UNIÓN

REVISTA IBEROAMERICANA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA

Número 13

Marzo de 2008

Índice

UNIÓN
REVISTA IBEROAMERICANA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA

Marzo de 2008, Número 13, página 2
ISSN: 1815-0640

Unión. Revista Iberoamericana de Educación Matemática es una publicación de la Federación Iberoamericana de Sociedades de Educación Matemática **(FISEM)**. Tiene una periodicidad trimestral, de modo que se publican cuatro números al año, en los meses de marzo, junio, septiembre y diciembre.

UNIÓN
REVISTA IBEROAMERICANA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA

Marzo de 2008, Número 13, página 3
ISSN: 1815-0640

firma invitada

Alejandro Ortiz Fernández

Breve reseña

Alejandro Ortiz Fernández nació el 10 de enero de 1936 en Trujillo, Perú.

Estudios Superiores:
- Universidad Nacional de Trujillo.
  Bachiller en Matemática; Profesor de Matemática de Secundaria.
- Universidad de Brasilia, Brasil.
  Mestre en Matemática.
- Universidad de Chicago, USA.
  Master of Science; estudios de Doctorado.
- Universidad de San Marcos. Lima.
  Doctor en Matemática.

Post-Graduación:
- Universidad de Buenos Aires (Argentina),
- CIMPA, Niza (Francia),
- Universidad Autónoma de Madrid.

Ex profesor de la Universidad Nacional de Trujillo; ex profesor de la Universidad de San Marcos.

Actual profesor principal en la Pontificia Universidad Católica del Perú en donde dicta cursos sobre ecuaciones en derivadas parciales, análisis funcional, historia de la matemática y cursos básicos.
Áreas de interés: Cultiva el análisis armónico, la teoría de Ondiculas y la Historia de la Matemática.
Publicaciones: 22 libros de distintos niveles y áreas siendo los últimos tres libros: “Historia de la Matemática”. Vol.1; “Enseñanza-Aprendizaje de la Matemática” y “Alberto P. Calderón. Análisis Armónico” (2007). Diversos artículos.
Como pasatiempo se dedica a la música clásica y del recuerdo habiendo grabado, de oído, al menos 20 cintas. Ha escrito también algunas obras sobre literatura libre.
jortiz@pucp.edu.pe

Marzo de 2008, Número 13, páginas 5-18
ISSN: 1815-0640

Matemática en los antiguos Egipto y Babilonia

***Alejandro Ortiz Fernández*[1]**

Resumen

En este escrito discutimos dos problemas surgidos en la matemática egipcia y dos de la babilónica. Damos algunas reflexiones didácticas; buscamos rescatar el valor de la Historia de la Matemática como un recurso de enseñanza - aprendizaje de la matemática.

Abstract

In this work we discuss two problems from mathematics of ancient Egypt and two from ancient Babylonian. We give some didactic reflections; we want to rescue the value of history of mathematics as a way to teaching and learning mathematics.

1.- Motivación

La Historia de la Matemática está siendo rescatada como un recurso pedagógico para aprender matemática, en los diversos niveles y edades, para motivar un interés y alegría por el estudio de nuestra ciencia, tan distorsionada en su enseñanza-aprendizaje. Nuestra experiencia nos enseña como gozábamos cuando nuestros maestros nos contaban algunas reseñas históricas del tema que enseñaban así como cuando nos narraban sobre la vida de algún matemático; en nuestra fantasía juvenil veíamos transcurrir el tiempo para llegar a antiguas culturas que nos deleitaban con sus conquistas conseguidas. Estas ilusiones, que parecieran ingenuas, creo son importantes para desarrollar la imaginación e intuición, tan necesarias en el aprendizaje de la matemática.

Además, tales reseñas históricas ayudan mucho a comprender las raíces de muchas ideas que movieron al conocimiento matemático, desde épocas remotas hasta nuestros tiempos creemos. En un promedio de cuatro mil años de evolución muchas cosas han pasado, muchos notables hombres han dejado huellas de sus ideas, sus contribuciones; aún en la Antigüedad, entre dos mil y mil años antes de Cristo (A.C.) el hombre estaba en condiciones de hacer algunas reflexiones y deducciones matemáticas, cuantitativas y espaciales; este gran paso mental daba al

[1] jortiz@pucp.edu.pe

hombre el carácter de un ser pensante y de estar en otra dimensión dentro del universo en que vivía. Siempre existió una intima relación entre los retos que el hombre recibía de la naturaleza con la respuesta que ofrecía para resolver los problemas concretos. Esta relación es una constante, lo que varia es el nivel y la complejidad del problema; aún en nuestra época el hombre tiene muchas cuestiones por resolver, y esto es un estimulo para la ciencia en general y para la matemática en particular.

La evolución intrínseca del cerebro humano fue un feliz proceso en pro del conocimiento del mundo físico; aquellos seres que vivieron en las primeras culturas ya gozaban de las abstracciones conseguidas, que en la relatividad del tiempo eran inmensas conquistas; el hombre tuvo que aprender a ser humilde ante la complejidad de la naturaleza; esto fue una condición esencial para lograr el progreso científico-tecnológico al que hemos llegado. Una adecuada información a nuestros jóvenes estudiantes sobre la evolución del pensamiento matemático podría ser mas útil que algunas disciplinas irrelevantes que nos enseñan y nos abruman; lamentablemente, en nuestra opinión, en general los profesores carecemos de una cultura matemática que, en cada etapa educativa, nos permita realizar este tipo de didáctica matemática; muchas veces somos demasiados "fríos" y no motivamos al auditorio; el tener un gran conocimiento de lo que se enseña es lo correcto y lo deseado! pero no es suficiente como lo certifican muchos educadores reconocidos.

Por los argumentos dados, en este escrito trataremos algunos problemas surgidos en la Antigüedad, que los trataremos con la luz actual pero con el sentimiento de entonces. En esta oportunidad nos limitamos a la **matemática egipcia** y a la **babilónica**.

2.- Antecedentes Históricos

El hombre errante buscó las planicies a orillas de un gran río para hacerse sedentario y desarrollar un conjunto de actividades manuales que con el correr de los siglos fueron dando origen a diferentes culturas en diferentes partes del mundo de entonces, entre las cuales tenemos las surgidas en Egipto, en Babilonia, en China y en la India; así, alrededor de 5.000 años atrás en estas culturas ya existían ciertas manifestaciones matemáticas básicas, según consta en documentos históricos que se han encontrado.

La Matemática en Egipto

La civilización egipcia comienza en el año 3100 A.C. y termina con la conquista de Alejandro el Magno en el 332 A.C. Por razones geográficas los egipcios tuvieron un desarrollo relativamente tranquilo; fueron gobernados por sucesivas dinastías de faraones quienes pensaban que la matemática tenía un origen divino y por tanto fue cultivada por los sacerdotes, quienes además conservaban el conocimiento en general. Herodoto decía que la geometría surgió en Egipto a causa de los continuos desbordes del río Nilo lo que motivó el surgimiento de ciertos instrumentos de medición y de ciertas reglas prácticas para calcular áreas de terrenos; surgió un sistema de longitud. Las grandes Pirámides son un testimonio histórico del valor de la aplicación de la matemática; aún cuando la geometría egipcia era práctica y utilitaria, esta aplicación mereció la admiración universal.

Conocemos a la matemática egipcia (al menos hasta ahora) gracias a dos documentos encontrados en el siglo XIX, el **Papiro de Moscú** (1850 A.C.) y el **Papiro de Rhind** (1650 A.C.), los cuales contienen una valiosa información de la matemática de entonces; el Papiro de Moscú contiene 25 problemas y el de Rhind 84. La matemática egipcia se reduce a la aritmética y a la geometría; practicaron también algunas observaciones astronómicas; esta civilización ocupa un lugar importante en la evolución de la matemática.

La Matemática en Babilonia

Esta legendaria cultura se desarrolló entre los ríos Tigris y Eufrates; por cultura Babilónica entendemos un conjunto de pueblos que vivían en la Mesopotamia; ella se inicia alrededor del 3.000 A.C. y termina durante los primeros años del cristianismo. Por razones geográficas, los babilonios cultivaron la astronomía; se encontraron placas matemáticas que se ubican en los años 2300-1600 A.C. las que contienen unas listas de cuadrados y cubos. Se aprecia también el uso del sistema decimal como el sexagesimal como apreciamos en las descomposiciones:

$$\mathbf{1{,}4} = \mathbf{60} + \mathbf{4} = \mathbf{8}^{2}, \qquad \mathbf{1{,}21} = \mathbf{60} + \mathbf{21} = \mathbf{9}^{2}$$
$$\mathbf{1{,}8{,}16} = \mathbf{3600} + \mathbf{480} + \mathbf{16} = \mathbf{4096} = \mathbf{16}^{3}.$$

Los babilonios usaron unos símbolos especiales para representar a los números naturales. Desarrollaron una técnica para calcular $\sqrt{b}$; para el caso $\sqrt{\mathbf{2}}$ la sucesión aproximadamente para este valor es (a_n) donde

$$a_{n+1} = \frac{1}{2}\left(a_n + \frac{2}{a_n}\right), \quad n = 1,2,3,\ldots, \quad \text{con} \quad a_1 = 1,$$

lo que produce el valor 1.414222. Por otro lado, en una tablilla se encuentra la igualdad

$$\sqrt{2} = 1 + \frac{24}{60} + \frac{51}{60^2} + \frac{10}{60^3} = 1.41423.$$

Ese algoritmo no es nada trivial (mas aún para esa época); además, ciertos problemas los condujeron a ecuaciones cuadráticas y cúbicas, ¿cómo las resolvieron? Aún mas, tuvieron un algoritmo que le permitían construir triples pitagóricos. 300 años A.C. conocían:

$$\begin{cases} 1+2+2^2+\cdots+2^9=2^9+2^9-1, \\ 1^2+2^2+3^2+\cdots+10^2=\left[1\left(\frac{1}{3}\right)+10\left(\frac{2}{3}\right)\right]55=385. \end{cases}$$

La geometría babilónica está relacionada con medidas prácticas que ellos practicaban cotidianamente; tuvieron buen conocimiento de fórmulas para calcular áreas y volúmenes; posiblemente conocieron la fórmula para calcular el área de un triángulo arbitrario. Los babilonios sabían que la longitud de la circunferencia de un círculo era tres veces la longitud del diámetro, que los lados correspondientes de los triángulos rectángulos semejantes son proporcionales, que el ángulo inscrito en un semicírculo es un ángulo recto, entre otros resultados. La geometría se caracteriza por su carácter algebraico. La información de la matemática babilónica se ha obtenido vía el descubrimiento de tablillas (matemáticas), siendo la tablilla de Plimpton 322 una de las más importantes.

3.- Problemas

En esta sección presentamos algunas cuestiones que aparecen en la matemática egipcia y en la babilónica las que si bien aún no tenían el rango de "teorías matemáticas" (lo que si fue logrado por los griegos) debemos remarcar que alcanzaron un gran progreso como lo confirman algunos de los logros por ellos alcanzados; algunos de sus algoritmos no son triviales; no olvidemos que estamos muchos siglos antes de Cristo.

1. **(Egipto).** Pruebe que de todos los triángulos que tienen un par de lados dados, el mayor es aquel en que esos lados son perpendiculares.

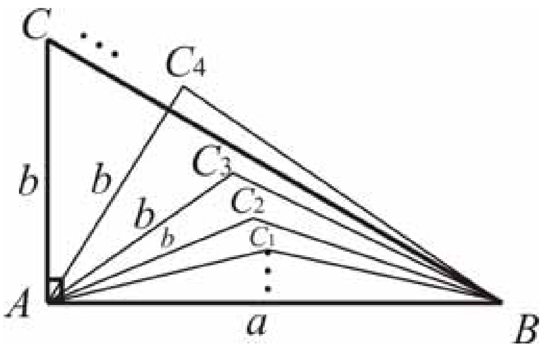
   Solución.

   "mayor" significa "mayor área".

   ¿Qué hacemos?, ¿cómo resolverían el problema los egipcios? El profesor motiva a sus alumnos en busca de alguna estrategia la que podría ser visual, en base a gráficos. La tesis debe quedar bien clara: probar que el triángulo con área máxima es el que tiene por catetos a los lados dados.

   Luego de algunas tentativas (el profesor felicita ¡**todas ellas**!) posiblemente se llegue a la simple idea: llamemos a y b a los dos lados comunes en todos tales triángulos.

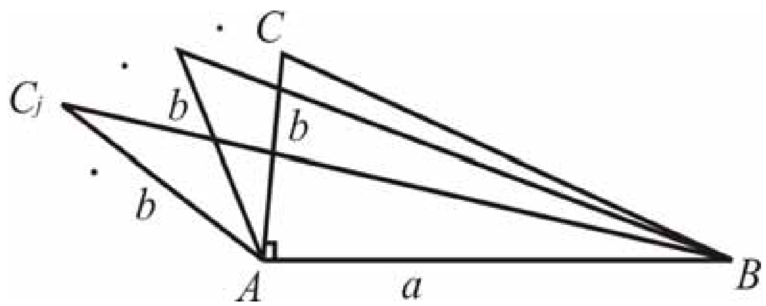
   Según la figura, consideremos los triángulos $\cdots ABC_1, \quad ABC_2, \quad ABC_3, \cdots$ ¿qué observamos? … que los interiores de algunos triángulos ABC_i están contenidos en el interior del triángulo ABC y por



tanto tenemos el "sentimiento" de que sus áreas son menores que el área del triángulo ABC, que es rectángulo en A. Pero también existen triángulos ABC_i cuyos interiores no están contenidos en el interior del triángulo ABC; ahora, una "buena observación" nos diría que la parte no común en el $\Delta\, ABC$ es "mayor" que la parte no común en esos $\Delta\, ABC_i$'s.

Hasta este momento estamos llegando a la conclusión: el $\Delta\, ABC$ es el que tiene mayor área en las condiciones dadas. Pero, mas de un alumno puede preguntar, ¿cómo es la situación si los vértices C_i's (que están sobre la circunferencia de radio b y centro A, estamos asumiendo $b < a$) están a la izquierda de C?

Hagamos la figura correspondiente.



¿Qué observamos? … Cuando los C_j están muy cerca de C nos es difícil decir que la parte no común del $\Delta\, ABC$ es mayor que aquella correspondiente del $\Delta\, ABC_j$. Pero, conforme C_j se aleja de *C* pareciera mas "evidente" que la parte no común del $\Delta\, ABC$ es mayor que aquella del $\Delta\, ABC_j$, y por tanto concluiríamos nuevamente que el área máxima se alcanza cuando AB es perpendicular a AC, que es la tesis. Pero, … hemos jugado solo con nuestra intuición y observación (lo que es bueno!) y esto podría tener sus peligros en casos muy exigentes; si el alumno no conociera trigonometría (¿los egipcios la conocieron?) esta forma de concluir podría ser suficiente y el profesor debe sentirse satisfecho de esas virtudes de sus alumnos.

Veamos ahora la solución del problema de un modo más **analítico**. Los antiguos egipcios en la construcción de las Pirámides cuidaron que todas las caras formaran un ángulo de 52º con la horizontal y de alguna manera usaban la función cotangente; no tenemos información si ellos conocieron a las funciones seno, coseno y tangente, y aún mas, la fórmula del área del triángulo en función del seno; posiblemente conocieron los rudimentos de la trigonometría.

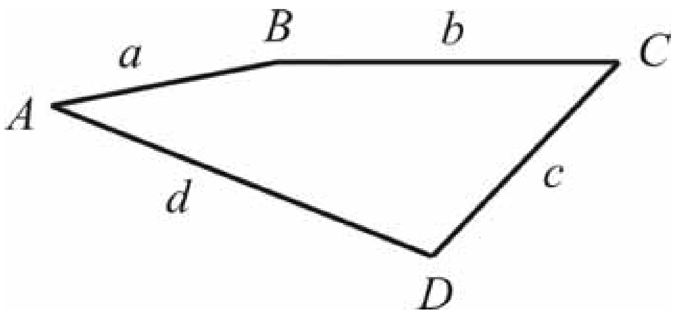
La fórmula mencionada es: área del $\Delta = \frac{1}{2} ab sen A$

Ahora la solución es relativamente rápida ya que $0 \leq sen A \leq 1$ por la naturaleza del problema; aún mas $sen A > 0$ (para que exista triángulo). Desde que a y b son dados, el área del triángulo depende del valor de $sen A$ que toma su **máximo valor** cuando A vale 90º, es decir, cuando los lados AB y AC son perpendiculares.

Observación. ¿Existirá un triángulo de área **mínima**?

Observemos que cuando los vértices C_i se acercan más y más al lado AB o a su prolongación, las áreas de los triángulos se hacen tan pequeñas como se quiera. Así surge, en este ejemplo geométrico, la **idea de límite**. Por tanto la respuesta es: no existe un triángulo de área mínima. En el límite el triángulo se convierte en un segmento de recta y este “triángulo degenerado” tendría “área cero”. ∎

2. **(Egipto).** Sea el cuadrilátero $ABCD$ cuyos lados tienen longitud a, b, c y d según el grafico dado



Si K es el área del cuadrilátero, pruebe que

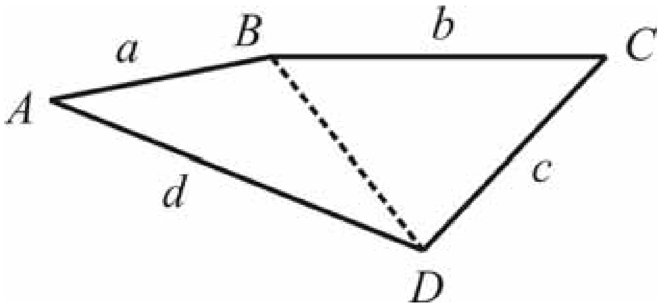
$$K \leq \frac{1}{2}(ad + bc)$$

Además, $K = \frac{1}{2}(ad + bc)$ **si y solo si** A y C son ángulos rectos.

Solución.

¿Qué hacemos? … se reciben sugerencias por parte de los alumnos. ¿Podremos aplicar el problema 1?, ¿cómo así? …

Tracemos la diagonal BD.



¿y ahora? …

El cuadrilátero ha quedado dividido en dos triángulos, ABD y BDC; los egipcios sabían seguramente que el área del cuadrilátero es igual a la suma de las áreas de estos triángulos.

Luego tenemos,

$$K = \frac{1}{2} adsenA + \frac{1}{2} bcsenC = \frac{1}{2}(adsenA + bcsenC).$$

Pero, $senA \leq 1$ y $senC \leq 1$, luego

$$K \leq \frac{1}{2}(ad + bc)$$

que es la primera parte de la tesis.

Para la segunda parte basta observar que $senA = 1$ y $senC = 1$ si y solo si A y C son ángulos rectos. ∎

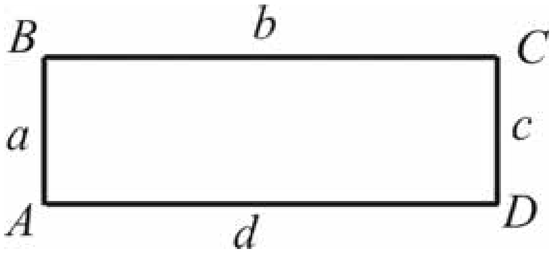
Recreo (Egipto). Bajo la hipótesis de 2, probar que

$$K \leq \frac{1}{4}(a + c)(b + d),$$

y que, $K = \frac{1}{4}(a + c)(b + d)$ **si y solo si** $ABCD$ es un rectángulo.

[¿Qué hacer? … considere también la diagonal AC; aplique 2 … llega la tesis].

Observación. Observemos que si $ABCD$ es un rectángulo, los egipcios calculaban su



área vía la fórmula $K = \frac{1}{4}(a+c)(b+d)$, pero en este caso $a = c$ y $b = d$, luego

$$K = \frac{1}{4}(2a)(2b) = ab$$

que es la usual fórmula que conocemos. Es bello que siglos antes de Cristo ya existiera una matemática con este grado de profundidad.

3. **(Babilonia).** Resolver,

(i) $x^3 + 2x^2 - 3136 = 0$

(ii) $\begin{cases} xyz + xy = \frac{7}{6} \\ y = \frac{2}{3}x \\ z = 12x \end{cases}$

Solución.

¿Cómo resolver la ecuación cúbica (i)?; por otro lado, el sistema (ii) equivale a una ecuación cúbica, ¿cómo resolverla? Aún en pleno siglo XXI si no conociéramos los trabajos de Tartaglia y Cardano respecto a la ecuación cúbica tendríamos dificultades para resolver estas ecuaciones. Sin embargo, los antiguos babilonios conocieron un camino para resolver **ciertas** ecuaciones cúbicas como las de esta ocasión. Al respecto se descubrió una antigua tabla babilónica que proporciona los valores de $n^3 + n^2$ para $n = 1,2,...,30$.

Hasta $n = 10$ esta tabla es:

n	n^2	n^3	$n^3 + n^2$
1	1	1	2
2	4	8	12
3	9	27	36
4	16	64	80
5	25	125	150
6	36	216	252
7	49	343	392
8	64	512	576
9	81	729	810
10	100	1000	1100

Solución de (i).

La idea crucial es hacer el cambio de variable $x = 2n$; luego obtenemos

$(2n)^3 + 2(2n)^2 = 3136$, $8n^3 + 8n^2 = 3136$, $n^3 + n^2 = 392$. Observando la tabla vemos que esta ecuación corresponde a $n = 7$. Luego, $x = 2(7) = 14$ es la solución de la ecuación cúbica dada.

Solución de (ii).

Substituyendo $y = \frac{2}{3}x$, $z = 12x$ en $xyz + xy = \frac{7}{6}$ obtenemos

$$8x^3 + \frac{2}{3}x^2 = \frac{7}{6} \quad \text{ó} \quad x^3 + \frac{1}{12}x^2 = \frac{7}{48}$$

Ahora debemos hacer un cambio de variables, como hicimos en (i); $x = ?$

Observemos que hicimos en (i) [$x = 2n$, donde 2 es el coeficiente de x^2], luego … $x = \frac{1}{12}n$. Entonces tendremos,

$$\frac{1}{1728}n^3 + \frac{1}{1728}n^2 = \frac{7}{48},$$

de donde $n^3 + n^2 = 252$

Mirando nuevamente la tabla, vemos que esta igualdad corresponde a $n = 6$. Luego,

$$x = \frac{1}{12}(6) = \frac{1}{2}, \qquad y = \frac{2}{3}\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{3}, \qquad z = 12\left(\frac{1}{2}\right) = 6$$

Nota. El historiador Otto Neugebauer conjetura que los babilonios estuvieron capacitados para reducir una ecuación cúbica general a la forma "$n^3 + n^2 = c$"; de comprobarse esta conjetura, ello ubicaría a la matemática babilónica en un buen nivel. A la luz del avance de la matemática decimos que tal reducción es posible hacerse.

Observación. Miremos a la anterior tabla (existen muchas formas de verla).

Veamos las columnas n y n^3; tenemos

$$\begin{cases} \mathbf{1+2+3+4+5=15}, \quad \text{y} \quad \mathbf{(15)^2=225} \\ \mathbf{1^3+2^3+3^3+4^3+5^3=1+8+27+64+125=225} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \mathbf{1+2+3+4+5+6+7+8=36} \quad \text{y} \quad \mathbf{(36)^2=1296} \\ \mathbf{1^3+2^3+3^3+4^3+5^3+6^3+7^3+8^3=1+8+27+64+125+216+343+512=1296} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \mathbf{1+2+3+\cdots+10}=\mathrm{a} \quad \text{y} \quad (\mathrm{a})^2=\mathrm{b} \\ \mathbf{1^3+2^3+3^3+\cdots+10^3}=\mathrm{c} \end{cases}$$

Compruebe que $b = c$.

De esta simple observación, Neugebauer postula que los babilonios capaz conocieron la importante identidad

$$\sum_{i=1}^{n} i^3 = \left(\sum_{i=1}^{n} i\right)^2$$

4. **(Babilonia).** Calcular $\sqrt{3}$ con una aproximación de cinco decimales.

Solución.

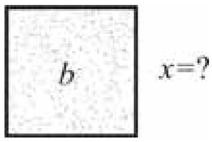
Cuando estuve en el colegio me enseñaron a calcular la raíz cuadrada de números más grandes que 3 pero de tal habilidad no recuerdo algo actualmente. ¿Qué debo hacer para resolver la cuestión planteada? … capaz los que todos harían hoy día: tomar una calculadora y en segundos tengo la respuesta,

$$\sqrt{3} = 1.73205.$$

Entonces, ¿para qué plantear la tarea dada? … porque como evolución de la inteligencia humana hay mensajes por rescatar: muchos siglos antes de Cristo hubieron seres que tuvieron la capacidad matemática de crear algoritmos que nos permite calcular raíces cuadradas, raíces cúbicas, "triples pitagóricos", entre otros métodos. Reconocer la inteligencia es algo sabio que podemos, y debemos, hacer, al menos como un estímulo didáctico.

¿Qué conocían los babilonios? En una tablilla de la antigua Babilonia está registrado que ellos estudiaron $\sqrt{2}$ obteniendo el valor aproximado 1.414222 que consiguieron gracias a la buena técnica que disponían. Veamos. Sea b un número natural. Hallar $\sqrt{b}$. Veamos la idea del algoritmo que nos permite hallar tal valor aproximado.

Sea $x=\sqrt{b}$; luego $x^2=b$; entonces se trata de hallar la longitud del lado del cuadrado cuya área es b.



Debemos ser concientes de que, en general, *x* es un número **irracional** y hay que tener cuidado con la interpretación del gráfico adjunto.

Los matemáticos babilónicos eran hábiles creando algoritmos lo que rebela el buen nivel alcanzado como es el caso del cálculo de $\sqrt{b}$. Veamos como fue el camino seguido.

Sea a_1 una primera aproximación para $\sqrt{b}$; a partir de a_1 se calcula una segunda aproximación b_1 satisfaciendo $b_1=\dfrac{a}{a_1}$; es claro que si a_1 es muy pequeño, b_1 será muy grande y recíprocamente. Por esta razón, la media aritmética $a_2=\dfrac{a_1+b_1}{2}$ sería una mejor aproximación. Si a_2 fuera aún muy grande, la siguiente aproximación $b_2=\dfrac{a}{a_2}$ sería muy pequeña y recíprocamente, luego (nuevamente) el promedio $a_3=\dfrac{a_2+b_2}{2}$ sería una mejor aproximación. Y así podemos continuar … obteniéndose la regla

$$a_{n+1}=\frac{1}{2}\left(a_n+\frac{b}{a_n}\right), \qquad n=1,2,3,...$$

La sucesión $\{a_n\}$ se aproxima a $\sqrt{b}$.

Aplicación. Calcular $\sqrt{2}$ con una aproximación de cinco decimales.

Solución.

Apliquemos el algoritmo babilónico. $b=2$.

Pongamos $a_1 = 1$, entonces

$$a_2 = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{2}{1}\right) = \frac{3}{2} = 1.5,$$

$$a_3 = \frac{1}{2}\left(\frac{3}{2} + \frac{2}{\frac{3}{2}}\right) = \frac{17}{12} \cong 1.41666,$$

$$a_4 = \frac{1}{2}\left(\frac{17}{12} + \frac{2}{\frac{17}{12}}\right) = \frac{577}{408} \cong 1.41422.$$

Podríamos quedarnos en esta aproximación y concluir que $\sqrt{2} \cong 1.41422$.

Es claro que $a_5, \quad a_6, \ldots$ se aproxima más y más a $\sqrt{2}$.

Es hora de hacer la tarea propuesta. $b = 3$.

Pongamos $a_1 = 1$, entonces

$$a_2 = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{3}{1}\right) = 2,$$

$$a_3 = \frac{1}{2}\left(2 + \frac{3}{2}\right) = \frac{7}{4} = 1.75,$$

$$a_4 = \frac{1}{2}\left(\frac{7}{4} + \frac{3}{\frac{7}{4}}\right) = \frac{97}{56} \cong 1.73214,$$

$$a_5 = \frac{1}{2}\left(\frac{97}{56} + \frac{3}{\frac{97}{56}}\right) = \frac{18{,}817}{10{,}864} \cong 1.73205,$$

que es el número que nos dio la calculadora! Entonces, ¿los babilonios se adelantaron a las máquinas calculadoras?

Según las circunstancias, podría ser mas conveniente usar la maquinita y tener la respuesta muy rápida; pero en otras, el camino seguido es mas “inteligente” y nos deja el sabor de haber pensado y esto en la formación de los jóvenes, es fundamental!

Hasta acá podría ser suficiente para cumplir con la tarea dada, pero los babilonios nos tienen mas sorpresas. En un texto antiguo aparece otra muy buena idea en relación al cálculo de $\sqrt{3}$, o de otras raíces:

$$(a^2+b)^{\frac{1}{2}} \cong a+\frac{b}{2a}, \qquad (\text{con } 0<|b|<a^2) \qquad [+]$$

Esta fórmula nos dice que si tuviéramos una descomposición de 3, $3=a^2+b$ donde conocemos a y b, entonces podremos calcular $\sqrt{3}$ con alguna aproximación. Sospechamos que tal descomposición no es única; la aproximación va a depender de la descomposición.

Ensayemos. Tomemos $a=\frac{5}{2}$ y $b=-\frac{13}{4}$; tenemos

$$a^2+b=\frac{25}{4}-\frac{13}{4}=\frac{12}{4}=3, \qquad \left|-\frac{13}{4}\right|<\frac{25}{4}.$$

Luego, por [+],

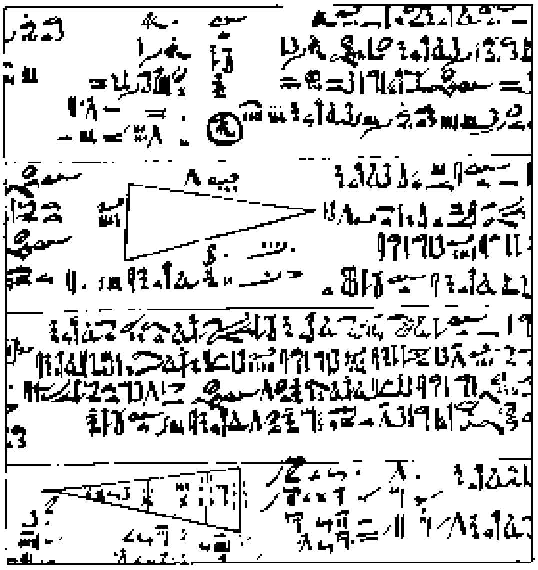
$$\sqrt{3}\cong\frac{5}{2}-\frac{\frac{13}{4}}{2(\frac{5}{2})}=\frac{37}{20}=1.85.$$

El lector es invitado a ensayar otras tales descomposiciones de 3 y lograr mejores aproximaciones que 1.85.

4.- Conclusión

La vivencia tenida a través de los cuatro ejercicios propuestos, pertenecientes a las culturas egipcia y babilónica, nos permite decir objetivamente que en la Antigüedad pre-griega se cultivó una matemática no tan trivial como podríamos pensar sino que ellos aportaron argumentos con bastante sentido crítico. Si bien es cierto que en esos remotos tiempos la matemática era fundamentalmente utilitaria, por el análisis de los ejemplos mostrados podemos inducir un gran avance en la evolución del pensamiento matemático. Esto es un mensaje histórico que sospechamos no es bien conocido y valorado en general. Además, esta experiencia nos dice que este enfoque podría ser una alternativa didáctica para enseñar y aprender matemática en base a cuestiones concretas, con la participación de los alumnos preguntando, ensayando, lo que (es claro) es mejor que un aprendizaje frío y vertical, en base a recetas matemáticas.

Nota. Los problemas discutidos en este escrito aparecen propuestos en el libro de Eves; las otras referencias son útiles en relación con la matemática egipcia y babilónica.



Papiro de Rhind

Bibliografía

- Boyer, Carl B.: "*Historia de la Matemática*". Alianza Editorial. 1987.
- Collete, Jean – Paul: "*Historia de las Matemáticas*". Vol. I. Siglo XXI. 1986.
- Eves, Howard: "*An Introduction to the History of Mathematics*". Holt, Rinehart and Winston. 1969.
- Ortiz, Alejandro: "*Historia de la Matemática*". Vol. 1. PUCP. Lima. 2005.

UNIÓN
REVISTA IBEROAMERICANA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA

Marzo de 2008, Número 13, páginas 19 - 22
ISSN: 1815-0640

Un *tangram* dorado

Carlos Cortínez T. y Fernando Castro G.

Resumen

En este trabajo se muestran dos ejemplos -extraídos del Tangram de Brügner- de lo que podríamos llamar disección áurea de áreas. La iteración de la segunda disección da origen a un fractal muy simple pero muy rico en relaciones algebraicas. Finalmente se presentan algunos indicios de la presencia del número áureo como razón entre áreas en algunos diseños planos.

El tangram de Brügner

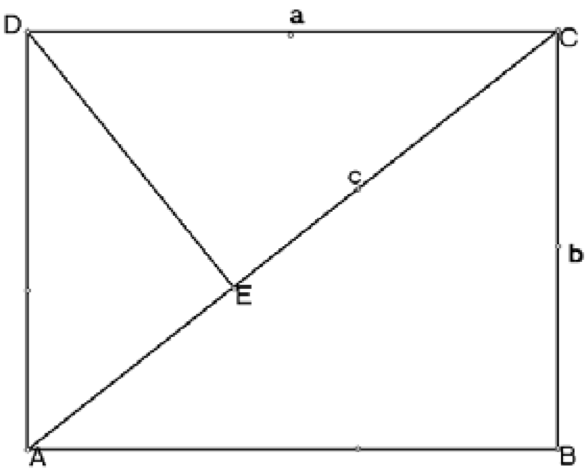


Fig. 1

En 1984 el matemático alemán Georg Brügner creó –a partir de un rectángulo– un interesante Tangram de tres piezas. El mencionado matemático buscaba la proporción necesaria de modo que el diseño logrado permitiera optimizar el número de figuras convexas que se pudieran formar.

Brügner impuso la condición $b = c$ y esto lo llevó a un diseño que permite hallar 16 figuras convexas (Brügner, 1984). Es interesante notar que con las siete piezas del Tangram chino sólo es posible formar 13 figuras convexas (Grupo Azarquiel, 1988). A partir del desarrollo algebraico que presenta Brügner se concluye que $\frac{a^2}{b^2} = \Phi$, donde Φ representa el número áureo: $\frac{1}{2}\left(1+\sqrt{5}\right)$. Esto significa entonces que el cuadrado construido sobre la diagonal del tangram puede ser diseccionado –en sección áurea– en dos cuadrados de lados *a* y *b*, donde $a = b\sqrt{\Phi}$. Al rectángulo cuyos lados estén en la razón $\sqrt{\Phi}$ lo llamaremos rectángulo de Brügner.

Un examen más minucioso revela múltiples vínculos del número áureo y de su raíz cuadrada –a la que denotaremos por φ– con este Tangram que está formado por tres triángulos semejantes. Si ordenamos sus áreas en orden creciente se forma una progresión geométrica de razón Φ.

Veamos como construir el Tangram: consideremos el segmento AC. Hay un punto E en AC que divide a este segmento en razón áurea. La circunferencia de diámetro AC determina el punto D en la recta perpendicular a AC, trazada por E.

Una construcción aproximada del Tangram puede lograrse rápidamente haciendo pliegues sobre una página tamaño carta –esto es, de 216 por 279 milímetros– ya que la razón entre largo y ancho está próxima a la raíz del número áureo. También podemos construirlo tomando un rectángulo semejante al formato de la versión impresa de la revista *SUMA.*

Una disección fecunda

Si agregamos tres cortes al Tangram, como se señala en la Fig. 2, es posible formar dos réplicas reducidas del original. Como las réplicas mayor y menor tienen áreas $b^2 \cdot \varphi^{-1}$ y $b^2 \cdot \varphi^{-3}$ respectivamente, podemos decir que hemos logrado una ***disección áurea*** del Tangram, puesto que el área del todo es al área de la parte mayor como ésta es al área de la parte menor.

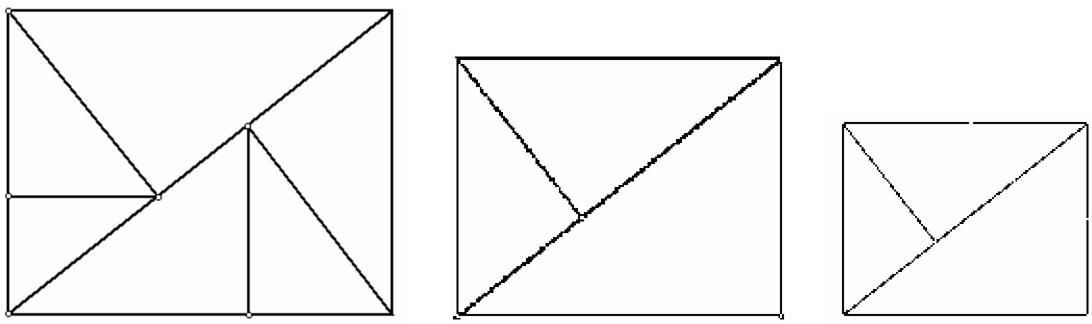


Fig. 2

La iteración de este proceso permite construir, vía disecciones, una familia de rectángulos de Brügner, de modo tal que la generación de rango n poseerá 2^n rectángulos, que se agrupan en n+1 clases, cada clase reúne $\binom{n}{k}$ rectángulos de área igual a:

$b^2 \cdot \varphi^{-(2n+(2k-1))}$ donde $k = 0, 1, 2 \ldots, n$.

En cada generación la suma de las áreas es:

$b^2 \cdot \varphi^{-(2n-1)} \cdot (1+\varphi^{-2})^n$

y esta expresión es igual al área del Tangram original, esto es: $b^2 \cdot \varphi$.

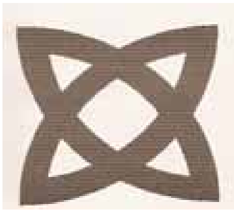
La razón áurea entre áreas

La presencia de la razón áurea entre medidas de segmentos –como patrón de belleza y armonía– ha sido ampliamente estudiada por matemáticos y artistas en la arquitectura, la pintura, la anatomía y la naturaleza.

Queremos saber si es posible hallar manifestaciones de la razón áurea –entre áreas de regiones planas de dos colores o dos texturas diferenciadas– en un diseño plano.

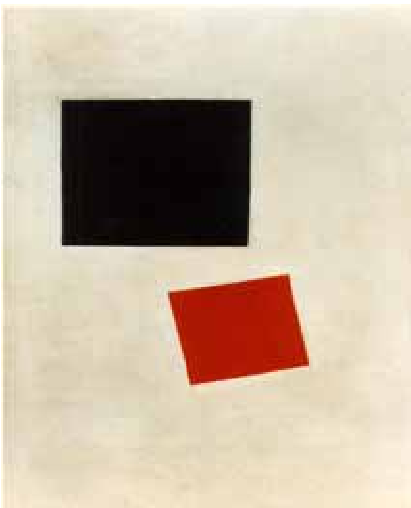
Se trata de una búsqueda con un horizonte muy amplio que abarca creaciones artísticas y diseños utilitarios. En este apartado sólo pretendemos mostrar algunos temas donde se asoma la presencia de la razón áurea: impresos, imágenes de celosías y algunas obras pictóricas.

Revisando algunas revistas y libros relacionados con la Matemática y su enseñanza encontramos que en la versión impresa de la revista *Números* del año 2003 la razón entre el área de la página y el área ocupada por el contenido esta muy próxima al número áureo. También ocurrió así con la *Historia Universal de las Cifras* de Ifrah (1998) y *Geometry from Africa* de Gerdes (1999).



Examinando imágenes de celosías en la obra de Luís Balbuena (2001) hallamos una de ellas donde la razón entre el área que deja pasar la luz y el área opaca se aproxima al número áureo.

Finalmente una mirada numérica a dos obras del pintor Kasimir Malevich nos muestra la presencia del número áureo como razón entre áreas.



También podemos rastrear la presencia de Φ en el dinámico campo del diseño gráfico, donde nuestros estudiantes son muy hábiles interpretando y descifrando códigos visuales.

La búsqueda puede extenderse también a muchos productos artesanales de diversas regiones del mundo, como la cestería y las alfombras que incluyen el llamado "cuadrado dentado", los calados canarios, los empedrados andaluces…

Bibliografía

▪ Balbuena, L (2000). Las Celosías. Una Geometría Alcanzable. Consejería de Educación, Cultura y Deportes del Gobierno de Canarias: La Laguna.
▪ Brügner, G (1984). Three –Triangle– Tangram. Bit Vol. 24. pp 380–382
▪ Gerdes, P (1999) Geometry from Africa. MAA: Washington.
▪ Grupo Azarquiel (1988). El Tangram. Revista Suma. Año I pp. 49–52
▪ Ifrah, G (1998). Historia Universal de las Cifras. Editorial Alianza: Madrid.

Carlos Cortínez Torres. Departamento de Matemáticas. Universidad Pedagógica Experimental libertador. Maturín, Venezuela.
cacorto@cantv.net

Fernando Castro Gutiérrez. Departamento de Matemáticas. Universidad Pedagógica Experimental libertador. Maturín, Venezuela.
fercasgu@hotmail.com

UNIÓN
REVISTA IBEROAMERICANA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA

Marzo de 2008, Número 13, páginas 23 - 37
ISSN: 1815-0640

Interagir – uma simples idéia – Grandes resultados: Uma proposta para avaliação de Estatística no ensino universitário

Pedro Cézar Pereira Coelho

Resumo

A avaliação é hoje considerada, por muitos estudiosos, como um componente significativo do processo ensino-aprendizagem. Aliado a este fato, a avaliação tradicional está perdendo força para novos conceitos e propostas, que visam contribuir de uma melhor forma para o desempenho cognitivo dos alunos. Neste trabalho investigamos uma nova proposta de avaliação para a disciplina de Estatística no ensino superior – ***Avaliação em Dupla*** –, com o objetivo de encontrar um método, que não estivesse tão distante da forma tradicional, oferecendo oportunidade dos próprios alunos aprenderem o conteúdo antes e durante a prova, através da interação entre parceiros.

Abstract

Nowadays, evaluation is considered by many studious a relevant component in the teaching-learning process. Related to this fact, traditional evaluation is losing force by the new concepts and proposes that searches to contribute to improve students' cognitive acting. In this study we search a new evaluation proposal in the discipline of statistics in superior education *Evaluation in Couple* in order to find out a method that is not so far from the traditional way, offering students the opportunity to learn the content before and during the test through the interaction among partners.

1 Introdução

A trajetória deste trabalho teve início com nossa busca constante por mudanças metodológicas que nos auxilie no processo de ensino-aprendizagem para uma disciplina considerada de difícil assimilação pelos alunos: "*Estatística*". Fato este, aliado a situação das atitudes e comportamentos dos nossos alunos hoje em dia, nos levou a refletir, sobre uma proposta de avaliar a aprendizagem, que fosse de fácil aplicação e estivesse de acordo com o meta-contrato. Segundo Almeida & César (2006), "O meta-contrato institucional é o contrato que regula o funcionamento da escola enquanto comunidade organizada, ou seja, são regras externas a situação didática em sala, impostas pela própria instituição." Assim, com a mudança do contrato pedagógico, chegamos a uma proposta simples, a *"Avaliação em dupla"*, dentro de um novo contrato didático. "Entende-se por contrato didático o conjunto de comportamentos específicos do professor, que são esperados pelos alunos, e o conjunto de comportamentos dos alunos, esperados pelos professores. (Brousseau, 1988; Schubauer – Leoni, 1986) e que regulam o funcionamento da aula e a relação triádica que se estabelece entre professor – aluno – saber." (Almeida & César, 2006, p. 360)

A busca teórica para fundamentar e nortear este trabalho começa na teoria sócio-construtivista de Vygotsky (1978), em seguida vem o trabalho pioneiro de Doise, Magny e Perret-Clermont (1975) que estuda o papel das interações sociais no desenvolvimento cognitivo dos sujeitos. Por fim, os trabalhos desenvolvidos na Universidade de Lisboa em Portugal no projeto "*Interação e Conhecimento*" que tem como principal objetivo estudar e promover as interações entre pares na sala de aula de Matemática. Onde, dentre outros, citamos os trabalhos de Margarida César e Carolina Carvalho, como muito significativo para o desenvolvimento do nosso.

César et al. (1999) expõe a seguinte conclusão: "A interação em pares não é a única solução. É uma solução possível. Mas, a medida que temos mais conhecimentos sobre os mecanismos envolvidos nos processos de interação social, apercebemo-nos cada vez mais das suas enormes potencialidades e de que os resultados obtidos são francamente animadores".

Em sua tese sobre interações entre pares, Carvalho (2001) afirma:

> "É inequívoca a aderência dos alunos ao trabalho em díade, o fato de ele estar muito bem adaptado às exigências da sociedade atual, que realçam a necessidade de se trabalhar em equipe, torna particularmente interessante este domínio de estudo, alertando-nos para suas potencialidades na preparação da cidadania plena. A estatística aparece também frequentemente focada como um domínio que permite uma forte ligação com o real, por regular uma parte da vida de todos os cidadãos." (Carvalho, 2001, p. 479).

Enquanto, Castelhano & César (2000), em seu trabalho – *Os grandes também interagem* – diz: "75% dos alunos se colocaram favorável com relação ao trabalho em dupla para o ensino superior".

Baseando-se nestas colocações, percebemos que a proposta apresentada poderia ser significativa não só na aquisição do conhecimento, como também, numa melhor preparação para o desempenho profissional exigido pela sociedade contemporânea.

Neste trabalho fizemos um estudo piloto com questionários respondido pelos alunos. O objetivo foi o de verificar se a proposta de avaliação em dupla, com os critérios pré-definidos por nós dentro de um novo contrato didático, na disciplina de estatística para alunos de nível universitário, contribui para um processo que permita oportunidade de aprender melhor os conteúdos antes e durante a realização da prova, através da interação entre parceiros, proporcionando desta forma uma melhor aprendizagem.

2 Fundamentação Teórica

2.1 Avaliação

A avaliação é considerada por todos como fundamental no processo de ensino e aprendizagem. Pois é através deste procedimento que podemos julgar ou medir se o aluno absorveu de forma satisfatória o conteúdo ministrado.

Em 1967, com a publicação de "*The Methodology of Evaluation"*, Michel Scriven, revolucionou a teoria da avaliação, pois, ele se refere à possibilidade de pôr a avaliação ao serviço da aprendizagem do aluno, trazendo um novo paradigma para avaliação.

Ponte & Serrazina (2000) coloca que: "A avaliação deve ser vista como parte integrante do processo de ensino-aprendizagem. Ensino e avaliação devem ser encarados, assim, como componentes de um mesmo sistema e não como sistemas independentes".

Batanero (2001), afirma que: "hoje em dia a avaliação é uma parte importante do processo de instrução. Na NCTM[1] (1991) concebe-se que a avaliação é um processo dinâmico e contínuo de produção de informações sobre o progresso dos alunos em direção aos objetivos da aprendizagem. E o principal propósito é melhorar a aprendizagem dos alunos."

Garfield (1995 apud Batanero, 2001) indica, entre outros, as seguintes possibilidades de instrumentos de avaliação para o caso de Estatística: a prova escrita do tipo exame e perguntas realizadas em sala a alunos, particularmente ou a toda classe.

Em sua tese sobre a avaliação no processo ensino-aprendizagem de matemática, Marcel (2003) coloca que:

> "As implicações educacionais da psicologia cognitiva consistem na geração de um clima de sala de aula avesso as motivações extrínsecas e a competitividade; sugere-se que seja estimulado um ambiente que favoreça a motivação para aprender considerando o benefício do desenvolvimento das estratégias cognitivas e metacognitivas com implicações positivas na aprendizagem; além disso, o professor é estimulado a desenvolver na sala de aula a aprendizagem cooperativa. Nessa perspectiva, as atividades avaliativas devem estar a serviço das aprendizagens e realçar as possibilidades do sucesso e não do fracasso." (Marcel, 2003: 139); e conclui, dizendo: "devemos pensar em novas maneiras de ensinar, aprender e avaliar." (Marcel, 2003, p. 143).

Hadji apud Marcel (2003) coloca "Atualmente o processo da avaliação visa entre outras coisas, o estabelecimento do diálogo não só entre professor e aluno,

[1] NCTM (1991). Estándares curriculares y de evaluación para la educación matemática. Sevilla.

mais alunos e alunos.” Isto, dentro de uma abordagem sócio-construtivista, onde Vygotsky (1995) afirma: “A avaliação que normalmente é centrada no que cada aluno pode fazer sozinho, é um erro. O que deve ser avaliado é a capacidade que o aluno tem de fazer coisas colaborando com os outros e até recebendo informações e instruções”.

Vygotsky (1978) afirma que as interações sociais desempenham um importante papel na construção do conhecimento e que é inicialmente construído a um nível interpessoal, antes de passar para um nível intrapessoal.

Porém, o conceito mais conhecido da teoria Vygotskyana é o da ZDP.

> “A noção de “zona de desenvolvimento proximal” (ZDP), provavelmente o conceito mais conhecido e mais citado da teoria de Vygotsky, reflete e também detalha esse caráter bidirecional das relações entre desenvolvimento e aprendizagem. Para Vygotsky, a ZDP pode ser definida como a diferença existente entre o nível do que a pessoa é capaz de fazer com ajuda de outros e o nível das tarefas que pode fazer de maneira independente.” (Salvador et al, 2000, p. 260).

Segundo Vygotsky (1978), a criança designada como par mais competente trabalha com a outra na sua zona de desenvolvimento proximal, com isso, a que assimilou menos o conteúdo pode vir a alcançar melhores desempenhos do que os que conseguiriam se trabalhasse de uma forma individual. Almeida & César (2006) diz: “Hoje se sabe que não é só o par menos competente que se desenvolve, o par mais competente desenvolve processos mentais de ordem superior que contribuem para o desenvolvimento de capacidades”.

Almeida & César (2006), colocam que:

> “Nas últimas décadas, diversas investigações, baseadas na teoria de Vygotsky (1978) têm vindo a salientar a importância das interações sociais no desenvolvimento sócio-cognitivo e na apropriação do conhecimento (César, 1994, 2003; Doise, & Magny, 1881; Perret-Clermont, 1976 / 1978; Schubauer, & Perret-Clermont, 1997). Com os primeiros trabalhos sendo desenvolvidos por Doise, Mugny e Perret-Clermont (1975, 1976), onde mostraram como as interações sociais pode ser um fator de promoção do desenvolvimento cognitivo dos sujeitos.” (Almeida & César, 2006, p. 359).

Os trabalhos pioneiros desenvolvidos por Doise, Mugny e Perret-Clermont na década de 70, nos trouxeram uma contribuição muito significativa em se tratando de aprendizagem colaborativa, os chamados conflitos sócio-cognitivos.

Carvalho & César (2001, 2002) em duas citações, nos mostram claramente, a importância e o funcionamento dos conflitos sócio-cognitivos.

> “A Psicologia Social Genética de Doise & Mugny (1981) mostrou que, quando uma criança se confronta com uma opinião diferente da sua, está perante um conflito sócio-cognitivo. O confronto com um ponto de vista diferente e que

> obriga a criança a descentrar-se da sua opinião inicial parece ter a sua origem num conflito de comunicação, isto é, num contexto social. Ao insistirem nos seus próprios pontos de vista as crianças, mediante uma co-construção do argumento, compreendem melhor os próprios argumentos e esforçam-se para que os companheiros também os compreendam." (Carvalho & César, 2002).
> "Resolver um conflito sócio-cognitivo obriga o sujeito a ultrapassar uma situação de conflito cognitivo e, ao mesmo tempo, gerir uma relação social com um parceiro com quem terá de coordenar pontos de vista com o objetivo de chegar a um consenso para resolver a tarefa, ou seja, é na tentativa de ultrapassar um desequilíbrio cognitivo inter-individual que a criança consegue resolver o seu próprio desequilíbrio cognitivo intra-individual." (Gilly, Fraisse e Roux, 1988; Gilly e Roux, 1984, apud Carvalho & César, 2001, p. 4)

Em seu trabalho sobre o progresso da psicologia social, Mugny, Perret-Clermont e Doise (1981) concluíram que:

> "O resultado de todas as experiências descritas aqui mostra claramente que as interações interpessoais produziram progresso cognitivo. A ocorrência do conflito de natureza social é necessária. O conflito sócio-cognitivo é criado quando as respostas para mesma situação diferem entre os membros do grupo. Este conflito pode aparecer entre indivíduos de mesmo nível cognitivo, desde que as respostas sejam dadas de diferentes pontos de vista ou quando os caminhos apresentados com mesmo raciocínio são contraditórios. A resolução destes conflitos pode conduzir o progresso cognitivo." (Mugny, Perret-Clermont e Doise, 1981, p. 325)

Outra afirmativa de Mugny, Perret-Clermont e Doise (1981), é de que os resultados confirmaram que o conflito "interpessoal" induziu mais progresso que a produção da situação do conflito intrapessoal. Além, de conseguirem demonstrar experimentalmente que funções cognitivas são inicialmente elaboradas no relacionamento interpessoal depois sendo internalizado por cada individuo.

De seu trabalho sobre interações Carvalho (2001) faz a seguinte colocação:

> "A riqueza dos processos interativos quando se promovem interações em pares, proporciona aos sujeitos gerir um duplo processo: social, porque têm de conseguir estabelecer e manter uma interação entre pares, ou seja, têm de decidir quando concordam, quando contra-argumentam, quando cede, quem lidera, etc.; por outro lado, são confrontados com processos de raciocínio e estratégias de resolução diferentes dos seus e este fato fará com que tenham acesso a uma possibilidade de enriquecimento de seu repertório de competências, que de outro modo não existiria..." (Carvalho, 2001, p. 477)

Embora a maior parte das pesquisas e conclusões existentes diz respeito a crianças, acreditamos que todos os processos de aprendizagem colaborativa possam funcionar para pessoas de idades superiores "*Jovens e Adultos*" como aconteceu no trabalho de Acácio Castelhano e Margarida César (2000) "*Os grandes também interagem*".

E com este mesmo pensamento, procuramos encontrar uma forma diferenciada de avaliar. Com isso, chegamos a nossa proposta de avaliação em dupla seguindo alguns critérios pedagógicos pré-estabelecidos em um novo contrato didático.

2.2 Contrato Didático Inovador

Na realização da prova em dupla, para que todos os objetivos pudessem ser alcançados, tivemos que optar por algumas modificações necessárias a realização deste tipo de avaliação, haja vista, que os alunos que inicialmente começamos a estudar não aproveitavam as possíveis vantagens do trabalho colaborativo, ou seja, não discutiam antes das provas, estudavam menos que para avaliação tradicional e muitas vezes confiavam em seu parceiro para fazer a prova.

No trabalho de Pironel (2002), que em sua tese de mestrado, testou a prova em dupla para resolução de problemas em matemática. Respondendo a um questionário proposto por este pesquisador, uma aluna não se posicionou totalmente a favor sobre este modelo de prova, pois, para ela "–a prova em dupla, muitas vezes é realizada por apenas um dos alunos." (Pironel, 2002, p. 168).

Pironel (2002) concluiu que pode ser muito vantajoso para os alunos a prova em dupla, mas se deve ter cuidado para que todos participem, tendo em vista que o maior objetivo é aprendizagem.

Ao buscarmos soluções para contornar as situações que comprometiam o desempenho na absorção do conhecimento, tivemos que mudar o contrato didático, como se refere Paulo Almeida e Margarida César:

> "Se pretendemos atribuir ao aluno um papel social relevante e único na construção de seu próprio conhecimento, temos de implementar contratos didáticos inovadores, que alterem as expectativas que os agentes sociais têm relativamente aos papéis por eles desempenhados." (Almeida & César, 2006, p. 360)

Buscando um contrato didático inovador que nos auxiliasse na concretização dos objetivos, adotamos alguns critérios pedagógicos, que se apresentaram muito eficazes, para realização da avaliação em dupla, que são:

- As duplas deveram ser cadastradas com pelos menos uma semana da data de realização da prova.
- Não é permitido fazer duplas no dia da prova que não esteja na lista de cadastro, ficando o aluno que o parceiro não comparecer condicionado a realizar a prova sozinho.
- Durante a realização da prova, o contato entre as duplas é considerado colar[2] (copiar[3]), ficando a dupla sujeita a punição necessária.

[2] Expressão do português do Brasil.
[3] Expressão do português de Portugal.

- O professor terá total liberdade de fazer questionamentos durante ou ao final da prova sobre como foi feita alguma questão, ficando condicionada a perda dos pontos da questão que pelo menos um não saiba responder.

No início do semestre, discutimos todo funcionamento da avaliação em dupla, deixando sempre a opção de o aluno poder optar pela avaliação individual. Pois, César (2003), diz: “Quando se pretende implementar processos de inovação pedagógica, criando rupturas com o contrato didático tradicional, é necessário explicar algumas das novas regras do contrato inovador.” (César, 2003, p. 129).

3 Metodologia

3.1 Objetivos

O presente trabalho teve como principal objetivo um estudo piloto de nossa proposta de avaliação em dupla, na obtenção do conhecimento, em relação à forma tradicional de prova individual, com alunos de disciplinas relacionadas à Estatística no ensino superior. Paralelamente, verificar se esta proposta contribuía para o desenvolvimento cognitivo dos alunos, dentro de uma proposta avaliativa que permitisse a aquisição de três objetivos específicos; uma melhor preparação para prova, oportunidade de aprender durante a realização da mesma e por fim que os conteúdos fossem mais bem assimilados.

3.2 Amostra

A amostragem utilizada foi de conveniência (Vieira,1980). Ou seja, participaram da pesquisa os alunos que optaram por realizar sua prova em dupla, que estavam presentes a aula subseqüente a realização da segunda prova da unidade.

Os dados foram coletados entre o 1º semestre de 2006 e o 1º semestre de 2007, em uma universidade e em três faculdades diferentes na cidade de Campina Grande, como mostra o quadro 1. Foram abordados os seguintes cursos; Publicidade e propaganda, Enfermagem, Fisioterapia, Administração e Educação física. Onde foram obtidos 232 questionários em 10 turmas diferentes.

Quadro 1 - Distribuição das turmas pesquisadas.

TURMA	SEMESTRE	Nº de ALUNOS
Educação Física	2006.1	29
Educação Física	2006.2	21
Publicidade	2006.2	14
Fisioterapia	2006.2	16
Enfermagem - UEPB	2006.2	22
Enfermagem - FCM	2006.2	31
Administração	2006.2	19
Administração	2007.1	28
Educação Física	2007.1	23
Enfermagem - FCM	2007.1	29

3.3 Instrumento

Partindo do princípio que o aluno seria o melhor avaliador do processo, optamos por um questionário com 12 perguntas qualitativas, dispostas em quatro relacionadas ao período antes da prova, três ao período durante a realização da prova, duas ao período após a prova e por fim três relacionadas aos objetivos da avaliação.

Para nos ajudar na análise dos objetivos propostos, estas perguntas foram de caráter comparativo entre a forma individual e a proposta de parceria para avaliação, dispostas em escala tipo Likert. Segundo Mattar (2006):

> "Escala para medir atitudes do tipo ordinal, proposta por Rensis Likert em 1932, onde os respondentes são solicitados a informarem não só a concordância ou discordância com uma afirmação, mais o grau dessa colocação. Aos vários graus de concordância/discordância são atribuídos números para indicar a direção da atitude do respondente." (Mattar, 2006, p. 101).

Estes instrumentos foram aplicados na maioria das turmas após a realização do segundo estágio da disciplina, antes dos alunos saber o resultado da mesma, para que não influenciasse de alguma forma sua opinião.

3.4 Análise de Dados

Como as perguntas estão em escala tipo Likert, do tipo ordinal, aplicaremos inicialmente o teste não-paramétrico de "*Kruskal-Wallis*", em duas perguntas de cada período relacionado à prova. "O teste de Kruskal-Wallis serve para testar a hipótese de que varias populações têm a mesma distribuição" (Vieira, 2004). No nosso trabalho, ter a mesma distribuição significa que as turmas têm a mesma atitude em relação à prova de dupla. Em seguida utilizaremos a estatística descritiva através de gráficos para uma análise mais detalhada de algumas das variáveis abordadas.

4 Resultados

4.1 Testes comparativos de Kruskal-Wallis

Os resultados do teste de Kruskal-Wallis, ao nível de confiança de 95%, para suposição de que as atitudes dos alunos das dez turmas são iguais com relação à prova em dupla, são expostos no quadro 2.

Quadro 2 – Resultados dos Testes Kruskal–Wallis

Perguntas	p-valor	Decisão
1) Antes da prova, Você estuda?	0,003	Rejeita - se
2) Antes da prova, Você aprende?	0,024	Rejeita - se
3) Durante a prova, Você sente necessidade de Colar (Copiar)?	0,117	Não Rejeita
4) Durante a prova, Você aprende?	0,055	Não Rejeita
5) Depois da prova, os conteúdos parecem ter sido assimilados?	0,180	Não Rejeita
6) Depois da prova, Você sente que aprendeu?	0,210	Não Rejeita

Fonte: Pesquisa aplicada as turmas do quadro 1.

O quadro 2 apresenta os resultados com relação a hipótese de que as Dez turmas que participaram da pesquisa tenham mesma atitude comportamental em relação a nossa proposta de prova em dupla.

A rejeição ocorrida nas questões 1 e 2, indicam que as turmas não demonstram mesma atitude, em relação a estes dois questionamentos para o período antes da prova. Enquanto a não rejeição das questões 3, 4, 5 e 6, indicam que as turmas apresentam a mesma atitude .

4.2 Gráficos

Os gráficos percentuais (1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 e 9) nos mostram resultados muito significativos, como podemos ver a seguir.

Gráfico 1: Antes da prova, você estuda?

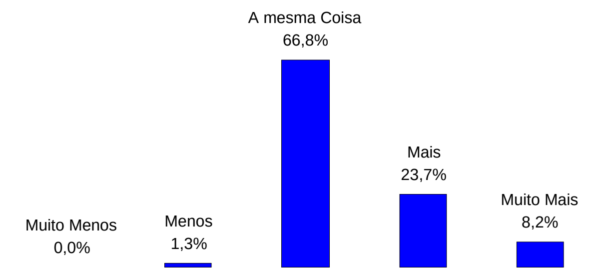
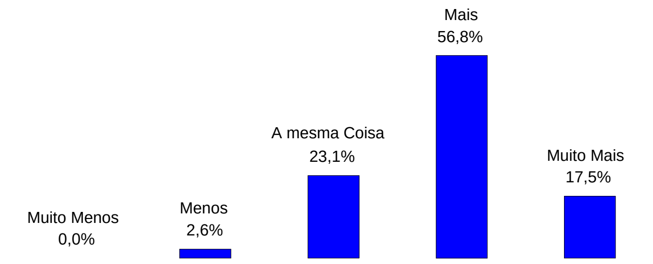
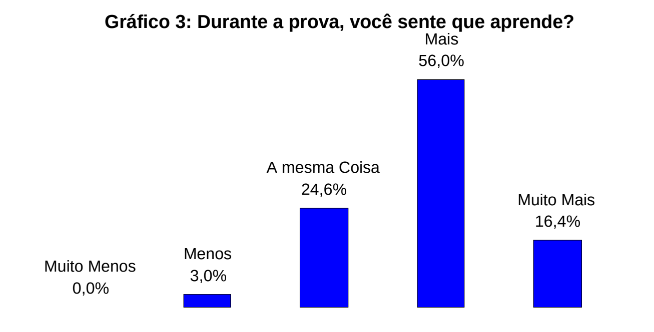
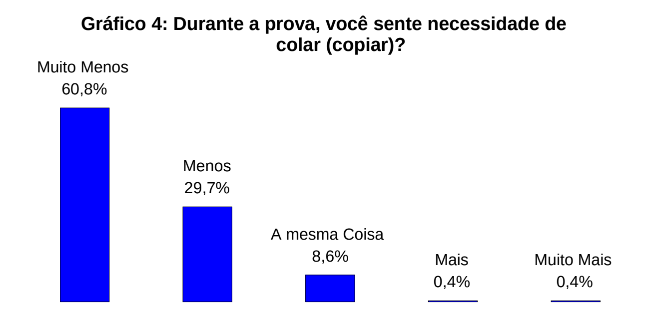


Gráfico 2: Antes da prova, você sente que aprende?

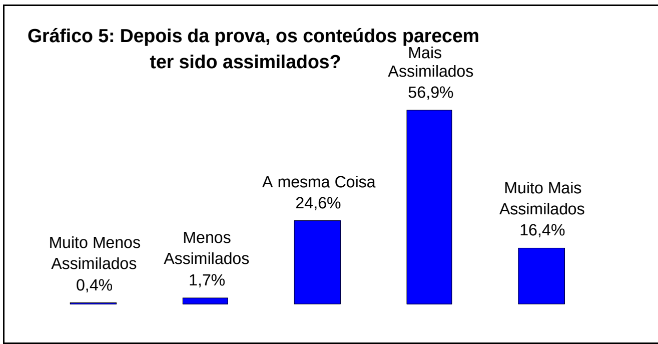


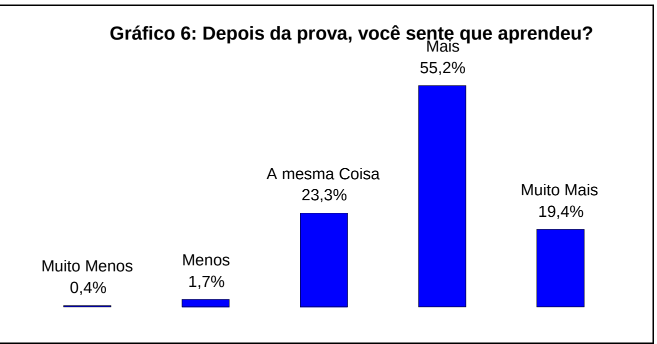
O gráfico 1, nos apresenta que a maior parte, 66,8% dos alunos, estuda a mesma coisa e cerca de 30% estuda mais. Para o gráfico 2, a maior parte, 74,3% dos alunos, afirma que aprendem mais ou muito mais.



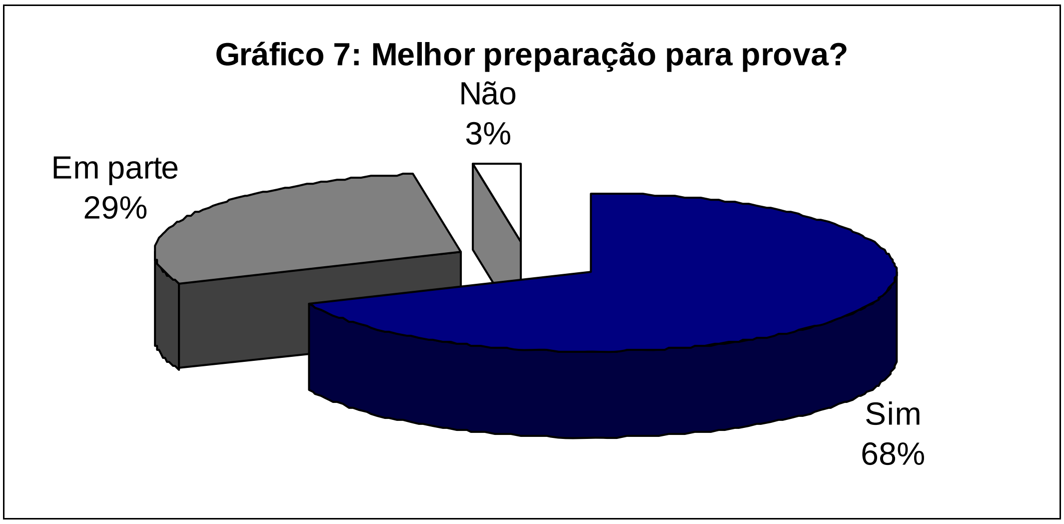


O gráfico 3, apresenta um resultado de que 72,4% dos alunos afirma que aprendem mais ou muito mais que na prova individual e a mesma coisa 24,6%. Enquanto no gráfico 4, um resultado de 90,5% para alunos que sente menos necessidade de colar (copiar).

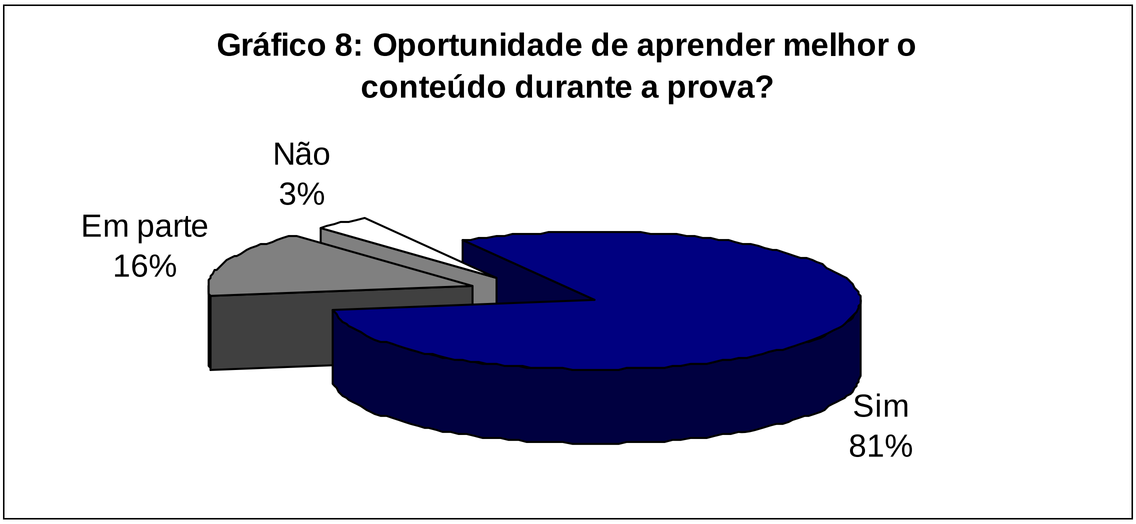




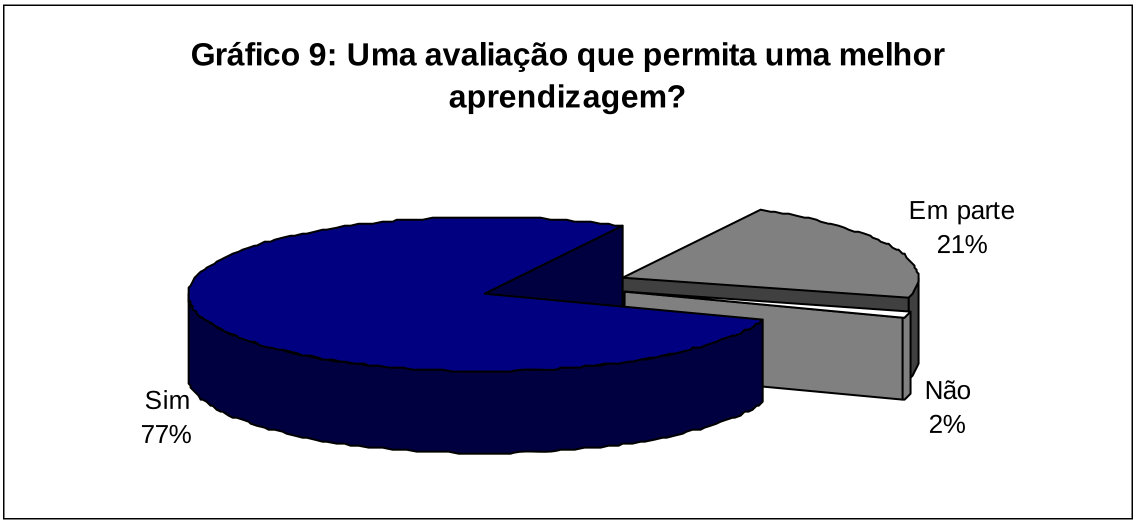
O gráfico 5, expõe que 73,3% dos alunos afirma que os conteúdos parecem ter sido melhores assimilados. Enquanto, no gráfico 6, cerca de 74,6% dos alunos comprovam que aprendeu mais.



O gráfico 7, apresenta que 68% dos alunos afirmam que o objetivo de uma melhor preparação para prova foi satisfeito, enquanto, 29% afirmam que foi atingido em parte e apenas 3% acham que o objetivo não foi atingido.



No gráfico 8, verificamos que 81% afirmam que o objetivo de uma avaliação que permita aprender durante a mesma - foi atingido - , enquanto, 16% expõe que foi atingido em parte e somente 3% que não atingiu.



No gráfico 9, constatamos que para 77% dos alunos o objetivo de uma avaliação que permita uma melhor aprendizagem foi atingido, enquanto 21% que foi atingido em parte e 2% que não atingiu.

4.3 Discussão dos Resultados

Dos resultados expostos no quadro 2, podemos extrair algumas conclusões:

- Nas questões 1 e 2, a rejeição da hipótese de que todas as turmas tem mesma atitude com relação a "*Estudar*" e "*Aprender*" mais antes da prova, significa que alguma ou algumas das turmas não tem a mesma postura. Isto nos faz concluir, juntamente com nossa análise e convívio com as turmas, que alguns podem estar estudando e aprendendo mais antes da prova, porem, não acontece para todas as turmas, ou seja, algumas turmas estão reagindo da maneira esperada interagindo antes da prova e até mesmo cobrando do parceiro, enquanto outras não estão atingindo este objetivo.

- Com relação às questões 3 e 4; a não rejeição da hipótese de igualdade nas atitudes de todas as turmas com relação a "*Aprender*" mais e "*Colar(Copiar)*" menos durante a prova, resultado altamente significativo para o segundo objetivo da avaliação proposta, nos mostra que a postura das dez turmas analisadas é a mesma com relação a realização da avaliação em dupla.
- Nas questões 5 e 6, com a não rejeição da hipótese das turmas terem mesma opinião com relação a "Assimilação" e "*Aprendizagem*" após a avaliação, também mostraram um resultado significativo para o terceiro objetivo especifico da avaliação, indicando que as dez turmas pesquisadas tem opiniões iguais neste pontos.

A análise dos gráficos 1 e 2, onde o primeiro mostra que 98,7% dos alunos estuda no mínimo a mesma coisa que na prova tradicional, porém, a maior parte dos alunos diz estudar a mesma coisa. Enquanto no segundo, 97,4% aprende no mínimo à mesma coisa, com a maior parte afirmando aprender mais. Este resultado, juntamente com nossa vivência junto aos alunos, nos traz a seguinte conclusão: "*Embora a maior parte dos alunos não esteja estudando mais, o que estávamos esperando, na opinião dos alunos a aprendizagem antes da prova estar maior. Isto nos mostra que a interação entre a dupla antes da prova, provocada pelos critérios do novo contrato pedagógico, tem garantido que a maior parte dos alunos consiga atingir o primeiro objetivo especifico".*

Nos gráficos 3 e 4, o terceiro expõe que 97% dos alunos aprendem no mínimo a mesma coisa que na prova individual, onde a maior parte afirma aprenderem mais. No quarto, 99,2% sente no máximo a mesma necessidade de colar, porem, a grande maioria afirma sentirem muito menos necessidade de colar. Com isso, chegamos à seguinte conclusão: "*Com a maior parte dos alunos aprendendo mais e sentindo menos necessidade de colar, embora esta questão, por ser de difícil trato por parte dos alunos, possa conter algum viés nos resultados, durante a realização da prova em dupla, o segundo objetivo especifico foi plenamente atingido pela maior parte dos alunos*.".

Para os gráficos 5 e 6, o quinto mostra que 97,9% sentem que os conteúdos parecem ter sido melhores assimilados no mínimo a mesma coisa que a avaliação individual, também que a maioria afirma que assimilou mais ou muito mais. No sexto, 97,9% aprendeu no mínimo à mesma coisa, também que a maior parte diz que aprendeu mais ou muito mais. Com isso, concluímos: "*a maior parte dos alunos além de aprender mais, afirmou que os conteúdos foram mais bem assimilados, um resultado altamente significativo, mostrando que o terceiro objetivo especifico foi plenamente atingido pela maioria.*".

A análise das questões 7, 8 e 9 nos traz resultados bastante animadores em complemento as questões tratadas anteriormente, onde o sétimo mostra que 97%, o oitavo 97% e o nono 98% dos alunos afirma que a avaliação em dupla proposta, com seus critérios estabelecidos no novo contrato didático, consegue totalmente ou em parte atingir todos os objetivos específicos. Levando-nos a concluir que: “*a avaliação em dupla proposta se mostra significativamente mais completa que a avaliação individual tradicional”.*

5 Considerações Finais

Os resultados apresentados neste trabalho mostram que a avaliação em dupla proposta, juntamente com os critérios adotados dentro de um novo contrato didático, atingiu o objetivo geral de uma avaliação que permita melhor apropriação de conhecimento que a forma individual; além, dos objetivos específicos de uma forma de avaliar que permita uma melhor preparação, oportunidade de aprender durante e melhor aprendizagem no final do processo.

Assim como mostra as seguintes colocações de Carvalho (2001) e Castelhano & César (2000):

> “todos os alunos que participaram da pesquisa afirmaram ter gostado de resolver as tarefas em pares; que muitos pediram aos professores para trabalharem desta forma nas aulas de matemática; que muitos dos alunos apontados como pouco empenhados e que rejeitavam a matemática tiveram desempenhos estatísticos superiores aos que habitualmente tinham nas aulas de matemática.” (Carvalho, 2001, p. 479)
> “... os números são bastante evidentes quanto à aceitação, por parte dos alunos, deste novo método de trabalho. A maioria dos alunos refere que o que mais lhe agradou, nas aulas de Matemática, foi o trabalho em díade, a cooperação entre alunos...” (Castelhano & César, 2000, p. 5)

Os alunos que participaram desta pesquisa se mostraram muito receptivos e afirmaram ter gostado desta proposta de avaliação e a oportunidade de interagir na apropriação do conhecimento, inclusive propondo aos professores de outras disciplinas a mesma forma de avaliar.

Os percentuais obtidos nas diversas questões respondidas pelos alunos foram altamente significativos, evidenciando a eficácia da proposta para atingir os objetivos. Podemos ver através do trabalho de Castelhano & César (2000): “...com alunos pré-universitários na faixa de 17 e 18 anos, que aproximadamente 95% gostou de trabalhar em díade e concordam que a aprendizagem é mais fácil, onde este resultado está de acordo com os resultados nacionais obtidos em Portugal...”. Esta constatação se mostrou muito similar com os nossos questionamentos sobre a nossa avaliação em dupla, o que trouxe uma maior credibilidade e segurança nos resultados obtidos.

Com os objetivos atingidos, chegamos à conclusão que esta proposta para avaliar, na opinião dos alunos, trouxe uma possibilidade maior de usar a avaliação para auxiliar o processo de aprendizagem, garantindo a eles não só uma oportunidade de aprender melhor os conteúdos, como também, um maior crescimento nas relações Interpessoais – hoje –, de fundamental importância na sociedade contemporânea e para o desenvolvimento profissional.

O resultado deste trabalho piloto abre caminho para o aprofundamento do estudo desta proposta de avaliação. Acreditamos que a mesma poderá funcionar em outras disciplinas relacionadas à aquisição de conhecimento. Outros ganhos obtidos neste trabalho podem ser considerados, tais como, facilidade de fiscalização, tempo em correções de provas e economia de material. Abrindo espaço para novas pesquisas.

Referências

- Almeida, P; César, M. (2006): “Um contrato didático inovador em aulas de ciências do 10° ano de escolaridade.” Revista Electrônica de Enseñanza de lãs Ciências 3, 356-377.
- Batanero, C (2001): Didáctica de la Estadística. Departamento de Didáctica de la matemática, Universidad de Granada.
- Carvalho, C (2001): Interacção entre pares: Contributos para a promoção do desenvolvimento lógico e do desempenho estatístico no 7º ano de escolaridade. Departamento de Educação da Faculdade de Ciências, Universidade de Lisboa, Portugal.
- Carvalho, C.; César, M. (2001): “Aprender Estatística através de trabalho colaborativo:Dados referentes ao 7º ano de escolaridade.” Projeto Interacção e Conhecimento: Centro de Investigação em Educação da Faculdade de Ciências da Universidade de Lisboa.
- Carvalho, C.; César, M. (2002): “Interações sociais, desenvolvimento cognitivo e Matemática.” Actas do 5º Congresso da SPCE (P. 407-416). Porto: Colibri/SPCE.
- César, M.; Torres, M.; Caçador, F.; Candeias, N. (1999): “E se eu aprender contigo? A interacção entre pares e a apreensão de conhecimentos matemáticos.” Em: M.V. Pires, C.M. Morais, J.P. da Ponte, M.H. Fernandes, A.M. Leitão, & M.L. Serrazina (Eds.), *Caminhos para a investigação em educação matemática em Portugal*, 73-89. Lisboa: SPCE - Secção de Educação Matemática / APM.
- César, M. (2003): “A escola inclusiva enquanto espaço-tempo de diálogo de todos e para todos.” Em: D. Rodrigues (Ed.), Perspectivas sobre inclusão: da educação a sociedade , 117-149. Porto Editora, Porto.
- Castelhano, A; César, M. (2000): “Os grandes também interagem”. IN: Seminário de Investigação em Educação Matemática – XI SIEM -, Comunicação oral, Lisboa, Portugal.
- Doise, W.; Mugny, G.; Perret-Clermont, A-N. (1975): “Social interaction and the development of cognitive operations.” European Journal of Social Psychology 3, 365-383.

- Marcel, D. M. (2003): “Avaliação no processo ensino-aprendizagem de matemática, no ensino médio: Uma abordagem formativa sócio-cognitivista.” Faculdade de Educação – Universidade Estadual de Campinas.
- Mattar, F. N. (2006): Pesquisa de Marketing. Editora Atlas, São Paulo.
- Mugny, G.; Perret-Clermont, A-N.; Doise, W. (1981): Progress in Applied Social Psychology. John Wiley & Sons, Londres.
- Pironel, M. (2002): “A avaliação integrada no processo ensino-aprendizagem de Matemática.” Dissertação – UNESP, Rio Claro.
- Ponte, J. P.; Serrazina, M. L. (2000): Didáctica da matemática do 1º ciclo. Universidade Aberta, Lisboa.
- Salvador, C. C. & Clos. (2000): Psicologia do Ensino. Artmed Editora, Porto Alegre.
- Vieira, S. (1980): Introdução à bioestatística. Editora Elsevier, Rio de Janeiro.
- Vieira, S. (2004): Bioestatística, Tópicos Avançados. Editora Elsevier, Rio de Janeiro.
- Vygotsky, L. S. (1978): Mind and society: The development of higher psychological process. Harvard University Press, Cambridge MA. [original publicado em russo em 1932]
- Vygotsky, L. S. (1995): Obras Escogidas. Visor, Madrid.

Pedro Cézar Pereira Coelho, é licenciado em matemática pela Universidade Federal da Paraíba - Campus II, com mestrado em Matemática Aplicada a Estatística pela mesma instituição. É professor titular do departamento de Matemática e Estatística da Universidade Estadual da Paraíba. Leciona disciplinas relacionadas à estatística em vários setores do conhecimento em instituições públicas e privadas de ensino universitário. Participante de fórum “GILEE” internacional de discussões sobre ensino de estatística. Vem desenvolvendo a pelos menos 2 anos a pesquisa sobre avaliação que gerou a artigo citado e buscando novas metodologias que auxiliem a aprendizagem de conteúdos estatísticos.

UNIÓN
REVISTA IBEROAMERICANA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA

Marzo de 2008, Número 13, páginas 39 - 49
ISSN: 1815-0640

De rectángulos y hexágonos. Una actividad para aproximarse a la investigación en matemáticas

Antonio M. Oller Marcén

Resumen

Se presenta una actividad basada en la papiroflexia que permite introducir y trabajar diversos conceptos, tanto desde un punto de vista métrico como sintético, de geometría elemental; así como permitir que el alumno adquiera una visión más realista de la matemática.

Abstract

We present an activity based in paper folding which allows to introduce various concepts coming from elementary geometry, to work with them from both synthetic and analytic point of view and to acquire a more realistic view of mathematics.

> Investigar es ver lo que todo el mundo ha visto, y pensar lo que nadie más ha pensado.
>
> *Albert Szent Gyorgi*

Introducción

El punto de partida de este trabajo está en una actividad realizada por el autor con estudiantes de 3º y 4º de E.S.O. (14 y 15 años) durante el curso 2006-2007 en el "Taller de Talento Matemático" (www.unizar.es/ttm) coordinado por la Universidad de Zaragoza.

Tratar de motivar la utilidad didáctica de la papiroflexia dentro del aula de matemáticas puede parecer innecesario por lo evidente. La gran variedad de actividades distintas dirigidas a los más diversos niveles (ver Hull (2006), Baena (1991), Royo (2002) o la página web Divulgamat[1], por ejemplo) hacen que sea una herramienta muy a tener en cuenta a la hora de trabajar aspectos de la geometría que van desde la semejanza de triángulos hasta los poliedros, pasando por las teselaciones del plano o el Teorema de Pitágoras[2]. A esta variedad hay que añadir el

[1] www.divulgamat.net. Entre los muy variados y recomendables materiales hay una interesante sección dedicada a aspectos matemáticos de la papiroflexia.
[2] Pero también al álgebra geométrica (demostración de identidades notables, etc.) e incluso al álgebra abstracta, donde se puede demostrar, por ejemplo, la trisección del ángulo o la duplicación del cubo (problemas irresolubles con regla y compás) doblando papel.

hecho de ser una actividad manipulativa, lo que hace que el alumno *vea y toque* las construcciones. Esta proximidad del alumno con el objeto matemático favorece la propuesta de problemas abiertos, facilitándose así un proceso de investigación en el que el alumno puede formular de manera natural sus propias conjeturas. Además el mismo proceso manipulativo da a menudo las claves que llevarán a la posible demostración de dichas conjeturas.

La actividad consiste en el análisis de una cierta construcción geométrica llevada a cabo doblando papel. En concreto nos centramos en analizar la forma de la figura obtenida, las longitudes de sus lados y el área de la misma. Se estudian, pues, tres aspectos geométricos importantes: forma, longitud y área. Hemos elegido estos aspectos, además de por su importancia intrínseca, porque nos permiten introducir distintas técnicas y formas de argumentación. Así en el estudio de la forma las argumentaciones están basadas en la simetría de la construcción, en la parte dedicada a las longitudes el tratamiento y las técnicas son más algebraicas y funcionales e involucran aspectos métricos y, por último, el estudio del área involucrará los dos aspectos anteriores. Esta multiplicidad en las técnicas empleadas hace que podamos elegir distintos aspectos de la actividad para trabajar en distintos niveles según a quiénes deseemos dirigir la actividad y qué conceptos deseemos trabajar.

Esta citada variedad de técnicas y conceptos, unida al planteamiento de preguntas abiertas del tipo ¿qué forma posee la figura obtenida? o ¿qué puedes decir sobre sus lados? puede hacer que el alumno adquiera una visión más real de lo que es investigar en matemáticas; alejándolo de la visión compartimentada y rígida que se suele tener de la matemática en estos niveles.

Así pues, y en resumen, los objetivos que se persiguen con esta actividad son los siguientes:

1. Trabajar conceptos geométricos básicos como la *forma*, la *medida* de longitudes y áreas o la *simetría*.
2. Emplear *diversas técnicas*: analíticas, algebraicas y sintéticas; observando cuáles son las más *adecuadas* en cada situación.
3. Observar que la matemática *no está formada por disciplinas aisladas.*
4. Adquirir una *visión más real* de la investigación matemática.

No se ha pretendido en ningún caso presentar una actividad cerrada ni completamente resuelta y terminada. La idea es que pueda servir como guía y punto de partida de modo que cada persona que se decida a emplearla pueda darle sus propios matices y seguir sus propios caminos. Con la esperanza de poder cumplir este objetivo comenzamos.

La construcción

Tomamos un rectángulo de papel. De momento nos despreocupamos del tamaño del mismo (y más en concreto de la proporción entre sus lados). Marcamos el centro del rectángulo por cualquier método que se nos ocurra; por ejemplo dibujando las diagonales y marcando su punto de corte o (preferiblemente) doblando el papel por la mitad horizontal y verticalmente. Una vez marcado el centro hacemos cuatro dobleces de manera que cada una de ellas lleva una de las esquinas del rectángulo sobre el centro del mismo[3] (ver figura 1).

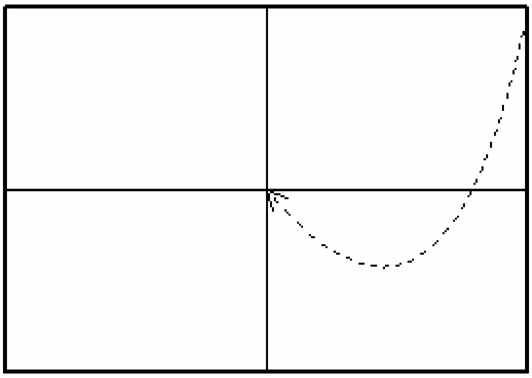


Figura 1: Uno de los cuatro pliegues iniciales

La pregunta es clara:

¿Qué podemos decir sobre la figura que surge al realizar esta construcción?

Un caso particular

Cuando nos enfrentamos a una pregunta abierta como la anterior suele ser útil analizar lo que sucede en un caso particular. Así, podemos intentar ver qué sucede cuando el rectángulo del que partimos es un cuadrado (ver figura 2). En este caso lo que obtenemos al plegar es, sencillamente, otro cuadrado[4].

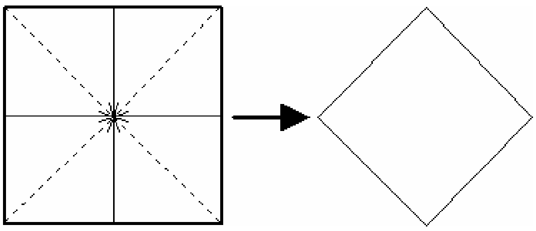


Figura 2: De un cuadrado a otro.

Este primer ejemplo nos hace sospechar que la proporción en la que se encuentran los lados del rectángulo original va a jugar un papel importante a la hora de analizar la situación. Teniendo esto en cuenta, podremos suponer en lo sucesivo

[3] A la hora de implementar la actividad puede ser interesante abrir una discusión sobre la unicidad o no de este pliegue. En este caso sólo existe una doblez que haga lo que nosotros deseamos, pero no siempre ocurre esto al trabajar doblando papel.
[4] El área de este cuadrado es la mitad de la del cuadrado original. Este hecho se discute más extensamente en una sección posterior, no obstante puede ser interesante en algunos niveles tratar de justificar (o demostrar) esta afirmación en este caso particular.

que uno de los lados del rectángulo de partida tiene longitud 1 mientras que el otro tiene una longitud *l* cualquiera (mayor que 1). Es interesante observar que esta suposición no es restrictiva puesto que en caso contrario bastaría con que los lados intercambien sus papeles; es decir, con rotar el rectángulo 90º para volver a la situación anterior.

La forma

Si realizamos los cuatro pliegues indicados en la construcción según la figura 1 y a continuación los desplegamos obtendremos algo similar a lo mostrado en la siguiente figura.

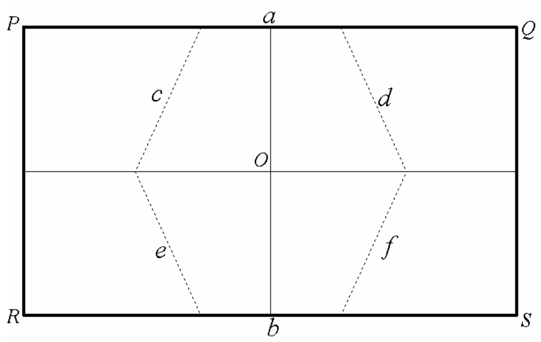


Figura 3: La figura obtenida tras la construcción.

En la figura anterior la arista *c* surge al plegar *P* sobre *O*, la arista *d* al plegar *Q* sobre *O* y así sucesivamente. Parece claro que el polígono obtenido es un hexágono, para justificarlo basta con asegurarse de que las líneas *c* y *e* se cortan sobre la mediatriz horizontal del rectángulo y que lo mismo hacen *d* y *f*, pero esto puede razonarse gracias a que por construcción dicho polígono va a tener en dicha mediatriz un eje de simetría.

Aún podemos decir algo más sobre este rectángulo. En primer lugar la simetría horizontal que acabamos de mencionar hace que *a*=*b* y por idéntico motivo se tiene que *c*=*e* y que *d*=*f*. Por otra parte, y también por construcción, se observa que el polígono obtenido posee en la mediatriz vertical del rectángulo un eje de simetría. Esto hace que *c*=*d* y que *e*=*f*.

En resumen, hemos obtenido un hexágono "casi-regular": los lados opuestos son iguales (*a*=*b*, *c*=*f*, *d*=*e*) y además cuatro de ellos son iguales entre sí (*c*=*d*=*e*=*f*).

Longitudes

Tras analizar la forma del polígono obtenido vamos a centrarnos en el cálculo de las longitudes de sus lados. Comenzaremos analizando el caso en que, al realizar uno de los cuatro pliegues, la situación final es como la de la figura 4. Las condiciones sobre la proporción de los lados con las que concluimos el apartado anterior se traducen cuantitativamente en que *OR*=1/2 y en que *PQ*=*l*/2.

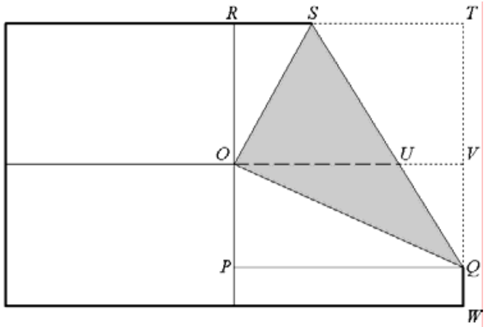


Figura 4: El rectángulo original tras uno de los cuatro pliegues.

Notar que, para que se de esta situación, debe cumplirse que el segmento *QW* aparezca. Nuestro primer objetivo será pues determinar qué condiciones deben darse para que esto ocurra. Para ello nos centramos en el triángulo Δ*OPQ*. Si llamamos *QW*=*y*, entonces es claro que *OQ*=*QT*=1–*y* y que *OP*=1/2–*y*. Además Δ*OPQ* es rectángulo; por lo que, aplicando el Teorema de Pitágoras se obtiene que:

$$(1-y)^2 = \left(\frac{1}{2} - y\right)^2 + \frac{l^2}{4}$$

de donde, sin más que despejar, se tiene $y = \frac{3-l^2}{4}$. Así pues, para que la situación al doblar sea como la de la figura 4, hemos de exigir que $l < \sqrt{3}$. Nótese que si $l = \sqrt{3}$ se obtiene *y=0* y la situación no corresponde exactamente con la de la figura, no obstante podemos tratar este caso de igual manera sin más que tener en cuenta que se tendría *Q*=*W*. Así pues, no es necesario más que distinguir dos casos a la hora de analizar la situación. El primero corresponderá a $l \leq \sqrt{3}$ y el segundo a la situación contraria, es decir, a $l > \sqrt{3}$.

- Caso $l \leq \sqrt{3}$:

Si continuamos plegando el rectángulo original del mismo modo, obtendremos primeramente una situación como la de la figura 5.

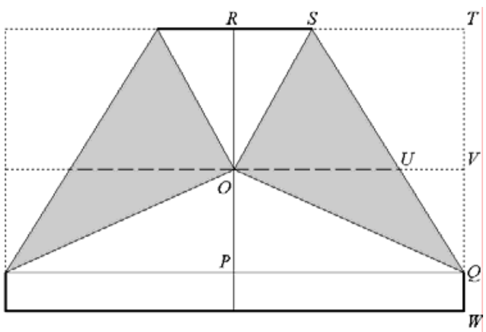


Figura 5: El rectángulo tras dos pliegues.

Por último, y tras doblar las dos esquinas inferiores, se llega a algo similar a lo mostrado en la figura 6 (un hexágono según se razonó en la sección anterior).

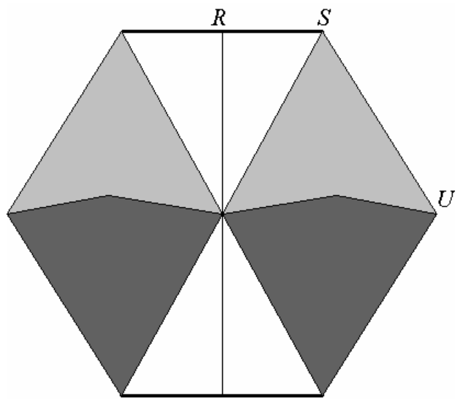


Figura 6: La situación final tras los cuatro pliegues.

Para calcular las medidas de los lados de este hexágono nos basta con encontrar las medidas *SU* y 2*RS*. Seguiremos la notación indicada en la figura 4. En primer lugar llamamos *RS*=*x* y observamos que *OR*=1/2 y que *OS*=l/2–*x*; además, como el triángulo Δ*ORS* es rectángulo, aplicando el Teorema de Pitágoras se tiene que:

$$\left(\frac{l}{2}-x\right)^2 = x^2+\frac{1}{4}$$

y despejando, que 2*RS*=2*x*=$\frac{l^2-1}{2l}$.

Calcular *SU* nos llevará algo más de trabajo. Comenzamos aplicando el Teorema de Pitágoras al triángulo Δ*QST*. Así, se tiene que:

$$QS^2 = ST^2 + QT^2 = \left(\frac{l}{2}-x\right)^2 + (1-y)^2$$

y de aquí, sustituyendo los valores que hemos obtenido para *x* e *y*, tenemos que *QS*=$\frac{(l^2+1)\sqrt{l^2+1}}{4l}$. Ahora observamos que los triángulos Δ*QST* y Δ*QUV* son semejantes. Por tanto se tiene que $\frac{QS}{SU}=\frac{QT}{TV}$, como *QT*=1–*y* y *TV*=1/2, despejando y sustituyendo se tiene que *SU*=$\frac{\sqrt{l^2+1}}{2l}$. Es interesante observar que en este caso se tiene que *SU*$\geq$2*RS*.

- Caso $l>\sqrt{3}$:

Hasta ahora nos hemos centrado en el caso *l*$\leq\sqrt{3}$, además de por la mayor sencillez de los cálculos hemos fijado esa restricción para que el hexágono se obtenga después de haber plegado las cuatro esquinas y quede – digamos – a la vista.

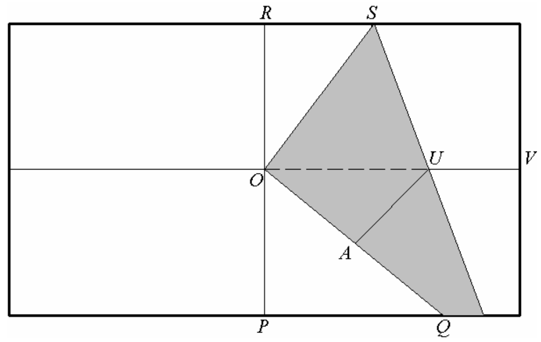


Figura 7: El rectángulo original tras uno de los cuatro pliegues.

Si tomamos, sin embargo, un rectángulo en el que la proporción entre los lados sea mayor que $\sqrt{3}$ obtendremos algo similar a lo mostrado en la figura 8.

La diferencia con respecto al caso anterior salta a la vista. En este caso una vez realizados los dos primeros pliegues (el de la figura 8 y el de la esquina superior izquierda, que es simétrico) no podemos llevar las esquinas inferiores sobre el centro porque éstas han "desaparecido". En este caso, para hacer aparecer el hexágono (ver figura 9) hemos de desdoblar cada uno de los cuatro pliegues. El hexágono quedará "dibujado" sobre el rectángulo de partida.

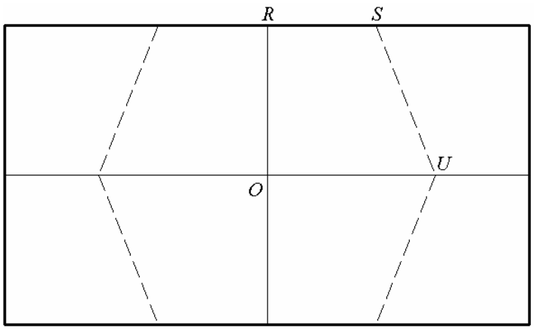


Figura 8: El hexágono "dibujado".

Al igual que en el caso anterior nos proponemos calcular las medidas de los lados del hexágono, a saber, 2*RS* y *SU*. Seguiremos la notación presentada en la figura 8.

En primer lugar llamamos *RS*=*x* y observamos que *OR*=1/2 y que *OS*=*ST*=l/2–*x*; además, como el triángulo Δ*ORS* es rectángulo, aplicando el Teorema de Pitágoras se tiene que:

$$\left(\frac{l}{2}-x\right)^2 = x^2 + \frac{1}{4}$$

y despejando, que $2RS=2x=\frac{l^2-1}{2l}$. Notar que este valor coincide con el obtenido en el caso anterior.

Encontrar el valor *SU* es algo más complicado en este caso. En primer lugar observamos que los triángulos ΔORS y ΔQPO son semejantes y así se tiene que $\frac{RS}{OS}=\frac{PO}{QO}$. Si despejamos y empleamos el valor de *RS* que acabamos de obtener, se tiene que $QO=\frac{l^2+1}{2(l^2-1)}$.

Ahora, también los triángulos ΔQPO y ΔOAU son semejantes; de donde se sigue que $\frac{AU}{OU}=\frac{PO}{QO}$. Observamos que $AU=UV=l/2-OU$, teniendo esto en cuenta junto con el valor de *QO* recién obtenido podemos despejar y obtener que $OU=\frac{l^2+1}{4l}$.

Por último podemos aplicar el Teorema del Coseno al triángulo ΔOSU para obtener:

$$SU^2=OU^2+OS^2-2OU\cdot OS\cdot\cos(\angle UOS)$$

En esta expresión los valores *OU* y *OS* son conocidos y además $\cos(\angle UOS)=\cos(\angle OSR)=\frac{RS}{OS}=\frac{l^2-1}{l^2+1}$. Sustituyendo se obtiene el valor buscado $SU=\frac{\sqrt{l^2+1}}{2l}$. Notar que también en este caso el valor coincide con el obtenido en el caso anterior; sin embargo, en este caso lo que se cumple es que $2RS>SU$.

- El caso $l=\sqrt{3}$:

Un aspecto interesante puede ser estudiar cuándo el hexágono que obtenemos es regular. Claramente esto sucederá siempre que $2RS=SU$, es decir, cuando se cumpla:

$$\frac{l^2-1}{2l}=\frac{\sqrt{l^2+1}}{2l}$$

Operando de manera sencilla se obtiene que el único valor con sentido que satisface esta ecuación es $l=\sqrt{3}$. Es decir, si partimos de un rectángulo cuyos lados esté en proporción $\sqrt{3}$ y plegamos sus cuatro esquinas llevándolas sobre el centro del mismo, obtendremos como resultado un hexágono regular. Notar que este caso constituye el punto de separación entre los dos casos que hemos considerado anteriormente.

- La proporción entre los lados:

En la figura 9 se ha representado gráficamente la proporción $\frac{SU}{2RS}$ entre los lados del hexágono en función de la proporción *l* entre los lados del rectángulo de partida.

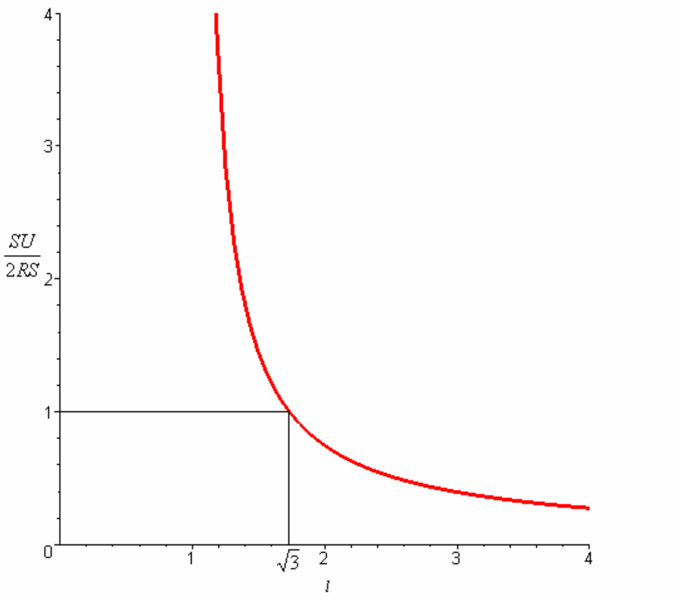


Figura 9: La proporción entre los lados del hexágono.

Recordar que teníamos la condición $l \geq 1$. Además en el caso *l*=1 obteníamos un cuadrado en lugar de un hexágono (el segmento *RS* era nulo en este caso) y por eso la función no está definida en este punto. En la gráfica hemos marcado el punto "frontera" entre las dos situaciones consideradas, el caso $l = \sqrt{3}$, en el que se obtenía un hexágono regular; es decir, en el que las medidas de los lados *SU* y *2RS* son iguales.

Como ya se indicó, si $l \leq \sqrt{3}$ el lado *SU* es mayor o igual que el lado *2RS* y lo contrario sucede si $l > \sqrt{3}$.

El área

Vamos a tratar de calcular el área del hexágono obtenido en función de la del rectángulo original. Recordar que partíamos del supuesto de que los lados de dicho rectángulo tenían valores 1 y *l*, por lo que su área tiene el valor *l*.

En primer lugar indicamos que, sin más que calcular ambos valores explícitamente empleando técnicas similares a las de la sección anterior, es fácil ver que *RS*=*UV*.

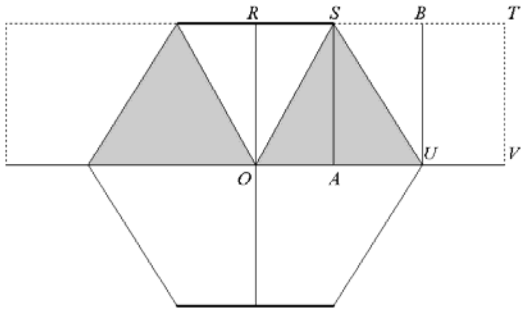


Figura 10: Calculando el área.

Si nos fijamos en la figura 7, puesto que acabamos de indicar que *RS*=*UV*, resulta que el área del rectángulo *ORSA* coincide con la del *UBTV*. Además, claramente las áreas de los triángulos Δ*ASU* y Δ*SUB* son iguales. De todo esto se deduce que el área del trapecio *ORSU* es la mitad que la del rectángulo *ORTV*. Finalmente basta observar que el área del trapecio *ORSU* es la cuarta parte de la del hexágono y que la del rectángulo *ORTV* es la cuarta parte de la del rectángulo original, para concluir que el área del hexágono es exactamente la mitad que la del rectángulo original; es decir, *l*/2.

Este hecho en interesante puesto que si pensamos en un proceso dinámico en el que partimos de un cuadrado de área unidad y vamos aplanándolo de manera continua y de forma que el área se mantenga constante obtendremos toda una familia de rectángulos de área unidad. Si a cada uno de estos rectángulos le aplicamos la construcción anterior obtendremos toda una familia de hexágonos (excepto el primero de ellos que será un cuadrado) “casi-regulares” como los descritos anteriormente (cuando la proporción entre los lados del rectángulo sea $\sqrt{3}$ el hexágono será regular). La particularidad es que todos estos hexágonos poseen la misma área (en este caso ½).

Recubriendo el plano

Un aspecto interesante al respecto de los hexágonos que hemos construido es que nos permiten embaldosar el plano sea cual sea el rectángulo de partida.

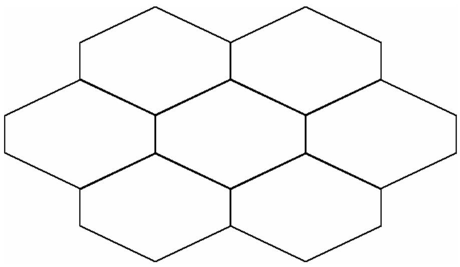


Figura 11: Teselando el plano.

Se puede justificar este hecho de diversas maneras. Por ejemplo puede verse directamente y de manera muy sencilla que los tres ángulos concurrentes en cada uno de los vértices suman 360º. Otro modo de razonar podría ser ver esta teselación como una deformación del recubrimiento del plano por hexágonos regulares.

Conclusión

Hemos presentado una actividad dirigida a estudiantes de entre 13 y 15 años mediante la cuál, además de trabajar conceptos matemáticos tales como la medida de longitudes y áreas, Teorema de Pitágoras, simetrías, resolución de ecuaciones, etc., hemos pretendido que el alumno sea capaz de observar la interrelación entre diversas áreas de la matemática así como el carácter abierto y vivo de la investigación en matemáticas[5].

Como se mencionó en la introducción, sólo se han presentado algunas de las preguntas más inmediatas a partir de la construcción dada; como son el estudio de la forma o la medida de longitudes y áreas. También se han dado breves pinceladas sobre otras cuestiones como el análisis de la función que aparece al estudiar la proporción entre los lados o la posibilidad de teselar el plano con las figuras obtenidas. Estos temas pueden servir como punto de partida de otras actividades cuyo objeto principal sea ese.

Además no deben dejarse de lado las preguntas que puedan surgir por parte de los alumnos durante el desarrollo de la actividad y que, si tienen interés y el profesor lo considera oportuno, pueden dar lugar a interesantes debates e investigaciones.

Bibliografía

- J. Baena Ruíz (1991): “Papiroflexia: actividades para investigar en clase de matemáticas”. Suma 9, 64-66.
- T. Hull (2006): “Project origami. Activities for exploring mathematics”. A.K. Peters Ltd., Hoboken.
- J.I. Royo Prieto (2002): “Matemáticas y papiroflexia”. Sigma: revista de matemáticas 21, 175-192.

Antonio M. Oller Marcén, es becario de investigación en el área de álgebra del Departamento de Matemáticas de la Universidad de Zaragoza (España).

[5] En opinión del autor, este último objetivo es el más importante.

REVISTA IBEROAMERICANA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA

Marzo de 2008, Número 13, páginas 51 - 60
ISSN: 1815-0640

Un aprendizaje eficaz de la numeración

Eduardo Martín Sánchez

Resumen

Son bastante conocidas las formas de leer por via directa o global y via indirecta o silábica. Esto ha dado lugar a intensas discusiones entre los maestros. En el aprendizaje de la numeración no hay ninguna discusión sobre si hay métodos más eficaces que otros en su aprendizaje. Con este artículo pretendo, aparte de mostrar una experiencia didáctica, plantear un debate sobre qué metodologías son más eficaces en el aprendizaje de las matemáticas y hacer una hipótesis: la perceción súbita o por via directa de la cantidad es necesaria para un aprendizaje eficaz de la numeración.

La vía directa y la vía indirecta

En el idioma español cuando hablamos de lectura es fácil reconocer si lo hacemos por la vía indirecta o por la directa. Cuando un niño aprende a leer por un método fonético o silábico lo hace por la vía indirecta y mediante la unión de sonidos (de fonemas o sílabas) llega a reconocer las palabras y asociarlas a su significado. Este mismo procedimiento es el que usan los buenos lectores para leer palabras desconocidas (trioxobromato, somormujar) o palabras inexistentes (clatregumel, idrontla). Cuando nos enfrentamos ante este tipo de palabras nuestra velocidad lectora disminuye considerablemente y por supuesto no puede haber comprensión al no tener o desconocer el significado.

Un lector experto cuando lee no usa el procedimiento anterior sino que reconoce la palabra o grupo de palabras de un solo vistazo sin necesidad de ir construyéndola letra a letra. Este procedimiento es el que nos permite leer textos como éste: “Según un etsduio de una uivennrsdiad ignlsea no ipmotra el odren en el que las ltears etsen ersciats...” Este procedimiento nos permite aprender el significado de nuevas palabras gracias al contexto en que están. Esto es lo que denominamos vía directa en la lectura.

¿Qué ocurre con el aprendizaje de los números? ¿Existen también distintas vías?

Los números y en especial los dígitos tienen personalidad propia y no sólo dentro de su puesto en una secuencia. Esta personalidad en los 3 primeros números es clara y los niños la conocen antes que su nombre. Tienen 2 años o tienen 3, quieren 2 patines o 1 balón... La personalidad de cada número está en la oposición y diferenciación con los demás. De esta forma se crea un significado propio para cada número. Esta sería la vía directa. Cuando enseñamos a los niños **únicamente a**

contar los números pierden su personalidad y sólo tienen significado dentro de una secuencia. Si a un niño que sólo usa la estrategia de contar le señalamos los dedos de una mano y le preguntamos ¿cuántos hay? contará desde el 1 al 5 sin reconocer en los dedos de la mano una de las representaciones del 5. A esa forma de reconocer la cantidad contando de uno en uno es a la que denomino vía indirecta.

El aprendizaje de los primeros números

Cuando un niño pequeño (de 2 a 3 años) adquiere los conceptos uno, dos y tres, los adquiere como si se tratase de cualquier otro concepto como amarillo grande o perro. En todos los casos se refiere a elementos de la realidad que percibe a través de los sentidos y de los cuales tiene experiencias vitales. Así prefiere el caramelo amarillo y no el rojo, el grande y no el pequeño, dos y no uno. Estos conceptos no siempre los sabe expresar de forma oral, pero si con gestos o sonido como "guau". Señala el caramelo amarillo por no saber decir "amarillo" o pone 2 dedos por no saber decir o no conocer la palabra "dos". Al preguntarle a un niño de 3 años por cuántas orejas tiene el caballo, señaló con 2 dedos mientras decía "uno". Esto pone de manifiesto que el concepto de estos tres números es anterior al nombre, igual que el de perro es anterior a la palabra "perro" que suelen llamar "guau". Pero el resto de los números no se pueden percibir de forma natural con sólo una mirada. Si vemos "IIIIIIIII" no sabemos cuantas "I" hay; las tenemos que contar. Pero si vemos "III III III" no necesitamos contar, podemos decir con un solo vistazo que son 9. Por tanto el 9 es algo más que el siguiente al 8, es también tres veces tres. Conocer el número 9 es más que saber su nombre "nueve" y su imagen "9". Cuanto más profundo sea su conocimiento mejor podemos hacer uso de él. Por ejemplo del nueve podemos tener las siguientes imágenes:

Todos los dedos de las dos manos menos uno.

Tres montones de tres puntos.

Cinco dedos de una mano y cuatro de otra.

La imagen del 9 de la baraja de cartas.

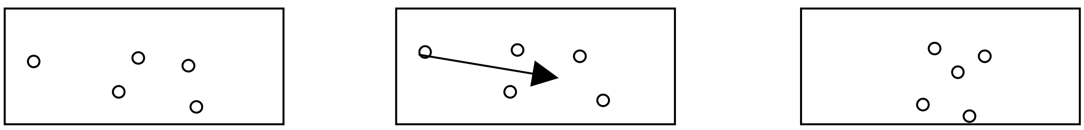
8+1 = 7+2 = 6+3 = 5+4 = 3+3+3 = 2+3+4=10 – 1

...

Para poder hacer cálculos y establecer relaciones entre números será más fácil cuantas más imágenes tengamos del número. Con saber contar puede ser suficiente para hacer los cálculos. Para calcular 5+4 se puede contar cinco dedos en una mano y cuatro en la otra, después contar todos juntos y llegaremos al nueve. La utilidad de esta estrategia de cálculo es poco práctica y es la que siguen usando todos los alumnos que fracasan en matemáticas en cursos superiores (9- 10 años). Cuando enseñamos a un niño a contar de uno en uno les enseñamos a reconocer las pequeñas cantidades de una forma lenta insegura y que supone un gran esfuerzo mental, pues tiene que asociar cada objeto a una palabra que ha memorizado en un cierto orden pero que carece de sentido. Si se despistan tienen que volver a empezar, por lo que contar supone un gran esfuerzo de concentración y atención. Este esfuerzo les impide dedicar atención al significado de la operación de contar. Si a un niño le damos un conjunto de 6 caramelos y otro de 7 chapas y le preguntamos en cual hay más, según cual haya sido el procedimiento de percibir la cantidad el resultado para su aprendizaje puede ser muy distinto. El niño que contó 6 caramelos de uno en uno y después 7 chapas de una en una puede que cuando termine de contar las 7 chapas no se acuerde de cuantos caramelos había y si lo recuerda puede que esté demasiado cansado para recordar si el 6 iba delante o detrás del 7. Todo este esfuerzo de concentración y memoria tiene muy poca utilidad desde el punto de vista matemático pues no desarrolla ninguna habilidad de aplicación en matemáticas. El niño que ve 2 grupos de 3 caramelos y 2 grupos de 3 chapas y otra más, puede garantizar sin ningún esfuerzo que hay una chapa más que caramelos y que el 7 es uno mayor que el 6 y que el 6 esta formado por 3+3 y que el 7 esta formado por 3+3+1. La utilidad de esta forma de percibir los números desde el punto de vista matemático creo que es clara. No sólo es más rápida y eficaz, sino que esa percepción le permite llegar con facilidad a los conceptos matemáticos de numeración, orden, descomposición de números en la suma de otros dos o tres, concepto de suma, concepto de resta, de igualdad y en general comprender el lenguaje matemático. Este procedimiento es el que usamos los adultos para percibir pequeños conjuntos. A este procedimiento es al que denomino vía directa.

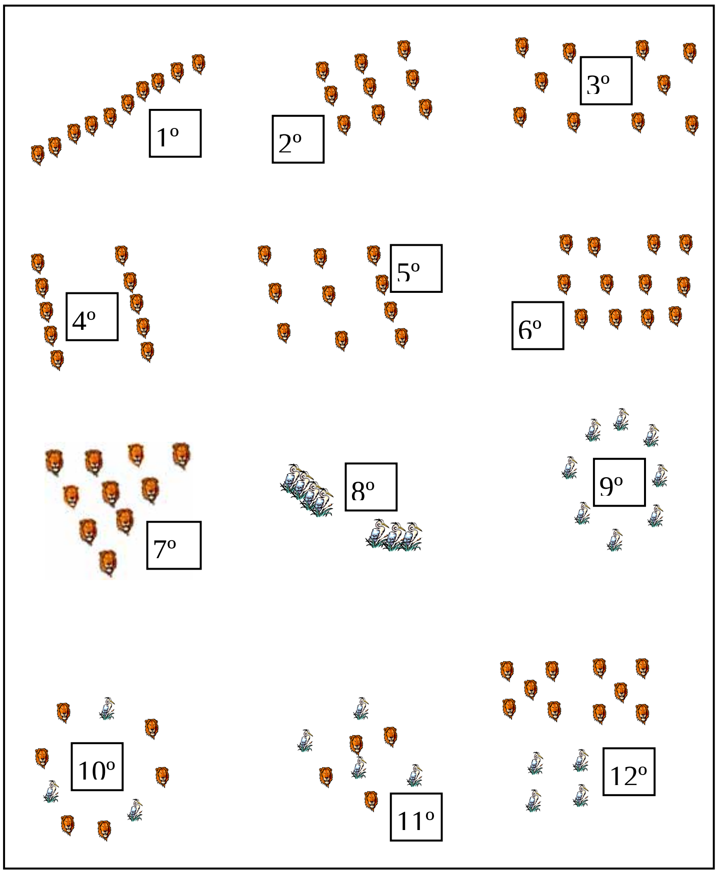
Por supuesto no siempre podemos utilizarlo. Si queremos contar las ovejas que hay en un rebaño no podríamos hacerlo si se están moviendo. Tendríamos que recurrir a la vía indirecta.

Por todo lo expuesto propongo que para saber cuantos objetos hay, a los niños les enseñemos a agrupar objetos con formas conocidas. Primero los niños tienen que tener imágenes de los números: los puntos del dado, la colocación de las figuras en las cartas de la baraja, los dedos de las manos... Después cuando les demos varios objetos los agruparan como alguna forma conocida para ver el total de un solo vistazo sin necesitar contar como se ve en estos dibujos.



En el primer grupo no vemos cuantos son, pero en el último enseguida reconocemos el cinco con seguridad por su equivalencia al 5 del dado. También si le enseñamos la mano abierta con todos los dedos reconoce el 5 sin necesidad de contar. Esto se consigue por imitación del adulto. Cuándo el maestro cuenta, los niños tienden a imitar, pero si nosotros agrupamos para ver el total los niños terminarán imitando.

Como percibimos los adultos las cantidades



Si nos enseñasen cada una de las siguientes imágenes durante décimas de segundo y nos preguntasen ¿Cuántos animales hay?

En la presentación 1º no podemos ver cuántos son aunque por aproximación nos acerquemos mucho o acertemos el número exacto.

En la 2º vemos tres grupos de 3 lo que mediante un cálculo nos lleva al 9 pero no a un niño pequeño que no sepa calcular.

En la 3º no nos cuesta reconocer el número porque reconocemos los 5 puntos del dado por dos veces lo que mediante un cálculo mental tan automatizado que es inconsciente nos lleva a reconocer el 10. Pero en la percepción del 10 no es directa como la del 2 o el 3 sino una memoria espacial de los puntos del dado y una elaboración mental (5+5=10). Dos grupos de 5 puntos colocados con otra disposición no conocida no nos permitiría reconocer tan claramente el 10 como vemos en la 4º.

En la 5º se suele confundir la columna de 4 con las otras de 3 y decir 9 en lugar de 10. También suele resultar difícil ver en la 6º los 4 grupos de 3, pero siempre son números menores de 5 que agrupamos para obtener el total.

Mayor elaboración mental tiene la 7º pues vemos claro la columna de 1 incluso la de 2 de lo que deducimos la secuencia y más bien adivinamos las de 3 y la de 4 y tras un cálculo más complejo llegamos al 10 (1+2+3+4=10).

En 8º se puede apreciar como nos cuesta diferenciar entra 3 y 4 objetos cuando están juntos y en línea ocupando el mismo espacio.

En 9º y 10º vemos como nos cuesta mucho ver los que hay en círculo cuando todos son iguales, pero no cuando los hay distintos que nos permite ver 3 patos que separan 4 grupos de 2 leones.

En la 11º cuesta más distinguir los 4 leones y las 4 aves que los 10 leones y las 4 aves del 12º gracias a la colocación de los leones en el 12º

En conclusión podemos decir que sólo percibimos o retenemos en nuestra memoria conjuntos de 1, 2, 3, ó 4 objetos. En conjuntos superiores no tenemos seguridad de la cantidad. Sólo con la colocación en una estructuración espacial conocida como los puntos del dado o figuras de la baraja nos permite conocer conjuntos mayores con seguridad. Pero podemos percibir 3 ó 4 conjuntos de 3 ó 4 objetos lo que nos lleva a ver con seguridad conjuntos de 10 ó 12 objetos.

Si esta es la forma de percibir con rapidez, seguridad y eficacia los números hasta el 10. ¿Por que no usarla para que sea la forma natural de aprendizaje de los números?

Como enseñar los números por la vía directa

Para que los niños desarrollen esta capacidad primero les mostramos dibujos de 1, 2 ó 3 objetos para que los asocie con las palabras uno, dos, tres y con sus grafías. Luego tienen que ser capaces de poner los mismos dedos que objetos, asociar conjuntos con igual cantidad de objetos. Podemos incluir como imagen las regletas, los puntos del dado o las cartas de la baraja además de los dedos y la colocación de objetos. La colocación de los elementos debe ser siempre la misma para recordarla como imagen del número. Por ejemplo los puntos del dado. Luego vamos ampliando uno a uno los demás números hasta el 10 de la misma forma.

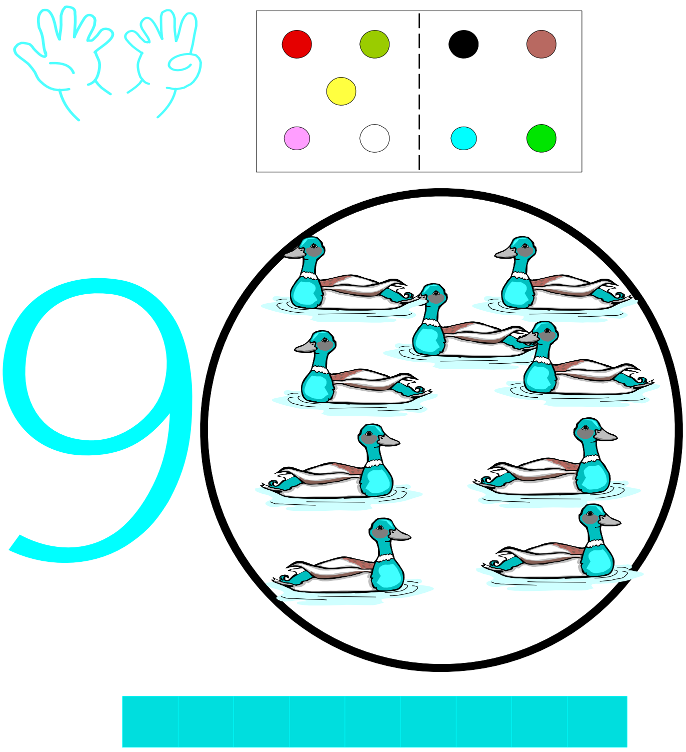
Cuando ya tienen imágenes de los 5 ó 6 primeros números podemos empezar a hacer transformaciones con ellos. Tenemos 3 objetos y ahora le añadimos 1 ¿cuántos hay? y ahora le quitamos 1 ¿cuántos quedan? A continuación añadimos y quitamos 2...

Esto nos lleva a reconocer el 4 como 2 grupos de 2 ó 1 de 3 y otro de 1. El 5 como un grupo de 2 y otro de 3...

Todos estos pasos los verbalizamos y los expresamos por escrito con los símbolos matemáticos.

Seguimos descomponiendo los números conocidos de todas las formas posibles. Mientras lo representamos. Cada niño va diciendo lo que ve y lo representa con números y signos. Poco a poco vamos ampliando los números de la misma forma. Así a la vez que conocen los números los conoce de forma completa con sus descomposiciones lo que le permite reconocer cantidades como las que vimos anteriormente con estrategias similares a las que empleamos los adultos. También podemos usar los dedos de la mano pero con visiones rápidas y de forma global para que cada número tenga un significado propio por si mismo.

Aquí presento unas cuantas imágenes del número 9 que uso en la escuela. El color corresponde al de las regletas o números de colores. La distribución de los puntos sigue el orden de los colores de las regletas (blanco, rojo, verde claro, rosa, amarillo, verde oscuro, negro, marrón y azul) para que al añadir o quitar no sea necesario cambiar la posición de ningún punto para reconocer el total. En los puntos del dado si tengo 3 y añado uno tengo que cambiar el punto del centro para formar el cuatro.



Pasos para los números 0 al 10

Conceptos previos

Mayor que...

Menor que...

Más largo que...

Más corto que...

Igual de largo que...

Emparejar objetos de dos conjuntos para ver que conjunto es mayor.

Hay los mismos que...

Hay más objetos que... (reconociéndolos a simple vista cuando la diferencia es grande, y a simple vista después de ordenados cuando la diferencia es pequeña)

Objetivos operativos. (Para alumnos de 5 a 6 años)

- Interiorizar los dígitos en el esquema corporal de los dedos de las manos.
- Establecer relación entre los números y cantidades de objetos discontinuos ordenados. (Puntos de los dados, cartas de la baraja) Sugiero criterio de agrupación que se ve en la figura del 9.
- Ordenar materiales discontinuos para reconocer la cantidad con una mirada sin contar. Ordenar los conjuntos de mayor a menor y viceversa.
- Ordenar materiales continuos por su longitud. (Regletas) Primero con 3 regletas y luego ir ampliando de una en una.
- Añadir y quitar los dedos que diga el profesor a partir de un número. (Siempre usando los dedos y añadiendo números que reconozca con facilidad)
- Establecer mentalmente relaciones, "mayor que", "menor que" entre longitudes de objetos hasta ser capaz de ordenarlos sin manipularlos. Decir éste es el mayor después éste... y éste el pequeño.(Con las regletas en la mesa del profesor decir el orden)
- Asociar dígito con cantidad.
- Contar progresivamente hasta 10. Primero con ayuda y después sin ella.
- Aprender a hacer la grafía de los números.
- Saber escribir los números al dictado, cuando los ven en regletas o en conjuntos ordenados (puntos del dado).
- Establecer correspondencias de igualdad entre los números, las regletas, los dedos y las agrupaciones ordenadas de objetos discontinuos.
- Ordenar los números primero manipulativamente con dígitos de cartulina o madera, después mentalmente. Dados varios números escribirlos de nuevo de forma ordenada.
- Observar el anterior y el siguiente de un número en la recta numérica y aplicarlo para escribir o señalar dichos números.
- Contar regresivamente de 10 a 1. Primero con ayuda y después sin ella.
- Asociar el 0 a un conjunto sin ningún elemento.
- Descomponer el número en dos sumandos con materiales continuos (regletas) y discontinuos (puntos del dado) Manipulando objetos, los dedos de la mano o regletas. Primero manipular y verbalizar la manipulación. Después simbolizar con números.
- Ante la vista de un número formado por puntos ordenados de dos colores representarlo como suma de un color más el otro igual al total.
- Ante la vista de un número formado por puntos ordenados de dos colores completar ecuaciones del tipo 2 +..... = 7; 7 – ….. = 2
- Lanzar dos dados y expresar el resultado como suma de uno más otro.
- Descomponer mentalmente un número como suma de otros dos.
- Expresar de muchas formas un número como resultado de sumas o restas.

Los sistemas de numeración

Qué es el sistema de numeración

En cualquier cultura cuando quieren expresar la cantidad de objetos de un conjunto ponen un nombre y un signo para cada cantidad. Pero la economía del lenguaje y de la memoria exige establecer ciertas regularidades para no tener que inventar infinitos signos. También es común en todas las culturas el hacer agrupaciones de objetos para poder reconocer cantidades mayores a la decena. Lógicamente la mayoría de las culturas hacen agrupaciones de 10 objetos. El tener 10 dedos y ser estos el elemento de representación más fácil de usar sin duda ha condicionado que sea esta cantidad la base de los sistemas de numeración. Por base de los sistemas de numeración debemos entender este número máximo de elementos sueltos que se admiten. Llegado a este número se reúnen en una agrupación de orden superior. Si quisiéramos contar dinero agrupamos las monedas en montones de diez hasta que no tenemos suficiente para hacer otro montón de diez completo. Entonces contamos los montones de diez y las monedas sueltas. Si tenemos 63 veremos 6 montones de 10 y 3 monedas sueltas. (suponiendo que todas las monedas valen 1). Pero si tuviésemos cantidades mucho mayores, o sus equivalentes en billetes de 10, 100, 1000,... continuaríamos con la tarea. Con los montones de 10 o billetes de 10 haríamos montones de 10 billetes y/o montones de monedas. Estos nuevos montones (centenas) junto con los billetes de 100 se agruparían en montones de 10 centenas (millares) y así sucesivamente.

La diferencia entre culturas está en la forma de simbolizar estas agrupaciones. Los egipcios representaban cada unidad con un signo (|) que repetían hasta 9 veces, las decenas con otro (∩) que también repetían hasta 9 veces, las centenas con otro (una especie de cayado o línea espiral) y así sucesivamente. Los demás signos son más complejos. Los romanos y los griegos lo hacían de forma similar pero los signos eran letras. Al llegar a cinco lo representa con una letra distinta lo que facilita la lectura. Los chinos tienen un signo para cada número del uno al nueve lo que facilita la lectura y el cálculo respecto al sistema romano. A estos dígitos le añade un signo para señalar si son decenas, centenas... Nuestro actual sistema de numeración procede de la India que a través del mundo musulmán pasó a Europa. Es el más practico y eficaz. Sólo necesita de 10 signos y por su posición relativa se sabe si son unidades, decenas, centenas... También en la América precolombina se empleaba este sistema de numeración posicional, pero en base 20. Uno de los sistemas de numeración más antiguos que se conocen es el de Mesopotámica. Es posicional como el nuestro, pero en base 60. En la actualidad se conservan medidas en esta base, como las angulares o las de tiempo en horas, minutos y segundos.

El juego del mus: un modelo útil para la enseñanza del sistema de numeración

Para jugar al mus se emplea un sistema de numeración propio. No usa signos, se basa en la percepción directa de la cantidad total. Para ello se emplean "amarracos" que pueden ser cualquier objeto: monedas, piedrecillas...Como se suele jugar por parejas, un miembro de la pareja coge los "amarracos" de primer orden hasta 4. Cuando tienen el 5º se convierte en una unidad de 2º orden. Para ello se cambian los 5 “amarracos” de primer orden por uno de segundo orden. Las unidades de segundo orden son los “amarracos” del 2º compañero de juego. Como se puede ver fácilmente el mayor número que se puede tener es de 4 de 2º orden que valen 4x5=20 y 4 de 1º orden. Por tanto el mayor número representado es el 24. Por eso las partidas de mus se juegan siempre a 25 puntos, es decir cuando se necesita el 3º orden se acabó la partida.

Como se puede ver es un sistema de numeración en base 5. Es posicional por quién tiene las piezas, no por su posición relativa como en nuestro sistema de numeración. No necesita ni símbolos ni nombrar los números, pues a simple vista y de forma directa se reconoce la cantidad. Esta forma de ver las cantidades que resulta muy limitada sólo a pequeñas cantidades, es la que considero como más útil desde el punto de vista didáctico en el aprendizaje del sistema de numeración. Una vez entendido el mecanismo de la numeración y su representación con los símbolos se puede generalizar de forma abstracta hasta el infinito.

Pasos para la numeración hasta el 100

Conceptos previos

Los objetivos operativos de los números de 0 a 10.

Objetivos operativos. (Para alumnos de 5 a 7 años)

- Contar cantidades de entre 10 y 100 empaquetando materiales discontinuos en grupos de diez. (Se pretende desarrollar el concepto de decena al comprobar que para contar tiene que hacer montones de 10. Luego vera que hay decena y unidades que no llegan a completar otra decena)
- Medir longitudes menores de 100 cm. con regletas de 10 cm. y de 1 cm.
- Pesar masas menores de 100 grs. con pesas de 10 grs. y precisar con pesas de 1 gramo para las unidades.
- Representar numéricamente las cantidades y medidas con tantos grupos de 10 y tantas unidades.
- Asociar decenas con grupos de 10.
- Reconocer qué número corresponde a cada cantidad o medida de la magnitud.
- Contar progresivamente de 0 a 100.
- Contar de 10 en 10.
- Reconocer en cada número las unidades y decenas que lo forman.
- Expresar un número como suma de decenas exactas más unidades.
- Añadir y quitar elementos a una cantidad agrupada y ver como varia el número. (Primero trabajaremos sin cambio de decena. Añadiremos o quitaremos decenas o unidades que no den un cambio de decena.)
- Reconocer entre qué decenas se encuentra un número.
- Reconocer la decena más próxima a un número.
- Contar regresivamente del 100 al 0.

- Hacer series progresivas y regresivas con bolitas reconociendo el número sin contar y escribiéndolas en el cuaderno. Para ello añadimos o quitamos elementos a una cantidad agrupada (con bolitas). Si la serie es de dos en dos cada vez añadimos dos bolitas más y ver como varia el número. Para esto usamos dos cartulinas de distinto color: una para las unidades y otra para las decenas. En ambas haremos diez circulitos para ver cuando está completa la decena. Cada vez que se completa una decena se empaqueta y la añadimos a la cartulina de las decenas. Las bolitas que se ponen o se quitan se colocaran sobre una cartulina de intercambio para no equivocarse cuando se completa una decena y hay que seguir añadiendo bolitas. Al terminar de completar la decena se debe preguntar ¿cuál puede ser el resultado final cuando terminemos de añadir o quitar todas las bolitas? Así irán descubriendo estrategias apropiadas para el cálculo mental mediante la descomposición del número en dos sumandos, uno hasta completar la decena y el resto la cifra de las unidades.

Conclusión y aclaraciones

Con este articulo pretendo explicar mi experiencia de 27 años como maestro de primaria (alumnos de 6 a 11 años) y más escasa en infantil (3 a 5 años) en la enseñanza de la numeración. Llevo años prestando especial atención a las estrategias que usan los niños para el aprendizaje de la numeración. No sólo en la escuela sino también fuera de ella. Después de esta observación expreso mi opinión en forma de hipótesis que sería necesario confirmar mediante un estudio experimental. Pero esta confirmación experimental está fuera de mi alcance como maestro. También quisiera resaltar la importancia que puede tener a largo plazo en el aprendizaje el uso de unas estrategias eficaces frente a otras poco eficaces.

En cuanto a los sistemas de numeración no pretendo dar una explicación detallada de ellos. Solamente una pequeña reseña que ayude a entender como trabajar estos conceptos sobre todo a aquellos maestros que no están familiarizados con las matemáticas. Una explicación más detallada se puede ver en la enciclopedia de Internet "Wikipedia".

Nota: He desarrollado dos aplicaciones de Clic y de Jclic para trabajar con esta metodología los 10 primeros números. El primero está a vuestra disposición de forma gratuita en la siguiente dirección: http://clic.xtec.net/db/act_es.jsp?id=3155. La segunda parte estará en la red próximamente.

Eduardo Martín Sánchez, es Maestro diplomado con la especialidad de Matemáticas y Ciencias de la Naturaleza, por la Universidad de Salamanca.
Maestro de primaria del C.E.I.P. Cristóbal Colón de El Puerto de Santa María, Cádiz.
Ha impartido o presentado ponencias en varios cursos o jornadas del C.E.P. de Cádiz.
Coordinador de los grupos de trabajo. Ha desarrollado las aplicaciones informáticas de Clic y Jclic: Los primeros números por vía visual directa I y Los primeros números por vía visual directa II.
E.mail: eduarms_martin@yahoo.es

UNIÓN
REVISTA IBEROAMERICANA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA

Marzo de 2008, Número 13, páginas 61 - 74
ISSN: 1815-0640

Un rectángulo casi de oro

Inés Márquez Rodríguez

Resumen

En este trabajo se han utilizado distintas secciones del rectángulo del tangram de los tres triángulos de Brügner para calcular proporciones entre los segmentos y áreas que se producen. Iterando las secciones del rectángulo hasta el infinito surgen varias sucesiones de elementos que resultan ser sucesiones de Fibonacci. Se hace una reflexión sobre la definición matemática de los cánones de belleza, basada en la proporcionalidad, tanto entre segmentos como entre áreas. Por último, adosando infinitos rectángulos semejantes al original, se construyen espirales de tipo circular, ovoidal y elíptico.

Abstract

Different sections in the rectangle of the Brügner´s three-triangle-tangram are used to derive proportions between the resulting lines and areas. Following with successive sections up to infinity lead to sequences of elements that can be identified as Fibonacci's successions. Some reflections on the meaning and validity of the mathematical definition of *beauty standard* based on the proportionality between either segments or areas are made. Finally, the assembling of rectangles proportional to the original one, give rise to circular, ovoid and elliptic spirals.

1. Introducción

Definir la belleza parece una tarea imposible. Sin embargo, a través de los siglos ha habido un gran empeño en establecer cánones de belleza para el arte, inspirados en buena medida en la observación de la naturaleza. Las figuras geométricas con medidas en cierta proporción, o con algún tipo de simetría, han sido consideradas generalmente como estéticamente bellas. Los polígonos y poliedros regulares, la circunferencia y esfera, las espirales, son figuras largamente estudiadas en matemáticas y también utilizadas como ornamento por su perfección. Pero además de las figuras regulares existen otras que también se perciben agradables a los sentidos. Esta percepción está basada en la proporción de sus medidas.

Los egipcios usaron en la construcción de sus pirámides ciertas proporciones entre sus lados, seguramente por razones estéticas. Posteriormente, los griegos estudiaron matemáticamente las proporciones entre los segmentos de distintos polígonos regulares, utilizando algunos de ellos como adornos o como anagramas de sus asociaciones, como es el caso del pentágono regular estrellado, o *pentagrama*, que fue usado por los pitagóricos como emblema de su escuela. Y aunque tanto la arquitectura como la escultura en la antigua Grecia están plagadas de unas determinadas proporciones, tampoco existen pruebas de que hayan sido utilizadas conscientemente en la estética griega.

¿Cuál es la proporción perfecta entre dos segmentos de distinta longitud? Entramos de lleno en un intento de definición matemática de la belleza basada en la proporcionalidad. Surge de esta manera la *divina proporción*. Este término fue acuñado por Fray Luca Paccioli di Borgo en su De Divina Proportione (1509), libro ilustrado por su amigo y artista Leonardo Da Vinci. La divina proporción, o proporción áurea, se obtiene de la división de un segmento en dos partes, de tal manera que la longitud de la parte mayor sea medio proporcional entre la longitud de la menor y la total. Esto conduce a la ecuación $x^2 - x - 1 = 0$. La solución positiva de esta ecuación es $\frac{1+\sqrt{5}}{2} \cong 1.618034...$ Este número irracional es el valor de la *razón áurea*, también llamado el *Número de Oro,* y se representa por ϕ, en honor de Fidias porque se supone que hizo uso de este valor en las proporciones de sus esculturas.

La proporción áurea aparece en la naturaleza, e intencionadamente o no, en las artes, no sólo en Egipto y Grecia sino en el resto de países del mundo. El *Hombre de Vitrubio* es un ejemplo de la existencia de esta proporción en el cuerpo humano. Y en general, la obra de Leonardo Da Vinci parece estar canonizada estéticamente por el número de oro. Las catedrales góticas, al igual que las pirámides egipcias y el Partenón griego, muestran secciones repetidas de rectángulos áureos de distintas dimensiones, es decir, rectángulos con sus lados en proporción áurea. Más modernamente el rectángulo áureo ha impuesto un estilo y se ha usado como formato de edición de libros, fotografías, ventanas, cajas de cigarrillos o tarjetas de crédito, desbancando en su belleza al propio cuadrado. También en otra de las bellas artes como es la Música, se han utilizado la divina proporción y las secuencias de Fibonacci, tanto en las melodías y armonizaciones como en los ritmos. Como ejemplos de músicos que las utilizaron, probablemente de una manera inconsciente, cabe citar a Mozart, Beethoven, Schubert y Debussý, y ya en el siglo XX, al húngaro Béla Bártok, al francés Olivier Messiaen, y al alemán Karlheinz Stockhausen, en un paso más allá del dodecafonismo.

La raíz del número de oro, $\sqrt{\phi} \cong 1.272020...$, no es tan nombrada, ni en el arte ni en las matemáticas, puesto que es subsidiaria de la importancia del propio número de oro. Por esta razón aparece también en las proporciones de esculturas y monumentos arquitectónicos. Por ejemplo, si los egipcios construyeron la pirámide de Keops con las proporciones mencionadas por el historiador Herodoto, entonces la pirámide, de altura 146m y de lado de la base 230m, sería semejante a otra pirámide que tuviera una medida de 2m como lado de la base y ϕ m como altura de una de las caras laterales. Así, la altura de tal pirámide sería $\sqrt{\phi}$ m. Pero también pudiera ser, puesto que usaban ruedas para medir, que utilizaran otro número mágico pero igualmente desconocido para ellos, π, para llegar a este valor, ya que $\frac{4}{\pi} \cong \sqrt{\phi}$. Y como simple coincidencia, el diámetro de la Tierra es $10000\sqrt{\phi}$ km; y si multiplicamos la raíz del Número de Oro por 2 nos da la medida de la pulgada en centímetros. Sin embargo, no nos podemos dejar seducir por la numerología, buscando proporciones en figuras complejas para ofrecer luego visiones esotéricas de la naturaleza o del arte, porque con total seguridad encontraríamos cualquier razón numérica que se nos propusiera.

Por otro lado, en la naturaleza también existen variadas muestras de sucesiones de Fibonacci, introducidas por el matemático Leonardo de Pisa (Fibonacci) en el siglo XIII en su estudio de la reproducción de conejos a partir de una pareja inicial. Las sucesiones de Fibonacci se definen como aquellas en las que, conocidos los dos primeros términos, el término general se obtiene como suma de los dos inmediatamente anteriores, es decir, $a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$. En estas sucesiones se cumple que $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{a_{n-1}} = \phi$, por lo que existe una íntima relación entre las sucesiones de Fibonacci y el Número de Oro.

El número de oro cumple $\phi = 1 + \frac{1}{\phi}$, $\phi^2 = \phi + 1$ y en general, $\phi^n = \phi^{n-1} + \phi^{n-2}$, con lo cual se concluye que ϕ se puede expresar como una fracción continua, y además que la sucesión $1, \phi, \phi^2, \phi^3, ..., \phi^n, ...$ es de Fibonacci.

2. Un rectángulo casi de oro

Una amiga me propuso el siguiente problema en la servilleta de papel de una tasca: *¿Cuál es la relación entre las dimensiones de un rectángulo ABCD de lados a y b, si al trazar la perpendicular desde el vértice C a la diagonal BD, secciona a ésta en dos segmentos b y d?* Este rectángulo, mostrado en la Fig. 1, seccionado por la diagonal BD y su perpendicular desde el vértice C, determina tres triángulos rectángulos, ABD, BEC y CED, semejantes, y es conocido como el *tangram mínimo de Brügner* (G. Brügner, 1984), un puzzle de sólo tres piezas cuyas dimensiones se han calculado de tal manera que el número de polígonos convexos que se pueden construir con él es máximo.

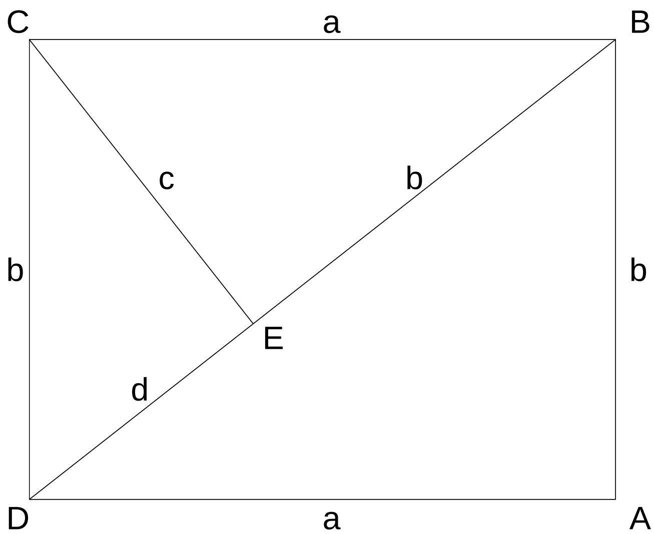


Fig.1. Tangram mínimo de Brügner

2.1. Proporción entre los lados *a* y *b*

En el triángulo BCD de la Fig.1, el cateto *a* es medio proporcional entre la hipotenusa y la proyección de *a* sobre la hipotenusa (Teorema del cateto), esto es, $a^2 = (b+d)b$. Por el Teorema de Pitágoras en el mismo triángulo BCD: $\sqrt{a^2+b^2} = b+d$, y combinando ambas ecuaciones obtenemos $a^4 - b^2a^2 - b^4 = 0$.

Esta última relación es una ecuación bicuadrada en *a*, con lo que fácilmente llegamos a:

$\frac{a^2}{b^2} = \frac{1+\sqrt{5}}{2} = \phi$. Por tanto la proporción buscada entre los lados de este rectángulo es la raíz cuadrada del número de oro, es decir;

$$\boxed{\frac{a}{b} = \sqrt{\phi} \cong 1.272020...}$$

Los ángulos agudos de cada uno de los tres triángulos valen $\arctan\sqrt{\phi} \cong 51.8273^{\circ}$ y $\arctan\frac{1}{\sqrt{\phi}} \cong 38.1727^{\circ}$

2.2. Proporción entre los segmentos b y d de la diagonal

En el triángulo BCD la altura *c* es medio proporcional entre los segmentos *b* y *d* que determina sobre la hipotenusa, y utilizando el teorema de Pitágoras en el triángulo CED:

$$c^2 = bd = b^2 - d^2 \quad \Rightarrow b^2 - db - d^2 = 0$$

Si despejamos *b* en esta ecuación de 2º grado se obtiene: $b = d \cdot \frac{1+\sqrt{5}}{2}$, o sea

$$\boxed{\frac{b}{d} = \phi}$$

Luego, el punto E divide a la diagonal en la proporción áurea, o sea, *b* y *d* están en *divina proporción*.

2.3. El punto E y las secciones áureas del rectángulo

Sobre el punto E se puede decir todavía más. Debido a la semejanza de los triángulos EMB y DPE de la Fig. 2, divide a las paralelas a los lados del rectángulo que pasan por E en la razón áurea: $\frac{m}{n}=\frac{h}{p}=\frac{b}{d}=\phi$.

E divide en la misma proporción a cualquier otro segmento que pase por E y tenga sus extremos, V y W, en lados opuestos del rectángulo, debido a la semejanza de los triángulos EHV y EPW.

Si trazamos la perpendicular a la diagonal BD desde el punto A se obtiene un punto E' que tiene las mismas propiedades que E. Las rectas verticales y horizontales por E y E' se llaman *secciones áureas* del rectángulo porque lo dividen en áreas cuya razón es ϕ.

Las secciones áureas definen un rectángulo central, EE'E''E''' semejante al ABCD. Los puntos E'' y E''' obtenidos al cortarse las secciones áureas coinciden con los construidos sobre la otra diagonal AC del rectángulo de una manera similar a E y E'.

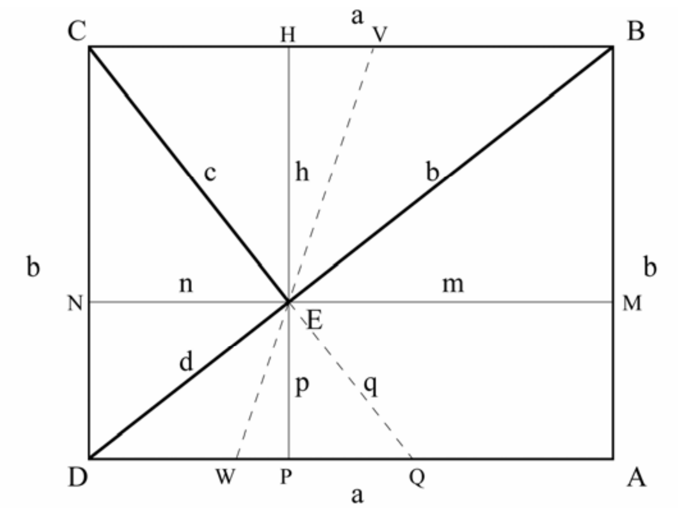


Fig.2

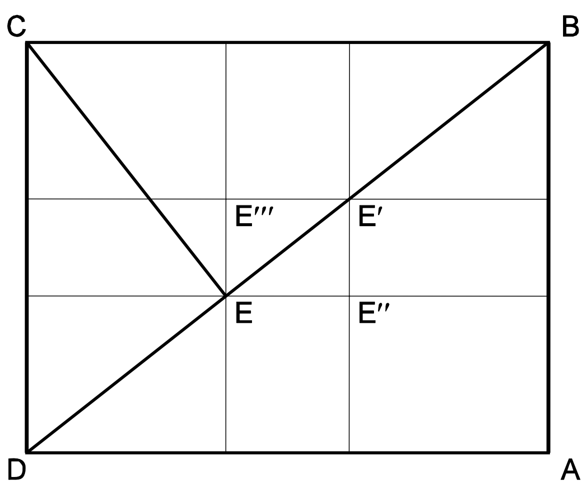


Fig.3

2.4. Rectángulos semejantes al tangram

Las secciones áureas del rectángulo que pasan por E determinan puntos áureos sobre los segmentos *a* y *b*, respectivamente, y por tanto se tiene: $a = m\phi$, $b = h\phi$, $a = n\phi^2$ y $b = p\phi^2$.

Esto significa que los rectángulos MBHE y PEND de la Fig.2 son semejantes al original ABCD, y las razones de semejanza son ϕ y ϕ^2, respectivamente. Y utilizando las semejanzas de varias figuras es fácil encontrar la secuencia de rectángulos semejantes EE'E''E''', EPQE'', DPEN, NEHC, EMBH, PABH y ABCD. La razón de semejanza, de mayor a menor, es $\sqrt{\phi}$, y la de áreas ϕ. Así, las secciones áureas que pasan por el punto E determinan cuatro rectángulos semejantes al tangram inicial (DPEN, NEHC, EMBH y PABH)

Se cumple además la igualdad entre los siguientes segmentos $h = d, n = q, m = c$.

2.5. La clase de los triángulos semejantes a los tres del tangram

Los antiguos egipcios usaban para dibujar dos líneas perpendiculares un triángulo rectángulo de dimensiones 3, 4 y 5. Cualquier otro triángulo rectángulo hubiese servido para esa tarea, pero posiblemente no conocían otro con dimensiones diferentes y no proporcionales a aquellas.

De una manera similar a como se define la divina proporción en un segmento, podríamos definir la proporción ideal entre los tres lados de un triángulo rectángulo como aquella en que el cateto mayor *a*, sea medio proporcional entre el cateto menor, *b*, y la hipotenusa *f*, esto es: $\frac{f}{a} = \frac{a}{b}$

Usando el teorema de Pitágoras tendríamos $a^2 = b\sqrt{a^2 + b^2}$, y resolviendo la ecuación bicuadrada que se obtiene al elevar al cuadrado, se deduce que $\frac{a}{b} = \sqrt{\phi}$. Es decir, entre todas las clases de triángulos rectángulos, la clase mejor proporcionada es la que tiene sus tres lados, de mayor a menor, en proporción $\sqrt{\phi}$, como ocurre con los tres triángulos del tangram. Por ejemplo, 1, $\sqrt{\phi}$ y ϕ sería una terna representativa de este tipo de triángulos rectángulos.

La razón de áreas de los triángulos BCD y BEC en la Fig.4 es $\frac{ab}{bc} = \phi$ y la de los triángulos BEC y CED es $\frac{bc}{dc} = \phi$. Por tanto, la altura del triángulo BCD produce una sección *áurea* del triángulo, en el sentido de que las relaciones de áreas del triángulo total frente a la del mayor es igual a la del mayor frente a la del menor, es decir:

$$\frac{Area(total)}{Area(mayor)} = \frac{Area(mayor)}{Area(menor)} = \phi$$

Así, podríamos concluir que esta clase de triángulos rectángulos son los más bellos, o mejor proporcionados, puesto que las dos áreas determinadas por su altura están en la proporción divina. Esta podría ser una definición de canon de belleza para las áreas de dos figuras, similar a la dada para longitudes.

Lo mismo sucede entre los triángulos más pequeños CNE y END, entre ELN y NLD, entre NRL y LRD, etc.

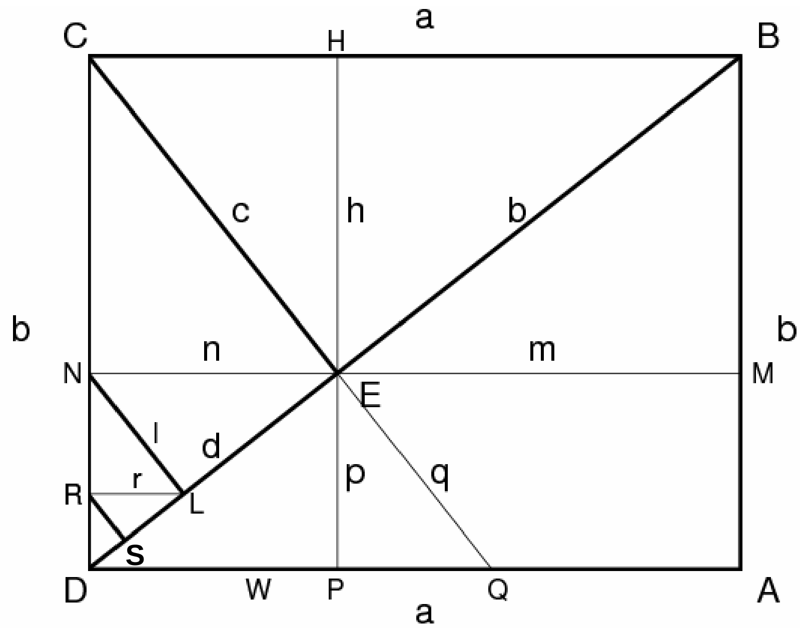


Fig. 4

Así pues, si formamos la sucesión de semiáreas de los triángulos LRD, NRL, NLD, ELN, END, CNE, CED, BEC, BCD,..., (Fig. 4) se tiene:

$$\frac{ab}{\phi^8}, \frac{ab}{\phi^7}, \frac{ab}{\phi^6}, \frac{ab}{\phi^5}, \frac{ab}{\phi^4}, \frac{ab}{\phi^3}, \frac{ab}{\phi^2}, \frac{ab}{\phi}, ab, \ldots.$$

que es una progresión geométrica de razón ϕ, y una sucesión de Fibonacci, pues la suma de dos términos consecutivos da el siguiente.

También es una sucesión de Fibonacci la sucesión de longitudes de los segmentos de la línea quebrada SRLNECB (Fig. 4) $\frac{a}{\phi^5}, \frac{a}{\phi^4}, \frac{a}{\phi^3}, \frac{a}{\phi^2}, \frac{a}{\phi^1}, a, \ldots.$

Prolongando ahora hacia el exterior los lados y la diagonal del tangram, construimos otro rectángulo semejante A'B'C'D trazando una paralela a la altura c por el vértice B. La razón de semejanza es ϕ^2. En efecto, pues el punto C divide al lado vertical DC' en la proporción áurea, y el punto A hace lo mismo sobre el lado horizontal DA'. Prolongando a su vez este rectángulo obtendríamos uno semejante, A''B''C''D, otra vez de razón de semejanza ϕ^2 frente al anterior. Repitiendo indefinidamente este proceso tendríamos una sucesión de rectángulos tangrams homotéticos en progresión geométrica de razón ϕ^2. En la Tabla 1 figuran las sucesiones de los parámetros del tangram expresados todos en función del lado *b*. Se observa en las columnas que todos los segmentos crecen en un factor ϕ^2.

Triángulo	Cateto menor	Cateto mayor	Hipotenusa	Área	Proyección menor (d)	Proyección mayor (b)	Altura (c)
END	$\frac{b}{\phi^2}$	$\frac{b\sqrt{\phi}}{\phi^2}$	$\frac{b}{\phi}$	$\frac{1}{2}\frac{b^2\sqrt{\phi}}{\phi^4}$	$\frac{b}{\phi^3}$	$\frac{b}{\phi^2}$	$\frac{b}{\sqrt{\phi}\phi^2}$
BCD	b	$b\sqrt{\phi}$	$b\phi$	$\frac{1}{2}b^2\sqrt{\phi}$	$\frac{b}{\phi}$	b	$\frac{b}{\sqrt{\phi}}$
B'C'D	$b\phi^2$	$b\sqrt{\phi}\phi^2$	$b\phi^3$	$\frac{1}{2}b^2\sqrt{\phi}\phi^4$	$b\phi$	$b\phi^2$	$\frac{b}{\sqrt{\phi}}\phi^2$
B''C''D	$b\phi^4$	$b\sqrt{\phi}\phi^4$	$b\phi^5$	$\frac{1}{2}b^2\sqrt{\phi}\phi^8$	$b\phi^3$	$b\phi^4$	$\frac{b}{\sqrt{\phi}}\phi^4$

Tabla 1. Valores de los segmentos del tangram

Además, hay varias *sucesiones de puntos de oro*, por ejemplo: sobre la diagonal, cada punto L, E, B B'..., es de oro entre el origen D y su siguiente. Sus distancias al origen son $\frac{b}{\phi^3}, \frac{b}{\phi}, b\phi, b\phi^3, ...$ y las distancias entre dos consecutivos son $\frac{b}{\phi^2}, b, b\phi^2, ...$

Análogamente sobre los lados horizontal, *a*, y vertical, *b*, las proyecciones de L, E, B,... son puntos de oro entre el origen D y su siguiente.

3. Espirales

Las espirales son abundantes en la naturaleza y se usan frecuentemente como elementos decorativos. Son conocidas matemáticamente, entre otras, la espiral de Arquímedes, de ecuación $\rho = a + b\theta$ en coordenadas polares, cuya distancia entre sus brazos es constante; la espiral logarítmica o equiangular de ecuación $\rho = ab^{\theta}$; la espiral doble de Fermat, o parabólica, de ecuación $\rho = \theta^{1/2}$; y algunas pseudo-espirales como la espiral de Durero o de Oro, muy parecida a la logarítmica y construida a partir de los rectángulos de oro, y la espiral de Fibonacci, basada en cuartos de círculos inscritos en cuadrados cuyos lados son los términos de la sucesión de Fibonacci cuyos dos primeros valores son 1 y 1.

Inspirada en la espiral de oro (cuya proporción entre los lados es ϕ), se puede construir una espiral basada en un primer cuadrado correspondiente al lado menor, *b*, del rectángulo del tangram de Brügner (cuya proporción entre los lados es $\sqrt{\phi}$), un segundo cuadrado adosado al anterior y de lado $b\sqrt{\phi}$, un tercer cuadrado adosado al anterior y de lado la suma de los lados de los dos cuadrados anteriores, y así sucesivamente. En la Fig.7 hemos construido una espiral con $b = 1$.

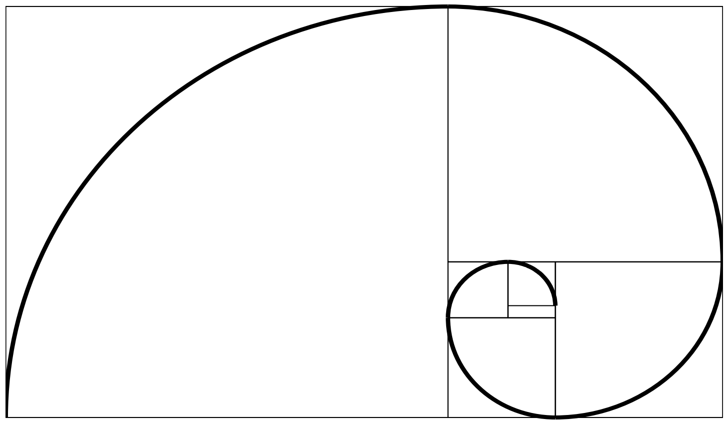


Fig. 7.

Los lados de los cuadrados forman la sucesión:

$$1,\ \sqrt{\phi},\ \ \sqrt{\phi}+1,\ \ 2\sqrt{\phi}+1,\ \ 3\sqrt{\phi}+2,\ \ 5\sqrt{\phi}+3,\ \ 8\sqrt{\phi}+5,\ \ 13\sqrt{\phi}+8,\ ...$$

Esta es una sucesión de Fibonacci, pues se cumple: $a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$, y por tanto $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_n}{a_{n-1}} = \phi$. Como conclusión, la sucesión de los rectángulos en los que se haya inscrita la espiral, tienden al rectángulo de oro, y por tanto las áreas de los cuadrados de las ramas de la espiral están en proporción de ϕ^2. Sin embargo, esto no es un resultado inesperado pues se cumpliría para cualquier cuadrado de lado *x* adosado al primero de lado 1.

La siguiente *espiral ovoidal*, Fig.8, está construida a base de cuartas partes de elipses verticales u horizontales de centro E e inscritas en los rectángulos semejantes DPEN, NEHC, EMBH, PABH, ABCD,... de la Fig.2, de tal manera que el semieje mayor de cada una de las elipses es el semieje menor de la siguiente cuyos lados están en proporción $\sqrt{\phi}$, y por tanto la proporción de áreas de los rectángulos es ϕ.

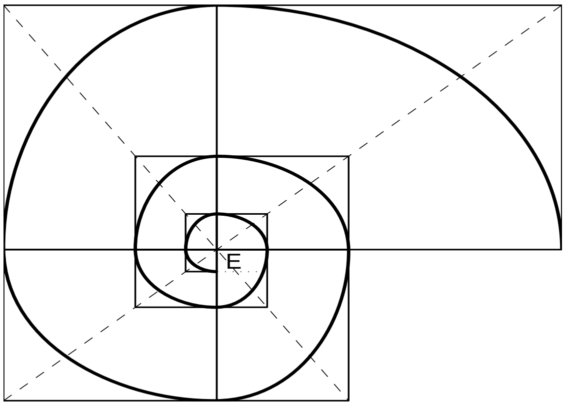


Fig. 8. Espiral ovoidal

El punto E es un punto de oro entre los vértices de las sucesivas diagonales de los rectángulos que se van formando en la espiral, todos ellos semejantes al original del tangram. Esta espiral es parecida a las usadas frecuentemente como elemento decorativo, como anagrama de empresas, en algunas páginas webs (ver por ejemplo http://www.splorp.com/critique/), etc.

La siguiente *espiral elíptica* está construida a base de cuartas partes de elipses cuyos diámetros son los rectángulos DPEN, EMBH, ABCD,... de la Fig.2, y cuyos lados son $(1,\sqrt{\phi}), (\phi,\phi\sqrt{\phi}), (\phi^2,\phi^2\sqrt{\phi}), (\phi^3,\phi^3\sqrt{\phi}), \ldots$, que están en proporción ϕ. Por tanto, la proporción de áreas de los sucesivos rectángulos es ϕ^2.

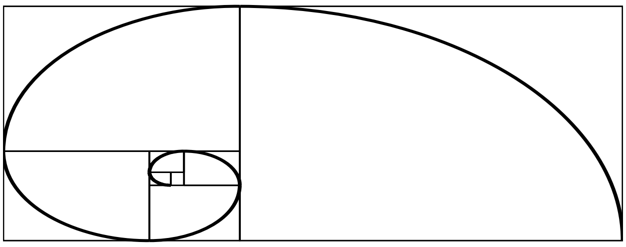


Fig. 9. Espiral elíptica

4. Conclusiones

Una vez calculada la proporción $\sqrt{\phi}$ entre los lados del tangram, el problema propuesto inicialmente queda resuelto. Pero el tangram da mucho más de sí, pues sus tres triángulos tienen sus lados en proporción $\sqrt{\phi}$, y sus alturas constituyen secciones de oro de cada uno de ellos, con lo que se ha podido definir una clase de triángulos rectángulos "bien proporcionados". También se han podido construir diferentes sucesiones de Fibonacci con segmentos específicos dentro del tangram, con sus subdivisiones y sus prolongaciones, o con áreas de triángulos semejantes a los tres del tangram. Además, se han ideado y dibujado distintas espirales basadas en el rectángulo del tangram, una de tipo circular, otra ovoidal y otra elíptica.

Empezamos hablando de la definición matemática de la belleza de las proporciones. El rectángulo de oro tiene sus lados en proporción $\phi \approx 1.62$, y el tangram en $\sqrt{\phi} \approx 1.27$, y si suponemos que el lado menor en ambos rectángulos es la unidad, las áreas respectivas son ϕ y $\sqrt{\phi}$, y las diagonales $\sqrt{1+\phi^2}$ y ϕ, respectivamente. Es difícil decir cuál de los dos rectángulos es más bonito, porque en ambos las proporciones están relacionadas con el número áureo. Si dividiéramos cada uno de ellos en dos triángulos, en un caso los lados están en divina proporción, y en el otro los triángulos resultan ser rectángulos de la clase definida en el apartado 2.5 como armoniosa. Es decir, lo que uno tiene bien proporcionado no lo tiene el otro, y recíprocamente. En cualquier caso, el deseo de definir la belleza mediante números o fórmulas matemáticas no deja de ser un intento de generalizar el sentido de la estética de cada uno en particular, y eso resulta sumamente difícil porque este sentido es muy dispar y subjetivo, como bien reconoce el refranero popular español.

Bibliografía

- COMAP, 1992, *Las Matemáticas de la vida cotidiana*. Ed. Addison-Wesley / Universidad Autónoma de Madrid
- Georg Brügner, 1984, *Three-triangle-tangram, BIT Numerical Mathematics*, Volume 24, Number 3, Ed. Springer Netherlands.

- Ghyka, Matila C., 1992, *Estética de las proporciones en la naturaleza y en las artes*. Ed. Poseidón. Barcelona.
- Ghyka, Matila C., 1992, *El número de oro, I Los ritmos, II Los ritos*. Ed. Poseidón. Barcelona.
- Paccioli di Borgo, Fray Luca, 1509, *De Divina Proportione*. Venecia.

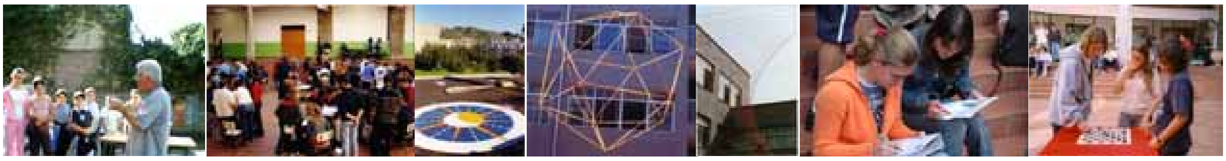
http://es.wikipedia.org/

http://www.piramides.org/

Inés Márquez Rodríguez, es Profesora Titular del Departamento de Análisis Matemático de la Universidad de La Laguna, en Tenerife (España). Es Colaboradora de Investigación del *Instituto de Astrofísica de Canarias*, y desarrolla sus líneas de investigación en *Alta Resolución en Física Solar*. Ha presentado varios trabajos en congresos y publicado numerosos artículos en revistas nacionales e internacionales. Tiene gran interés en la *Docencia Universitaria* y en la *Divulgación Científica*. Además de su dedicación a las labores de docencia e investigación, es muy aficionada a la *Música*, al *Dibujo* y a la *Pintura*.
e-mail*: imarquez@ull.es*

UNIÓN
REVISTA IBEROAMERICANA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA

Marzo de 2008, Número 13, páginas 75-77
ISSN: 1815-0640



Dinamización matemática

Departamento de Matemáticas
IES San Matías
Tenerife, España

12 DE MAYO DÍA ESCOLAR DE LAS MATEMÁTICAS

"LA FRASE SECRETA"

En el Departamento de Matemáticas del Instituto de Enseñanza Secundaria San Matías de San Cristóbal de La Laguna, (Tenerife - España) venimos celebrando el Día Escolar de las Matemáticas con diversas actividades que desarrollamos a lo largo de una semana sin tener que interrumpir las clases salvo en algún acto muy puntual.

Una de las actividades que propusimos consistió en dar unas operaciones que permitieran saber cuál es el número que representa a una letra y con ellas rellenar los huecos que conduzcan a descubrir cuál es la *frase secreta* que encierran.

Es una idea que puede servir de inspiración para otras similares que, obviamente, en cada caso se adaptarán al nivel de conocimientos del grupo de estudiantes al que va dirigida la *frase secreta*.

Resultó una entretenida actividad.

Profesora: Rosa María Llerena Mateo

Cada letra representa un número, resultado de la operación o propiedad que se indica a continuación.

D: $\left(\frac{2}{3}\right)^{-3}$

U: nº decimal no racional.

E: **-** 6 **:** (4 – 2 **.** 0'5)

T: $\frac{x-1}{3}=-\frac{x-4}{6}$

S: $\left(\frac{1}{10}\right)^{2}$

Q: "El doble de **a** menos su mitad"

A: $\left(\sqrt{2}+\sqrt{2}\right)^{2}$

G: $\left(\sqrt{5}\right)^{0}$

C: Si $a_n=(1-n)^2$, ¿cuánto vale a_{101}?

N: $7^{100}.7^{-101}$

I: 30% de 150

R: $-3.(-2)^2$

M: $\frac{x}{8}-\frac{x}{2}=\frac{x+1}{4}$

Ñ: $\left(\frac{-3}{2}\right)^{3}$

L: $|-5-7|$

O: ¿Qué número cumple que su triple más tres coincide con él?

P: La probabilidad de que salga un número primo al lanzar un dado.

Sustituir cada número por la letra que corresponda y leer la frase secreta

-----	-----		-----	-----	-----		-----	-----	-----	-----	-----	-----		-----	-----
-2	0’01		2	8	1/7		12	45	1	-2	-12	8		12	8
-----	-----	-----	-----	-----	-----		-----	-----	-----	-----		-----	-----		
12	-2	1/7	1	π	8		10^4	-3/2	-2/5	-3/2		-2	12		
-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	,		-----	-----	-----
4/6	-2	1/7	0’01	8	-2/5	45	-2	1/7	2	-3/2			$2a-\frac{a}{2}$	π	-2
-----	-----		-----	-----	-----		-----	-----	-----	-----	-----		-----	-----	-----
0’01	45		0’01	-3/2	1/7		-2/5	8	12	8	0’01		12	8	0’01
-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----		-----	-----		-----	-----	-----	
4/6	-12	-2	-27/8	-2	10^4	-2	0’01		27/8	-2		12	-3/2	0’01	
-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	,			
4/6	-2	1/7	0’01	8	-2/5	45	-2	1/7	2	-3/2	0’01				
-----	-----	-----		-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----		-----	-----	-----
12	8	0’01		-2	-2/5	4/6	-2	-3/2	-12	8	1/7		12	-3/2	0’01
-----	-----	-----	-----	-----	-----		-----	-----							
4/6	8	-12	2	-3/2	0’01		27/8	-2							
-----	-----		-----	-----	-----	-----	-----	-----	.						
12	8		12	-2	1/7	1	π	8							

UNIÓN
REVISTA IBEROAMERICANA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA

Marzo de 2008, Número 13 páginas 79 - 99
ISSN: 1815-0640

Sistemas educativos

Matemáticas en el Sistema Educativo Colombiano

Gloria García O

ASOCOLME

Asociación Colombiana de Matemática Educativa

Introducción

En Colombia la Ley General de Educación (1994) establece como principios para organizar el currículo flexibilidad y autonomía curricular acorde a las necesidades locales, regionales y nacionales. Los referentes para la organización y adaptación de currículos son los Lineamientos Curriculares (1998) y los Estándares propuestos por el Ministerio de Educación Nacional (MEN, 2001). La Ley organiza el sistema educativo colombiano en los siguientes tres niveles: educación preescolar, educación básica (primaria, secundaria), educación media. La educación preescolar se garantiza con mínimo un grado de escolaridad; la Educación Básica con nueve (9) grados divididos en dos ciclos, básica primaria, con cinco (5) grados, y básica secundaria con cuatro (4) grados, la educación media abarca dos grados.

Lineamientos Curriculares

La formulación de los Lineamientos Curriculares (1998) es el resultado de un proceso de discusión y consenso nacional de grupos de estudio e investigación en educación matemática coordinado por el Ministerio de Educación Nacional.

El documento Lineamientos Curriculares presenta una propuesta para reflexionar sobre: la naturaleza de las matemáticas y sus implicaciones pedagógicas y didácticas; una nueva visión del conocimiento matemático escolar y sobre distintas posibilidades de organizar el currículo y la evaluación.

Como elemento central de reflexión, el documento propone, analizar las respuestas de las siguientes preguntas:

- ¿Qué son las matemáticas?
- ¿En qué consiste la actividad matemática?
- ¿Para qué y cómo se enseñan las matemáticas?
- ¿Qué relación se establece entre las matemáticas y la cultura?
- ¿Cómo se puede organizar el currículo de matemáticas?

- ¿Qué énfasis es necesario hacer?
- ¿Qué principios, estrategias y criterios orientarían la evaluación del desempeño matemático de los alumnos?

Las respuestas se organizan en los siguientes apartados.

Diferentes concepciones acerca de la naturaleza de las matemáticas y sus implicaciones didácticas

En este apartado se describen los aportes de las siguientes corrientes filosóficas de las matemáticas:

Platonismo. Considera las matemáticas como un sistema de verdades que han existido siempre e independientemente del hombre. La tarea del matemático es descubrir esas verdades, ya que en cierto sentido esta sometido a ellas y las tiene que obedecer.

Logicismo. Considera que las matemáticas son una rama de la lógica, con vida propia pero con el mismo origen y método. En esta escuela, las matemáticas son parte de una disciplina universal que rige todas las formas de argumentación. Se describen las dos lógicas, deductiva e inductiva. La primera, busca la coherencia de las ideas entre sí y parte de premisas generales para llegar a conclusiones especificas. La inductiva busca la coherencia de las ideas con el mundo real, parte de observaciones especificas para llegar a conclusiones generales. La cuestión más importante de esta escuela es la reducción de los conceptos matemáticos a los conceptos lógicos.

Formalismo. Reconoce que las matemáticas son una creación de la mente humana, considera que las matemáticas es el resultado de ensamblar símbolos a partir de reglas y convenios preestablecidos para armar axiomas, definiciones y teoremas. La verdad de la matemática radica en la coherencia de las reglas para manipular los símbolos.

Intuicionismo. La matemática es el resultado de la elaborar en la mente las percepciones que se realizan a través de los sentidos y del estudio de las construcciones mentales cuyo origen es la construcción de los números naturales. La construcción de la matemática se realiza con ayuda de la intuición y se parte de lo intuitivamente dado. La verdad es sinónimo de demostrabilidad.

Constructivismo. Al igual que el intuicionismo, esta escuela considera que las matemáticas son una creación de la mente humana, tienen existencia real porque los objetos matemáticos son construidos por procedimientos finitos a partir de objetos primitivos. Se identifica esta corriente con la Pedagogía Activa y con la Psicología Genética en tanto se interesa por las condiciones en la que la mente realiza construcciones de los conceptos matemáticos, por la forma como los organiza en estructuras y por la aplicación que les da.

Cabe señalar que en cada descripción de las escuelas se formulan preguntas orientadoras para analizar las implicaciones didácticas.

Platonismo. ¿Cuántos de nuestros profesores y alumnos pertenecerán, sin proponérselo, y más aún, sin saberlo al Platonismo? ¿Cuál sería, para la corriente del Platonismo, un concepto de pedagogía activa coherente con su posición filosófica?

Formalismo. ¿Qué tanto énfasis formalista hay en la educación matemática en nuestras establecimientos educativos?

Constructivismo. ¿En qué medida el trabajo en clase de matemáticas tiene un enfoque constructivita? ¿Qué implicaciones se derivan de ese enfoque para el desarrollo integral de los estudiantes? ¿Qué tanta compatibilidad o incompatibilidad hay entre las corrientes mencionadas?

Con base en algunas orientaciones sobre procedimientos para la reflexión sobre las preguntas (realización de mesas redondas, reuniones de profesores, lecturas, entre otras acciones) el documento, presenta el apartado titulado “Elementos que inciden en una reconceptualización de la educación matemática”. Entre los elementos que se citan como necesarios para esta reconceptualización se encuentran:

- Los aportes de la filosofía de las matemáticas y de la educación matemática realizados por Miguel de Guzmán y por Paul Ernest. Específicamente se identifica la reconceptualización sobre la naturaleza, justificación y génesis tanto del conocimiento matemático como de los objetos de las matemáticas. Este planteamiento lleva a considerar y a valorar las aplicaciones de éstas en la ciencia y en la tecnología, a considerar que el conocimiento matemático esta conectado con la vida social de los hombres, y con su utilización como argumento de justificación en la toma de decisiones que afectan tanto lo individual como lo colectivo
- Los aportes de algunos conceptos de la didáctica de las matemáticas tales como: la transposición didáctica, el trabajo matemático, el trabajo del alumno y del profesor

Específicamente se reitera sobre la necesidad de “*Una nueva visión del conocimiento matemático en la escuela”* basada en:

- Aceptar que el conocimiento matemático es el resultado de una evolución histórica de un proceso cultural, cuyo estado actual no es la culminación definitiva del conocimiento y cuyos aspectos formales constituyen una faceta de este conocimiento.
- Valorar los procesos constructivos y de interacción social en la enseñanza y en el aprendizaje de las matemáticas.

- Valorar la herramienta potente que es el conocimiento matemático para el desarrollo de habilidades de pensamiento.
- Reconocer los fenómenos de transposición didáctica.
- Reconocer el impacto de las nuevas tecnologías en el currículo de matemáticas
- Privilegiar las situaciones problemáticas. como contexto del hacer matemático escolar

Para la organización del currículo se propone tener en cuenta:

- Procesos generales relacionados con el aprendizaje, como el razonamiento; la resolución y el planteamiento de problemas; la comunicación; la modelación y la elaboración, comparación y ejercitación de procedimientos.
- Conocimientos básicos relacionados con los procesos específicos que desarrollan el pensamiento matemático y con sistemas propios de las matemáticas.
- El contexto conceptualizado como el ambiente de interacción que rodea el aprendizaje y como el referente que le da sentido a las situaciones problemáticas
- Variables que deben tenerse en cuenta en el diseño y ejecución de experiencias didácticas tales como condiciones sociales y culturales tanto locales como internacionales; tipo de interacciones; intereses y creencias de estudiantes y profesores; condiciones económicas del grupo social en el que se concreta el acto educativo,…

El contexto integra las siguientes dos dimensiones: a) escenario de la situación problemática; b) procesos de interacción entre estudiantes y profesores para lograr el aprendizaje. La propuesta de situaciones problemáticas busca que las aplicaciones y los problemas no se reserven para ser considerados solamente después de que haya ocurrido el aprendizaje, sino que ellas pueden y deban utilizarse como contexto dentro del cual los alumnos descubren o reinventan las matemáticas. Las situaciones problemáticas comprometen desde la afectividad del estudiante, pasando por lograr el acercamiento significativo al aprendizaje de las matemáticas, hasta alcanzar el logro en el desarrollo de procesos de pensamientos matemático en el estudiante.

Especial relevancia cobra el trabajo del profesor, trabajo que es previo, durante y después de la clase. El trabajo previo (conocido como fase preactiva o de preparación) incluye la organización del contenido matemático en el currículo institucional; el cual integra consideraciones y toma de decisiones acerca de: qué enseñar, reflexiones sobre el conocimiento matemático para reinterpretarlo y convertirlo en objeto de enseñanza; conocimiento de los actuaciones cognitivas de los estudiantes, una reflexión acerca del porque y para qué de los contenidos seleccionados, los cuales deben ser acordes a los intereses y necesidades de los estudiantes y a los proyectos educativos institucionales. Con estas reflexiones el profesor diseña un boceto –denominado unidad didáctica– en el que integra los recursos del aprendizaje, las situaciones problemáticas e hipótesis de aprendizaje que le permitan observar en la clase las actuaciones y las soluciones de los estudiantes. La puesta en acción del boceto, fase de interacción, coloca el análisis en las interacciones entre situaciones problemáticas y estudiante y entre estudiantes y profesor. Especial atención merecen los procesos de evaluación, fase postactiva, que debe acompañar la puesta en escena del boceto. Esta fase es necesaria para revisar y replantear la propuesta.

Los conocimientos básicos se organizan en los siguientes pensamientos.

Pensamiento numérico y sistemas numéricos

Se utilizan los argumentos propuestos por Mcintosh para identificar el significado de este pensamiento: "*el pensamiento numérico se refiere a la comprensión general que tiene una persona sobre los números y las operaciones junto con la habilidad y la inclinación a usar juicios matemáticos y para desarrollar estrategias útiles al manejar números y operaciones" (Mcintosh citado en MEN, 1998)* En tal sentido se identifica este pensamiento con la inclinación de una persona para usar números y métodos cuantitativos como medios para comunicar, procesar e interpretar información. De esta manera, se distingue del concepto sentido numérico, en tanto incluye sentido operacional, habilidades y destrezas numéricas, comparaciones estimaciones y ordenes de magnitud.

La adquisición de este pensamiento es gradual y evoluciona en la medida en que los estudiantes tienen oportunidades de pensar los números y usarlos en contextos significativos. Su manifestación tiene lugar en situaciones donde los estudiantes utilizan el cálculo, en sus diferentes expresiones, mental, escrito y oral. El uso de algoritmos, su invención o aplicación es importante en tanto permite trabajar sobre aspectos propios del pensamiento numérico como son descomposición, recomposición y comprensión de propiedades numéricas.

Se definen los siguientes tres aspectos básicos del sistema de los números naturales:

- Comprensión de los números y de la numeración
- Comprensión del concepto de las operaciones
- Cálculos con números y aplicaciones de números y operaciones

Las situaciones problemáticas que permiten la comprensión de los números son las relativas a las diferentes interpretaciones del significado de los números, (secuencia verbal, conteo, medida, cardinal, ordinal, código tecla) y de sus diferentes representaciones; de igual modo, las relativas al valor absoluto y relativo de los números.

La Comprensión del sistema de numeración hace referencia a las actividades de contar, agrupar y usar el valor posicional. La comprensión del concepto de operaciones hace referencia a los diferentes significados de las operaciones en situaciones concretas. Para la adición se proponen los siguientes significados: unión parte-parte-todo; añadir; comparar; sustracción vectorial. Para la sustracción los significados son: quitar, comparar-diferencia; parte-parte-todo; adjunción. Los significados que se proponen para la multiplicación son: factor multiplicante, adición repetida, razón y producto cartesiano. Para al división repartir y sustracción repetida.

Pensamiento espacial y sistemas geométricos

El estudio del pensamiento espacial se argumenta con base en la importancia que Howard Gardner, en su teoría de las inteligencias múltiples, le otorga a la inteligencia espacial como inteligencia esencial en el pensamiento científico. El uso de información espacial para resolver problemas de ubicación, orientación y distribución de espacios es muy propio de las personas que han desarrollado la inteligencia espacial. Esta inteligencia es parte esencial en profesiones científicas y técnicas como: ingenierías, aviación, y disciplinas científicas como la fisica, química y la misma matemática.

Se retoma la propuesta de la Renovación Curricular (1987) de la geometría activa para estudiar los sistemas geométricos como herramientas de exploración y representación del espacio. Los sistemas geométricos se construyen a través de la exploración activa y modelación del espacio tanto para los objetos en reposo como para el movimiento. Con el estudio de estos sistemas se logra el desarrollo del pensamiento espacial, el cual es considerado como el conjunto de los procesos cognitivos mediante los cuales se construyen y se manipulan las representaciones mentales de los objetos del espacio, las relaciones entre ellos, sus transformaciones, y sus diversas traducciones a representaciones materiales. El proceso de construcción del espacio esta influenciado tanto por las características cognitivas individuales como también por el entorno físico, cultural, histórico y social.

Como conceptos y procedimientos importantes del pensamiento espacial se proponen:

- Estudiar los cuerpos, superficies y líneas. Colocar especial énfasis en la diferenciación entre cuerpos y superficies y entre superficies planas y curvas, entre línea recta y curva, entre línea como frontera de una superficie y línea como segmento y el concepto de punto. De igual manera se propone conceptualizar y diferenciar ángulo de giro, amplitud y apertura del ángulo
- Explorar activamente el espacio tridimensional en la realidad externa y representación de objetos sólidos ubicados en el espacio; representaciones planas de las formas y representaciones tridimensionales.
- Estudiar los sistemas y transformaciones de figuras, incluyendo el estudio de desplazamientos, rotaciones, traslaciones y reflexiones.

Para tutorizar el desarrollo del pensamiento geométrico se propone el modelo de Van Hiele, sin embargo, se hace un llamado para analizar con detenida atención los niveles propuestos en este modelo por cuanto están más orientados a evaluar etapas de desarrolló de pensamiento geométrico relacionado con la geometría euclidiana.

Pensamiento métrico y sistemas de medida

Se llama la atención para explorar desde el inicio de la escolaridad en los estudiantes los principios en que se apoya tanto la conceptualización de la medición y de la magnitud objeto de la medición como la comprensión de los procesos de medición.

En relación a los procesos de medición se sugiere iniciar con comparaciones y estimaciones cualitativas para seguir con clasificaciones relacionadas cono imágenes espaciales, es decir, con modelos geométricos. Luego se sugiere seguir con actividades de metrización para llegar a cuantificar numéricamente las dimensiones o magnitudes de objetos. Los procesos y conceptos que acompañan los sistemas métricos son:

- Construcción del concepto de magnitud
- Comprensión de los procesos de conservación de magnitudes
- Estimación de magnitudes y los aspectos de capturar lo continuo con lo discreto.
- Apreciación del rango de magnitudes
- Selección de unidades de medida, de patrones e instrumentos
- Diferencia entre la unidad y el patrón de medición
- Asignación numérica
- Papel del trasfondo social de la medición.

En seguida se sintetizan cada uno de los procesos mencionados

Construcción de la magnitud

La abstracción en el fenómeno u objeto de la magnitud concreta o cantidad susceptible de medición se constituye en el primer proceso para la construcción de la magnitud; se sugiere incluir en este proceso la comparación cualitativa, más qué, menos qué, es decir, trabajar con procesos relacionales, (ser más grande que, ser el anterior de,…) unidireccionales, sus inversos y las coordinaciones respectivas.

Desarrollo del proceso de conservación

La aceptación de lo que permanece invariante a pesar de las alteraciones de tiempo y espacio es un proceso imprescindible en la consolidación de los conceptos de longitud, área, volumen, peso, tiempo, etc. Se proponen ejemplos de proceso de conservación de magnitudes como: longitud, test clásico de conservación de longitudes de Piaget; masa, transformación de una varita de plastilina en barra y volumen, transvasamiento de cantidad de líquido de un recipiente a otro más alto.

Estimación de magnitudes

Este proceso se relaciona con el proceso de capturar lo continuo en lo discreto y con los conceptos de medida y conteo. Se propone partir de magnitudes de naturaleza continuas para iniciar una estimación de sus medidas.

Para el área de las superficies se sugiere "cuadricular" la representación de las áreas y con la unidad patrón baldosa y el número de ellas medir el área de la superficie. Con este proceso se genera la noción de recubrimiento por repetición de una unidad, como proceso previo al proceso de medición del área. Se sugiere realizar otras actividades para captar la naturaleza continua y aproximativa de la medida puesto que el proceso descrito promueve el carácter discreto y exacto de la medida.

Apreciación del rango de las magnitudes

Este proceso se complementa con la selección de unidades. Para iniciar este proceso se propone hacer estimaciones percentuales del rango en que se halla una magnitud concreta, por ejemplo la altura de una puerta utilizando unidades de medida ideosincratica. A partir de estas experiencias se construyen las situaciones relativas al rango de magnitudes.

Selección de unidades

Se anota que, en un proceso de medición, algunas veces no es necesario seleccionar unidades de medida, porque según la situación el proceso de medición termina con la ubicación de la cantidad respectiva en un rango de magnitudes y en la afirmación o negación de una comparación con la instancia conocida de la misma magnitud no necesariamente con la unidad.

En los casos que se requiera la selección de la unidad es necesario seleccionarla en el rango ya determinado y tiene que poder utilizarse con un sistema numérico previamente construido. En importante distinguir entre el patrón de medida y la unidad. El patrón debe tener, el lo posible, una unidad de área, su característica es que es concreto, y requiere ser estandarizado. Mientras que la unidad no tiene que estar ligada a un patrón determinado, deben proponerse diferentes situaciones para que los estudiantes adquieran conciencia del tamaño de las unidades. Uno de los aspectos más importantes en la conceptualización de la unidad, es saber que diferentes procesos de medición pueden llevar a asignar válidamente números distintos a las misma magnitud concreta del mismo objeto concreto. En cada proceso de medida se debe sensibilizar a los estudiantes para decidir sobre el grado de precisión que se requiere y por consiguiente, sobre lo pequeña que debe ser la unidad de medida y el refinamiento del instrumento de medida.

El pensamiento aleatorio y los sistemas de datos

La teoría de la probabilidad y sus aplicaciones a los fenómenos aleatorios han construido el andamiaje matemático que de alguna manera logra dominar y manejar acertadamente la incertidumbre. Fenómenos que en un comienzo parecen caóticos, regidos por el azar, son ordenados por la estadística mediante leyes aleatorias de una manera semejante a como actúan las leyes determinísticas sobre otros fenómenos de las ciencias. Se propone seguir la sugerencia de Shanghnessy (1985)) para desarrollar este pensamiento mediante contenidos de la probabilidad y la estadística. Para ello es necesario construir modelos de fenómenos físicos y desarrollos de estrategias de simulación de experimentos y conteo.

La búsqueda de respuestas a preguntas que sobre el mundo físico se hacen los niños es una actividad llena de sentido si se hace a través de la recolección y análisis de datos. Decidir sobre la pertinencia de la información necesaria, la forma de recogerla, de representarla y de interpretarla para obtener respuestas lleva a nuevas hipótesis y exploraciones enriquecidas. Es también importante utilizar distintas fuentes para la recolección, consultas, entrevistas, observaciones, así como las evaluaciones sobre veracidad de los datos, distorsiones, sesgos, lagunas omisiones, y evaluación de la actitud ética de quien recoge los datos y su responsabilidad social.

Es también importante analizar y reflexionar sobre la naturaleza de los datos, analizar su mínima estructura, el formato y seguramente el orden, es decir ampliar la comprensión hacia los sistemas de datos.

Las situaciones relativas al pensamiento inductivo se pueden trabajar sobre un conjunto de datos para proponer diferentes inferencias y analizar las posibilidades de ser ciertas. En este sentido el trabajo con problemas abiertos, con cierta carga de indeterminación ayuda para encontrar diferentes interpretaciones y tomar decisiones.

Una cuestión importante con el estudio de este pensamiento es el crear la necesidad de un mayor uso del pensamiento inductivo, y controvertir el énfasis en la búsqueda de respuesta correcta y única.

Se describe el modelo de Heinz Steinbrig basado en un análisis epistemológico de la naturaleza de la probabilidad el cual considera los siguientes tres niveles: a) estructura del contenido de la probabilidad y de la estadística: conceptos, métodos y diagramas; b) planificación, organización, guía e implementación del proceso de enseñanza por el docente; c) Contexto de aprendizaje de los estudiantes: significados de la representación, actividad y tareas. El autor señala que la relación entre los dos primeros niveles trata de responder a las siguientes preguntas: ¿Cómo es posible introducir los conceptos de aleatoriedad y de indeterminación y utilizarlos con ayuda de conceptos matemáticos de naturaleza determinante? ¿Cómo pueden hacerse predicciones relativas a situaciones inciertas y aleatorias bajo la forma de proposiciones matemáticas y cuál es el carácter especifico de estas predicciones?

Se propone para los cursos de la Educación básica las representaciones gráficas como las circulares, histogramas, diagramas de árbol como representaciones que captan la aleatoriedad y la incertidumbre tanto en la forma cualitativa como cuantitativa y desde las cuales los estudiantes pueden tomar decisiones sin recurrir al cálculo.

Pensamiento variacional y sistemas algebraicos y analíticos

Este pensamiento se propone para analizar, organizar y modelar matemáticamente situaciones y problemas tanto de la actividad práctica del hombre, como de las ciencias y las propiamente matemáticas donde la variación se encuentra como sustrato de ellas.

En esta forma se amplia la visión de variación por cuanto su estudio se inicia en el intento de cuantificar la variación por medio de las cantidades y las magnitudes.

Desde de un breve resumen histórico sobre la evolución histórica de la variación se describen algunos de los conceptos, procedimientos y métodos que involucra la variación y sus relaciones en formato de núcleos conceptuales:

- Continuo numérico, reales, en su interior procesos infinitos, su tendencia y aproximaciones sucesivas, divisibilidad.
- La función como dependencia y modelos de función
- Las magnitudes
- El álgebra en su sentido simbólico, particularmente el significado de variable
- Modelos matemáticos de tipos de variación: aditiva, multiplicativa, variación para medir el cambio absoluto y para medir el cambio relativo.

En los contextos de la vida práctica y en los científicos la variación se encuentra en contextos de dependencia entre variables o entre contextos donde una misma cantidad varía.

Atendiendo a que las estructuras conceptuales se desarrollan en largos periodos de tiempo y mediadas por diversos sistemas de representación, verbales, tabulares, gráficas de tipo cartesiano, representaciones pictóricas e icónicas.

Se propone iniciar tempranamente el estudio de la variación a partir de situaciones problemáticas cuyos a escenarios sean los referidos a fenómenos de cambio y variación en la vida práctica. La organización de la variación en tablas, puede iniciar en los estudiantes su estudio, los procesos aritméticos ayudan también a iniciar el estudio de la variable. La aproximación numérica y la estimación deben ser argumentos que permitan la solución de estas actividades.

Adicionalmente la tabla se constituye en una representación para iniciar el estudio de la función, también puede ayudar al estudio de la variación numérica discreta. Así mismo, las situaciones problemáticas deben seleccionarse para enfrentar a los estudiantes con la construcción de expresiones algebraicas o con la construcción de formulas, estas emergen expresiones que explican un patrón de variación; estas actividades ayudan a los estudiantes a comprender la sintaxis de las expresiones algebraicas. La tabla es también una herramienta necesaria en el estudio de la variable.

Otra herramienta necesaria para iniciar el estudio de la variación desde la primaria es el estudio de los patrones. Las actividades relativas a los patrones incluyen representaciones pictóricas e icónicas, escenarios geométricos y numéricos.

Por su parte, las gráficas cartesianas también pueden ser introducidas tempranamente en el currículo; ellas hacen posible el estudio del comportamiento cualitativo de la variación. Los contextos de variación proporcional integran el estudio y comprensión de variables intensivas con dimensión, así como ayudan al estudiante en la comprensión del razonamiento multiplicativo. También la gráfica brinda la oportunidad de estudiar los aspectos relativos a la dependencia entre variables, gestando la noción de función como dependencia.

Los contextos donde aparece la función establecen relaciones funcionales entre mundos que cambian, de esta manera emerge la función como herramienta necesaria para enlazar patrones de variación entre variables y para predecir y controlar el cambio.

Estándares Básicos de Competencias en Matemáticas

El Ministerio de Educación Nacional en la política de aumentar la cobertura y los esfuerzos para el mejoramiento de la calidad de la educación define los Estándares de Calidad (2001) los cuales son propuestos en conjunto con la comunidad de educadores matemáticos. Los estándares son acompañados de un breve marco conceptual que amplia profundiza aspectos de cada uno de los pensamientos propuestos en los lineamientos Curriculares. Especial atención merece la noción de competencia matemática, en tanto como lo señala el documento, los Lineamientos Curriculares presentan intuitivamente la noción de competencia puesto que colocan el énfasis en una consideración pragmática e instrumental del conocimiento matemático. La competencia es establecida en la relación entre dos facetas del conocimiento matemático: práctico y formal y el conocimiento conceptual y procedimental.

La complejidad conceptual y la gradualidad del aprendizaje de las matemáticas esta relacionada con la coherencia tanto vertical como horizontal. La primera esta dada por la relación de un estándar con los demás estándares del mismo pensamiento en los otros conjuntos de grados. La segunda esta dada por la relación que tiene un estándar determinado con los estándares de los demás pensamientos dentro del mismo conjunto de grados.

Estándares básicos de competencias en Matemáticas

Primero a Tercero

Pensamiento numérico y sistemas numéricos	Pensamiento espacial y sistemas geométricos
– Reconozco significados del numero en diferentes contextos (medición, conteo, comparación, codificación, localización entre otros) – Describo comparo y cuantifico, situaciones con números en diferentes contextos y con diversas representaciones. – Describo situaciones que requieren el uso de medidas relativas. – Describo situaciones de medición utilizando fracciones comunes. – Uso representaciones –principalmente concretas y pictóricas– para explicar el valor de posición en el sistema de numeración decimal. – Uso representaciones –principalmente concretas y pictóricas– para realizar equivalencias de un numero en las diferentes unidades del sistema decimal. – Reconozco propiedades de los números (ser par, ser impar, etc.) y relaciones entre ellos (ser mayor que, ser menor que, ser múltiplo de, ser divisible por, etc.) en diferentes contextos. – Resuelvo y formulo problemas en situaciones aditivas de composición y de transformación. – Resuelvo y formulo problemas en situaciones de variación proporcional. – Uso diversas estrategias de calculo (especial-mente calculo mental) y de estimación para resolver problemas en situaciones aditivas y multiplicativas. – Identifico si a la luz de lo datos de un problema, los resultados obtenidos son o no razonables. – Identifico regularidad y propiedades de los números utilizando diferentes instrumentos de calculo (calculadoras, ábacos, bloques múltiples, etc.)	– Diferencio atributos y propiedades de objetos tridimensionales. – Dibujo y describo cuerpos o figuras tridimensionales en distintas posiciones y tamaños – Reconozco nociones de horizontalidad, verticalidad, paralelismo y perpendicularidad e distintos contextos y su condición relativa con respecto a diferentes sistemas de referencia. – Represento el espacio circundante para establecer relaciones espaciales. – Reconozco y aplico traslaciones y giros sobre una figura. – Reconozco y valoro simetrías en distintos aspectos del arte y el diseño. – Reconozco congruencias y semejanzas entre figuras (ampliar, reducir) – Realizo construcciones y diseños utilizando cuerpos y figuras geométricas bidimensionales. – Desarrollo habilidades para relacionar dirección, distancia y posición en el espacio.

Pensamiento métrico y sistema de medidas	Pensamiento aleatorio y sistema de datos	Pensamiento variacional y sistemas algebraicos y analíticos
– Reconozco en los objetos propiedades o atributos que se puedan medir (longitud, área, volumen, capacidad, peso y masa) y, en los eventos, su duración. – Comparo y ordeno objetos respecto a atributos medibles. – Realizo y describo procesos de medición con patrones arbitrarios y algunos estandarizados, de acuerdo al contexto. – Analizo y explico sobre la pertinencia de patrones e instrumentos en procesos de medición. – Realizo estimaciones de medidas requeridas en la resolución de problemas relativos particularmente a la vida social, económica y de las ciencias. – Reconozco el uso de las magnitudes y sus unidades de medida en situaciones aditivas y multiplicativas	– Clasifico y organizo datos de acuerdo a cualidades y atributos los presento en tablas. – Interpreto cualitativamente datos referidos a situaciones del entorno. – Describo situaciones o eventos a partir de un conjunto de datos. – Represento datos relativos a mi entorno usando objetos concretos pictogramas y diagramas de barras. – Identifico regularidad y tendencias en un conjunto de datos. – Explico –desde mi experiencia– la posibilidad o imposibilidad de ocurrencia de eventos cotidianos. – Predigo si la posibilidad de ocurrencia de un evento es mayor que la del otro. – Resuelvo y formulo preguntas que requieran para su solución coleccionar y analizar datos del entorno próximo.	– Reconozco y describo regularidades y patrones en distintos contextos (numéricos, geométricos, musical, entre otros) – Describo cualitativamente situaciones de cambio y variación utilizando el lenguaje natural, dibujos y graficas. – Reconozco y genero equivalencias entre expresiones numéricas y describo como cambian los símbolos aunque el valor siga igual. – Construyo secuencias numéricas y geométricas utilizando propiedades de los números y de las figuras geométricas.

Estándares básicos de competencias en Matemáticas

Cuarto a Quinto

Pensamiento numérico y sistemas numéricos	Pensamiento espacial y sistemas geométricos
– Interpreto las fracciones en diferentes contextos: situaciones de medición, relaciones parte todo, conciente, razones y proporciones. – Identifico y uso medidas relativas en distintos contextos. – Utiliza la notación decimal para expresar fracciones en diferentes contextos y relaciono estas dos notaciones con la de los porcentajes. – Justifico el valor de posición en el sistema de numeración decimal en relación con el conteo recurrente de unidades. – Resuelvo y formulo problemas en situaciones aditivas de composición, transformación, comparación e igualación. – Resuelvo y formulo problemas en situaciones de proporcionalidad directa, inversa y producto de medidas. – Identifico la potenciación y la radicación en contextos matemáticos y no matemáticos. – Modelo situaciones de dependencias mediante la proporcionalidad directa e inversa. – Uso diversas estrategias de cálculo y de estimación para resolver problemas en situaciones aditivas y multiplicativas. – Identifico, en el contexto de una situación la necesidad de un cálculo exacto o aproximado y lo razonable de los resultados obtenidos. – Justifico regularidades y propiedades de los números, sus relaciones y operaciones	– Comparo y clasifico objetos tridi-mensionales de acuerdo con componentes (caras, lados) y propiedades. – Comparo y clasifico figuras bidi-mensionales de acuerdo con sus componentes (ángulos, vértices) y características. – Identifico, representó y utilizo ángulos en giros, aberturas inclinaciones, figuras, puntas y esquinas en situaciones estéticas y dinámicas. – Utilizo sistemas de coordenadas para especificar localizaciones y describir relaciones espaciales. – Identifico y justifico relaciones de congruencia y semejanza entre figuras. – Construyo y descompongo figuras y sólidos a partir de condiciones dadas. – Conjeturo y verifico los resultados de aplicar transformaciones a figuras en el plano para construir diseños. – Construyo objetos tridimensionales a partir de representaciones bidimensionales y puedo realizar el proceso contrario en contextos de arte, diseño y arquitectura.

Pensamiento métrico y sistema de medidas	Pensamiento aleatorio y sistema de datos	Pensamiento variacional y sistemas algebraico y analítico
– Diferencio y ordeno en objetos y eventos, propiedades o atributos que se puedan medir (longitudes, distancias, áreas superficiales, volúmenes de cuerpo sólidos, volúmenes de líquidos y capacidades de recipientes; peso y masa de cuerpos sólidos; duración de eventos o procesos; amplitud de ángulos). – Selecciono unidades, convencionales y estandarizadas, apropiadas para diferentes mediciones. – Utilizo y justifico el uso de la estimación para resolver problemas relativos a la vida social, económica y de las ciencias, utilizando rangos de variación. – Utilizo diferentes procedimientos de cálculo para hallar el área de la superficie exterior y el volumen de algunos cuerpos sólidos. – Reconozco el uso de algunas magnitudes (longitudes, área, volumen, capacidad, peso y masa, duración, rapidez, temperatura) y de algunas de las unidades que se usan para medir cantidades de la magnitud respectiva en situaciones aditivas y multiplicativas. – Describo y argumento relaciones entre el perímetro y el área de figuras diferentes, cuando se fija una de estas medidas.	– Represento datos usando tablas y graficas (pictogramas, graficas de barras, diagramas de líneas, diagramas circulares). – Comparo diferentes representaciones del mismo conjunto de datos. – Interpreto información presentada en tablas y graficas. (pictogramas, graficas de barras, diagramas de lineas, diagramas circulares). – Conjeturo y pongo a prueba predicciones acerca de la posibilidad de ocurrencia de eventos. – Describo la Manero como parecen distribuirse los distintos datos de un conjunto de ello y la comparo con la manera como se distribuyen en otros conjuntos de datos. – Resuelvo y formulo problemas a partir de un conjunto de datos provenientes de observaciones, consultas o experimentos.	– .Describo e interpreto variaciones representadas en graficas. – Predigo patrones de variación en una secuencia numérica, geométrica o grafica. – Represento y relaciono patrones numéricos con tablas y reglas verbales. – Analizo y explico relaciones de dependencia entre cantidades que varían en e l tiempo con cierta regularidad en situaciones económicas sociales y de las ciencias naturales. – Construyo igualdades y desigualdades numéricas como representación de relaciones entre distintos datos.

Estándares básicos de competencias en Matemáticas

Sexto a Séptimo

Pensamiento numérico y sistemas numéricos	Pensamiento espacial y sistemas geométricos
– Resuelvo y formulo problemas en contextos de medidas relativas y de variaciones en las mediadas. – Utilizo números racionales, en sus distintas expresiones (fracciones, razones, decimales o porcentajes) para resolver problemas en contextos de medida. – Justifico la extensión de la representación poli nominal decimal usual de lo números naturales a la representación decimal usual de los números racionales, utilizando las propiedades del sistema de numeración decimal. – Reconozco y generalizo propiedades de las relaciones entre números racionales (simetría, transitiva, etc.) y de las operaciones entre ello (conmutativa, asociativa, etc.) en diferentes contextos. – Resuelvo y formulo problemas utilizando propiedades básicas de la teoría de números, como las de igualdad, las de las distintas formas de la desigualdad y las de la adición, sustracción, multiplicación, división y potenciación – Justifico procedimientos aritméticos utilizando aditivas y multiplicativas, en diferentes contextos y dominios numéricos. – Formulo y resuelvo problemas en situaciones aditivas y multiplicativas, en diferentes contextos y dominios numéricos. – Resuelvo y formulo problemas cuya polución requiere de la potenciación o radicación. – Justifico el uso de representaciones y procedimientos en situaciones de proporcionalidad directa e indirecta. – Justifico la pertinencia de un cálculo exacto o aproximado en la solución de un problema y lo razonable o no de las respuestas obtenidas. – Establezco conjeturas sobre propiedades y relaciones de los números, utilizando calculadoras o computadores. – Justifico la elección de métodos e instrumentos de cálculo en la resolución de problemas. – Reconozco argumentos combinatorios como herramienta para interpretación de situaciones diversas de conteo.	– Represento objetos tridimensionales desde diferentes posiciones y vistas. – Identifico y describo figuras y cuerpos generados por cortes rectos transversal de objetos tridimensionales. – Clasifico polígonos en relación con sus propiedades – Predigo y comparo los resoltados de aplicar transformaciones rígidas (translación, rotación, reflexiones) y homotecias (ampliación y reducción) sobre figuras bidimensionales en situaciones matemáticas y en el arte. – Resuelvo y formulo problemas que involucren relaciones y propiedades de semejanza y congruencia usando representaciones visuales. – Resuelvo y formulo problemas usando modelos geométricos. – Identifico características de localización de objetos en sistemas de representación cartesiana y geográfica.

Pensamiento métrico y sistema de medidas	Pensamiento aleatorio y sistema de datos	Pensamiento variacional y sistemas algebraico y analitico
– Utilizo técnicas y herramientas para la construcción de figuras planas y cuerpos con medidas dadas. – Resuelvo y formulo problemas que involucren factores escalares (diseño de maquetas, mapas). – Calculo áreas y volúmenes a través de composición y descomposición de figuras y cuerpos. – Identifico relaciones entre distintas unidades utilizadas para medir cantidades de la misma magnitud. – Resuelvo y formulo problemas que requieren técnicas de estimación.	– Comparo e interpreto datos provenientes de diversas fuentes (prensa, revistas, televisión, experimentos, consultas, entrevistas). – Reconozco la relación entre un conjunto de datos y su representación. – Interpreto, produzco y comparo representaciones graficas adecuadas para presentar diversos tipos de datos (diagramas de barras, diagramas circulares). – Uso medidas de tendencia central (media, mediana, moda) para interpretar comportamiento de un conjunto de datos. – Uso modelos (diagramas de árbol, por ejemplo) para discutir y predecir posibilidad de ocurrencia de un evento. – Conjetura acerca del resultado de un experimento aleatorio usando proporcionalidad y nociones básicas de probabilidad. – Resuelvo y formulo problemas a partir de un conjunto de datos presentados en tablas, diagramas de barras, diagramas circulares. – Predigo y justifico razonamiento y conclusiones usando información estadística.	– Describo y represento situaciones de variación relacionando diferentes representaciones (diagramas, expresiones verbales generalizadas y tablas). – Reconozco el conjunto de valores de cada una de las cantidades variables ligadas entre si en situaciones concretas de cambio (variación). – Analizo las propiedades de correlación positiva y negativa entre variables, de variación lineal o de proporcionalidad directa y de proporcionalidad inversa en contextos aritméticos geométricos. – Utilizo métodos informales (ensayo y error, complementación) en la solución de ecuaciones. – Identifico las características de las diversas graficas cartesianas (de puntos, continuas, formadas por segmentos, etc.) en relación con la situación que representa.

Estándares básicos de competencias en Matemáticas

Octavo y Noveno

Pensamiento numérico y sistemas numéricos	Pensamiento espacial y sistemas geométricos
– Utilizo números reales en sus diferentes representaciones y en diversos contextos. – Resuelvo problemas y simplifico cálculos usando propiedades y relaciones de los números reales y de las relaciones y operaciones entre ellos. – Utilizo la notación científica para representar medidas de cantidades de diferentes magnitudes. – Identifico y utilizo la potenciación, la radicación y la logaritmación para representar situaciones matemáticas y no matemáticas y para resolver problemas.	– Conjeturo y verifico propiedades de congruencias y semejanzas entre figuras bidimensionales y entre objetos tridimensionales en la solución de problemas. – Reconozco y contrasto propiedades y relaciones geométricas utilizadas en demostración de teoremas básicos (Pitágoras y Thales) – Aplico y justifico criterios de congruencias y semejanzas entre triángulos en la resolución y formulación de problemas. – Uso representaciones Geométricas para resolver y formular problemas en las matemáticas y en otras disciplinas

Pensamiento métrico y sistema de medidas	Pensamiento aleatorio y sistema de datos	Pensamiento variacional y sistemas algebraico y analitico
– Generalizo procedimiento de cálculo válidos para encontrar el área de regiones planas y el volumen de sólidos. – Selecciono y uso técnicas e instrumentos para medir longitudes, áreas de superficie, volúmenes y ángulos con niveles de precisión apropiados. – Justifico la pertinencia de utilizar unidades de medida estandarizadas en situaciones tomadas de distintas ciencias	– Reconozco que diferentes maneras de presentación de información pueden originar distintas interpretaciones. – Interpreto analítica y críticamente información estadística proveniente de diversas fuentes (prensa, revistas, televisión, experimentos, consultas, entrevistas). – Interpreto y utilizo conceptos de media, mediana y moda y explicito sus diferencias en distribuciones de distinta dispersión y asimetría. – Selecciono y uso algunos métodos estadísticos adecuados al tipo de problema, de información y al nivel de la escala en la que esta se representa (nominal, ordinal de intervalo o de razón). – Comparo resultados de experimentos aleatorios con los resultados previstos por un modelo matemático probabilístico. – Resuelvo y formulo problemas seleccionando información relevante en conjuntos de datos provenientes de fuentes diversas (prensa, revistas, televisión, experimentos, consultas, entrevistas). – Reconozco tendencias que se presentan en conjuntos de variables relacionadas. – Calculo probabilidad de eventos simples usando métodos diversos (listados, diagramas de árbol, técnicas de conteo). – Uso conceptos básicos de probabilidad (espacio muestral, evento, independencia etc.).	– Identifico relaciones entre propiedades de las gráficas y propiedades de las ecuaciones algebraicas. – Construyo expresiones algebraicas equivalentes a una expresión algebraica dada. – Uso procesos inductivos y lenguaje algebraico para formular y poner a prueba conjeturas. – Modelo de situaciones de variación con funciones poli nómicas. – Identifico diferentes métodos para solucionar sistemas de ecuaciones lineales. – Analizo los procesos infinitos que subyacen en las notaciones decimales. – Identifico y utilizo diferentes maneras de definir y medir la pendiente de una curva que representa en el plano cartesiano situaciones de variación. – Identifico la relación entre los cambios en los parámetros de la representación algebraica de una familia de funciones y los cambios en las graficas que las representan. – Analizo en representaciones graficas cartesianas los comportamientos de cambio de funciones específicas pertenecientes a familias de funciones polinómicas racionales exponenciales y logarítmicas.

Estándares básicos de competencias en Matemáticas

Décimo a Undécimo

Pensamiento numérico y sistemas numéricos	Pensamiento espacial y sistemas geométricos
– Analizo representaciones decimales de los números reales para diferenciar entre relacionales e irracionales. – Reconozco la densidad e incompletitud de los números racionales a través de métodos numéricos, geométricos y algebraicos. – Comparo y contrasto las propiedades de los números (naturales, enteros, racionales y reales) y las de sus relaciones y operaciones para construir, manejar y utilizar apropiadamente los distintos sistemas numéricos. – Utilizo argumentos de la teoría de números para justificar relaciones que involucran números naturales. – Establezco relaciones y diferencias entre diferentes notaciones de números reales para decidir sobre su uso en una situación dada.	– Identifico en forma visual, grafica y algebraica algunas propiedades de las curvas que se observan en los bordes obtenidos por cortes longitudinales, diagonales y transversales en un cilindro y en un cono. – Identifico características de localización de objetos geométricos en sistemas de representación cartesiana y otros (polares, cilíndricos y esféricos) y en particular de las curvas y figuras cónicas. – Resuelvo problemas en los que se usen las propiedades geométricas de figuras cónicas por medio de transformaciones de las representaciones algebraicas de esas figuras. – Uso argumentos geométricos para resolver y formular problemas en contextos matemáticos y en otras ciencias. – Describo y modelo fenómenos periódicos del mundo real usando relaciones y funciones trigonométricas. – Reconozco y describo curvas y o lugares geométricas.

Pensamiento métrico y sistema de medidas	Pensamiento aleatorio y sistema de datos	Pensamiento variacional y sistemas algebraico y analítico
– Diseño estrategias para abordar situaciones de medición que requieran grados de precisión específicos. – Resuelvo y formulo problemas que involucren magnitudes cuyos valores medios se suelen definir indirectamente como razones entre valores de otras magnitudes, como la velocidad media la aceleración media, y la densidad media. – Justifico resultados obtenidos mediante procesos de aproximación sucesiva, rangos de variación y limites en situaciones de medición.	– Interpreto y comparo resultados de estudios con información estadística provenientes de medios de comunicación. – Justifico o refuto inferencias basadas en razonamientos estadísticos a partir de resultados de estudios publicados en los medios o diseñados en el ámbito escolar. – Diseño experimentos aleatorios (de las ciencias físicas, naturales o sociales) para estudiar un problema o pregunta. – Describo tendencias que se observan en conjuntos de variables relacionadas. – Interpreto nociones básicas relacionadas con el manejo de información como población, muestra, variable aleatorio, distribución de frecuencias, parámetros estadígrafos. – Uso comprensivamente algunas medidas de centralización, localización, dispersión y correlación (percentiles, cuartiles, centralidad, distancia, rango, varianza, covarianza, y normalidad). – Interpreto conceptos de probabilidad condicional e independencia de eventos – Resuelvo y planteo problemas usando conceptos básicos de conteo y probabilidad (combinaciones, permutaciones, espacio muestral muestreo aleatorio, muestreo con reemplazo) – Propongo inferencias a partir del estudio de muestras probabilísticas.	– Utilizo las técnicas de aproximación en procesos infinitos numéricos. – Interpreto la noción de derivada como razón de cambio y como valor de la pendiente de la tangente o de una curva y desarrollo métodos para hallar las derivadas de algunas funciones básicas en contextos matemáticos y no matemáticos. – Analizo las relaciones y propiedades entre las expresiones algebraicas y las graficas de funciones polinómicas y racionales y de sus derivadas. – Modelo situaciones de variación periódica con funciones trigonométricas e interpreto y utilizo sus derivadas.

UNIÓN
REVISTA IBEROAMERICANA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA

Historia

Marzo de 2008, Número 13, páginas 101-114
ISSN: 1815-0640

Coordinador: Wagner Rodrigues Valente

Omar Catunda e os debates sobre o ensino secundário de matemática na década de 1940

Aparecida Rodrigues Silva Duarte[1]

Resumo

Apresentamos, neste artigo, um estudo sobre as concepções do professor Omar Catunda (1906-1986) sobre o ensino de matemática, apresentando sua trajetória profissional e os debates sobre o ensino secundário ocorridos na década de 1940.
Buscamos, dessa forma, identificar como esse matemático concebia, naquela época, as relações entre matemática e seu ensino. Para tanto, tomamos como base fontes primárias (anuários, revistas) e secundárias, especialmente a obra de Lima (2006).

Introdução

Esse artigo diz respeito a uma pesquisa desenvolvida no GHEMAT/SP[2], que teve como objetivo central estudar a dinâmica das relações entre matemáticos e educadores matemáticos, considerando especialmente as décadas 1950-1980, quando é analisada a participação dos matemáticos brasileiros no Movimento Matemática Moderna (MMM).Para este artigo, dedicamos nossa atenção à análise da trajetória profissional do matemático Omar Catunda (1906-1986), enfatizando especificamente sua concepção sobre o ensino de matemática durante as décadas compreendidas entre 1940 e 1960, época em que esse matemático foi chamado a participar dos debates sobre o ensino secundário.

Conforme aponta Michel de Certeau (1982), toda pesquisa histórica articula-se num local de produção sócio-econômica, política e cultural. Sua produção dá-se a

[1] Universidade do Vale do Sapucaí – UNIVÁS/MG
Grupo de Pesquisa de História da Educação Matemática no Brasil-GHEMAT/SP
angel-bb@uol.com.br

[2] O GHEMAT – Grupo de Pesquisa de História da Educação Matemática no Brasil e é coordenado pelo Prof. Dr. Wagner Rodrigues Valente. O GHEMAT conta com equipes de pesquisa de outras universidades brasileiras, cujo trabalho concentra-se no desenvolvimento de projetos de pesquisa que abrigam pesquisadores de vários níveis, engajados na produção de seus pós-doutoramentos, teses, dissertações e monografias.

partir dos lugares nos quais o esforço para a interpretação da história foi engendrado. Pretendendo construir uma narrativa histórica, assinalamos, a seguir, o ambiente no qual Omar Catunda, estudou e posteriormente exerceu suas atividades de cunho científico e educacional.

Nesse sentido, tomamos como base fontes primárias (anuários, revistas, livros didáticos, jornais) e secundárias, especialmente a obra de Lima (2006), levando em consideração a constatação de Chervel (1990), para quem o historiador, se vê diante de uma documentação que lhe permitirá estabelecer a diferença de uma época para outra. A análise desses documentos permitiu identificar como esse matemático concebia, naquela época, as relações entre matemática e seu ensino.

Trajetória científica e educacional de Omar Catunda

Omar Catunda nasceu em Santos/SP, no dia 23 de setembro de 1906. Filho do médico Thomaz Catunda e de Maria Lúcia Verde Catunda, cursou o Grupo Escolar Cesário Bastos, e, segundo o próprio entrevistado, foi um aluno distraído e displicente. Ao estudar no Liceu Comercial, já aos doze anos, distinguiu-se em Português e Matemática; a seguir, cursou as duas últimas séries da Escola de Comércio José Bonifácio. Em 1922, foi para o Rio de Janeiro, onde se preparou para os exames parcelados do Colégio Pedro II. Os outros exames parcelados foram prestados no Ginásio da Capital do Estado de São Paulo. Sua preparação constou de estudos auto-didáticos, com onze horas diárias, com exceção do Latim. Das matérias estudadas, a que mais lhe agradou foi o estudo da Geometria, tomando como livro-texto a obra "*Geometria Elementar*" de Comberrousse.

Com esse procedimento, obteve o primeiro lugar o exame vestibular da Escola Politécnica da Universidade de São Paulo (USP), em 1925. O primeiro ano do curso de engenharia era chamado Curso Preliminar. Nele, devido ao domínio adquirido sobre a geometria do espaço, não encontrou dificuldades no estudo da Geometria Descritiva. Na disciplina "Complementos de Matemática", teve seus primeiros contatos com o Cálculo Diferencial Integral ocasião em que travou contato com o professor Theodoro Augusto Ramos, que posteriormente orientou seus estudos superiores em Matemática. Além disso, foi o ganhador do Prêmio Cesário Motta, uma medalha de ouro conferida ao melhor aluno do Curso Preliminar.

Em 1930 formou-se engenheiro e em 1933 candidatou-se à vaga para ocupar a cadeira nº3 “Complementos de Geometria Analítica, Nomografia e Cálculo Diferencial Integral” na Escola Politécnica da USP. José Octávio Monteiro de Camargo (? – 1963) venceu o concurso, assumindo após longa batalha jurídica, assumindo em 1938.

Depois de formado, Catunda foi trabalhar como engenheiro da Prefeitura de Santos, até que foi contratado pela Faculdade de Filosofia, Ciências e Letras da USP (FFCLUSP) como assistente de Luigi Fantappiè na disciplina Análise Matemática.

Nessa época, segundo seu depoimento, dedicou todo seu esforço ao ensino e ao aperfeiçoamento das apostilas de análise, que, após acréscimos e modificações foram publicadas primeiramente sob a forma de fascículos mimeografados, levando o título Curso de Análise Matemática, que permaneceu nas diversas edições que se seguiram. As apostilas foram transformadas em livro, dividido em sete partes, cuja primeira edição deu-se em 1952. A partir de 1962, Catunda modificou esse formato, sintetizando as sete partes em dois volumes. Segundo Catunda, as apostilas de Cálculo e os fascículos do Curso de Análise Matemática tiveram boa aceitação em todo o Brasil, proporcionando-lhe a fama de grande matemático (1985, p.95). Matemáticos como Elza Gomide e Ubiratan D’Ambrosio atestam que o “*Curso de Análise Matemática*” foi o primeiro livro de Análise Moderna escrito por um brasileiro e foi largamente utilizado nas instituições de nível superior brasileiras, por um determinado período (LIMA, 2006).

Orientado por Fantappié, Omar Catunda iniciou estudos sobre a Teoria dos Funcionais Analíticos e posteriormente, entre 1938 e 1939, realizou estudos pósgraduados na Universidade de Roma, sobre esse mesmo tema. Retornando ao Brasil, foi nomeado professor interino responsável pela cadeira de Análise Matemática e Superior e nomeado Chefe do Departamento de Matemática da FFCLUSP.

Defendendo a tese "*Sobre os fundamentos da teoria dos funcionais analíticos*", tornou-se catedrático. As provas do concurso realizaram-se de 25 a 30 de setembro de 1944, sendo a comissão organizadora composta pelos professores Paulo de Menezes Mendes da Rocha e Telêmaco van Langendonck, indicados pelo Conselho Universitário e Carlo Tagliacozzo, Achille Bassi e F. M. de Oliveira Castro, indicados pelo Conselho Técnico-administrativo (ANUÁRIO DA FFCLUSP, 1939-1949, p.383-384).

Em 1946, vai para Universidade de Princeton, nos Estados Unidos, com bolsa oferecida pela Fundação Rockefeller, participando de diversos cursos, dentre os quais de Emil Artin (1898-1962), N. Cramer, Heinz Hopf (1894-1971) H. Weil, John von Neumann (1903-1957).

Ao aposentar-se, em 1962, parte para morar em Salvador, Bahia, assumindo o cargo de Diretor do Instituto de Matemática e Física da Universidade Federal da Bahia (IMFUFBa) no lugar do matemático Rubens Gouveia Lintz, em setembro de 1963. Continuou exercendo suas funções de professor e diretor do Instituto de Matemática e Física até o ano de 1969.

Aposentou-se compulsoriamente em 1976. Durante o tempo em que militou no ensino e na pesquisa, foi professor de físicos renomados como: Mário Schemberg, Marcelo Damy, Abraão de Morais, de físicos residentes em Paris: Jean Meyer e Salmeron e de matemáticos como: Carlos de Lyra, Luiz Henrique Jacy Monteiro e Alexandre Rodrigues entre muitos outros.

Omar Catunda faleceu em 11 de agosto de 1986, na cidade de Salvador, Bahia.

Preocupações com o ensino secundário

Em 1947, depois de finalizar seus estudos na Universidade de Princeton, Catunda retornou a São Paulo. Lá, engajou-se na campanha em defesa do petróleo brasileiro, chegando a ser presidente do Centro de Estudos e Defesa do Petróleo. Foi também candidato a deputado estadual, apoiado pelos comunistas e petebistas, porém sua candidatura foi impugnada pela justiça eleitoral. Catunda, embora militante, não se filiou ao Partido Comunista Brasileiro. Criticava o governo getulista pelo descaso com a educação da maior parte do povo brasileiro, preocupando-se unicamente com a elite. Para Catunda, o governo havia resolvido "democratizar o ensino secundário, sem perceber [ou fingindo não perceber] que não havia material humano, para fazer essa democratização com a necessária seriedade". Este seria o motivo pelo qual os estudantes chegavam às universidades sem o devido preparo. Também defendia maiores investimentos nos cursos superiores, de modo que formassem profissionais qualificados para melhorar e ampliar o ensino secundário. (CATUNDA, apud LIMA, 2006, p.39).

O Jornal Diário da Noite, em 07 de maio de 1949, publicava em destaque a matéria "*Não há opiniões divergentes sobre a decadência do ensino*", cujo título foi extraído de uma expressão utilizada por Catunda durante uma entrevista, constando da referida reportagem: "O fato é que não há uma só opinião divergente sobre a decadência do ensino secundário[3]".

Antes de abordarmos o motivo pelo qual Catunda proferiu esta declaração, achamos oportuno valer-nos de um "resumo histórico" oferecido pelo professor de matemática e renomado autor de livros didáticos, Ari Quintela, segundo extraído Anais do III Congresso Brasileiro do Ensino de Matemática, em 1959, que nos permitiu compreender as razões pelas quais o ensino secundário virou notícia.

[3] Com duração de sete anos, o curso secundário encontrava-se estruturado em dois ciclos: o primeiro, de quatro anos, chamado Ginasial e o segundo, de três anos, subdividido em Clássico e Científico, conforme previsto na Lei Orgânica do Ensino Secundário (Reforma Capanema), homologada em 9 de abril de 1942, pelo Decreto-lei nº 4244 (CHAGAS, 1980, p.115).

Como relatou Ary Quintela, em fins de 1946, os resultados dos concursos de ingresso para a carreira militar, prestados tanto pelos alunos que concluíram os quatro anos do Ginásio e inscreveram-se para ingresso nos cursos prévios das Academias Militares (Escola de Aeronáutica, Escola Naval e Escolas Preparatórias do Exército), quanto pelos que concluíram os três anos do Curso Científico e candidatavam-se ao ingresso no primeiro ano das Escolas Superiores Civis e Militares, foram desastrosos. Essa constatação de tal modo empolgou a opinião pública, que foi aberto um debate pela imprensa o qual se denominou "*A decadência do ensino secundário*". Ainda segundo Quintela (ANAIS 3 CBEM, 1959), longos debates públicos foram realizados. Pelo que podemos inferir, também em 1949, eram destaque nas manchetes de jornais.

Assim, Omar Catunda, como presidente da Sociedade de Matemática de São Paulo e professor de Análise Matemática da FFCLUSP, foi convidado a pronunciar sua opinião acerca das dificuldades pelas quais passava o ensino secundário daquela época, em maio de 1949, no Diário da Noite.

Para Catunda, as principais causas que podiam ser atribuídas à propalada "decadência" do ensino secundário, recaíam sobre o programa exigido, questões burocráticas das autoridades e a falta de preparo dos professores.

Segundo Catunda, as provas do concurso para professores de matemática nas escolas oficiais do Estado sugeriam diversos problemas relacionados com o ensino de Matemática no secundário. Esta constatação levou-o a debater esse assunto em conferência no Instituto de Engenharia, quando foram sugeridas reuniões específicas na Sociedade de Matemática para tratar acerca do reflexo das sucessivas reformas sofridas pelo ensino de Matemática, e ainda, a falta de orientação apresentada pela maioria dos professores.

Essa preocupação já havia sido enunciada pela Sociedade, informou Catunda. Uma das medidas tomadas pela Sociedade foi nomear uma comissão especialmente encarregada de organizar e convocar reuniões para discutir os problemas do ensino secundário. Participavam dessa comissão, os professores Osvaldo Sangiorgi, Abraão Bloh e Ester Resnik[4].

A primeira reunião realizou-se no Instituto de Engenharia, quando se discutiu, entre outros assuntos, o rendimento do ensino primário. A maioria dos professores secundários presentes no encontro, julgava que o ensino primário havia decaído nos últimos anos, como podia ser constatado pelos exames de admissão ao ginásio[5], revelando falta de preparo dos candidatos. Aventou-se que uma das causas desse despreparo estaria no critério utilizado para a remoção de professores para estabelecimentos mais requisitados, tomando como base a porcentagem de alunos aprovados pelo professor, o que levaria as escolas oficiais de ensino primário em facilitar a promoção dos alunos. A matéria jornalística afirmou que os professores presentes ao evento mostraram-se alarmados com a possibilidade de que esse critério de remoção de professores passasse a ser utilizado também no ensino secundário.

Nesse sentido, os professores mostraram-se avessos às alterações no que diziam respeito à remoção, o que nos permite concluir que os professores secundaristas estavam satisfeitos com as normas vigentes relativamente à transferência. Atrelar a remoção do professor às aprovações obtidas por seus alunos, significaria a perda de autoridade? Qual a importância da reprovação para o professor de matemática? Para que o professor primário fosse removido para outra escola, mais requisitada, teria que se sujeitar a aprovar alunos que talvez não estivessem aptos a cursarem a série seguinte, havendo, portanto, um afrouxamento nas avaliações realizadas, acabando por refletir nos exames de admissão ao ginásio. Seria uma forma de o governo minimizar as dificuldades surgidas em relação ao aumento do número de alunos e a escassa quantidade de professores? Tal medida também faria com que houvesse um aumento do número de alunos no

[4] Osvaldo Sangiorgi, Abrão Bloh e Ester Resnik foram diplomados pela FFCLUSP nas turmas de matemática de 1941, 1942 e 1947 respectivamente (ANUÁRIO, 1939-1949).
[5] Na década de 1940, após cursarem quatro anos do ensino primário e realizarem o exame de admissão ao ginásio, os alunos garantiam seu ingresso no ensino secundário. (CHAGAS, 1980, p.115).

ensino secundário. Como esse critério poderia agravar ainda mais a situação do ensino secundário, já considerado, naquela época como decadente?

Questões como essas exigiam um estudo acurado, "só possível com um amplo debate sobre o assunto", alertou Catunda (DIÁRIO DA NOITE, 1949). Apesar das medidas tomadas pela Sociedade para discutir as deficiências do ensino secundário, Catunda observou ser indispensável contar com a participação dos professores nos debates, de maneira que os esforços realizados para melhoria do ensino surtissem efeito, posto que estes estavam mais diretamente em contato com a questão. Além disso, a Sociedade pretendia incrementar publicações sobre o ensino de Matemática em seu Boletim.

Em conseqüência dos debates públicos conduzidos pelos jornais da época, por iniciativa do Ministério da Aeronáutica e apoio do Ministério da Educação, realizou-se em 1951, o primeiro encontro de âmbito nacional entre professores, denominado de "Conferência Nacional de Estudos sobre a Articulação do Ensino Médio e Superior", sediado pelo Instituto Tecnológico da Aeronáutica, em São José dos Campos/SP (QUINTELA, apud ANAIS 3 CBEM, 1959).

O evento também é noticiado no Anuário de 1951, confirmando que ocorreu entre os dias 14 e 21 de junho daquele ano e visou o encontro de educadores do ensino médio com os de ensino superior, civil e militar, com o intuito de elevar o nível do ensino médio. Segundo a nota, os temas do conclave foram analisados por seis sub-comissões que chegaram a conclusões "verdadeiramente revolucionárias algumas, quer nos métodos, quer na estrutura básica do ensino médio". A FFCLUSP enviou como representantes os professores Paulo Saraiva de Toledo e Benedito Castrucci, os quais participaram das reuniões sobre o ensino médio de Física e Matemática, respectivamente (ANUÁRIO, 1951, p. 343). Os dados obtidos não nos permitiram averiguar a presença de Catunda nessa conferência.

O ensino da matemática na escola secundária: tomando ciência e divulgando o Movimento da Matemática Moderna

O primeiro número das "*Notas de Matemática e Física*", revista elaborada pelos alunos dos cursos de Matemática e Física da FFCLUSP, sob a direção do então aluno da universidade, Ubiratan D'Ambrosio, com a finalidade atender os anseios dos alunos a graduação como também os professores secundários, foi inaugurado com um artigo de Omar Catunda (1953, p.05-10), intitulado "*O ensino da Matemática na escola secundária*". Nele, o então professor catedrático de Análise Matemática da FFCLUSP, faz um estudo sobre o ensino da Matemática no secundário. Pretendeu contribuir para responder à seguinte questão: Para que serve o ensino de Matemática?

Assim se expressa a esse respeito:

> O valor desse estudo reside não na matéria aprendida, mas no hábito adquirido de um processo de raciocínio puro, universal e absoluto; a mente que aprendeu uma vez esse processo de raciocínio, pode esquecer todas as fórmulas, regras e denominações estudadas, mas saberá, diante de um problema ou de uma situação real, discernir as premissas, simplificar ou esquematizar os dados e tirar as conclusões que se impõem, pelo menos em uma primeira aproximação da realidade (CATUNDA, 1953, p. 6).

Defende, como princípio fundamental, um ensino de Matemática todo baseado no raciocínio. Afirma, enfaticamente, que a "Matemática é raciocínio", ou seja, é o culto ao bom senso, no qual "todo professor dessa matéria deveria ter em mente" (CATUNDA, 1953, p. 6). A adoção e fidelidade a esse princípio evitariam, segundo Catunda, erros comuns que ocorrem nas escolas brasileiras, como o de procurar incutir nos alunos uma variedade de regras e fórmulas sem que os alunos percebam sua razão de ser.

Em seguida, Catunda fez referências ao ensino da Geometria e Álgebra. Indica, para essas áreas, alguns procedimentos desejáveis aos professores e organizadores de programas de Matemática de modo a obter uma melhoria do seu ensino no secundário.

Como se pode observar, o primeiro artigo da revista fez referência justamente ao ensino da Matemática na escola secundária, mostrando uma preocupação por parte de alunos e docentes de nível superior com a melhoria do ensino de Matemática no secundário. Além disso, o professor Catunda, ao propor sugestões nas diversas áreas que compõe a Matemática, pareceu buscar convencer os professores do ensino secundário, a utilizar novos métodos de ensino, de modo a conduzir ao desenvolvimento do raciocínio “puro, universal e absoluto” dos alunos em todas as fases.

A respeitabilidade de Omar Catunda como matemático construída ao longo de sua carreira profissional autorizava-o a opinar sobre o ensino de matemática no secundário, embora a experiência adquirida em sua carreira dissesse respeito à matemática do ensino superior e, quando muito, durante a fase do curso universitário, à preparação ao vestibular dos alunos. No entanto, em que pese a preocupação manifestada em diversas ocasiões com a melhoria do ensino secundário, as idéias aventadas por Catunda até então não levavam em conta os debates internacionais iniciados a partir da década de 1950.

Somente quando começou a tomar conhecimento e a participar dos debates internacionais em prol da inserção da Matemática Moderna é que Omar Catunda procurou efetivamente alterar suas práticas acadêmicas, introduzindo em livros didáticos propostas ensejadas pelo Movimento da Matemática Moderna (MMM).

Nessa época, uma proposta de internacionalização de reformas curriculares estava sendo debatida, de modo que novos métodos de ensino para o secundário ganhariam força a partir dessas discussões internacionais. Matemáticos de todo o mundo foram chamados para elaborar um novo programa de ensino de matemática, com a pretensão de diminuir as diferenças entre o currículo do ensino superior e o currículo escolar.

A primeira Conferência Interamericana de Educação Matemática (I CIAEM), realizada em 1961, na cidade de Bogotá, Colômbia, constituiu-se em fator determinante para isso. Em 1961, o evento, de caráter internacional, tinha como principal objetivo integrar os países das Américas para discutir assuntos relacionados com o ensino de matemática, em especial, o Movimento da Matemática Moderna, de modo que seus participantes promovessem mudanças curriculares em seus países, aos moldes do que já vinha ocorrendo nos Estados Unidos e Europa.

Para a I CIAEM, o reconhecido matemático Marshall Stone, então Presidente do International Comittee of Mathematical Instruction – ICMI, solicitou aos países participantes que se fizessem representar por matemáticos importantes. Diante desse quadro, Omar Catunda[6], como respeitado matemático da época, apresentou-se como um dos representantes brasileiros naquele evento.

Ao final do evento, várias recomendações foram oferecidas pela CIAEM, dentre elas, que a formação dos professores de ensino médio estivesse a cargo das universidades, sob a influência dos matemáticos mais competentes e que a parte pedagógica se limitasse às suas devidas proporções (RUIZ; BARRANTES, 1997).

Como podemos observar nas recomendações oferecidas pela Conferência, a formação dos professores estaria diretamente vinculada ou sob domínio do que pensavam os matemáticos, aliás, os mais competentes, implicando dizer que toda didática poderia ser utilizada, desde que não comprometesse o rigor matemático. Vê-se, desse modo, a importância dada aos matemáticos e pelos matemáticos no processo de renovação do ensino de matemática.

Essa iniciativa repercutiu em nosso país, favorecendo a busca de respaldo das autoridades matemáticas locais por parte do Movimento.

Assim, na qualidade de renomado matemático, Catunda aderiu ao movimento internacional de renovação do ensino da matemática, caracterizado por uma tendência à forte algebrização em todos os ramos da matemática do secundário. Em 1962, participou do IV Congresso de Ensino da Matemática, realizado em Belém.

[6] Juntamente com Omar Catunda, os matemáticos Leopoldo Nachbin e Alfredo Pereira Gomes representaram o Brasil na I CIAEM.

Em seu pronunciamento durante o IV Congresso, defendeu a necessidade de uma simplificação do entendimento sobre os conceitos fundamentais da Matemática, atendo-se especialmente aos conjuntos e estruturas, de modo a garantir a compreensão dos professores do ensino secundário sobre conteúdos de Matemática Moderna.

Posteriormente, a partir de 1964, durante sua gestão no Instituto de Matemática e Física da Universidade Federal da Bahia, Catunda e um grupo de professoras liderado pela professora Martha Maria de Souza Dantas, elaboraram um projeto de livros didáticos de Matemática Moderna, tendo como ambição a modificação dos programas de matemática, incluindo a linguagem dos conjuntos, utilizando-se o método axiomático e o estudo das estruturas, por meio do projeto denominado "*Desenvolvimento de um currículo para o ensino atualizado da matemática*" (DANTAS, 1993).

Para tanto, esforçavam-se por encontrar um consenso geral sobre os conceitos a serem introduzidos, levando em consideração as recomendações de reuniões internacionais e nacionais.

A principal característica dos livros didáticos preparados pela equipe era uma reforma substancial no ensino da Geometria. A redação dos novos textos só foi possível porque contaram com a colaboração de Omar Catunda, "que aceitou, inclusive, a proposta que lhe fizemos de usar, na abordagem da Geometria, as transformações geométricas, recomendação centenária – feita por Felix Klein, no século passado". Esse depoimento tornou evidente a colaboração de Catunda para a implementação de novos conteúdos e metodologia para o ensino secundário de matemática (DANTAS, 1993, p.23-24).

Assim, o grupo deduziu que o estudo da Geometria, por meio das transformações geométricas, permitiria assentar noções abstratas sobre bases intuitivas mais simples e mais sólidas, facilitando a compreensão e a demonstração de propriedades que as envolvem. Além disso, possibilitaria o desenvolvimento da imaginação e a criatividade dos alunos. E mais, ao admitir a importância dos conceitos de relação e estrutura para o ensino da matemática, considerados como instrumentos de modernidade, o grupo divisou um motivo a mais para utilizar as transformações geométricas e explorar sua riqueza estrutural.

Dos livros didáticos nos quais Catunda participou como orientador ou como autor, foi possível notar que houve, de sua parte, uma apropriação dos conhecimentos e valores das idéias reformistas, contribuindo para a difusão dos novos assuntos.

Considerações finais

Observa-se, nas décadas de 1940 e 1950, um conflito ditado pela preocupação com a qualidade de ensino, da parte dos professores e as práticas políticas implementadas para a Educação. Harmonizar esses interesses era a grande questão. Vê-se que as discussões sobre o ensino secundário partiam de um meio impregnado por matemáticos, auxiliados por professores prestigiosos, advindos da FFCLUSP. Essas personagens promoviam críticas ao ensino secundário baseadas em suas participações junto às bancas examinadoras de concursos públicos para o cargo de professor, oportunidade em que podiam observar o nível de conhecimento apresentado pelos candidatos. Catunda mostrou-se interessado numa ampla participação de professores secundários nos debates sobre o ensino. A respeitabilidade construída ao longo de sua carreira profissional autorizava-o a opinar sobre o ensino de matemática no secundário.

Entretanto, foi somente após a participação de Catunda na I Conferência Interamericana de Educação Matemática, em Bogotá, ocasião em que Marshall Stone instigou os matemáticos representantes de todos os países para participarem da discussão internacional em andamento sobre a educação matemática, que Catunda efetivamente passou tomar ciência e defender as proposições de reformas e produções do saber didático-pedagógico internacional.

Assim, na década de 1960, por ocasião do Movimento da Matemática Moderna, expressou intenção de revisar os programas do ensino secundário de Matemática, de modo que esse ensino atingisse todos os indivíduos da sociedade brasileira, e, juntamente com docentes do Colégio de Aplicação da Universidade Federal da Bahia, auxiliou na implementação de mudanças rumo à modernização do ensino secundário.

Referências Bibliográficas

- Anuário da Faculdade de Filosofia, Ciências e Letras (Universidade de São Paulo). São Paulo, 1953, Secção de Publicações da USP, 1939-1949.
- Anuário da Faculdade de Filosofia, Ciências e Letras (Universidade de São Paulo). São Paulo, 1953, Secção de Publicações da USP, 1951.
- CATUNDA, O ensino da matemática na escola secundária. **Revista Notas de Matemática e Física.** São Paulo: FFCLUSP, 1953, p. 5-10.
- ______. Depoimento. **Cadernos do IFUFBa**. Salvador, ano I, n.3, p. 87-102, jul., 1985.
- CHAGAS, V. **Educação Brasileira: o ensino de 1º e 2º graus**: antes – agora e depois? 2ª ed., São Paulo: Saraiva, 1980.
- CHERVEL, A. História das disciplinas escolares: reflexões sobre um campo de pesquisa. In: **Teoria & Educação**, 2, 1990.
- CONGRESSO NACIONAL DE ENSINO DA MATEMÁTICA NO SECUNDÁRIO, 3, 1959, Rio de Janeiro. **Anais 3 CBEM.** CADES/MEC, Rio de Janeiro, 1959.
- DANTAS, Martha Maria de Souza. Uma mestra e sua vida. **Cadernos do IFUFBA.** Salvador, v.. 6, n 1, 2, p. 11-36, out.,1993.
- DE CERTEAU, M. A operação historiográfica. 1974. In: **A escrita da história.** Tradução de Maria de Lourdes Menezes; Rio de Janeiro: Forense Universitária, Cap. II, p. 65 – 119, 1982.
- LIMA, Eliene Barbosa. **Dos infinitésimos aos limites: a contribuição de Omar Catunda para a modernização da análise matemática no Brasil**. Dissertação (Mestrado Ensino, Filosofia e História das Ciências) 145f. Universidade Estadual de Feira de Santana, 2006.
- NÃO há opiniões divergentes sobre a decadência do ensino. Entrevista dada ao Diário da Noite. **Jornal Diário da Noite**. 07 mai. 1949. (APOS, OS.I.2.0151).
- RUIZ, Angel; ABRANTES, Hugo. **Historia de las Conferencias Interamericanas de Educación Matemática**. Academia Colombiana de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales, Colección Enrique Pérez Arbelaez, Bogotá, Colombia, 1997. Disponivel em <http://www.accefyn.org.co/PubliAcad/CIAEM/> acesso em 25 nov. 2006.

UNIÓN
REVISTA IBEROAMERICANA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA

Marzo de 2008, Número 13, páginas 115-119
ISSN: 1815-0640

¡¡Esto no es serio!!

José Muñoz Santoja

Perichmático

En la anterior entrega de esta sección en la revista UNION hablábamos del escritor Ramón Gómez de la Serna y de su creación más conocida, las greguerías. En estas frases cortas reflejaba el humor del absurdo. Hay autores que ven reflejos de sus escritos en autores contemporáneos como Groucho Marx o Woody Allen.

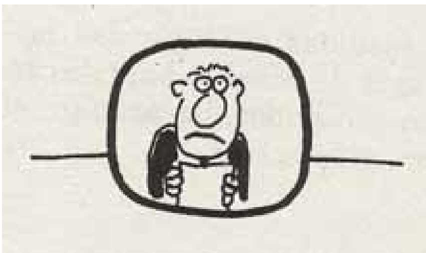
Creo que la persona sobre la que hablaremos en esta ocasión puede considerarse un seguidor de don Ramón, ya que condensa en frases cortas una crítica humorística a la vida cotidiana.

Me gustaría hoy hacer un pequeño, pero merecido, homenaje en esta sesión a un dibujante y humorista de nombre Jaime Perich Escala pero que fue y es conocido por “El Perich”. Natural de Barcelona, donde nació en 1941 trabajó durante su vida en muchos periódicos y revistas hasta su triste desaparición en 1995. Su memoria sigue vigente y hasta hace tres o cuatro años se podían encontrar reediciones de sus chistes en “El Jueves”, una de las últimas revistas en las que publicó hasta su fallecimiento.

Se han editado más de 20 libros con recopilaciones de sus periódicas aportaciones a los medios escritos. El más famoso quizás fue el que publicó en 1971 titulado “Autopista” y que recogía sus monigotes y frases satíricas aparecidas en la sección *Perich-Match* del periódico El Correo Catalán. Este libro consiguió ser el más vendido de ese año. En la misma línea publicó en años siguientes una serie de libros con el nombre de “Nacional II” y siguientes. De éstos hemos tomado las frases y dibujos que vamos a incluir en estas páginas.

Otra de sus creaciones es un gato filósofo, de nombre Mao, con una peculiar manera de ver la vida. En su honor, y como homenaje a Perich, se creó, en 1996, el premio internacional de humor “Gat Perich” que han recibido prestigiosos humoristas gráficos y dibujantes de todo el mundo, la última la autora iraní Marjane Satrapi.

José Muñoz Santoja



Otro gran bloque de libros corresponden a la serie titulada “Noticias del quinto canal”, creada en un momento en el que en España solo existían dos canales de televisión. En el logotipo de esta serie podemos ver las características de sus dibujos. Eran imágenes no recargadas, casi esquemáticas, pero de una gran fuerza visual y humorística.

Dado que Perich diseccionaba en sus escritos la vida cotidiana, no podían faltar referencias a algo tan cotidiano como las matemáticas, pero incluso dio un salto más allá, dotó de vida a elementos matemáticos y así podremos ver en las páginas siguientes a círculos, triángulos y demás polígonos hablando entre ellos y contándose sus problemas como cualquier persona.

Las frases aquí recogidas están seleccionadas del libro “Autopista”, cuyo título, por cierto, es un guiño malicioso a otro “best-seller” de la época, “Camino” de Escrivá de Balaguer. Los dibujos están sacados del libro Nacional II cuya primera edición es del año 1972. Hemos dejado las frases tal como vienen en el libro, incluyendo los posibles errores matemáticos que pudiese haber.

Aritmética aplicada

El orden de los sumandos no altera el producto, mientras esta orden no venga de arriba.

Cuestión matemática

3,14 es igual a “pí”. Por lo tanto el que hace 6,28 en el suelo es un cochino.

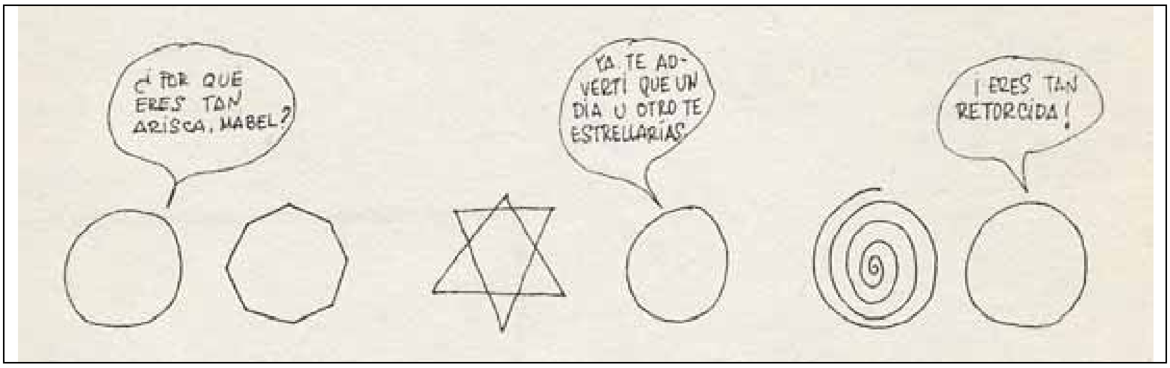
Problema social

Si diez albañiles construyen un edificio de cuatro pisos en seis meses, ¿Cuántos albañiles serán necesarios para que, juntando sus sueldos de cinco años, puedan comprar uno de esos pisos?

Cuestión lingüística

La palabra “tetraedro” ha sido declarada de Arte y Ensayo.

José Muñoz Santoja



Definición

Una circonferencia es una conferencia sobre el circo.

Aritmética

Los números primos no pueden sumarse entre sí sin pedir permiso a Roma.

Geométrica moral

El cono es una figura geométrica malsonante.

Nuestra sociedad

En nuestra sociedad valen más diez ceros a la derecha, que un diez a la izquierda.

Un poco de aritmética

Sólo en aritmética se le quita algo al dividendo.

Economía

No ha prosperado la sugerencia de que a los “dividendos” se les llame “multiplicandos”.

Geometría

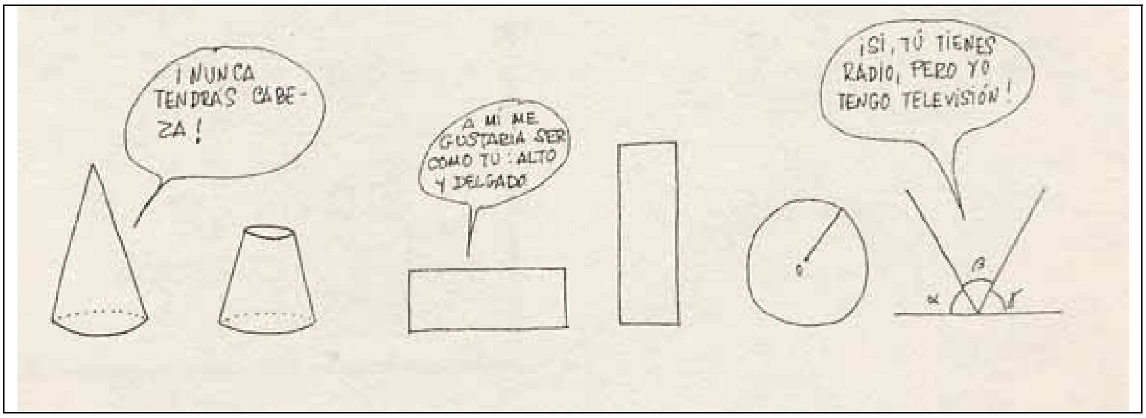
La línea recta es la distancia más corta entre dos puntos. Siempre que estos dos puntos no estén muy separados, naturalmente.

Aritmética recreativa

A mí me habían enseñado siempre que los números heterogéneos, por ejemplo 3 patatas y 4 manzanas, no podían sumarse. Y es mentira, lo he comprobado. Las cantidades heterogéneas pueden sumarse. Vean si no: 3 patatas más 4 manzanas = 137 pesetas.

Lingüística aritmética

El número más catalán que existe es el 3,1416, es decir, el número “pi”.



Geometría

El exágono es un polígono. El pentágono es un politígono.

Matemáticas

El área del cuadrado es igual el lado al cuadrado. En cambio, el área del triángulo no es el lado al triángulo. ¡Para que luego digan que las matemáticas son lógicas!

Geometría

La parábola es la única figura geométrica que tiene moraleja.

Geometría política

En la URSS los polígonos se llaman: triángulo, rectángulo, kremlin, exágono, heptágono, etc...

Geometría social

La distancia más corta entre dos puntos es la cremallera.

En Internet es posible encontrar muchas páginas en las que hablen y recojan frases de Perich, lamentablemente en casi todas se recoge lo mismo. Para cualquiera que desee ver otras genialidades de este autor le aconsejo la página http://es.wikiquote.org/wiki/Jaume_Perich que recoge un catálogo de sus frases que, aunque es minúsculo en comparación con su obra, es el mayor extenso que hemos encontrado. De esa página hemos entresacado las frases correspondientes a matemáticas que son las siguientes:

- El pie es una medida de longitud. El hombre mide dos pies.
- Desde un punto exterior a una recta es posible trazar varias perpendiculares. Eso sí, hay que estar muy borracho.
- Las matemáticas son una ciencia exacta salvo cuando te equivocas.

UNIÓN
REVISTA IBEROAMERICANA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA

Marzo de 2008, Número 13, páginas 121-125
ISSN: 1815-0640

El rincón de los problemas

Uldarico Malaspina Jurado
Pontificia Universidad Católica del Perú
umalasp@pucp.edu.pe

Problema

*Se dispone de dos "máquinas" que transforman números: la máquina **A** multiplica por 2 y la máquina **B** suma 1. Partiendo del número 5, llegar al número 32 usando las máquinas el menor número posible de veces.*

Este problema ha sido propuesto a profesores y estudiantes de primaria, con las adecuaciones del caso. Su carácter lúdico facilita su uso con niños desde el grado en el que se introduzca la multiplicación de números naturales de dos dígitos por otro de un dígito y brinda oportunidades de practicar operaciones sencillas combinándolas creativamente. En su solución hay un manejo implícito del concepto de función, de función inversa y de composición de funciones, y la búsqueda explícita de una secuencia óptima de máquinas.

Una manera de presentarlo es la siguiente:

Situación:

Se tiene dos máquinas que transforman números: La máquina **A** multiplica por 2 y la máquina **B** suma 1.

Utilizando solamente las máquinas, se puede partir de un número y se puede llegar a otro número.

Por ejemplo, se puede partir del número 4 y llegar al número 36:

$$4 \xrightarrow[\text{A}]{\times 2} 8 \xrightarrow[\text{B}]{+1} 9 \xrightarrow[\text{A}]{\times 2} 18 \xrightarrow[\text{A}]{\times 2} 36$$

Actividades individuales

1. Haz un dibujo que indique cómo llegar a 32, partiendo del número 5, usando solamente las máquinas **A** y **B.** Tú decides el orden y el número de veces que uses las máquinas **A** y **B.**

5 32

2. ¿Cómo harías para llegar a 32, partiendo de 5, pero usando las máquinas **A** y **B** el menor número de veces?

5 32

Con las ideas que suscita este problema, se puede proponer actividades grupales con mayor grado de dificultad, en talleres con alumnos de los últimos grados de primaria, de secundaria, de institutos superiores pedagógicos, o en talleres de capacitación docente. Una manera de hacerlo es, luego de las actividades individuales, formar parejas denominadas **I** y **II**. A las parejas **I** se les asigna ciertas actividades y a las parejas **II** otras actividades, previamente escritas en correspondientes hojas de papel. La idea es que luego se formen grupos de cuatro, integrados por una pareja **I** y una pareja **II**, en los cuales complementen sus experiencias en las actividades por parejas, para resolver los nuevos problemas que se les asigne.

Actividades grupales

Parejas I

a. Comparar los resultados obtenidos en las actividades individuales.
b. ¿Cómo se llegaría a 34, partiendo de 5 y usando las máquinas **A** y **B** el menor número de veces?
c. ¿Cómo se llegaría a 60, partiendo de 5 y usando las máquinas **A** y **B** el menor número de veces?
d. ¿Cómo se llegaría a 80, partiendo de 5 y usando las máquinas **A** y **B** el menor número de veces?
e. Partiendo de 5, ¿se puede llegar a cualquier número par mayor que 5, usando las máquinas **A** y **B**? Explicar.

Actividades grupales

Parejas II

a. Comparar los resultados obtenidos en las actividades individuales.
b. ¿Cómo se llegaría a 35, partiendo de 5 y usando las máquinas **A** y **B** el menor número de veces?
c. ¿Cómo se llegaría a 75, partiendo de 5 y usando las máquinas **A** y **B** el menor número de veces?
d. ¿Cómo se llegaría a 79, partiendo de 5 y usando las máquinas **A** y **B** el menor número de veces?
e. Partiendo de 5 ¿es posible llegar a cualquier número impar mayor que 5, usando las máquinas **A** y **B**? Explicar.

Actividades grupales

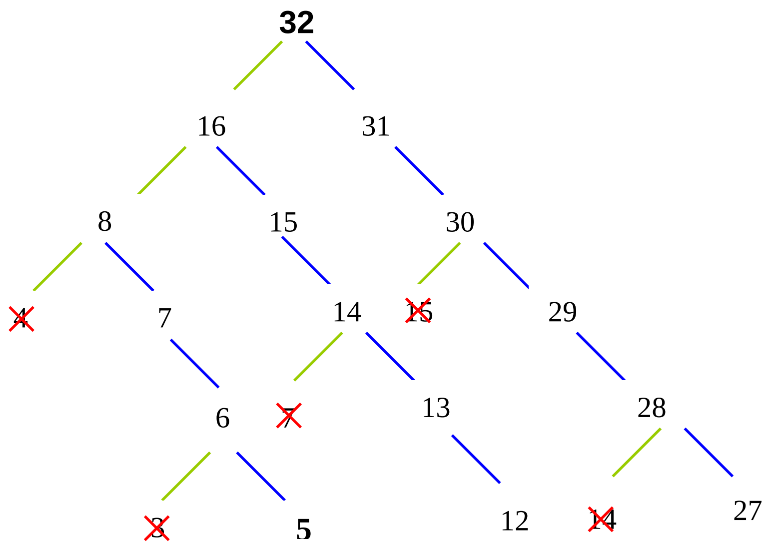
(Grupos de cuatro, integrados por una pareja I y una pareja II)

a. Partiendo de 5 ¿es posible llegar a cualquier número natural mayor que 5, usando las máquinas A y B? Explicar.
b. Partiendo de 5 ¿cuál es el mayor número al que se puede llegar usando 3 veces **A** y 3 veces **B**? Explicar.
c. Partiendo de 5, cuál es el mayor número al que se puede llegar usando **A** y **B** 4 veces en total?
d. Si se ha llegado al número 47 usando 2 veces **A** y 6 veces **B** ¿es posible saber de qué número se partió?
e. Crear un problema con las ideas suscitadas por la situación y las actividades propuestas.

Comentarios

El ensayo y error, el tanteo inteligente y la intuición jugarán papel importante en la solución de las diversas dificultades planteadas. Una vez más, destacamos la importancia de dar tiempo a los que resuelvan los problemas y dejar – u orientar – para que entre ellos encuentren las mejores soluciones.

Una manera ordenada de resolver el problema original, es comenzar por el final. Si se usa un diagrama de árbol, se podrá ver claramente por qué cinco es el menor número de veces que se use las máquinas **A** y **B** para llegar de 5 a 32. Comenzar por el final y usar “máquinas inversas” (la inversa de la máquina **A** divide entre 2 y la inversa de la máquina **B** resta 1), tiene la ventaja de que la inversa de **A** no puede aplicarse a los números impares y eso facilita el desarrollo del árbol, por tener menos ramas. A continuación mostramos esta solución y para simplificar la notación, los segmentos verdes corresponden a la máquina **A** y los segmentos azules corresponden a la máquina **B.**



Se han tachado los números que ya aparecieron antes (15, 7 y 14), pues no tiene sentido continuar, ya que sería repetir la rama que se inició en tal número; o porque de ese número es imposible llegar al 5 (4 y 3). Una vez que se ha obtenido el número 5, ya no se continúa con el desarrollo del árbol. Vemos así que, mirando de abajo hacia arriba, se llega a 32, partiendo de 5, siguiendo la secuencia **B B B A A**. Como se han examinado todas las posibilidades, tenemos una demostración de que esta secuencia es la que nos da el menor número de veces de aplicación de las máquinas **A** y **B**, para llegar de 5 a 32.

Es bueno conocer este método, pero no para imponerlo como “el” método de solución del problema.

En las actividades propuestas se enfatiza la búsqueda de una secuencia óptima de máquinas, como una manera de desafiar el uso creativo de operaciones sencillas y de estimular la “intuición optimizadora”.

Generalizaciones y uso de cuantificadores

También se plantean situaciones relacionadas con el uso correcto de cuantificadores; así, las actividades *e* de las parejas I y II y la actividad *a* de los grupos para cuatro integrantes, podemos considerarlas como casos particulares de un problema más general de existencia. Para ello, definimos el conjunto S de todas las secuencias finitas de máquinas **A** y **B**; llamamos T a un conjunto de números naturales; y el resultado de aplicar a un número *n* una secuencia *s* de máquinas del conjunto S, lo denotamos s(*n*). El problema general de existencia, para las citadas actividades *e* y *a* lo enunciamos como sigue:

> Dado el conjunto de números T y el conjunto S de secuencias de máquinas **A** y **B** ¿para todo elemento t de T, existe un elemento s de S tal que $s(5) = t$?

Para la actividad *e* de las parejas I, el conjunto T es el de los números pares mayores que 5; para la actividad *e* de las parejas II es el conjunto de los números impares mayores que 5; y para la actividad *a* de los grupos de cuatro, es el conjunto de los números naturales mayores que 5.

Con la notación adoptada, la actividad *d* para grupos de cuatro integrantes, es un caso particular del siguiente problema de existencia y unicidad:

> Dado un elemento t_1 del conjunto de números T, ¿existe un único t_o de T tal que $t_1 = s(t_o)$, donde s es un elemento de S con un número específico de veces de **A** y de **B**?

Las actividades específicas pedidas y los problemas generales planteados, nos muestran que como respuesta a la actividad *e* para los grupos de cuatro integrantes, pueden surgir muchos problemas interesantes a partir del problema originalmente planteado.

Preguntas abiertas

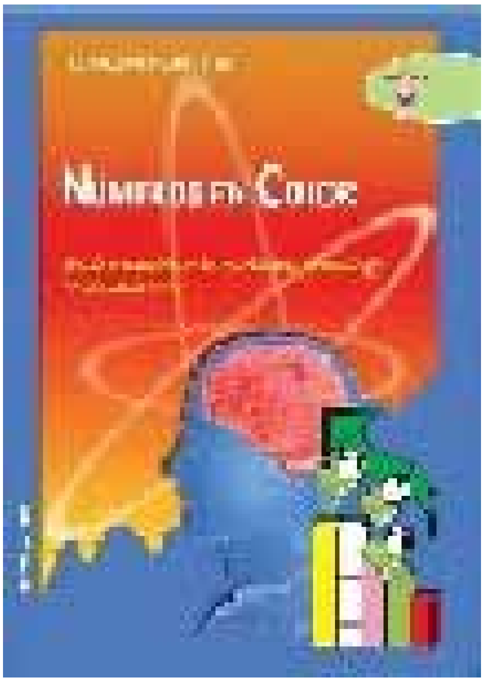
Con el diagrama de árbol no sólo hemos encontrado la secuencia más corta de máquinas **A** y **B** para llegar a 32, partiendo de 5, sino que ha quedado demostrado que no puede existir otra secuencia más corta que **BBBAA**; sin embargo, quedan interrogantes como

- ¿Cuál sería la demostración si en lugar de llegar a 32 se pidiera llegar a 4387?
- ¿Cuál sería la demostración si el problema fuera encontrar la secuencia más corta de máquinas **A** y **B** para llegar al número natural n, partiendo del número natural $m < n$?

El lector queda invitado a responder estas preguntas y a crear nuevos problemas.

UNIÓN
REVISTA IBEROAMERICANA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA

Marzo de 2008, Número 13, páginas 127-128
ISSN: 1815-0640



Números en color: Acción y reacción de la enseñanza-aprendizaje de la matemática.

Autor: José Antonio Fernández Bravo

Edita: CCS

Año: 2007

72 páginas

Desde el mes de noviembre los profesionales de la enseñanza tenemos la gran suerte de poder contar con una valiosísima herramienta de ayuda para nuestro trabajo, el libro *Números en Color: Acción y reacción en la enseñanza-aprendizaje de la matemática,* del profesor D. José Antonio Fernández Bravo. Se trata de una reedición ampliada y mejorada del libro publicado por el mismo autor en el año 1989 con título similar: *Los números en color de G. Cuisenaire. Relaciones dinámicas para el descubrimiento de la matemática en el aula*, y que había sido descatalogado.

El enorme interés manifestado al autor por muchos profesionales de la enseñanza, sobre el tema de las regletas de Cuisenaire, llevó al profesor José

Antonio Fernández Bravo, a plantearse una nueva edición. Y por fin, tras varios años de espera, podemos contar con ella.

Para los profesionales de la enseñanza que consideramos las regletas un material imprescindible en el aula, este libro-CD se convierte en un referente de valor didáctico inestimable que nos guía, nos aporta ideas y nos ayuda trabajar las matemáticas de una forma lúdica y manipulativa sin que ello suponga una merma en la profundidad y rigor del contenido. La amplitud de los temas tratados en él, lo convierten en una inestimable ayuda para la enseñanza de conceptos matemáticos de la Educación Infantil, Primaria y Secundaria a través de las regletas de Cuisenaire.

En el libro, además del prólogo del profesor D. Alberto Aizpún López y las "Consideraciones generales a los números en color" de Concepción Sánchez Martín, presentes en la primera publicación, se incluye una valiosa aportación sobre Metodología didáctica.

En el CD encontramos artículos del autor ya publicados, sobre la utilización de "Los Números en Color" y otros sobre la Historia de la Matemática, relacionados siempre con los temas tratados. En él también se incluye, mediante 500 diapositivas, el desarrollo didáctico de los siguientes temas: presentamos las regletas, hacia el concepto de número, empezamos a sumar, sumar y más sumar, empezamos a restar, la multiplicación, la división, fracciones, potencias, divisibilidad en N, relaciones entre las partes y el todo, bases: otros sistemas posicionales de numeración, segmentos rectilíneos, combinatoria y logaritmos.

El autor, D. José Antonio Fernández Bravo, es diplomado en Magisterio por la especialidad de Ciencias y Matemáticas, Licenciado en Filosofía, Doctor en Ciencias de la Educación. En la actualidad imparte docencia en el Centro de Enseñanza Superior "Don BOSCO" (Universidad Complutense de Madrid). Tiene experiencia docente en aula como tutor en todas las etapas educativas. Desde el año 1986 se interesa por la investigación en Didáctica de la Matemática, animado por el convencimiento de que no hay aprendizaje, donde no haya desafío que provoque en el alumno una necesidad a su "querer conocer".

Avelina Jara Diez
CEIP Santa María del Mar- Alisios
Tenerife, España

UNIÓN
REVISTA IBEROAMERICANA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA

Marzo de 2008, Número 13, páginas 129-143
ISSN: 1815-0640

Coordinado por
Agustín Carrillo de Albornoz

Unidad didáctica sobre lugares geométricos y figuras planas

José L. Hernández Quintanilla

Introducción

En esta unidad didáctica se presenta una colección de actividades realizadas con el programa Cabri II Plus. El diseño de algunas actividades es interactivo para que, con la modificación de la figura, se puedan obtener los resultados requeridos.

Podemos conseguir con estas actividades que el alumno/a sea capaz de manejar el concepto de lugar geométrico y calcular áreas de algunas figuras planas.

Está dirigida al alumnado de 3º de Educación Secundaria Obligatoria.

Objetivos

- Determinar distintos lugares geométricos.
- Identificar los puntos y rectas notables de un triángulo.
- Aplicar el teorema de Pitágoras en distintos contextos.
- Calcular el área de paralelogramos y triángulos.
- Hallar el área de polígonos regulares.
- Hallar el área del círculo.
- Resolver problemas reales que impliquen el cálculo de áreas de figuras planas.

Contenidos

Conceptos

- Lugares geométricos.
- Puntos y rectas notables de un triángulo.
- Teorema de Pitágoras. Aplicaciones.
- Área de polígonos y algunas figuras circulares.

Procedimientos

- Identificación de los puntos y rectas notables de un triángulo.
- Utilización del teorema de Pitágoras en la resolución de problemas geométricos y de la vida cotidiana.
- Obtención del área de paralelogramos, triángulos y polígonos regulares.
- Cálculo del área del círculo.
- Resolución de problemas que impliquen el cálculo del área de figuras planas, descomponiéndolas en figuras de áreas conocidas.

Actitudes

- Valoración del razonamiento deductivo en Geometría.
- Interés y gusto por la descripción verbal precisa de formas y características geométricas.
- Hábito de expresar los resultados numéricos de los problemas indicando las unidades utilizadas.

Criterios de evaluación

- Identificar lugares geométricos que cumplen determinadas propiedades.
- Reconocer los puntos y las rectas notables de cualquier triángulo.
- Resolver problemas aplicando el teorema de Pitágoras en distintos contextos.
- Calcular el área de paralelogramos, triángulos y polígonos regulares.
- Obtener el área de polígonos cualesquiera, descomponiéndolos en otros más sencillos.
- Hallar el área del círculo y de la corona circular.
- Resolver problemas reales que impliquen el cálculo de áreas de figuras planas.

Actividades iniciales

1.- Rectas y puntos notables en el triángulo

➢ El alumno copia en su cuaderno:

– Las **medianas** de un triángulo son las rectas que se obtienen al unir cada uno de los vértices del triángulo con el punto medio del lado puesto.
– Las tres medianas del triángulo se cortan en un punto llamado **baricentro.**
– Las **mediatrices** de un triángulo son las rectas perpendiculares a sus lados que pasan por el punto medio.
– Las mediatrices se cortan en un punto llamado **circuncentro** (centro de la circunferencia circunscrita al triángulo).

- Después se le propone al alumno que realice la siguiente actividad con el programa CABRI

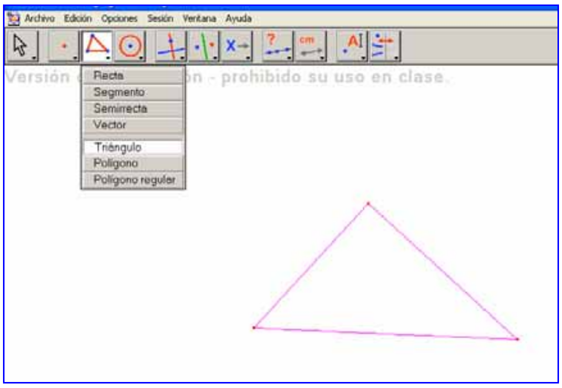
Actividad 1

Con esta actividad se pretende que el alumno sepa determinar los puntos y las rectas notables de un triángulo cualquiera.

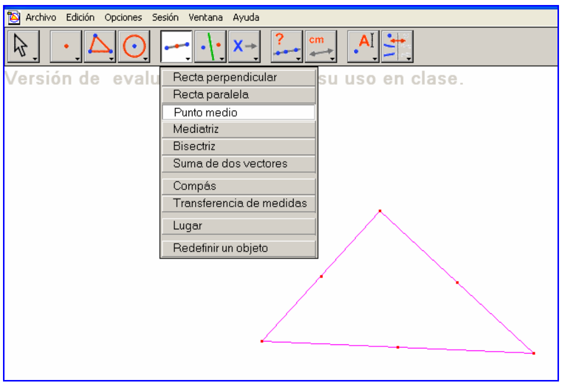
Dibuja un triángulo cualquiera y determina:
a) El baricentro.
b) El circuncentro
c) La circunferencia circunscrita.

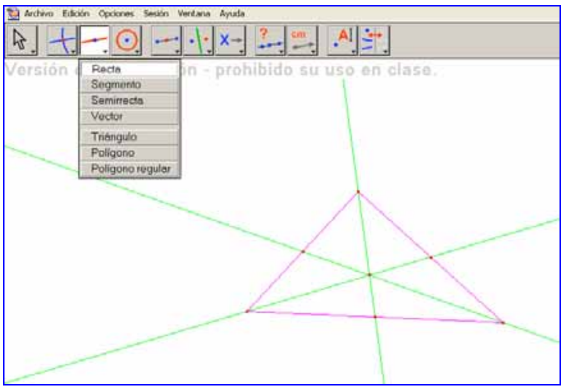
Solución:

a) El alumno dibuja un triangulo cualquiera

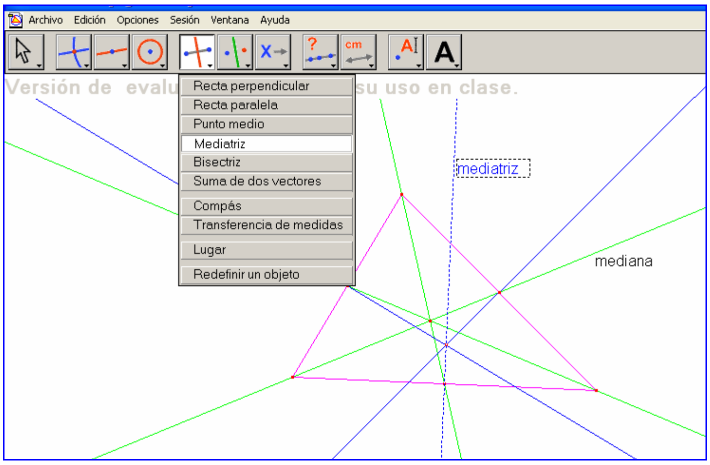


b) Determina los puntos medios de los lados del triangulo y las rectas que unen cada vértice con el punto medio del lado opuesto (medianas). Determina el punto de intersección de las medianas y obtenemos el baricentro.

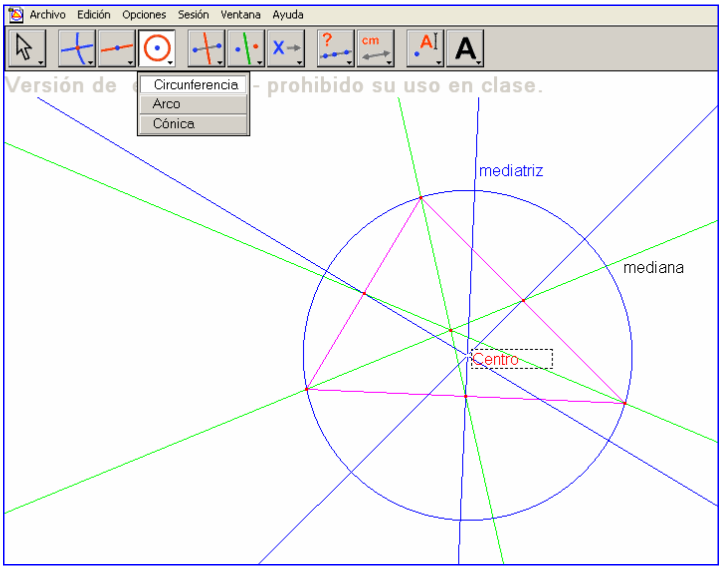


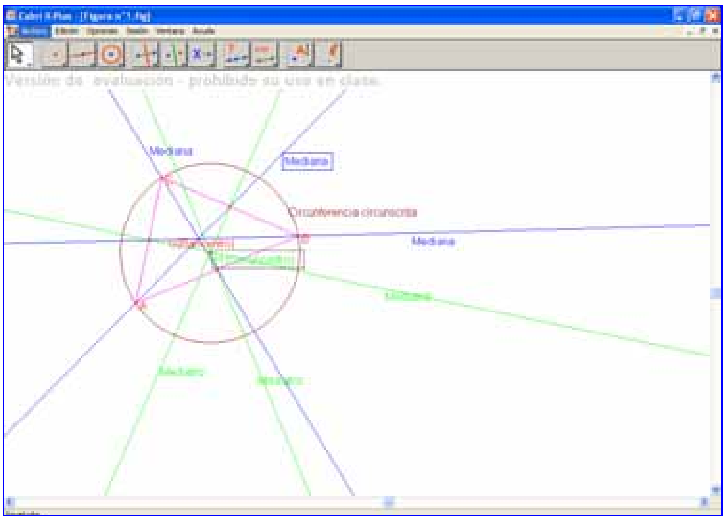


c) Se determinan las mediatrices del triángulo y el punto de intersección (circuncentro)



Dibujamos la circunferencia circunscrita al triangulo, para ello tomamos como centro el circuncentro y radio la distancia del circuncentro a cualquier vértice.





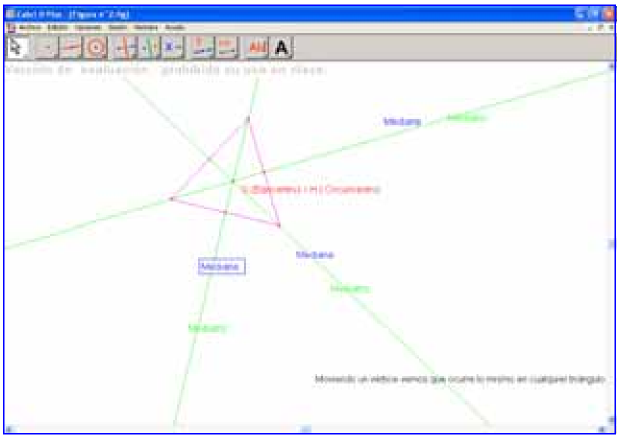
Actividad 2

Se pretende que el alumno/a sea capaz de observar algunos casos particulares de los puntos notables en un triángulo equilátero.

Dibuja un triángulo equilátero y determina su baricentro y su circuncentro. ¿Qué observas? ¿Ocurre lo mismo en cualquier triángulo equilátero?

Solución:

El alumno realizará el mismo procedimiento que en la actividad 1, pero considerando un triángulo equilátero.



- El alumno copiará en su cuaderno:

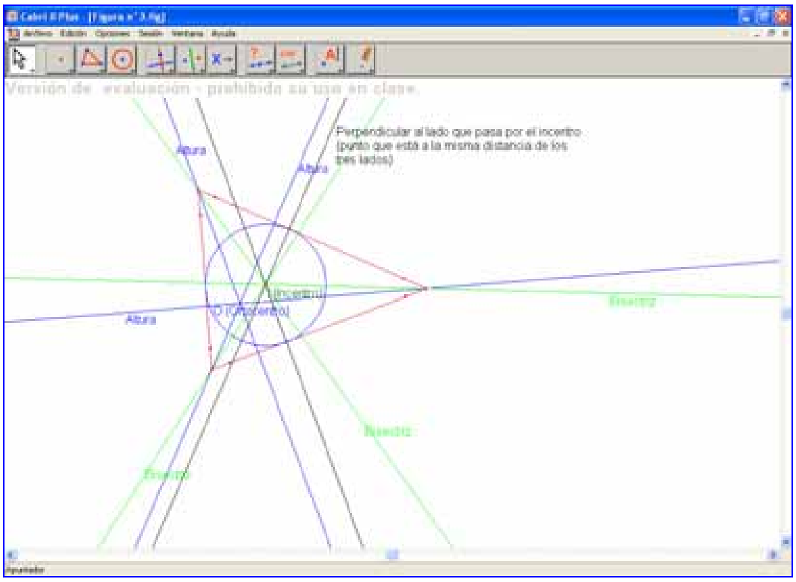
– Las **alturas** de un triángulo son las rectas perpendiculares trazadas desde cada vértice del triángulo al lado opuesto.
– El punto de corte de las alturas se llama **ortocentro**.
– Las **bisectrices** de un triángulo son las rectas que dividen cada uno de sus ángulos en dos partes iguales.
– Las **bisectrices** se cortan en un punto llamado **incentro** (centro de la circunferencia inscrita).

Actividad 3

Al realizar esta actividad intentando que el alumno/a sepa calcular los puntos y las rectas notables de un triángulo cualquiera.

Dibuja un triángulo cualquiera y determina:
a) El ortocentro.
b) El incentro.
c) La circunferencia inscrita.

Solución:

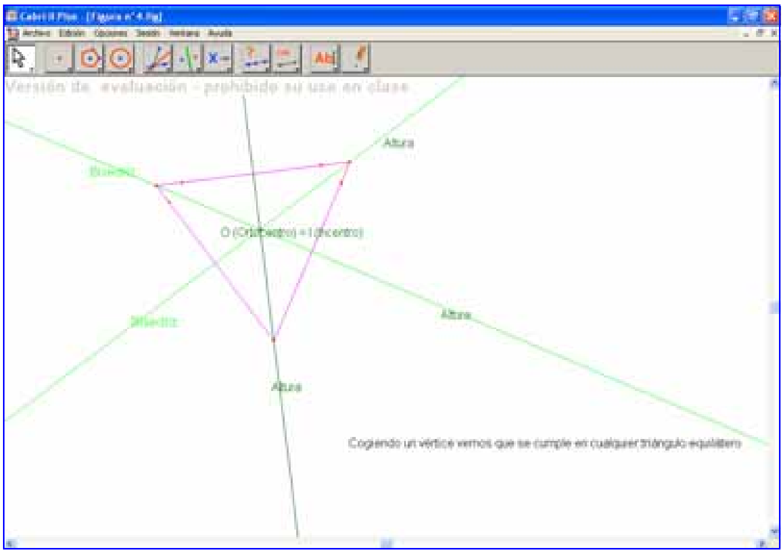


Actividad 4

El alumno/a observará algunos casos particulares de los puntos y rectas notables en un triángulo equilátero.

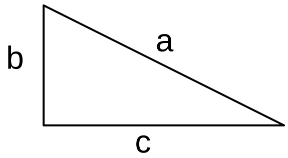
Dibuja un triángulo equilátero y determina su ortocentro y su incentro. ¿Qué observas? ¿Ocurre lo mismo en cualquier triángulo equilátero?

Solución:



2.- Teorema de Pitágoras. Aplicaciones

- El alumno copiará en su cuaderno el Teorema de Pitágoras:



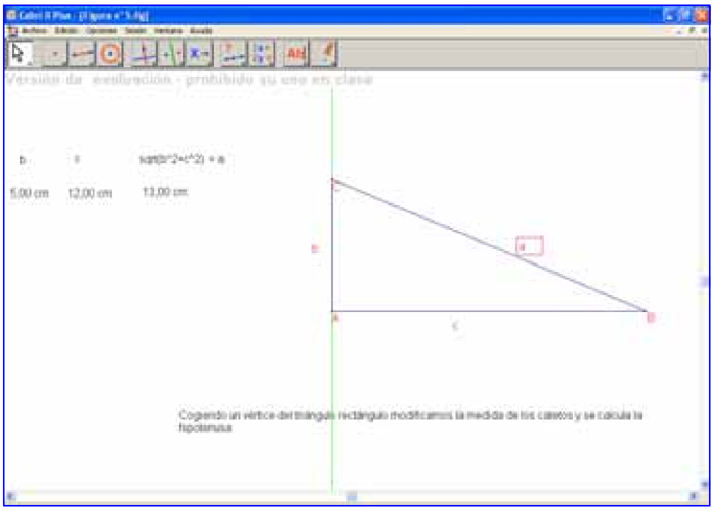
$$a^2 = b^2 + c^2$$

Actividad 5

Pretendemos que el alumno/a pueda tener soltura con el teorema de Pitágoras. El alumno comprobará que en cualquier triángulo rectángulo se cumple el teorema.

> Calcula el valor de la hipotenusa de un triángulo rectángulo de catetos 5 cm y 12 cm

Solución:

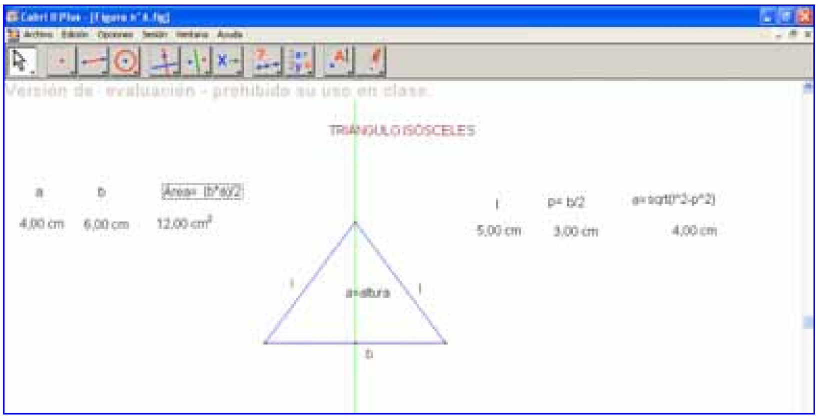


Actividad 6

Esta actividad pretende que el alumno/a sea capaz de manejar el teorema de Pitágoras en cualquier triángulo rectángulo.

> Calcula la altura de un triángulo isósceles donde los lados iguales miden 5 cm y el otro lado 6 cm. Después calcula el área del triángulo.

Solución:



Es una aplicación del Teorema de Pitágoras para calcular el área de un triángulo isósceles.

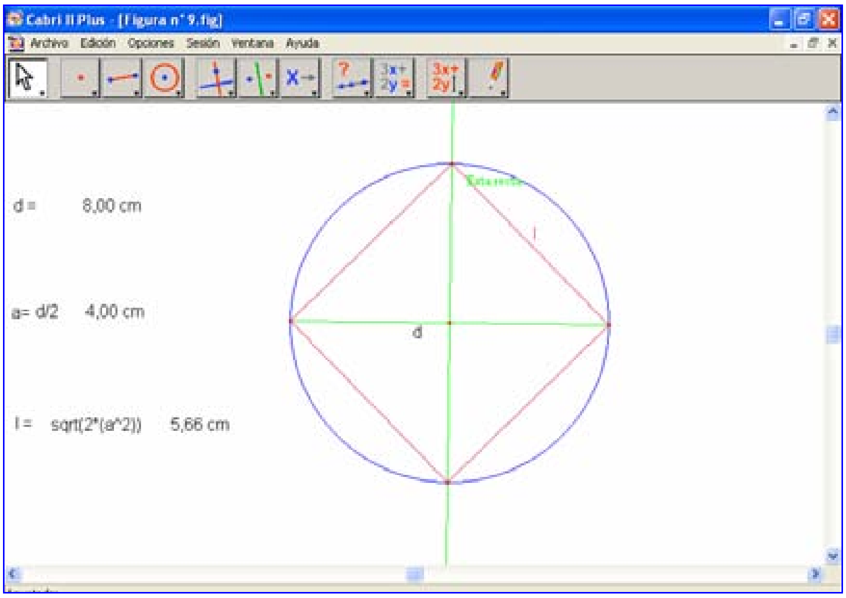
Actividad 7

El alumno/a tiene que ser capaz de aplicar el teorema de Pitágoras en cualquier situación, buscando siempre un triángulo rectángulo donde poderlo aplicar.

Determina el lado de un cuadrado cuya diagonal mide 8 cm.

Solución:

El alumno construirá un cuadrado conocida la diagonal. Como aplicación del teorema de Pitágoras determinará la longitud del lado.



3.- Área de figuras planas

- El alumno/a tiene que copiar en su cuaderno las fórmulas del área de triángulos, cuadriláteros y de un polígono regular.

- **Triángulo:** **Área =** $\frac{base \cdot altura}{2}$
- **Cuadrado:** **Área =** $lado \cdot lado = (lado)^2$
- **Rectángulo:** **Área =** $base \cdot altura$
- **Rombo:** **Área =** $\frac{Diagonal\ mayor \cdot diagonal\ menor}{2}$
- **Romboide:** **Área =** $base \cdot altura$
- **Trapecio:** **Área =** $\frac{(Base\ mayor + base\ menor) \cdot altura}{2}$
- **Polígono regular:** **Área =** $\frac{perímetro \cdot apotema}{2}$

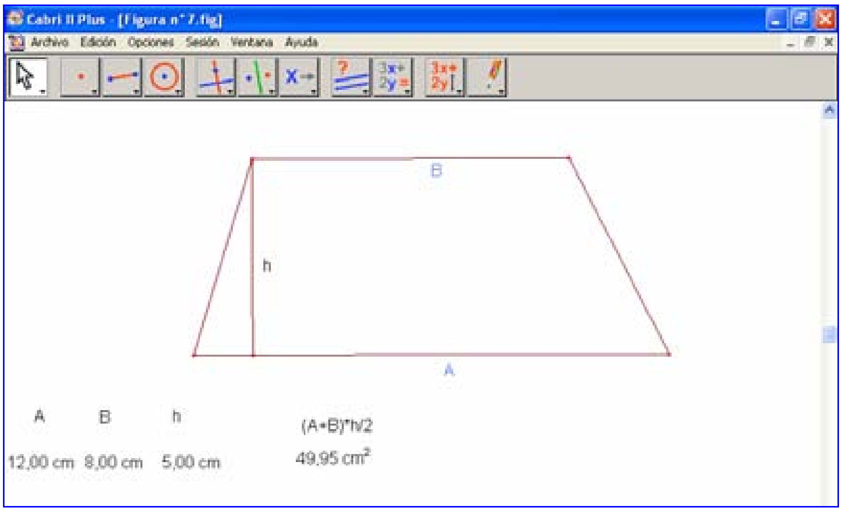
Actividad 8

Se pretende que el alumno/a maneje con soltura el concepto de área, construyendo figuras geométricas planas.

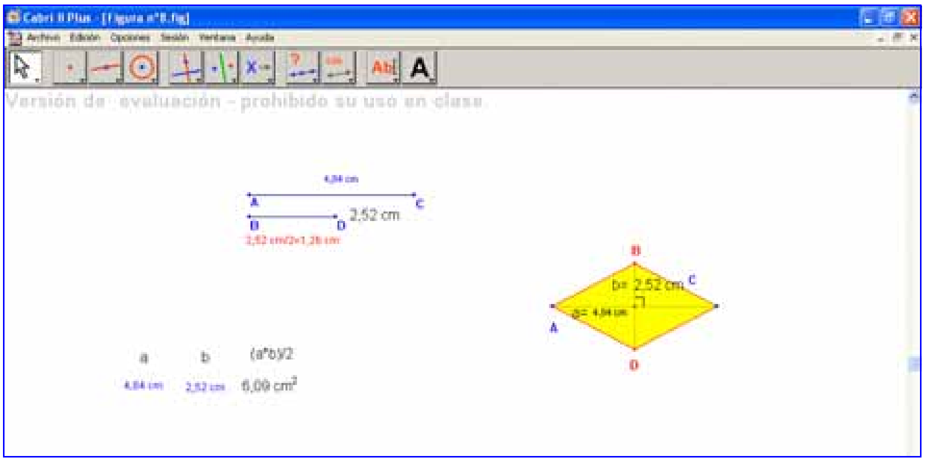
Calcula el área de los siguientes polígonos:
a) Un trapecio de bases 12 cm y 8 cm y altura 5 cm
b) Un rombo de diagonales 12 cm y 9 cm

Solución:

a) Dibujará un trapecio cualquiera y comprobarán como se calcula el área conocidas las bases y la altura.



b) Comprobarán el área de un rombo conocidas sus diagonales.



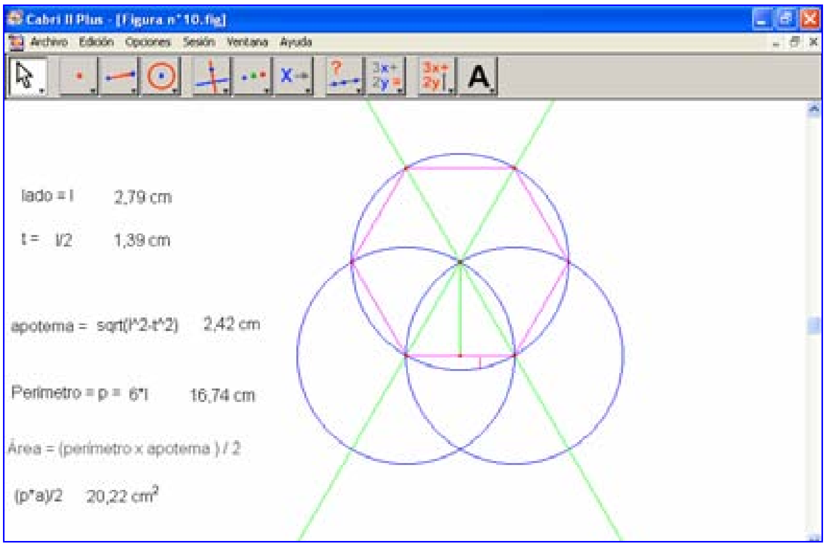
Actividad 9

Con esta actividad el alumno/a debe ser capaz de construir un hexágono regular y aplicar el teorema de Pitágoras para calcular el área.

Determina el área de un hexágono regular de lado 6 cm

Solución:

Aprenderán a dibujar un hexágono regular a partir del lado, aplicarán el teorema de Pitágoras para calcular la apotema y determinarán su área (mediante la fórmula y calculada directamente como polígono regular)

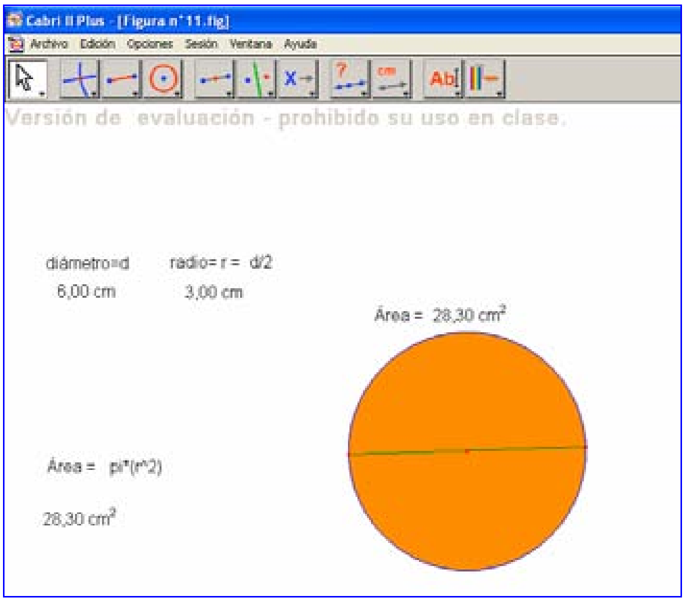


Actividad 10:

El alumno/a tiene que conseguir obtener el área de un círculo conocido el diámetro. Comprobarán como calcular el área de cualquier círculo conocido el diámetro.

Halla el área de un círculo cuyo diámetro mide 6 cm

Solución:



Podemos calcular el área de cualquier círculo conocido el diámetro.

Actividades de evaluación

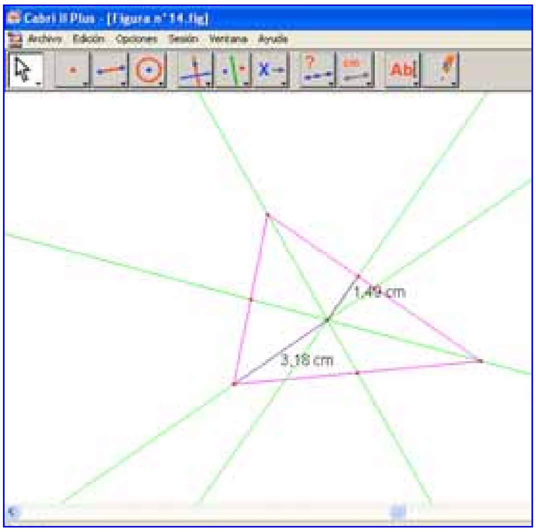
Actividad 1:

Conseguiremos que el alumno/a conozca algunas propiedades de los puntos notables respecto a un triángulo cualquiera.

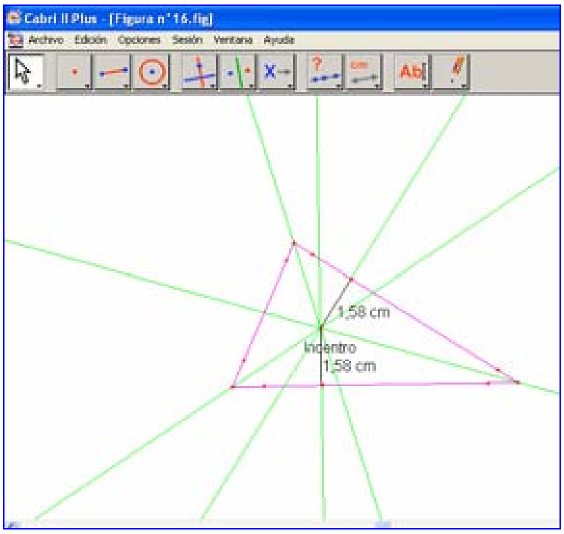
a) Comprobar que en cualquier triángulo el baricentro es un punto cuya distancia a cada vértice es el doble que su distancia al lado opuesto.
b) Comprobar que el incentro de cualquier triángulo está a la misma distancia de cualquier lado

Solución:

a)



b)



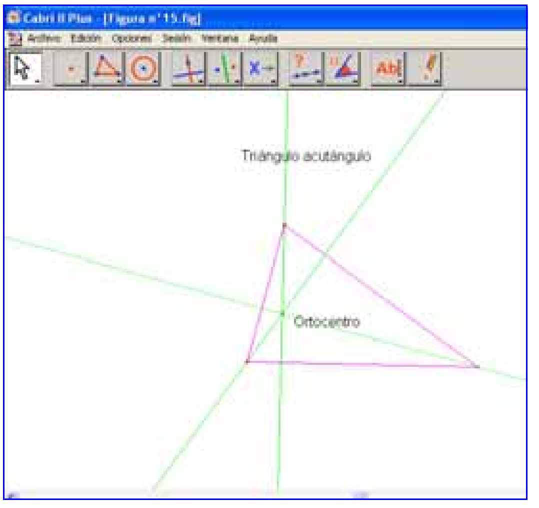
Actividad 2:

El alumno/a conocerá algunos casos particulares del ortocentro en ciertos triángulos.

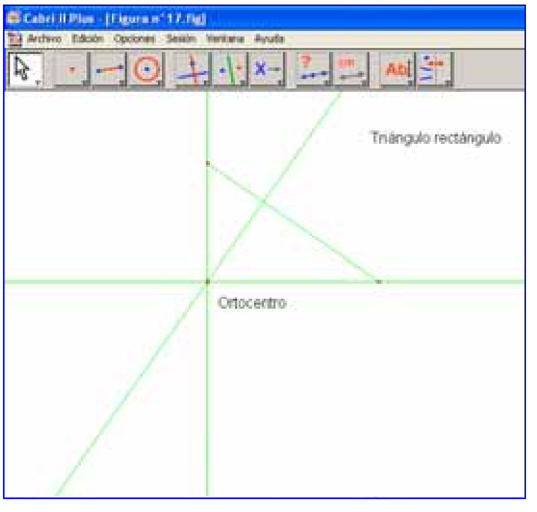
Comprobar donde queda el ortocentro de un triángulo, si el triángulo es acutángulo; si es un triángulo rectángulo; y en los triángulos obtusángulos.

Solución:

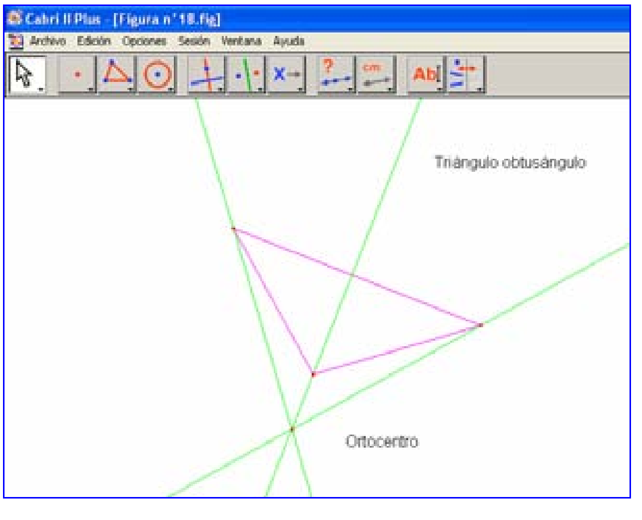
Si el triángulo es acutángulo, el ortocentro siempre queda en el interior del triángulo.



Si el triángulo es rectángulo, el ortocentro coincide con uno de los vértices:



Si el triángulo es acutángulo, el ortocentro queda fuera del triángulo:



Actividad 3:

Conseguiremos que el alumno/a maneje la construcción de un hexágono regular a partir de un lado, sepa aplicar el teorema de Pitágoras para calcular la apotema y determine sus áreas.

a) Dibujar un hexágono regular que tiene de lado 8 cm.
b) Calcula la longitud de la apotema.
c) Calcula el área del hexágono.

Solución:

Seguiríamos el mismo procedimiento que en la actividad 9.

Actividad 4:

El alumno/a tendrá soltura para dibujar circunferencias de cualquier radio y conseguirá calcular el área de una corona circular.

Dos circunferencias concéntricas tienen radios de 5 y 3 cm, respectivamente. Calcula el área de la corona que originan. Halla también el área de los círculos que generan.

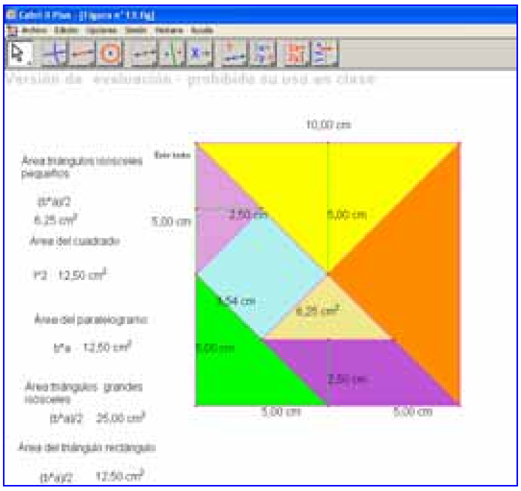
Solución:

El alumno tendrá que dibujar dos circunferencias concéntricas, obtener la corona circular y calcular el área

El alumno comprobará el área de la corona circular modificando el radio de las circunferencias.

Actividad 5

Considera las siete piezas del tangram chino de lado 10 cm. Calcula el área de cada una de las piezas, determinando las longitudes necesarias para cada una de ellas. Comprobar que la suma de las áreas de las siete piezas es igual al área del cuadrado de lado 10 cm.



Evaluación

Para la evaluación de la Unidad didáctica consideraremos:

- Los conceptos reflejados en el cuaderno que han necesitado para realizar las actividades propuestas. 10% de la nota
- Desarrollo de las actividades propuestas con CABRI. 50% de la nota
- Examen de evaluación propuesto. 40% de la nota

Nota: Todas las actividades las realizarían en grupo de 3 alumnos.

Bibliografía

Libro de texto: Matemáticas 3 ESO.
Editorial: Santillana.
Proyecto: La Casa del Saber.
Autores: Departamento de Ediciones Educativas de Santillana Educación, S. L.

José L. Hernández Quintanilla es Licenciado en Ciencias Matemáticas (Granada). Catedrático de Matemáticas en Secundaria y Jefe de Departamento en el I.E.S. “Melchor de Macanaz”. Hellín (Albacete)
jherna46@gmail.com

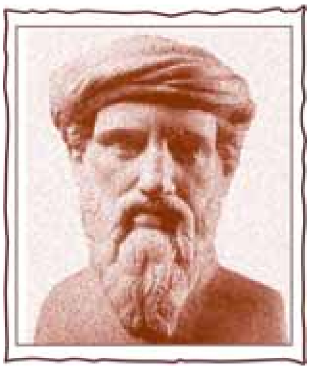
Marzo de 2008, Número 13, páginas 145 - 148
ISSN: 1815-0640

DOS UNIÓN
La sección de unión para los estudiantes más jóvenes.

11

Por Santiago López Arca

OTRA VEZ PITÁGORAS



En aquella calurosa tarde, muy próxima ya la primavera, ***Pitágoras de Samos*** había salido en solitario, como tenía por costumbre, a dar su paseo vespertino. En los arrabales de la ciudad, caminando por la orilla del río, le resultaba imposible apartar de su mente esa cuestión inexplicable...

No lejos de allí, en el taller del herrero, el maestro artesano observaba como sus aprendices golpeaban sobre el hierro incandescente una y otra vez:

¡Pim, pam, pim, pam...!

Pitágoras de Samos estaba tan absorto en sus meditaciones que apenas se enteraba de lo que sucedía a su alrededor. Una y otra vez organizaba mentalmente las cuestiones, y una vez tras otra se hacían presentes las mismas dificultades:

- ¿Cómo explicar que ni el lado del cuadrado, ni ninguna de sus partes, se pudiesen tomar como unidad para efectuar la medida de su diagonal?

De pronto, ***Pitágoras*** dejó sus pensamientos y prestó atención a los sonidos que provenían de la forja:

¡Pim, pam, pam, pom...! ¡Pim, pam, pam, pom...!

- ¿Por qué uno de aquellos sonidos no "armonizaba" con los demás?

Pitágoras de Samos apretó el paso hacia la herrería.

- Quizá la respuesta estuviese relacionada con el peso de los martillos...

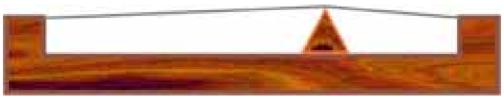
¡Un nuevo problema acababa de nacer! Aquella misma noche pasaron fugaces las horas investigando con el ***monocordio***...

Santiago López Arca

MÚSICA Y MATEMÁTICAS

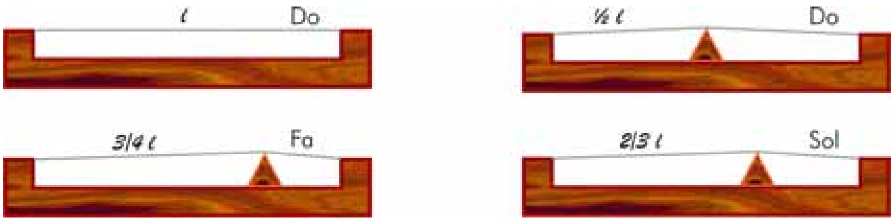
Nadie va a discutir ahora la importante relación que existe entre música y matemáticas. En realidad, los ***pitagóricos*** consideraban a la música como una de las ciencias matemáticas, junto con la aritmética, la geometría y la astronomía.

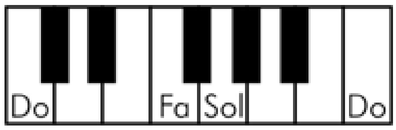
Hoy en día sabemos que el sonido producido por una cuerda depende de su longitud, de su grosor y de la tensión a la que esté sometida. Los *pitagóricos* utilizaron un ***monocordio*** para realizar las primeras investigaciones que relacionan matemáticas y música.



Un *monocordio* es un instrumento musical de una sola cuerda sujeta en un bastidor de madera, dotado de una pieza móvil, también de madera, que permite variar la longitud de la cuerda. Los pitagóricos observaron que haciendo más o menos larga la cuerda (desplazando el elemento movible) se producían sonidos diferentes. Entre estos sonidos escogieron algunos que eran armoniosos con el sonido original, el producido por toda la cuerda (el sonido base). Además comprobaron que esos sonidos armónicos se correspondían con longitudes de la cuerda relacionadas directamente con razones simples: 1/2, 2/3 y 3/4 de la longitud de la cuerda original.

Así, por ejemplo, si el sonido base era un ***Do grave***, cuando la longitud de la cuerda era 1/2 de la medida total se producía un ***Do agudo***. Esto es, obtenían el mismo sonido pero una *octava* más alto (la *octava* es el espacio que corresponde a un salto de ocho teclas blancas en el piano).





Si tomaban una longitud de cuerda de 2/3, se producía una nota una quinta más alta (en nuestro ejemplo un ***SOL***). Y se obtenía una cuarta más alta (un ***FA***, para este ejemplo) con una cuerda que midiese 3/4 del largo de la inicial.

Estas tres longitudes de cuerda que producían notas de sonidos "agradables" (octava, quinta y cuarta), fueron denominadas por los pitagóricos ***diapasón***, ***diapente*** y ***diatesarón***.

No es este contexto, al que acabamos de referirnos, el único en el que hacen acto de presencia *razones* entre números enteros. Las obras musicales están divididas en fragmentos de igual duración, siendo cada uno de ellos un ***compás***. Cada *compás* se divide en ***tiempos***. Al principio del pentagrama, después de la clave, se coloca una fracción para indicar los tiempos de cada compás. Por ejemplo, 3/4 indica que en ese compás entran tres figuras que tienen una duración de 1/4 de redonda (u otras notas con la misma equivalencia que esas tres).

Insignes músicos como ***Beethoven*** o ***Bartók*** compusieron obras que están íntimamente relacionadas con la famosa sucesión de ***Fibonacci***. Pero la música no guarda relación únicamente con los números. Las ***transformaciones geométricas***, más concretamente los

movimientos (*traslaciones*, *giros*, *simetrías*) son recursos que se aplican a secuencias de sonidos para realizar composiciones musicales, sobre todo en melodías de tipo popular.

Pero aun hay más. En los últimos tiempos se pusieron de manifiesto relaciones entre la música y campos de las matemáticas cuya conexión no resulta, en principio, demasiado obvia como, por ejemplo, la teoría *de la probabilidad* o la ley *de los grandes números*. ***Iannis Xenakis***, arquitecto, matemático y compositor (que trabajó con el gran arquitecto *Le Corbusier*) fundó en París, en 1966, la *Escuela de Música Matemática y Automatizada*.

Estudió y desarrolló la que denominó música estocástica que se caracteriza por "*grandes masas de sonidos donde el número de elementos es tan grande que uno individualmente no tiene importancia por sí mismo y lo que realmente importa es el comportamiento del todo*. *Esto es, una música indeterminada en sus detalles, pero que se dirige hacia un final definido*".

Xenakis aplica los principios de la probabilidad a la música de acuerdo con fórmulas matemáticas; mezcla los instrumentos electrónicos con los tradicionales dando lugar a la música estocástica. El uso de sofisticadas computadoras, permitió al compositor preocuparse de los aspectos más formales y estéticos de sus composiciones, ya que los cálculos algebraicos y probabilísticos que determinaban el desarrollo de la composición eran resueltos por el ordenador.

Belén S. S.

Fuentes:

http://www.musicaperuana.com/espanol/mm.htm
http://www.elementos.buap.mx/num44/htm/21.htm
http://www.filomusica.com/filo37/xenakis.html
http://www.divulgamat.net/weborriak/TestuakOnLine/03-04/PG03-04-ibaibarriaga.pdf
http://www.xtec.cat/centres/a8019411/caixa/menu_esc.htm

MARÍA GAETANA AGNESI

8 de marzo, Día Internacional de la Mujer.

María Gaetana Agnesi (Milán, 16 de mayo de 1718 - Milán, 9 de enero de 1799) fue la primera hija de Pietro Agnesi y Anna Brivio, y la mayor de los 21 hijos que tuvo su padre.

Parece ser que el padre de María era profesor de matemáticas en la universidad de Bolonia (aunque otras fuentes aseguran que se dedicaba al comercio) y estaba convencido de que sus hijas e hijos debían recibir la mejor formación posible. En esta época, únicamente en Italia se admitía el derecho de las mujeres a recibir formación. En el resto de Europa se consideraba una deshonra que una mujer se dedicase al estudio ya que se pensaba que su destino natural era la atención del marido y el cuidado de los hijos.

La forma de pensar de su padre, el importante poder económico de la familia y la poderosa capacidad intelectual de María Agnesi, que fue una verdadera niña prodigio, constituyeron los tres pilares que sustentaron su excelente educación.

Tuvo magníficos tutores y profesores particulares como Carlo Belloni, Francesco Manara, Michele Casati, Ramiro Rampinelli, benedictino y profesor de universidad, el jesuita y geómetra Giovanni Saccheri, o el jesuita y matemático Vincenzo Ricatti. Como puede deducirse, su formación estuvo fuertemente ligada al mundo religioso lo que determinó su intención de querer ingresar en un convento, pero su padre no se lo permitió.

En los salones de la casa de los Agnesi se celebraban frecuentemente reuniones a las que acudían intelectuales de toda Europa; en ellas se discutía sobre todos los temas de carácter cultural y científico que tenían relación con los saberes más avanzados de la época. María Agnesi, desde niña, participaba activamente en esas reuniones, discutiendo en pie de igualdad con los intelectuales y filósofos.

A los 9 años leyó su primer ensayo filosófico sobre la formación de las mujeres y su derecho a estudiar ciencias. A los 17 redactó una crítica muy coherente sobre el *Traite analytique des sections coniques* de Guillaume François de l'Hôpital; este trabajo se difundió ampliamente de manera privada aunque nunca fue publicado.

Antes de los 13 años sabía hablar italiano, latín, griego, español, hebreo, francés y alemán y era capaz de discutir de manera aceptable sobre temas científicos en cualquiera de estas lenguas, recibiendo por esto el apelativo de "Oráculo de siete idiomas".

La negativa de su padre a permitirle dedicarse a la vida religiosa, la llevó a apartarse de las actividades sociales y adoptó una actitud de recogimiento y estudio, centrando sus esfuerzos en temas de religión y matemáticas, afirmando que el álgebra y la geometría eran las únicas partes del pensamiento donde reina la paz.

La muerte de su madre, cuando ella tenía veintiún años, supuso un cambio radical en su vida pues tuvo que asumir la responsabilidad de hacerse cargo de su gran familia. Sin embargo, aunque de forma más lenta, prosiguió de manera incansable con sus estudios e investigaciones, robando horas al descanso nocturno después de haber soportado agotadoras jornadas de trabajo.

En 1738 Pietro Agnesi publicó un profundo libro de su hija: *Propositiones Philosóphicae*, en el que se compendiaba la defensa de 191 tesis filosóficas debatidas o propuestas en esos encuentros sociales que tan poco agradaban a María Gaetana. Recogen exposiciones sobre lógica, mecánica, hidráulica, elasticidad, química, botánica, zoología, mineralogía, astronomía, filosofía, mecánica celeste y la teoría newtoniana sobre la gravitación universal.

Instituzioni analítiche ad uso della gioventú italiana (1748), fue su principal obra. Era una recopilación sistemática, en dos volúmenes y un total de unas mil páginas. El primer tomo trata del conocimiento contemporáneo en álgebra y geometría analítica, y el segundo de los nuevos conocimientos en cálculo diferencial e integral, la materia que se estaba estudiando en aquella época, exponiendo las cuestiones teóricas con muchos ejemplos.

Estuvo encargada de algunos de los cursos de su padre, por lo que puede ser considerada como la primera mujer que dio clases de matemáticas en la universidad. Años más tarde le ofrecieron la Cátedra de matemáticas superiores y filosofía natural de la Universidad de Bolonia pero no aceptó el cargo.

Cuando murió su padre en 1752, abandonó las matemáticas y a partir de ese momento María atiende sus tendencias religiosas: se centra en el estudio de la Teología y dedica su fortuna a obras de caridad, acabando en la miseria. Desde 1771 ejerce como directora del Hospicio Trivulzio de Milán, se concentra en el cuidado de los necesitados y enfermos, sobre todo mujeres mayores, y muere ella misma en la institución que dirigía, el 9 de enero de 1799.

Tema para investigar: La curva de Agnesi (*La versiera* o *"bruja"* de Agnesi).

Brenda R. S.

Fuentes:
Matemáticas en las matemáticas. Varias autoras. Proyecto Sur.
Matemática es nombre de mujer. Susana Mataix. Rubes.
http://es.wikipedia.org/wiki/Maria_Gaetana_Agnesi
http://divulgamat.ehu.es/weborriak/historia/MateOspetsuak/Agnesi2.asp

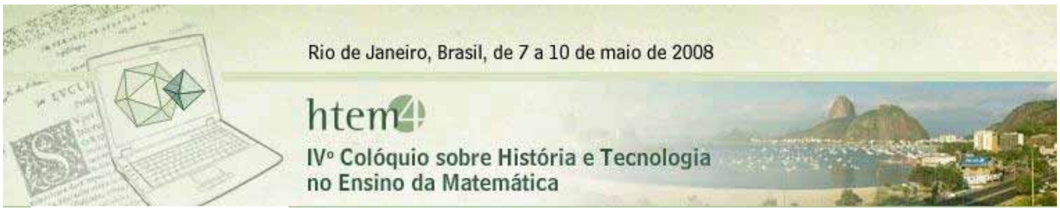
UNIÓN
REVISTA IBEROAMERICANA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA

Marzo de 2008, Número 13, páginas 149-152
ISSN: 1815-0640

Convocatorias y eventos

AÑO 2008

VI Festival Internacional de Matemática
Colegio Bilingüe San Agustín, Palmares, Alajuela.
Costa Rica
Fecha: 29, 30 y 31 de mayo, 2008
http://www.cientec.or.cr/matematica.html



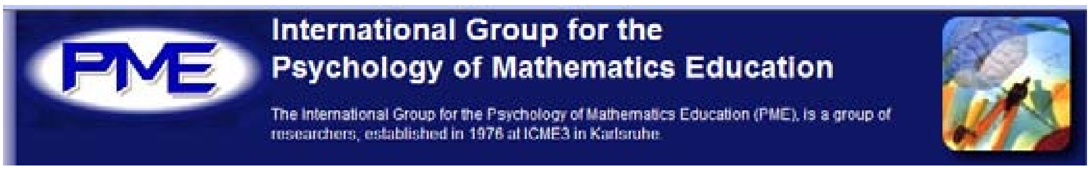
IV Colóquio de História e Tecnologia no Ensino de Matemática
Universidad Federal de Río de Janeiro, Brasil
Fecha: 7 al 10 de Mayo, 2008
http://www.limc.ufrj.br/htem/

VII Conferencia Argentina de Educación Matemática (VII CAREM)
Ciudad de Santa Fe, Argentina
Sociedad Argentina de Educación Matemática
Departamento de Matemática de la Facultad de Humanidades y Ciencias Universidad Nacional del Litoral
Fecha: 15 al 17de Mayo, 2008
http://www.soarem.org.ar/CAREM/base_3/carem.htm

Joint ICMI /IASE Study Statistics Education in School Mathematics
Monterrey, México
Instituto Tecnológico y de Estudios Superiores
Fecha: 30 de Junio al 4 de Julio, 2008
http://www.stat.auckland.ac.nz/~iase/

ICME, the International Congress on Mathematical Education
Monterrey, México
Fecha: 6 al 13 de Julio 6, 2008
http://icme11.org/

Encuentro Latinoamericano de Educación Estadística (ELEE)
ITESM, Monterrey, México
Fecha: 4 al 5 de julio, 2008
http://www.ugr.es/~icmi/iase_study/



PME 32
Morelia, Mexico
Fecha: 17 al 21 de julio, 2008
http://igpme.org/default.asp

HPM 2008

Historia y Pedagogía de las Matemáticas
The HPM Reunión Satélite del ICME

14 al 18 de Julio de 2008, Ciudad de México, MÉXICO
Primer Anuncio

Historia y Pedagogía de las Matemáticas
HPM Reunión Satélite del ICME
Ciudad de México, MÉXICO
Fecha: 14 al 18 de Julio, 2008,
http://www.red-cimates.org.mx/HPM2008.htm

SEIEM

Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática

XII Simposio de la Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática
XIX Seminário de Investigação em Educação Matemática
XVIII Encontro de Investigação em Educação Matemática
Badajoz, Facultad de Educación, Universidad de Extremadura
Fecha: 4, 5 y 6 de septiembre, 2008
http://www.seiem.es/actividades/simposios.htm

IV Congreso Iberoamericano de Cabri
IBEROCABRI - 2008

IV Congreso Iberoamericano de Cabri (IBEROCABRI-2008)
Ciudad de Córdoba, Argentina
Universidad Nacional de Córdoba y Cabrilog
Fecha: 23 al 26 de Septiembre, 2008
http://www.iberocabri.org/

AÑO 2009

VI Congreso Iberoamericano de Educación Matemática
Puerto Montt Universidad de Los Lagos de Chile
Fecha: 04 al 09 de Enero, 2009.
http://cibem6.ulagos.cl/

10º Simposio de Educación Matemática
Chivilcoy, Argentina
Universidad Nacional de Luján
Fecha: 4 al 7 de Mayo, 2009
www.edumat.org.ar

AÑO 2010

8º Internacional Conference on Teaching Statistics (ICOTS 8)
Ljubljan, Eslovenia
Universidad Nacional de Luján
Fecha: 11 al 16 de Julio, 2010
http://icots8.org/

UNIÓN
REVISTA IBEROAMERICANA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA

Marzo de 2008, Número 13, páginas 153-155
ISSN: 1815-0640

Información

Nueva convocatoria de Adopta una Estrella y Ciencia en Acción

El programa Ciencia en Acción y Adopta una Estrella, son una iniciativa del Consejo Superior de Investigaciones Científicas, la Fundación Española para la Ciencia y la Tecnología, la Real Sociedad Española de Física y la Real Sociedad Matemática Española, en coordinación con EIROforum. Su principal objetivo es aumentar la cultura científica a través de ideas y soluciones innovadoras que hagan la ciencia atractiva y educativa para todos los sectores de la población. Así llegaremos a su novena edición, que tendrá lugar en Valladolid (España) los días 19, 20 y 21 de septiembre de 2008.

El concurso "Adopta una Estrella" está dirigido a alumnos no universitarios de cualquier país de habla hispana o portuguesa. Deberán presentarse en grupos de tres alumnos de primaria o secundaria, bajo la tutela de un profesor. Es obligatorio realizar la inscripción *on line* en la página web del programa y enviar un resumen de 15 líneas en inglés y otro en español, **antes del 1 de julio de 2008.**

El objetivo es despertar y fomentar el interés de las personas, especialmente de los jóvenes, por el mundo de la Astronomía. Cada grupo de tres alumnos bajo la tutela de un profesor elegirá una estrella o cualquier otro objeto celeste (planeta, galaxia, cometa, etc.) o fenómeno astronómico (eclipse, tránsito, ocultación, etc.) y buscará saber todo cuanto puedan de él, al estilo de como actúa un detective. Se trata de un proyecto interdisciplinar que conlleva la realización de algún tipo de experimento, experiencia práctica o la determinación de valores de observación. Al final del proceso se pretende que el objeto sea un amigo más o una mascota para el grupo.

Si el trabajo es uno de los ganadores, deberá presentarse (via webcam) en la final del certamen de septiembre de 2008.

El concurso "Ciencia en Acción" está dirigido principalmente a profesores de enseñanza primaria, secundaria y de universidad; **a investigadores, divulgadores científicos de los medios de comunicación o pertenecientes a museos y organismos relacionados con la ciencia, así como a cualquier persona interesada en la enseñanza de la ciencia, de países de habla hispana o portuguesa.** Los interesados deberán presentarse de forma individual al concurso. Es preciso realizar la inscripción a través de la página Web a la que se enviará un resumen detallando las características de la propuesta (objetivos, estructura, metodología, contenidos, público al que se dirige…). El resumen tendrá una extensión de 15 líneas, deberá estar redactado en inglés y en castellano o portugués.

Objetivos

- Encontrar ideas innovadoras que hagan la ciencia más atractiva para la ciudadanía.
- Subrayar el carácter internacional de la ciencia.
- Contribuir a extender los contactos científicos y en materias divulgativas en el marco europeo.
- Realizar materiales pedagógicos útiles y de calidad (textos, imágenes, videos, etcétera) que sirvan de ayuda para complementar los contenidos curriculares para los diversos niveles educativos.
- Fomentar en los educadores el interés por la ciencia de manera activa para llegar a los estudiantes en las aulas.
- Involucrar a investigadores en actividades de divulgación científica.

- Incrementar la cultura científica de los ciudadanos europeos.
- Mostrar la importancia de la ciencia para el progreso de la sociedad y el bienestar de los ciudadanos.

Si el trabajo es uno de los ganadores, deberá mostrarse en la fase final del certamen (vía webcam o presencialmente dependiendo de la categoría) participando el concursante en la presentación conjunta correspondiente.

El 16 de julio se facilitará la lista de **ganadores** que serán invitados a participar en el **Certamen Final del 19 al 21 de septiembre de 2008** en Valladolid

Más información en la página web: www.cienciaenaccion.org

Rosa Mª Ros

Directora de "Ciencia en Acción"

UNIÓN
REVISTA IBEROAMERICANA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA

Marzo de 2008, Número 13, páginas 157 - 158
ISSN: 1815-0640

Información

Convocatoria de la dirección de Unión

Antecedentes

La dirección de la revista UNION, que avala y nombra la Junta de Gobierno de la Federación Iberoamericana de Sociedades de Educación Matemática (FISEM), ha de convocarse cada tres años.

La actual dirección cumplió su mandato con el número 12 que se colgó en la red en el mes de diciembre de 2007. Previamente, en el número 10 (mes de marzo de 2007), se publicó la convocatoria de la dirección de UNIÓN sin que se presentara ninguna candidatura.

Los actuales codirectores plantearon a la Junta de Gobierno la prórroga por un año más con la condición de convocar de nuevo en el mes de marzo de 2008 y ésta la aceptó.

Convocatoria

Aquellos profesores o profesoras que deseen hacerse responsables de la dirección de UNION, deberán enviar una solicitud a la Presidencia de la FISEM antes del 30 de septiembre de 2008.

El procedimiento y los documentos a presentar son los siguientes:

- Solicitud dirigida al Presidente de la FISEM en la que consten al menos estos datos: nombre completo, domicilio, Sociedad federada a la que pertenece, e-mail, situación profesional y lugar de trabajo. En el caso de tratarse de una codirección, se enviarán los datos de cada uno.
- Certificado del Secretario de su Sociedad en el que conste su condición de socio activo así como su antigüedad como tal que debe ser superior o igual a cinco años. Se hará de cada uno si se trata de una codirección.
- Una memoria de un máximo de tres folios en la que exponga la orientación que desea dar a la revista así como las secciones fijas que va a crear y otros datos que aclaren la línea que tiene previsto aplicar.
- Currículum vitae de cada componente si la propuesta es de codirección.

Información

Las solicitudes y la documentación se enviarán por correo postal a la Presidencia de la FISEM cuya dirección postal es la siguiente:

Miguel A. Díaz Flores
Director de la Escuela de Educación y Humanidades
Universidad de Viña del Mar
Agua Santa 7255, Sector Rodelillo
Viña del Mar - Chile

El solicitante comunicará a la Secretaría General de la FISEM, por e-mail, que se ha enviado a la Presidencia la documentación solicitada:

balbuenaluisx@gmail.com

Todas las solicitudes recibidas serán enviadas a la Junta de Gobierno de la FISEM para que decida cuál es la candidatura que presenta el programa más adecuado a los fines de la Federación. La candidatura designada comenzaría su mandato en el mes de enero de 2009.