliográficas se incluirán al final del trabajo (y antes de la hoja de datos identificativos) y deben seguir los formatos que se indican a continuación.

**Para un libro:**

Bourbaki, N. (1972). *Elementos de historia de las matemáticas.* Alianza, Madrid.

Bermejo, A. (1998). *La enseñanza de la geometría en la educación primaria.* Editorial Pico Alto, Buenos Aires.

**Para un artículo:**

Ibáñez, M. y Ortega, T. (1997). "La demostración en matemáticas. Clasificación y ejemplos en el marco de la educación secundaria". *Educación Matemática* 9, 65-104.

Díaz, C. y Fernández, E. (2002). "Actividades con ordenador para la enseñanza de la suma". *Revista de didáctica de las matemáticas* 19, 77-87.

**Para un capítulo de libro:**

Albert, D. y Thomas, M. (1991). "Research on mathematical proof". En: Tall, D. (ed.), *Advanced Mathematical Thinking,* 215-230*.* Kluwer, Dordrecht.

Hernández, G., Juárez, I. y Lorenzo, K. (1998). "Recopilación de datos estadísticos y su tratamiento en la enseñanza secundaria". En: Nuez, M. y Pérez, O. (eds.), *Segundo Congreso Americano de Educación Matemática,* 223-234. Editorial JJ, Caracas.

**NOTA:** Las normas que se indican en los puntos 2, 3 y 7 pretenden dar uniformidad a los trabajos que se reciban en la redacción y simplificar así el trabajo de composición y maquetación de la revista. Si alguien tiene dudas sobre su aplicación, puede dirigir sus preguntas (lo más concretas posible) a union.fisem@sinewton.org