UNIÓN

REVISTA IBEROAMERICANA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA

Número 18 – Junio de 2009

Índice

	Créditos	2
	Editorial	4
FIRMA INVITADA	**Antonio Martinón: breve reseña**	5
	¡Vivan las demostraciones! Antonio Martinón	6
ARTICULOS	**Formas de argumentación en el cálculo de la función derivada de la función $f(x)= x^2$ sin usar la definición por límites** Vicenç Font Moll	15
	Reflexiones sobre el valor del diálogo en la Enseñanza de la Matemática María C. Rocerau; Silvia Vilanova; María Isabel Oliver; María S. Vecino; Guillermo Valdez	29
	De las descripciones verbales a las representaciones gráficas. El caso de la rapidez de la variación en la enseñanza de la matemática Crisólogo Dolores Flores; Andrés Greogorio Chi Chablé; Eduardo Rafael Canul Pech; Cristy Arely Cantú Interián; Crispín Giovanni Pastor Solache	41
	Discurso y práctica docente en matemáticas: Un estudio exploratorio en bachillerato Eddie Aparicio; Martha Jarero; María Ordaz; Landy Sosa	58
	Una sinopsis de los trabajos de investigación presentados en Delta 07: algunas tendencias en la investigación en Educación Matemática Víctor Martínez Luaces; Anne D'Arcy	73
	A construção de uma tabela trigonométrica Vincenzo Bongiovanni	81
	El lenguaje de los gráficos estadísticos Pedro Arteaga; Carmen Batanero; Carmen Díaz; José Miguel Contreras	93
SECCIONES FIJAS	**Dinamización matemática: Iniciación al estudio de las matemáticas de las cantidades en la Educación Infantil** Carlos de Castro Hernández; Clara Pastor Llamas; Lidia Cayetana Pina Plaza; María Isabel Rojas Díez; Beatriz Escorial González.	105
	El rincón de los problemas: Producto máximo Uldarico Malaspina	129
	TIC: Desarrollo de software para el aprendizaje y razonamiento probabilístico: El caso de SIMULAPROB Santiago Inzunsa; Diego Alonso Gastélum; Anselmo Alvarez.	135
	Ideas para enseñar: Estudio de la Elipse con Plegado de Papel Fabiola Czwienczek	150
	Libros: Enseñar aritmética a los más chicos: de la exploración al dominio Reseña : Daniela Andreoli	156
	Matemáticas en la red: Fundación Evolución. Haciendo Punta en la Escuela. Reseña: Elda Micheli	158
INFORMACIÓN	**Fundación Canaria: Carlos Salvador y Beatriz**	162
	Convocatoria al cargo de Pro – Secretario de la FISEM	165
	Convocatorias y eventos	167
	Instrucciones para publicar en UNIÓN	172

Junio de 2009, Número 18, página 2-3
ISSN: 1815-0640

Unión. Revista Iberoamericana de Educación Matemática es una publicación de la Federación Iberoamericana de Sociedades de Educación Matemática **(FISEM)**. Tiene una periodicidad trimestral, de modo que se publican cuatro números al año, en los meses de marzo, junio, septiembre y diciembre.

Es recensionada en ***Mathematics Education Database*** y está incluida en el catálogo ***Latindex*.**

Evaluadores

Colabora

UNIÓN
REVISTA IBEROAMERICANA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA

Junio de 2009, Número 18, páginas 4
ISSN: 1815-0640

Editorial

"…Podemos decir, que no existe una respuesta simple sobre cómo
progresan las ciencias, o qué es el método científico.
Las investigaciones y descubrimientos se aceleran cada vez más.
La cantidad de conocimiento crece vertiginosamente, lo mismo que el número
de personas involucradas en estas aventuras, dando como resultado una forma cambiante,
de ver y entender nuestro mundo y a nosotros mismos.
Independientemente de cómo llamamos a este tipo de progreso, se puede decir,
que la enseñanza de las ciencias es una aventura excitante
de la cual todos podemos participar…"

Jonathan Reichert,
(traducción y adaptación de Ricardo Chrobak).

En este número tratamos de destacar los aportes de nuestros colegas sobre aspectos teóricos y metodológicos en distintos contextos educativos, lo que permite conocer enfoques y problemáticas diversas pero también coincidentes en algunos aspectos fundamentales de la Educación Matemática.

También queremos compartir nuestra alegría por el reconocimiento bien merecido, que recibe el Profesor Luis Balbuena Castellano con el Premio "Gonzalo Sánchez Vázquez a la labor docente y los valores humanos en la Educación Matemática, otorgado por la Junta de Gobierno de la Federación Española de Sociedades de Profesores de Matemáticas.

En nuestro ámbito comenzamos a tratar al profesor Balbuena en los Congresos de SOAREM (Sociedad Argentina de Educación Matemática), ya que su Presidenta y Fundadora Nelly V. de Tapia lo consideraba un colaborador y referente permanente en la consolidación de actividades y reuniones de Sociedades de Educación Matemática, reuniones en las que siempre estuvo dispuesto a participar de manera entusiasta y positiva, virtudes que lo caracterizan sin duda alguna. En sus cursos y seminarios pudimos enriquecernos con sus condiciones didácticas en la acertada elección de los ejemplos originales que presentaba y las actividades apropiadas, que despertaban el interés de los asistentes.

Pero, además de sus condiciones académicas, queremos destacar especialmente su calidez humana y su gran generosidad, cada vez que hemos acudido a él obtuvimos la respuesta acertada y la colaboración permanente. Como responsables actuales de La Revista UNIÓN nos ha brindado su invalorable y certero apoyo para asumir semejante compromiso, recibiendo siempre de su parte palabras de aliento y dedicación incondicional.

Queremos destacar la colaboración de la presidenta de ASOVEMAT La profesora Martha Iglesias en la Sección fija "Ideas para enseñar", que ha respondido inmediatamente a nuestras solicitud de colaboración, que hacemos extensivo a todas las sociedades que componen la FISEM, porque esta revista pertenece a todos y depende de su participación para jerarquizarla y lograr la tan ansiada unidad de la comunidad en Educación Matemática.

Un abrazo fraternal.

Norma S. Cotic – Teresa C. Braicovich

UNIÓN
REVISTA IBEROAMERICANA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA
Junio de 2009, Número 18, página 5
ISSN: 1815-0640

firma invitada

Antonio Martinón

Breve reseña

Nació en La Laguna (Tenerife, Canarias, España) en 1950. Comenzó sus estudios de Matemáticas en la Universidad de su ciudad natal y los concluyó en la de Zaragoza. Ha sido catedrático de Bachillerato y en la actualidad es catedrático de Análisis Matemático en la Universidad de La Laguna.

Su actividad investigadora se sitúa en los campos del Análisis Funcional (espacios de Banach, teoría de operadores) y de la Topología General. Como consecuencia de la misma ha publicado decenas de artículos

Ha participado de diferentes maneras en actividades de divulgación. Así, fue coordinador del libro *Las matemáticas del siglo XX* (Editorial Nivola, Madrid, 2000), en el que se da una panorámica sobre las matemáticas y su enseñanza en el siglo pasado de la mano de numerosos autores. También ha escrito diferentes artículos de divulgación matemática publicados en periódicos, revistas y libros, y ha impartido conferencias en diferentes universidades e instituciones.

Su interés por la enseñanza y el aprendizaje le ha llevado a que parte de sus investigaciones se hayan desarrollado en el campo de la Didáctica de las Matemáticas, en el que ha dirigido dos tesis doctorales. Ha sido codirector de *Unión. Revista Iberoamericana de Educación Matemática* y en estos momentos es codirector de la revista *Números* que edita la Sociedad Canaria Isaac Newton de Profesores de Matemáticas.

Es autor de numerosos trabajos y libros sobre Educación así como de divulgación de las matemáticas en prensa, radio y televisión.
Autor-coautor de libros como "Guía Matemática de La Laguna","Palillos, aceitunas y refrescos matemáticos", "Cuentos del cero", "Banderas y naciones", "El Quijote y las matemáticas", etc. Ha dirigido cursos de actualización científica y didáctica para profesores de Secundaria en Paraguay, Chile, México, etc.

UNIÓN
REVISTA IBEROAMERICANA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA
firma invitada
Junio de 2009, Número 18, páginas 6 - 14
SSN: 1815-0640

¡Vivan las demostraciones!

Antonio Martinón

Agradezco a las directoras de UNIÓN que me hayan invitado a participar en esta sección en la nueva etapa que inaugura la revista

Les deseo suerte y éxitos.

Decidir la verdad

Los humanos decidimos de maneras muy diversas. Desde luego, hay ocasiones en las que recurrimos a un razonamiento. Pero a veces hacemos algo siguiendo una corazonada. En otras ocasiones atendemos a nuestros sentimientos. En el ámbito de la política recurrimos a una votación. En ciertas situaciones dispone la autoridad y los demás debemos acatar.

Pero en el terreno de la Ciencia se decide apelando a una explicación, sobre todo cuando deseamos conocer la verdad, que es a fin de cuentas el objetivo último de la actividad científica.

Será fácil que nos equivoquemos si pretendemos averiguar la verdad científica siguiendo una corazonada, atendiendo a nuestros sentimientos, realizando una votación, o que el más prestigioso decida.

En Ciencia tenemos que convencernos unos a otros de cuál es la verdad. Decimos que algo es cierto apelando a la razón, usando argumentos. Aquí no cabe el principio de autoridad, ni la opinión de la mayoría, ni seguir los dictados del corazón.

La demostración en Matemáticas

En Matemáticas también es preciso que razonemos las verdades. A fin de cuentas, se trata de una de las Ciencias, la más básica de todas. Pero es que, además, las Matemáticas pueden ayudarnos mucho en aprender a caminar por el sendero que conduce a la verdad.

En el sistema educativo de cualquier país encontramos que las Matemáticas, junto con el estudio de la Lengua, tienen un papel central. Hay una doble justificación para que sea así. Por un lado, las Matemáticas resultan útiles en la vida cotidiana: las operaciones aritméticas son necesarias con frecuencia y ciertos rudimentos de Geometría y de las medidas de figuras simples también son imprescindibles. Pero hay otra razón, en la que ahora quiero insistir más: el estudio de las Matemáticas contribuye a la formación intelectual.

Para que realmente las Matemáticas jueguen ese papel de educadoras del intelecto es imprescindible que se presenten como una obra racional y no como un conjunto de misteriosas recetas que es obligatorio respetar. Este papel formativo de las Matemáticas no se alcanza a través del uso reiterado de ciertas fórmulas o de los habituales algoritmos.

Para que las Matemáticas formen intelectualmente a los alumnos, en lo que las Matemáticas son capaces de hacerlo, es imprescindible que haya razonamiento matemático. Y donde más lo encontramos es en las demostraciones, que vienen a ser un razonamiento con varios pasos, bien ligados unos con otros, y que pretende llevarnos a algún sitio.

El concepto de demostración matemática supone la cumbre de la argumentación racional. Demostrar significa dar una explicación para convencer a los demás, pero también a uno mismo, de la verdad de una afirmación. Se ofrece una razón que se impone por la ligazón lógica entre lo que ya se conoce y lo que se desea probar. Demostrar es evidenciar, es ofrecer un argumento irrefutable. Demostrar es justificar, evidenciar la certeza de una afirmación, alejando cualquier duda sobre su verdad.

La demostración matemática es peculiar porque es una justificación deductiva, aunque también en la Geometría elemental nos encontramos con demostraciones con una fuerte componente empírica: en parte del razonamiento se argumenta diciendo “mira y observa que es así”.

La demostración, el razonamiento que demuestra, es fundamental en las Matemáticas. Pero también lo es en buena parte de la actividad humana, aunque no, desde luego, en toda.

La demostración en la Educación

Un grave problema está extendido en nuestros sistemas educativos: en las aulas, las demostraciones matemáticas están en retroceso, prácticamente ausentes.

Como ya hemos dicho, para que las Matemáticas jueguen su papel de formación intelectual es necesario que haya razonamiento matemático y eso se alcanza si las demostraciones forman parte del currículo escolar. Para lograrlo hay que darle la vuelta a la actual tendencia.

Por supuesto, no hay que demostrarlo todo y hay que adaptar las demostraciones al nivel de los alumnos. Pero sí creo muy conveniente que se implante la costumbre de la demostración, de la justificación.

Ante una propiedad matemática que no se demuestra caben varias justificaciones: “no tenemos tiempo para hacerla, pero se hace de modo similar a aquella otra”, e incluso cabe decir “es difícil y ya se estudiará en un curso posterior”, pero siempre se debe dar una explicación demostrativa. Debe quedar claro que en Matemáticas se demuestra todo, aunque al alumno, por una u otra razón, no se le ofrezca la correspondiente argumentación.

Acabo de escribir que en Matemáticas se demuestra todo y realmente esto no es totalmente cierto. Cuando se razona, uno se apoya en verdades ya conocidas y, a su vez, éstas necesitan una justificación. Pronto se comprende que esta cadena hacia atrás debe tener un final, lo que obliga a aceptar ciertos hechos como ciertos y sobre los que no cabe demostración: son los axiomas.

En la enseñanza, especialmente en la elemental, aceptamos como ciertas numerosas propiedades de los números y de las figuras geométricas, pero incluso en estos casos debemos dar al menos una explicación, con ejemplos adecuados, con dibujos sugerentes…

Se puede alegar que las demostraciones no son fáciles y que es casi imposible que los alumnos lleguen a entenderlas. Pienso que hay demostraciones sencillas, que los alumnos sí pueden comprender, adaptadas a sus conocimientos y a su desarrollo intelectual, y que los profesores no tenemos el derecho de ocultárselas.

Es cierto que una demostración exige trabajo y concentración. También a los grandes matemáticos, a quienes idearon los más difíciles razonamientos, les ha costado mucho esfuerzo. Además, forma parte de la Educación la transmisión de los valores propios de la exigencia intelectual.

También se podrá decir que no hay tiempo en el aula para gastar en demostraciones, que es necesario hacer otras muchas cosas. Opino que en las clases de Matemáticas hay tiempo para las Matemáticas y demostrar es hacer Matemáticas. Forma parte de la habilidad del profesor el logro de un reparto equilibrado del tiempo para desarrollar las diferentes facetas del aprendizaje matemático.

Quizás lo más difícil de una demostración es entender lo que una demostración significa. Como no se estudian demostraciones, o son muy pocas las que se presentan, la misma noción de demostración no existe en los estudios de la Educación Secundaria y se convierte en una auténtica novedad de los estudios universitarios. Parece que las verdades matemáticas son las que son por arte de magia, porque lo dice el profesor, porque está en el libro, porque siempre ha sido así...

Al principio, algunos alumnos pensarán que no es necesario demostrar nada y aceptarán gustosos lo que el profesor indique, sin más miramientos. Este es un obstáculo intelectual que es necesario superar.

Puesto que no es posible demostrarlo todo, se debe procurar elegir aquellas demostraciones más claras, más simples y, también, las más elegantes y atractivas.

A continuación incluyo algunas demostraciones que me resultan especialmente bellas. Todas son bien conocidas y antiguas, las más difíciles desde hace veinticinco siglos.

Área del triángulo

La geometría del triángulo es un campo en el que se encuentran interesantes propiedades que tienen sencillas demostraciones. Es muy instructivo probar que las tres mediatrices de un triángulo se cortan en un punto (circuncentro) y que existen propiedades análogas para las bisectrices (incentro), medianas (baricentro) y alturas (ortocentro).

Veamos ahora cómo se puede justificar la célebre fórmula de que el área de un triángulo es la mitad de la base por la altura. Se supone conocido que el área de un rectángulo de lados a y b es $A = ab$ (lo que, por otro lado, es muy "razonable").

Dado el triángulo PQR, se puede construir un triángulo de igual área de vértices RQS, y así obtenemos un paralelogramo de vértices PQSR, tal como se ve en la Figura 1.

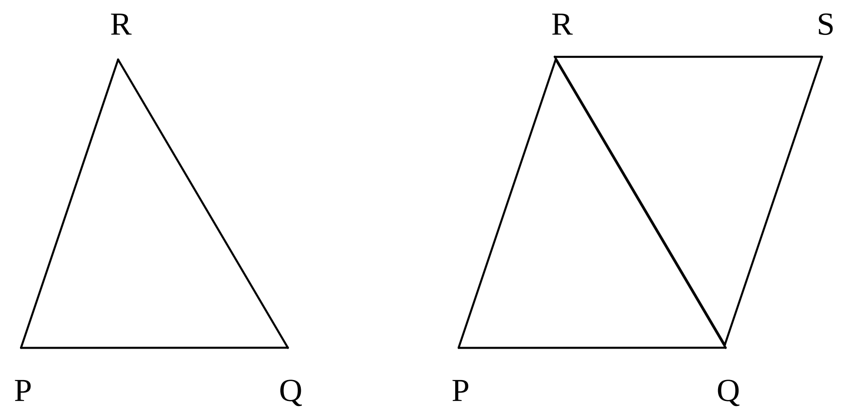


Figura 1

Si trazamos las perpendiculares PU y QV obtenemos el rectángulo PQVU, que tiene igual área que el paralelogramo PQSR y, por tanto, doble área que el triángulo inicial PQR, como se ve en la Figura 2.

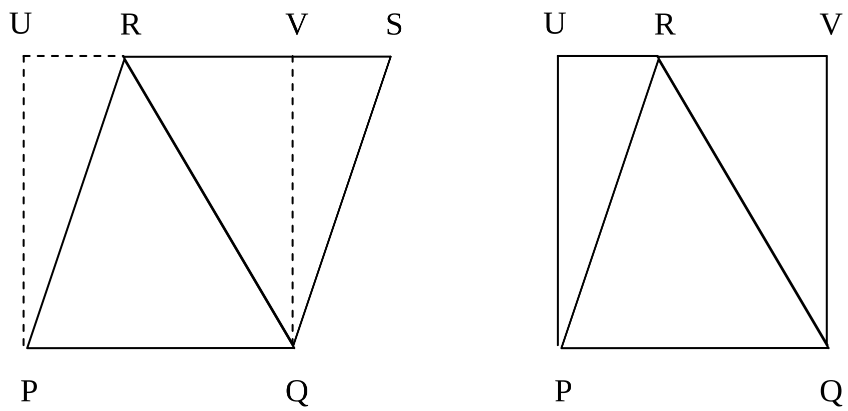


Figura 2

Si llamamos a a la longitud del lado PQ y b a la altura correspondiente, se tiene entonces

área rectángulo PQVU = ab = 2 área triángulo PQR

y finalmente

área triángulo PQR = $\frac{ab}{2}$

Es decir, el área de un triángulo es la mitad de la longitud de un lado por la longitud de la altura correspondiente.

Teorema de Pitágoras

Seguramente la propiedad matemática más famosa es el Teorema de Pitágoras. Existen centenares de demostraciones, pero lo habitual es que los alumnos no estudien ninguna de ellas. Me parece que ésta es una de esas propiedades cuya demostración debería ser obligatoria y el profesor cerciorarse de que los alumnos la han entendido. No sólo se trata de ofrecer una demostración para cumplir con los rigores del método matemático. Hay que alcanzar el máximo objetivo: los alumnos deben ser capaces de demostrar, entendiendo lo que hacen... ¡y disfrutando con ello!

La siguiente demostración me parece especialmente sencilla y al alcance de cualquiera. Realmente se trata de mirar con atención los dos dibujos de la Figura 3.

Se convence uno inmediatamente que es cierto que a^2 (la hipotenusa al cuadrado) coincide con b^2+c^2 (la suma de los catetos al cuadrado); es decir:

$$a^2=b^2+c^2$$

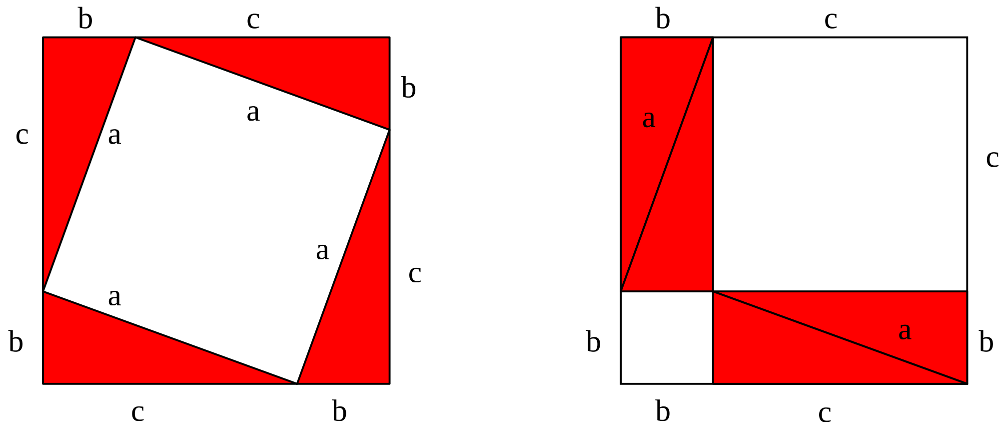


Figura 3

Igualdades algebraicas notables

Especialmente instructivas son las propiedades que se demuestran de forma algebraica y geométrica, pues así se pone en evidencia la profunda unidad de las Matemáticas. Esto se puede hacer con la demostración de las igualdades notables:

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2 \quad ; \quad (a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2 \quad ; \quad (a+b)(a-b) = a^2 - b^2 \quad .$$

Cualquiera de las tres igualdades anteriores se puede demostrar algebraicamente, desarrollando el término de la izquierda. Por ejemplo:

$$(a+b)^2 = (a+b)(a+b) = aa + ab + ba + bb = a^2 + 2ab + b^2.$$

Pero también se puede probar geométricamente, tal como se muestra en la Figura 4.

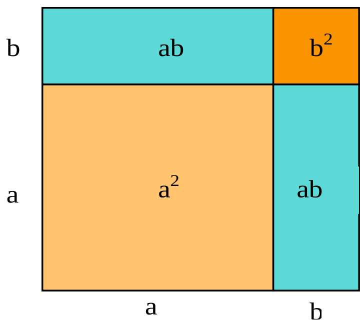


Figura 4

Se considera un cuadrado de lado $a+b$, y observamos que se forman dos cuadrados de lados a y b (luego de áreas a^2 y b^2) y dos rectángulos de lados a y b (luego ambos de áreas ab). Por tanto, el área total $(a+b)^2$ es la suma de las áreas de los dos cuadrados de áreas a^2 y b^2, y de los dos rectángulos de áreas ab:

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2.$$

$\sqrt{2}$ es irracional

Subimos el nivel de dificultad en este ejemplo. Vamos a recordar la demostración habitual de que el número $\sqrt{2}$ no es racional; es decir, es irracional. Esto significa que ningún número racional (ninguna fracción de números naturales) tiene su cuadrado igual a 2. El razonamiento que utilizaremos consiste en actuar *por reducción al absurdo,* así que sirve de ejemplo de otro método demostrativo.

Supongamos que la fracción $\frac{m}{n}$ (m,n son números naturales) tiene cuadrado igual a 2 y suponemos también que la fracción ya está simplificada al máximo, es decir no hay factores comunes a m y n. Esto significa que

$$\frac{m^2}{n^2} = 2 \ .$$

Entonces se tiene que $m^2 = 2n^2$. Por tanto m^2 es un número par, así que m es también un número par y realmente m^2 es múltiplo de 4, así que queda $4p = m^2 = 2n^2$, por lo que n^2 es par, de donde se tiene que n es par. Es decir, tanto m como n son pares, lo que contradice que no tuvieran factores comunes. Hemos llegado a una contradicción.

Hemos probado que las dos suposiciones que hemos hecho (la fracción $\frac{m}{n}$ tiene cuadrado igual a 2 y está simplificada al máximo) son imposibles al mismo tiempo. Como simplificar una fracción al máximo siempre se puede hacer, concluimos que es imposible que su cuadrado sea 2.

Hay infinidad de números primos

Concluimos con una propiedad que es muy distinta de todas las anteriores: hay infinitos números primos.

Aquí hay un trato con el infinito y, por tanto, hay una complicación importante, que exige un cierto nivel de madurez por parte de los alumnos. Pero es una magnífica ocasión de abordar una de las ideas matemáticas más notables, la del infinito. Lo que realmente vamos a demostrar es que dada una cantidad finita de números primos siempre podremos encontrar un número primo diferente de todos ellos. Por tanto, tiene que haber una infinidad de números primos.

Recordemos que un número natural a se llama *primo* si solamente es múltiplo de 1 y de sí mismo, y además es diferente de 1. Los primeros números primos son: 2, 3, 5, 7...

Vamos con la demostración. Supongamos que los números $a, b, c..., m$ son primos. Los multiplicamos todos ellos, sumamos 1 y obtenemos el número:

$$p = abc...m + 1 \ ,$$

el cual es diferente de $a, b, c..., m$ (¡es "bastante" más grande que todos ellos!) El número p no es múltiplo de a, ya que si lo fuera, entonces también $abc...m$ sería múltiplo de a, luego 1 tendría que ser múltiplo de a, lo que no puede ser. Análogamente, p no es múltiplo de ninguno de los otros números primos: ni de b, ni de c..., ni de m. Por tanto, o bien el mismo p es primo o bien p es múltiplo de algún otro primo q, que es diferente de los primos $a, b, c..., m$. En cualquier caso podemos decir que hay más primos además de los iniciales $a, b, c..., m$.

¡Vivan las demostraciones... correctas!

Todo lo escrito hasta aquí se puede resumir en ¡Vivan las demostraciones! Son muy útiles para educar intelectualmente a los alumnos... y a los profesores no nos vienen mal. Además, con ellas se puede disfrutar.

Pero hay que tener cuidado, como ocurre con tantos placeres. Hay demostraciones que son erróneas, así que no se trata de auténticas demostraciones. Son razonamientos tramposos, aunque muchas veces no hay ánimo de engaño por parte de los autores.

Bajo la apariencia de un riguroso razonamiento se puede esconder algún disparate. Esto es obvio cuando la conclusión es claramente falsa. Veamos el siguiente "razonamiento": supongamos que a y b son números que verifican $a = b$, es decir son el mismo número. Entonces:

$$a = b$$

$$a^2 = ab$$

$$a^2 - b^2 = ab - b^2$$

$$(a-b)(a+b) = (a-b)b$$

$$a + b = b$$

$$2a = a$$

$$2 = 1$$

¿En qué paso o en qué pasos se ha cometido error?

Otras veces el razonamiento es incorrecto, pero la conclusión es cierta, lo que hace difícil detectar que existe un error. Un ejemplo: supongamos que a y b son números positivos ($a > 0, b > 0$). Entonces:

$$\frac{1}{\sqrt{a}} + \frac{1}{\sqrt{b}} = \sqrt{\frac{1}{a}} + \sqrt{\frac{1}{b}} = \sqrt{\frac{b}{ab}} + \sqrt{\frac{a}{ab}} = \sqrt{\frac{b}{ab} + \frac{a}{ab}} = \sqrt{\frac{b+a}{ab}} = \frac{\sqrt{b+a}}{\sqrt{ab}} = \frac{\sqrt{b} + \sqrt{a}}{\sqrt{ab}}$$

Luego

$$\frac{1}{\sqrt{a}} + \frac{1}{\sqrt{b}} = \frac{\sqrt{b} + \sqrt{a}}{\sqrt{ab}}$$

¿Cuál o cuáles de las anteriores igualdades son falsas?

Por tanto, debemos decir ¡Vivan las demostraciones!, pero mejor es que afirmemos ¡Vivan las demostraciones... correctas!

Final

¿Cuándo es correcta una demostración? No hay respuesta sencilla. Resulta necesario desarrollar el sentido crítico frente a un razonamiento que se nos presenta, ante una justificación que se nos da... Es decir, hay que pensar por uno mismo y animar a los alumnos a que así lo hagan. No está mal como objetivo de la enseñanza de las Matemáticas.

Bertrand Russell escribió que "uno de los principales fines que cumplen las Matemáticas correctamente enseñadas es despertar en el estudiante la fe en la razón, la confianza en la verdad de lo que ha sido demostrado y en el valor de la demostración". Implícito en esa idea está que el aprendizaje de las Matemáticas contribuya a formar personas capaces de discernir un razonamiento correcto de uno que no lo es.

Si se logra que las demostraciones tengan un peso razonable en la enseñanza de las Matemáticas habremos conseguido elevar el nivel intelectual de nuestras sociedades. Animo a todos a intentarlo, pues creo que vale la pena.

En fin, lo ya dicho: ¡Vivan las demostraciones!

UNIÓN
REVISTA IBEROAMERICANA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA

Junio de 2009, Número 18, páginas 15– 28
ISSN: 1815-0640

Formas de argumentación en el cálculo de la función derivada de la función $f(x)= x^2$ sin usar la definición por límites

Vicenç Font Moll

Resumen

En este trabajo se analizan dos secuencias de actividades para calcular la derivada de la función $f(x)=x^2$ en las que no se usa la definición de la función derivada como límite de las tasas medias de variación. El objetivo es analizar las formas de argumentación que se utilizan en cada una de ellas.

Abstract

In this work two sequences of activities are analyzed to calculate derived from function $f(x)=x^2$ in which the definition of the function derived like limit of the average rates of variation is not used. The objective is to analyze the argumentation forms that are used in each one of them.

Resumo

Neste trabalho analisam-se duas seqüências de atividades para calcular a derivada da função $f(x)=x^2$ onde não se usa a definição da função derivada como limite das taxas médias de variação. O objetivo é analisar as formas de argumentação que se utilizam em cada uma delas.

1. Introducción

En este trabajo se analizan dos secuencias de actividades para calcular la derivada de la función $f(x)=x^2$ en las que no se usa la definición de la función derivada como límite de las tasas medias de variación. El objetivo es analizar las formas de argumentación que se utilizan en cada una de ellas. En la primera parte se analiza una secuencia de actividades que se inicia con una inducción, continúa con una abducción y termina con una deducción. En la segunda parte, se analiza una secuencia de actividades en las que se comienza con la abstracción reflexiva facilitada por el uso de software dinámico y se sigue con una deducción. Por último, se comentan las inferencias metafóricas asociadas al uso de software dinámico.

2. La investigación sobre el discurso y la argumentación en el aula de matemáticas

Actualmente ha aumentado considerablemente el interés en investigar el discurso y la argumentación en el aula de matemáticas, ya que, se ha considerado que lo que se dice sobre las tareas matemáticas es tanto o más importante que las propias tareas. En los congresos internacionales hay grupos de trabajo específicos sobre este tópico, por otra parte, prestigiosas revistas han dedicado números monográficos al tema (por ejemplo el volumen 46, números 1-3, del año 2001 de la revista *Educational Studies in Mathematics*) e incluso han aparecido revistas internacionales específicas sobre este tema como es el caso de la *Lettre de la Prueve* especializada en la enseñanza y el aprendizaje de la prueba matemática. Los estudios sobre el discurso y la argumentación en la educación matemática se han abordado desde diversas perspectivas, entre las cuales queremos destacar sólo dos:

- Las que se han centrado en el discurso del docente (y también del alumno) cuando utiliza un razonamiento matemático para la demostración de teoremas en el salón de clase. Lo que ha interesado en este tipo de estudios es cómo se consigue la validez del argumento. Por ejemplo, los trabajos de Bell (1976) y De Villiers (1993) que versan sobre las funciones de la demostración en la actividad matemática (además de verificación, la de explicación y sistematización, entre otras) o los más recientes de Ibáñez (2001) e Ibáñez y Ortega (2002) que profundizan en esta perspectiva.

- Las investigaciones sobre el uso de metáforas en el discurso del profesor y de los alumnos. Recientemente, varios autores, Font y Acevedo (2003); Lakoff y Núñez, (2000); Presmeg, (1997), han puesto de manifiesto el importante rol que juega la metáfora en la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas.

En este trabajo tendremos en cuenta, sobre todo, la primera de las dos perspectivas acabadas de citar. De entrada, nos centraremos en analizar cómo se prueba que la derivada de la función $f(x) = x^2$ es $f´(x) = 2.x$ en dos secuencias de actividades, para después ver el papel que juegan los procesos metafóricos en la justificación dada en la segunda de dichas secuencias de actividades.

En la evolución y desarrollo de las teorías matemáticas hay que considerar, como mínimo, tres estadios sucesivos, correspondientes a tres diferentes niveles de precisión y rigor en el concepto de prueba. En el primer estadio, llamado informal o ingenuo, se prueban los enunciados de la teoría, pero no se dice ni de dónde parte la prueba ni cuáles son los procedimientos admisibles para probar. En el segundo estadio, llamado axiomático, se determina el punto de partida de la prueba, eligiendo ciertos enunciados de la teoría como axiomas y exigiendo que todos los demás sean probados a partir de ellos, aunque sigue sin explicitarse cuáles son los procedimientos, reglas o medios de prueba admisibles. En el tercer y último estadio, llamado formalizado, el concepto de prueba está completamente precisado y explicitado, tanto en lo que respecta al punto de partida de la prueba como a los medios de prueba permitidos. El tercer estadio es más propio de los lógicos que de los matemáticos, mientras que los dos primeros estadios son los propiamente matemáticos.

En este trabajo se consideran dos secuencias de actividades, pensadas para alumnos del bachillerato español (17 años), en las que se justifica que la derivada de la función $f(x)=x^2$ es $f'(x)=2.x$, sin usar para ello la definición de la función derivada como límite de las tasas medias de variación. De entrada, nos situamos en la primera de las perspectivas comentadas sobre la investigación del discurso y la argumentación del aula, es decir nos interesamos en cómo se consigue la validez del argumento. Con relación a los tres estadios de desarrollo de la prueba, nos situamos en el primer estadio (informal o ingenuo). En dicho estadio caben muchos tipos de pruebas y de combinaciones de estos tipos (por ejemplo: ausencia de prueba ya que se considera evidente, razonamiento mediante un ejemplo, razonamiento mediante un ejemplo cuidadosamente seleccionado, razonamiento mediante un ejemplo genérico, razonamiento lógico a partir de proposiciones conocidas, inducción, inducción completa, abducción, deducción, etc.). En los apartados siguientes argumentaremos que la validez del argumento en la primera secuencia analizada se consigue por medio de una combinación de inducción abducción y deducción, mientras que en la segunda se observa una combinación de una evidencia empírica, resultado de una abstracción reflexiva, y una deducción.

3. Inducción, abducción y deducción en el cálculo de la derivada de la función $f(x)= x^2$

Antes de trabajar el texto del apartado 3.1 los alumnos saben que la derivada de la función en un punto es la pendiente de la recta tangente y la han calculado geométricamente en algunos puntos con actividades como la siguiente (Bujosa et al., 2003, p. 85), pero aún no se ha definido como $f'(a)=\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$.

Act. 26: Dada la función $f(x)=x^2$ y las rectas tangentes a la función en $x=-1$, $x=0$, $x=2$.

a) Calcula $f'(-1)$, $f'(0)$, $f'(2)$.

b) Halla la ecuación de la recta tangente en $x=2$.

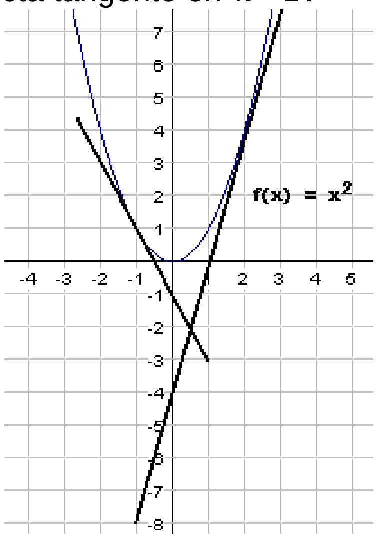


Figura 1

3.1. Inducción

A continuación siguen unos párrafos de un libro de texto de Bachillerato (Bujosa el al., 2003, pp. 91-92)

Si ahora quisiéramos hallar la recta tangente a la función $f(x) = x^2$ en los puntos de abscisa: $x = -7$, $x = -12$, $x = -15$, $x = 10$, $x = 21$, $x = 40$, deberíamos calcular:

$$f'(-7),\ f'(-12),\ f'(-15),\ f'(10),\ f'(21),\ f'(40).$$

Pero antes de hacerlo, completaremos la tabla siguiente con los valores de las derivadas de la función $f(x) = x^2$ para los diferentes valores de la abscisa que ya se han calculado en las actividades 15 y 26:

Abscisa	-1	0	1	2	3	4
Derivada	-2	0	2	4	6	8

Act. 34.

a) A partir de la tabla halla una fórmula que, sabiendo el valor de la abscisa, nos permita calcular la derivada de la función $f(x) = x^2$ para dicho valor de la abscisa.

b) Utilizando esta fórmula halla $f'(-7)$, $f'(-12)$ y $f'(40)$.

En la actividad anterior se pudo observar que para la función $f(x) = x^2$, la función $y = 2.x$ es una función que asocia cada abscisa x con la derivada de la función en este punto. Esta función se llama función derivada de $f(x)$ y normalmente se representa por $f'(x)$

Función	Función derivada
$f(x) = x^2$	$f'(x) = 2.x$

Conocer la función derivada es un método indirecto muy útil cuando se ha de calcular la derivada de la función en un punto determinado. En efecto, para calcular $f'(a)$ basta seguir el proceso siguiente:

1) Calcular la función derivada $f'(x)$.
2) Sustituir la x por a en la fórmula de la función derivada.

La función derivada también se puede utilizar para hallar un punto de la función $f(x)$ en el cual la derivada tenga un valor determinado.

Ejemplo:

Si queremos saber en qué punto la función $f(x) = x^2$ tiene una recta tangente que forme un ángulo de 45º con el eje de abscisas, basta buscar el valor de la abscisa tal que la derivada en este punto sea 1:

$$f´(x) = 2.x$$

$$2.x = 1 \Rightarrow x = \frac{1}{2}$$

$$f´(1/2) = 1$$

Act. 35. Dada la función $f(x) = x^2$

a) Para qué valor de la abscisa la derivada vale 16?

b) Para qué valor de la abscisa la recta tangente tiene pendiente 3?

c) Para qué valor de la abscisa la recta tangente es paralela a la recta $y = 6.x + 54$y.

d) Halla la ecuación de la recta tangente a la función en $x = 5$.

Antes de esta secuencia de actividades, los alumnos sabían que la derivada en un punto era la pendiente de la recta tangente a la función en el punto. Después de que el alumnado haya utilizado la función derivada de la función $f(x) = x^2$ en la actividad 34, y no antes, se define la función derivada como la función que a cada valor le hace corresponder la pendiente de la recta tangente.

A continuación se remarca la idea de que la derivada de una función en un punto es un *número* que nos da la pendiente de la recta tangente a la función en ese punto, mientras que la función derivada es una *función* que nos da, para cada valor de la abscisa, la pendiente de la recta tangente. Y que, muchas veces, se habla de la derivada sin precisar si es la derivada de la función en un punto o es la función derivada, en estos casos el contexto es el que nos indicará cual es el significado que se le da.

En la actividad 34a el alumno ha de realizar una generalización por inducción (empírica/incompleta). Se halla un resultado, $f´(x) = 2.x$, que parece que es cierto, pero no sabemos por qué lo es. De todas maneras, nos permite formular la conjetura de que $f´(x) = 2.x$. Se trata de un proceso de inducción clásica que permite formular hipótesis.

3.2. Abducción

La abducción es un razonamiento que tiene la siguiente forma:

$$\begin{array}{l} p \to q \\ \underline{q \qquad} \\ p \end{array}$$

Si se supone que $f´(x) = 2.x$ (p) es cierta, tenemos un procedimiento para hallar la recta tangente $y = m_a + n_a$ en cualquier punto de abscisa $x = a$. Es decir, la recta tangente en el punto de abscisa $x = a$ será $y = 2.a.x - a^2$ (q). Por tanto, con un graficador que permita dibujar funciones con un parámetro, representamos en la misma pantalla la función $f(x) = x^2$ y la familia de funciones $y = 2.a.x - a^2$, al variar el valor de a, hemos de observar que siempre se tiene la tangente en $x = a$.

"Funcions i gràfics" (http://www.xtec.es/%7Esmanriqu/funcgraf/index.htm) es un programa gratuito de muy fácil manejo que permite representar funciones con parámetros.

En las gráficas que siguen se observa la función $f(x) = x^2$ y la recta tangente en $x = 1{,}6$ y en $x = -1{,}2$. El alumno puede variar el valor del parámetro y observa un invariante: "*siempre se obtiene la recta tangente*".

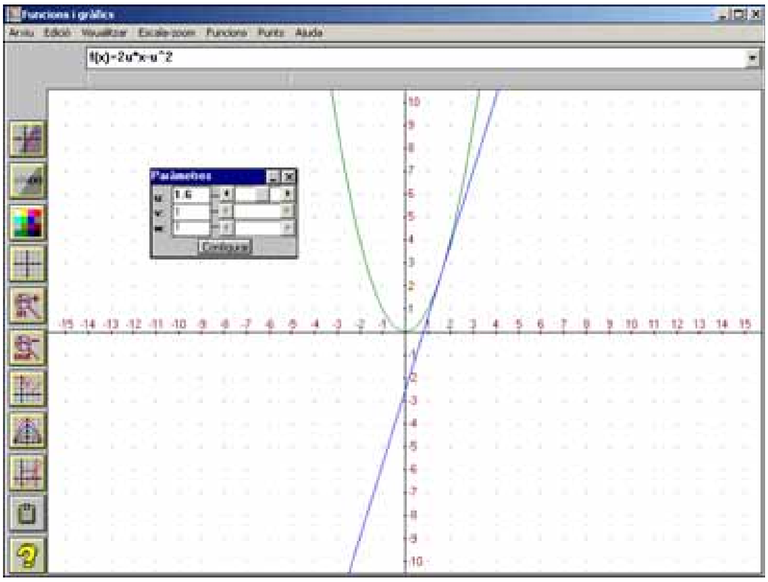


Figura 2

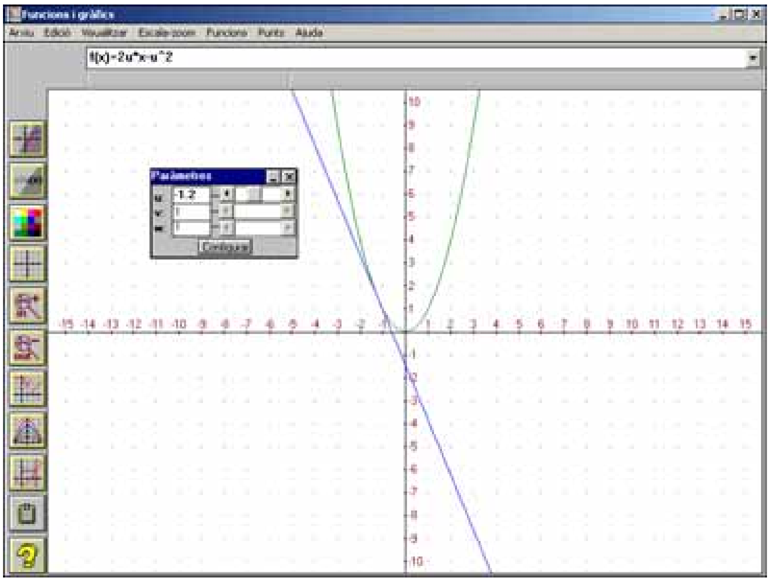


Figura 3

El razonamiento por abducción no es un modo de razonamiento válido desde el punto de vista de la lógica formal, pero es importante para la producción de conocimiento. Ahora la conjetura conseguida por inducción nos parece más sólida ya que ha resistido la posible falsación de sus consecuencias inferenciales. De todas maneras, seguimos sin poder dar una demostración de que la derivada de la función $f(x)=x^2$ es $f'(x)=2.x$.

Entendido el proceso de abducción de esta manera, se puede entender que dicho proceso incorpora un tipo de inducción probatoria, en el sentido de que los diferentes casos particulares de (q) que hemos observado nos llevan a considerar probado que (q) será cierto en general y de aquí se abduce que (p) también es cierto.

3.3. Más abducción

Podemos intentar una nueva falsación de la conjetura. Para ello partimos de la conexión que hay entre los máximos, los mínimos y la recta tangente (Rondero, Karelin y Tarasenko, 2004; Karelin, Rondero y Tarasenko, 2007).

La idea básica es la siguiente: para las funciones tales que en cada punto de su gráfica pasa sólo una recta L, respecto de la cual la gráfica misma está por encima o por debajo de ella y no tiene otros puntos de intersección, si se resta de la función, la ecuación de la recta L, que corresponde a un punto x_0 se tiene una nueva función cuyo mínimo o máximo esta precisamente en x_0. Este método nos ayuda a relacionar la derivada de una función en un punto dado con los puntos mínimos y máximos. Consideremos las funciones para las cuales en cada punto de su gráfica existe una y sólo una recta que pasa por el punto y no tiene otros puntos comunes con la grafica y, además, está ubicada arriba o abajo con respecto de la recta. A la clase formada por estas funciones le llamamos *D* y, para cada función f de *D* llamaremos $T(f)$ a la clase de tales rectas para esta función.

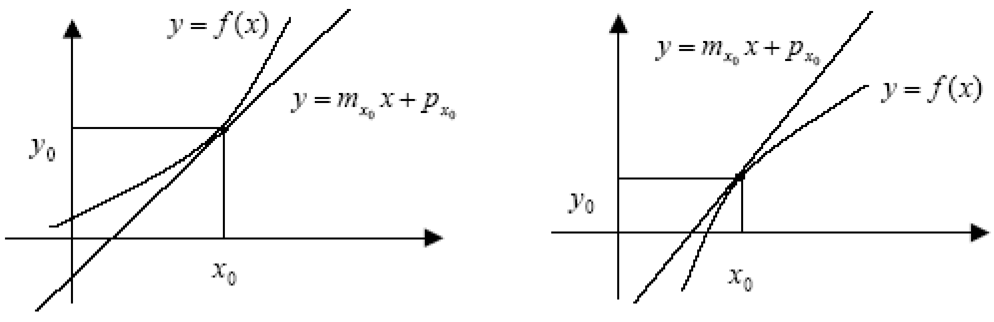


Figura 4

Consideremos una función $y=f(x)$ de este tipo y un punto $(x_0, f(x_0))$. Una recta $R(x_0, f(x_0))=m_{x_0}.x+p_{x_0}$ es la recta de la clase $T(f)$ en el punto $(x_0, f(x_0))$ para la función $y=f(x)$ si y sólo si la función $y=F(x)$,

$F(x) = f(x) - [m_{x_0} x + p_{x_0}]$ tiene un punto mínimo o un punto máximo en $x = x_0$.

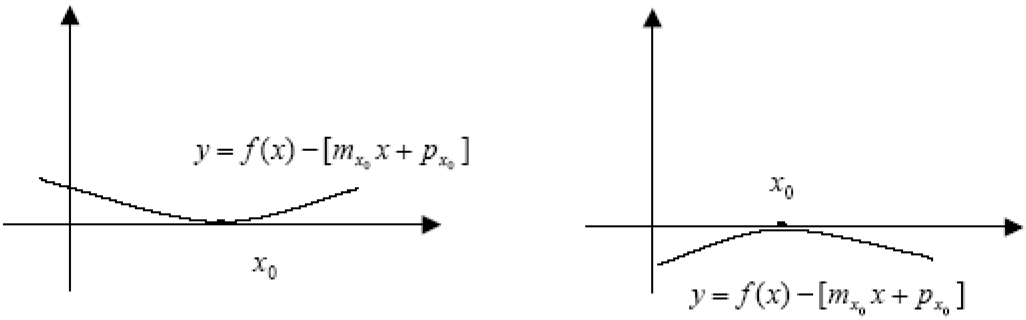


Figura 5

Si suponemos que $f'(x) = 2.x$ es cierta (p), tenemos un procedimiento para hallar la recta tangente $y = m_{x_0} x + p_{x_0}$ en cualquier punto de abscisa $x = x_0$. Es decir, la recta tangente en el punto de abscisa $x = x_0$ será $y = 2.x_0.x - x_0{}^2$. Por tanto, la función $F(x) = f(x) - [m_{x_0} x + p_{x_0}]$ en este caso será $F(x) = x^2 - (2.x_0.x - x_0{}^2)$ y debería presentar un mínimo en $x = x_0 (q)$.
Con el mismo graficador se representa la función $F(x) = x^2 - (2.x_0.x - x_0{}^2)$ y se varia el valor de x_0. Se observa que la función siempre presenta un mínimo en $x = x_0$. En las gráficas que siguen se observa que la función $F(x)$ presenta un mínimo para $x_0 = 2{,}4$ y en $x_0 = -3{,}4$. El alumno puede variar el valor del parámetro y observa un invariante: la función siempre presenta un mínimo cuando la abscisa es el parámetro.

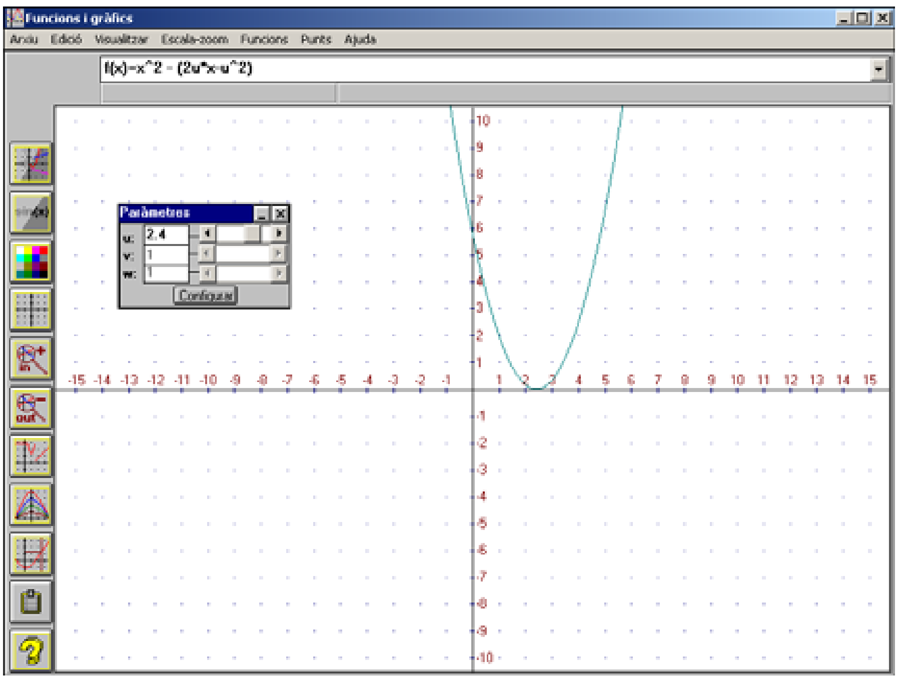


Figura 6

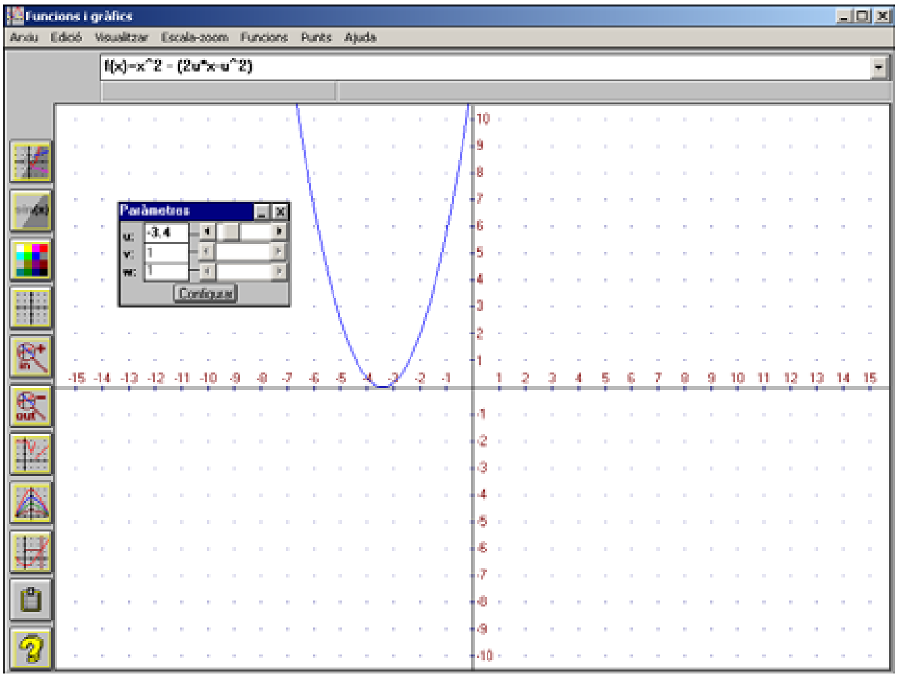


Figura 7

3.4. Deducción

La abducción anterior es más potente que la primera ya que nos da un camino para una demostración deductiva. Basta hacer un razonamiento deductivo que permita demostrar que la función $F(x) = x^2 - (2.x_0.x - x_0{}^2)$ efectivamente presenta un mínimo en $x = x_0$. La recta $y = 2.x_0.x - x_0{}^2$ es la recta tangente a la función $f(x) = x^2$ en $x = x_0$.

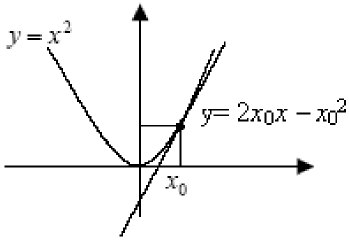


Figura 8

Pues en caso de no serlo cortaría a la gráfica además en otro punto y entonces el mínimo de la función $F(x) = x^2 - (2.x_0.x - x_0{}^2)$ sería un valor que estaría en el intervalo formado por las abscisas de los dos puntos de corte:

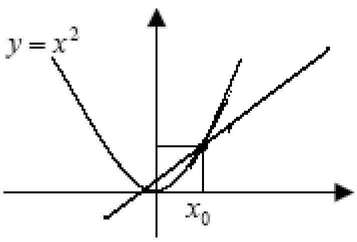


Figura 9

Por lo tanto, si $y=2.x_0.x-x_0{}^2$ no es la recta tangente
(*) la $F(x)=x^2-(2.x_0.x-x_0{}^2)$ no presentaría un mínimo en $x=x_0$.
Ahora bien,
(**) la función $F(x)=x^2-(2.x_0.x-x_0{}^2)$ presenta un mínimo en $x=x_0$.

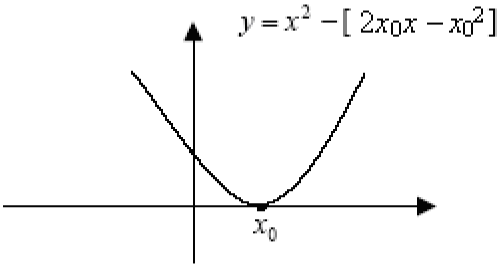


Figura 10

En efecto, por la definición del punto mínimo local en x_0 debe cumplirse la siguiente desigualdad: $x^2-(2.x_0.x-x_0{}^2)\geq 0$ cuando $|x-x_0|<\varepsilon$;
(***) $x^2-2.x_0.x+x_0{}^2\geq 0$ cuando $|x-x_0|<\varepsilon$.

Si $x=x_0$ la expresión (***) es igual a 0.

Si $x<x_0$, $x+z=x_0$, entonces
$x^2-2.x_0.x+x_0{}^2=(x_0-z)^2-2.x_0.(x_0-z)+x_0{}^2=x_0{}^2-2.z.x_0+z^2-2.x_0.x_0+2.x_0.z+x_0{}^2=z^2$
, y $z^2\geq 0$.

Si $x>x_0$, $x-z=x_0$, entonces
$x^2-2.x_0.x+x_0{}^2=(x_0+z)^2-2.x_0.(x_0+z)+x_0{}^2=x_0{}^2+2.z.x_0+z^2-2.x_0.x_0-2.x_0.z+x_0{}^2=z^2$
, y $z^2\geq 0$.

Por tanto, $y=2.x_0.x-x_0{}^2$ es la recta tangente a la función $f(x)=x^2$ en $x=x_0$ y $f´(x)=2.x$ es la función derivada.

4. Abstracción reflexiva y deducción en el cálculo de la derivada de la función $f(x)=x^2$ sin usar la definición por límites

Antes de trabajar la secuencia de actividades descrita en el apartado 3.1, los alumnos saben que la derivada de la función en un punto es la pendiente de la recta tangente y la han calculado geométricamente en algunos puntos con actividades como la actividad 26 comentada anteriormente (Bujosa et al., 2003, p. 85), pero aún no se ha definido como $f´(a)=\lim_{h\to 0}\dfrac{f(a+h)-f(a)}{h}$. También se ha definido la función derivada como la función que a cada valor le hace corresponder la pendiente de la recta tangente.

4.1. Abstracción reflexiva

Se propone a los alumnos la exploración de la construcción que sigue, realizada con el Cabri (Font, Godino y Contreras, 2008). Como resultado de sus acciones los alumnos han de llegar a descubrir que la traza es la parábola $f(x) = x^2$ y el siguiente invariante: en la parábola $f(x) = x^2$ la recta tangente en el punto *P* corta al eje de ordenadas en un punto *C* tal que la longitud del segmento *OC* es igual la ordenada de *P*.

Después han de simbolizar este invariante de la manera siguiente:

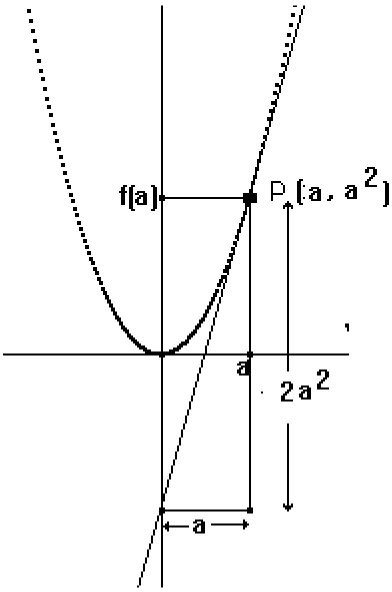


Figura 11

Por último, han de demostrar que la función derivada de $f(x) = x^2$ es $f\,'(x) = 2.x$. La emergencia de la propiedad “en la parábola $f(x) = x^2$ la recta tangente en *P* corta al eje de ordenadas en un punto *C* tal que la longitud del segmento *OC* es la ordenada de *P* ” es el resultado de una abstracción diferente a la empírica, a saber, de una abstracción “reflexiva” (en términos de Piaget). Se trata de un proceso que, a partir de la reflexión sobre el sistema de acciones y su simbolización, llega a encontrar relaciones invariantes y las describe simbólicamente. Esto quiere decir que, en este proceso, determinadas propiedades y relaciones son señaladas y la atención se focaliza sobre ellas, lo cual pone de manifiesto que ganan un cierto grado de independencia respecto de los objetos y situaciones con los que inicialmente están asociados.

Este tipo de abstracción produce un resultado que aparece a partir de la acción y que gana sentido y “existencia” a partir de ella. Hay que destacar que se llega a una generalización intensiva (lo que no varía) a partir de (1) ignorar aspectos de lo concreto (lo que varía) y (2) de considerar que lo que es válido para un objeto (variable en esta caso, puesto que estamos trabajando con un programa dinámico) es válido para todos, es decir se razona con elementos genéricos (dinámicos en este caso).

4.2. Deducción

Esta secuencia de actividades está a mitad de camino entre el problema de la tangente y su inverso. No es exactamente el problema de la tangente, puesto que aquí ya la tenemos construida, ni es el problema inverso ya que sabemos la expresión simbólica de $f(x)$. Esta construcción con ordenador permite las acciones de los alumnos y les facilita encontrar una condición que cumplen todas las tangentes (utilizando el triángulo formado por la ordenada, la tangente y la subtangente, o bien otro semejante).

Construcciones de este tipo permiten que los alumnos calculen funciones derivadas sin necesidad de utilizar límites, siempre que se haya trabajado previamente la interpretación geométrica de la derivada en un punto. En efecto, la simbolización de esta condición en el caso de la parábola lleva a establecer una especie de casi-ecuación diferencial (entendidas en sentido amplio) que permite calcular $f'(x)$ sin necesidad de utilizar el cálculo integral.

$$f'(x) = \frac{2.f(x)}{x} \qquad 6.f'(x) = \frac{2.x^2}{x}.6 \qquad f'(x) = 2.x$$

A continuación (figura 12) sigue la respuesta de una alumna en la que se puede observar dicho proceso deductivo. En esta producción podemos observar que el invariante observado como resultado de la abstracción reflexiva es el inicio de un proceso deductivo.

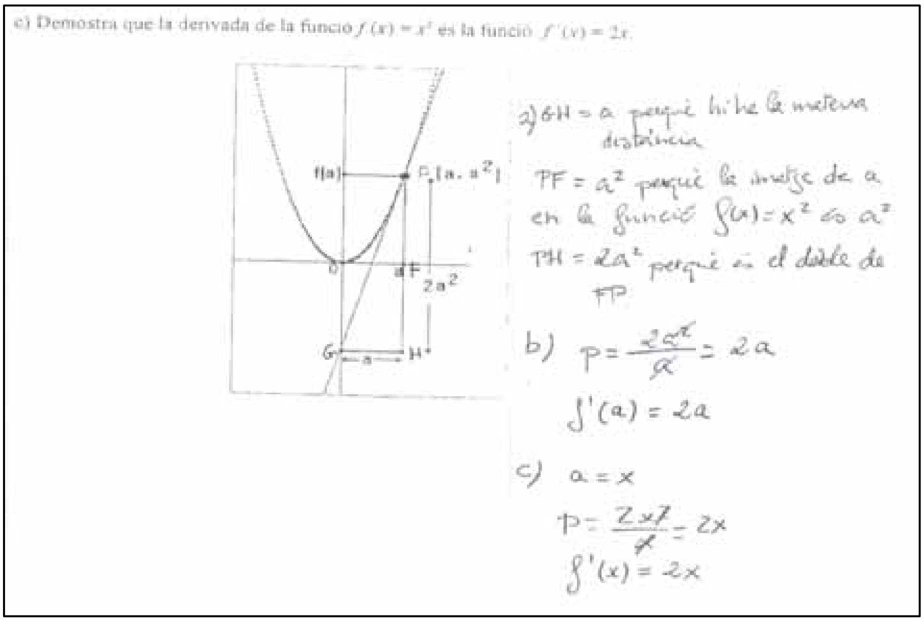


Figura 12

5. Procesos metafóricos

En la secuencia de actividades anterior se usa un software dinámico para facilitar la generalización que se pretende. Ahora bien, el uso de dicho software dinámico produce otros efectos, uno de los más importantes es que estructura implícitamente las gráficas funcionales en términos de la metáfora siguiente:

"La gráfica de una función se puede considerar como la traza que deja un punto que se mueve sobre un camino (la gráfica)" (Font y Acevedo, 2003).

Los graficadores dinámicos y el discurso que se hace cuando se utilizan facilitan, aunque sea de manera inconsciente, estructurar las gráficas como trazas de puntos. El uso, explícito o implícito, de las metáforas dinámicas del tipo la "gráfica es un camino" tiene sus ventajas, pero también sus inconvenientes como se muestra en la investigación explicada en Font (1999). En dicha investigación se describe una situación de enseñanza-aprendizaje en la que alumnos de 17 años utilizan software dinámico con el objetivo de ayudarles a entender que la recta tangente es la recta a la cual se aproximan las rectas secantes. En este contexto, (Font, 1999, p. 122) se observó que el hecho de que el profesor utilizara de manera inconsciente un discurso dinámico producía la siguiente dificultad en los alumnos:

> *(...) observamos que había alumnos que, cuando movían el punto A, pensaban que el nuevo punto continuaba siendo el punto A y que la nueva recta tangente era la misma que antes pero con diferente inclinación. De hecho, es como si estructurasen la situación en términos de una persona que se mueve (punto A) con un saco en la espalda (recta tangente) por una carretera que primero sube y después baja (gráfica) y considerasen que la persona y el saco siempre son los mismos a pesar de estar en diferentes lugares y tener diferente inclinación"*

Este fenómeno también está documentado en otras investigaciones, por ejemplo en Bolite Frant et al. (2004).

Bibliografía

Bell, A. W. (1976). *A study of pupils' proof-explanations in mathematical situations*. Educational Studies in Mathematics 7, 23-40.

Bolite Frant, J. et al. (2004). *Reclaiming visualization: when seeing does not imply looking*. TSG 28, ICME 10, Denmark.
[http://www.icme-organisers.dk/tsg28/].

Bujosa, J. M, Cañadilla, J. L., Fargas, M. y Font, V. (2003). *Matemàtiques 2*. Castellnou. Barcelona.

De Villiers, M. (1993). *El papel y la función de la demostración en Matemáticas*. Epsilon. 26, 15-30.

Font, V. (1999). *Procediments per obtenir expressions simbòliques a partir de gràfiques. Aplicacions a les derivades*. Tesis doctoral. Universitat de Barcelona.

Font, V. y Acevedo, J. I. (2003). *Fenómenos relacionados con el uso de metáforas en el discurso del profesor. El caso de las gráficas de funciones*. Enseñanza de las Ciencias 21(3), 405-418.

Font, V., Godino, J. D. y Contreras, A. (2008). *From representations to onto-semiotic configurations in analysing the mathematics teaching and learning processes*. En: Radford, L., Schubring, G. y Seeger, F. (eds.), *Semiotics in*

Mathematics Education: Epistemology, Historicity, Clasroom, and Culture, 157-173. The Netherlands: Sense Publishers.

Ibáñez, M. J. (2001). *Un ejemplo de demostración en Geometría como medio de descubrimiento*. Suma 37, 95-98.

Ibáñez, M. J. y Ortega, T. (2002). *La demostración en el currículo: una perspectiva histórica*. Suma 39, 53-61.

Karelin, O., Rondero, C. y Tarasenko, A. (2007). *Propuesta didáctica sobre la construcción de la recta tangente sin el uso de la derivada*. En: Martínez, G. (ed.). *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa* 19, 386-391. Comité Latinoamericano de Matemática Educativa A. C: México.

Lakoff, G. y Núñez, R. (2000). *Where mathematics comes from: How the embodied mind brings mathematics into being.* Basic Books: New York.

Presmeg, N. C. (1997). *Reasoning with metaphors and metonymies in mathematics learning*. En: English, L. D. (ed.) *Mathematical reasoning: Analogies, metaphors, and images*, 267-279. Lawrence Erlbaum Associates: Mahwah, New Jersey.

Rondero, C., Karelin, O. y Tarasenko A. (2004). *Métodos alternativos en la búsqueda de los puntos críticos y derivadas de algunas funciones.* En: Díaz Moreno L. (Ed.) *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa* 17, 821-827. Comité Latinoamericano de Matemática Educativa A. C.: México.

Vicenç Font Moll (vfont@ub.edu) . Universitat de Barcelona.Facultat de Formació del Professorat.
Es Profesor de Didáctica de la Matemática de la Universitat de Barcelona Ha sido director de la revista de profesores Biaix editada por la Federació d'Entitats per a l'Ensenyament de les Matemàtiques a Catalunya (FEEMCAT) Ha publicado varios libros de texto de matemáticas de Secundaria y varios artículos en torno a la Educación Matemática. Sus líneas de trabajo son el análisis didáctico de procesos de enseñanza-aprendizaje, la epistemología de la didáctica de las matemáticas, la didáctica del análisis y la formación de profesores de matemáticas.

UNIÓN
REVISTA IBEROAMERICANA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA

Junio de 2009, Número 18, páginas 29 – 40
ISSN: 1815-0640

Reflexiones sobre el valor del diálogo en la Enseñanza de la Matemática

María Cristina Rocerau; Silvia Vilanova; María Isabel Oliver; María Susana Vecino; Guillermo Valdez.

Resumen

El diálogo crea un proceso de comprensión interpersonal, un espacio de negociaciones de significados y una revalorización de las diferencias como oportunidades de alcanzar perspectivas nuevas. El tipo de pregunta que propicia la apertura al diálogo es aquella que plantea un problema, un desafío o una crítica, que permite trascender la respuesta y lleva a plantearse más preguntas, que tiene la suficiente fuerza como para hacer tambalear los cimientos sobre los que se asienta la propia certeza. El presente trabajo tiene la intención de recuperar el valor del diálogo como un potente recurso para la enseñanza y el aprendizaje de la Matemática. A partir de un breve rastreo de la utilización que han hecho del diálogo algunos matemáticos célebres, proponemos un ejemplo de este recurso para ser implementado en el nivel secundario de enseñanza.

Abstract

The dialogue creates a process of interpersonal understanding, an area of negotiations of meanings and a revaluation of the differences as opportunities to reach new prospects. The kind of question that fosters openness to dialogue is one that poses a problem, a challenge or a criticism, that leads to more questions and has enough strength to shake the foundations on which settles itself certainty. This paper's intention is to recover the value of dialogue as a powerful resource for mathematics teaching and learning. Starting from a brief review of the use of dialogue made by some famous mathematicians, we propose an example of this resource for secondary educational level.

Resumo

O diálogo cria um processo de compreensão interpessoal, um espaço de negociações de significados e uma revalorização das diferenças como oportunidades de alcançar perspectivas novas. O tipo de pergunta que propicia a abertura ao diálogo é aquela que expõe um problema, um desafio ou uma crítica, que permite transcender a resposta e leva a propor mais perguntas, que tem a suficiente força como para fazer desequilibrar as bases sobre as quais se assenta a própria certeza. O presente trabalho tem a intenção de recuperar o valor do diálogo como um potente recurso para o ensino e a aprendizagem da Matemática. A partir de um breve rastreamento da utilização que fizeram do diálogo alguns matemáticos célebres, propomos um exemplo deste recurso para ser implementado no nível secundário de ensino.

El diálogo y la Matemática.

El diálogo crea un proceso de comprensión interpersonal, un espacio de negociaciones de significados y una revalorización de las diferencias como oportunidades de alcanzar perspectivas nuevas. Señala Bachelard (1985): "Ante todo es necesario saber plantear los problemas. En la vida científica los problemas no se plantean por sí mismos. Es precisamente este sentido del problema el que caracteriza el verdadero espíritu científico. Para un espíritu científico, todo conocimiento es una respuesta a una pregunta. Si no hubo pregunta, no puede haber conocimiento." Así, el tipo de pregunta que propicia la apertura al diálogo es aquella que plantea un problema, un desafío o una crítica; aquella que permite trascender la mera respuesta y lleva a plantearse más preguntas; aquella que tiene la suficiente fuerza como para hacer tambalear los cimientos sobre los que se asienta la propia certeza, que puede no ser la certeza de otros. Según Burbules (1999), "comprender que el que formula una pregunta puede, a su vez, ser objeto de otra pregunta, es la condición que ayuda a crear y a mantener una relación dialógica de respeto y confianza mutuos." El presente trabajo tiene la intención de hacer un breve rastreo de la utilización del diálogo en la matemática, desde el período socrático hasta nuestros días y recuperar el valor del diálogo para la enseñanza y el aprendizaje.

Recuperar el valor del diálogo en el aprendizaje y la enseñanza de la Matemática, es recuperar una técnica que ya usaban los griegos hace más de dos mil años y que ha continuado vigente en épocas posteriores.

La contribución de Sócrates a la filosofía ha sido de un marcado tono ético, pero también hizo hincapié en la discusión racional y en la búsqueda de definiciones universales. Dice Bréhier (1956): *"lo que con razón puede atribuirse a Sócrates son los razonamientos inductivos y las definiciones universales, situados unos y otras al principio de la ciencia"*. En el siguiente pasaje del Teetetos de Platón, se caracteriza el arte de la mayéutica propuesto por Sócrates (Ferrater Mora, J., 1969):

> "Mi mayéutica - dice Sócrates- tiene las mismas características generales que el arte de las comadronas. Pero difiere de él en que hace parir a los hombres y no a las mujeres y en que vigila las almas, y no los cuerpos, en su trabajo de parto. Lo mejor del arte que practico es, sin embargo, que permite saber si lo que engendra la reflexión del joven es una apariencia engañosa o un fruto verdadero"

Su método centrado en el *diálogo*, y sobre todo la i*nterrogación*, su habilidad de persuadir y disuadir y de hecho toda su obra, se dirigió al descubrimiento de problemas, más que a la búsqueda de soluciones*. "Sócrates hacia surgir dondequiera, lo que antes parecía no existir: un problema."* (Ferrater Mora, J, 1969).

En nuestros días, reconocidos matemáticos contemporáneos han retomado la utilización del diálogo aunque con fines diversos: la obra pionera de Polya, por ejemplo, aborda la resolución de problemas a través de un gran diálogo con el lector; el matemático húngaro Renyi, presenta contenidos de gran complejidad a través de diálogos, que convierte en ingeniosos textos de divulgación; por último, la mirada crítica de Morris Kline sobre lo que se denominó "la matemática moderna" se expresa, en algunas partes de su libro, a través de diálogos cuya finalidad es refutar una postura; por último, Mason, Burton y Stacey le dan al diálogo una finalidad metacognitiva: la de cuestionar nuestro propio pensamiento matemático.

♦ ***Polya: Cómo plantear y resolver problemas***

Cómo plantear y resolver problemas, una de las obras de Polya (1979) de especial interés para docentes y estudiantes de matemática, editada por primera vez en inglés en 1945 y en español en 1965, enfatiza el proceso de invención de la matemática y su lado experimental e inductivo, proporcionando procedimientos originales para llegar a la solución de los problemas. Como lo señalan importantes matemáticos actuales vinculados a la educación matemática (Schoenfeld, 1985), fue Polya quien sentó las bases sobre las que se impulsó el cambio en la enseñanza de esta ciencia y este material constituye el primer intento de la puesta a punto de la heurística moderna, que según su propia definición:

> “(…) trata de comprender el método que conduce a la solución de problemas, en particular las operaciones mentales típicamente útiles en este proceso. (…) Un estudio serio de la heurística debe tener en cuenta el trasfondo tanto lógico como psicológico (…) pero debe apegarse más a la experiencia objetiva. Una experiencia que resulta a la vez de la solución de problemas y de la observación de los métodos del prójimo, constituye la base sobre la cual se construye la heurística. En este estudio buscaremos, sin descuidar ningún tipo de problema, los puntos comunes de las diversas formas de tratar cada uno de ellos y después trataremos de determinar las características generales independientes del tema del problema. Tal estudio tiene objetivos prácticos; una mejor comprensión de las operaciones mentales típicamente útiles en la solución de un problema puede en efecto influir favorablemente en los métodos de la enseñanza, en particular en lo que se refiere a la matemática” (Polya, 1979)

En su libro, además de opinar sobre la enseñanza de la matemática y el rol de docentes y alumnos, explica el desarrollo de su método a través de cuatro problemas que, bajo la forma del *diálogo,* ayuda a resolver. Realiza un serio estudio de los métodos de solución y hace un recorrido histórico por la heurística, desde matemáticos como Pappus, hasta contemporáneos como Hadammard. En la última parte del texto, da al lector la oportunidad de resolver veinte problemas de diverso tipo y para cada uno de ellos ofrece sugerencias para su solución en diálogo permanente con el lector-resolutor, poniéndose en evidencia un método didáctico inductivo.

Siempre hay un doble diálogo maestro-alumno y escritor-lector, que se hace evidente, por ejemplo, en los fragmentos siguientes:

“(...) el profesor (…) tiene que estar dispuesto a emplear toda una serie de alusiones cada vez más explícitas:
¿Qué clase de triángulo quieren que aparezca? ¿Todavía no pueden determinar la diagonal? Sin embargo, decían ustedes que sabían cómo encontrar el lado del triángulo. Entonces ¿que van a hacer? ¿Podrían encontrar la diagonal si fuese el lado de un triángulo? Cuando finalmente, con su ayuda, los alumnos han logrado hacer el elemento auxiliar decisivo, el maestro debe asegurarse que ven la continuación del razonamiento antes de animarlos a lanzarse en cálculos reales.” (Polya, 1979)

"ALUMNO: ¿Por dónde puedo empezar?
DOCENTE: Empiece de nuevo por el enunciado del problema. Empiece cuando dicho enunciado resulte tan claro y lo tenga tan bien grabado en su mente que pueda usted perderlo de vista por un momento sin temor de perderlo por completo.
ALUMNO: ¿Qué puedo hacer?
DOCENTE: Aislar las principales partes del problema. La hipótesis y la conclusión son las principales partes de un "problema por demostrar"; la incógnita, los datos y las condiciones son las (…)
ALUMNO: ¿Qué gano haciendo esto?
DOCENTE: Está usted preparando y aclarando detalles que probablemente estarán en juego más tarde." (Polya, 1979)

- ***Rényi: sus diálogos***

Alfred Renyi fue un importante matemático húngaro que se destacó en estadística, métodos probabilísticos, teoría del número y teoría de grafos; aplicó técnicas probabilísticas a la mecánica cuántica, a la química industrial, a la biología, a la regulación de tráfico y al control de precios. Junto a su interés por las aplicaciones de la matemática, puede verse en su obra el interés por la historia, la filosofía y la enseñanza de la matemática.

Sus ideas son expuestas en tres ensayos con forma de diálogo ficticio, en los que sus actores principales son Sócrates, Arquímedes, Herón, Hipócrates, Galileo, etc. Estos grandes diálogos son publicados por primera vez en Hungría en 1965 y en ellos Rényi batalla con problemas como la naturaleza de la matemática, la matemática pura versus la matemática aplicada, la relación de la matemática con las ciencias naturales, etc.

En el fragmento del *Diálogo Socrático sobre la Matemática*, que sigue, en el que intervienen Sócrates e Hipócrates, Renyi plantea una discusión sobre la naturaleza de la matemática:

SÓCRATES: Bien, dime entonces: ¿sabes qué es la matemática? Supongo que puedes definirla ya que deseas estudiarla.
HIPÓCRATES: Pienso que un niño puede hacerlo. La matemática es una de las ciencias y una de las más admirables.
SÓCRATES: No te he pedido que alabes a la matemática, sino que describas su naturaleza. Por ejemplo, si te interrogo sobre el oficio de los médicos me responderías que se trata de la salud y de la enfermedad y que su finalidad es curar los enfermos y preservar la salud. ¿Estoy en lo cierto?
HIPÓCRATES: Exactamente.
SÓCRATES: Respóndeme entonces lo siguiente: ¿el oficio de los médicos trata con algo existente o con algo que no existe? Si no existiesen los médicos, ¿existirían las enfermedades?
HIPÓCRATES: Seguramente y más que en la actualidad. (…)
SÓCRATES: Y si afirmo que todo oficio trata con algo que existe ¿estarías de acuerdo?
HIPÓCRATES: Completamente.
SÓCRATES: Dime ahora, mi joven amigo, ¿cuál es el objeto de la matemática? ¿Qué objetos estudian los matemáticos? (…)". (Renyi, 1989)

Sin duda los llamados diálogos socráticos de Renyi, son un ejemplo contemporáneo de las virtudes del diálogo como método expositivo de ideas, en algunos casos, de gran complejidad. Son, además, valiosas herramientas didácticas para introducir problemas básicos de la historia y posiblemente de la filosofía de la matemática y generar discusiones en torno a algunas de las cuestiones que en ellos se presentan.

♦ ***Kline: su pensamiento crítico***

¿Por qué Juanito no sabe sumar? El fracaso de la matemática moderna, obra del matemático norteamericano Morris Kline (1976), constituye una crítica a la influencia en la educación de lo que se llamó "la matemática moderna". La búsqueda de la formalización, que caracterizó en gran medida a la matemática de finales del siglo XIX y principios del siglo XX, tuvo una influencia importante en las reformas del curriculum matemático que se gestaron en el mundo en la década de los 50. En este libro, Kline intenta llamar la atención sobre el fanatismo con el que una gran parte de los docentes de matemática abrazó esta moda pedagógica. Su texto es una incisiva y razonada refutación de la utilización de la matemática moderna en la enseñanza, unida a un llamado a la reflexión sobre cuestiones metodológicas relacionadas con la enseñanza de esta ciencia.

En el primer capítulo titulado *"Una muestra de la matemática moderna"* ilustra irónicamente, bajo la forma de un diálogo, una clase típica basada en la nueva metodología de enseñanza:

Echemos un vistazo a una clase de matemática moderna. La docente pregunta:
« ¿Por qué es $2+3=3+2$?»
Los estudiantes responden decididamente:
«Porque ambos son iguales a 5»
«No -reprueba la profesora-, la respuesta correcta es: porque se cumple la propiedad conmutativa de la suma.»
La siguiente pregunta es:
« ¿Por qué $9+2=11$?»
De nuevo los estudiantes responden a la vez:
«9 y 1 son 10 y 1 más son 11.»
«Falso -exclama la profesora-, la respuesta correcta es, que por definición de 2, $9+2=9+(1+1)$. Pero como se cumple la propiedad asociativa de la suma, $9+(1+1)=(9+1)+1$. Ahora bien, $9+1$ son 10, por definición de 10, y $10+1$ son 11 por definición de 11.»
Evidentemente, la clase no lo está haciendo muy bien, así que la docente plantea una pregunta más sencilla:
« ¿7 es un número? » (…)
Cansada, pero no vencida, pregunta una vez más:
« ¿Cuánto es n 2 dividido por 4?»
Un brillante estudiante dice sin dudar: «Menos 2.»
« ¿Cómo has obtenido ese resultado?», pregunta la profesora.
«Bien —dice el alumno—, usted nos ha enseñado que la división es una substracción repetida. Yo resté 4 de 2 y saqué menos 2.»
Podría parecer que los pobres chicos se habían hecho merecedores de algún descanso después de la escuela, pero no. Los padres, ansiosos por conocer los

progresos hechos por sus niños, también les preguntan. Un padre le pregunta a su hijo de ocho años:
« ¿Cuánto es $5+3$*?»*
Por toda respuesta obtiene que $5+3=3+5$, por la propiedad conmutativa. Asombrado, vuelve a preguntar: *«Pero, ¿cuántas son* 5 *manzanas y* 3 *manzanas?»*
El niño no comprende bien que «y» significa «más» y pregunta:
« ¿Quieres decir 5 *manzanas más* 3 *manzanas?»*
El padre se apresura a responder afirmativamente y espera atento.
«0h! -dice el niño-, no importa si son manzanas, peras o libros; en cada caso, $5+3=3+5$*.»*
Otro padre, preocupado por los progresos de su hijo en aritmética, le pregunta cómo va.
«No muy bien —responde el niño—*. La profesora se dedica a hablar de las propiedades asociativa, conmutativa y distributiva. Yo hago las sumas bien, pero a ella no le gustan(…)»* (Kline, 1976)

Podría decirse que éste es un diálogo paradigmático, una suerte de arquetipo caricaturizado con gran valor didáctico, ya que en sólo tres páginas incita a la reflexión y discusión de las ideas que expondrá en el resto de su texto. Entre ellas señala, que en el nuevo plan: *"(…) se subrayan sofisticadas versiones finales de ideas simples, mientras que se tratan superficialmente las ideas más profundas, lo que conduce necesariamente al dogmatismo y al aprendizaje mecánico de nuevas rutinas mucho más inútiles que las rutinas tradicionales"* (Kline, 1976).

♦ ***Mason, Burton y Stacey : cuestionar el propio pensamiento***

En el libro *Pensar Matemáticamente*, de particular importancia para docentes, padres y, en general, para cualquiera que esté en posición de ayudar al pensamiento de otros, Mason, Burton y Stacey (1989), incitan a la resolución de problemas centrándose en los procesos que rigen el pensamiento matemático. Paulatinamente van mostrando cómo se puede reflexionar sobre la propia experiencia, involucrando al lector en un clima de "diálogo activo" que lo lleva a formular conjeturas, discutirlas, probarlas, variarlas, etc.

En el primer capitulo del libro, se presentan los primeros problemas que incitan a reflexionar sobre los procesos fundamentales de particularización y generalización; uno de estos problemas es el denominado Cuadros del Ajedrez: "*Alguien dijo una vez que el tablero de ajedrez corriente tenía* 204 *cuadrados. ¿Puedes explicar esta afirmación?"*

En el siguiente capitulo, dedicado a las tres fases del trabajo llamadas abordaje, ataque y revisión, los autores utilizan el problema llamado Rectángulos en el tablero de Ajedrez para continuar reflexionando: "*¿Cuántos rectángulos hay en un tablero de ajedrez?"* y orientan el pensamiento con las siguientes preguntas:

- ¿ATASCADO?
- ¿Qué es lo que quieres?
- Inténtalo primero con un tablero pequeño (particulariza).
- ¿Qué forma sistemática de contar los rectángulos será la mejor?
- Examina el método utilizado para contar los cuadrados en un tablero de ajedrez, y generaliza.
- ¿Generalizar? ¡Generaliza el tablero!" (Mason et al, 1989)

Ahora la respuesta aislada de 204 para el número de cuadrados del tablero de ajedrez se ha situado en un contexto más amplio: es un caso particular de una ley más general. Una de las características interesantes de un problema es la de admitir diversas generalizaciones que extienden el marco original ya que sólo se llega a entender a fondo un resultado cuando se le enmarca en un contexto más amplio. Muchas veces esto se puede hacer eliminando o debilitando hipótesis del enunciado del problema, por ejemplo:

- ¿Por qué tiene que ser un tablero ordinario? Prueba con $n \times n$ cuadrados.
- ¿Por qué contar cuadrados? Cuenta rectángulos.
- ¿Por qué empezar con un cuadrado? Cuenta rectángulos en un rectángulo.

E incluso:

- ¿Por qué contar sólo cuadrados con lados paralelos a los del original?
- ¿Por qué trabajar en dos dimensiones? (…)" (Mason et al, 1989)

De este modo, en los diez capítulos del libro está presente la técnica del diálogo que, a lo largo del texto, moviliza al lector a trabajar con los problemas propuestos, replanteándose permanentemente sus hipótesis y estrategias.

♦ ***Semejanzas y diferencias.***

Retomando la mayéutica de Sócrates que, como señaláramos antes, consiste esencialmente en emplear el diálogo para llegar al conocimiento, cabe preguntarse: ¿qué es lo que comparten estos matemáticos contemporáneos con ella?

Se podría decir que básicamente todos tienen un método de trabajo basado en la interrogación, ya sea por razones de índole filosófica, científico-didáctica o científico- filosófica. Estos matemáticos, que en su obra responden a un modo de pensar esencialmente no dogmático, han utilizado el diálogo como herramienta de comunicación y todos, a pesar de sus diferencias, han aprovechado las virtudes del diálogo para lograr sus propósitos. Sin embargo, la finalidad de su utilización varía en cada uno de ellos:

▪ En el Menón, Sócrates, a través de un diálogo con el esclavo, intenta exponer su teoría de la reminiscencia. Aquí se utiliza el diálogo para *demostrar una teoría*.

▪ Polya, en su diálogo con el lector, muestra como funciona su método para enseñar a resolver problemas a través de diálogos ficticios entre un docente y un posible alumno. Se utilizan diálogos, dentro de un gran diálogo *para enseñar a enseñar* métodos de resolución de problemas.

▪ Renyi, a través de sus diálogos, que son ingeniosos textos de divulgación, presenta ideas de elevada complejidad a personas que no son expertas y que, de otro modo, requerirían de mucho tiempo y de una formación académica más compleja para comprenderlas. Son diálogos didácticos para *facilitar la comprensión de ideas.*

▪ Kline, a través de un diálogo figurado, muestra de modo contundente las terribles fallas de lo que llama el nuevo currículum matemático. Es un diálogo para *refutar una postura* pedagógica.

▪ Mason, Burton y Stacey ayudan a reflexionar sobre la propia experiencia matemática, involucrando al lector en un clima de "diálogo activo" que lo lleva a formular conjeturas, discutirlas, probarlas, variarlas, etc. Es un diálogo para *cuestionar el propio pensamiento*.

Estas cinco finalidades diferentes (demostrar, enseñar a enseñar, facilitar la comprensión, refutar, cuestionar el propio pensamiento) que se desprenden del análisis de la obra de los autores mencionados antes, de ninguna manera agotan las posibilidades de aplicación del diálogo como recurso en la enseñanza de la Matemática.

El siguiente diálogo, que proponemos como recurso didáctico para el nivel secundario de enseñanza, podría contribuir a reforzar el razonamiento inductivo o preparar el terreno hacia la demostración por inducción. A pesar de ser una propuesta mucho más modesta que las analizadas antes, intenta ser una invitación a los docentes de matemática a utilizar este valioso recurso, que implica una contribución a la formación del alumno que trasciende el terreno matemático:

Juan: Profesor, me dijeron que si escribo un número cualquiera, luego utilizando las mismas cifras escribo otro y hago la diferencia entre ellos el número que resulta es siempre un múltiplo de 9, ¿es verdad?

Profesor: Trajiste una buena inquietud pero, en lugar de contestarte, te propongo analizarlo con un compañero.

Ana:....Parece que es cierto, si escribo 6723 otro con las mismas cifras puede ser 3672, hago 6723 – 3672 = 3051 y como 3051:9 = 339 quiere decir que 3051 es múltiplo de 9.

Profesor: Y si escriben 7632 ó 2367?

Juan: A ver, hagamos las cuentas. Sí da, obtenemos 909, 4356, que son todos múltiplos de 9.

Ana: Pero ¿no será que ocurre justo para los números de 4 cifras? No logro darme cuenta. ¿Será así para cualquier otro número? ¿por qué funciona esto?

Profesor: ¿Por qué no prueban con números de dos cifras?

Juan prueba con los siguientes números:

57, 75 75-57 = 18 y 18 = 9·2

17, 71 71-17 = 54 y 54 = 9·6

85, 58 85-58 = 63 y 27 = 9·3

Juan: ¡En estos casos también da! Hasta para 99-99 = 0

Ana: ¡Es increíble!, yo hice algunos para 3 cifras y también me da, pero ¿por qué?

Profesor: Les sugiero que primero observen los números de dos cifras, que en general tiene la forma $a.b$.

Juan: Entonces el otro que puedo escribir será $b.a$, donde a y b pueden tomar valores entre 1 y 9. Pero, ¿qué pasará si hacemos $a.b - b.a$? ¿Cómo lo hacemos con letras?

Ana: Recuerda que podemos escribir a $a.b$ de la forma $a.10 + b$ y podemos escribir a $b.a$ como $b.10 + a$ entonces tendremos que:

$a.10+b-(b.10+a)=(a.10+a)+(b-10.b)=9.a-9.b=9.(a-b)$ y este número es siempre un múltiplo de 9! Pero, me quedó una duda: ¿por qué dices que a y b tienen que tomar valores entre 1 y 9? ¿no puede ser 0 alguno de ellos?

Juan: Sí, claro, no lo incluí porque en ese caso uno de los números sería de una cifra, por ejemplo 50 y 05, y yo estaba hablando de números de dos cifras. De todos modos $50-5=45$ es múltiplo de 9, o sea que también vale.

Profesor: Bueno, pero con esto probaron que el enunciado es válido para *todos los números de dos cifras, ¿cómo seguirían?*

Juan: Hagamos lo mismo para los de tres cifras, ahora tendremos, números del tipo $a.b.c$, o sea: $a.10^2+b.10+c-(c.10^2+a.10+b)=90.a-90.b-90.c=9.(10.a-b-c)$, que claramente es múltiplo de 9!

Ana: Sí, pero $(c.10^2+a.10+b)$ no es el único que podríamos escribir, tendremos también el $a.c.b$, $b.a.c$, $b.c.a$ y $c.b.a$. Hagamos dos cada uno y veamos qué pasa:

$$a.10^2+b.10+c-(a.10^2+c.10+b)=\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots=9.(b-c)$$
$$a.10^2+b.10+c-(b.10^2+a.10+c)=\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots=9.10.(a-b)$$
$$a.10^2+b.10+c-(b.10^2+c.10+a)=\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots=9.(11.a-10b-c)$$
$$a.10^2+b.10+c-(c.10^2+b.10+a)=\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots=9.11.(a-c)$$

Profesor: Van bien, podemos decir que con todos los números de tres cifras también es cierto, ya que de este modo han cubierto todos los casos posibles.

Juan: Seguro que pasará lo mismo con los de 4 cifras, y los de 5…

Ana: No pensarás hacer todos los casos.

Juan: ¡Podríamos armar un programa con la computadora!

Ana: Sí, eso te daría muchos números pero nunca todos, algo debe haber que no vemos.

Profesor: Les doy una ayuda: observen qué les quedó dentro del paréntesis en todos los casos en que sacaron factor común $a.b$ ó c.

Juan: Quedó una diferencia que parece ser siempre múltiplo de 9.

Ana: Tienes razón, siempre tendremos a cada una de las cifras multiplicada por números de la forma 10-1, 10-10, 100-10, …., 10-1000,…… , siempre es una diferencia entre potencias de 10.

Profesor: Bien, en general pueden escribirlas como 10^m-10^n

Juan: Es verdad, bastaría con que probemos que los números del tipo 10^m-10^n son siempre múltiplos de 9. Veamos cómo probarlo.

Ana: ¿Qué casos tenemos?, podría ser $m=n,\quad m>n \quad ó \quad m<n$

$$Si\ \ m=n \qquad 10^m-10^n=0$$

$$Si \;\; m > n \qquad 10^m - 10^n = 10^n\left(10^{m-n} - 1\right)$$

$$Si \;\; m < n \qquad 10^m - 10^n = 10^m\left(1 - 10^{n-m}\right)$$

En el primer caso, el resultado es 0 que es múltiplo de 9, pero en los otros dos casos deberíamos probar que toda potencia de 10 disminuida en una unidad lo es, es decir $10^k - 1$ es múltiplo de 9 cualquiera sea el número natural k. ¿Cómo lo probamos?

<u>Juan</u>: Empecemos por darle valores a k para ver qué pasa:

$$Si \;\; k=1 \qquad 10^1 - 1 = 9 = 9 \cdot 1 \quad es\ cierto$$

$$Si \;\; k=2 \qquad 10^2 - 1 = 99 = 9 \cdot 11 \quad es\ cierto$$

$$\vdots \qquad\qquad \vdots \qquad\qquad \vdots$$

$$Si \; k=n \qquad 10^n - 1 = 1\underbrace{000.....0}_{n} = \underbrace{999.....9}_{n} = 9.\underbrace{111....1}_{n} \quad también\ es\ verdad$$

<u>Profesor</u>: Muy bien, los felicito, están transitando el camino que en un futuro los conducirá a abordar el *Principio de Inducción Completa* de gran importancia en la demostración de propiedades relativas a los números naturales.

Consideraciones finales

Desde hace algún tiempo, se ha comenzado a pensar el aula como un tipo de contexto social específico y al diálogo como uno de los mediadores del proceso que allí ocurre. Las estrategias dialógicas contribuyen a construir conocimientos y códigos compartidos y ayudan a establecer un "universo discursivo" que favorece la comprensión de los temas que se enseñan. A esta perspectiva socio-lingüística, debe sumársele la psicológica, ya que el lenguaje es una manifestación de algo más profundo, del contexto mental al que se integran las concepciones, los significados y los marcos de referencia. (Amos, 2002).

Si como docentes concebimos la educación como una ayuda para que el que aprende adquiera herramientas de creación de significados y reconstruya la realidad, la utilización del diálogo permite, no sólo la apropiación de la cultura sino su participación en ella, la ampliación de la comprensión del contenido, de las personas y del conocimiento, ya que cuando los saberes de uno se enfrentan con los de otros es cuando la estructura que sostiene las certidumbres comienza a desmoronarse. Lleva también a cuestionar las jerarquías y las concepciones tradicionales de la autoridad en la escuela, a tolerar y apoyar la diversidad, a no descansar en supuestos sobre respuestas correctas y verdades últimas, a no apoyarse en esfuerzos aislados sino en relaciones comunicativas mutuas y recíprocas (Burbules, 1999).

Generar el espacio del diálogo y adentrarse en él, conduce al docente a transitar por un terreno a veces difícil e inseguro, que implica una modificación en su metodología de trabajo, una concepción distinta del conocimiento, del aprendizaje, del que enseña y del que aprende, situación que para algunas personas puede resultar amenazante.

Este trabajo ha intentado mostrar, a partir de los ejemplos anteriores, que a pesar de las dificultades que puede acarrear su utilización, el diálogo es un recurso potente, que permite reflexionar, exponer, analizar y criticar ideas, en muchos casos, de gran profundidad. Sus ilimitadas posibilidades de utilización en el aula, lo convierten en una herramienta didáctica fundamental en la enseñanza y el aprendizaje del quehacer matemático.

Bibliografía

Amos, S. (2002). *Teachers' questions in the science classroom*. En Amos, S. & Booham, R. (eds.). *Aspects of teaching secondary science. Perspectives on practice*. Routledge. London.

Bachelard, G. (1985). *La formación del espíritu científico*. Siglo XXI, México.

Boyer, C.B. (1986). *Historia de la matemática*. Alianza Universidad. Madrid.

Brehier, É. (1956). *Historia de la Filosofía.* Sudamericana. Buenos Aires.

Burbules, N. (1999). *El diálogo en la enseñanza. Teoría y práctica*. Amorrortu, Buenos Aires.

Edwards, D Y Mercer, H. (1988). *El conocimiento compartido: El desarrollo de la comprensión en el aula*. Paidós-MEC, Buenos Aires

Ferrater Mora, J. (1969). *Diccionario de filosofía.* Sudamericana. Buenos Aires.

Kline, M. (1976). *¿Por qué Juanito no sabe sumar? El fracaso de la matemática moderna*. Siglo XXI. Madrid.

Mason, J-Burton, l-Stacey(1989). *Pensar Matemáticamente*. Labor. Buenos Aires.

Platón (2004). *Menon*. Editorial Universitaria, Bogotá.

Polya. G. (1979). *Cómo plantear y resolver problemas*. Editorial Trillas. México.

Renyi, A. (1989). *Dialogo socrático sobre la matemática*. Revista de Educación Matemática, 4 (3) Unión Matemática Argentina. Córdoba. Argentina.

Renyi, A. (1990) *Diálogo sobre las aplicaciones de la matemática.* Revista de Educación Matemática, 5 (1) Unión Matemática Argentina. Córdoba. Argentina.

Rocerau, María Cristina. Profesora de Matemática y Especialista Investigación Educativa. Es profesora responsable de Didáctica de la Matemática del Profesorado en Matemática de la Facultad de Ciencias Exactas y Naturales, Mar del Plata, Argentina. Co-directora del Grupo Investigación Educativa y Secretaria Regional de la Olimpíada Matemática Argentina. rocerau@mdp.edu.ar

Vilanova, Silvia Lucía. Licenciada en Educación y Magister en Psicología Social Profesora responsable de Didáctica General y Especial de los Profesorados en Ciencias de la Facultad de Ciencias Exactas y Naturales, directora del Grupo Investigación Educativa y co-responsable del Área Pedagógica de la Facultad. svilano@mdp.edu.ar

Oliver María Isabel. Profesora de Matemática. Es docente en el nivel secundario, jefe de trabajos prácticos de la Asignatura Algebra en la Facultad de Ciencias Exactas y Naturales e integrante del Grupo Investigación Educativa. moliver@mdp.edu.ar

Vecino, María Susana. Profesora de Matemática, Especialista en Investigación Educativa y Magister en Informática Educativa. Es profesora de Algebra Lineal I, Jefa del Centro de Cómputos de la UNMDP e Integrante del grupo Investigación Educativa de la Facultad de Ciencias Exactas y Naturales. susana@mdp.edu.ar

Valdez, Guillermo. Profesor de Matemática y Especialista en Investigación Educativa. Docente en el nivel secundario, responsable de las asignaturas Prácticas Docentes I y II del Profesorado en Matemática de la Facultad de Ciencias Exactas y Naturales, integrante del grupo Investigación Educativa y Secretario regional Olimpíada Matemática Ñandú. gvaldez@mdp.edu.ar

UNIÓN
REVISTA IBEROAMERICANA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA

Junio de 2009, Número 18, páginas 41 – 57
ISSN: 1815-0640

De las descripciones verbales a las representaciones gráficas. El caso de la rapidez de la variación en la enseñanza de la matemática

Crisólogo Dolores Flores; Andrés Greogorio Chi Chablé; Eduardo Rafael Canul Pech; Cristy Arely Cantú Interián; Crispín Giovani Pastor Solache

Resumen

En este artículo se presentan los resultados de una investigación que explora las representaciones gráficas que hacen los estudiantes sobre la rapidez. Los textos, el currículum y la enseñanza de la matemática y la física prevén generar una idea de la rapidez asociada a la fórmula: $r = d/t$, y a la representación gráfica como pendiente de la curva que representa a la gráfica de la función tiempo-distancia. Sin embargo, en este trabajo encontramos representaciones gráficas de la rapidez que difieren de las previstas, tales como: pictogramas, gráficas de columnas, gráficas de "puntos", gráficas de "rectas" o gráficas de "curvas". La mayoría de los estudiantes dan representaciones gráficas de la rapidez asociándola con su magnitud y no como la pendiente de curvas.
PALABRAS CLAVE: representaciones gráficas, rapidez, variación, concepciones alternativas

Abstract

Research results on the student's speed graphical representations, are presented in this article. Texts, curriculum and mathematics and physics education aim at generating an idea of speed that goes with the formula: $r = d/t$, and to the graphical representation as the slope of the curve representing the time-distance function graph. Nevertheless we report in this work speed graphical representations different than those expected, such as: cartoons, bar graphs, "points" graphs, "line" graphs and "curved" graphs. Most students give speed graphical representations of its size and not as the slopes of the curve.
KEYWORDS: graphical representations, speed, variation, alternative conceptions

Resumo

Neste artigo apresentam-se os resultados de uma pesquisa que explora as representações gráficas que fazem os estudantes sobre a velocidade. Os textos, o currículo e o ensino da matemática e a física prevêem gerar uma idéia da velocidade associada à formula: $r = d/t$, e à representação gráfica como pendente da curva que representa à gráfica da função tempo-distância. Embora, neste trabalho encontramos representações gráficas da velocidade que diferem das previstas, tais como: pictogramas, gráficas de colunas, gráficas de "pontos", gráficas de "retas" ou gráficas de "curvas". A maioria dos estudantes dá representações gráficas da velocidade associando-a com sua magnitude e não como a pendente de curvas.
PALAVRAS CHAVE: representações gráficas, velocidade, variação, concepções alternativas

1. Introducción

En este trabajo hemos adoptado a las gráficas sobre la rapidez de la variación como objeto de investigación. Las gráficas son elementos que juegan un papel central dentro de los diversos contextos, ya sea en la escuela, en nuestra vida cotidiana o en la ciencia misma. Por ejemplo, como una forma de auto-aprendizaje Kitsantas y Zimmerman (2006) reportan que los estudiantes que utilizan gráficas para llevar un control de sus propios avances y retrocesos durante el desarrollo de sus habilidades motrices, tienen mejores resultados al final de su curso en comparación con los que no las utilizan. Roth y McGinn (1997) por su parte asumen que las gráficas no son solo una representación mental sino una forma humana de vida, plantean que para desarrollar habilidades para su lectura e interpretación es necesario involucrar a los estudiantes en la realización de prácticas sociales asociadas más que en la posesión a priori de habilidades cognoscitivas. En el marco de la línea de investigación del Pensamiento y Lenguaje Variacional desarrollada por varios investigadores como Cantoral y Farfán (2000), Dolores (2008), se ha asumido la hipótesis que plantea que un universo amplio y significativo de gráficas puede contribuir al desarrollo de esta forma de pensamiento matemático. De hecho, este estudio está inscrito al seno de esta línea de investigación.

La idea de la rapidez o velocidad es conocida por los niños y adolescentes antes de que sean tratados de manera formal en las aulas escolares y forman parte de sus percepciones sobre el movimiento adoptando según Gómez (2008) un estatus fenomenológico, es decir ligados estrechamente con los fenómenos de variación y cambio. Lovell (1962, pp. 108-110) plantea que, como producto del juego y de lo que oyen decir de los adultos, los niños concluyen que si una persona u objeto en movimiento alcanza a otra persona u objeto, dicen que va *más rápido*, la idea de velocidad en los niños pequeños (4 -5 años) no tiene en cuenta la relación espacio-tiempo como tal, aunque encontraron que en los niños de 8-9 años comprendían la velocidad en función de la distancia. En condiciones escolares este concepto es tratado en los cursos de matemáticas y física de la secundaria y el bachillerato[1] asociándolo con la variación directamente proporcional o con el movimiento rectilíneo uniforme, suele definirse como una razón de cambio particular determinada por la fórmula: $r = d/t$, para posteriormente en matemáticas darle un estatus funcional.

La enseñanza de la rapidez tanto en física como en matemáticas asume que los estudiantes, después de haber estudiado este tema, estarán en condiciones de poder representar este concepto utilizando la noción de pendiente. Sin embargo, nuestra experiencia como profesores de matemáticas nos indica que esto no suele suceder así. Inclusive investigaciones en el campo reportan que las concepciones alternativas (llamadas también concepciones erróneas) de los estudiantes muchas veces son más poderosas que los conceptos científicos que se supone son los que la enseñanza formal se encarga de formar en ellos. Esto nos ha llamado mucho la atención y dado que la rapidez o velocidad son utilizadas con mucha frecuencia en matemáticas y ciencias, puede resultar de mucha utilidad el investigar las

[1] En México el Nivel Medio lo componen la secundaria y el bachillerato. El primero se le conoce como Nivel Medio Básico y comprende el 7º, 8º y 9º grado de escolarización y el segundo es conocido como Nivel Medio Superior y comprende el 10º, 11º y 12º grado. Las edades de los estudiantes en secundaria fluctúan entre 12 y 15 años y en el bachillerato entre 15 y 18.

representaciones gráficas que los estudiantes hacen de este concepto. Su conocimiento puede ayudar a profesores e investigadores al diseño de situaciones o secuencia didácticas que posibiliten el cambio conceptual deseado en la enseñanza y el aprendizaje de las ciencias naturales y la matemática.

2. Antecedentes

Desde finales de la década de los ochenta y principios de los noventa del siglo pasado varios investigadores (Zimmerman y Cunningham, 1991; Janvier, 1987) se interesaron por el estudio de las gráficas en virtud de que propician el uso de la visualización matemática, medio que empezó a ser considerado desde aquellos años como necesario para el mejoramiento del aprendizaje de la matemáticas y las ciencias. A pesar de las bondades que representa el uso de las gráficas para el aprendizaje los investigadores han encontrado varias dificultades a las que se enfrentan los estudiantes cuando construyen gráficas o extraen información de ellas (Wainer, 1992), al aplicar lo aprendido sobre gráficas en las clases de matemática a la física o a otras materias (Mc Dermot *et al*, 1987). Una clasificación de las dificultades de los estudiantes en la comprensión de las gráficas fue hecha por Leinhardt *et al* (1990), plantean cuatro tipos de categorías: la confusión entre la pendiente y la altura, la confusión entre un intervalo y en un punto, la consideración de una gráfica como un dibujo y la concepción de una gráfica como construida por un conjunto discreto de puntos. En otros estudios realizados por Espinel (2007) usando gráficas estadísticas para evaluar la capacidad de leer y razonar sobre distribuciones, hizo hallazgos similares a los descritos anteriormente, encontró en alumnos que se forman como profesores de primaría, que tienen dificultades para: distinguir gráficos de barras e histogramas, asignar la escala de una variable, razonar de forma global (miran puntos), identificar un gráfico a partir de la descripción de una variable, y reconocer patrones de comportamiento de las variables, en relación a los gráficos temporales, a pesar de su aparente simplicidad, halló que los futuros profesores no disponen de un método para leer o interpretar cambios en el tiempo, muchos justifican sus respuestas con la observación visual o utilizando la regla de tres para encontrar incrementos y decrementos en el tiempo.

Otros investigadores se han dado a la tarea de estudiar los fenómenos asociados a las gráficas y a la graficación bajo diversos enfoques. Hay quienes la miran como una habilidad cognitiva, ver por ejemplo a Dolores (2004); Mevarech y Kramarsky (1997); Otros la conciben como una práctica social, ver por ejemplo, Roth y Mcginn (1997); Roth y Bowen (1998); Roth y Lee (2004). Otros investigadores las usan para la construcción de significados, por ejemplo, Ainley *et al* (2000) utilizan la graficación a través de una propuesta pedagógica para la construcción de significados de la relación fenómeno-gráfica, elaboran una secuencia de actividades para niños (8-9 años) utilizando una hoja de cálculo donde recaban datos producto de la experimentación con diversos fenómenos, por ejemplo, la resistencia de un puente de papel y el peso que soporta.

Por su parte, Cordero y Flores (2007) realizaron un estudio sobre el uso de las gráficas en el discurso matemático escolar. Su propósito fue ofrecer indicadores que contribuyan a favorecer el desarrollo de una matemática funcional[2] en el sistema educativo, asumiendo la graficación como una práctica social en su proceso institucional. Sobre el análisis del uso que se le da a las gráficas con respecto a sus funcionamientos y sus formas en el discurso de los libros de texto del nivel básico (primaria y secundaria), identificaron tres momentos: el síntoma del uso de la gráfica de una función, el uso de la gráfica de una función, y el uso de la curva que proporcionan.

Empero, fuera de la escuela los ciudadanos comunes o profesionales utilizan las gráficas de una manera diferente de como se les usa o estudia en el ambiente escolar. Por ejemplo, un médico utiliza los electrocardiogramas con la finalidad de realizar diagnósticos sobre enfermedades cardiovasculares, los medios de comunicación las utilizan para trasmitir información (Chi, 2008), en las tiendas de autoservicio se les utiliza para incentivar las ventas de los empleados (Meza, 2008). En el contexto de su uso, Roth y Mcginn (1997) plantean que las gráficas y la graficación, más que algo escolar y cognitivo son una forma humana de vida, una práctica social donde la práctica es la actividad diaria. En algunos estudios realizados en esta dirección, Bowen y Roth (1998) concluyen que las lecturas están separadas de la interpretación gráfica.

Si bien como dice Roth y Mcginn (1997) el éxito o fracaso del aprendizaje de las gráficas en el currículum puede ser explicado por medio de la presencia o ausencia de la práctica social, vista ésta como las actividades directamente vinculadas a las actividades cotidianas, también podríamos explicar lo anterior, por medio de las concepciones y representaciones que se forman los individuos a lo largo de su vida escolar. Un acercamiento mayor entre las prácticas humanas cotidianas y las actividades escolares podrían fortalecer el desarrollo de las habilidades sobre interpretación y elaboración de gráficas. En la literatura sobre la cognición asociada a las gráficas se estudian las dificultades y errores que tienen los estudiantes en la lectura e interpretación de gráficas (Wainer, 1992; Fabra y Deulofeu, 2000; Acuña, 2001). Sin embargo, no es lo mismo interpretar una gráfica ya construida para extraer información, que elaborar una representación gráfica dada cierta información sobre un fenómeno determinado. Por ello y pensando en la relación entre las actividades cotidianas y sus representaciones gráficas, en este trabajo estamos empeñados en investigar las representaciones gráficas que los estudiantes escolarizados hacen de situaciones cotidianas que involucran el concepto de rapidez.

3. Planteamiento del problema y el objetivo

La literatura indica que algunos grupos de investigadores estudian la interpretación y lectura de gráficas, dada la gráfica exploran la habilidad de extraer la información, parte importante están interesados en explorar las dificultades que tienen los estudiantes en ese proceso. Otros investigadores se interesan en identificar los significados que emergen de la práctica al estudiar las relaciones entre el fenómeno, la gráfica y los datos, incluso algunos investigadores no usan la gráfica

[2] Matemática funcional quiere decir un conocimiento incorporado orgánicamente en el humano que lo transforma y que le transforma su realidad.

como objeto de estudio sino como herramienta para desarrollar habilidades motrices en niños.

Partiendo de una posición antropológica W.M. Roth enfoca la atención en los usos de las gráficas, asumiendo que para desarrollar habilidades para su lectura e interpretación es necesario involucrar a los estudiantes en la realización de las prácticas sociales asociadas más que en la posesión a priori de habilidades cognoscitivas (Roth, 2003; Bowen, Roth y Mcginn, 1999). A diferencia de quienes se interesan por la lectura e interpretación de gráficas, por las dificultades que tiene en su lectura, o quienes se interesan en su uso social, nosotros estamos interesados en esta investigación en explorar qué representaciones gráficas hacen los estudiantes acerca de enunciados verbales sobre situaciones cotidianas de la variación física, con ello propiciamos un acercamiento entre las situaciones cotidianas y las representaciones gráficas. En particular el centro de nuestra atención es la rapidez de la variación ya que es una noción muy cercana a la práctica cotidiana. Nuestro objeto de estudio son las representaciones gráficas acerca de la rapidez y nuestro objetivo es explorarlas en estudiantes del nivel medio de la escuela mexicana. Asumimos que las representaciones gráficas que los estudiantes hacen acerca de situaciones de rapidez son diferentes de las que se aceptan como válidas tanto en física como en matemáticas. De hecho este es un problema que consideramos obstaculiza el desarrollo de los conceptos matemáticos asociados a la variación. Tal problema lo hemos adoptado en este trabajo y mediante su estudio pretendemos aportar elementos para que los profesores de matemáticas y ciencias puedan afrontarlo y resolverlo en situación escolar.

4. Elementos teóricos

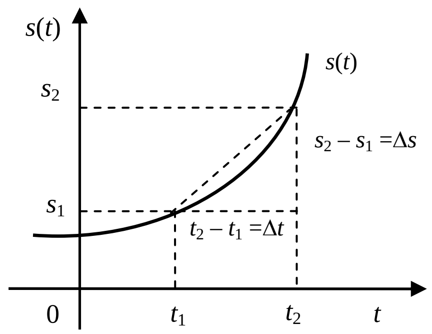
Para explicar nuestros resultados este trabajo se sustenta en tres elementos fundamentales: el pensamiento y lenguaje variacional, las representaciones semióticas y la noción de concepción alternativa. El pensamiento y lenguaje variacional es caracterizado por Cantoral y Farfán (2000) como el campo en el que se estudian los fenómenos de enseñanza, aprendizaje y comunicación de saberes matemáticos propios de la variación y el cambio, en el sistema educativo y en el medio social que le da cabida. Pone particular atención en el estudio de los diferentes procesos cognitivos y culturales con que las personas asignan y comparten sentidos y significados utilizando diferentes estructuras y lenguajes variacionales. En tanto vertiente investigativa posee una triple orientación, por un lado se ocupa de estructuras variacionales especificas desde un punto de vista matemático y fenomenológico, en segundo término, estudia las funciones cognitivas que los seres humanos desarrollan mediante el uso de conceptos y propiedades de la matemática del cambio, en tercer lugar, tiene en cuenta los problemas y situaciones que se abordan y resuelven en el terreno de lo social mediante las estructuras variacionales consideradas en la escuela y el laboratorio.

Dentro de las nociones que conforman este tipo de pensamiento está justamente el cambio que se cuantifica mediante las diferencias. En las funciones tiempo-distancia, donde s es una función del tiempo, se escribe: $s(t)$, el cambio del tiempo se cuantifica mediante a diferencia: $\Delta t = t_2 - t_1$; el cambio de distancia se cuantifica mediante la diferencia: Δs, y se expresa como: $\Delta s = s(t_2) - s(t_1)$. La rapidez es una razón de cambio particular: $\Delta s/\Delta t$, comúnmente aparece como un tema propio de la física en particular es tratado dentro de la cinemática. La rapidez y la velocidad son conceptos que suelen usarse indistintamente, sin embargo, la velocidad tiene magnitud vectorial y la rapidez tiene magnitud escalar, esto es, para definir la velocidad de un objeto se considera no sólo la distancia que recorre por unidad de tiempo sino también la dirección y el sentido del desplazamiento, en tanto la rapidez es la relación entre el cambio de distancia recorrida y el cambio en el tiempo expresada en números positivos.

En términos matemáticos la rapidez media *r* se define como el valor absoluto de la velocidad media: $r = \left| \dfrac{\overrightarrow{\Delta s}}{\Delta t} \right|$. Donde *s* y *t* son la distancia y el tiempo respectivamente. La rapidez instantánea r_i se define en términos del límite, como una derivada particular, es decir:

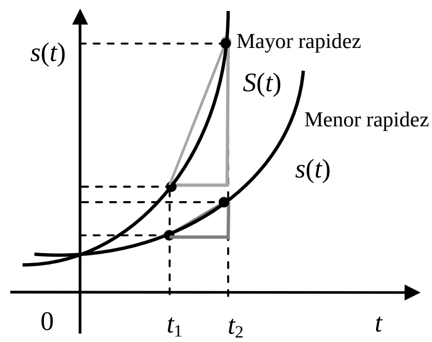
$$r_i = \left| \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\overrightarrow{\Delta s}}{\Delta t} \right|$$

En términos gráficos la rapidez se le asocia con la inclinación y la pendiente de la gráfica (ver Gráfica 1). La pendiente en matemáticas está definida como la tangente trigonométrica del ángulo de inclinación y ésta, como ya se explicó antes, es un *cociente de cambios*. Así, la rapidez media se le asocia con la pendiente positiva de la secante a la curva que representa a la función tiempo-distancia y la rapidez instantánea como la pendiente (positiva) de la tangente en un punto determinado de la gráfica. A mayor pendiente de la curva mayor rapidez, a menor pendiente menor rapidez (ver Gráfica 2).



$$r = \left| \frac{\overrightarrow{\Delta s}}{\Delta t} \right|$$

Graf. 1. Representación gráfica de la rapidez



Graf. 2. Mayor pendiente, mayor rapidez

En el terreno de la cognición, los objetos matemáticos no son directamente accesibles a través de la percepción o de una experiencia intuitiva inmediata, por ello es necesario proporcionar sus mediadores. Vigotsky (1996, pág. 22) dejó en claro que los procesos del conocimiento son mediatizados por el lenguaje. La distinción entre un objeto y su representación es un punto estratégico para la comprensión de las matemáticas. Sobre la base de los mediadores del conocimiento Duval (1998) plantea el concepto de registro de representación semiótica. Las representaciones semióticas son producciones constituidas por el empleo de signos que pertenecen a un sistema de representación, el cual tiene sus propios constreñimientos de significancia y de funcionamiento. Una figura geométrica, un enunciado en lengua natural, una fórmula algebraica, una gráfica, son representaciones semióticas que pertenecen a sistemas semióticos diferentes. En particular en esta investigación usamos las representaciones semióticas enunciadas en formas escrita y exploramos las representaciones semióticas gráficas que se producen como producto de la transferencia entre el primer sistema semiótico y el segundo. Este proceso de transferencia se denomina conversión y se define como la transformación de una representación en otra correspondiente a otro registro conservando la totalidad o solamente una parte del contenido de la representación inicial. Buscamos en este trabajo representaciones semióticas gráficas y las llamamos simplemente gráficas como producto de la conversión. Este proceso puede propiciar la aparición de los conocimientos auténtico de los estudiantes acerca de la rapidez, e inducir al lector a ver los procesos de aprendizaje desde el punto de vista de los estudiantes no desde el punto de vista del profesor.

Pero las producciones de los estudiantes, incluso de los que ya estudiaron este concepto en la escuela, pueden ser inconsistentes con los que se aceptan en matemáticas y física o con las que el profesores esperan después de haber enseñado este concepto en las aulas. Para identificar estas producciones utilizamos la noción de concepción alternativa. A lo largo de su vida los seres humanos generan creencias, teorías, significados y explicaciones, las consideramos como concepciones de los estudiantes. Cuando esas concepciones se forman antes de que el conocimiento haya sido sujeto formal de aprendizaje dan lugar a las concepciones espontáneas. Aún después de que son sujetos a procesos sistemáticos de enseñanza los estudiantes construyen sus propios conocimientos que pueden diferir de los saberes que los profesores les desean transmitir. Cuando esas concepciones entran en conflicto con los significados aceptados, aparecen las concepciones erróneas, errores sistemáticos, las concepciones alternativas. Estos términos reflejan diferentes perspectivas de los conocimientos de los estudiantes. En tanto los conceptos erróneos y los errores sistemáticos describen rasgos incorrectos de los conocimientos de los estudiantes que son repetibles y explícitos, las preconcepciones y las concepciones alternativas tienen una connotación más neutral, pues enfatizan el cambio que va, desde los errores de los estudiantes hasta las diferentes maneras en que ellos entienden las tareas demandadas. El término concepciones alternativas es utilizado por nosotros en el mismo sentido de Confrey (1990) y se usa para describir al conocimiento que difiere de aquél que se propone sea aprendido y por tanto no es congruente con el aceptado por la ciencia.

5. Método

Se elaboró un cuestionario y se aplicó a estudiantes de secundaria (9º grado) y de bachillerato (12º grado) a los cuales se les pidió que para cada una de las siguientes situaciones elaboraran la o las gráficas que describieran la situación planteada:

I. Un radar capta el movimiento de un automóvil durante 20 segundos. El radar reporta que el auto se mueve con una rapidez de 30 m/s.

II. Desde un mismo punto de partida de una pista olímpica, inician su carrera los corredores Antonio y Raúl. Después de 5 minutos, Antonio alcanza una rapidez de 2m/s y Raúl de 5 m/s. Así se mantienen durante una vuelta entera en la pista.

III. Juanito y Eduardo son hermanos gemelos que crecieron (en estatura) con la misma rapidez durante sus primeros cinco años de vida. Juanito nació midiendo 50 cm de talla y Eduardo 55 cm.

IV. Dos recipientes que contienen un litro de agua y un litro de aceite están en ebullición a 100 ºC y 218 ºC, respectivamente. Después ambos recipientes se dejan enfriar de manera que el agua se enfría más rápido que el aceite.

Los estudiantes recibieron hojas en blanco a fin de que construyeran la o las gráficas a pulso sin usar regla. La fase de validación del instrumento fue realizada basada en un estudio piloto con estudiantes de secundaria y de bachillerato, fase que estuvo supervisado por investigadores de Educación Matemática. En el estudio participaron 388 estudiantes, 157 del Nivel Medio Básico (secundaria) que estaban en el 9º grado y 231 del Nivel Medio Superior (bachillerato) los cuales estaban en el 12º grado, todos ellos de escuelas ubicadas en una región del sur de México.

Previo a la aplicación del cuestionario realizamos un análisis didáctico en el que hicimos una revisión de los programas y libros de texto que mayormente se utiliza en el nivel medio con el propósito de mirar cómo se presenta, se estructura y es tratado el concepto de rapidez en tales instituciones educativas. Ello nos permitió constatar su presencia asociada al concepto de velocidad y su representación gráfica asociada a la pendiente de rectas o curvas. Para el estudio de las representaciones gráficas producidas por lo estudiantes realizamos un análisis cualitativo y una descripción cuantitativa de esas producciones. El análisis cualitativo consistió en revisar cada una de las gráficas presentadas por los estudiantes a fin de obtener una clasificación que atendió al tipo de gráfica, los tipos se refieren a la forma gráfica más usada por los estudiantes: pictogramas, barras, puntos aislados, rectas, curvas, etc. El análisis cualitativo también incluyó el estudio las características propias de la variación y el cambio (focalizando la atención en la rapidez) a saber: la primera relativa a encontrar *qué cambia,* es decir, a la identificación de las variables, para el caso particular de este estudio se atendió a la manera de cómo etiquetan los ejes. La segunda cuestión atañe al reconocimiento de la manera de *cómo cambia* el fenómeno que se pide representar gráficamente, este aspecto lo vimos reflejado en las producciones de los estudiantes según el tipo, la tendencia y los puntos (o zonas) particulares de la gráfica presentada, por ejemplo, creciente, decreciente, con máximos y mínimos, o estables, etc. El tercer aspecto atendido fue el relativo a la *cuantificación* de la razón de cambio, esto es la rapidez, particularmente en este estudio se tomo la decisión de visualizar este aspecto en las producciones de los encuestados, si ellos daban indicios de tener conciencia sobre su valor y su representación gráfica. Si en las producciones se manifestaban todos estos elementos de la variación y el cambio entonces fueron evaluadas por nosotros como concepciones aceptables, en caso contrario fueron consideradas como concepciones alternativas.

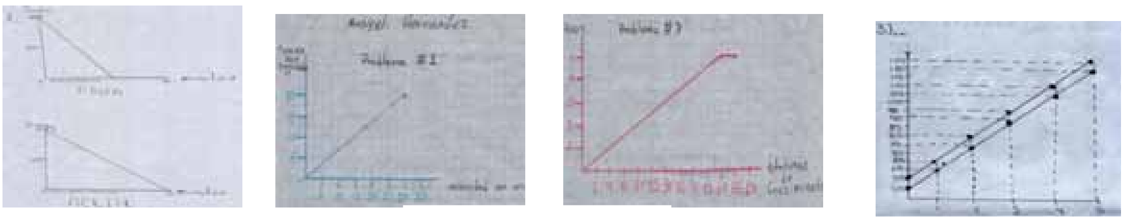
Sobre la base de los resultados obtenidos en el análisis cualitativo, realizamos una descripción cuantitativa acerca de las producciones gráficas de los estudiantes. Esto nos permitió hacer comparaciones numéricas entre las producciones de los estudiantes de secundaria y de bachillerato cuestionados, por un lado entre los tipos de gráficas por ellos presentadas y por el otro entre las concepciones alternativas y aceptables detectadas.

6. Las representaciones gráficas mostradas

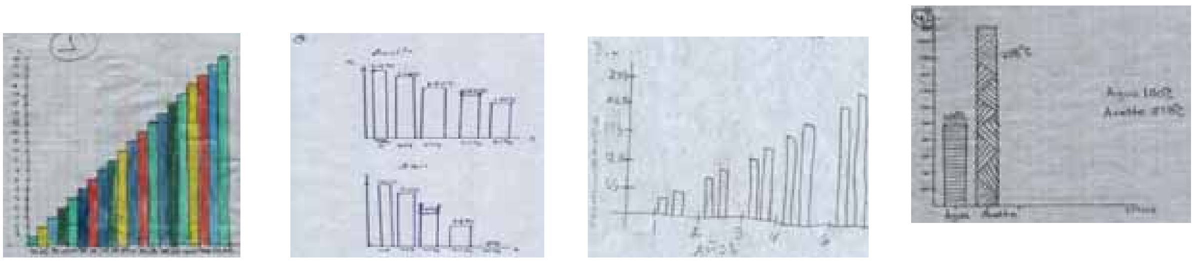
Análisis cualitativo

Los estudiantes que participaron contestando el cuestionario estaban en el último año de la secundaria y del bachillerato, por tanto ya habían recibido alguna instrucción acerca de la graficación y la rapidez. Según el curriculum de la secundaria y el bachillerato la rapidez se incluye en el curso de Física I asociada al concepto de velocidad. En matemáticas también se le estudia como parte de las aplicaciones del concepto de derivada. Por tanto se puede esperar que alguna influencia haya tenido la enseñanza formal en las concepciones externadas por los estudiantes a través de sus representaciones gráficas. La mayoría de los estudiantes transformaron las descripciones verbales a una gráfica en el sentido cartesiano aunque hay quienes hicieron representaciones pictóricas o tabulaciones. Además aunque las situaciones no se referían necesariamente a funciones lineales, la mayoría de los estudiantes que construyeron las gráficas correctamente prefirieron describirlas como tales.

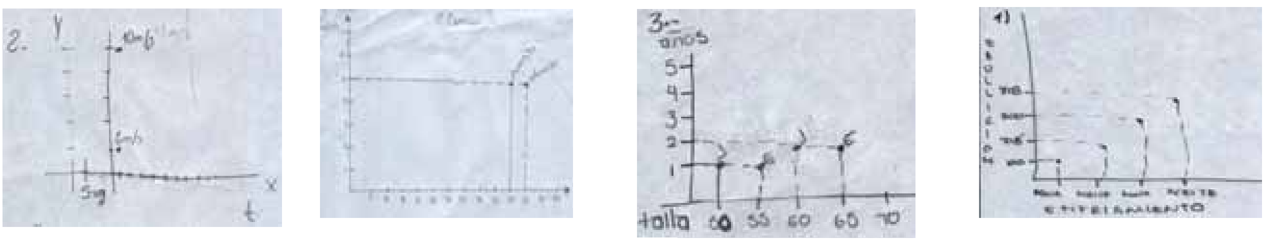
Esta fuerte tendencia hacia la linealidad también ha sido reportada por Dreyfus y Eisenberg (1982) y Markovits *et al* (1983). En términos generales las representaciones gráficas mostradas por los estudiantes son de cinco tipos: rectas, columnas, puntos, pictóricas, curvas. A continuación presentamos esto a través de representaciones prototípicas.



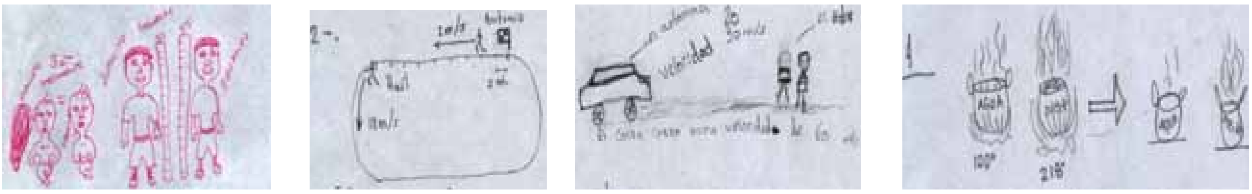
Graf. 3. Rectas



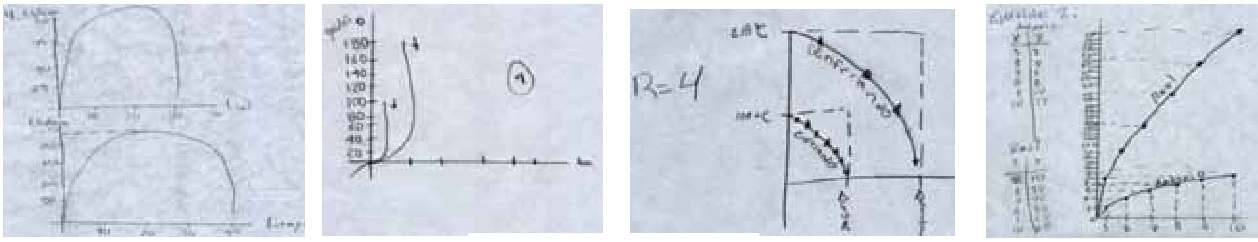
Graf. 4. Columnas



Graf. 5. Puntos



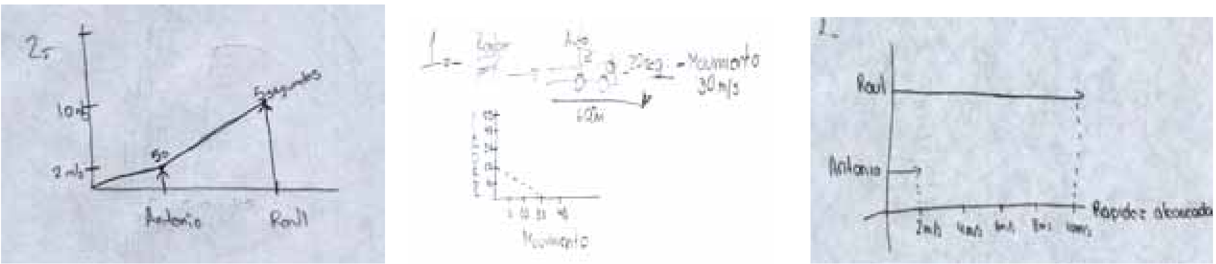
Graf. 6. Pictóricas



Graf. 7. Curvas

Las representaciones gráficas asociadas a dibujos o pictogramas intentan describir o traducir, con dibujos, la situación planteada. En el caso de los corredores dibujan la pista olímpica y los supuestos corredores etiquetando la rapidez que cada uno lleva, incluso dibujando el corredor de mayor rapidez adelante que el de menor rapidez, de manera análoga lo hacen para el resto de situaciones. Las representaciones pictóricas presentadas indican que a la mayor rapidez se la asocia, para el caso de los corredores o el de los niños, con "muñequitos" más grandes, sugiriendo que la rapidez estás asociada a la magnitud del dibujo. Las gráficas de "columnas" sugieren algo parecido al notado en los pictogramas, una barra más grande para el de mayor rapidez y una más chica para la de menor rapidez, representan con ello el dato dado a este respecto, es notorio que varios estudiantes utilizan el término velocidad en lugar del de rapidez. Las gráficas de "puntos" tienen una connotación también similar, el punto más alto representa a la mayor rapidez y el más bajo al de menor rapidez. Las gráficas de "curvas" y las de "rectas" se acercan más a las representaciones usuales en la escuela, las segundas fueron utilizadas estableciendo las diferencias entre su pendientes: la gráficas del calentamiento del agua tiene mayor pendiente que la gráfica del calentamiento del aceite; para el caso de las primeras fueron utilizadas quizá recuperando las continuidad de los movimientos representados, en algunos casos se utilizaron para comparar crecimientos.

Con un análisis más detallado de las respuestas al cuestionario observamos que existieron estudiantes que etiquetaron sus ejes usando expresiones como metros, movimiento, segundos, usando el nombre de las personas o de los objetos, la rapidez fue usualmente medida en m/s. Aunque existieron representaciones en las que no se etiquetó algún eje (o ambos) se observó que intercambiaron las etiquetas de los ejes en comparación a como suele hacerse tradicionalmente en la escuela, es decir, etiquetaron al eje vertical (que usualmente se etiqueta con las "*y*") con el tiempo y el eje horizontal a la distancia. Notamos que existe una visible tendencia en representar los datos de la situación que en identificar las variables en juego, este hecho se resalta más cuando la representación del enunciado es de tipo pictórica. De las producciones presentadas por los estudiantes se observó que en una cantidad significativa de los casos el comportamiento de la gráfica era acorde con la tendencia implicada en la situación de variación planteada, por ejemplo, para los tres primeros enunciados las representaciones son crecientes y para la cuarta situación son decrecientes. Pero, al igual para describir este aspecto de la situación hubo quienes recurrieron al empleo de flechas para marcar la dirección del cambio.



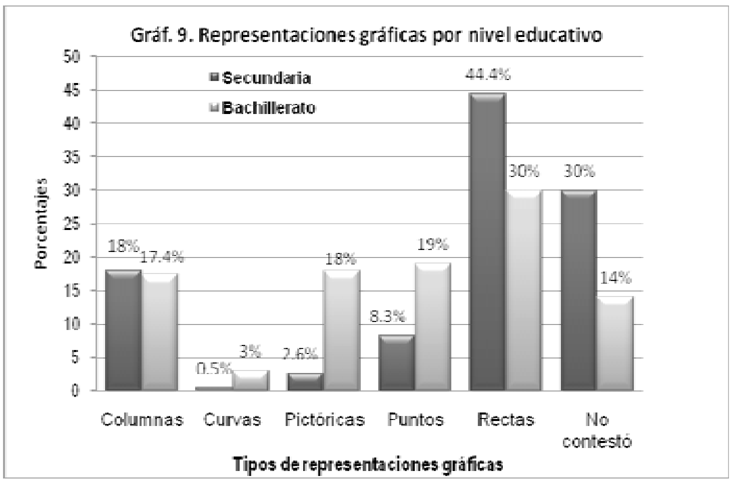
Graf. 8. Flechas que indican dirección del cambio

Con respecto a la representación del cambio (nos referimos a los Δy o Δx) estas no fueron representados explícitamente sin embargo en las gráficas de columnas y de rectas e incluso en algunas de puntos se dejan entrever, dibujando las columnas (o los puntos en el plano cartesiano) diferenciadas en alturas, que crecen uniformemente.

En el caso de la primera situación, hubo quienes solo unieron el origen con la coordenada que tenía como valores los datos de la situación (30 m/s), otro grupo de estudiantes necesitaron suponer cierta razón de crecimiento (o decrecimiento) a manera de rapidez y poder bosquejar la situación gráficamente. Y otros asociaron la magnitud del segmento o el relleno de la barra con la proporción con la que cambiaba el fenómeno.

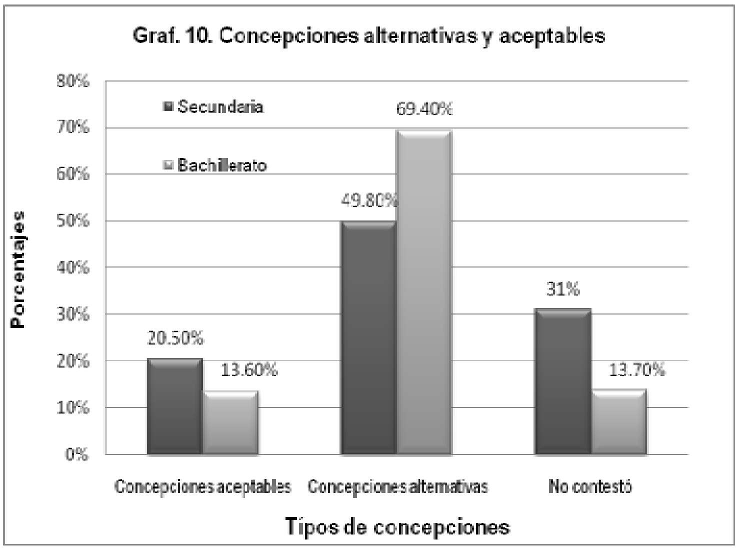
Descripción cuantitativa.

En términos de porcentajes los tipos de gráficas presentadas por los estudiantes se muestran a continuación, en la Gráfica 9.



Como ya lo señalamos anteriormente, las gráficas de líneas rectas fueron mayoritariamente utilizadas por los estudiantes cuestionados, en especial por los de secundaria (44.4%); también los de bachillerato, aunque con menor frecuencia que los de secundaria utilizaron este tipo de representación (30%). La utilización de gráficas de columnas fue utilizada casi con la misma frecuencia en ambos niveles (17.4% y 18%). Los estudiantes de bachillerato son más proclives a utilizar representaciones pictóricas y los puntos para representar la rapidez. La utilización de gráficas que representan líneas curvas fue utilizada con muy escasa frecuencia. Los datos mostrados indican que a mayor avance en nivel educativo los estudiantes tienden a utilizar más los puntos y las representaciones pictóricas. Es notorio que el 30% de los estudiantes de secundaria no hayan contestado el cuestionario, esto puede ser indicativo del escaso universo de gráficas que la escuela ha generado en ellos o quizá de la reticencia a usar gráficas para dar respuesta a las tareas propuestas por los investigadores.

En lo que respecta a las concepciones alternativas y las concepciones aceptables, la Gráfica 10 nos ha permitido resumir esta información. Las gráficas aceptables fueron consideradas como aquellas que reunían las siguientes condiciones: a) Si la grafica incluye un sistema de dos ejes coordenados, b) Si los ejes están etiquetados correctamente, c) Si las unidades marcadas en los ejes siguen una escala consistente, d) Si la grafica representa la distancia y el tiempo de modo que la rapidez (expresada a través la pendiente) es consistente con la información dada en el enunciado. Las gráficas que no reunían estas condiciones en conjunto fueron consideradas como concepciones alternativas.



En estas condiciones, las concepciones alternativas mayoritarias fueron externadas por los estudiantes del bachillerato, prácticamente el 70% presentaron este tipo de concepciones a través de gráficas. En el caso de la secundaria el porcentaje es menor pero significativo, pues alcanzó prácticamente el 50%. La frecuencia de concepciones aceptables mostradas son muy bajas, casi el 14% en bachillerato y de 20.5% en secundaria.

7. Conclusiones y perspectivas

Este trabajo muestra los tipos de representaciones gráficas que los estudiantes hacen de enunciados verbales que incluyen la rapidez de la variación. Los profesores de matemáticas y física creemos que con el hecho de enseñar el concepto de velocidad o rapidez, incluso asociándolo a su representación gráfica, esto quedará como parte de los conocimiento aceptables en la mente de los estudiantes. Sin embargo esto no es así. En este trabajo hemos aportado evidencias de que son muchas más las concepciones alternativas que las aceptables, las que se forman en los estudiantes acerca de la rapidez. Las representaciones gráficas mostradas por los estudiantes son de cinco tipos: rectas, columnas, puntos, pictóricas y curvas. Este tipo de representaciones gráficas son consistente con las encontrados por Mevarech y Kramarsky (1997), aunque ellas lo exploraron sólo con estudiantes de secundaria, aquí lo hicimos además con estudiantes de bachillerato, además en el presente trabajo se buscan representaciones de rapidez y aquél concepciones alternativas sobre las gráficas de funciones. En síntesis, los resultados encontrados indican que la mayoría de los estudiantes dan representaciones gráficas de la rapidez asociándola con su magnitud y no con la pendiente o cociente de magnitudes de los cambios como se prevé en el currículum matemático escolar. De manera similar como lo señala Dolores (1998) cuando notó en estudiantes de bachillerato que la velocidad es considerada en el contexto gráfico como equivalente $s(t_0)$ y no como la pendiente de la curva en t_0 o sea como $s'(t_0)$.

Estos resultados pueden ser indicadores de que la enseñanza formal poco está haciendo por lograr cambios conceptuales en los estudiantes. El cambio conceptual intencional es definido por Ferrari y Elik (2003, pág. 36) como el intento deliberado de una persona por lograr un cambio radical de un sistema conceptual a otro porque son seducidos por el poder de ese nuevo sistema conceptual, o porque perciben algún defecto profundo en su visión actual. Este es uno de los principales retos que se desprenden de este trabajo y marca la dirección de futuros trabajos en el campo de la educación matemática tal como lo plantea Dolores (2008). Hoy día la educación centrada en el aprendizaje ha estado penetrando cada vez más en los sistemas educativos de varios países del mundo. Esto implica entre otras cosas, lo que Ausubel *et al* (2000) sugieren: el factor más importante que influye en el aprendizaje es lo que el alumno ya sabe, averígüese esto y enséñese consecuentemente.

Las representaciones gráficas que los estudiantes hacen de situaciones cotidianas que involucran la rapidez suelen ser diferentes de las aceptables. Tanto las de los estudiantes que salen de la secundaria para ingresar al bachillerato, como los que terminan el bachillerato y pretenden ingresar al nivel superior. Los profesores de estos niveles educativos podrían favorecer los cambios conceptuales y mejorar el aprendizaje de la matemática de las variables en la escuela conociendo previamente cómo representan los estudiantes a la rapidez. En este trabajo se dan a conocer tales representaciones y por tanto pueden ser el punto de partida para diseñar estrategias de enseñanza a fin de contribuir al desarrollo del pensamiento y lenguaje variacional.

Pozo (1996, pp. 243-244) plantea que los cambios conceptuales podrían posibilitarse si se tienen en cuenta las condiciones siguientes:

- El aprendizaje de conceptos científicos no consiste sólo en reemplazar unas ideas cualesquiera por otras científicamente aceptadas, sino que en el aprendizaje existe una cierta conexión genética con la teoría alternativa del alumno y la teoría científica que se le pretende transmitir.
- Para que el alumno pueda comprender la superioridad de la nueva teoría es preciso enfrentarle a situaciones conflictivas que supongan un reto para sus ideas. Es decir, el alumno ha de darse cuenta de que su teoría previa es errónea en ciertas situaciones, en las que conduce a predicciones que no se cumplen.
- Por último, a partir de lo anterior, puede deducirse que la toma de conciencia por parte del alumno es un paso indispensable para el cambio conceptual. Los conceptos alternativos de los alumnos suelen ser implícitos. Un primer paso para su modificación será hacerlos explícitos mediante su aplicación a problemas concretos.

Este puede ser un marco propicio para proseguir investigando e incidiendo en la mejora de la enseñanza y el aprendizaje de los conceptos de la matemática de la variación y el cambio. De eso nos ocuparemos en próximas investigaciones.

Bibliografía

Acuña, C. (2001): *Concepciones en graficación, el orden entre las coordenadas de los puntos del plano cartesiano*. Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa 4(3), 203-217.

Ainley, J. Nardi, E. y Pratt, D. (2000): *The construction of meanings for trend in active graphing*. International Journal of Computers for Mathematical Learning 5, 85–114.

Ausubel, D., Novak, J. y Hanesian, H. (2000): *Psicología educativa. Un punto de vista cognoscitivo*. Editorial Trillas. México D.F.

Bowen, G.M. y Roth, W.M. (1998). *Lecturing graphing: what features of lectures contribute to student difficulties in learning to interpret graphs*?. Research in Science Education 28, 77-90.

Bowen, G.M. Roth, W.M. y McGinn, M. (1999). *Interpretations of graphs by university biology students and practicing scientists: Toward a social practice view of scientific representation practice*. Journal of Research in Science Teaching 36, 1020-1043.

Cantoral, R. y Farfán, R. M. (2000): *Pensamiento y lenguaje variacional en la introducción al análisis*. En: R. Cantoral (Eds.) *El futuro del cálculo infinitesimal*, ICME-8, 69-91. Grupo Editorial Iberoamérica, México D. F.

Chi, A. (2008): *Un estudio sobre el discurso asociado a las gráficas en situaciones de uso*. Resúmenes de la Vigésima Segunda Reunión latinoamericana de Matemática Educativa, pág. 66. *CLAME*, IPN, México D. F.

Confrey, J. (1990): *A review of research on student conceptions in mathematics, science and programming*. Review of Research in Education 16, 3-56.

Cordero, F. y Flores, R. (2007): *El uso de las gráficas en el discurso matemático escolar. Un estudio socioepistemológico en el nivel medio básico a través de los libros de texto*. Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa 10, 7-38.

Dolores, C. (1998): *Algunas ideas que acerca de la derivada se forman los estudiantes en sus cursos de cálculo.* En: F. Hitt (Ed.) *Investigaciones en Matemática Educativa II*, 257–272. Grupo Editorial Iberoamérica, México D. F.

Dolores, C. (2004): *Acerca del análisis de funciones a través de sus gráficas, concepciones alternativas de estudiantes de bachillerato*. Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*,* 7(3), 195-218.

Dolores, C. (2008): *Las gráficas, sus usos y retos en la enseñanza y en la investigación en matemática educativa*. Perspectivas docentes 36, 51-58.

Dreyfus, T. y Eisemberg, T. (1982): *The function concept in college students: linearity smoothness and periodicity*. Focus on Learning Problem in Mathematics 5, 119-132.

Duval, R. (1998): *Registros de representación semiótica y funcionamiento cognitivo del pensamiento*. En: F. Hitt (Ed.), *Investigaciones en Matemática Educativa II*, 173–201. Grupo Editorial Iberoamérica, México, D. F.

Espinel, M. C. (2007): *Construcción y razonamiento de gráficos estadísticos en la formación de profesores*. *Actas XI SEIEM* (Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática), 99-119. La Laguna. Tenerife. España.

Fabra, M. y Deulofeu, J. (2000): *Construcción de gráficos de funciones: Continuidad y prototipos*. Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa 43(2), 207-230.

Ferrari, M. y Elik, N. (2003): *Influences on Intencional Conceptual Change*. En: G. Sinatra y P. Pintrich (Eds.) Intentional conceptual change, 21-54, Lawrence Erlbaum Associates. Hillsdale, N.J., USA

Gómez, E. (2008). *La construcción de la noción de variable*. Tesis de Doctorado. Inédita. CICATA del IPN, México D.F.

Kitsantas, A. y Zimmerman, B.J. (2006). *Enhancing self-regulation of practice: the influence of graphing and self-evaluative standards*. Metacognition Learning 1, 201–212.

Janvier, C. (Ed) (1987): *Problems of representation in the teaching and learning of mathematics*. Lawrence Erlbaum Associates. Hillsdale, N.J., USA.

Leinhardt, G. Zaslavsky, O. y Stein, M. (1990). *Functions, graphs and graphing: Tasks, learning and teaching*. Review of Educational Research 60, 1– 64.

Mc. Dermot, L.C. Rosenquist, M. L. y Van Zee, E. H. (1987). *Studentes dificulties in connecting graphs and physics: Examples from kinematics*, American Journal of Physics 55, 503-513.

Mevarech, Z. y Kramarsky, B. (1997). *From verbal descriptions to graphic representations: stability and change in students' alternative conceptions*. Educational Studies in Mathematics 32, 229–263.

Meza, E. (2008): *El antecedente escolar de las gráficas de uso socioeconómico*. Resúmenes de la Vigésima Segunda Reunión Latinoamericana de Matemática Educativa*,* pág. 125, CLAME, IPN, México D.F.

Novell, K. (1962). *Desarrollo de los conceptos básicos matemáticos en los niños*. Ediciones Morata, Madrid, España.

Pozo, J.I. (1996). *Teorías cognitivas del aprendizaje*, Ediciones Morata, S. L., Madrid, España.

Roth, W.M. (2003). *Toward Anthropology of Graphing*. *Semiotic and Activity-Theoretic Perspectives*. Kluwer Academic Publishers. Dordrecht.

Roth, W.M. y McGinn, M.K. (1997). *Graphing: Cognitive ability or Practice*? Science Education 81 (1), 91–106.

Vigotsky, L. (1996). *Pensamiento y lenguaje.* Ediciones Quinto Sol, Segunda Edición, México D.F.

Wainer, H. (1992). *Understanding graphs and tables*. Educational Researcher 21, 14–23.

Crisólogo Dolores Flores. Nacido en Tlalquetzala, Municipio de Huamuxttitlán. Guerrero, México. Es Profesor de Tiempo Completo de la Unidad Académica de Matemáticas de la UAG desde 1986, es Investigador Nacional del Sistema nacional de Investigadores desde 1996, es miembro regular de la Academia Mexicana de Ciencias desde 2003. Es Licenciado en Matemática Educativa y Maestro en Ciencias en la misma especialidad por la UAG, es Doctor en Ciencias por el Instituto Superior Pedagógico "Enrique José Varona" de la Habana Cuba. Trabaja en la línea de investigación relativa a los Estudios sobre el Pensamiento y Lenguaje Variacional, actualmente estudia los procesos de comunicación de los saberes matemáticos de la variación y el cambio en el contexto del discurso informativo. Miembro del Comité Editorial de la Revista Latinoamericana de Investigación de Matemática Educativas. Fundador del Centro de Investigación en Matemática Educativa de la UAG, es miembro fundador del Comité Latinoamericano de Matemática Educativa. **cdolores@cimateuagro.org**,

Andrés Greogorio Chi Chablé. Nacido en Mérida Yucatán, México. Licenciado en Enseñanza de las Matemáticas por la Universidad Autónoma de Yucatán. Actualmente es estudiante de tiempo completo de la Maestría en Ciencias: Área Matemática Educativa, de la Universidad Autónoma de Guerrero (UAG). Ha participado como ponente en diversos congresos especializados como la Reunión Latinoamericana de Matemática Educativa 22, la XI Escuela de Invierno en Matemática Educativa. Ha participado como organizador del Seminario Permanente de Investigación en Matemática Educativa en la UAG. **chichableag@cimateuagro.org**

Eduardo Rafael Canul Pech. Nacido en Mérida Yucatán, México. Es Licenciado en Enseñanza de las Matemáticas por la Universidad Autónoma de Yucatán. Actualmente estudiante de la Maestría en Ciencias: Área Matemática Educativa de la Universidad Autónoma de Guerrero. Ha participado como ponente en diversos congresos especializados como la Reunión Latinoamericana de Matemática Educativa 22, la XI Escuela de Invierno en Matemática Educativa. **ecanul@cimateuagro.org**

Cristy Arely Cantú Interián. Nacida en Tuxtepec, Oaxaca, México. Es Licenciada en Enseñanza de las Matemáticas por la Universidad Autónoma de Yucatán. Actualmente es estudiante de tiempo completo de la Maestría en Ciencias: Área Matemática Educativa de la Universidad Autónoma de Guerrero (UAG). Ha participado como ponente en diversos congresos especializados como la Reunión Latinoamericana de Matemática Educativa 22 y la XI Escuela de Invierno en Matemática Educativa. **ccantu@cimateuagro.org**,

Crispín Giovani Pastor Solache. Nacido en Chilpancingo de los Bravo, Guerrero, México. Es Licenciado en Matemáticas, Área: Matemática Educativa por la Universidad Autónoma de Guerrero (UAG). Actualmente es estudiante de la Maestría en Ciencias: área Matemática Educativa de la misma universidad. Ha participado como ponente en diversos eventos especializados como la Reunión Latinoamericana de Matemática Educativa 22, la XI Escuela de Invierno en Matemática Educativa; así como en eventos académicos como el Tercer coloquio Estatal de Jóvenes Talentos del estado de Guerrero, Jornadas Científicas Estudiantiles de la Unidad Académica de Matemáticas de la UAG. **gpastor@cimateuagro.org**

UNIÓN
REVISTA IBEROAMERICANA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA

Junio de 2009, Número 18, páginas 58 – 72
ISSN: 1815-0640

Discurso y práctica docente en matemáticas: Un estudio exploratorio en bachillerato

Eddie Aparicio; Martha Jarero; María Ordaz; Landy Sosa.

Resumen

En los últimos años se han planteado y realizado diferentes reformas educativas en México, ejemplo de ello es la reforma realizada en el año dos mil cuatro a la educación media. Es claro que la implementación de tales reformas supone modificaciones tanto en las prácticas docentes como en las formas de organizar y comunicar los mismos o los "nuevos" saberes. En este sentido, se presentan los resultados obtenidos en un estudio exploratorio y descriptivo sobre el discurso matemático escolar y su relación con el tipo de prácticas docentes que se desarrollan al interior de las aulas de clases de matemáticas a propósito de las reformas educativas. Particularmente se discute lo observado en tres planteles de bachillerato.

Abstract

In the last years has been set up and implemented different educational reforms in Mexico, an example of it is the reform done in the year of two thousand four for the middle education. It's clear that the implementation of such reforms suppose changes as much educational practices as the different ways of organize and communicate the same or the "new" knowledge. In this sense, the obtained results in a descriptive and exploratory study at a subsystem of middle education, about the school mathematical discourse and its relation with the kind of educational practices that are developed to the inside of the mathematic classrooms on purpose of the educational reforms are presented in this article.

Resumo

Nos últimos anos se expuseram e realizaram diferentes reformas educativas em México, o exemplo disto é a reforma realizada no ano dois mil e quatro à educação média. É claro que a implementação de tais reformas supõe modificações tanto nas práticas docentes como nas formas de organizar e comunicar os mesmos ou os "novos" saberes. Neste sentido, apresentam-se os resultados obtidos num estudo exploratório e descritivo sobre o discurso matemático escolar e sua relação com o tipo de práticas docente que se desenvolvem no interior das classes de aulas de matemáticas sob propósito das reformas educativas. Particularmente se discute o observado em três cursos de bacharelado

Planteamiento del problema

La noción de discurso en general, refiere a una forma de comunicación verbal o no verbal que posee una naturaleza y función eminentemente social, por ejemplo, la difusión de saberes y el favorecimiento en la formación de consensos. En ese sentido, y de manera particular, se puede decir que, "aprender matemáticas o aprender a pensar matemáticamente, es aprender a hablar matemáticamente" tal como señala Wenger (1998). Bajo esta idea, se advierte la importancia de realizar estudios sobre el papel del discurso matemático escolar y su relación con algunas prácticas docentes en la generación de aprendizajes matemáticos, es decir, estudiar la forma en que se lleva a cabo la organización y comunicación de saberes matemáticos al interior de las aulas.

Según Ryve (2004), citando a (Selden y Selden, 2001), la investigación que en didáctica de las matemáticas se ha realizado sobre el discurso matemático en la educación media y educación superior, es escasa. De ahí que, el presente trabajo tuviera como objetivo, analizar el discurso matemático escolar presente en tres planteles de educación media, a propósito de las prácticas docentes que se desarrollan al interior de las aulas de clase. Para ello, se consideró la siguiente pregunta de investigación en el contexto de una reforma educativa: ¿qué relación guarda el discurso matemático escolar, con el tipo de prácticas docentes que se desarrollan al interior de las aulas de clase de matemáticas?

Marco de referencia

En el área de la matemática educativa o didáctica de la matemática, trabajos como el desarrollado por Cordero y Flores (2007), hacen referencia a la existencia de un particular tipo de discurso, el discurso matemático escolar, entendido éste, como la manifestación del conocimiento matemático normado por creencias de los actores del sistema didáctico sobre lo que es la enseñanza y lo que es la matemática. En su trabajo, abordan como objeto de estudio, el uso y tratamiento que la escuela confiere a las gráficas, centrando la atención en la graficación no como un proceso o forma de representación del concepto función, sino como una práctica social institucional que da cuenta sobre el funcionamiento y forma que asume la gráfica y su uso, en el escenario escolar. En esa dirección, los autores ofrecen resultados que indican la posibilidad de resignificar institucionalmente, a partir de ciertas epistemologías, tal funcionamiento y forma del uso de las gráficas.

Por su parte, en el trabajo desarrollado por Marcolini y Perales (2005) citados en Castañeda (2006), se presenta al discurso matemático escolar, como aquel discurso que se preocupa por la formación de consensos en la noosfera en torno a un saber escolar y aspectos relativos a su tratamiento, características, organización temática y profundidad expositiva.

Dicho así, el discurso matemático escolar no sólo cumple la función de difundir saberes matemáticos y favorecer la formación de consensos, sino también, instaura procesos y mecanismos específicos que de alguna manera, regulan e incluso norman, el tipo de prácticas que los docentes desarrollan al interior de las aulas de clase. En ese orden de ideas, para dar respuesta a la pregunta planteada, se consideró que en los escenarios institucionales, las reformas educativas, los textos, los materiales didácticos en general y las interacciones entre profesores y alumnos, son elementos constitutivos del discurso matemático escolar. Se asumió en consecuencia, que el discurso plantea una resignificación escolar de nociones, procedimientos y prácticas matemáticas, particularmente, al interior de las aulas de clase, que requiere ser analizada, a fin de generar entendimiento sobre la forma en que se difunden y consensan ciertos saberes matemáticos en la relación didáctica del día a día.

Las tendencias curriculares en matemáticas, plasmadas en reformas educativas, han sido un elemento transformador del discurso matemático escolar, al reflejar distintas concepciones sobre la epistemología de las matemáticas y su enseñanza, dígase estructuralismo, mecanicismo, empirismo, realismo u otra. Una postura, enmarcada en reforma de las matemáticas modernas, en la que se concibe a la matemática como una ciencia lógica-deductiva, caracterizada por un sistema deductivo cerrado y estrictamente organizado, ha de generar nociones y prácticas distintas que aquella postura en la que la matemática se concibe como un conjunto de reglas y fórmulas para fortalecer la mecanización y automatización de algoritmos, desatendiendo aplicaciones ligadas a la génesis de los conceptos y procedimientos (García, s/f). Véase el siguiente ejemplo de un cambio de discurso matemático escolar, tomado del trabajo desarrollado por Josette, A (1981).

Matemáticas tradicionales	Matemáticas modernas
Considere los siguientes polinomios: $A(x) = x(x-4)^2 - 25x$ $B(x) = x^3 + x^2 - x - 1$ Calcule $A(x) - B(x)$ ¿Para qué valores de x tenemos: $A(x) = 0, B(x) = 0$?	Considere en R, las funciones polinomio siguientes: $f(x) = x(x-4)^2 - 25x$ $g(x) = x^3 + x^2 - x - 1$ Calcule $f(x) - g(x)$ Determine el siguiente conjunto: $E = \{x \mid x \in N \ y \ f(x) = 0\}$

En la reforma curricular vigente del bachillerato general en México, la matemática se caracteriza como una herramienta metodológica, como lenguaje y como ciencia que permita entender y explicar el entorno. Sin embargo, cabe decir, la organización y estructura de los programas de estudio de matemáticas es inconsistente en algunos aspectos con los objetivos planteados en los mismos (Sosa y Canché, 2008). No se refleja el currículo como producto social y cultural, como resultado de la actividad de grupos humanos con una cultura determinada y en el que el aprendizaje se ve afectado por el contexto, las relaciones interpersonales y de la matemática con la sociedad (Rico, 1997).

Otro factor que ha incidido notablemente en que las reformas curriculares de matemáticas, implementadas en distintos niveles educativos, no hayan tenido el funcionamiento esperado respecto a la consecución de los objetivos curriculares, es la práctica docente. Al respecto, Román (2000) menciona que un modelo orientado al desarrollo de capacidades y valores, en el que las actividades han de entenderse como estrategias de aprendizaje orientadas a la consecución de los objetivos, implica enseñar a aprender y enseñar a pensar, siendo para ello necesario *de nuevo aprender a enseñar*.

Ejemplo de lo antes dicho, es la crítica realizada a la reforma efectuada en educación primaria en el año de mil novecientos noventa y tres, que proponía entre otras cosas, un enfoque didáctico basado en la resolución de problemas, hecho que por supuesto, implicaba modificaciones en las prácticas de los docentes, pues sería en éstos en quienes recaería el rol de la devolución de problemas a los alumnos y la institucionalización de los saberes en el sentido planteado por Brousseau (1995), sin embargo, al respecto y sobre los logros de dicha reforma, poco se puede decir, como se discute en Moscoso (2005).

En la educación media, los resultados de las reformas también han sido poco eficaces. Las razones, sin duda son diversas. Sociedad y educación enfrentan una posible paradoja del conocimiento, en efecto, se dice que la actual sociedad, es una sociedad de avances vertiginosos en materia de ciencia y tecnología, pero al mismo tiempo, los currículos escolares y las prácticas docentes, se siguen presentando inamovibles ante tales avances. Por un lado, se continúa privilegiando la atención en los contenidos por sobre la didáctica de los mismos, más aun, sobre las formas de pensamiento y razonamiento científico y tecnológico acordes al momento sociocultural que se vive. Por otro lado, el discurso matemático escolar en términos generales, se ha caracterizado por enmarcarse en epistemologías artificiales que poco o nada se relacionan con la “verdadera” forma de producción del conocimiento. Hechos como este, se traducen en prácticas educativas que distan mucho de sentar condiciones más acordes a la generación de formas de pensamiento científico y tecnológico entre los estudiantes, quienes presentan dificultades de transferencia y uso del conocimiento matemático escolarmente adquirido, para enfrentar y resolver situaciones que demandan su propia realidad social y educativa.

El currículo de ciencias en general y el de matemáticas en particular, ha sido fuente de profundas críticas y reflexiones respecto a su contenido y organización, derivando en reformas (Aparicio, Balam, Sosa, 2007). Desde la década de los setentas se empieza a considerar la necesidad de orientar los esfuerzos curriculares hacia una enseñanza integradora de las ciencias, esto como producto de la política científica, tecnológica que se vivía en nuestro país. Para los años ochentas, la principal preocupación del bachillerato era lograr que los egresados se insertaran prontamente al ámbito laboral, se empieza a desarrollar la idea de un tronco común en los planes de estudio y la interdisciplinariedad. “Ciencia para la vida” fue el principio básico educativo social de la época.

Desde los años noventas, se escucharon ideas sobre la viabilidad de una unificación del bachillerato. Se percibe un claro problema de desvinculación entre los contenidos escolares y aquellos considerados necesarios para la vida y el medio laboral. En los planes de estudio se considera la idea de una currícula de cursos o asignaturas de manera interdisciplinaria, aunque en los hechos no fuera llevado a cabo, por ejemplo, las clases de física y matemáticas no mostraban puntos de intersección, la física y su enseñanza se concibieron como un conjunto de fórmulas, técnicas y algoritmos que los estudiantes en la mayoría de los casos deberían memorizar. La enseñanza de la matemática se basaba en lo deductivo, los ejemplos y problemas que se utilizaban eran descontextualizados, desvinculados de otras áreas o campos de saber.

Actualmente, el discurso que prevalece respecto a la educación, hace eco en proporcionar una formación integral a los individuos. Esto es, se forme a los individuos para la ciudadanía y se les capacite para la competitividad y exigencias del mundo laboral. Tras las intenciones, tendencias y nuevas exigencias educativas, la formación del profesor de ciencias y sus prácticas docentes, han sido ampliamente cuestionadas, se pone en duda su entendimiento de las reformas educativas y sus ideas sobre la educación matemática, se discurre sobre su capacidad para vincular el contexto no escolar con el currículo oficial y los conocimientos previos de los estudiantes, así como sobre la eficacia de sus prácticas docentes.

Gómez y Valero (1997), mencionan que ante tal tipo de circunstancias, se requiere una propuesta de formación de formadores donde se modifiquen los esquemas de creencias, de tal forma que la práctica docente refleje un cambio hacia los nuevos roles que demanda la educación del siglo XXI. La formación matemática que deben recibir los profesores deberá entonces, plantearse bajo las nuevas formas pedagógicas y curriculares, y enfocar la preparación de los estudiantes hacia la socialización del saber matemático como instrumento de formación del individuo y su aplicación en la solución problemas multidisciplinares.

Desde la perspectiva del presente estudio, a lo antes señalado, debe añadirse la necesidad de generar e incorporar información sobre el tipo de discurso matemático escolar que prevalece al seno de las instituciones educativas, a fin de garantizar mejorías en el proceso educativo. Pues en efecto, los problemas didácticos no son exclusivos de factores externos al proceso enseñanza aprendizaje, sino constitutivos de éste.

Métodos

Dada las características cualitativas que planteaba el realizar este estudio, se optó por seguir las técnicas, instrumentos y procedimientos que sugiere el método de investigación etnográfico educativo. Así, para observar y analizar lo que acontecía en la cotidianidad de profesores y estudiantes al interior de sus aulas de clases de matemáticas, se llevaron a cabo videograbaciones y registro de notas. Adicionalmente, se efectuaron entrevistas semiestructuradas a los profesores observados y se hizo una revisión y análisis de algunos de los libros más usados para el curso de precálculo, así como del tipo de recursos empleados en la preparación y desarrollo de los temas del mismo curso.

Población de análisis: profesores

Para el estudio se eligieron tres planteles que tenían la mayor matrícula de estudiantes. La formación inicial y años de servicio de los profesores que fueron observados es como sigue: un normalista con diez años de servicio, y dos no normalistas, de los cuales uno contaba con quince años de servicio y el otro con apenas un año de estar laborando. La dinámica de observación de las clases consistió en videograbar y tomar notas de diez sesiones consecutivas con solo uno de los grupos a los que impartían clases los profesores y que ellos mismos eligieron. Cada sesión tuvo una duración entre cincuenta y sesenta minutos, según el plantel al que se encontraba adscrito el profesor. Adicionalmente, se recurrió al empleo de entrevistas semiestructuradas.
La caracterización de la práctica docente se basó en los indicadores planteados en Contreras (1998), donde se presenta un modelo teórico que describe cuatro tendencias didácticas: la tradicional, la tecnológica, la espontaneísta y la investigativa. Cada tendencia se subdivide en seis categorías:

1. Papel del profesor: ¿qué hace?, ¿cómo lo hace?, ¿por qué lo hace?, coordinación.
2. Papel del alumno: participación en el diseño didáctico, clave de la transferencia enseñanza/aprendizaje, ¿qué hace?
3. Metodología: praxis, objetivos y programación.
4. Sentido de la asignatura: orientación y finalidad.
5. Evaluación: carácter, criterios e instrumentos.
6. Concepción del aprendizaje: tipo y forma, tipo de agrupamiento, dinamizador, aptitud y actitud.

Recursos analizados: textos

Para determinar qué libros usaban los profesores con mayor frecuencia, qué usos le daban y las razones de ello, se realizaron entrevistas y se aplicó un cuestionario con una lista de consideraciones que podían ampliar o ajustar si lo consideraban conveniente. Para el análisis de los textos se consideraron los siguientes aspectos:

- Revisión de notas previas, prólogo, comentarios del autor y esquemas.
- Ubicación y secuencia de contenidos respecto al tema de análisis.
- Forma de introducir y desarrollar el o los conceptos.
- Tipo de ejemplos y ejercicios propuestos.

El análisis de los libros se llevó a cabo en torno al concepto función, a partir de tres ejes: 1) introducción del concepto; 2) desarrollo del concepto y 3) planteamientos propuestos posterior al concepto.

Resultados y conclusiones

La observación no participante y la entrevista de los tres profesores, se contrasta con las respuestas que éstos dieron a una encuesta, donde se trata de identificar la tendencia didáctica que prevalece en la práctica docente, la información se concentra en la siguiente tabla.

Profesor	Encuesta	Observación	Entrevista	Tendencia
Profesor A	Investigativa	Tradicional	Tradicional	Tradicional
Profesor B	Investigativo	Tecnológico	Tecnológico	Tecnológico
Profesor C	Tecnológico	Tradicional	Tecnológico	Tecnológico

Tendencia didáctica según procedimientos

Los tres profesores reportan en la encuesta una tendencia distinta a la identificada por medio de la observación no participante. Esta situación se interpretó bajo el hecho de que los profesores responden en la encuesta en función de lo que se espera realicen en el aula, esto está; basado en sus concepciones, mismas que derivan del proceso de formación; sea ésta inicial o de actualización. Sin embargo, sus creencias los atan en la tendencia tradicional o en el mejor de los casos, en la tecnológica; lo cual se hace evidente en la puesta en escena.

Las prácticas docentes de los tres profesores se caracterizó como una actividad de aula en la que predomina el acto de repetición iterada de ejercicios típicamente escolares, la exposición magistral como técnica habitual de comunicación de conocimientos y el uso del libro como único material curricular didáctico; en este sentido, se observó a los profesores en un rol de operadores de tareas pedagógicas previamente programadas y externas a ellos, pero no ajenas, pues los programas se basan literalmente en los enfoques, secuencias, complejidad y ejemplos propuestos en los libros elegidos por ellos mismos como libros de texto, sin plantearse posibles relaciones entre temas, conceptos o unidades temáticas y que fueran acordes a los objetivos de los programas de cursos y del plan de estudios de sus colegios.

Para dejar ver lo anterior, se exhibe un fragmento de lo dicho por un profesor, por ejemplo: el Profesor A en la encuesta refiere que: "…, *la enseñanza de las matemáticas deben ser de manera constructiva y bajo los intereses de los alumnos*, …", tal como se hace mención en el discurso de la reforma educativa recién implementada. Sin embargo, en la observación se identifica que la metodología empleada habitualmente corresponde a la exposición magistral e inclusive al pedirle en la entrevista explicar respecto a la dinámica de la clase comenta:

> PA-2: *Normalmente yo, / siempre trabajo así con ellos. Les muestro el tema, les marco una serie de ejercicios y ellos van resolviendo, así y así, generalmente así trabajo.*

Los profesores conciben a las asignaturas como una organización de conceptos y reglas matemáticas que deben ser difundidas y ejemplificadas en las aulas de clase, a fin de que los estudiantes las conozcan. De aquí que, el contenido matemático a movilizar en el aula se considera diferente en nivel de abstracción del contenido matemático formal, pero no así en su estructura, es decir, la diferencia radica en la forma en que dicho contenido es presentado, tratado y la exigencia cognitiva hacia los estudiantes de quienes solo se espera muestren tener un cierto "panorama matemático" de aquello se espera aprendan.

De las respuestas ofrecidas en una encuesta, se pudo observar información respecto a los libros utilizados por los profesores en la asignatura Matemáticas IV, correspondiente a contenido de Precálculo, así como los usos que le dan a dichos libros y las razones por las que los utilizan. Los libros más empleados por los profesores, resultaron ser los siguientes:

Libros más utilizados de Matemáticas IV	
Libro	Datos del Libro
L1	Stewart, James, et. Al. Precálculo. International Thomson Editores
L2	Barnett, Raymod. Precálculo: Funciones y Gráficas. Ed. Mc Graw Hill
L3	Salazar Vázquez, Pedro, Et. Al. Matemáticas IV. Ed. Nueva Imagen

Los usos que le dan a los libros fueron los que se muestran a continuación:

Usos de cada uno de los tres libros más utilizados	Número de profesores que eligieron este libro		
Formas en que usa los Libros	L 1	L 2	L 3
Consulta de temas a preparar para las clases	3	2	2
Selección de ejercicios y/o tareas que el alumno habrá de resolver en clase.	1	2	2
Selección de ejercicios y/o tareas que el alumno habrá de resolver fuera de la clase.	2	2	2
Material de apoyo durante la impartición de la clase.	1	-----	3
Material de apoyo para elaborar exámenes.	1	-----	2
Otra(s). Indique cuál(es)			

De esta información y otras respuestas dadas por los profesores, se observó que los profesores utilizan más de un libro para su curso, y que además, el uso de éstos era mayormente como fuente de información para la preparación y selección de ejercicios para ser planteados y resueltos en clase, y fuera de ella. No obstante, el libro 1 es empleado por los profesores para preparar sus clases en tanto que el libro 3, es usado durante la impartición de las clases. Cabe aclarar que esto no implicaba que fueran los estudiantes quienes lo usaran.

Las razones que ofrecieron los profesores respecto al uso de los libros indicados, fueron catalogadas como de tipo epistemológico y didáctico, esto es, la manifiesta congruencia entre lo que los profesores consideran es la matemática y su enseñanza, y la forma en que se presentan y desarrollan los contenidos en los libros de su elección, aunque hay que decir, que ningún profesor dio muestras explícitas de conocer la propuesta del autor o autores en cuanto al enfoque propuesto en sus libros. A continuación se muestra a manera de ejemplo, una tabla que completaron los profesores y de la cual se obtuvo parte de los resultados mencionados:

Tabla 3: Razones del uso para cada uno de los tres Libros de Texto

Componentes	Razones de los usos antes reportados	L 1	L 2	L 3
Didáctica	Vocabulario accessible	2	---	1
	Los contenidos y ejemplos son precisos (de acuerdo al programa)	1	---	3
	Los ejemplos y ejercicios son familiares para los estudiantes	1	---	1
Epistemológica	El enfoque del Libro es el adecuado	1	---	3
	La estructura y secuencialidad de los contenidos es adecuada	1	1	1
	Se da énfasis a un solo enfoque (Conceptual, práctico, analítico, etc.)	---	---	2
	Pienso en lo fácil o difícil de la asignatura	1	1	2
Cognitiva	El grado de dificultad de los ejemplos y/o ejercicios	1	2	2
	El diseño del Libro resulta atractivo para los estudiantes	---	2	2
Sociocultural	La institución sugiere que se use este Libro	2	1	---
	Mis compañeros profesores y yo decidimos que es adecuado	1	---	1
	He utilizado este Libro desde que era estudiante y lo conozco bien	1	1	---
	Me lo recomendaron alguna vez	2	2	---
	Otra(s). Indique cuál(es)			

De los datos analizados en una encuesta aplicada a los profesores y de la información obtenida en la tabla anterior, se obtuvo que los libros 1 y 2, son usados principalmente porque la institución lo sugiere como libro de texto, pero los profesores externan no estar de acuerdo con el enfoque y grado de dificultad de los ejercicios y/o ejemplos, y lo emplean como fuente de información, mientras que el libro 3, fue elegido por los propios profesores quienes reportan que es el más completo y el que más se adapta al programa.

En este análisis también se obtuvo que los usos que los profesores le dan al libro de texto, es independiente de la formación de los profesores, el sexo, las edades e incluso, del plantel en el que se encuentran laborando. Para analizar el discurso matemático escolar presente en cada libro de mayor uso, se decidió estudiar la forma en que es tratado el concepto “función”, considerando tanto factores explícitos como implícitos, los que se explican a continuación.

- *Factores Explícitos*, se encuentran plasmados al inicio del libro, dentro del prólogo, introducción, prefacio, las notas previas del autor, etc. Se debe observar todo lo que el autor considera importante para el desarrollo del tema, el enfoque que propone, así como las herramientas necesarias para alcanzar sus objetivos propuestos.
- *Factores Implícitos*, se hacen presentes en el tratamiento otorgado al contenido matemático en cierta unidad o capítulo del libro. Se debe observar cómo "vive" este concepto a través del análisis de su tratamiento, es por ello que interesa conocer: ubicación del concepto en el orden temático, forma adoptada para la introducción del concepto (función) y tipo de "argumentos" que le dan sentido.

Después de analizar cada uno de los libros, se pudo observar aspectos invariantes en el tratamiento tales como: la perspectiva del concepto función como una relación y/o correspondencia entre dos conjuntos, la contextualización de dicho concepto en situaciones de modelado y, el uso de representaciones numéricas, gráficas y algebraicas. Lo que cambia en cada uno de estos libros, es el enfoque propuesto por el autor:

- El libro 1 y 2 (Stewart y el Barnett), tienen un enfoque que los autores describen como de "resolución de problemas", entendiendo esto en cada caso, en términos de presentar una gran diversidad de problemas para que el alumno aplique los conceptos vistos a lo largo de cada unidad. La siguiente secuencia: *definición - ejemplos - ejercicios,* define la forma en que es presentada la información.
- El Libro 3 (Salazar), conserva un enfoque constructivista, pues a partir de este se diseñan actividades y secuencia de los contenidos. Se busca promover una interacción dialéctica entre libro y estudiante.

Conjuntando los resultados respecto a las prácticas docentes y el empleo de recursos, en Jarero y Ordaz (2007), se señala que dos de los tres profesores manifiestan concepciones sobre el aprendizaje que los ubican en la tendencia investigativa, situación que moviliza su elección de un libro específico para el desarrollo de sus prácticas educativas. Sin embargo, se identificó que sus prácticas siguen siendo del tipo tradicionalista. Se le otorga al libro, un papel de guía para la preparación y desarrollo de los temas al interior de las aulas. Se deja a lado, la posibilidad de usar al libro como un recurso de apoyo en la construcción de aprendizajes bajo la tendencia investigativa.

En el trabajo desarrollado por López y Sosa (2007) como parte de este estudio, se encontró que los estudiantes y profesores de estos planteles, manifiestan dificultad conceptual, en especial, al trabajar con el concepto función, particularmente, no logran distinguir apropiadamente una función de una ecuación. Tales dificultades se encuentran asociadas a razones de índole cognoscitiva, epistemológica y didáctica. En efecto, a nivel cognoscitivo respecto a los estudiantes, se observó que tal dificultad puede ser asociada al hecho de generar esquemas que responden a situaciones muy similares, de ahí que, los estudiantes asocien ambos conceptos (ecuación y función), con la resolución de problemas que, aunque provienen de naturaleza distinta, la similitud del problema que se plantea crea la ilusión de poder ser resuelto a través de funciones o ecuaciones, sin distinción aparente. También se determinó que la noción de gráfica que poseen los estudiantes, les lleva a establecer una relación de sinonimia entre los conceptos función y ecuación, al notar que las gráficas vistas en sus cursos anteriores (en los cuales se manipulaban ecuaciones) son muy similares a las que se abordan al estudiar funciones.

En el plano de lo epistemológico, se consideró el hecho de que actualmente la enseñanza del concepto función ha tomado una dirección contraria a la génesis histórica del mismo, es decir, la forma última en que fue concebida precede en la enseñanza, a su consideración como herramienta de la actividad matemática o extra-matemática, tal cual se reporta en (Ruiz, 2000). En general y en relación a los profesores, se observó que la evolución de los conceptos, las ideas y nociones que los estructuran, es algo ajeno al bagaje cultural de los profesores.

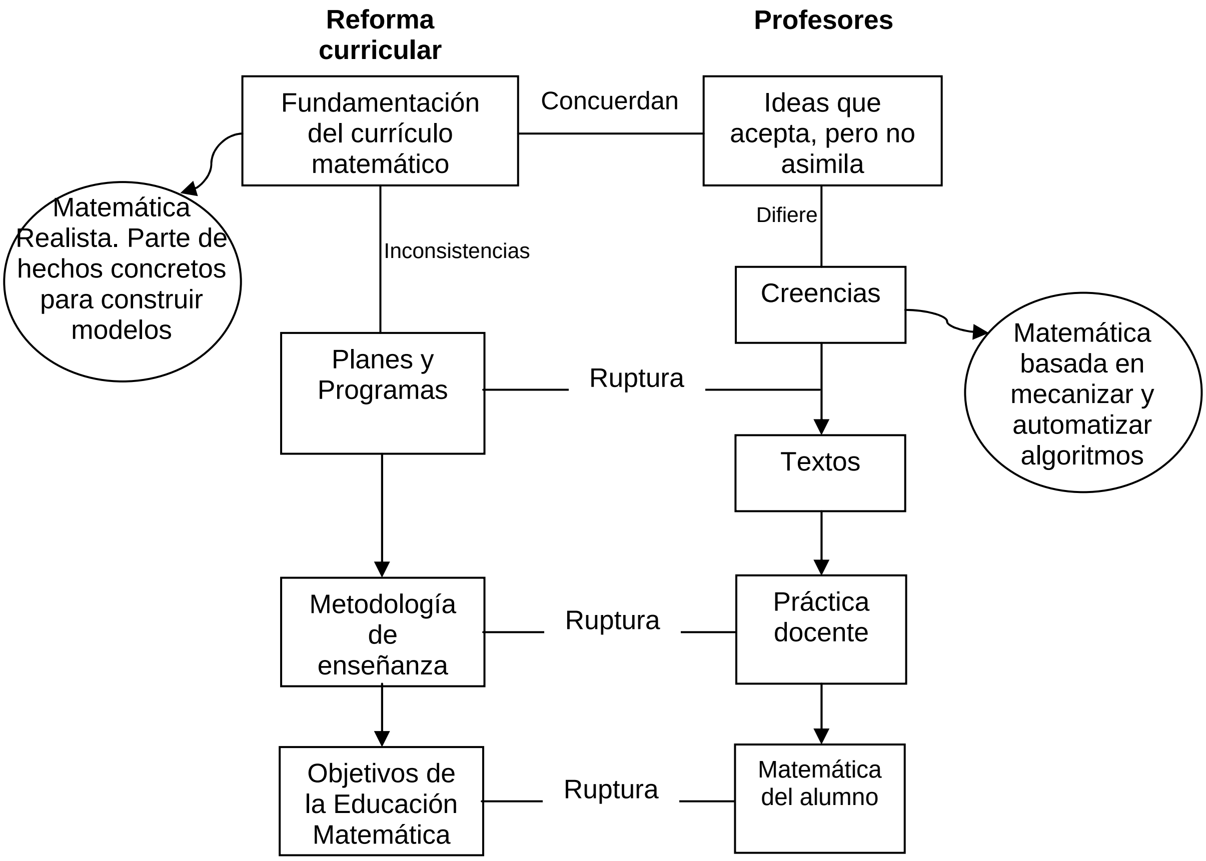
En lo didáctico, se observó que la presentación y tratamiento de los conceptos, particularmente, del concepto función, se da de manera descontextualizada y mediante el planteamiento de ejercicios que suelen ser rutinarios o algorítmicos, excluyendo aquellos problemas ligados al origen y la evolución epistemológica del concepto. Por ejemplo, se observó una secuencia rígida de tres pasos en la enseñanza de funciones, a saber: definición como correspondencia entre conjuntos, notación y representación analítica, seguida de la tabulación de algunos valores para graficarlas; induciendo a mirar al concepto como algo estático, eliminando aspectos asociados a la variabilidad. Tal hecho se traduce en que, durante la resolución de ejercicios en el aula, algunos estudiantes consideraban para algunas expresiones algebraicas o fórmulas, a las variables como incógnitas o viceversa.

Los errores conceptuales y procedimentales que emergieron en los estudiantes entrevistados, son considerados parte del aprendizaje en matemáticas que tendrán que superar. Para los estudiantes de los tres planteles estudiados, la enseñanza de las matemáticas (o mejor dicho, su aprendizaje matemático) está fuertemente relacionado con lo que el profesor como agente didáctico determine. La mayoría de ellos consideran que las matemáticas se tienen que enseñar porque ayudan al crecimiento profesional, donde su enseñanza dependerá de los métodos, técnicas y recursos que el profesor utilice en clases. Este tipo de consideraciones y formas de pensar de los estudiantes, dejan en claro la eminente necesidad de trabajar en la formación de profesores, pues ante los estudiantes de este nivel educativo, son ellos los únicos que determinan el qué y cómo habrá de ser el desempeño de los estudiantes en el corto tiempo.

A manera de reflexión, es así como, las nuevas vertientes del currículo escolar implican modificar otros elementos que se encuentran inmersos en su desarrollo, tal es el caso de los programas de formación de profesores. Una visión prospectiva del currículo de matemáticas en el nivel medio, deja ver la necesidad de un currículo adaptable a los cambios sociales, políticos, científicos y tecnológicos del país, que sea la base para el desarrollo de un pensamiento científico entre los estudiantes, quienes a su vez, puedan entender mejor su entorno y resolver problemas en diferentes contextos.

Disponer de un currículo con dicha visión, requiere un trabajo interdisciplinario en donde el énfasis esté puesto en la resolución de problemas, prácticas educativas centradas en el aprendizaje, en el desarrollo de actividades y situaciones didácticas que promuevan el desarrollo del pensamiento matemático, científico y tecnológico. El aula entonces, deberá entenderse como el espacio de socialización e institucionalización de los saberes, construcción y reconstrucción de significados en las personas sobre los objetos o conceptos matemáticos, un lugar donde se plantean y comparten soluciones. Así, el currículo habrá de transitar de uno centrado en la lógica de los contenidos, a uno centrado en la lógica de las prácticas, donde se muestre el carácter aplicativo de las ciencias para abandonar el aprendizaje memorístico y una enseñanza centrada en la algoritmia.

Tras la integración de estos resultados, es posible apreciar una serie de desarticulaciones en el proceso de estudio de las matemáticas en el bachillerato mexicano, que hace que el discurso matemático escolar que se pretende difundir en el currículo matemático oficial, sea disonante del que se comunica en las prácticas docentes en las aulas de matemáticas, esto es, la concepción que se tiene de qué es la matemática y cómo enseñarla, difiere entre lo plasmado en los programas de matemáticas y las creencias de los profesores. Por consiguiente, se tiene una ruptura entre la matemática que se logra asimilar en situación escolar con aquella que los estudiantes requieren al egresar del bachillerato, como se muestra en el siguiente esquema:



Tal problemática, deja ver la necesidad de resignificar el discurso matemático escolar en dos direcciones: la primera, hacia una reestructuración y reorganización del currículo matemático en tanto a su función y papel social e institucional concebido, la segunda, hacia una "transformación" y fortalecimiento de la práctica docente centrada en procesos más que en estados.

En la primera dirección, se precisa de acciones tales como: reorganizar los contenidos curriculares, considerando la realidad en el contexto de los estudiantes y la posibilidad de transferir conocimientos entre disciplinas, así como, incorporar estrategias didácticas que favorezcan la realización por parte de los estudiantes, de prácticas empíricas y actividades de modelación matemática, que integren la utilidad y funcionalidad de la matemática con lo social, científico y tecnológico.

En la segunda dirección, se requiere pues, de un trabajo interdisciplinario que forje en los profesores una mentalidad científica, con conocimiento de la utilidad y funcionalidad de las ciencias para modelar y resolver problemas; que los provea de metodologías basadas en prácticas sociales para el tratamiento didáctico de las matemáticas, que generen formas de pensamiento y competencias personales en los estudiantes; que les permita comprender e interpretar las reformas educativas y las tendencias en educación matemática, haciéndolos partícipes en la delimitación de criterios y mecanismos de evaluación acordes a los objetivos, contenido y metodología curriculares actuales. Así mismo, que en los programas de profesionalización docente se concreticen proyectos de aprendizaje favorecedores del desarrollo de pensamiento científico y tecnológico, a través de la utilización de tecnologías de información y comunicación, siendo éstos experimentados por los profesores.

Se puede decir que el currículo de las ciencias básicas en el bachillerato tendrá como principal preocupación, la de generar en el alumno una autonomía de pensamiento, enriquecida mediante el debate y el trabajo cooperativo. Los retos serán enfrentados por todos aquellos involucrados en la educación de país, donde los diferentes subsistemas tengan la necesidad de replantear sus funciones con la obligación de mantener una aceptable calidad y funcionalidad educativa.
De modo que, la planeación educativa no debe depender de una sola figura institucional, debe vincular a todos los que se encuentren inmersos dentro del sistema educativo, con especial atención, en los docentes y estudiantes. No se puede asegurar que con sólo presentarles la información concluida en cursos o materiales escritos, el docente capte las ideas esenciales ni la fundamentación de los mismos. Es por tanto indispensable sistematizar el funcionamiento del sistema didáctico.

Bibliografía

Aparicio, E; Balam, A; Sosa, L. (2007). *Una mirada al currículo escolar de ciencias en el nivel medio a través de sus transformaciones*. G. Buendía (Presidente), Memoria de la XI Escuela de Invierno en Matemática Educativa (pp. 154-164). Universidad Autónoma de Yucatán, México.

Brousseau, G. (1995). *Theory of Didactical Situations in Mathematics*. (Balancheff, N.; Cooper, M.; Shuterland, R.; y Warfiel, V., Trads). Boston, London. Cluwer Academia Publlishers.

Castañeda, A. (2006). *Formación de un discurso escolar: el caso del máximo de una función en la obra de L' Hospital y Maria G. Agnesi*. Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa 9(2): 253 -265. Clame, México.

Contreras, L. (1998). *Marco teórico sobre concepciones acerca de la enseñanza y el aprendizaje de la matemática*. Tesis doctoral no publicada. Universidad de Huelva, España. Consultado Abril 2007 en: http://www.uhu.es/luis.contreras/tesistexto/cap2.htm

Cordero, F; Flores, R. (2007). *El uso de las gráficas en el discurso matemático escolar. Un estudio socioepistemológico en el nivel básico a través de los libros de texto*. Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa 10(1): 7-38. Clame, México.

García, J. (s/f). *La didáctica de las matemáticas: una visión general*. Red telemática educativa europea. Consultado en Enero de 2007 en: http://www.gobiernodecanarias.org/educacion/rtee/didmat.htm

Gómez, C., Valero, P. (1997). *Calculadoras gráficas y precálculo: el impacto en las creencias del profesor*. Bogotá, Colombia. Consultado en Abril de 2007 en: http://ued.uniandes.edu.co/servidor/ued/CDRomRIBIE/CAL&PC/PDF/8-Creencia.pdf

Gorgorió, N. Deulofeu, J., Bishop, A., (2000). *Matemáticas y educación. Retos y cambios desde una perspectiva internacional.* Barcelona, España: GRAÓ de IRIF, S. L.

Jarero, M.; Ordaz, M. (2007). *Prácticas Discursivas y libros de texto. Un estudio de sus relaciones en las clases de matemáticas*. G. Buendía (Presidente), Memoria de la XI Escuela de Invierno en Matemática Educativa (pp.131-140). Universidad Autónoma de Yucatán, México.

Josette, A. (1981). *Etude de cas: La Rèforme des "Mathèmatiques Modernes*. Bulletin AFEC No. 26-27.

López, J.; Sosa, L. (2007). ¿*Funciones o ecuaciones*? *dificultades conceptuales y procedimentales*. G. Buendía (Presidente), Memoria de la XI Escuela de Invierno en Matemática Educativa (pp.165-175). Universidad Autónoma de Yucatán, México.

Moscoso, J. (2005). *En torno a la institucionalización del saber matemático en el aula: el caso de la reforma curricular mexicana de* 1993. Revista Iberoamericana de Educación Matemática, Vol. 4, 5 – 16.

Rico, L. (1997). *Dimensiones y componentes de la noción de currículo*. Bases teóricas del currículo de matemáticas en educación secundaria. España: Síntesis, 377-409.

Román, M. (2000). *Currículum y reformas educativas iberoamericanas: una relectura crítica.* Revista Novedades Educativas, 12, 112.

Ruiz, A. (2000): El desafío de las matemáticas (1° edición) [En línea] EUNA. Recuperado en febrero 22 de 2007 de: http://www.cimm.ucr.ac.cr/aruiz/Libros/Desafio_Matematicas/index.htm

Ryve, A.(2004). *Can Collaborative Concept Mapping Creating Mathematically Productive Discourse*? Educational Studies in Mathematics *26:* 157-177.

Sosa, L.; Canché, E. (2008). *Un estudio del currículo matemático en sistemas educativos de nivel medio, una visión prospectiva*. Acta Latinoamericana de Matemática Educativa 21. pp 99-108. Clame. México.

Wenger, E. (1998). *Communities of Practice. Learning, Meaning, and Identity*. Cambridge: Cambridge Univesity Press.

Eddie de Jesús Aparício Landa, Maestro en Ciencias con Especialidad en Matemática Educativa, Licenciado en Matemáticas. Actualmente reside en la ciudad de Mérida Yucatán y labora en la Facultad de Matemáticas de la Universidad Autónoma de Yucatán. Tiene reconocimiento como perfil deseable PROMEP (programa de mejoramiento del profesorado). alanda@uady.mx

Martha Imelda Jarero Kumul; Maestra en Ciencias con Especialidad en Matemática Educativa por CICATA-IPN, Licenciada en Enseñanza de las Matemáticas. Actualmente reside en la ciudad de Mérida Yucatán y labora en la Facultad de Matemáticas de la Universidad Autónoma de Yucatán. Tiene reconocimiento como perfil deseable PROMEP (programa de mejoramiento del profesorado). jarerok@uady.mx

María Guadalupe Ordaz Arjona; Maestra en Enseñanza de las matemáticas con salida terminal en Educación, Licenciada en Enseñanza de las Matemáticas. Actualmente reside en la ciudad de Mérida Yucatán y labora en la Facultad de Matemáticas de la Universidad Autónoma de Yucatán. Tiene reconocimiento como perfil deseable PROMEP (programa de mejoramiento del profesorado). oarjona@uady.mx

UNIÓN REVISTA IBEROAMERICANA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA

Junio de 2009, Número 18, páginas 73 – 80
ISSN: 1815-0640

Una sinopsis de los trabajos de investigación presentados en Delta 07: algunas tendencias en la investigación en Educación Matemática

Víctor Martínez Luaces; Anne D'Arcy

Resumen

¿Cuáles son los principales temas que interesan a los investigadores en Educación Matemática del mundo y que luego se transfieren a los educadores? Este trabajo pretende analizar y categorizar las cuatro áreas fundamentales que se observaron en Delta 07: el libro de memorias del evento y el número especial dedicado al congreso por iJMEST (the International Journal of Mathematical Education in Science and Technology). Esas cuatro áreas principales podrían denominarse: Tecnología y Visualización, Resolución de Problemas, Aplicaciones y Modelado, Evaluación y Estudiantes Ingresantes. También se abordaron temas que tienen que ver con las Teorías de Aprendizaje, Grupos Minoritarios, Disminución en la Matrícula de Futuros Matemáticos e Intuición Probabilística, entre otros. ¿Hay algún espacio para los cambios radicales que realmente puedan modificar la realidad actual? Se espera que este artículo pueda estimular ideas innovadoras en Educación Matemática para este siglo que se inicia y de alguna forma, propiciar esos cambios.

Abstract

What are the main areas that stimulate researchers to investigate and explore, collaborate worldwide and communicate to fellow educators? This paper will detail the four main themes that categorise the papers in both Delta-07 conference proceedings and the special Delta-07 edition of International Journal of Mathematical Education in Science and Technology. The four main themes are Technology and Visualisation Methods, Problem-solving and Modelling Applications, Assessment Techniques and Incoming Students. Other papers featured learning theories, minority groups, decline in the recruitment of mathematicians and probability intuition. Is there room for radical change or ideas to complement the structures already supporting mathematical education? It is hoped that this brief insight will stimulate innovative ideas that will progress the advancement of mathematics education into the new century.

Resumo

Quais são os principais temas que interessam aos pesquisadores em Educação Matemática de todo o mundo e que logo se transferem aos educadores?. Este trabalho pretende analisar e categorizar as quatro áreas fundamentais que se observaram nas Delta 07: o livro de memórias do evento e o número especial dedicado ao congresso por iJMEST (the International Journal of Mathematical Education in Science and Technology). Essas quatro áreas principais poderiam denominar-se Tecnologia e Visualização, Resolução de Problemas, Aplicações e Modelado, Avaliação e Estudantes Ingressantes. Também se abordaram temas que tem que ver com as Teorias de Aprendizagem, Grupos Minoritários, Diminuição na Matrícula de Futuros Matemáticos e Intuição Probabilística, entre outros. Há algum espaço para as mudanças radicais que realmente possam modificar a realidade atual?. Espera-se que este artigo possa estimular idéias inovadoras em Educação Matemática para este século que se inicia e de alguma forma, propiciar mudanças.

1. Introducción

Este artículo intenta identificar las principales tendencias en Educación Matemática referidas al nivel terciario/universitario, tomando como insumos los trabajos presentados en el sexto congreso del hemisferio sur (*Sixth Southern Hemisphere Conference on Undergraduate Mathematics and Statistics Teaching and Learning,* también conocido como *Delta '07),* que tuvo lugar en El Calafate, Argentina en Noviembre de 2007. Los mejores trabajos de este evento fueron publicados en un numero especial del *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology (iJMEST)* [1], dedicado exclusivamente al congreso Delta '07 y luego, una segunda selección de artículos se publico en el *Proceedings Book*, que llevó el mismo título que el tema del congreso, i.e., *Vision and Change for a New Century* [2].

Una vez analizadas las principales tendencias y algunas otras también importantes, pero minoritarias (secciones 2 y 3 de este artículo), se tratará de establecer algunas consecuencias importantes (secciones 4 y 5). Concretamente, a partir de la revisión de la primera parte de este articulo, resulta posible mencionar dos elementos comunes a todos los trabajos publicados:

- Todos los trabajos están relacionados con innovaciones, mejoramiento de la práctica docente, etc., y otras sugerencias e ideas que procuran que los estudiantes accedan a la mejor Educación Matemática posible.
- En todos los trabajos publicados, se proponen ideas innovadoras e interesantes, pero las mismas, o su eventual implementación no implican cambios estructurales profundos.

Este último elemento común, que también es observable en la mayoría de los congresos especializados, sugiere el planteo de varias preguntas, como las que se formulan a continuación:

a) ¿No resultan necesarios los grandes cambios?, o alternativamente, los cambios no estructurales: ¿Son suficientes para resolver los principales problemas que enfrenta la Educación Matemática en el nivel terciario/universitario?
b) ¿Es este el mejor momento para realizar cambios de fondo?
c) ¿Están las universidades y las instituciones terciarias realmente preparadas para los cambios profundos? ¿Están dichas instituciones genuinamente interesadas en aceptar sugerencias que impliquen cambios verdaderos y no solamente en la superficie? Si la respuesta fuese negativa, ¿Cuáles serían las razones de dicha actitud?

Estas cuestiones y otras relacionadas son analizadas con mayor detalle en la segunda parte de este artículo.

2. Las principales tendencias

Hay cuatro temas fundamentales en el libro de memorias del evento (Proceedings Book) y en el número especial de la revista iJMEST, dedicado al congreso, los mismos son los siguientes:

2.1. Tecnología/Visualización:

En la mayoría de los casos la tecnología aparece combinada o de alguna manera relacionada con la visualización de conceptos, técnicas, procedimientos, etc. En otros casos la tecnología esta propuesta como fuente de motivación y/o como una herramienta práctica, destinada a evitar cálculos largos y engorrosos.

Es llamativo que en esta edición del congreso Delta, no hubo trabajos sobre educación a distancia, que si aparecían regularmente en ediciones anteriores.
Ninguno de los trabajos presentados en Delta 07 propone sustituir la "enseñanza tradicional" (clases teóricas, grupos de práctico, etc.) por algo totalmente diferente basado en el uso de la tecnología. Por lo tanto, puede concluirse que la tecnología es propuesta más como un complemento que como un sustituto de la enseñanza tradicional. La idea es, en pocas palabras, hacer más fácil y/o más interesante la exposición de los contenidos matemáticos habituales, pero no sustituirlos por otros diferentes.

2.2. Resolución de Problemas/Modelado y Aplicaciones:

Casi todos los trabajos sobre Resolución de Problemas están de un modo u otro ligados a las actividades de Modelado y/o a las Aplicaciones de la Matemática.
El recíproco de la afirmación anterior también es verdadero: todos los autores que escribieron sobre Modelado y Aplicaciones dejan traslucir su interés por la Resolución de Problemas, que de una forma u otra se incorpora a sus artículos.

No abundan las propuestas "revolucionarias" como por ejemplo, dejar de lado los contenidos matemáticos que figuran en el programa de un curso y concentrarse únicamente en resolver problemas sin preocuparse de las exigencias institucionales en términos de la evaluación, o de los contenidos mínimos a dictar. De hecho, sólo se presentó un ejemplo de un curso de este tipo, inmerso en una currícula con varios cursos tradicionales.

Como en el caso de la Tecnología/Visualización, todas las propuestas vinculadas a la Resolución de Problemas y al Modelado y las Aplicaciones, pueden ser consideradas como un complemento. En efecto, en los trabajos presentados, aparecen como actividades interesantes, dignas de ser tomadas en cuenta, pero nadie asegura o sugiere que representen "la solución" a los problemas de la Educación Matemática en el siglo XXI.

En opinión de los autores de este artículo, luego de la lectura crítica de todos los trabajos presentados, surge que la razón principal para incluir las actividades de Modelado y Aplicaciones (y tal vez también se pueda incluir en esta lista a la Resolución de Problemas), es la motivación. En un segundo lugar, surge el argumento atendible, de propiciar una mejor transición del mundo académico al mundo del trabajo, lo que evidentemente ocurre cuando el alumno ha tenido oportunidad de realizar tareas de modelado, analizar problemas de aplicación, etc. Sin embargo, cabe mencionar que esta segunda razón o justificación no ha sido mencionada con tanta frecuencia por los autores, como lo ha sido la motivación.

2.3. Evaluación:

Hay varios trabajos presentados sobre la evaluación en sus varias acepciones: evaluación de los estudiantes, evaluación del desempeño docente, e incluso, evaluación institucional.

Respecto a la última de las nombradas, uno de los trabajos publicados provee una gran cantidad de datos estadísticos, que involucran a varias instituciones. Dichas estadísticas sugieren que hay problemas que atraviesan diversas instituciones y que se puede suponer que son comunes a todas o a casi todas las universidades. Esto lleva a pensar que el tratamiento de dichos problemas comunes sería mas que interesante, sin embargo, el enfoque elegido por los autores de estos trabajos es distinto. En efecto, en la mayoría de los trabajos en este rubro, los autores se limitan más a una tarea de diagnóstico que a la realización de propuestas concretas que posiblemente serían difíciles de implementar en forma general.

Algo similar sucede con la mayoría de los trabajos sobre evaluación estudiantil o sobre evaluación docente. Posiblemente, la única excepción proviene de un artículo donde la evaluación estudiantil es utilizada como punto de partida para el desarrollo personal del alumno. En casi todos los otros trabajos, parece haber un sesgo hacia la realización de diagnósticos de situaciones determinadas, más que hacia las propuestas concretas. No son muy habituales las propuestas de evaluaciones innovadoras, o si las hay, todavía aparecen en forma muy fermental. Por ejemplo, uno de los autores de este artículo comenta una experiencia basada en la realización de pequeños proyectos, ejecutados por los alumnos y el otro autor, propone una experiencia en que se utilizan juegos de cartas, pero en ninguno de estos casos se propone cambiar la evaluación tradicional. Es decir, que estas propuestas deben ser consideradas mas como estrategias didácticas que como sugerencias de cambios fundamentales para los próximos años.

2.4. Estudiantes ingresantes:

Este es indudablemente uno de los temas fundamentales tanto en el libro de memorias del evento (Proceedings Book) como en la revista (iJMEST). Las propuestas elegidas por los autores para la solución de los problemas de los alumnos que ingresan son interesantes y bastante efectivas, pero no son absolutamente novedosas. En efecto, se proponen pruebas de diagnóstico, cursos de nivelación, cursos de apoyo, y otras propuestas similares que combinan varios de estos elementos. Casi todos los autores sugieren metodologías, que en esencia implican enseñar más despacio, en cursos más lentos y prolongados, con menos alumnos, etc. y especialmente adaptados para estos estudiantes en riesgo. En algunos casos también la tecnología es utilizada para estos fines, particularmente en cursos de nivelación o de apoyo.

Algunos trabajos mencionan otras dificultades (no estrictamente vinculadas a la Matemática) en el trabajo con esta población en riesgo. Entre ellos, cabe mencionar los siguientes: dificultades con la lecto-escritura, carencias en sus habilidades de comunicación, problemas de auto-organización y auto-gestión, etc. Por este motivo, en varios cursos para estudiantes ingresantes, se incluyen en los programas no solamente los contenidos matemáticos, sino también otros temas que intentan desarrollar las habilidades que no tienen o que tienen solo en forma muy primitiva para lo que realmente se requiere a nivel de primer año de una carrera universitaria.

Una vez más, como en otros trabajos ya comentados, en las otras áreas (Tecnología/Visualización, Resolución de Problemas/Modelado y Aplicaciones y Evaluación), hay varios artículos muy interesantes e importantes, que muestran experiencias exitosas, pero que no contienen "propuestas revolucionarias" como ya fue observado con anterioridad.

3. Otras tendencias minoritarias.

Hay otros trabajos presentados (unos pocos en cada grupo) que están dedicados a otros importantes aspectos de la Educación Matemática, por ejemplo: teorías sobre el aprendizaje, grupos minoritarios (estudiantes que hablan otros idiomas, cursos para alumnos no videntes, etc.), perfeccionamiento de profesores extranjeros, intuición probabilística, etc.

Otros artículos publicados tienen que ver con ciertas tendencias observables en la actualidad, como por ejemplo, la disminución en la matricula de futuros matemáticos, o la implementación de un plan de estudios común para los ingenieros en los países europeos, por citar algunos ejemplos notables. Sólo unos pocos trabajos son "fuertemente innovadores" como es el caso de un trabajo doble sobre Curvas Emparentadas (la primera parte es una mirada retrospectiva y la segunda contiene una cierta propuesta para el futuro), otro sobre Geometría Dinámica, o los trabajos sobre Cadenas de Markov o Estadística Bayesiana, entre otros. Ahora bien, en todos estos casos, el contenido innovador es expuesto más que nada como un ejemplo motivador, o como un complemento a lo ya existente.

Ninguno de los autores propone reemplazar los contenidos habituales en los cursos de Cálculo, Geometría o Estadística, por lo menos en lo que se refiere a los cursos que realizan la mayoría de los alumnos universitarios en las carreras tradicionales. De hecho, la propuesta que realizan los autores en los artículos citados, no consiste en sustituir los contenidos tradicionales por nuevos tópicos mas avanzados, o de otras áreas de la Matemática. Por el contrario, lo que se intenta mostrar es un punto de vista complementario que puede ser tenido en cuenta para un segundo o tercer curso en una determinada materia. A modo de ejemplo, se podrían incluir tópicos de Estadística Bayesiana en un segundo o tercer curso de Estadística, o realizar un taller de Geometría Dinámica como complemento de un curso tradicional de Geometría.

4. Los elementos comunes.

Como ya se mencionó anteriormente, es posible encontrar un par de elementos comunes a todos los trabajos publicados (o al menos, a la gran mayoría de los mismos). Dichos elementos comunes son los siguientes:

- Todos los trabajos (o casi todos) tienen directa relación con lo que podríamos denominar “buenas prácticas de enseñanza”, donde el enfoque puede variar desde el uso de tecnología, el modelado, la enseñanza en pequeños grupos, o la consideración de factores afectivos, entre otras opciones.
- No hay propuestas realmente “revolucionarias”, o para ser más concretos: casi todos los autores proponen ideas interesantes, experiencias exitosas, etc., pero no hay propuestas que sugieran cambios de fondo con respecto a lo que se hace actualmente en la mayoría de las instituciones.

En función de lo anterior, es interesante plantearnos a qué puede deberse esa eventual carencia de propuestas de cambios estructurales, de fondo, que es prácticamente una constante en todos los congresos actuales de Educación Matemática. En efecto, en la gran mayoría de los congresos y revistas especializadas, se presentan enfoques alternativos, experiencias exitosas, etc., pero no se proponen cambios profundos en las estructuras existentes. Este tema, que debería importar por igual a docentes e investigadores, será analizado con mayor detalle en la próxima sección.

5. La falta de propuestas “revolucionarias” y sus posibles razones

Al menos en la experiencia personal de uno de los autores de este trabajo, los cambios profundos, por lo general, sólo encuentran un ambiente propicio en los cursos de postgrado, pero no en los cursos de grado tradicionales, salvo raras excepciones. Esto último tiene su razón de ser: en muchas universidades, las propias trabas institucionales hacen muy difíciles, o eventualmente imposibles los cambios de fondo, al menos, a nivel de cursos de grado, donde muchas veces solamente los cambios “cosméticos” suelen ser bienvenidos.

En los cursos de postgrado y en otras experiencias similares (cursos de perfeccionamiento docente, cursos de educación permanente, etc.) es posible otro enfoque totalmente distinto. A modo de ejemplo, es perfectamente aceptable hacer la evaluación sin tomar exámenes (por ejemplo, a través de pequeños proyectos o exposiciones orales, entre otras opciones), el programa suele ser muy flexible, los contenidos pueden ser expuestos por los alumnos en lugar de hacerlo el docente.

Sin embargo, esto no es meramente una cuestión de pregrado o postgrado. Por ejemplo, cuando uno de los autores de este articulo estaba cursando su Licenciatura en Matemática (en la década de los 80), habían muy pocos estudiantes en dicha carrera y por lo tanto, las experiencias fueron más o menos las mismas que las de los cursos de postgrado actuales. Concretamente, en los dos últimos años de la carrera en aquella época, los pocos estudiantes matriculados, eran al mismo tiempo alumnos de Licenciatura en Matemática y ayudantes de cursos prácticos del propio Departamento de Matemáticas de la Facultad de Ciencias en cursos de servicio. Por ese motivo, había una relación muy coloquial entre los docentes y los alumnos de la carrera, ya que en última instancia todos eran de alguna manera colegas y compañeros de trabajo. Esto hacía que profesores y alumnos estuvieran en contacto permanentemente, en un grupo de camaradería, pequeño y amistoso, donde todos se conocían y se respetaban, dando lugar a experiencias interesantes, que hoy en día parecerían un tanto excepcionales y sorprendentes, por ejemplo:

- Algunos profesores daban a los alumnos, o a grupos de ellos, diferentes tópicos para preparar y exponer en clase. Muchas veces, el curso tomaba forma de seminario y estas exposiciones pasaban a ser parte de la evaluación del curso, sustituyendo parcialmente a los exámenes tradicionales. Más aún, en algunos cursos finales de la carrera, los exámenes eran totalmente sustituidos por dichas exposiciones orales en un ambiente bastante más informal que el de un examen frente a un tribunal.
- Otros profesores acostumbraban a evaluar sus cursos a través de pequeños proyectos y en muchos casos, dichos proyectos eran seleccionados por los propios estudiantes, de tal modo que los mismos tenían directa relación con sus propios intereses e inquietudes.
- En ocasiones, cuando el número de estudiantes era extremadamente reducido (por ejemplo, cursos de dos o tres alumnos), las clases eran reemplazadas por un régimen de lecturas dirigidas, utilizando los textos sugeridos por los docentes. Una o dos veces al mes, el estudiante tenía la oportunidad de hacer preguntas al docente, consultar dudas, etc., directamente en la oficina del profesor, que como ya se comentó, en los hechos era también un compañero de trabajo del alumno en alguna otra materia.

Había también otras situaciones interesantes de analizar, pero estas que se mencionaron anteriormente son más que suficientes para establecer diferencias notorias con las prácticas habituales en nuestras clases actuales. En aquella época, aún los profesores mas “tradicionales” solían poner un examen escrito y dejar a los alumnos solos, apelando al auto-control, al respeto y a la confianza existente entre los distintos grupos intervinientes (docentes, alumnos, administrativos, etc.). Una experiencia de este tipo sería sencillamente imposible de reproducir en la actualidad, incluso en cursos de pocos estudiantes.

Probablemente, en otras partes del mundo, los profesores encuentren problemas similares a los anteriormente mencionados (que de alguna forma implican una cierta pérdida de confianza mutua entre profesores y alumnos). Esto no debería sorprender, ya que en los últimos 30 años del siglo que terminó, la población universitaria mundial se multiplicó por seis [3], con consecuencias dramáticas en varios aspectos. En efecto, no sólo se ha dado un cambio cuantitativo, sino que la calidad de la enseñanza también ha experimentado cambios importantes hacia estándares más bajos que los de décadas atrás.

Por lo tanto, volviendo a las cuestiones planteadas en la primera sección de este artículo, parecería que hay un cierto consenso en cuanto a que los cambios son necesarios y que ha llegado el momento de hacerlos, pero de alguna manera, la cantidad de alumnos y el nivel de calidad actual de la enseñanza terciaria y/o universitaria hace muy difícil el poder llevarlos a la práctica. Estas dificultades institucionales parecerían ser la principal razón por la cual los investigadores en

Educación Matemática se muestran reticentes a proponer grandes modificaciones que puedan implicar cambios de fondo en la situación actual.

Las trabas y restricciones que las propias instituciones plantean, voluntariamente o no, parecen ser entonces, el principal escollo a vencer. De otro modo, resulta difícil creer que no existen mas ideas verdaderamente innovadoras, o que nadie esta dispuesto a ponerlas en practica.

Bibliografia

D'Arcy Warmington, A., Martinez Luaces, V., Oates, G. and Varsavsky, C. (Eds.). (2007). *Vision and Change for a new Century,* Proceedings of Calafate Delta '07, Sixth Southern Hemisphere Conference on Undergraduate Mathematics and Statistics Teaching and Learning.

Martinez Luaces, V., Varsavsky, C. (Eds.). (2007). *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*.

Martínez Luaces, V. (2000). *Enseñanza de la Matemática en la Educación Superior: Análisis de algunas tendencias*. Conferencia dictada en el V Encuentro de Didáctica de la Matemática del Cono Sur. Universidad de Santiago de Chile. Chile.

Víctor Martínez Luaces es Ingeniero Químico y Licenciado en Matemática. Universidad de la Republica, en Montevideo, Uruguay. En dicha institución se desempeñó durante más de dos décadas como Profesor de Matemática y de Fisicoquímica, en cursos de grado para cuatro facultades distintas. Actualmente continúa en la misma universidad, en Facultad de Ingeniería, como consultor matemático y profesor de cursos de postgrado.
Investiga en Matemática Educativa y en Matemática Aplicada y tiene más de 50 trabajos publicados y ás de 100 presentaciones a congresos en los cinco continentes.
Fue el organizador del Sexto Congreso de Educación Matemática del Hemisferio Sur (El Calafate Delta 07, en Argentina), Editor Invitado del Internacional Journal of Mathematical Education in Science and Technology (Londres, Noviembre de 2007) y es asesor y evaluador de diversas revistas científicas y congresos especializados. victoreml@gmail.comvictoreml@gmail.com

Anne D'Arcy tiene un Grado con honores en Ciencias Físicas, Matemáticas y Computación en la Brookes University, en Oxford y obtuvo su calificación docente en la Universidad de Warwick, Inglaterra.
Actualmente trabaja en primeros cursos de Matemáticas y Estadística, como asignaturas de servicio, en la Curtin University of Technology, Australia.
Investiga en innovaciones para la enseñanza de matemáticas a nivel de primer año de universidad y en hacer más atractiva la matemática para los alumnos de este nivel.
Ha presentado trabajos de investigación en diversos congresos internacionales y forma parte del Grupo de Educadores de Matemáticas de Western Australia, que incluye profesionales de Diseño Curricular, Formación de Profesores (docentes de primaria y secundaria) y otros expertos en Educación Matemática.

UNIÓN
REVISTA IBEROAMERICANA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA

Junio de 2009, Número 18, páginas 81 – 92
ISSN: 1815-0640

A construção de uma tabela trigonométrica

Vincenzo Bongiovanni

Resumo

Neste artigo pretende-se mostrar, a partir de um problema histórico, as etapas de construção de uma tabela trigonométrica. O texto seguiu em grande parte as idéias de Ptolomeu que foram muito bem sintetizadas por Aaboe no seu excelente livro “Episódios da história antiga da matemática”. Para tornar o texto mais próximo da linguagem atual, adotou-se para as demonstrações a notação moderna e alguns resultados do Cálculo Diferencial.

Abstract

This article intends to show, from a historical problem, the steps for the construction of a trigonometric table. The text mostly followed Ptolomy’s ideas that were clearly synthesized by Aaboe in his book “the ancient history of mathematics episodes.” To make the text closer to the current language, it was adopted into the proofs in modern notation and some results of differencial calculus.

Resumen

En este artículo se pretende mostrar, a partir de un problema histórico, las etapas de construcción de una tabla trigonométrica. El texto siguió en gran parte las ideas de Ptolomeu que fueron muy bien sintetizadas por Aaboe en su excelente libro “Episodios de la historia antigua de la matemática”. Para hacer que el texto esté más próximo del lenguaje actual, se adoptó para las demostraciones la notación moderna y algunos resultados del Cálculo Diferencial.

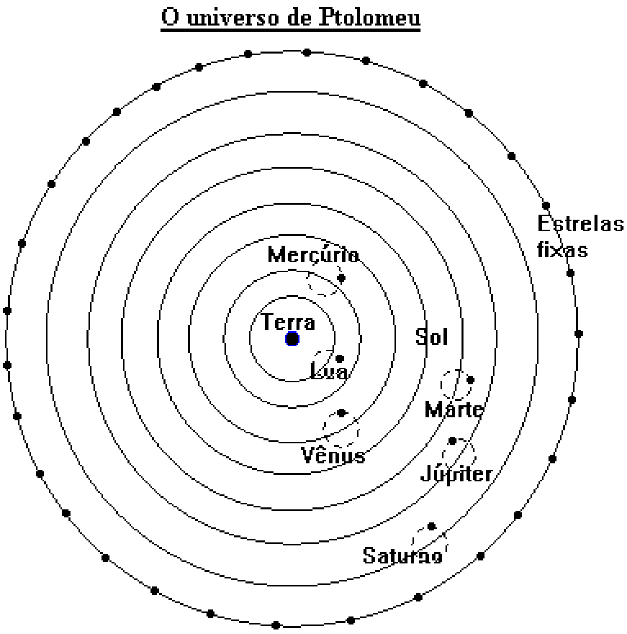
O sistema geocêntrico de Ptolomeu

Por volta de 250 a.C, Aristarco de Samos, propôs o revolucionário modelo heliocêntrico para o nosso universo: a Terra gira diariamente em torno do seu eixo e anualmente em torno do Sol. Além de ter suposto o Sol como centro do sistema planetário, ele calculou a distância Terra-Sol em função da distância Terra-Lua.

Por volta de 200 a.C, Eratóstenes calculou de uma maneira engenhosa o raio da Terra a partir da simples observação de que na cidade de Assuan situada no hemisfério Norte a uma latitude de 23^{o} , no dia 21 de junho, ao meio dia, os raios do Sol incidiam perpendicularmente sobre esta cidade.

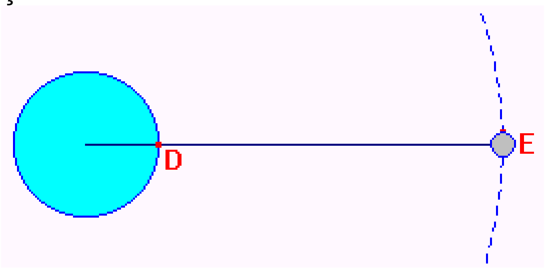
Hiparco de Nicéia(180a.C-125a.C), por volta de 150a.C, escreveu um tratado de 12 livros sobre cordas em uma circunferência que não chegou até nós. Construiu uma tabela de cordas que é equivalente a uma tabela de senos. Hiparco fez um cálculo da distância Terra-Lua a partir da simples contagem do tempo de um eclipse lunar. Para fazer este cálculo ele utilizou tabelas trigonométricas talvez de origens babilônicas.

Cláudio Ptolomeu, 150D.C escreveu uma obra chamada o *Almagesto*, cuja finalidade era a astronomia. Durante 14 séculos essa obra permaneceu como a bíblia da astronomia. Eram 13 livros onde ele defendia uma estrutura, com a Terra no centro do universo e todos os astros girando em torno dela, chamada de sistema geocêntrico. Ptolomeu supôs a lua e os planetas em movimento uniforme sobre círculos chamados epiciclos. Por sua vez, o centro de um epiciclo estaria se movendo uniformemente ao longo de um outro círculo maior chamado deferente. No livro I, Ptolomeu constrói uma tabela trigonométrica que seria a ferramenta principal de suas descobertas astronômicas.



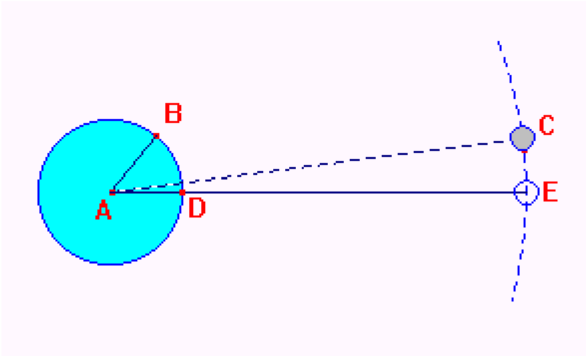
O cálculo da distância Terra-Lua por Ptolomeu

Ptolomeu propôs um método bastante simples par calcular a distância Terra-Lua. Vamos imaginar um observador na posição D da superfície da Terra que observa a Lua na posição E

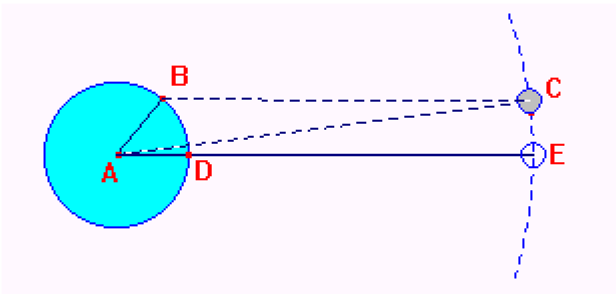


.

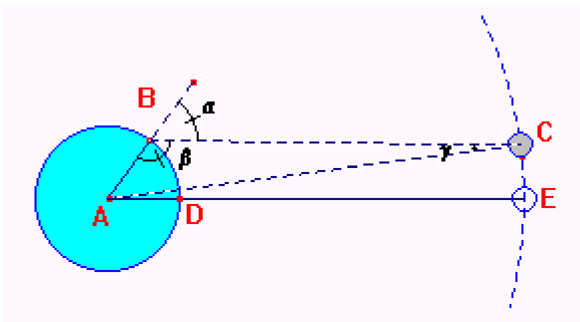
Após um tempo t, o observador estará na posição B e a lua na posição C:



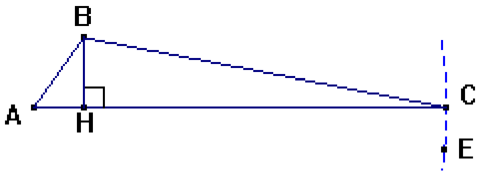
Vamos supor t=4 horas. Nesse caso BAD mede 60^o. Sabe-se que a Lua dá um giro de 360^o ao redor da Terra em 27,3 dias. Portanto após 4 horas o ângulo CAE será 2^o . Donde o ângulo CAB medirá 58º



Por observação direta o ângulo α pode ser obtido. Nesse caso com t = 4horas teremos α = 58,8°. Conseqüentemente β = 121,2° e m(BCA) = 0,8°



Consideremos o triângulo ABC:
O ângulo BAC mede (60^o –2^o) = 58^o. De sen 58^o = BH/6300, obtémse BH desde que sem 58^o fosse conhecido. AB é o raio que era conhecido na época. Aplicando o teorema de Pitágoras no triângulo AHB obtémse AH. De sen 0,8^o = BH/BC, (supondo sem 0,8^o conhecido) obtém-se BC. Aplicando o teorema de Pitágoras no triângulo BHC obtém-se CH. Logo a distância Terra-Lua é AH+HC.



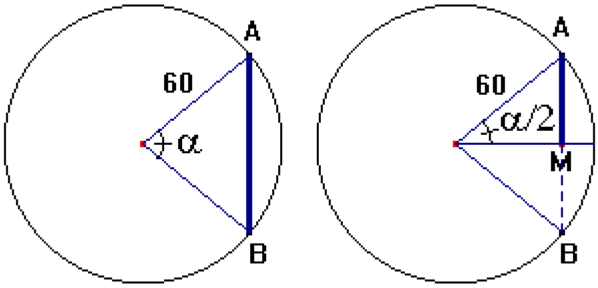
A solução do problema depende apenas de uma **tabela de senos**

A construção de uma tabela trigonométrica por Ptolomeu

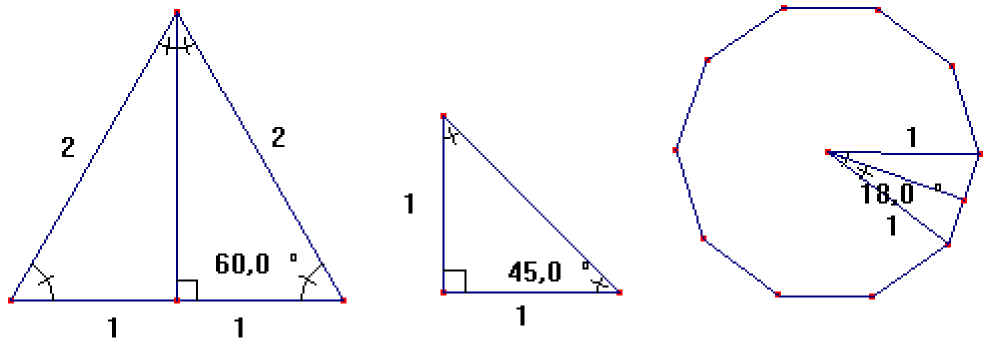
Ptolomeu construiu uma tabela de cordas dos arcos de 1^o até 180^o de meio em meio grau nos capítulos 10 e 11 do seu livro I. Faremos a construção da tabela utilizando o seno no lugar da corda.

A relação entre o **seno** de um ângulo α e a **corda** subentendida por esse ângulo numa circunferência de raio 60 é crd α =120.sen$\frac{\alpha}{2}$. De fato, na figura abaixo temos:

sen$\frac{\alpha}{2}$ = $\frac{AM}{60}$ = $\frac{\frac{AB}{2}}{60}$ = $\frac{AB}{120}$. Portanto AB=corda α =120.sen$\frac{\alpha}{2}$



Seno e co-seno dos ângulos de 30^o, 60^o, 45^o e 18^o



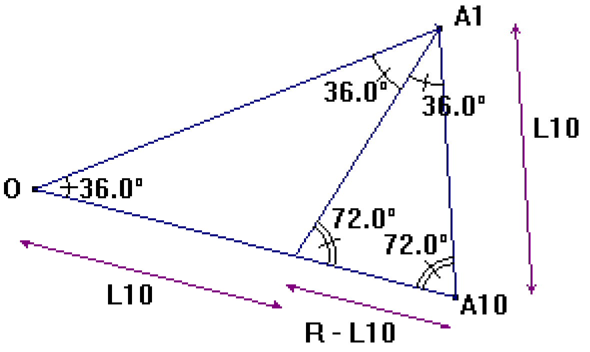
sen 60° = cos 30° = 0,8660
sen 30° = cos 60° = 0,5000

sen 45° = 0,7071
cos 45° = 0,7071

sen18° = 0,3090
cos18° = 0.9515

Cálculo do sen18^{o} e cos18^{o}

O ângulo central de um decágono regular inscrito numa circunferência de centro O e raio R mede 36^{o}



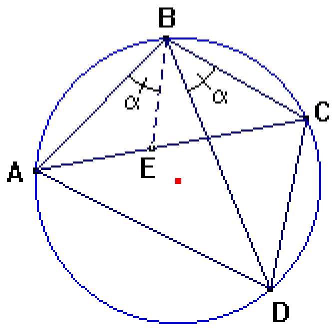
Pelo teorema da bissetriz interna temos: $\frac{R}{L10} = \frac{L10}{R - L10}$

Resolvendo a equação do segundo grau obtém-se $L_{10} = \frac{R\sqrt{5}}{2} - \frac{R}{2}$

Portanto sen18^{o} = $\frac{\frac{L10}{2}}{OA1} = \frac{-1+\sqrt{5}}{4}$ e sendo M o ponto médio de A_1A_{10}, o teorema de Pitágoras aplicado no triângulo OMA_1 fornece OM. Portanto cos18^{o} $= \frac{OM}{OA1}$

O teorema de Ptolomeu

Ptolomeu demonstra um teorema que será o ponto de partida para a obtenção das fórmulas trigonométricas. O enunciado do teorema de Ptolomeu, em linguagem moderna, é:
"A soma dos produtos das medidas dos lados opostos de um quadrilátero inscritível é igual ao produto das medidas das diagonais. Na época de Ptolomeu não tinha sentido multiplicar dois segmentos. Ptolomeu enunciava o teorema de uma outra maneira: *o retângulo construído sobre AC e BD é igual ao retângulo construído sobre AB e CD mais o retângulo construído sobre BC e AD*".

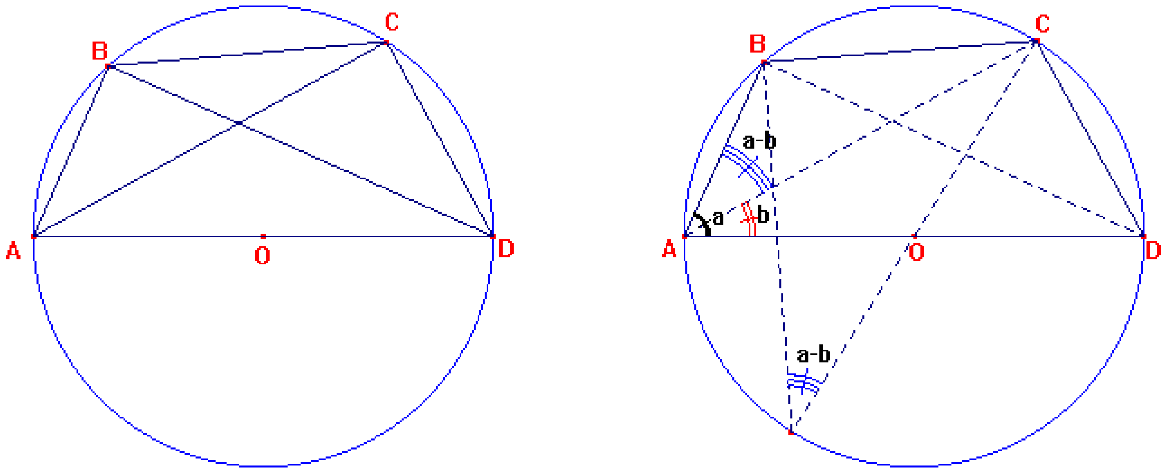


AB.CD+BC.AD=AC.BD

Seja BE um segmento tal que o ângulo ABE seja igual ao ângulo DBC. O triângulo ABE é semelhante ao triângulo BCD. Logo $\frac{AE}{CD}=\frac{AB}{BD}$. Portanto AE.BD=CD.AB (1)

O triângulo BEC é semelhante ao triângulo BAD. Portanto $\frac{EC}{AD}=\frac{BC}{BD}$. Portanto EC.BD=AD.BC (2). Adicionando membro a membro (1) e (2) teremos: AE.BD+EC.BD=CDAB+AD.BC. Donde BD(AE+EC)=CD.AB+AD.BC.
Finalmente a relação de Ptolomeu AC.BD=CD.AB+AD.BC

Aplicando o teorema de Ptolomeu num quadrilátero com um lado sendo o diâmetro da circunferência temos:



AD.BC = AC.BD - AB.CD (1)

Mas sen b=CD/2R (2), cos b=$\frac{AC}{2R}$ (3), sen a=$\frac{BD}{2R}$ (4), cos a= $\frac{AB}{2R}$ (5) e

sen(a-b)= $\frac{BC}{2R}$ (6)

Substituindo (2), (3) (4), (5) e (6) em (1) teremos : sen(a-b)=sena.cos b- sen b.cos a
Um raciocínio análogo nos leva às fórmulas sen(a+b), cos(a-b) e cos(a+b). Essas 4 fórmulas da soma e da diferença costumam ser chamadas de fórmulas de Ptolomeu.

Iniciando a construção da tabela trigonométrica

Sendo conhecidos os senos e co-senos de ângulos de 30 º, 60 º, 45 º e 18 º e utilizando a fórmula sen(a-b)=sena.cos b- sen b.cosa obtém-se:

sen12 º = sen(30 º -18 º) = 0,2079

sen15 º = sen(45 º -30 º) = 0,2588

sen 3 º = sen(15 º -12 º) = 0,0523

sen 9 º = sen(12 º -3 º) = 0,1564

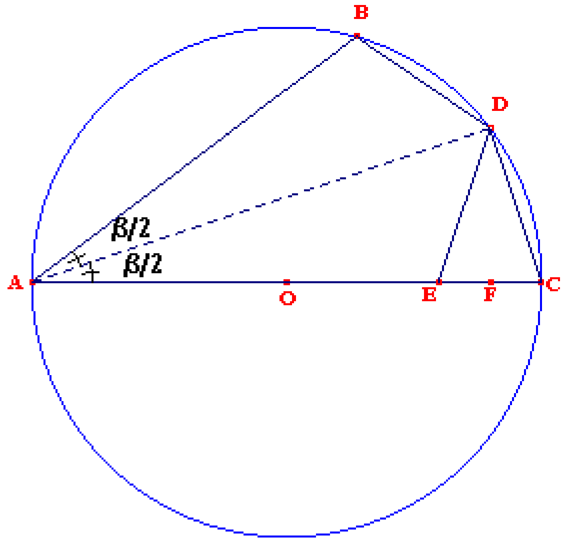
sen 6º = sen(9º -3º) = 0,1045

sen 3º = sen(6º -3º) = 0.0523

Como prosseguir?

Uma nova idéia: a fórmula do arco metade

Considere um quadrilátero ABDC inscrito numa circunferência de raio R e centro O (figura abaixo) e tendo D como ponto médio do arco BC.



Seja AB = AE. Pelo ponto D traça-se a perpendicular DF a EC. O triângulo ABD será congruente ao triângulo ADE. Logo BD = DE. Conclui-se que DE = DC.

Como AB + 2FC = 2.r então 2.FC = 2.r - AB. Portanto FC = $\frac{2r - AB}{2}$. No triângulo ADC temos: DC^2 = AC.FC. Portanto DC^2 = 2.r.(1/2).(2.r - AB) = r.(2.r - AB). Seja ß a medida do arco BC. Teremos: sen$\frac{\beta}{2}$ = $\frac{DC}{2r}$. Portanto DC = 2.r.sen($\frac{\beta}{2}$).

Como cos ß = $\frac{AB}{2r}$ então AB = 2.r.cosβ.

Substituindo AB em DC^2 = r.(2.r - AB) teremos: (2.r.sen$\frac{\beta}{2}$)² = r.(2.r-2.r.cosß).

Donde se conclui que: sen $\frac{\beta}{2}$ = $\sqrt{\frac{1-\cos\beta}{2}}$.

Utilizando a fórmula do arco metade obtém-se:

sen 1,5º = $\sqrt{\frac{1-\cos 3°}{2}}$ = 0,0261

sen 0,75º = $\sqrt{\frac{1-\cos 1{,}5°}{2}}$ = 0,0130

Como obter sen 1^{o} ?

Ptolomeu demonstra um teorema que foi usado por Aristarco na sua obra *Sobre os Tamanhos e Distâncias do sol e da lua*: se 0 < b < a < 90^{o} então $\frac{\operatorname{sen} a}{\operatorname{sen} b} < \frac{a}{b}$

A prova de Ptolomeu é geométrica (ver Aaboe). Faremos uma prova no quadro do cálculo diferencial lembrando que a derivada de sen x (x em graus) é $\frac{\pi}{180}$.cos x e que a derivada de cos x (x em graus) é $-\frac{\pi}{180}$.senx.

Para se 0 < b < a < 90^{o} , a desigualdade $\frac{\operatorname{sen} a}{\operatorname{sen} b} < \frac{a}{b}$ implica na desigualdade $\frac{\operatorname{sen} a}{a} < \frac{\operatorname{sen} b}{b}$. Este resultado sugere estudar a função f(x)=$\frac{\operatorname{sen} x}{x}$. A derivada dessa função é f ´(x) = $\frac{\frac{\pi}{180} x \cos x - \operatorname{sen} x}{x^2}$.

Vamos mostrar que $\frac{\pi}{180}$x.cosx - senx é menor que zero para 0 < x < 90^{o} e concluir que f é estritamente decrescente nesse intervalo.

Seja a função g(x)= $\frac{\pi}{180}$x.cosx-senx.

Logo g´(x)= $\frac{\pi}{180}$.cos x + $\frac{\pi}{180}$.x.($-\frac{\pi}{180}$).sen x - $\frac{\pi}{180}$.cos x = $-(\frac{\pi}{180})^2$.x.sen x < 0.

Logo g é estritamente decrescente no intervalo 0 < x < 90^{o}. Portanto x > 0 implica que g(x) < g(0). Logo $\frac{\pi}{180}$.x.cos x – sen x < 0.

Concluise que também a função f(x) = $\frac{\operatorname{sen} x}{x}$ é estritamente decrescente no intervalo 0 < x < 90^{o}.

Portanto, a > b implica que f(a) < f(b). Segue que $\frac{\operatorname{sen} a}{a} < \frac{\operatorname{sen} b}{b}$ e que $\frac{\operatorname{sen} a}{\operatorname{sen} b} < \frac{a}{b}$

Escolhendo a = 1,5^{o} e b = 1^{o} temos: $\frac{\operatorname{sen} 1{,}5°}{\operatorname{sen} 1°} < \frac{1{,}5°}{1°}$.

Donde sen 1^{o} > 0,01745.

Escolhendo a= 1 º e b= 0,75 º temos: $\frac{\text{sen}\,1°}{\text{sen}\,0{,}75°} < \frac{1°}{0{,}75°}$. Donde sen 1 º < 0,01746

Logo 0,01745 < sen 1 º < 0,01746

Podemos concluir que com uma aproximação de quatro casas decimais temos:

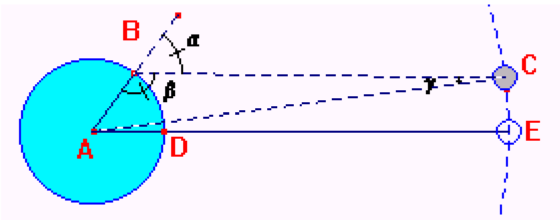
sen 1º = 0,0174

Utilizando-se este valor e a fórmula de sen (a + b) deduzida de forma análoga completa-se a tabela .

sen 2 º = sen (1º +1º) = ...

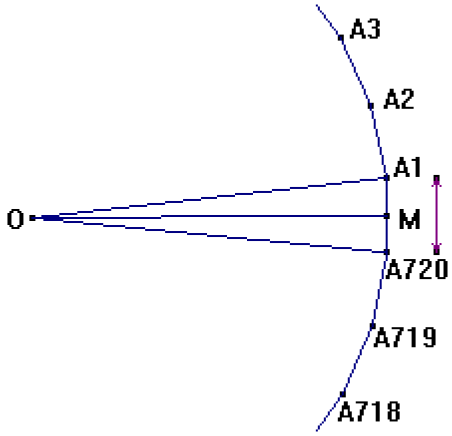
sen 3°= sen (2°+1°) = ...

Este exemplo do cálculo da distância da Terra à Lua ilustra como uma situação real é resolvida pela passagem a um modelo matemático e finalmente uma volta à situação real.



O uso da tabela trigonométrica no cálculo do π

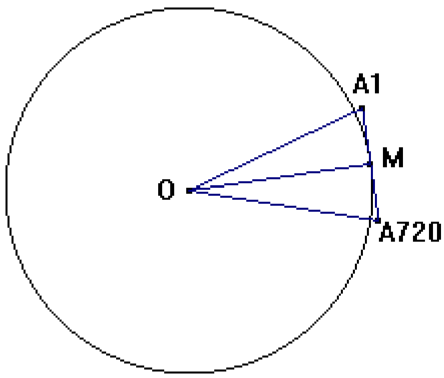
Ptolomeu considera um polígono de 720 lados:



O ângulo central de um polígono de 720 lados é 0,5º. Seja M o ponto médio do lado A_1A_{720}. No triângulo retângulo OMA_{720} temos: sen 0,25 º = $\frac{L720}{2}$: R

Portanto L_{720}= 2.R.sen 0,25 º

Na época de Arquimedes sabia-se que o quociente entre o comprimento da circunferência e o diâmetro era constante. Pode-se obter o quociente $\frac{C}{2R}$ a partir das desigualdades $\frac{p}{2R} < \frac{C}{2R} < \frac{P}{2R}$ onde p é o perímetro do polígono regular inscrito na circunferência de raio R e P é o perímetro do polígono regular circunscrito.
Considerando o polígono regular de 720 lados circunscritos à circunferência de raio R acima temos:

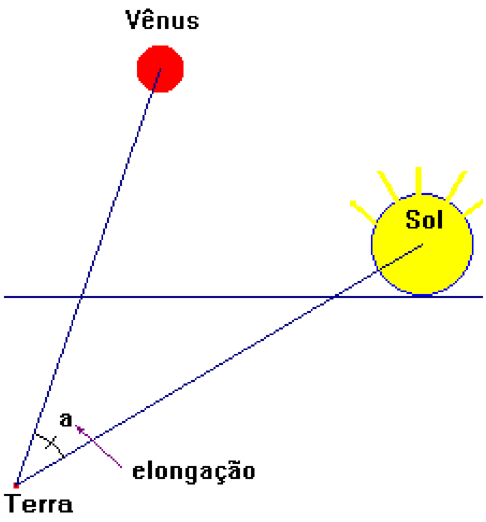


O ângulo central A_1OA_{720} mede 0,5 º. O ângulo MOA_{720} mede 0,25 º

Cós 0,25 º = $\frac{R}{OB}$ e sem 0,25 º = $\frac{AM}{OB}$. Dessas duas igualdades resulta que o lado do polígono circunscrito mede 2R. $\frac{\operatorname{sen} 0{,}25°}{\cos 0{,}25°}$. Portanto o perímetro do polígono será 720. 2R. $\frac{\operatorname{sen} 0{,}25°}{\cos 0{,}25°}$. Substituindo os dois perímetros na desigualdade $\frac{p}{2R} < \frac{C}{2R} < \frac{P}{2R}$ obtém-se: 3,14158 < $\frac{C}{2R}$ < 3,14162. Ptolomeu aproximou $\frac{C}{2R}$ por 3,1416.

Uso da tabela trigonométrica na astronomia

Cálculo das distâncias dos Planetas Vênus e Mercúrio ao Sol.
A tabela contém as medidas das elongações do planeta Vênus tomadas durante cerca de 2 anos. A distância Terra –Sol é aproximadamente 150 milhões de km.



Dia	elongação
0	20°
40	43°
60	47°
80	45°
120	37°
160	30°
200	19°
240	8°
280	0°
320	11°
360	21°
400	27°
440	35°
480	43°
520	47°
560	32°
600	21°
640	45°
680	45°
720	37°

Pela tabela percebe-se que a máxima elongação é 47°.

sen 47° = $\frac{d_{V-S}}{d_{T-S}}$. Por uma tabela trigonométrica temos que sen 47° = 0,7313.

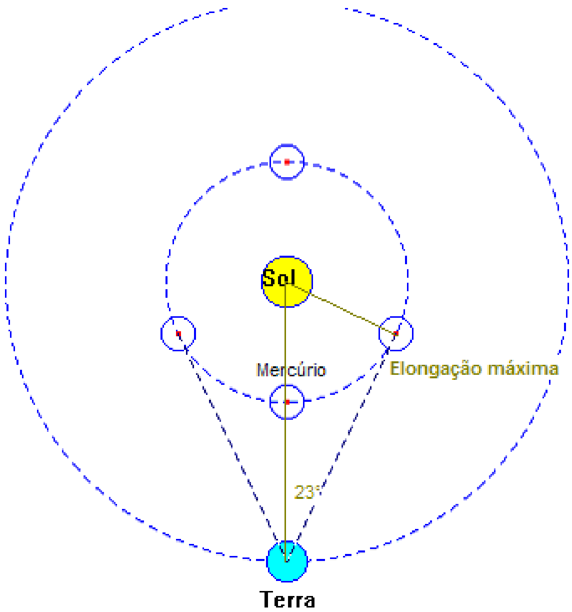
Logo d_{V-S} = 0,7313. d_{T-S} = 0,7313.150 milhões de km = 109,69 milhões de km.

A distância Mercúrio-Sol

As elongações do planeta Mercúrio ao longo de dois anos indicam que a elongação máxima ocorre quando o ângulo é de 23°.

sen 23° = $\frac{d_{M-S}}{d_{M-S}}$. Utilizando uma tabela trigonométrica temos que sen 23° = 0,3907.

Logo d_{V-S} = 0,3907. d_{T-S} = 58,61 milhões de km.



Bibliografia

- Aaboe, A. (1984) *Episódios da história antiga da matemática,* SBM.
- Ávila,G. *A geometria e as distâncias astronômicas na Grécia Antiga*, Revista do Professor de Matemática N^{o} 1. pag. 9 - 13.
- Boczko,R. (1984) *Conceitos de astronomia*, Editora Edgard Blucher Ltda.
- Boyer, C. B. (1996) *História da Matemática*. São Paulo: Editora Edgard Blücher
- Dahan-Dalmadico, A.(1986). *Une histoire des mathématiques*, Éditions du Seuil
- Howard, E. (1995). *Introdução à história da matemática*. Editora UNICAMP.
- Lintz, R. (1999). *História da matemática*.Blumenau: Ed. FURB.
- Site: http://planeta.terra.com.br/educacao/formadaterra

Vincenzo Bongiovanni Possui graduação em Licenciatura em Matemática pela Universidade de São Paulo (1973), mestrado em Matemática pela Pontifícia Universidade Católica de São Paulo; (1987) e doutorado em Didática da matemática - Université Joseph Fourier (2001). Atualmente é professor do Programa de Pós-Graduação da Universidade Bandeirante de São Paulo. Tem experiência na área de Matemática, com ênfase em EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, atuando principalmente nos seguintes temas: geometria, novas tecnologias,formação de professores e história da matemática; Vincenzo.bongiovanni@uol.com.br

UNIÓN
REVISTA IBEROAMERICANA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA

Junio de 2009, Número 18, páginas 93 – 104
ISSN: 1815-0640

El lenguaje de los gráficos estadísticos

Pedro Arteaga; Carmen Batanero; Carmen Díaz; José Miguel Contreras

Resumen

La interpretación y construcción de gráficos estadísticos forma parte de la cultura que un ciudadano bien informado ha de tener para enfrentarse críticamente a la sociedad de la información. En este trabajo sintetizamos la investigación relacionada con estas competencias, que no siempre se alcanzan y finalizamos con algunas recomendaciones didácticas para mejorar la cultura estadística de nuestros estudiantes

Abstract

Interpreting and building statistical graphs is part of the statistical literacy that a well informed citizen needs to critically face the information society. In this paper we make a synthesis of main research related to this competence, which are not always achieved. We finish with some didactic recommendations directed to improve the students' statistical literacy.

Resumo

A interpretação e construção de gráficos estatísticos forma parte da cultura que um cidadão bem informado tem que ter para enfrentar criticamente a sociedade da informação. Neste trabalho sintetizamos a pesquisa relacionada com estas competências, que nem sempre se alcançam e finalizamos com algumas recomendações didáticas para melhorar a cultura estatística dos nossos estudantes.

Introducción

El lenguaje gráfico tiene un papel esencial en la organización, descripción y análisis de datos, al ser un instrumento de transnumeración, una de las formas básicas de razonamiento estadístico (Wild y Pfannkuch, 1999), que consiste en obtener una nueva información, al cambiar de un sistema de representación a otro. Por ejemplo, al pasar de una lista de datos desordenada a un histograma, se visualiza la moda y se percibe la simetría o asimetría de la distribución.

La construcción e interpretación de gráficos estadísticos es también parte importante de la cultura estadística que Gal (2002, pg. 2) define como la unión de dos competencias relacionadas:

> *a) Interpretar y evaluar críticamente la información estadística, los argumentos apoyados en datos o los fenómenos estocásticos que las personas pueden encontrar en diversos contextos, incluyendo los medios de comunicación, pero no limitándose a ellos, y b) discutir o comunicar sus opiniones respecto a tales informaciones estadísticas cuando sea relevante* (Gal, 2002, pp. 2-3).

Según este autor, una persona culta debiera poder leer críticamente los gráficos estadísticos que encuentra en la prensa, Internet, medios de comunicación, y trabajo profesional. Esto supone no sólo la lectura literal del gráfico, sino identificar las tendencias y variabilidad de los datos, así como detectar los posibles errores conscientes o inconscientes que puedan distorsionar la información representada (Schield, 2006). Asimismo debiera conocer los convenios de construcción de los diferentes tipos de gráficos y ser capaz de construir correctamente un gráfico sencillo.

Por otro lado, en los nuevos Decretos de Enseñanzas Mínimas en España (MEC, 2006) se amplía la enseñanza de la estadística en Educación Primaria, incluyendo un bloque denominado *Tratamiento de la información, azar y probabilidad* en todos los ciclos de este nivel educativo. El objetivo es utilizar las técnicas elementales de recogida de datos para obtener información sobre fenómenos y situaciones del entorno; representarla de forma gráfica y numérica y formarse un juicio sobre la misma.

En relación con los gráficos, en el primer ciclo (niños de 6 y 7 años) se comienza con interpretaciones de determinados elementos de un gráfico sencillo relacionado con fenómenos cercanos a los niños. Progresivamente se pasa a los contenidos del tercer ciclo (10-11) en los que se estudiarán distintos tipos de gráficos estadísticos y se deberá conseguir que los niños aprecien la importancia que tiene el poder valorar críticamente informaciones que son presentadas a través de gráficos. Además se manifiesta que la destreza en la utilización de representaciones gráficas para interpretar la información aporta una herramienta muy valiosa para conocer y analizar mejor la realidad. Como criterio de evaluación para el primer ciclo se indica:

> "*Realizar interpretaciones elementales de los datos presentados en gráficas de barras. Formular y resolver sencillos problemas en los que intervenga la lectura de gráficos. Con este criterio se trata de valorar la capacidad de interpretar gráficos sencillos de situaciones familiares y verificar la habilidad para reconocer gráficamente informaciones cuantificables*" (pg. 43098)

Para que estas propuestas curriculares sean posibles, será necesario proporcionar a los profesores información sobre las posible dificultades de sus estudiantes con los gráficos estadísticos. Con el fin de proporcionar esta información, realizamos a continuación una síntesis de las investigaciones sobre comprensión y construcción de gráficos estadísticos. Dedicamos también un apartado específico a la competencia gráfica de futuros profesores de educación primaria, para orientar la labor de los formadores de profesores.

Elementos y competencias de lectura de gráficos estadísticos

Un primer punto investigado por diversos autores es la competencia en la lectura de gráficos, tarea en la que el estudiante debe realizar la traducción entre lo representado y la realidad. Pero esta traducción requiere conocimientos no siempre disponibles por el estudiante sobre los convenios de construcción y elementos del gráfico, que son los siguientes (Curcio, 1987; 1989):

- Las palabras que aparecen en el gráfico, como su título, las etiquetas de los ejes y de las escalas, que proporcionan las claves necesarias para comprender las relaciones representadas.
- El contenido matemático subyacente, por ejemplo los conjuntos numéricos empleados y otros conceptos matemáticos como los de área en un diagrama de sectores, o longitud en un gráfico de líneas, implícitos en el gráfico, y que el estudiante ha de dominar para interpretarlo.
- Los convenios *específicos* que se usan en cada tipo de gráfico y que se deben conocer para poder realizar una lectura o construcción correcta. Por ejemplo, el alumno ha de conocer en un diagrama de sectores que la amplitud del sector es proporcional a la frecuencia; en un diagrama de dispersión que cada punto representa un caso y las coordenadas del punto los valores de las dos variables representadas.

Partiendo del análisis anterior, Friel, Curcio y Bright (2001) identifican los siguientes elementos estructurales de un gráfico estadístico:

- El título y las etiquetas indican el contenido contextual del gráfico y cuáles son las variables representadas.
- El marco del gráfico incluye los ejes, escalas, y marcas de referencia en cada eje. Dicho marco proporciona información sobre las unidades de medida de las magnitudes representadas. Puede haber diferentes tipos de marcos y sistemas de coordenadas (cartesianas bidimensionales, multidimensionales, polares…).
- Los *especificadores* del gráfico, como los rectángulos (en el histograma) o los puntos (en el diagrama de dispersión) son los elementos usados para visualizar los datos. Los autores nos alertan de que no todos los especificadores son igualmente sencillos de comprender sugiriendo el siguiente orden de dificultad: Posición en una escala homogénea (gráficos de línea, de barras, de puntos, algunos pictogramas e histogramas); posición en una escala no homogénea (gráficos polares, gráficos bivariantes); longitud (gráficos poligonales, árboles), ángulo o pendiente (diagrama de sectores, discos), área (círculos, pictogramas), volumen (cubos, algunos mapas estadísticos) y color (mapas estadísticos codificados mediante color).

En relación con los anteriores componentes Friel, Curcio y Bright (2001) describen las siguientes competencias relacionadas con el lenguaje gráfico:

- Reconocer los elementos estructurales del gráfico (ejes, escalas, etiquetas, elementos específicos) y sus relaciones. Distinguir si cada elemento es o no apropiado en el gráfico particular.
- Apreciar el impacto de cada uno de estos componentes sobre la presentación de la información (por ejemplo, predecir como cambiaría el gráfico al variar la escala de un eje).
- Traducir las relaciones reflejadas en el gráfico a los datos que se representan en el mismo y viceversa.
- Reconocer cuando un gráfico es más útil que otro, en función del juicio requerido y de los datos representados, es decir, saber elegir el gráfico adecuado al tipo de variable y al tipo de problema.

Niveles de lectura de gráficos

Además de las competencias anteriores, algunos autores definen niveles en la lectura crítica de datos y muestran que no todos los alumnos alcanzan el nivel más alto. A continuación resumimos las teorías de diversos autores al respecto.

Bertin (1967) sugiere que la lectura de un gráfico comienza con una identificación externa del tema al que se refiere, a través de la comprensión del significado del título y las etiquetas. A continuación se requiere una identificación interna, de las dimensiones relevantes de variación en el gráfico, es decir, las variables representadas y sus escalas. Finalmente se produce una percepción de la correspondencia entre los niveles particulares de cada dimensión visual para obtener conclusiones sobre los niveles particulares de cada variable y sus relaciones en la realidad representada. A partir de estos supuestos, define diversos niveles de lectura de un gráfico:

- Extracción de datos, que consiste en poner en relación un elemento de un eje con el de otro eje. Por ejemplo, en un diagrama de barras leer la frecuencia asociada a un valor de la variable.
- Extracción de tendencias, cuando se es capaz de percibir en el gráfico una relación entre dos subconjuntos de datos que pueden ser definidos a priori o visualmente. Un caso particular es determinar visualmente la moda de una distribución en un diagrama de barras, ya que se clasifica los datos en subconjuntos (que tienen un mismo valor para la variable) y se comparan entre si estos subconjuntos para ver cuál tiene mayor frecuencia.
- Análisis de la estructura de los datos, comparando tendencias o agrupamientos y efectuando predicciones. Un ejemplo ocurre cuando se representa en un diagrama de barras adosadas dos distribuciones y se analizan sus diferencias en promedios y dispersión.

Otra clasificación muy similar a la anterior que ha tenido un gran impacto en educación estadística se debe a Curcio (1989), quien mostró que las principales dificultades aparecen en los niveles superiores y que el nivel progresa con la edad de los estudiantes. Denomina a los tres niveles definidos por Bertin “leer entre los datos” (lectura literal del gráfico sin interpretar la información contenida en el mismo), "leer dentro de los datos" (interpretación e integración de los datos en el gráfico y "leer más allá de los datos" (predicciones e inferencias a partir de los datos sobre informaciones que no se reflejan directamente en el gráfico). Friel, Curcio y Bright (2001) amplían la clasificación definiendo un nuevo nivel “leer detrás de los datos” consistente en valorar críticamente el método de recogida de datos su validez y fiabilidad, así como las posibilidades de extensión de las conclusiones.

Un modelo algo más complejo es debido a Gerber, Boulton-Lewis y Bruce (1995), quienes diferencian siete niveles de comprensión de gráficos, en función de las competencias de los estudiantes para interpretarlos:

- Nivel 1. Los estudiantes no se centran en los datos, sino que asocian algunas características de los mismos a su conocimiento del mundo, generalmente impreciso. Al hacer una pregunta sobre edades de niños representados en un gráfico, los alumnos situados en este nivel pueden responder dando su edad.
- Niveles 2 y 3. En estos niveles los sujetos se centran en los datos representados, pero de forma incompleta. En el nivel 2 no llegan a apreciar el propósito del gráfico e interpretan sólo aspectos parciales de los datos, tales como una de las barras del diagrama de barras. En el nivel 3 los estudiantes aprecian el propósito del gráfico y analizan todos los elementos uno a uno, pero no llegan a una síntesis global, al no comprender algún elemento específico que es clave en la representación. Un estudiante en este nivel podría interpretar los grupos de edad (que se refieren a un conjunto de personas) en una pirámide de población como edades de sujetos individuales.
- Niveles 4, 5 y 6. Una vez que el estudiante llega a una síntesis global, puede todavía tener una interpretación estática de los gráficos, y podemos diferenciar tres niveles diferentes. En el nivel 4 los estudiantes son capaces de analizar una a una las variables representadas en el mismo gráfico, pero no conjuntamente. Por ejemplo, si representamos la esperanza de vida de hombre y mujeres en diversos países en un gráfico de líneas, los alumnos interpretan por un lado la esperanza de vida de los hombres y por otro los de las mujeres. En el nivel 5 se comparan varias variables representadas en el mismo gráfico; en el ejemplo anterior podrían deducir que la esperanza de vida en las mujeres es superior a la de los hombres en la mayoría de países. En el nivel 6 los estudiantes usan los gráficos para apoyar o refutar sus teorías. No sólo comparan varias variables en el mismo gráfico, sino sacan conclusiones generales respecto a una hipótesis; en el caso analizado podrían usar el gráfico para refutar la idea de que la mujer es más débil que el hombre.

- Nivel 7. En el último nivel los estudiantes son capaces de hacer extrapolaciones, y hacer predicciones para otros datos no representados en el gráfico; en el ejemplo anterior, el estudiante podría estimar la esperanza de vida del hombre, conocida la esperanza de vida de la mujer, para un país no representado en el gráfico.

Cuando los niveles de lectura de gráficos descritos se aplican no sólo a la interpretación de los gráficos, sino a su valoración crítica, los niveles superiores se modifican ligeramente (Aoyama y Stephen, 2003; Aoyama, 2007). Supongamos, por ejemplo, que se da a los estudiantes un gráfico que presenta datos sobre el número de horas que los adolescentes dedican a jugar con la videoconsola y el número de episodios de violencia escolar en que se ven implicados. La gráfica muestra claramente un crecimiento del número de episodios de violencia cuando aumenta el tiempo dedicado a este tipo de juegos. Se pregunta a los estudiantes si piensan que la violencia escolar disminuiría si se prohibiesen las videoconsolas. Una vez que los estudiantes llegan a la fase superior en la clasificación de Gerber, Boulton-Lewis y Bru, todavía podríamos diferenciar tres grupos, en función de su capacidad de crítica de la información representada:

- Nivel Racional/Literal. Los estudiantes leen correctamente el gráfico, incluyendo la interpolación, detección de tendencias y predicción. Para responder la pregunta planteada, usan las características del gráfico, pero no cuestionan la información, ni dan explicaciones alternativas. Una respuesta típica a la pregunta planteada sería “Sí, ya que el grupo de chicos que jugó juegos durante mucho tiempo también tuvo muchos episodios de violencia”
- Nivel Crítico. Los estudiantes leen los gráficos, comprenden el contexto y evalúan la fiabilidad de la información, cuestionándola a veces, pero no son capaces de buscar otras hipótesis: “Pienso que no, pues aunque los que más juegan aparecen como más violentos en el gráfico, podría haber otras causas, aunque no me imagino cuáles”

- Nivel Hipotético: Los estudiantes leen los gráficos los interpretan y evalúan la información, formando sus propias hipótesis y modelos: “No estoy de acuerdo en que la causa de la violencia sea el juego; quizás la falta de atención de los padres puede llevar a la vez a que el chico sea violento y que dedique más horas a jugar con la consola”.

Errores en la lectura o construcción de gráficos

Además de las capacidades de lectura de los gráficos, otras investigaciones analizan los errores frecuentes en la producción de los mismos. El primer paso sería elegir un gráfico adecuado, tanto al tipo de variable, como al problema planteado, pero los estudiantes fallan con frecuencia en esta elección. Li y Shen, (1992) analizaron los gráficos en los proyectos estadísticos de sus estudiantes, encontrado alumnos que utilizan polígonos de frecuencias con variables cualitativas, o diagrama de barras horizontal para representar datos que debieran representarse en un diagrama de dispersión. Otras veces, construyen gráficos sin sentido, por ejemplo se representan variables no relacionadas entre si en un mismo gráfico.

Respecto a las escalas de los gráficos construidos por los estudiantes Li y Shen (1992) encontraron los siguientes problemas:

- Elegir una escala inadecuada para el objetivo pretendido (por ejemplo no se cubre todo el campo de variación de la variable representada).
- Omitir las escalas en alguno de los ejes horizontal o vertical, o en ambos.
- No especificar el origen de coordenadas.
- No proporcionar suficientes divisiones en las escalas de los ejes.

Encontramos también investigaciones sobre la comprensión de gráficos específicos. Los estudiantes tienen errores en el diagrama de barras, sobre todo al usar un diagrama de barras horizontal en lugar de vertical (Pereira Mendoza y Mellor, 1990). Lee y Meletiou (2003) nos alertan de que los histogramas se perciben como representación de datos aislados, suponiendo que cada rectángulo se refiere a una observación particular y no a un intervalo de valores; en otro caso se compara sólo la altura de los rectángulos (y no su área) al tratar de detectar variaciones en el histograma. Respecto a los gráficos de la caja, Bakker, Biehler y Konold (2004) indican que no permite percibir a los estudiantes los valores individuales de los datos. Estas representaciones son muy diferentes a otros gráficos usados por los estudiantes, al estar basados en la mediana y cuartiles, y por ello no son intuitivos para los alumnos.

El ordenador no contribuye a mejorar los problemas de los estudiantes, como sugieren Ben-Zvi y Friedlander (1997), quienes definen cuatro categorías de uso de los gráficos producidos por el ordenador:

- Uso acrítico: los estudiantes construyen gráficos rutinariamente aceptando las opciones por defecto del software, aunque no sean adecuadas. Tienen también dificultad en valorar las relaciones sugeridas en sus representaciones gráficas, identificando sólo la información obvia, como los valores máximos.
- Uso significativo de una representación: los estudiantes construyen correctamente un gráfico si se les indica cuál ha de utilizar; también lo pueden justificar en base al tipo de datos o al problema planteado. Son capaces de modificar y transformar la gráfica, cambiando las opciones del software e interpretando los resultados, pero no son capaces de seleccionar la gráfica más adecuada cuando tienen varias posibilidades.
- Manejo significativo de representaciones múltiples: en este caso, los alumnos toman decisiones correctas en la selección de los gráficos más adecuados, tomando en consideración la contribución de cada uno a su problema.

- Uso creativo: Cuando el alumno crea un gráfico no habitual en forma correcta para presentar y justificar sus ideas.

Competencias gráficas de los futuros profesores

Las dificultades con los gráficos estadísticos no son exclusivas de los estudiantes, sino que también se presentan en los futuros profesores. Este hecho ha sido evidenciado por Bruno y Espinel (2005), quienes estudian la forma en que futuros profesores construyen un histograma de frecuencias a partir de una lista de datos. Aproximadamente la mitad de los participantes en su estudio tuvieron errores, incluyendo la representación de los intervalos de variación de la variable en el eje de ordenadas, la omisión de intervalos de frecuencia nula, o el uso de rectángulos no adosados en variables continuas. En cuanto al polígono de frecuencias los futuros profesores tuvieron errores al no unir por las marcas de clase, omitir el intervalo de frecuencia nula o confundir la frecuencia y el valor de la variable.

Continuando la investigación anterior, Bruno y Espinel compararon los errores de los futuros profesores en la construcción del histograma y el polígono de frecuencias, con la evaluación de histogramas producidos por posibles estudiantes. Prácticamente todos los futuros profesores cometieron algún error al construir los gráficos, pero lo más preocupante fue la falta de coherencia entre su construcción del gráfico y la forma en que evaluaron las respuestas de estudiantes ficticios. Además, en caso de coherencia, generalmente se trataba de futuros profesores que cometieron errores en la interpretación de los gráficos y también consideraron correctos los gráficos incorrectos de sus posibles estudiantes.

Preocupadas por estos resultados las autoras continúan la investigación utilizando un cuestionario que trata de evaluar la cultura y razonamiento estadístico de los futuros profesores por medio de su interpretación de gráficos y comparando los resultados con los de otros estudiantes universitarios americanos (Espinel, 2007). Aunque en ambos grupos de estudiantes las tareas fueron difíciles, la dificultad fue mayor para los futuros profesores españoles, sobre todo al predecir la forma de un gráfico a partir de la descripción verbal de variables conocidas por los estudiantes o al leer los histogramas.

Monteiro y Ainley (2006; 2007) indican que la lectura de gráficos en el contexto escolar es una tarea más limitada que la posible interpretación de dichos gráficos en otras actividades de la vida diaria. La razón dada por los autores es que, mientras en la escuela sólo pedimos a los estudiantes una respuesta correcta desde el punto de vista matemático, en contextos extraescolares intervienen también otros conocimientos no matemáticos. Monteiro y Ainley estudiaron la competencia de futuros profesores en la lectura de gráficos tomados de la prensa diaria, encontrando que muchos no tenían conocimientos matemáticos suficientes para llevar a cabo dicha lectura. La mayoría de los profesores participantes no tuvieron formación específica en la lectura de gráficos estadísticos y reconocieron sus carencias al respecto. En esta investigación también se observó que la interpretación de los gráficos moviliza conocimientos y sentimientos que inciden en su comprensión; por ejemplo, se obtuvo mucho mejores resultados al interpretar un gráfico sobre incidencia de cáncer en las mujeres que otro matemáticamente equivalente sobre tiempo de gestación de diferentes especies animales.

Respecto a la construcción de gráficos en tareas abiertas Arteaga (2008) propone a una muestra de 101 futuros profesores un proyecto abierto de análisis de datos, en que los estudiantes recogieron en clase datos de un experimento y tuvieron libertad para elegir el método de análisis de datos para contestar la pregunta de investigación planteada. 88 estudiantes realizaron algún tipo de gráfico. Estos gráficos fueron clasificados según el nivel de complejidad en cuatro niveles: 1) el estudiante sólo grafica sus propios datos, sin tener en cuenta los datos de sus compañeros; 2) el estudiante realiza un gráfico con todos los datos, pero no llega a formar la distribución de frecuencias de las variables en estudio; en lugar de ello, representa los datos uno a uno, en el orden en que aparecen en la hoja de recogida de datos, que es un orden artificial; 3) El estudiante forma la distribución de frecuencias y la representa gráficamente, pero los gráficos sólo representan las variables una a una; 4) El estudiante realiza gráficas multivariantes, representando la distribución de dos o más variables sobre una misma gráfica (Batanero, Arteaga y Ruiz, en prensa).

La mitad de los futuros profesores en la investigación citada realizan un gráfico de nivel 3) en la anterior clasificación y una cuarta parte de nivel 4), aunque sólo el 50% de los gráficos son correctos y otro 25% más son parcialmente correctos (con errores sólo de escala u omisión de algún elemento del gráfico). La dificultad de interpretación y obtención de conclusiones a partir del gráfico fue mucho mayor pues sólo el 30% interpreta tanto las tendencias centrales como la variabilidad de los gráficos y otro 30% sólo las tendencias. Sólo 24 futuros profesores llegan a una conclusión parcial sobre el problema planteado y de éstos muy pocos dan la conclusión completa.

Conclusiones

Los resultados de la síntesis presentada indican que, a pesar de la importancia de los gráficos estadísticos, la competencia relacionada con el lenguaje de las gráficas estadísticas no se alcanza en la educación obligatoria ni tampoco en la preparación de los futuros profesores de Educación Primaria.

Una posible explicación de este hecho es que la simplicidad del lenguaje gráfico es aparente, pues incluso el más simple de los gráficos puede considerarse un modelo matemático. Al reducir los datos, pasando de casos individuales a los valores de una variable y sus frecuencias, se introduce la distribución de frecuencias, concepto complejo, que se refiere al agregado (población o muestra) y no a los datos particulares. Por otro lado, un mismo tipo de gráfico (por ejemplo, un gráfico simple de barras) se puede usar para representar diferentes objetos matemáticos, tales como frecuencias absolutas, relativas, porcentajes y frecuencias acumuladas, medias u otros resúmenes estadísticos.

Los gráficos estadísticos se encuentran presentes en la vida cotidiana, tanto en los medios de comunicación e Internet, como en los textos escolares de diferentes materias y en el trabajo profesional. La investigación reseñada muestra que la lectura e interpretación del lenguaje gráfico es una habilidad altamente compleja, que no se adquiere espontáneamente, pero por desgracia, tampoco parece alcanzarse con la enseñanza. Más preocupante todavía es el hecho de que los futuros profesores de educación primaria tengan dificultades con el lenguaje gráfico que han de transmitir a sus alumnos y han de utilizar como herramienta en su vida profesional. Una mejora en la educación de los niños pasa por la formación del profesor, tarea en que todos nos encontramos involucrados y que no debe olvidar el lenguaje de las gráficas estadísticas.

Agradecimientos: Este trabajo forma parte del proyecto SEJ2007-60110 (MEC- Feder), beca FPU AP2007-03222 y beca FPI BES-2008-009562.

Bibliografía

Aoyama, K. (2007). *Investigating a hierarchy of students' interpretations of graphs*. International Electronic Journal of Mathematics Education 2, III. On line: http://www.iejme/.

Aoyama, K., M. y Stephens, M. (2003). *Graph interpretation aspects of statistical literacy: A Japanese perspective*. Mathematics Education Research Journal 15, III: 3-22.

Arteaga, P. (2008). *Análisis de gráficos estadísticos elaborados en un proyecto de análisis de datos*. Tesis de Master. Universidad de Granada.

Bakker, A., Biehler, R. y Konold, C. (2004). *Should young students learn about box plots*?. Curricular Development in Statistics Education. Proceedings of the: International Association for Statistical Education (IASE) Roundtable. Ed. G. Burrill y M. Camden. IASE, 163-173.
On Line: www.stat.auckland.ac.nz/~iase/publications/.

Batanero, C., Arteaga, P. y Ruiz, B. (En prensa): *Statistical graphs produced by prospective teachers in comparing two distributions*. Trabajo aceptado para presentación en el Sixth Conference of European Research in Mathematics Education, Lyon, 2009.

Ben-Zvi, D., y Friedlander, A. (1997). *Statistical thinking in a technological environment*. *Research on the role of technology in teaching and learning statistics.* Ed J. Garfield y G. Burrill. Voorburgo, International Statistical Institute. 54-64.

Bertin, J. (1967). *Semiologie graphique*. Paris: Gauthier-Villars.

Bruno, A. y Espinel, M. C. (2005) "Recta numérica, escalas y gráficas estadísticas: un estudio con estudiantes para profesores". *Formación del Profesorado e Investigación en Educación Matemáticas VII*: 57-85.

Cazorla, I. (2002): *A relaçao entre a habilidades viso-pictóricas e o dominio de conceitos estatísticos na leitura de gráficos*. Tesis Doctoral. Universidad de Campinas.

Curcio, F. R. (1987): “Comprehension of mathematical relationships expressed in graphs”. *Journal for Research in Mathematics Education* 18, V: 382-393.

Curcio, F. R. (1989): *Developing graph comprehension*. Reston, VA: N.C.T.M.

Espinel*, C.* (2007): *“*Construcción y razonamiento de gráficos estadísticos en la formación de profesores”. *Investigación en Educación Matemática XI:* 99-119.

Friel, S., Curcio, F. y Bright, G. (2001): “Making sense of graphs: critical factors influencing comprehension and instructional implications”. *Journal for Research in mathematics Education* 32, II: 124-158.

Gal, I. (2002): “Adult's statistical literacy: Meaning, components, responsibilities”. *International Statistical Review* 70, I: 1-25.

Gerber, R., Boulton-Lewis, G y Bruce, C. (1995): “Children’s understanding of graphic representation of quantitative data”. *Learning and Instruction* 5: 70-100.

Lee, C., Meletiou, M. (2003): “Some difficulties of learning histograms in introductory statistics”. *Joint Statistical Meetings- Section on Statistical Education.* On line*:* http://www.statlit.org/PDF/2003LeeASA.pdf

Li, D. Y., Shen, S. M. (1992): “Students’ weaknesses in statistical projects”. *Teaching Statistics* 14, I: 2-8.

Monteiro, C., Ainley, J. (2006). “Student teachers interpreting media graphs”. *Proceedings of the Seventh International Conference on Teaching Statistics.* Id. A. Rossman & B. Chance. Salvador de Bahia*:* International Statistical Institute and International Association for Statistical Education. Online: http://www.stat.auckland.ac.nz/~iase.

Monteiro, C., Ainley, J. (2007): “Investigating the interpretation of media graphs among student teachers”. *International Electronic Journal of Mathematics Education* 2, III: 188-207. On line: http://www.iejme/.

Pereira-Mendoza, L. y Mellor, J. (1990): “Student’s concepts of bar graph: Some preliminary findings”. *Proceedings of the Third International Conference on Teaching Statistics* Ed D. Vere-Jones*.* Voorburg: International Statistical Institute.

Schield, M. (2006): “Statistical literay survey analysis: reading graphs and tables of rates percentages”. *Proceedings of the Sixth International Conference on Teaching Statistics.* Ed B. Phillips. Cape Town: International Statistical Institute and International Association for Statistical Education. On line: http://www. stat.auckland.ac.nz/~iase.

Wild, C., Pfannkuch, M. (1999). *Statistical thinking in empirical enquiry*. (con discussion). International Statistical Review 67, III. 223-265.

Pedro Arteaga, Licenciado en Matemáticas en la Universidad Complutense y Master en Didáctica de las Matemáticas por la Universidad de Granada. Ha sido becado en el Plan de Formación del Profesorado Universitario en España para trabajar en la Universidad de Granada. Realiza una tesis doctoral sobre formación estadística de futuros profesores. Ha publicado trabajos relacionados con la comprensión de gráficos estadísticos y el trabajo con proyectos estadísticos. parteaga@ugr.es

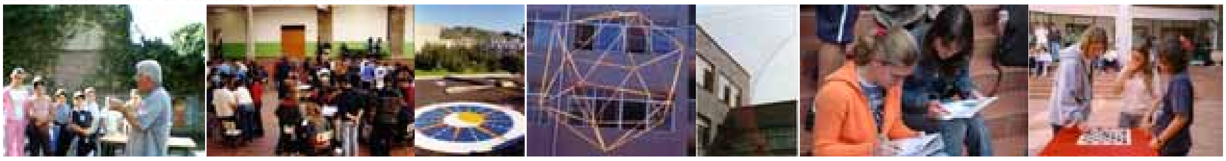
Carmen Batanero Licenciada en Matemáticas en la Universidad Complutense de Madrid y Doctora en Matemáticas (Estadística) por la Universidad de Granada, España. Profesora de Didáctica de las Matemáticas wn la Universidad de Granada.
Ha publicado libros dirigidos al profesorado y artículos en diferentes revistas de educación matemática. Es miembro del Comité Ejecutivo de ICMI (International Comisión on Mathematical Instruction y fue Presidenta de IASE (International Association for Statistical Education). Ha coordinado la organización del VII Congreso Internacional sobre Enseñanza de la Estadística, ICOTS-7. Fue editora de la revista Statistics Education Research Journal. batanero@ugr.es

Carmen Díaz Licenciada en Psicología en la Universidad de Granada y Doctora en Psicología (Metodología de las Ciencias del Comportamiento) por la Universidad de Granada, España. Profesora del área de Metodología de las Ciencias del Comportamiento en la Universidad de Huelva.
Trabaja en la línea de investigación de didáctica de la estadística, publicando artículos en torno a la comprensión de la probabilidad condicional e inferencia bayesiana en revistas de ámbito nacional e internacional. **carmen.diaz@dpsi.uhu.es**

José Miguel Contreras Licenciado en Matemáticas (Especialidad en Estadística e Investigación Operativa) y Licenciado en Ciencias y Técnicas Estadísticas en la Universidad de Granada, España. Ha sido becado en el Plan de Formación del Personal Investigador para trabajar en la Universidad de Granada. Ha publicado material docente y artículos sobre estadística computacional y estadística. jmcontreras@ugr.es

UNIÓN
REVISTA IBEROAMERICANA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA

Junio de 2009, Número 18, páginas 105-128
ISSN: 1815-0640



Dinamización matemática

Iniciación al estudio de las matemáticas de las cantidades en la Educación Infantil

Carlos de Castro Hernández; Clara Pastor Llamas; Lidia Cayetana Pina Plaza; María Isabel Rojas Díez; Beatriz Escorial González.

Resumen

Para estudiar cómo es el inicio del aprendizaje de las ‘matemáticas de las cantidades’, hemos desarrollado una experiencia con 64 alumnos de 4 y 5 años, pertenecientes a tres grupos de Educación Infantil. Durante 5 semanas trabajamos, partiendo de literatura infantil, en un taller de resolución de problemas inmersos en una situación de comunicación. Los problemas eran planteados por una persona cercana. Los niños, tras emplear diversas estrategias informales de modelización directa, a través de distintas representaciones (manipulativas y gráficas) de cantidades, discuten sus soluciones, y elaboran una respuesta común para quien les planteó el problema.

Abstract

To study how begins learning of ‘mathematics of quantities’, we have developed an experience with 64 four and five-year-old pupils, from three groups of Early Childhood Education. We worked for 5 weeks, from children’s books, in a workshop on problem-solving with problems involved in a communication situation. Problems were posed by a nearby person. Children, after using diverse informal direct modeling strategies, with different (manipulative and graphical) representations of quantities, discussed their solutions, and elaborated a common response for the one who had posed them the problem.

Resumo

Para estudar como é o início da aprendizagem das ‘matemáticas das quantidades’, desenvolvemos uma experiência com 64 alunos de 4 e 5 anos, pertencentes a três grupos de Educação Infantil. Durante 5 semanas trabalhamos, partindo de literatura infantil, em um laboratório de resolução de problemas imersos numa situação de comunicação. Os problemas eram propostos por uma pessoa próxima. As crianças, depois de utilizar diversas estratégias informais de modelagem direta, através de diferentes representações (manipulativas e gráficas) de quantidades, discutem suas soluções, e elaboram uma resposta comum para quem lhes propôs o problema.

1. Las matemáticas de las cantidades frente a las matemáticas del número: una apuesta para la Educación Infantil

El Diccionario de la Lengua Española (de la Real Academia Española[1]) define "cantidad", en sus dos primeras acepciones, como: "Porción de una magnitud" y "Cierto número de unidades". Estas dos acepciones distintas dan cuenta del hecho de que, cuando hablamos de cantidades, podemos utilizar la *cuantificación indefinida*, que "indica la cantidad de sustancia en una orientación aproximativa, sin la aparente concritud de la cuantificación numeral" (Lamíquiz, 1991, p. 52) o la *cuantificación numeral*. En efecto, son cantidades tanto "muchos cubitos" o "poca plastilina" (cantidades indefinidas), como "siete cubitos"[2], resultado de una cuantificación numeral. Por otro lado, tenemos los *números*, como 'tres', o 'siete', sin hacer referencia a unidades, o porciones de sustancia alguna. La distinción entre 'números concretos' y 'números abstractos' (hoy diríamos, entre cantidades y números) es muy habitual en tratados antiguos sobre la enseñanza de la aritmética:

> Los números admiten ser considerados de dos formas; una es cuando no se menciona ninguna denominación particular a la cual pertenecen sus unidades, y entonces se les llama números abstractos; la otra, cuando se especifica la denominación de sus unidades, como al decir: dos hombres, cinco años, tres horas, etc. A éstos se les llama números concretos (Lacroix, 1825, p. 8).

Detrás de esta distinción, hay un planteamiento didáctico según el cual los niños deben primero calcular con números concretos, para después pasar a calcular con números abstractos. Así, ya en el método inductivo de Warren Colburn (1826), podemos leer: "Comenzamos haciendo cálculos sobre objetos sensibles; pronto, observamos que los mismos cálculos pueden aplicarse a objetos muy diferentes; y finalmente, que [los cálculos] pueden efectuarse sin hacer referencia a ningún objeto particular." (Colburn, 1826, p. iv). En este planteamiento, el paso del cálculo con números concretos al cálculo con números abstractos supone una dificultad para muchos niños que se explica tradicionalmente en términos de *dificultad de abstracción*. Hughes (1986) asume esta diferencia de dificultad al manejar cantidades y números al indicar que:

> La mayoría de los niños comienzan su escolaridad a los cinco años siendo aparentemente capaces de llevar a cabo sumas y restas sencillas, siempre que tengan lugar en contextos que impliquen objetos, personas o acontecimientos específicos. En cambio, cuando se les plantean sumas y restas semejantes dentro de contextos en los que no existen referencias a objetos específicos, suelen mostrarse incapaces de contestar (Hughes, 1986, p. 60).

Sin embargo, Hughes (1986) atribuye la dificultad del cálculo con números a aspectos lingüísticos y semióticos, más que reconocerla solamente como una 'dificultad de abstracción'. Esto es, piensa que los pequeños tienen dificultad al

[1] http://buscon.rae.es/draeI/

[2] que es una cantidad medida, y más precisamente, contada, en este caso, pues se trata de una cantidad discreta.

utilizar y atribuir significado a expresiones del tipo “dos y dos son cuatro”, específicas del lenguaje matemático, y alejadas del lenguaje habitual.

Resnick (1992) también recoge en sus trabajos la distinción entre los números concretos (cantidades) y números abstractos (números), aunque amplía notablemente esta perspectiva sobre el desarrollo del pensamiento numérico al incluir en sus planteamientos las *protocantidades* (las *cantidades indefinidas* citadas en el párrafo inicial) y los *operadores*. Así, Resnick (1992) distingue cuatro tipos de pensamiento matemático: las matemáticas de las protocantidades, de las cantidades, de los números y de los operadores. En la tabla 1 aparecen resumidas las características principales de las matemáticas de las protocantidades, las cantidades y los números. Excluimos las matemáticas de los operadores pues tienen interés en un momento más avanzado de la escolaridad del que interesa para este trabajo, la Educación Infantil.

Tabla 1
Tres tipos de pensamiento matemático (Resnick, 1992)

Matemáticas de:	Objetos de razonamiento	Términos lingüísticos	Operaciones
protocantidades	Material físico	Mucho, muchos, más, menos, pequeño, grande, etc.	Aumentar, disminuir, combinar, separar, comparar, ordenar.
cantidades	Material físico medido	*n* objetos, *n* metros, *n* kilos, añadir, quitar, repartir.	Aumentar o disminuir una cantidad añadiendo o quitando otra cantidad. Repartir una cantidad en partes iguales.
números	Números	*n* más que, *n* veces, más *n*, veces *n*, *n* más *m*, *n* dividido por *m*.	Suma, resta, multiplicación, división, aplicadas a números

1.1. Las protocantidades, las cantidades y el número en los currículos españoles actuales de Educación Infantil y Primaria.

En este trabajo nos planteamos cuándo deben los niños estudiar las *matemáticas de las cantidades* y en qué debe consistir este tipo de trabajo. Para intentar responder a esta pregunta, comenzamos por revisar el planteamiento de los currículos actuales de Educación infantil y primaria españoles. El currículo actual de Educación Infantil (MEC, 2008), entre los contenidos a estudiar, y más tarde, al explicar qué debe tenerse en cuenta en la evaluación, indica:

- Cuantificación no numérica de colecciones (muchos, pocos). Comparación cuantitativa entre colecciones de objetos. Relaciones de igualdad y de desigualdad (igual que, más que, menos que) Estimación cuantitativa exacta de colecciones y uso de números cardinales referidos a cantidades manejables (MEC, 2008, p. 1024).
- Se observará, a medida que avanza la etapa, si niños y niñas […] intentan cuantificar la realidad referida tanto a materias continuas - cuánta agua hay que echar a la pintura, necesito mucha arena.-, como a colecciones de elementos - en mi equipo somos 6..., en la caja hay pocos rotuladores.-. También se observará la capacidad desarrollada para resolver sencillos problemas matemáticos de su vida cotidiana (MEC, 2008, p. 1025).

Así, en el currículo de Infantil vemos que toda la propuesta del aprendizaje del número se centra en las matemáticas de las *protocantidades* (las *cantidades indefinidas*, como mucha arena y pocos rotuladores) y en las *matemáticas de las cantidades*, para las que el currículo reserva la desafortunada[3] expresión "estimación cuantitativa exacta" para referirse a la *cuantificación numeral*.

En el primer ciclo de Educación Primaria (6 a 8 años), en el bloque de números y operaciones, la referencia a las cantidades y a los contextos familiares es constante (MEC, 2007). Sin embargo, empiezan a aparecer referencias a las relaciones numéricas (mayor que, menor que) y a las operaciones aritméticas (suma y resta, propias de las matemáticas de los números) relacionándolas con acciones físicas (si los referentes de términos formales, como 'suma', son acciones, estamos todavía matemática de las cantidades), de modo que se comienza a marcar una transición suave desde las matemáticas de las cantidades hacia las matemáticas de los números:

- Números naturales: Cuantificación y expresión numérica de cantidades en situaciones de la vida cotidiana: grafía, nombre y valor de posición de números hasta tres cifras. Ordenación, comparación y representación de cantidades en contextos familiares. Aproximación a las nociones de «mayor que», «menor que», «igual a», y su representación (MEC, 2007, p. 31557).
- Operaciones: Utilización en situaciones familiares de la suma para unir o añadir; de la resta para separar o quitar; y de la multiplicación para calcular número de veces. (MEC, 2007, p. 31557).

Resumiendo la propuesta de los currículos españoles actuales de Educación infantil y primaria (MEC 2008 y MEC 2007, respectivamente), las matemáticas de las cantidades comienzan en la Educación Infantil y se desarrollan (o se deberían desarrollar) durante buena parte de la Educación Primaria, aunque ya desde el primer ciclo de Educación primaria comienzan a ceder paulatinamente espacio a las matemáticas del número. Sin embargo, a pesar de lo que marca el currículo oficial, el peso de la tradición es muy fuerte, y es muy típico encontrar que en primer curso de Educación primaria, e incluso en algunos centros de educación infantil, tiene gran importancia la realización de operaciones de suma y resta de números (y no de cantidades), aislados de cualquier contexto, lo que supone una entrada prematura en las matemáticas del número que supone, como hemos visto en la introducción, grandes dificultades de aprendizaje.

1.2. Las matemáticas de las cantidades y la resolución de problemas en Educación Infantil.

A partir de esta aportación curricular, volvemos sobre la pregunta: ¿Qué significa hacer matemáticas de las cantidades? Y ¿en qué momento de la Educación Infantil deben comenzar las matemáticas de las cantidades? Resnick (1992) ofrece

[3] La estimación es una forma de cuantificación aproximada, que no busca determinar la cantidad de forma exacta, sino encontrar una cantidad razonablemente próxima a la cantidad inicial.

una respuesta a la primera pregunta. En las matemáticas de las cantidades, los números toman el significado del material físico que representan y describen. Pueden utilizarse términos formales, como 'sumar' o 'dividir', pero siempre se refieren a acciones físicas con objetos. Las matemáticas de las cantidades comienzan cuando los niños empiezan a aplicar la cuantificación (a determinar una cantidad numeral, con un número y un tipo de objeto), a través del conteo, a colecciones de objetos implicadas en esquemas protocuantitativos. Es decir, no basta con que los niños cuenten, sino que además deben poner en juego los esquemas previos de que disponen sobre cantidades indefinidas (esquemas protocuantitativos). Por ejemplo, el esquema protocuantitativo de 'añadir' nos dice que si tenemos una colección de objetos y añadimos otros, al final tendremos más objetos que al principio. Según Resnick (1992), la situación ideal para iniciarse en las matemáticas de las cantidades es la resolución de problemas. En los problemas, los esquemas protocuantitativos se ponen en juego en una situación que exige la cuantificación numeral a través del conteo. Por ejemplo, en el problema: "Si tengo tres caramelos y me dan dos más, ¿cuántos tengo ahora?", se pone en juego el esquema protocuantitativo de 'añadir' pero también se emplea el conteo, si los niños a los que se les plantea, por ejemplo, cuatro años. De acuerdo a estos planteamientos, Resnick (1992) propone como ejemplo de un programa, aplicado en la escuela, para el desarrollo de las matemáticas de las cantidades, la Enseñanza de Enfoque Cognitivo (Carpenter, Fennema, Franke, Levi y Empson, 1999).

La segunda pregunta que nos hacemos en este trabajo sobre las 'matemáticas de las cantidades' es: ¿A qué edad debemos comenzar a trabajar en este tipo de propuestas? Sabemos que las matemáticas de las cantidades requieren del niño cierto dominio del conteo, al menos de colecciones pequeñas de objetos. Hemos seguido las orientaciones de Clements (2004), que sugiere para los 4-5 años la iniciación de la resolución de problemas, con situaciones sencillas de añadir y quitar, que no sobrepasen los 5 objetos. También que en esta edad se pueden llegar a plantear situaciones de reparto de hasta 10 objetos entre dos personas. Así, en los problemas que hemos propuesto para las primeras 4 sesiones de trabajo, no se han superado los 5 objetos. Durante el curso, hemos ido progresivamente aumentando las cantidades, sin sobrepasar los 10 objetos (ver problemas 1-5 en la Tabla 2).

La visión que adoptamos, los autores de este trabajo, sobre la resolución de problemas en la Educación Infantil, está inspirada en la "Enseñanza de enfoque cognitivo" (Carpenter y otros, 1999). Dentro de este modelo, hemos realizado previamente una investigación con niños de 5 y 6 años (De Castro y Escorial, 2007a). Hay un aspecto en el que nuestras experiencias de resolución de problemas en Educación Infantil difieren de los trabajos de Carpenter y colaboradores. En nuestro planteamiento, incluimos el problema a resolver dentro de una situación de comunicación. Siempre es alguien ajeno a la clase (pero cercano a los pequeños) quien nos plantea un problema y nos escribe una carta para transmitirnos su preocupación por el problema y su demanda de ayuda. Dentro de la carta, que da paso a la actividad de los niños, aparece el enunciado del problema. Los niños, después de resolver el problema, deben ponerse de acuerdo sobre la respuesta que deben dar a la persona que les ha planteado el problema, y escribir en la pizarra, o sobre el papel, un principio de respuesta a la carta que se supone que la maestra después transmitirá a quien nos planteó el problema. Esto hace que cobre importancia la escritura de cantidades (De Castro y Escorial, 2007b) dentro de la elaboración de la respuesta. En el trabajo anterior (De Castro y Escorial, 2007a) los problemas eran planteados por el Duende Pitutín, al que los niños visitan cada curso durante varios días en una granja escuela. En esta ocasión, los problemas los plantea Ares, maestro de educación infantil que hizo las prácticas en el centro durante el curso anterior a esta experiencia. El taller se inicia con la lectura de un cuento que ha traído Ares, luego, llega su carta con la demanda de ayuda y el enunciado. Tras la lectura del enunciado, repetido varias veces, los niños comienzan a trabajar individualmente. Seguidamente, se realiza una puesta en común en la que algunos niños explican cómo han resuelto el problema e intenta llegarse a un acuerdo sobre qué respuesta debe darse a Ares. Finalmente, alguno de los alumnos escribe (en un papel o en la pizarra) un principio de respuesta para Ares.

La razón principal de incluir los problemas en un contexto de comunicación como el que se ha descripto, es la de enriquecer matemáticamente el trabajo que deben hacer los alumnos. En el Informe PISA 2003 (OCDE, 2005) se establecen las siguientes competencias que deben adquirir los alumnos: “pensamiento y razonamiento, argumentación, comunicación, construcción de modelos, planteamiento y solución del problema, representación, y utilización de operaciones y lenguaje técnico, simbólico y formal” (p. 40). En la búsqueda de un tipo de actividad matemática que promueva al máximo la adquisición de estas competencias, pensamos que la situación de comunicación, en la que planteamos los problemas, favorece el desarrollo de las competencias de comunicación, de argumentación y de desarrollo del lenguaje. Casi todas las demás competencias ya están contempladas en la situación de resolución de problemas.

Tabla 2
Problemas planteados en las cinco primeras sesiones del taller

Sesión	Enunciado del problema	Tipo de problema	Cuento
1	Van 5 patitos de goma en el barco. En la tormenta, caen 2 patitos al agua. ¿Cuántos patitos siguen en el barco?	Cambio decreciente, incógnita cantidad final	Carle (2006)
2	Si hay 3 cajas de patitos en el camión para llevarlas al barco y después ponen otras 2 cajas, ¿Cuántas cajas hay en el camión?	Cambio creciente, incógnita cantidad final	Carle (2006)
3	Hay 3 cocodrilos en la bañera y 1 lavándose los dientes. ¿Cuántos cocodrilos hay en total en el baño?	Combinación, incógnita el total	Ramos (2004)
4	Hay cinco elefantes en el salón. Tres están tomando el té. ¿Cuántos no lo están tomando?	Combinación, incógnita una de las partes	Ramos (2004)
5	Cuando llegó la Lechuza, había 5 invitados sentados y había 7 sillas. ¿Cuántas sillas estaban vacías?	Comparación, incógnita la diferencia	Mejuto y Mora (2008)

Los problemas planteados en las cinco primeras sesiones del taller son los que figuran en esta tabla. Elegimos problemas sencillos de resolver mediante modelización directa (Carpenter y otros, 1999) y en los que no pasamos de seis, inicialmente, en el tamaño de los números (a excepción del problema 5). Los niños tienen una absoluta libertad para resolver el problema como quieran. En cada sesión tienen plastilina, papel y rotuladores, dos tipos de cubos encajables (Multilink y centicubos), una recta numérica del 1 al 20 pegada en la mesa, y un rekenrek. También pueden utilizar la pizarra, tablas 100, cuentas de colores para formar “collares” o cualquier otro material.

En el presente trabajo, la novedad en el uso de materiales la ha constituido el uso del rekenrek. Éste es un material didáctico diseñado por Adrian Treffers, investigador holandés del Instituto Freudenthal. Aunque tiene aspecto de ábaco, tanto su inventor como sus traductores (en inglés se llama ‘arithmetic rack’, algo así como una ‘rejilla aritmética’), han evitado deliberadamente llamarle “ábaco”, pues no está diseñado para aprender el valor posicional, sino para desarrollar estrategias de cálculo con números de una cifra. Por ejemplo, en la Figura 1 vemos cómo aparece representada la suma 7 + 8, sugiriendo las estrategias del uso de dobles más uno:

7 + 8 = 7 + 7 + 1 = 14 + 1 = 15, o de uso de descomposiciones aditivas con el cinco: 7 + 8 = 5 + 5 + 2 + 3 = 10 + 5 = 15.

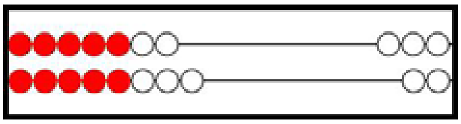


Figura 1. Representación de 7 + 8 en el rekenrek.

El rekenrek está especialmente recomendado para último curso de Educación Infantil y primer ciclo de Educación Primaria (5-8 años). En este trabajo, hemos optado por introducirlo en 4 años, sin hacer una preparación específica de su uso; es decir, permitiendo un uso libre del mismo. Nuestro objetivo principal al introducir el material es que los pequeños se familiaricen, logrando al final del curso, representar algunos números especiales (como 5 o 10) sin necesidad de contar. En cierto sentido, el uso que hacemos del material es “preparatorio” para el taller del curso siguiente.

1.3. La búsqueda de una actividad matemática adecuada para niñas y niños de 4 y 5 años.

Quizá la mayor preocupación con la que abordamos este trabajo de innovación fue plantearnos si el tipo de actividad que esperábamos de niños y niñas de 4-5 años era adecuado a su nivel de desarrollo evolutivo. Apenas existe poca literatura sobre resolución de problemas verbales con niños de 4-5 años; sin embargo, en 5-6 años, abunda[4] (Carpenter, Ansell, Franke, Fennema y Weisbeck, 1993; Warfield y Yttri, 1999). Todos los participantes en este proyecto tenemos la convicción de que

[4] Citamos sólo dos trabajos de resolución de problemas en Educación Infantil que nos parecen más representativos por seguir la Enseñanza de Enfoque Cognitivo (Carpenter y otros, 1999).

el trabajo con niños de 4-5 años, en el taller de resolución de problemas, supone una extraordinaria preparación para la misma actividad en el último curso de educación infantil. En nuestro planteamiento sobre la educación infantil, siguiendo a Paniagua y Palacios (2006) este carácter preparatorio no conlleva connotación negativa alguna, pero tampoco justifica que la actividad sea adecuada para los niños de esa edad:

> Hay que salir del planteamiento dicotómico en el que se supone que si la educación en los primeros años prepara para la educación primaria, no es una auténtica educación infantil. Preparar no debe ser un fin fundamental, pero sí puede ser uno de los objetivos de la educación infantil, siempre que se entienda que preparar no tiene por qué ser entrenar futuras habilidades, adelantar contenidos, llevar un ritmo clásicamente escolar o subordinarse a las demandas de la siguiente etapa (Paniagua y Palacios, 2006, p. 33).

La mayor duda que albergamos sobre la idoneidad cognitiva del taller en 4-5 años viene del hecho de comprobar que muchos niños no entran en una actividad verdaderamente matemática. No se produce, en términos de Brousseau, la *devolución* de la situación. Los niños disfrutan con la lectura del cuento y, a continuación, se implican en momentos de juego con los materiales, y en una actividad de representación relacionada con la historia que se les acaba de relatar. Sin embargo, hay niños que no muestran interés alguno por resolver el problema que se les ha planteado. En este sentido, no tenemos duda de que los niños están realizando una actividad plenamente adecuada para su edad, e incluso que esta actividad puede tener un cierto carácter matemático, pero tenemos que admitir claramente que no es el tipo de actividad de modelización, ni la actitud -de intentar resolver el problema- que nos planteamos en los objetivos del taller.

2. El desarrollo de las sesiones de resolución de problemas

Vamos a proceder a la narración del desarrollo de las sesiones de trabajo con los pequeños. Proponemos a los lectores el ejercicio de valorar si esta propuesta sirve, como proponemos los autores del trabajo, para desarrollar las competencias de "pensamiento y razonamiento, argumentación, comunicación, construcción de modelos, planteamiento y solución del problema, representación, y utilización de operaciones y lenguaje técnico, simbólico y formal", que hemos citado en un apartado anterior, competencias que esperamos que se pueda claramente constatar que pueden ser desarrolladas a través del contexto de trabajo que hemos creado para las matemáticas de las cantidades, desde la edad de 4 años.

2.1. Primera sesión

En la primera sesión, se lee el cuento "Diez patitos de goma" (Carle, 2006). Los pequeños muestran gran interés, haciendo comentarios como: "¿Podríamos contarlos?", "Hay diez", "Aquí hay uno que es el de goma". Es la tercera vez que el cuento se lee en clase y los niños participan en la narración, siendo ellos los que van contando la historia con ayuda de las imágenes. Beatriz[5] les plantea el problema que

[5] En toda la narración, vamos a emplear cursivas para los nombres de las maestras y maestros que participan en la experiencia y de los autores del trabajo, para distinguirlos de las niñas y niños.

les ha enviado Ares: “Van 5 patitos de goma en el barco. En la tormenta, caen 2 patitos al agua. ¿Cuántos patitos de goma siguen en el barco?” Los niños, como harán a lo largo de todas las sesiones del taller, comienzan dando estimaciones: Guille dice que hay cinco; Mario, tres; Álvaro, cuarenta y cinco. También se escuchan respuestas al azar, como “cuarenta mil”. A algunos niños parece sorprenderles que los datos del enunciado no se ajusten a la “realidad” del cuento. Así, en los talleres de Eva y Víctor, se decide cambiar en el enunciado “patos” por “cajas”, puesto que en el cuento es una caja la que cae al agua.

Lidia: Clara. ¿Qué es lo que has pensado?
Clara: Voy a contar 5 [Clara pone 5 cuentas en la varilla superior del rekenrek].
Lidia: Muy bien. ¿Y cuántas se caen?
Clara: Dos se caen al mar [Clara pone 2 cuentas en la varilla inferior del rekenrek].
Lidia: ¿Y cuántas quedan en el barco?
Clara: Cinco [Clara responde contando las cuentas que hay en la varilla superior].
Lidia: Si se caen del barco, ¿qué tienes que hacer?
Clara: Quitarlas [Clara quita las dos cuentas de la varilla inferior].
Lidia: ¿Cuántas quedan en el barco?
Clara: No sé [Ve que vuelven a quedar cinco cuentas en la varilla superior].

Como vemos, para Clara la varilla superior del rekenrek representa el barco y la varilla inferior, el mar. Cuando representa que dos cajas se caen al mar, añade dos cuentas a la varilla inferior, pero no elimina las dos cuentas correspondientes de la varilla superior. Lidia llama a Izan para que le explique a Clara cómo lo ha hecho. Izan ha formado con dos cubos encajables una base (el barco) sobre la que ha colocado cinco cubos más (las cinco cajas). Después, muestra a Clara cómo al quitar dos cubos, quedan tres, que es la solución del problema. Clara se queda triste por no haberlo sabido hacer, pero comprende el problema (aunque al principio le cuesta, pues ella contaba los dos cubos que formaban el barco como cajas) y es capaz de resolverlo ella sola con el rekenrek.

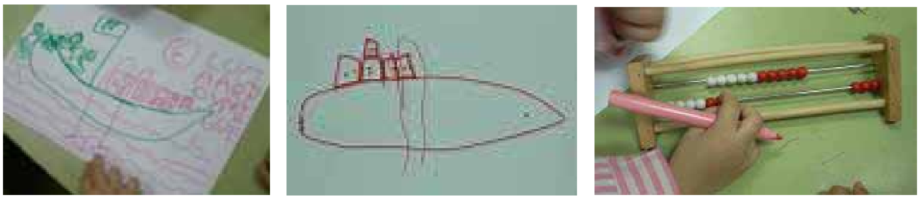


Figura 2. Dibujo de Lucía, ‘copia’ de Mª Renee y resolución de Lucía con el rekenrek.

Por su parte, David hace cinco cajas, cada una de ellas uniendo cuatro cubos encajables, y las pone sobre una hoja de papel (que representa el barco). Después, saca dos ‘cajas’ de la hoja (representando que se caen al mar) y cuenta las tres que quedan. Lucía dibuja un barco con cinco cajas y dos flechas que salen de dos de las cajas apuntando al mar (Figura 2, izquierda). También lo hace con el rekenrek. Curiosamente, pone el rekenrek al revés, con las cuentas blancas a la izquierda. Después, en la varilla inferior, desplaza cinco cuentas rojas a la derecha, y luego quita dos de ellas (Figura 2). Mª Renee pide a Lucía que le explique el problema y copia su dibujo (Figura 2). Al final de la sesión, es Mª Renee la que sale a explicarlo, lo cual nos indica que ha comprendido el problema.

En esta primera sesión, hay bastantes niños que no piensan en el problema; se limitan a dibujar o a jugar con los materiales. Los cubos encajables, empleados como material de construcción, tienen gran éxito entre los pequeños. En una de las tres clases en que se hace el taller, todos los niños que han intentado hacer el problema, lo han conseguido. Lidia introduce la variante de que los alumnos que hayan resuelto el problema puedan ayudar a otros a los que les cuesta más. Hasta ese momento, se animaba a los niños que terminaban antes a resolverlo con otro material o a hacer el problema dibujando.

2.2. Segunda sesión

En esta sesión, cambiamos en la clase de Beatriz la dinámica del taller. En lugar de trabajar en los dos grupos a la vez, primero se hace el taller en uno de los grupos y después en el otro. Mientras en un grupo se resuelven problemas, en el otro, los pequeños modelan con plastilina, muchas veces representando personajes del cuento. Este cambio se introduce para poder atender mejor a los niños en cada grupo, pues trabajar con toda la clase a la vez, en este tipo de actividad, resulta bastante complejo. El problema está basado en Carle (2006): Si ponen 3 cajas de patitos en el camión para llevarlas al barco y después ponen otras 2 cajas, ¿Cuántas cajas hay en el camión? En la transcripción, Isabel interviene en una conversación entre Adrián y David.

Adrián: Yo estoy haciendo una casa gigante.
David: No hay que hacer casas [le dice a Adrián, mientras dibuja el camión, Figura 3]
Isabel: ¿Ya lo sabes David? [David muestra a Isabel su dibujo, Figura 3] ¿Cuántas son?
David: Cinco [David le explica el problema a Isabel y escribe un 5 sobre el camión].

Figura 3. Dibujo de David con las cinco cajas.

Beatriz pregunta a Belén cómo lo ha hecho:

Beatriz: Belén, ¿Cuánto crees que es?
Belén: Cinco.
Beatriz: ¿Por qué crees que son cinco?
Belén: Porque las conté con mi mano.
Beatriz: ¿Cómo lo has contado con la mano? Repítelo.
Belén: Pues puse en mi mano tres y luego dos y son cinco [escenificándolo con la mano].

Clara consigue resolverlo con el rekenrek y se pone muy contenta, pues en la sesión anterior se lo tuvo que explicar Izan. Ahora, orgullosa, se lo explica ella a sus compañeros. Así, dice a Manuela: "Mira. Hay tres: una, dos y tres; y luego, hay dos: una y dos. Y al final, hay cinco" (dice, mientras muestra el proceso en el rekenrek).

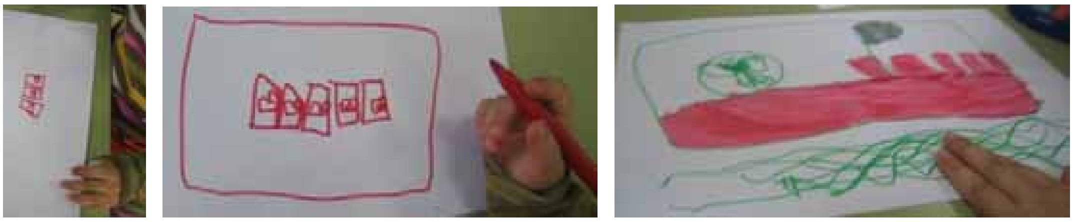


Figura 4. Proceso de resolución de Bárbara y dibujo de Alicia Lu.

En esta figura, Bárbara dibuja tres cajas, las rodea con un rectángulo (para representar el camión) y añade dos cajas más a la izquierda de las anteriores. Alicia está sentada a su lado y ha dibujado un barco. Parece que se ha confundido con el problema de la sesión anterior. Al preguntarle: "¿Por qué has dibujado un barco, Alicia?", ella responde: "Porque luego el camión lleva las cajas al barco.

Izan dibuja cinco cajas y se caen dos (Figura 5). Vemos que se confunde con el problema anterior. Al repetirle el nuevo problema, lo resuelve con cubos encajables. Forma una base con tres cubos (el camión, ver Figura 5), añade primero tres cubos y luego dos más. Poco después, Izan añade tres cubos más en la parte inferior de su construcción, indicando que los cubos son "el humo del camión y las ruedas". Muchos niños están deseando explicar cómo lo han hecho. Sin embargo, les cuesta más escuchar las explicaciones de los compañeros. Para establecer correctamente esta dinámica de explicar y escuchar es necesaria la mediación de la maestra.

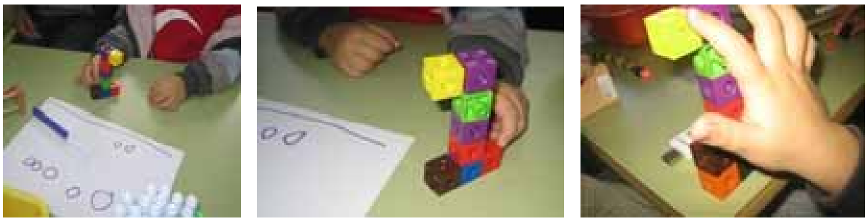


Figura 5. El dibujo de Izan, su representación del problema, y la posterior reelaboración de la misma.

David resuelve el problema con un dibujo (Figura 6, a la izquierda). Explica que primero ha dibujado tres cajas y después, como había mucho espacio en el camión, han subido dos más y en total hay cinco. Lucía resuelve el problema muy rápidamente contando con los dedos y dice que son cinco. Después elabora un dibujo muy completo en el que destacan las diferentes representaciones de la cantidad solución: un 5 rodeado por un círculo, para enfatizar la solución, y el texto escrito: "HICICOCAGITAS" (Hay cinco cajitas) (Figura 6, a la derecha).

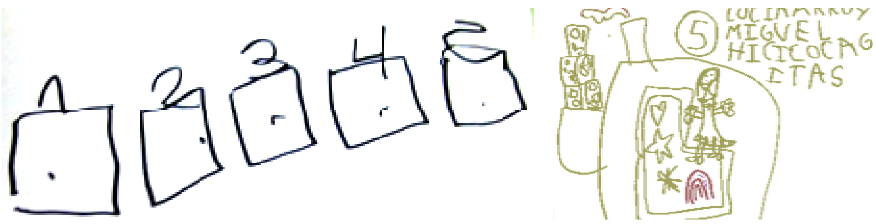


Figura 6. El dibujo de David y el de Lucía.

Ángel resuelve el problema con los cubos encajables, formando cajas con cuatro cubos cada una. En la figura 7, aparece contándolas. Javier lo resuelve con el rekenrek; primero pone tres cuentas, y después otras dos. Vemos también cómo previamente ha resuelto el problema con cubos encajables (Figura 7, a la derecha).

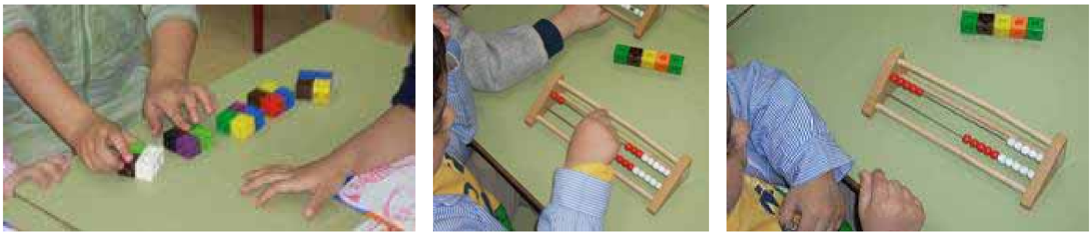


Figura 7. Ángel cuenta las cajas y Javier resolviéndolo con los cubos encajables y el rekenrek.

La puesta en común, en el grupo de Víctor, se lleva a cabo de una forma diferente a las anteriores. Víctor piensa que puede salir mejor si la desarrollábamos en las colchonetas, como las asambleas, y así lo hacemos.

Víctor: ¿Quién más lo quiere explicar?
Galatea: Tres, y si luego se añaden dos más, quedan cinco.
Víctor: Usa los cubitos y se lo cuentas a los niños.
Galatea: Si hay aquí un camión (señala dos cubitos unidos, Figura 8) y, al principio, tiene tres cajas y se ponen una y dos más (coge tres cubitos y otros dos), quedan cinco.
Nehad: No. Son cuatro.
Galatea: No. Es que éste [señalando los dos cubos separados, Figura 8] es el camión [Galatea piensa que Nehad ha confundido los cubos que representan cajas con los que forman el camión. Si esto fuese así, Nehad habría dicho siete, no cuatro].
Víctor: ¿quién más?
David: cinco [Mostrando su dibujo de la figura 6].

Galatea: ¿Y el camión? ¿No está?

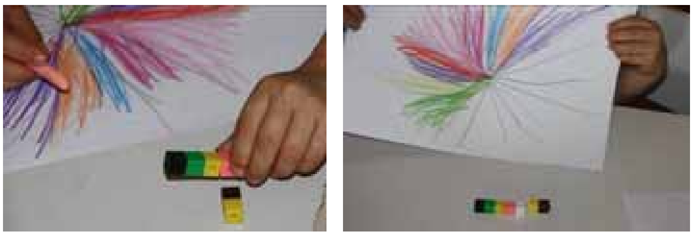


Figura 8. Resolución de Galatea.

Vemos que algunos pequeños, como Galatea y antes Izan (Figura 5), sienten la necesidad de representar el camión en el que van las cajas. En otros casos, no es así. Continuamente, a lo largo del taller, contemplamos con satisfacción cómo los pequeños se escuchan e incluso se ayudan. Por ejemplo, cuando Pedro dice que no sabe cuántas (cajas) ha pintado y Guille rápidamente le contesta: "¡Cuéntalas, Pedro!"

2.3. Tercera sesión

En esta sesión, empezamos a utilizar el cuento: "¡Mamá!" (Ramos, 2004), el que tiene un gran éxito y los niños intervienen continuamente completando el texto:

Beatriz: ¡Mamá! [En la página de las jirafas].
David: ¡Mamá! ¡Hay tres jirafas en mi habitación!
Beatriz: ¡Mamá! [En la página de los elefantes].
David: ¡Hay cinco elefantes en el salón!, ¡Hay seis flamencos en la "videoteca"! [Sic], ¡Hay siete osos en la cocina!
Beatriz: ¡Mamá! [En la página de los cerditos].
Martín: ¡Hay ocho cerdos!
David: ¡Hay ocho cerdos en el cuarto de juegos!
Beatriz: ¡Mamá! [En la página de los monos].
David: ¡Hay ochenta y mil monos!

En la clase de Eva, Izan descubre que el número de los animales del cuento aumenta de uno en uno. Así, antes de pasar a la siguiente página, ya sabe cuántos va a haber. A los demás niños, les gusta comprobarlo y contarlos. El problema es: Si hay cuatro cocodrilos, y vienen dos primos a visitarlos, ¿Cuántos cocodrilos habrá en el cuarto de baño? Como en la anterior sesión, en el grupo de Beatriz se trabaja primero en un grupo, mientras que el otro se dedica a modelar plastilina (Figura 9).

Figura 9. Cocodrilo modelado por Álvaro.

Álvaro resuelve el problema con el rekenrek. Primero pasa cuatro cuentas, después otras dos y, finalmente, cuenta las seis. Beatriz pide a Álvaro que se sitúe en medio de la mesa, para que lo vean y explique cómo lo ha hecho (Figura 10).

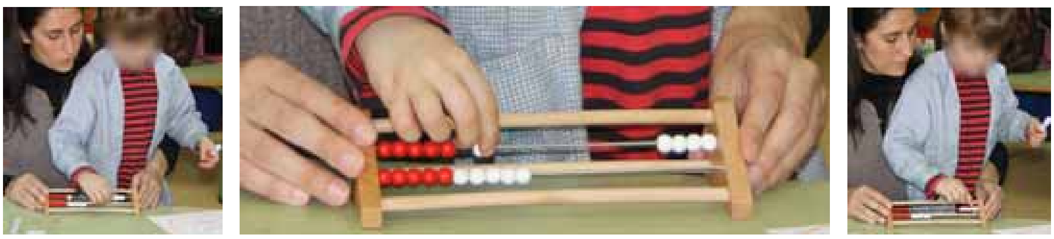


Figura 10. Álvaro pasa cuatro cuentas, después pasa dos más y, finalmente, cuenta las seis.

Belén resuelve el problema con las manos y nos lo explica: "Porque hay cuatro (pone cuatro dedos de su mano derecha) y pongo 2 (levantando el último dedo de su mano derecha y el pulgar de la izquierda) y hay seis" (Figura 11, a la izquierda). David hace un dibujo "de memoria" en el que representa con una fidelidad asombrosa la imagen de los cocodrilos del cuento. Para los niños capaces de recordar con tanto detalle las imágenes que les mostramos, el problema se convierte en un problema de conteo, pues les basta con elaborar un dibujo casi idéntico al del cuento y contar los personajes. Dado que esta situación era habitual, hubo que cambiar varios enunciados sobre la marcha. Por ejemplo, en esta sesión se optó por añadir "dos primos" que llegan de visita.

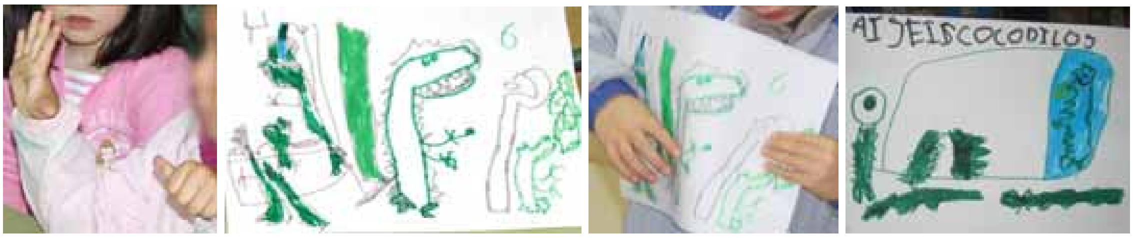


Figura 11. Belén resuelve el problema con las manos y los dos David lo hacen con un dibujo.

David resuelve el problema con un dibujo (Figura 11, a la derecha) y después escribe la solución: AISEISCOCODILOS (Hay seis cocodrilos). Alicia Lu utiliza los colores para distinguir los cocodrilos: dibuja al papá y la mamá de verde, los hijos de negro y los primos de morado. A la derecha, dibuja al niño protagonista del cuento. Muchos de los dibujos, no sabemos si son empleados para modelizar el problema, como instrumento de resolución, o para ilustrar una solución obtenida por otro método (a veces, con los dedos). Bárbara elige los cubos encajables para representar los cocodrilos. El papá, la mamá, y uno de los hijos los ha hecho con forma de cruz. El otro hijo y los sobrinos son filas de tres o cuatro cubos cada uno. Al contarlos todos, ve que son seis (Figura 12).

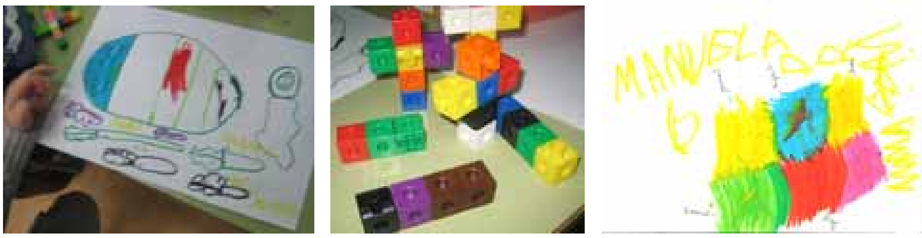


Figura 12. Dibujo de Alicia Lu, resolución de Bárbara y dibujo de Manuela.

El dibujo de Manuela (Figura 12, a la derecha) es muy original. Podría ser el dibujo de cubos encajables, ya que al final lo explica con este material y hay un gran parecido. Al principio dibuja cuatro cuadrados a los que ella se refiere como la mamá, el papá y los dos hijos. Al preguntarle por los primos, contesta que "no están". Manuela sigue trabajando en el dibujo, añadiendo dos cuadrados más. Inicialmente, no entendíamos la representación de Manuela, que quedó aclarada en la conversación con Lidia:

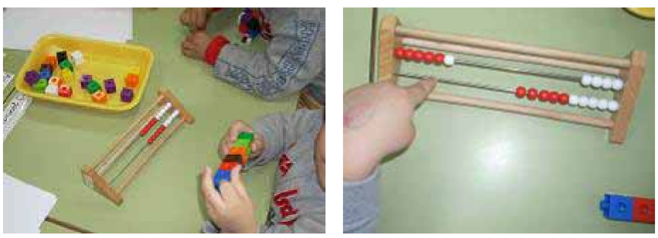


Figura 13. Resolución de Javier con los cubos encajables y el rekenrek.

Lidia: Manuela, ¿qué has dibujado?
Manuela: Colorines.
Lidia: Pero, esos colorines… ¿son para pensar el problema de Ares?
Manuela: Sí
Lidia: ¿Sí? ¿Y que es cada color?
Manuela: Pues este es el papá, esta es la mama… [Dice mientras señala cada color].
Lidia: ¿Y cuántos cocodrilos hay en el baño?
Manuela: Seis.

Javier resuelve el problema primero con cubos encajables y luego con el rekenrek. Con ambos materiales, pone primero cuatro cubos (o cuentas), luego otros dos, y finalmente cuenta los que hay (Figura 13). Axel representa al papá y a la mamá con cuatro cubos grandes (cubos Multilink) y a cada hijo con cuatro cubos encajables pequeños (centicubos) (Figura 14, a la izquierda). Axel tiene alguna dificultad con el conteo y hay que ayudarle un poco a resolver el problema. Así, le decimos que tiene que hacer a los 'primitos' y responde haciendo otros dos cocodrilos con cuatro centicubos cada uno (es decir, del tamaño de los hijos) (Figura 14, a la derecha). Tras contarlos varias veces, con algún error de por medio, llega a la conclusión de que hay seis cocodrilos.

Figura 14. Axel con los cubos encajables y dibujo de Lucía.

Lucía utiliza primero el dibujo, luego el rekenrek y finalmente los cubos encajables, obteniendo el mismo resultado con los tres (Figura 15). Los adultos participantes en la experiencia valoramos mucho el uso de distintos materiales y los niños se van acostumbrando muy bien a esta dinámica de trabajo. Cada estrategia con un nuevo material, supone una validación del trabajo anterior.

Figura 15. Lucía resuelve el problema con tres materiales distintos.

En la clase de Víctor, los pequeños no están motivados para ayudar a Ares. Por ello, se decide cambiar la motivación. Una maestra llega disfrazada de gusanito y pide ayuda a los niños para resolver el problema. En este grupo, no es necesario cambiar el enunciado original, que queda: Hay tres cocodrilos en la bañera y uno lavándose los dientes. ¿Cuántos cocodrilos hay en total en el baño? Galatea une los cubos juntando primero tres (los cocodrilos de la bañera). Luego añade un cubo más (el cocodrilo que se lava los dientes) y al final muestra los cuatro que le dan como resultado (Figura 16).

Figura 16. Galatea resuelve el problema con los cubos encajables.

Mateo dibuja los cuatro cocodrilos y escribe la cifra 4 para expresar el resultado (Figura 17). En algunos dibujos aparecen detalles llamativos, como el cepillo de dientes que sostiene uno de los cocodrilos en su mano.

Figura 17. Dibujo de Mateo.

2.4. Cuarta sesión

Seguimos trabajando con el cuento: “¡Mamá!” de Mario Ramos. El problema es: “Si hay 5 elefantes en el salón y 3 están tomando el té. ¿Cuántos elefantes no están tomando el té?” Belén lo resuelve con los dedos y se lo explica a Beatriz:

Belén: Tres elefantes tomando el té (levanta tres dedos de su mano) y 2 que no toman el té (levanta los dos dedos que le quedan en la mano sin levantar).
Beatriz: ¿Y cuántos son esos?
Belén: Cinco.

Entendemos que Belén descompone el cinco en tres y en dos ayudándose de los dedos. Después, Belén le explica a Mercedes, la directora, cómo lo ha resuelto (Figura 18).

Figura 18. Belén explicando el problema a Mercedes (la directora) y explicación de David con su dibujo.

David ha resuelto el problema mediante un dibujo y da la respuesta correcta. Beatriz le pregunta qué ha dibujado:

David: A todos los elefantes y a todo lo que había en el cuento.
Beatriz: Vale, pero explícame cuáles son los que no están tomando el té.
David: Éstos [señalando al padre y al hijo, que están sentados en el sofá de la derecha].
Beatriz: Uno no está tomando el té [pero el otro, el padre, en el cuento, sí toma el té].
David: Y éste tampoco [señalando al padre que está leyendo el cuento a uno].

En el cuento, los elefantes que no están tomando el té son los elefantes pequeños, pero David recuerda que un papá le está leyendo el cuento a un elefante pequeño. Por eso indica que son el padre y su hijo los que no están tomando el té y eso nos crea un poco de confusión para comprender su explicación. Al entregar el dibujo, David explica que los números le han salido un poco mal. Efectivamente, vemos en la parte superior del dibujo, varios doces y treces en espejo (Figura 18).

Oscar resuelve el problema con plastilina, haciendo tres bolitas pequeñas, para los elefantes pequeños y dos bolas grandes, que representan a los elefantes grandes. Como podemos ver, en la Figura 19, a la izquierda, explica el problema a Guille. En la misma Figura 19, a la derecha, vemos como Óscar pasa una de las bolitas pequeñas junto a las dos bolas grandes para distinguir ahora los que toman el té (los dos elefantes grandes y uno de los pequeños) de los que no (los otros dos elefantes pequeños).

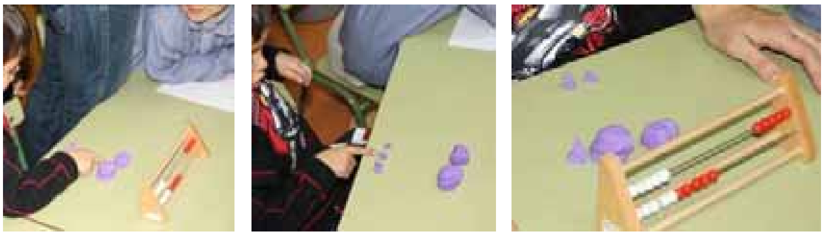


Figura 19. Resolución de Oscar.

En la puesta en común, Oscar cambia de respuesta, defendiendo que son tres los elefantes que no toman el té (en lugar de dos, como había pensado con las bolitas de plastilina). Veamos cómo defiende su respuesta:

Beatriz: ¿Cuántos crees que no están tomando el té?
Oscar: Tres.
Beatriz: Pues venga, explícanos por qué tres.
Oscar: Uno está leyendo, otro de pie, y otro sentado.

Es muy curioso, anteriormente, Oscar llegó a la respuesta acertada utilizando la plastilina y con la ayuda de Beatriz. Sin embargo, en esta ocasión su respuesta es tres. Si nos fijamos en la imagen del cuento, hay dos elefantes que tienen una taza sujeta, y hay tres que no la tienen. De los tres, uno está leyendo, otro de pie y otro sentado, como dice Oscar. Realmente, son tres los que toman té, pero uno de ellos tiene la taza en la mesa, y se ve que, para Oscar, ese no cuenta.

Figura 20. Resolución de Mario y puesta en común.

Mario ha hecho un dibujo y se lo enseña a Beatriz, que le hace caer en la cuenta de que ha dibujado un elefante de más. Mario tacha uno (Figura 20 a la izquierda) y vuelve a contar, ya le salen cinco. Beatriz le pregunta de nuevo cuántos no están tomando té y Mario contesta “dos”. La siguiente conversación corresponde a la intervención de Mario en la puesta en común (Figura 20, a la derecha):

Mario: Que había… Hay cinco [dice mostrando su dibujo]. Y entonces, los que no toman té son éstos [señalando a los dos más pequeños en la parte inferior de su dibujo].

Beatriz: ¿Son esos dos? ¿Por qué?

Mario: Porque…

Beatriz: ¿cuántos están tomando el té? [Mario señala uno a uno a los tres elefantes grandes].

Beatriz: Esos tres. Uno, dos y tres [Beatriz cuenta los tres elefantes grandes]. Entonces dices que luego quedan… ¿cuántos sin tomar el té?

Mario: Un, dos [contando los elefantes pequeños en el dibujo].

En la clase de Eva, el problema se plantea de forma ligeramente diferente para evitar la interferencia tan fuerte que tiene, en el proceso de resolución, el recuerdo de la imagen del cuento. El enunciado queda: Hay cinco elefantes en el salón y tres se van de excursión. ¿Cuántos elefantes quedan en el salón? Manuela soluciona el problema con el rekenrek. Pone cinco cuentas en una varilla, quita tres (los elefantes que se van de excursión) y ve que le quedan dos. Manuela está contentísima por su nuevo descubrimiento. Clara tiene dificultades para resolver el problema. Manuela le dice: “¿Te ayudo?”. Clara acepta y Manuela se lo explica con verdadero entusiasmo. Cuando termina, toma la iniciativa de explicárselo a otros compañeros. Incluso al final, Manuela repite la operación (ya sola) con el ábaco y cuando dice que son dos, suelta una carcajada. Clara aprende de Manuela y después lo hace bien ella sola con otro material. Las explicaciones de unos alumnos a otros funcionan bastante bien y a los que explican les refuerza la motivación.

Figura 21. Dibujo de Alicia Lu, y explicación con los dedos.

En la Figura 21, a la derecha, vemos el dibujo de Alicia Lu. Como se puede observar, dibuja tres elefantes fuera de la casa (los que se van de excursión) y una casa con dos puntitos en gris que representan los dos elefantes que se quedan en casa. Lidia le pregunta:

Lidia: ¿Cómo sabes que son dos los que se quedan en casa?

Alicia Lu: Mira. Porque hay 5 elefantes [enseña la mano entera] y tres se van de excursión [Enseña los dos dedos que le quedan unidos, pulgar y meñique, Figura 21] y son dos los que quedan en casa.

Figura 22. Resolución de Lucía, dibujo y escritura de la solución.

Lucía se confunde en su primer dibujo, ya que representa cinco elefantes en el salón y tres fuera de la casa. Al contar, cuenta todos los elefantes y dice que son cinco. Al pedirle que lo resuelva con el rekenrek, para ver si le da el mismo resultado, pone cinco cuentas blancas en la parte derecha de la varilla superior y luego quita tres. Entonces ve que le quedan dos cuentas blancas y se da cuenta del error y hace otro dibujo. Esta vez, hace un dibujo en rosa (Figura 22) con dos elefantes dentro del salón y tres saliendo. En la parte de arriba, pone un 2 rodeado con un círculo. Después, escribe la solución para Ares: "AIDOSELEFANTES" (Hay dos elefantes) (Figura 22, a la derecha).

Ángel resuelve el problema de una forma muy curiosa con los cubos encajables. Dispone 5 cubos en forma de C y dice que eso representa el salón. Encima pone 5 elefantes, con la misma forma de C, encima de la anterior y quita tres de ellos de sus asientos, cuenta, y comprueba que le quedan dos.

Figura 23. Resolución de Ángel y de Claudia.

En la clase de Víctor, en la que Ares no resultaba un elemento motivador para los niños, se plantea un juego: "En busca del tesoro". Si los niños resuelven el problema, se les entregará la parte del mapa que falta para encontrar un tesoro escondido para ellos. Se plantea otra versión del problema: "Hay cinco elefantes en el salón. Tres son grandes, ¿Cuántos son pequeños?" Claudia encaja 5 cubos formando una fila, tiene dificultades en separar, en su fila de 5, los elefantes grandes de los pequeños, hasta que hace un gran descubrimiento:

Claudia: un, dos, tres (cuenta tres de los cinco cubos que tiene).
Clara: esos son los grandes, los que te dice el problema, y ahora ¿cuántos son pequeños?
Claudia: Cuatro [responde mirando a Clara].
Claudia: Espera. ¡He tenido una idea! Si quito unos poquitos, así, voy a saber cuántos hay.
Clara: ¿Cómo?
Claudia: Si quito unos poquitos, voy a saber cómo es.
Clara: Vale. Me parece una buenísima idea, Claudia. A ver, venga, prueba [Claudia separa la línea de cinco cubos en tres y dos]. Vale. Entonces, ¿cuántos son los grandes?
Claudia: Hay uno, dos, tres.

Después de hacerlo, Claudia va a contárselo a Galatea, Antía y Ester. Ester comprende la explicación y lo resuelve por sí misma con el rekenrek. Coloca cinco cuentas rojas en la varilla superior, a la izquierda, y quita tres, comprobando que quedan dos (Figura 24).

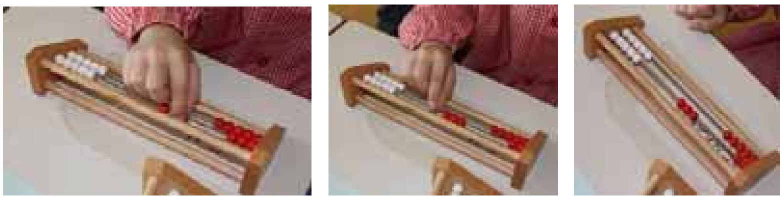


Figura 24. Resolución de Ester.

2.5. Quinta sesión

Por primera vez en el taller, planteamos un problema de comparación. El enunciado es: “Cuando llegó la Lechuza, había 5 invitados sentados y había 7 sillas. ¿Cuántas sillas estaban vacías? Para que resulte más sencillo resolverlo, evitamos la expresión del tipo: “¿Cuántas sillas hay más que invitados?”

Belén dibuja una mesa con siete sillas alrededor. A continuación, cuenta cinco sillas y les va asignando cifras del 1 al 5. Después cuenta las sillas a las que no corresponde cifra alguna (la sexta silla y la séptima) y concluye que quedan dos sillas libres (Figura 25, a la izquierda). Una vez resuelto el problema, se dedica a rematar el dibujo que empleará después en la puesta en común (Figura 25, a la derecha).

Figura 25. Dibujo y explicación de Belén.

Oscar intenta resolverlo con el rekenrek. Coloca siete cuentas en la varilla superior (como representando las sillas) y cinco en la inferior (los invitados) (Figura 26, izquierda). No obstante lo cerca que está del resultado, no supo concluir cuántas sillas quedan vacías. Lo mismo le ocurrió con la plastilina. Guille dibuja la mesa, siete sillas y cinco invitados. Sabe que sobran dos sillas, pero no sabe explicarlo con el dibujo (Figura 26, derecha).

Figura 26. Resolución de Oscar con el rekenrek y con plastilina y Dibujo de Guille.

Beatriz se acerca a Guille para averiguar cómo lo ha hecho. Guillermo dice que hay siete sillas y cinco invitados, y que sobran dos sillas.

Beatriz: ¿Por qué? No veo yo por qué tienen que ser dos y no tres [las sillas que sobran].
Guille: Porque he contado.
Beatriz: Vale, pero has contado y ¿Por qué has dicho “dos”?
Guille: No lo sé.
Beatriz: ¿No lo sabes? Piénsalo. De alguna manera tienes que saber que son dos.
Guille: Porque es que lo he hecho con las manos.
Beatriz: A ver. Explícamelo con los dedos.
Guille: He puesto cinco en esta (coloca una mano con cinco dedos) y dos en esta (pone dos dedos en la otra mano).
Beatriz: Vale. ¿Y qué pasa?
Beatriz: A ver. Explícamelo otra vez.
Guille: Siete sillas (pone siete dedos).
Beatriz: ¿Y estos cinco, qué son? (señalando la mano con todos los dedos extendidos).
Guille: Los invitados.
Beatriz: Los invitados. ¿Y entonces, sobran?
Guille: Dos [los dedos de la otra mano que son sillas, pero no tienen invitado].

3. Conclusiones

Al iniciar este trabajo, teníamos ciertas dudas (que todavía nos harán reflexionar mucho durante el resto del curso) acerca de la adecuación del tipo de actividad que proponemos al desarrollo cognitivo de los pequeños de 4 y 5 años. Nuestra postura actual al respecto es que, aunque algunos niños no manifiesten interés por el tipo de actividad matemática concreta que le planteamos, si hay otros muchos que sí se implican en una tarea genuinamente matemática de modelización y, en todo caso, consideramos de acuerdo con Paniagua y Palacios (2006) que uno de los roles del maestro es ampliar el campo de intereses de los niños y que “por su interés e importancia y por la ventaja de un tratamiento temprano, merece la pena abordar algunos contenidos hacia los que inicialmente los niños no muestran interés”

(p. 20). Pensamos que este es el caso de la resolución de problemas, como futuro fundamento del aprendizaje de la aritmética.

En este sentido, una de las principales conclusiones de nuestro trabajo es que las niñas y niños de 4 y 5 años pueden desarrollar una actividad de resolución de problemas, siendo las dificultades que van a afrontar en este tipo de actividad más de tipo afectivo (de interés, motivación, etc.), que de tipo cognitivo. Alguna maestra señalaba con sorpresa, en una de las sesiones, que “todos los alumnos que habían intentado resolver el problema, lo habían conseguido”.

El uso de literatura infantil en las sesiones de problemas ha resultado fundamental. Por una parte, los niños disfrutan muchísimo con la lectura de los cuentos, reforzando el aspecto afectivo de la actividad. Por otra, el objetivo matemático del uso de los cuentos es que los pequeños conozcan una historia, en la que se basa el problema, de modo que el enunciado del problema les resulte familiar y puedan darle sentido y elaborar un modelo que les permita resolverlo. En este sentido, cabe considerar un éxito el uso de los cuentos dentro del taller. Un aspecto sobre el que habrá que reflexionar en el futuro es que algunos niños han resuelto los problemas empleando la imagen mental que han creado sobre ciertas escenas del cuento, aplicando el conteo. Para evitar esta situación, ya que deseamos que los pequeños elaboren un modelo completo de la situación que les ayude a resolver el problema, nos planteamos dos alternativas para el futuro: utilizar enunciados que no se ajusten exactamente a ninguna escena concreta del cuento (como hicimos en el problema de los cocodrilos, en que nos inventamos dos primos que venían de visita) o utilizar cuentos sin ilustraciones.

Para terminar, nuestra propuesta centrada en las ‘matemáticas de las cantidades’, claramente inspirada en las ideas de Resnick (1992) y Carpenter y otros (1999), está dirigida a todas las maestras y maestros de Educación Infantil (0-6 años), e incluso de los primeros años de Educación Primaria (6-12 años). Nuestro objetivo es proponer para ellos un ejemplo de cómo los niños pueden hacer matemáticas, y desarrollar prácticamente todas las competencias señaladas en un marco internacional como el de PISA 2003, a través de un tipo de actividad matemática rica, profunda, y a la vez adecuada para su edad. No hay necesidad de adelantar contenidos de cursos posteriores, ni de imponer un tipo de matemáticas, las ‘matemáticas del número’ y de las operaciones descontextualizadas, que producen a los pequeños grandes dificultades de aprendizaje.

Agradecimientos

Agradecemos la participación de los maestros Víctor M. García Rouco y Eva M. Pan Bohórquez (Víctor y Eva en el texto) que han llevado a cabo dos de los talleres de 4-5 años. También agradecemos el apoyo de la directora del CEIP Virgen de Peña Sacra Mercedes Jiménez Rumbo y de la Jefa de Estudios Teresa Torra López, cuyo apoyo ha sido fundamental en el desarrollo del proyecto. Y, por supuesto, a Ares González Hueso, “elemento motivador” del taller, que nos envía sus problemas.

Bibliografía

Carle, E. (2006): *Diez patitos de goma*. Kókinos, Madrid.

Carpenter, T., Ansell, E., Franke, M., Fennema, E., y Weisbeck, L. (1993). *Models of problem solving: a study of kindergarten children's problem-solving processes*. Journal for Research in Mathematics Education, *24*(5), 428-441.

Carpenter, T. P., Fennema, E., Franke, M. L., Levi, L., & Empson, S. B. (1999): *Children's mathematics: Cognitively guided instruction*. Heinemann, Portsmouth.

Clements, D. H. (2004). *Major themes and recommendations*. In D. H. Clements, J. Sarama, & A. M. DiBiase (eds.), Engaging young children in mathematics: Standards for early childhood mathematics education (pp. 7-72). Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.

Colburn, W. (1826): *Intellectual arithmetic upon the inductive method of instruction*. William J. Reynolds & Co, Boston.

De Castro, C. y Escorial, B. (2007a): *Resolución de problemas aritméticos verbales en la Educación Infantil: Una experiencia de enfoque investigativo*. Indivisa, Boletín de Estudios e Investigación, Monografía IX, pp. 23-47.

De Castro, C., y Escorial, B. (2007b): *Iniciación a la lectoescritura de números de dos cifras a los cinco años: Una narrativa de la actividad infantil*. Em P. Pequito e A. Pinheiro (Coord.), Quem Aprende Mais? Reflexões sobre Educação de Infância (pp. 157-168). Gailivro, Porto.

Hughes, M. (1987): *Los niños y los números: Las dificultades en el aprendizaje de las matemáticas*. Planeta, Barcelona.

Lacroix, S. F. (1825): *Elementary treatise on arithmetic*. University Press, Cambridge.

Lamíquiz, V. (1991): *La cuantificación lingüística y los cuantificadores*. UNED, Madrid.

Mejuto, E. M., y Mora, S. (2008): *La casa de la mosca fosca*. Kalandraka, Pontevedra.

Ministerio de Educación y Ciencia (2007). ORDEN ECI/2211/2007, de 12 de julio, por la que se establece el currículo y se regula la ordenación de la Educación primaria. *BOE* núm. 173, viernes 20 de julio de 2007, pp. 31487-31566. Disponible en http://www.boe.es/

Ministerio de Educación y Ciencia (2008). ORDEN ECI/3960/2007, de 19 de diciembre, por la que se establece el currículo y se regula la ordenación de la educación infantil. BOE núm. 5, sábado 5 enero de 2008, pp. 1016-1036. Disponible en http://www.boe.es/

OCDE (2005). *Informe PISA 2003: Aprender para el mundo del mañana*. Madrid: Santillana.

Paniagua, G., y Palacios, J. (2006): *Educación infantil: Respuesta educativa a la diversidad*. Alianza Editorial, Madrid.

Ramos, M. (2004): *¡Mamá!* Corimbo, Barcelona.

Resnick, L. B. (1992): From protoquantities to operators: Building mathematical competence on a foundation of everyday knowledge. In G. Leinhardt, R. Putnam, & R. A. Hattrup (Eds.), *Analysis of arithmetic for mathematics teaching* (pp. 373-429). Lawrence Erlbaum Associates, Hillsdale, NJ.

Warfield, J., & Yttri, M. J. (1999): *Cognitively guided instruction in one kindergarten classroom*. En J. Copley (Ed.), *Mathematics in the early years* (pp. 103-111). NCTM-NAEYC, Reston-Washington.

Carlos de Castro Hernández, es profesor de Didáctica de las Matemáticas en el Centro Superior de Estudios Universitarios La Salle (Universidad Autónoma de Madrid) y en el Departamento de Didáctica de las Matemáticas de la Universidad Complutense de Madrid. Email: **c.castro@lasallecampus.es**; **carlos.decastro@edu.ucm.es**

Clara Pastor Llamas, es Licenciada en Ciencias de la Actividad Física y del Deporte por la Universidad Politécnica de Madrid y estudiante de magisterio en el CSEU La Salle (Universidad Autónoma de Madrid). Email: **cpasll@campuslasalle.es**

Lidia Cayetana Pina Plaza, es Técnico Superior en Educación Infantil y estudiante de magisterio en el CSEU La Salle (Universidad Autónoma de Madrid). Email: **lpinpl@campuslasalle.es**

María Isabel Rojas Díez, es Auxiliar Técnico Especialista en el Colegio Virgen de Peña Sacra de Manzanares el Real (Madrid, España) y estudiante de magisterio en el CSEU La Salle (Universidad Autónoma de Madrid). Email: **mrojdi@campuslasalle.es**

Beatriz Escorial González, es maestra especialista en Educación Infantil por el CSEU La Salle (Universidad Autónoma de Madrid), licenciada en Psicología por la Universidad Nacional de Educación a Distancia (UNED). Es maestra en el Colegio Virgen de Peña Sacra de Manzanares el Real (Madrid, España). Email: **bescorial@hotmail.com**

UNIÓN
REVISTA IBEROAMERICANA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA

Junio de 2009, Número 18, páginas 129-134
ISSN: 1815-0640

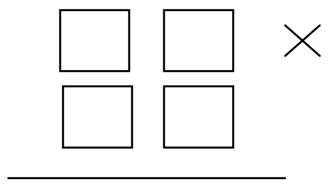
El rincón de los problemas

Uldarico Malaspina Jurado
Pontificia Universidad Católica del Perú
umalasp@pucp.edu.pe

Producto máximo

Problema

Dados los dígitos a, b, c y d, siendo a < b < c < d, escoge dos de ellos para escribir un multiplicando de dos cifras y otros dos para escribir un multiplicador de dos cifras, todas diferentes entre sí, de modo que el producto sea máximo.



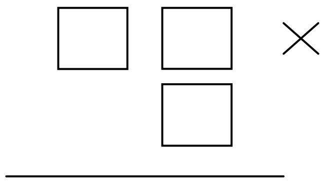
Los lectores de UNION, y en particular de esta sección, recordarán que traté un problema similar en el número 11. Entonces contaba la experiencia didáctica con un niño de quinto grado de primaria al haber propuesto el problema considerando un factor de dos dígitos y otro de un dígito, y hacía algunos análisis usando criterios del enfoque ontosemiótico de la cognición e instrucción matemática.

Me he animado a compartir con los lectores este problema similar, porque tuve otra experiencia didáctica al aplicarlo a jóvenes de secundaria, participantes voluntarios de un taller sobre matemáticas, en el marco del *Primer Encuentro Iberoamericano de Jóvenes con Capacidades Superiores*, realizado en Lima, en agosto del 2008. Fueron 24 en total, 9 mujeres y 15 varones y su edad promedio fue 15,6 años.

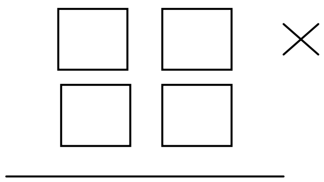
Ahora haré algunos análisis y comentarios a las soluciones presentadas de este problema, que fue uno de varios problemas trabajados en el taller, la mayoría de ellos en forma grupal y en contextos lúdicos.

El problema no fue propuesto aisladamente. A continuación copio las cuatro primeras cuestiones planteadas a los jóvenes, para ser resueltas trabajando individualmente.

a) Dados los dígitos 5, 6, 8 y 9, escoge tres de ellos para escribir un multiplicando de dos cifras y un multiplicador de una cifra, todas diferentes entre sí, de modo que el producto sea máximo.



b) Dados los dígitos a, b, c y d, siendo a < b < c < d, escoge dos de ellos para escribir un multiplicando de dos cifras y otros dos para escribir un multiplicador de dos cifras, todas diferentes entre sí, de modo que el producto sea máximo.



c) Explica cómo llegaste a la respuesta que diste en (a)

d) Explica cómo llegaste a la respuesta que diste en (b)

La intención de las partes *c* y *d* es indagar los procedimientos y las argumentaciones a los resultados obtenidos, ya que en *a* y *b* se les deja amplia libertad para que escriban sus resultados, sin que necesariamente tengan que explicitar sus razones.

Puede verse que el nivel de dificultad de *b* es mayor que el de *a*, pues no sólo se pasa a trabajar con ambos factores de dos dígitos, sino con un criterio de generalidad. La intención era que la experiencia de trabajar con números específicos en *a*, los ayude a resolver *b*. 16 jóvenes dieron soluciones correctas de *a*; 11 dieron soluciones correctas de *b* y 8 respondieron correctamente *a* y *b*

Es muy interesante examinar las soluciones y las explicaciones dadas por los jóvenes. Para que los lectores tengan una idea global de ellas, sin revisar cada una de las hojas escritas, muestro cuatro cuadros, considerando algunos criterios acerca de sus explicaciones y de lo observado en sus hojas de respuestas. He llamado situación A a la que conforman las cuestiones *a* y *c* y situación B a la que conforman las cuestiones *b* y *d.* Un primer análisis de estas situaciones se muestra en los cuadros 1 y 2.

Cuadro 1: Sobre las cuestiones *a* y *c*

A (a y c)						
Solución		**Procedimiento / Explicación**				
Incorrecta	**Correcta**	**Inconsis-tente**	**Tanteo**	**Tanteo Inteligente**	**Raz. Abstracto**	**Raz. Abst. Riguroso**
8	**16**	**1**	**8**	**9**	**6**	**0**

He considerado:

- *Solución correcta*, en todos los casos en los que se ha escrito

$$\begin{array}{ccc} \boxed{8} & \boxed{6} & \times \\ & \boxed{9} & \end{array}$$

- Una *explicación inconsistente*, aquella que no muestra coherencia entre lo dicho y lo hecho.

- Un procedimiento por *tanteo*, aquel que muestra cálculos (o dice haberlos hecho) con diversas posibilidades, sin examinar previamente qué posibilidades son las que dan los más altos productos.

- Un procedimiento por *tanteo inteligente*, aquel que muestra cálculos (o dice haberlos hecho) considerando solo las posibilidades que dan los productos más altos.

- Un procedimiento por *razonamiento abstracto*, aquel que examina la situación más allá de casos particulares, buscando o dando razones – no necesariamente correctas – para que los dígitos ocupen determinados lugares a fin de obtener el máximo producto.

- Un procedimiento por *razonamiento abstracto riguroso*, aquel que examina la situación más allá de casos particulares, explicando correctamente las razones por las cuales tres de los cuatro dígitos dados deben estar ubicados de determinada manera en las casillas para que el producto sea máximo.

Cuadro 2: Sobre las cuestiones *b* y *d*

B (b y d)						
Solución		Procedimiento / Explicación				
Incorrecta	Correcta	Inconsis tente	En blanco	P → G	Raz. Abstracto	Raz. Abst. Riguroso
13	11	1	2	12	9	0

En este caso, he considerado:

- *Solución correcta*, en todos los casos en los que se ha escrito

$$\begin{array}{ccc} \boxed{d} & \boxed{a} & \times \\ \boxed{c} & \boxed{b} & \end{array}$$

- Un procedimiento **P → G**, aquel que asigna valores particulares a las variables a, b, c y d (casi en todos los casos los números 1, 2, 3 y 4 respectivamente), busca el producto máximo en tal caso y luego generaliza regresando a las variables, según la ubicación de los valores particulares dados.
- Un procedimiento por *razonamiento abstracto riguroso*, aquel que examina la situación más allá de casos particulares, explicando correctamente las razones por las cuales cuatro dígitos dados, diferentes entre sí, deben estar ubicados de determinada manera en las casillas para que el producto sea máximo.
- Los otros procedimientos o explicaciones, que coinciden con los considerados en la situación A, se asumen con los mismos criterios.

Los cuadros 3 y 4 muestran algunos cruces de la información registrada en las situaciones A y B respectivamente.

Cuadro 3: Soluciones y Explicaciones/ Procedimientos en la situación A

A	Exp. Incon-sistente	Tanteo	Tanteo inteligente	Raz. abstracto	Raz. abstracto riguroso	Totales
Sol. correcta	0	4	9	3	0	16
Sol. incorrecta	1	4	0	3	0	8

Cuadro 4: Soluciones y Explicaciones/ Procedimientos en la situación B

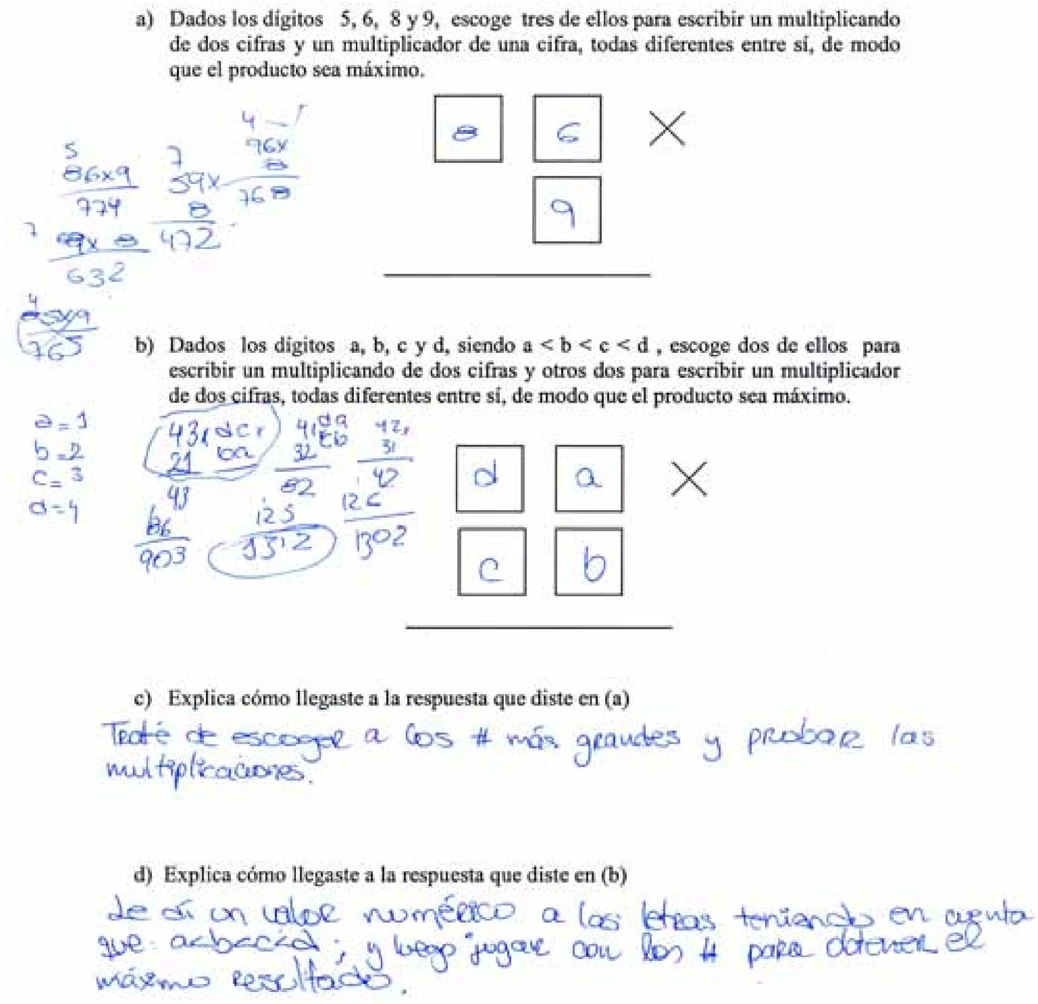
B	Exp. incon-sistente	En blanco	P → G	Raz. abstracto	Raz. abstracto riguroso	Totales
Sol. correcta	0	1	6	4	0	11
Sol. incorrecta	1	1	6	5	0	13

Algunos comentarios

1. La información cuantitativa que he mostrado es solo una parte de los diversos análisis que se pueden hacer a partir de esta experiencia didáctica, sobre todo cualitativamente y teniendo en cuenta que los participantes fueron jóvenes seleccionados de sus centros educativos por haber mostrado “capacidades superiores”, aunque no específicamente en matemáticas. Los diversos marcos teóricos sobre la enseñanza y el aprendizaje de la matemática pueden dar muchas luces al respecto.
2. Algunos aspectos de la información registrada llaman la atención y suscitan preguntas y algunas pistas para hacer investigaciones:
    a. En ninguna de las situaciones se encuentra una solución con un procedimiento abstracto riguroso. ¿Podemos afirmar que esto es natural, considerando la edad de los jóvenes? ¿No es una muestra de la forma en que se enseña la matemática en el nivel secundario y cómo se induce a resolver problemas; es decir, dando poca importancia a los razonamientos más generales?
    b. En la situación A predomina el tanteo y un poco más el tanteo inteligente (Cuadro 1). Más aún, todos los que procedieron con un tanteo inteligente dieron una respuesta correcta (Cuadro 3). ¿Está jugando un papel importante la intuición? Siendo un problema de optimización, ¿Estamos teniendo otra muestra de existencia de “intuición optimizadora”?
    c. En la situación B predomina el procedimiento **P → G.** ¿Este es un procedimiento inducido en las clases, o una manera intuitiva de ver lo general en lo particular? Por cierto, es un asunto delicado, pues siendo muy importante examinar casos particulares, si no se tiene plena conciencia de la dualidad ejemplar-tipo (usando términos del enfoque ontosemiótico), en muchos casos se puede pasar fácilmente a hacer falsas generalizaciones. De hecho, el 50% de los que usaron este procedimiento no llegaron a una respuesta correcta.

Dejo a los lectores las inquietudes que provocan estas situaciones y la información cuantitativa mostrada. Sería interesante replicar la experiencia – no necesariamente con jóvenes con capacidades superiores – y profundizar investigaciones con marcos teóricos como el enfoque ontosemiótico de la cognición e instrucción matemática o las situaciones didácticas, y con métodos de investigación como la ingeniería didáctica. Me dará mucho agrado recibir comentarios y propuestas de investigación.

Para una mejor aproximación a la experiencia didáctica realizada, muestro a continuación la hoja de trabajo de uno de los jóvenes.



a) Dados los dígitos 5, 6, 8 y 9, escoge tres de ellos para escribir un multiplicando de dos cifras y un multiplicador de una cifra, todas diferentes entre sí, de modo que el producto sea máximo.

8 6 ×
9

b) Dados los dígitos a, b, c y d, siendo a < b < c < d , escoge dos de ellos para escribir un multiplicando de dos cifras y otros dos para escribir un multiplicador de dos cifras, todas diferentes entre sí, de modo que el producto sea máximo.

a = 1
b = 2
c = 3
d = 4

d a ×
c b

c) Explica cómo llegaste a la respuesta que diste en (a)

Traté de escoger a los # más grandes y probar las multiplicaciones.

d) Explica cómo llegaste a la respuesta que diste en (b)

le di un valor numérico a las letras teniendo en cuenta que a<b<c<d; y luego jugué con los # para obtener el máximo resultado.

UNIÓN
REVISTA IBEROAMERICANA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA

Junio de 2009, Número 18, páginas135-149
ISSN: 1815-0640
Coordinado por
Agustín Carrillo de Albornoz

Desarrollo de software para El aprendizaje y razonamiento probabilístico: El caso de SIMULAPROB

Santiago Insunza; Diego Alonso Gastélum; Anselmo Alvarez

Resumen

Se discute el desarrollo y puesta a prueba de un software para apoyar la enseñanza y aprendizaje de la probabilidad desde un enfoque frecuencial. El software ha sido desarrollado en lenguaje JAVA bajo principios constructivistas de aprendizaje y considerando sugerencias de la investigación en educación estadística. El software permite abordar conceptos como aleatoriedad, noción frecuencial de la probabilidad, espacio muestral, modelos de urna, distribuciones de probabilidad (binomial e hipergeométrica); además permite explorar resultados teóricos y empíricos y el efecto que el número de simulaciones tiene en dichos resultados.

Abstract

We are discusses the development and testing of educational software to support the teaching and learning of probability from a frequency approach. The software has been developed in JAVA language considering constructivist learning principles and suggestions from research in statistics education. The software allows exploring concepts such as randomness, frequency notion of probability, sample space, urn models for probability distributions (binomial and hypergeometric), can also explore theoretical and empirical results and the effect the number of simulations on the probabilities.

Resumo

Discute-se o desenvolvimento e o teste de um software para apoiar o ensino da probabilidade desde um enfoque frequencial. O software foi desenvolvido na linguagem Java sob princípios construtivistas de aprendizagem e considerando sugestões da pesquisa em educação estatística. O software permite abordar conceitos como aleatoriedade, noção frequencial de probabilidade, espaço amostral, modelos de urna, distribuições de probabilidade (binomial e hipergeométrica); além disso permite explorar resultados teóricos e empíricos e o efeito que o número de simulações tem nesses resultados.

Introducción

La enseñanza de la probabilidad en la educación básica (6- 14 años de edad) fue motivo de controversia por muchos años a raíz de los estudios de Piaget y sus colaboradores, los cuales muestran el requisito de las operaciones formales en el desarrollo intelectual de los niños para la adquisición del concepto de probabilidad (desde un punto de vista clásico) y su correspondiente razonamiento. Sin embargo, otros estudios enfocados en investigar el efecto de la enseñanza en las intuiciones de los estudiantes, como es el caso de los estudios realizados por Fischbein y colaboradores (Fischbein, 1975; Fischbein y Gazit, 1984) han mostrado que la noción de probabilidad y la intuición probabilística puede ser adquirida por los niños desde un punto de vista frecuencial desde el nivel elemental, siempre que reciban una enseñanza adecuada basada en actividades experimentales.

A partir de entonces, la probabilidad ha cobrando cada vez mayor importancia como eje del currículo escolar de matemáticas, sobre todo a partir del reconocimiento que se le ha dado a la presencia del azar y la incertidumbre como fenómenos de la vida cotidiana, profesional y científica de los ciudadanos. Ejemplos de ello se pueden encontrar en los documentos curriculares de diversos países (NCTM, 1989; NCTM, 2000; SEP, 1993; MEC, 1992); en reportes, estudios y recomendaciones de asociaciones que promueven la educación estadística y de investigadores en esta área (Coob, 1992; ASA, 2005).

En lo que respecta al bachillerato (15-17 años), bajo el supuesto que los estudiantes han alcanzado la etapa de las operaciones formales, la enseñanza de la probabilidad –al menos en el caso de México- por muchos años ha hecho énfasis en el enfoque clásico, con un uso a veces excesivo de técnicas combinatorias y conceptos formales, los cuales son más propios de un curso de probabilidad a nivel universitario. De acuerdo con Godino et al., (1996, p. 9), ello crea un serio problema didáctico, ya que la mayoría de los estudiantes en los cursos de bachillerato y en el nivel universitario para estudiantes no matemáticos, no es fácil comprender un desarrollo axiomático formal de la teoría de la probabilidad, sobre todo cuando les falta preparación intuitiva previa necesaria.

Ante la problemática anterior, se han realizado propuestas curriculares y recomendaciones para la enseñanza de la probabilidad, las cuales buscan un mayor equilibrio entre el enfoque clásico, frecuencial y subjetivo (por ejemplo, Godino et al., 1996; Shaughnessy et al., 2004). Tales propuestas recomiendan una metodología de enseñanza que considera la experimentación y simulación de fenómenos aleatorios, con lo cual se pretende que el alumno obtenga datos reales o simulados, que haga predicciones acerca de los posibles resultados, que compare sus predicciones con los resultados experimentales y finalmente que los valide mediante un modelo teórico apropiado.

Por ejemplo, el Consejo de Profesores de Matemáticas de los Estados Unidos en su documento titulado Principios y Estándares para la Educación Matemática, recomienda que los problemas de probabilidad puedan ser investigados primeramente por medio de simulaciones para obtener una respuesta aproximada y después usar un modelo teórico para encontrar la solución exacta. Por su parte, Shaughnessy (1992, p. 469) señala sobre la conveniencia de utilizar uno u otro enfoque (clásico o frecuencial):

> Aunque algunos experimentos en probabilidad se pueden modelar mejor en un espacio con probabilidad uniforme (enfoque clásico), otros se pueden

> modelar mejor desde una perspectiva frecuencial. Existen problemas en los que es deseable un "matrimonio" entre las frecuencias experimentales y la teoría clásica. Sin embargo, existen otros problemas en los que ni siquiera existe una solución teórica, o no se puede disponer de ella para dársela a los estudiantes; en tales casos el enfoque frecuencial tiene un gran mérito. También existen problemas de probabilidad en los que el conflicto entre las tendencias subjetivistas y la teoría clásica se pueden resolver adoptando un punto de vista frecuencial y ejecutando una simulación. Así, yo apoyaría un punto de vista pragmático que implique la modelación de varias ideas de probabilidad.

De esta manera, una enseñanza de la probabilidad que toma en cuenta el enfoque frecuencial presenta varias ventajas didácticas respecto a la enseñanza centrada solamente en el enfoque clásico. Mencionamos las siguientes:

1. Se facilita una enseñanza basada en la experimentación, a través de la cual los estudiantes pueden construir ideas correctas acerca de conceptos probabilísticos.
2. Sirve de puente entre la probabilidad y la estadística, ayudando con ello a comprender la relación tan estrecha que hay entre datos y azar, situación bastante sugerida en muchos currículos actuales.
3. Amplía el campo de aplicaciones de la probabilidad, abordando problemas donde no se cumple necesariamente el principio de equiprobabilidad que exige en enfoque clásico.

Sin embargo, para poder implementar el enfoque frecuencial en la enseñanza de la probabilidad, la computadora es un elemento indispensable, pues realizar los experimentos en forma manual requiere de mucho tiempo, por la gran cantidad de repeticiones de un experimento que hay que realizar para que las frecuencias relativas se estabilicen y se acerquen lo más posible a las probabilidades teóricas, como lo establece la ley de los grandes números en probabilidad.

De esta manera y ante la escasez de herramientas de software educativo con capacidades flexibles de simulación para estudiantes de bachillerato y cursos introductorios en la universidad, nos hemos propuesto desarrollar una herramienta que permita abordar la enseñanza de la probabilidad desde la perspectiva frecuencial, con el propósito de mejorar la intuición y el razonamiento probabilístico de los estudiantes a través de la simulación de experimentos aleatorios. El diseño del software lo hemos visualizado desde la perspectiva de herramienta cognitiva, con un adecuado nivel de interactividad que permita al estudiante definir una serie de parámetros que tienen influencia en los resultados, los cuales pueden ser visualizados por medios de diversas representaciones gráficas y numéricas ligadas entre sí y con posibilidades de una retroalimentación inmediata.

La computadora en la enseñanza de la probabilidad

A pesar del crecimiento que ha venido experimentando la producción de software para la enseñanza de las matemáticas en los últimos años, el software para la enseñanza de la probabilidad es aún escaso. Biehler (1991) señala entre las causas de ello, la reciente incorporación de la probabilidad en el currículo de muchos países, y por ende la insuficiente investigación acerca de muchos de sus problemas de enseñanza y aprendizaje. Sin embargo, dicha situación se ha empezado a revertir y cada vez más se desarrollan nuevas herramientas de software para la enseñanza de la probabilidad para los diferentes niveles escolares. Algunos ejemplos de estos programas son: Fathom (Finzer et al., 2002), Probability Explorer (Stohl, 1999-2005), Chance-Maker (Pratt, 1998), ProbSim (Konold, 1992-2003). Además, otro tipo de recursos basados en ambientes Web empiezan a surgir con el propósito de apoyar los cursos de probabilidad y estadística. Tal es el caso de los Java Applets, que son pequeños programas que se ejecutan en línea en una página de Internet. Ejemplos de los diversos recursos que existen en Internet para apoyar la educación estadística son descritos en Inzunsa (2007) y Garfield y Ben-Zvi (2008).

Uno de los aspectos más relevantes en los que la computadora puede ser de gran utilidad como herramienta pedagógica para la enseñanza de la probabilidad es la simulación de fenómenos aleatorios (Inzunsa y Quintero, 2007; Chance, et al., 2007). La simulación consiste en sustituir un experimento aleatorio por otro equivalente. En el caso de una simulación por computadora, mediante diversas instrucciones es posible construir un modelo que represente dicho fenómeno. Así, el estudiante puede explorar y comprender conceptos y principios que de otro modo serían mucho más abstractos, contribuyendo con ello a mejorar la experiencia estocástica y la intuición probabilística.

Biehler (1991), señala que la enseñanza de la probabilidad apoyada con tecnología computacional y con una metodología pedagógica apropiada, puede presentar las siguientes ventajas:

1. El número de repeticiones es fácilmente incrementado, haciendo que la incertidumbre y la variabilidad de los resultados se reduzcan; nuevas clases de patrones pueden ser detectados.
2. Es posible una exploración extensiva cambiando los supuestos del modelo, haciendo experimentos adicionales, cambiando la forma de generar los datos, etc.
3. Representaciones nuevas y más flexibles están disponibles para expresar modelos y procesos estocásticos y despliegue de datos con facilidades gráficas.

Por su parte, Chance et al., (2007) identifican diversas formas en las cuales la tecnología computacional puede apoyar el aprendizaje de los estudiantes:

1. Automatizando cálculos y gráficas
2. En la exploración de los datos
3. En la visualización de conceptos abstractos
4. En la simulación de fenómenos aleatorios
5. En la investigación de problemas reales
6. Proporcionando herramientas de colaboración entre estudiantes

De esta manera, a través de la simulación, conceptos fundamentales en probabilidad y estadística, como la ley de los grandes números, la aleatoriedad, el teorema del límite central, la variabilidad muestral, distribuciones de probabilidad, pueden ser explorados por los estudiantes con relativa facilidad. Así, en poco tiempo es posible observar como convergen las frecuencias en los resultados de un experimento aleatorio conforme aumentamos el número de repeticiones o cómo se comporta la distribución de un estadístico en las muestras extraídas de una población a medida que aumentamos el tamaño de la muestra.

Principios teóricos en el diseño del software SIMULAPROB

De acuerdo con las clasificación de software educativo que hacen Hinostroza et al., (2000), SIMULAPROB ha sido concebido como un software que se ubica en la categoría de herramientas cognitivas (Pea, 1987; Jonassen, 1994, Ben-Zvi, 2000), con capacidad para realizar simulaciones de fenómenos aleatorios discretos y con posibilidad de que los usuarios establezcan relaciones entre resultados empíricos y teóricos. Además del desarrollo del software, el proyecto contempla algunas actividades didácticas las cuales van incorporadas en el software mismo.

Pea (1987, p. 91) define una herramienta cognitiva como "cualquier medio que ayuda a trascender las limitaciones de la mente, en el pensamiento, el aprendizaje y las actividades de resolución de problemas. Pea define ciertas funciones, que él llama, trascendentes, las cuales deben ser incorporadas en un software para que la computadora funcione como una verdadera herramienta cognitiva y promueva la actividad cognitiva de los estudiantes en el aprendizaje de la matemáticas. Dichas funciones, las interpretamos como las características que deben regir el diseño de software para la educación matemática. Existen dos tipos de de funciones trascendentes:

- *Funciones propósito*

Estas funciones promueven que los estudiantes lleguen a ser partícipes de lo que aprenden y no se limiten ser ejecutores de instrucciones. Esto es, el software debe dar oportunidad al usuario de generar partes del proceso de resolución de los problemas o de la exploración de los conceptos que se pretende que el aprenda. Es decir, el software no debe ser una "caja negra" en el cual el estudiante sólo se limita a introducir datos y a recibir resultados.

- *Funciones proceso* Las funciones proceso por su parte, permiten abstraer al usuario de tareas laboriosas y rutinarias, y coadyuvan en la exploración de conceptos, permitiendo que en el caso de los estudiantes, generen sus propias conclusiones. Para ello cuentan con las siguientes herramientas:

1. Herramientas para desarrollar la fluidez conceptual.
2. Herramientas de exploración matemática
3. Herramientas de representación.

En este sentido, el diseño del software tiene en cuenta principios constructivistas del aprendizaje y resultados de investigación en el área de didáctica de la probabilidad. Se pretende que el usuario sea partícipe en la construcción de su propio conocimiento al interactuar con las diferentes componentes y representaciones del software, las cuales estarán diseñadas para generar dicha interacción. En un ambiente constructivista se ve al estudiante como un elemento activo que participa en la construcción de su propio conocimiento, y las computadoras son medios excepcionales para el aprendizaje constructivista (Noss & Hoyles, 1996). Ellas permiten a los usuarios la oportunidad de una retroalimentación de sus acciones y los ayudan a tener control sobre su propio aprendizaje.

Descripción de las componentes del software

SIMULAPROB es interactivo, y a través de él los estudiantes pueden simular diversos experimentos aleatorios, principalmente de tipo discreto, como es el lanzamiento de monedas, lanzamiento de dados y de otros fenómenos que conducen a distribuciones de tipo binomial e hipergeométrica que se pueden modelar mediante un modelo de urna, como se muestra en la figura 1:

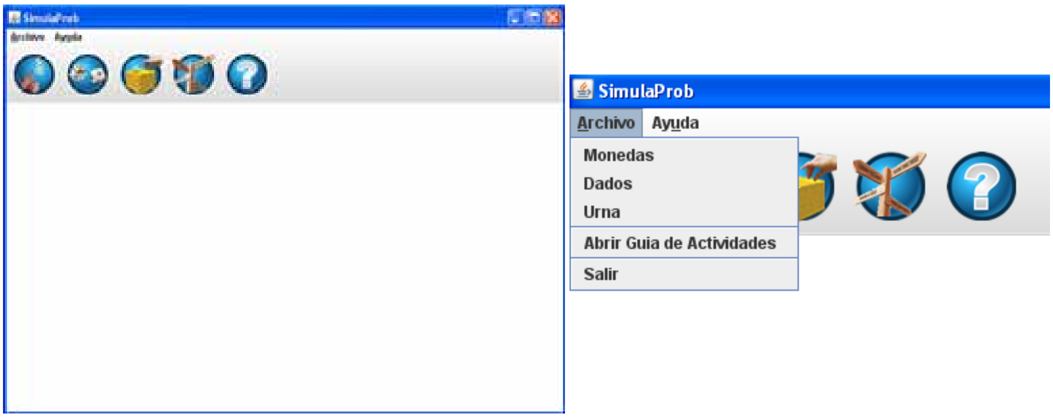


Fig. 1: Pantalla principal de SIMULAPROB

1. Ventana de diseño de los experimentos y resultados

Una vez que se ha seleccionado una opción (monedas, dados o urna) el software despliega la ventana de diseño de experimentos, lo cual permite al usuario definir los parámetros de la simulación. Por ejemplo la ventana de diseño de un modelo de urna se muestra en la figura 2. Por su parte, la figura 3 muestra la ventana de diseño de experimentos y resultados para la simulación de monedas.

2. Representaciones gráficas

De acuerdo con la tipología de funciones cognitivas definidas por Pea (1987), las herramientas de representación son parte de las funciones proceso y ocupan un lugar muy importante en un software para la enseñanza de las matemáticas. SIMULAPROB posee diferentes tipos de gráficas que permiten visualizar los resultados que son de interés en la simulación.

En el enfoque frecuencial de la probabilidad es sumamente importante comprender que las frecuencias relativas tienden a estabilizarse alrededor del valor de la probabilidad del evento de interés, conforme se incrementa en número de observaciones o repeticiones de un fenómeno aleatorio. Es importante observar la variabilidad que existen cuando se tienen pocos lanzamientos; ello puede contribuir a que no es posible confiar en pequeñas muestras cuando se estudian fenómenos estocásticos.

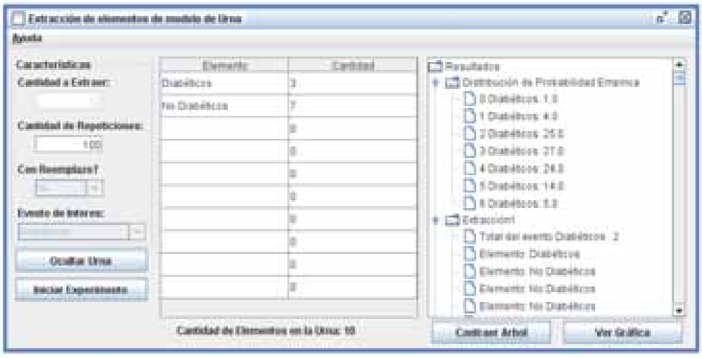


Fig. 2: Ventanas de definición de modelo, parámetros de la simulación y resultados para el caso de la urna

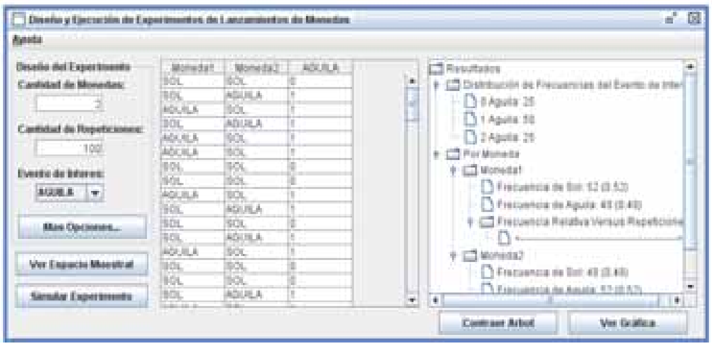


Fig. 3: Ventana de definición de parámetros de la simulación y resultados para el caso de monedas

La figura 4 muestra el comportamiento de la frecuencia relativa del evento de interés (águila) en la simulación del lanzamiento de 10 y 100 monedas respectivamente. Otra característica importante del software que puede visualizarse en esta figura y que identificamos como parte de las herramientas de exploración definidas por Pea (1987), es la posibilidad de construir diversas gráficas de los mismos resultados cambiando algún parámetro de la simulación.

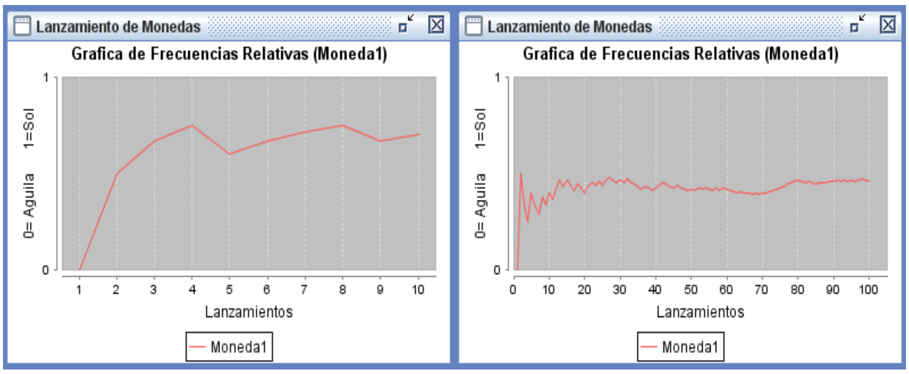


Fig. 4: Gráfica de frecuencia relativa de águilas vs. cantidad de lanzamientos de una moneda

Otra parte importante que hemos considerado en el diseño del software es el recurso de convertir el evento de interés en una variable aleatoria con el propósito de construir su distribución de frecuencias y compararla con la distribución teórica, una situación muy sugerida en didáctica de la probabilidad. Con ello podemos variar el número de repeticiones del experimento y observar cómo se aproxima la distribución de frecuencias (empírica) a la distribución de probabilidad teórica, como se muestra en la figura 5.

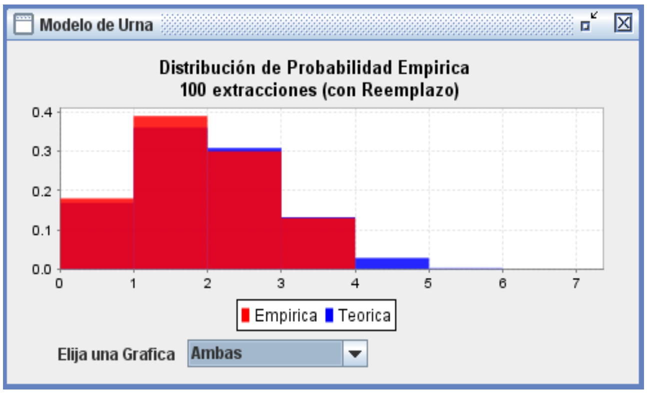
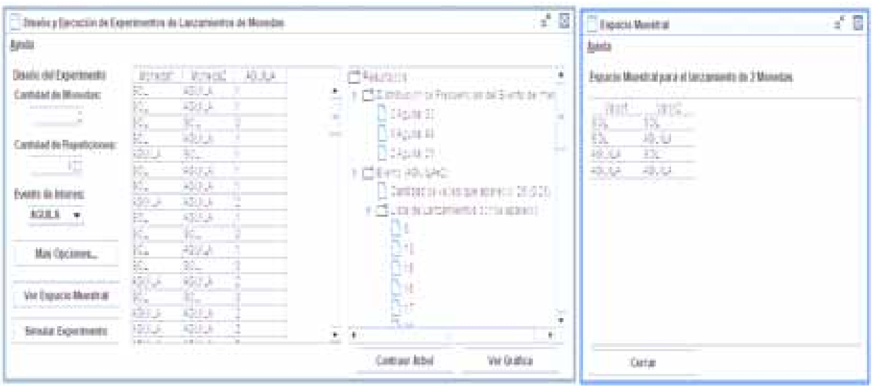


Fig. 5: Comparación de distribución empírica y distribución teórica de probabilidad

1. Otras opciones en la ventana de diseño

En el caso de las monedas y los dados, la ventana de diseño del experimento dispone de otras opciones, como desplegar el espacio muestral y definir algún evento de interés del que interese observar su frecuencia. La figura 7, muestra la ventana en la cual se simulan 100 lanzamientos de dos monedas y en la que se define "águila" como evento de interés. El cuadro de resultados muestra la distribución de frecuencias del evento "águila", la distribución de frecuencias del evento de interés, la frecuencia del evento AA, el cual apareció 26 veces en 100 lanzamientos y el espacio muestral del experimento.



Prueba piloto del software SIMULAPROB

Con el propósito de verificar la funcionalidad del software, realizamos una primera prueba a nivel de aula, para detectar posibles errores en su diseño y para tener un primer acercamiento sobre la comprensión y razonamiento que desarrollan los estudiantes cuando lo utilizan. Los sujetos participantes formaban parte de un grupo de 35 estudiantes de nuevo ingreso a la Facultad de Informática (18-19 años) que aún no habían tomado el curso de probabilidad; por lo cual, solo contaban con los antecedentes del bachillerato, en el que han recibido una enseñanza muy ligada al enfoque clásico y uso de técnicas combinatorias para calcular probabilidades.

Se plantearon dos actividades (ver anexo) que requerían utilizar las diversas componentes del software. El profesor (uno de los autores de este artículo) utilizó una computadora con video proyector para guiar a los estudiantes en la primera sesión donde se les instruyó sobre cómo utilizar SimulaProb. El diseño de las actividades contemplaba que los estudiantes primeramente hicieran predicciones sobre los resultados esperados y posteriormente los contrastaran con los resultados de la simulación. A continuación haremos una descripción de las actividades y sus propósitos.

Actividad 1: Explorando secuencias aleatorias y las frecuencias relativas de un evento.

El propósito de la actividad ha sido introducir a los estudiantes a la exploración de secuencias aleatorias y revisar los sesgos que muestran en torno a ellas, así como ver el potencial del software para revertirlas. Además nos proponemos una primera introducción al enfoque frecuencial de la probabilidad.

Observamos que en la primera parte de la actividad, la mayoría de los estudiantes mostró una adecuada percepción de la aleatoriedad, al escribir secuencias que son muy probables de ocurrir con un rango de 3 a 7 águilas o soles en una secuencia de lanzamientos. Sin embargo, en la segunda parte de la actividad donde se les cuestionó sobre la probabilidad de diversas secuencias aleatorias, el 74% incurrió en la heurística de representatividad al considerar la segunda opción como más probable de ocurrir, cuando en realidad todas las opciones tienen la misma probabilidad. Después de la simulación muchos estudiantes que contestaron de manera incorrecta modificaron su respuesta. Veamos algunas respuestas:

- *“Mi resultado elegido apareció hasta la simulación 53, por lo tanto la probabilidad es igual para todas las combinaciones”. Martín.*

- *“Mi opción apareció después de 60 intentos, es más probable que aparezcan en desorden”. Laura.*

- *“Apareció después de 17 veces, por lo que se tiene la misma probabilidad de todos los casos”. Máximo.*

Respecto al comportamiento de las frecuencias relativas conforme se incrementa el número de simulaciones se observó lo siguiente:

- *“De acuerdo a como aumentan los lanzamientos, las frecuencias tienden a ser iguales o casi iguales”. Luis Ernesto.*

- *"Cuando aumentan los lanzamientos en la gráfica, se acerca más a 0.50 de probabilidad". Olga Isabel.*

En resumen, consideramos que este primer encuentro con la aleatoriedad y el enfoque frecuencial de la probabilidad –no obstante que la actividad no se realizó a profundidad-, los estudiantes muestran que han cambiado concepciones equivocadas y que las representaciones del software les han permitido observar algunas propiedades importantes, como es el caso de Olga Isabel que se apoyó en la gráfica de distribución de frecuencias vs. Lanzamientos para emitir su argumentación.

Actividad 2: Introducción a los modelos de urna y distribuciones de probabilidad asociadas al muestreo.

Con esta actividad nos propusimos que los estudiantes pusieran a prueba el modelo de urna del software. Se trata de un problema con contexto de control de calidad que requiere que los estudiantes identifiquen los parámetros en el enunciado del problema y que definan el modelo para simular la extracción de muestras aleatorias. La actividad enfatiza en la identificación de los valores posibles de una variable aleatoria, en el cálculo de probabilidades empíricas y su diferencia con las opciones de reemplazo y no reemplazo.

Los estudiantes en su gran mayoría identificaron que la variable "número de defectuosos" puede tomar valores desde 0 hasta 5. Sin embargo en las predicciones sobre la probabilidad de dichos valores hubo respuestas diversas, lo cual era previsible, dado que algunos valores de la variable tienen probabilidades cercanas entre sí, y no resulta fácil intuir a simple vista cual tiene mayor o menor probabilidad, salvo en el caso del inciso 3 donde es más evidente, puesto que pide señalar cual valor es el menos probable; como el lote tiene un 95% de fusibles no defectuosos resulta poco probable que 5 fusibles sean defectuosos y así lo señalaron prácticamente todos los estudiantes. En el inciso 2 la mayoría de las respuestas se ubicaron en el valor de 0 y 1, siendo correcto el 0. En suma, la mayoría mostró un adecuada intuición probabilística en este problema.

Posteriormente se pidió a los estudiantes comparar la respuesta que habían dado en el inciso anterior con los resultados de la simulación. Algunas respuestas representativas son las siguientes:

- *"Lo que puse arriba parece tener lógica, porque la probabilidad de que salgan 5 defectuosos es casi nula y la probabilidad de que salgan 0 defectuosos es muy probable". Mario Cesar.*

- *"La gráfica nos indica que hay muchísima probabilidad de que salgan 0 defectuosos, y existe mucha diferencia con el 1 que yo había puesto". Janeth.*

En resumen, en la presente actividad los estudiantes mostraron buen dominio de los recursos del software para responder las preguntas planteadas. Los estudiantes pudieron contrastar sus intuiciones que escribieron en la primera parte de la actividad, con la evidencia mostrada por las simulaciones. Además observaron la correspondencia entre la distribución teórica y la distribución de frecuencias.

Conclusiones

El desarrollo de software y otros recursos basados en el uso de computadora para la enseñanza y aprendizaje de la probabilidad y la estadística, constituyen actualmente un área de interés de muchos profesores e investigadores, sobre todo a partir de recientes recomendaciones curriculares y resultados de investigación que alientan su uso en el salón de clases. En el presente trabajo hemos desarrollado una herramienta de software que permite abordar algunos conceptos de probabilidad desde una perspectiva frecuencial, un enfoque de enseñanza sugerido en los programas de los diferentes niveles educativos de muchos países, pero que frecuentemente es relegado por falta de herramientas de software apropiadas, y sobre todo, que estén al alcance de los profesores.

No obstante que la primera prueba del software no se ha realizado en condiciones más extensas y de mayor rigurosidad en la toma de datos, los resultados preliminares muestran que los estudiantes no tuvieron dificultades para utilizarla. Al contrastar los resultados de la simulación con sus predicciones previas, muchos estudiantes lograron confirmar sus intuiciones y razonamientos cuando fueron correctos, en otros casos tuvieron la oportunidad de corregir sus razonamientos, dada la evidencia proporcionada por la simulación. Creemos que las características de herramienta cognitivas del software, como es el caso de la interactividad, representaciones múltiples y flexibilidad, tuvieron influencia en ello. Sin duda se requiere mayor investigación para conocer el verdadero potencial cognitivo de la herramienta para ayudar a los estudiantes a comprender conceptos de probabilidad.

Bibliografía

ASA (2005). *Guidelines for Assessment and Instruction in Statistics Education (GAISE) Report*. American Statistical Association. USA. Extraído el 10/10/2008 de http://www.amstat.org/education/gaise/

Biehler, R. (1991): *Computers in probability education*" En: R. Kapadia y M. Borovcnik (Eds.). *Chance Encounters: probability in education. A review of research and pedagogical perspectives*, 169-212. Kluwer Academic Publishers, Dordrecht.

Ben-Zvi, D. (2000): *Toward Understanding the Role of Technological Tools in Statistical Learning*. Mathematical Thinking and Learning, 2(2), 127-155.

Chance, B. Ben-Zvi, D. Garfield, J. Medina, E. (2007): *The Role of Technology in Improving Student Learning of Statistics*. Technology Innovations in Statistics Education: 1(1). Extraído El 12/01/2009 de:

http://repositories.cdlib.org/uclastat/cts/tise/vol1/iss1/art2

Cobb, G. (1992): *Teaching Statistics*. Em: L. Steen (Ed*.). Heeding the Call for Change: Suggestions for curricular action*, 3-23. MAA Notes 22. Mathematical Association of America.

Garfield, J. Ben-Zvi, D. (2008): *Using Technology to Improve Students Learning Statistics*. Em: J. B. Garfield y D. Ben-Zvi (Eds.) *Developing Students´ Statistical Reasoning,* 91-114. Springer Science+Business Media.

Godino, J. Batanero, C. Cañizares, J.M (1987): *Azar y probabilidad*. Síntesis, Madrid.

Finzer, W. Erickson, T., Binker, J. (2002): *Fathom Dynamic Statistics* Software. Key Curriculum Press Technologies.

Fischbein, E. (1975): *The intuitive sources of probabilistic thinking in children*. Dordrecht: Reidel.

Fischbein, E. Gazit, A. (1984) *Does the teaching of probability improve probabilitic intuitions*?. *Educational Studies in Mathematics*, 15(1), 1-24. Kluwer Academic Publishers.

Hinostroza, J. E. Rehbein, L.E. Mellar, H. Preston, Ch. (2000): *Developing educational software: a professional tool perspective*. Educational and Information Technologies, 5(2), 103-117. Kluwer Academic Publishers

Inzunsa, S. (2007): *Recursos de Interent para apoyo de la investigación y la educación estadística*. Revista Iberoamericana de Educación, 41(4). Extraído el 13/04/2009 de http://www.rieoei.org/experiencias142.htm

Inzunsa, S. Quintero, J. G. (2007): *The Information and Communication Technologies as Cognitive Tools in the Teaching and Learning of the Probability and Statistics*. Em: F. Tremante, F. Welsch y F. Malpica. (Eds.), *Proceedings of the International Conference on Education and Information* Systems, Technologies and Applications, 141-146.

Jonassen, D. H. (1994): *Technology as cognitive tools: learners as designers. Department of Instructional Technology*. University of Georgia. Extraído el 20/10/2007 de http://itech1.coe.uga.edu/itforum/spaper1/paper1.html

Konold, C. Miller, C. (2003): *ProbSim Software*. Scientific Reasoning Research Institute University of Massachusetts, Amherst, MA, USA

MEC (1992): *Diseño Curricular Base para la Educación Secundaria Obligatoria.* Ministerio de Educación y Ciencia. España.

NCTM (1989): *Curriculum and Evaluation Standards for School Mathematics*. Reston, VA.

NCTM (2000): *Principles and Standards for School Mathematics*. Reston, VA.

Noss, R. Hoyles, C. (1996): *Windows on Mathematical Meanings: Learning Cultures and Computers.* Kluwer Academic Publishers, Dordrecht.

Pea, R. (1987): *Cognitive Technologies for Mathematics Education*. En: A. Schoenfeld (Ed.) *Cognitive Science and Mathematics Education*, 89-122. Lawrence Erlbaum Associates Publishers.

Piaget, J. Inhelder, B. (1975): *The origin of the idea of chance in children*. New York.

Pratt, D. (1998): *Chance-Maker Software.*

SEP (1993): *Educación Secundaria. Matemáticas*. Programas de Estudio. Secretaría de Educación Pública. México.

Shaughnessy, M. Barret, G. Billstein, R. Kranendonk, H. Peck, R. (2004): *Navigating through Probability in Grades 9-12*. National Council of Teachers of Mathematics: Reston VA.

Shaughnessy, M. (1992): *Research in Probability and Statistics: Reflections and Directions*. Em: D. Grouws (Ed.). *Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning,* 465-494. New York. Macmillan Publishing Company.

Stohl, H. (2005): *Probability Explorer Software.*

Anexos

Actividad 1:

Enrique y Javier juegan a los volados con una moneda. ¿Cómo piensas que deberían ser los resultados de lanzar una moneda 10 veces seguidas? Anota dos posibles resultados sin lanzar ninguna moneda. Escribe A para *águila* y S para *sol.*

Ahora, supongamos que se han lanzado una moneda seis veces consecutivas, ¿Cuál de los siguientes opciones consideras que es más probable de ocurrir?

a) A A S S S S
b) A S A S A S
c) A A A A A A
d) Todos los resultados anteriores tienen la misma probabilidad de ocurrir.

Instrucciones:

Abre el programa SIMULA-PROB, simula el lanzamiento de una moneda 6 veces en varias ocasiones y anota los resultados que obtuviste.

Observa si aparece el resultado que elegiste en el segundo inciso. En caso contrario, repite las simulaciones hasta que aparezca. Escribe tus conclusiones.

Incrementa a 10 repeticiones, expande el árbol de resultados y observa los resultados de moneda 1. Repite varias veces la simulación y observa el rango de variación del evento de interés. Anota tus comentarios sobre los valores consideras que son más probables de ocurrir. Explica.

Construye la gráfica de Frecuencia Relativa versus Repeticiones primero 10, 100, 200, 500 y 1000 lanzamientos respectivamente y compáralas. Además toma nota de las frecuencias relativas de cada evento del árbol expandido en la tabla:

Lanzamientos	Frecuencia de águilas	Frecuencia de soles
10		
100		
200		
500		
1000		

Anota tus conclusiones:

Repite 10 veces el lanzamiento de 20 monedas y anota el numero de rachas (cuando cambia de un resultado a otro) en la siguiente tabla:

Número del experimento	Cantidad de rachas
1	
2	
3	
4	
5	
6	
7	
8	
9	
10	

Anota tus conclusiones.

<u>Actividad 2</u>:

Como parte del control de calidad que se realiza en una industria de productos eléctricos, se selecciona una muestra de 5 fusibles eléctricos de toda la producción. De acuerdo a las estadísticas de la empresa se sabe que el 5% de los fusibles producidos tienen algún tipo de defecto. Estimar la probabilidad de que:

a) Ningún fusible haya resultado defectuoso
b) Dos fusibles hayan resultado defectuosos
c) Tres fusibles hayan resultado defectuosos

Para resolver los incisos anteriores considérense por separado las opciones: con reemplazo y sin reemplazo.

Antes de empezar con la simulación:

- ¿Cuáles son los valores que puede tomar la variable NÚMERO DE FUSIBLES DEFECTUOSOS?
- ¿Cuál de los valores que anotaste crees que tenga mayor probabilidad de ocurrir?
- ¿Cuál de los valores que anotaste crees que tenga menor probabilidad de ocurrir?

Después de la simulación:

- Construye la gráfica de la distribución de probabilidad empírica.
- ¿Qué significan los resultados obtenidos en la distribución de probabilidad empírica?
- En la gráfica de la distribución empírica elige la opción AMBAS para que se visualice además la distribución teórica de probabilidad. Observa si ambas distribuciones son similares y anota tus comentarios. Recuerda que simulaste 1000 extracciones de la urna.
- Concentra los resultados obtenidos con ambas opciones (reemplazo y no reemplazo) y trata de explicar porqué son diferentes las probabilidades.

Resultados	*Con reemplazo*	*Sin reemplazo*
0 fusibles defectuosos		
2 fusibles defectuosos		
3 fusibles defectuosos		

¿Por qué crees que la probabilidad es tan pequeña para los valores de 2, 3 y 4 fusibles defectuosos en una muestra de 5?

Inzunsa Santiago. Nació en Batequitas Badiraguato Sinaloa (México) en 1965. Es Maestro y Doctor en Ciencias en la Especialidad de Matemática Educativa. Es profesor e investigador de la Universidad Autónoma de Sinaloa. Pertence al Sistema Nacional de Investigadores. sinzunza@uas.uasnet.mx

Gastélum Diego Alonso. Nació en Culiacán Sinaloa (México) en 1976. Es Licenciado en Informática y Maestro en Informática Aplicada. Cuenta con certificación en Tecnologia LINUX y JAVA. Es profesor de la Universidad Autónoma de Sinaloa. dchavira@pcc.uasnet.mx

Alvarez, Anselmo. Nació en Juan Aldama Zacatecas (México) en 1957. Es Maestro en Ciencias Computacionales y Candidato a Doctor en Educación. Es profesor de la Universidad Autónoma de Sinaloa. anselmo@uas.uasnet.mx

NOTA: El software SIMULAPROB es completamente libre y puede bajarse de la red del sitio: http://pcc.uasnet.mx/~dchavira/ . El mismo ha sido producto de una tesis de maestría. Los autores son Diego Gastélum y Santiago Inzunsa.

UNIÓN
REVISTA IBEROAMERICANA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA

Junio de 2009, Número 18, páginas150-155
ISSN: 1815-0640

Coordinado por
Martha Iglesias

Ideas para Enseñar

Estudio de la Elipse con Plegado de Papel

Fabiola Czwienczek

Resumen

En el presente artículo se plantea una actividad que cubre tres etapas: plegado de papel, elaboración de conjetura y formalización (demostración), en el cual el lugar geométrico estudiado es la elipse. Finalmente, se aprovecha la experiencia para construir con regla y compás la tangente a una elipse por uno de sus puntos.

Abstract

In the present article an activity considers that covers three stages: fold of paper, elaboration of conjecture and formalization (demonstration), in which the studied geometric place is the ellipse. Finally, the experience takes advantage of to construct with rule and compass the tangent to an ellipse by one of its points.

Resumo

No presente artigo expõe-se uma atividade que envolve três etapas: dobrado de papel, elaboração de conjetura e formalização (demonstração), no qual o lugar geométrico estudado é a elipse. Finalmente, se aproveita a experiência para construir com régua e compasso a tangente a uma elipse por um de seus pontos.

Introducción

Esta actividad puede ser presentada a estudiantes que ya conozcan el concepto y definición de lugar geométrico, es decir, que hayan trabajado con las cónicas como lugar geométrico, en particular con la elipse.

Recordemos que se llama *elipse* el lugar geométrico de todos los puntos del plano tal que la suma de sus distancias a dos puntos fijos F_1 y F_2, llamados focos de la elipse, es un valor constante mayor que la distancia entre los puntos F_1 y F_2.

A partir de la definición anterior se puede hallar la ecuación de la elipse de semiejes a y b, cuyo centro es el punto $C=(\alpha,\beta)$, la misma es la siguiente:

$$\frac{(x-\alpha)^2}{a^2}+\frac{(y-\beta)^2}{b^2}=1$$

La actividad llevada a cabo se presenta en tres etapas, en la primera de ellas se trabaja solamente con el plegado del papel, en la segunda ya se promueve la elaboración de distintas conjeturas, paso previo a la demostración, que se presenta en la tercera etapa.

Etapa I: Plegado de papel

Recorte un círculo de papel de cualquier radio e indique el centro del mismo. Marque en el interior de dicho círculo un punto P que sea distinto de su centro O.

Doble el círculo de manera que la circunferencia pase por el punto P, como se indica en la figura 1.

Realice varios dobleces, siempre haciendo coincidir puntos de la circunferencia con el punto P, hacer esto en variadas direcciones.

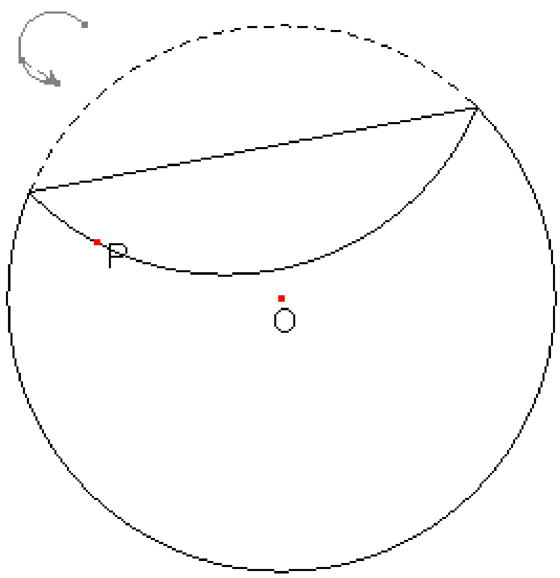


Figura 1

Etapa II: Elaboración de Conjetura.

Una vez realizados estos dobleces la pregunta es: ¿Qué figura queda delimitada por los mismos?, es decir ¿Qué figura se obtiene?.

Se podría establecer la siguiente conjetura: Los dobleces realizados parecen delimitar una elipse cuyos focos son, a simple vista, los puntos O y P, el centro del círculo y el punto fijado en su interior, respectivamente. Esto se muestra en la figura que se presenta a continuación.

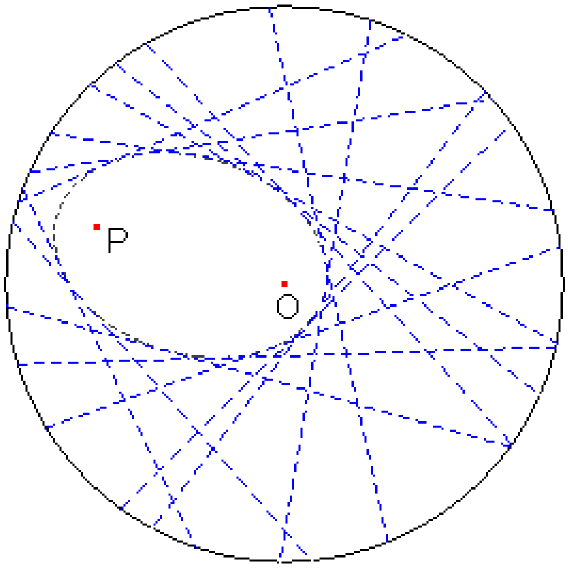


Figura 2

Etapa III: Formalización (demostración).

Probemos que, en efecto, estos pliegues forman una familia de rectas tangentes que envuelven a dicha elipse.

Para ello, demostremos que cada uno de estos dobleces contiene exactamente un punto T tal que OT + PT = k, siendo k un valor constante, pues, como ya fue mencionado, una elipse es el lugar geométrico de los puntos del plano cuya suma de las distancias a dos puntos fijos, del mismo plano, es una constante.

Sea Q un punto cualquiera de la circunferencia y denotemos por r al radio del círculo. La pregunta es: ¿Qué relación existe entre la distancia del punto Q al centro O y la distancia entre los puntos P y O?. Podemos contestar que:

$$r = OQ > OP$$

Esta relación es válida debido a que el punto P es un punto interior de la circunferencia.

Por otra parte, al hacer coincidir los puntos Q y P en el doblez correspondiente, la línea que queda determinada por este plegado está contenida en la mediatriz M del segmento cuyos extremos son Q y P, podemos observar esto en la figura siguiente:

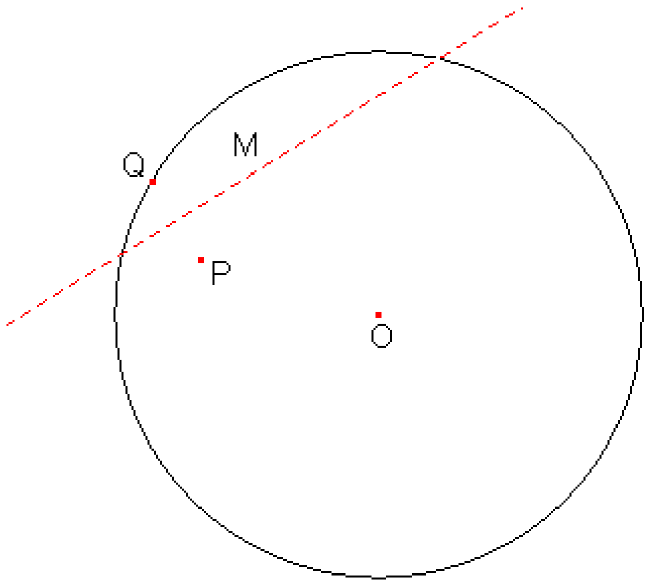


Figura 3

En consecuencia, es directo comprobar que los puntos P y Q están en lados opuestos de la mediatriz M. Pero, en este caso la pregunta es: "¿Qué ocurre con el punto O?" Pues bien, "*se ve*", en todos los dobleces realizados, que el centro O está en el mismo semiplano, con respecto a M, que el punto P. Sin embargo, en una demostración formal no podemos fundamentar argumento alguno en una percepción visual. Nótese que dada la recta M y los puntos coplanarios O, P y Q, estando los dos últimos en lados opuestos de M, se cumple una y solamente una de las siguientes proposiciones:

1) O pertenece a M
2) O está del mismo lado de M que Q.
3) O está del mismo lado de M que P.

Vamos a demostrar que las dos primeras situaciones conducen a contradicciones y que, por consiguiente, se verifica la tercera.

Si el punto O pertenece a la mediatriz M, entonces, por ser esta recta mediatriz del segmento $\overline{PQ}$, el punto O equidista de los puntos P y Q. Entonces, se tiene que OP = OQ, lo cual contradice la desigualdad OQ > OP.

Si los puntos O y Q están del mismo lado de la recta M, entonces el segmento $\overline{OP}$ debe intersectar a dicha recta en algún punto, porque P y Q están en lados opuestos de M. Consideremos que R es el punto de intersección de la recta M y el segmento $\overline{OP}$. Luego, R pertenece a M y R está entre O y P. En consecuencia, se tiene que:

$$RP = RQ \quad \text{y} \quad OR + RP = OP.$$

Por la desigualdad triangular, sabemos que: $OQ \leq OR + RQ$.

Así, $OQ \leq OR + RQ = OR + RP = OP$, los puntos O, R y P estarían alineados. Esto es, $OQ \leq OP$, lo cual contradice que $OQ > OP$.

A partir de las contradicciones halladas para los dos puntos anteriores, se puede afirmar que, para cualquier punto Q de la circunferencia, O y P están en el mismo semiplano con respecto a la recta M, siendo M la mediatriz del segmento cuyos extremos son P y Q.

El haber demostrado esto, nos permite afirmar que, dado un punto Q de la circunferencia, $\overline{OQ}$ tiene un único punto en común con M. Denotemos por T a dicho punto de intersección.

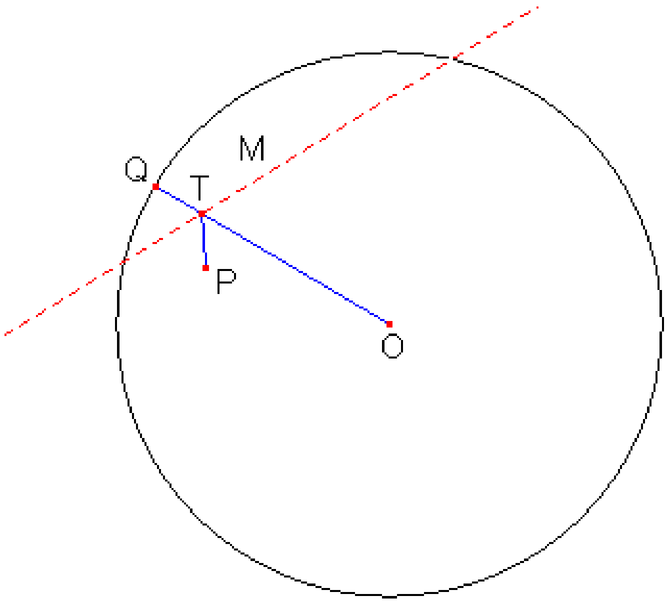


Figura 4

Como el punto T pertenece al segmento $\overline{OQ}$, se tiene que $OT + TQ = OQ = r$. Por ser T un punto de la mediatriz del segmento $\overline{PQ}$, se tiene que $TP = TQ$. Así, $OT + TP = r$. Nótese que r es una constante que no depende de la elección del punto Q.

Se ha probado que cada doblez contiene exactamente un punto T tal que la suma de sus distancias a los puntos O y P es una constante igual a r, lo cual significa que cada doblez contiene exactamente un punto de la elipse cuyos focos son O y P y cuyo eje mayor es de longitud r.

Además…

Una consecuencia de la actividad realizada es que podemos deducir una construcción de la tangente a una elipse por un punto dado de ésta con regla y compás.

En efecto, supongamos que tenemos una elipse de focos F_1 y F_2. Sea T un punto de esta elipse. Se traza la recta que pasa por T y uno de los focos, por ejemplo F_1 (figura 5). Haciendo centro en T y con abertura TF_2, se marca el punto Q sobre la recta que contiene a los puntos T y F_1, esto de manera que el punto T esté entre F_1 y Q. La mediatriz del segmento $\overline{QF_2}$ es la recta tangente a la elipse por el punto T.

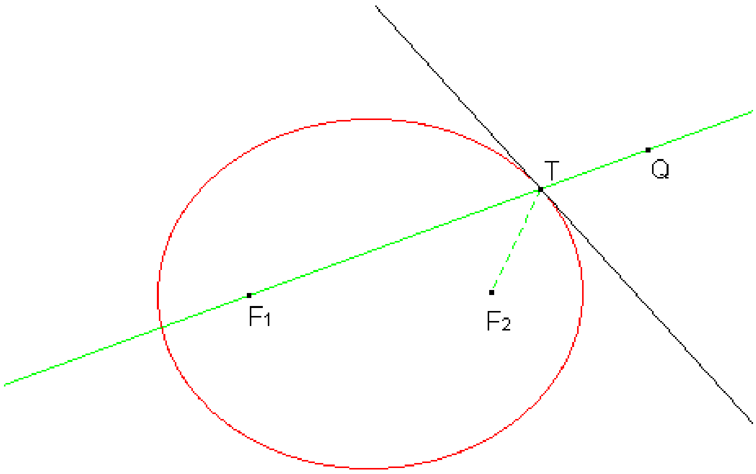


Figura 5

Reflexión final

Esta actividad tan sencilla que comienza plegando papel (actividad lúdica y manipulativa), puede generar una discusión en clase que permita establecer distintas conjeturas, evaluar la comprobación de las mismas (formalización) y también la deducción de construcciones con regla y compás.

Bibliografía

Ledesma, A. (1994). *Estudio de cónicas con papel*. *Educación Matemática* 6 (2). Grupo Editorial Iberoamérica.

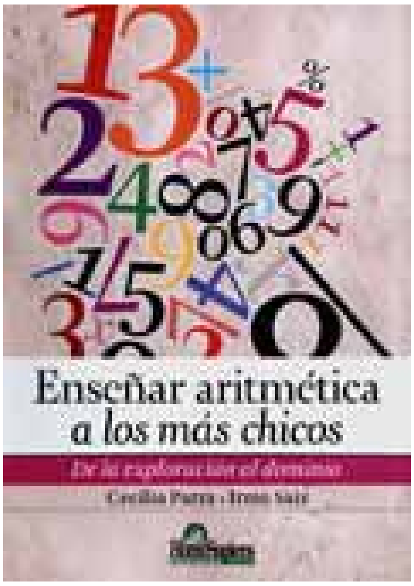
Fabiola Czwienczek, profesora de Matemática egresada del Instituto Pedagógico “Rafael Alberto Escobar Lara” de Maracay, Venezuela (1985). Magíster en Educación Superior, mención Matemática (Universidad Pedagógica Experimental Libertador, 1991).

UNIÓN
REVISTA IBEROAMERICANA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA

Junio de 2009, Número 18, páginas 156-157
ISSN: 1815-0640

Enseñar aritmética a los más chicos: de la exploración al dominio

Cecilia Parra e Irma Elena Saiz
Rosario : Homo Sapiens Ediciones
2007



La “Fundación del Libro” lo calificó como el mejor libro de educación del año 2007, en el marco de la Feria del Libro edición 2008, Buenos Aires.
Cecilia Parra e Irma Saiz son dos profesionales argentinas de una larga trayectoria que han realizado múltiples aportes al campo curricular y de la formación docente en lo tocante a la enseñanza de la matemática.

En este caso, como ellas informan, de la matemática para la Escuela Primaria, recortan un objeto: la aritmética, y aún dentro de este campo, se centran en el primer ciclo y en algunos aspectos del pasaje al segundo ciclo. Sin embargo, Parra y Saiz logran en esta obra inscribir a la enseñanza de la aritmética en el delicado proceso de la construcción de la relación de los alumnos con la matemática, tan caro a la sociedad de nuestro tiempo.

Dicen las autoras en la Introducción: “*Los alumnos aprenden matemáticas a partir de lo que tienen oportunidad de hacer en relación con el conocimiento. Aprenden matemática trabajando frente a situaciones que el maestro ha seccionado y les plantea*” sentando de esta manera lo que implica aprender matemática. Se trata de hacer matemática -y no de recitar matemática- y es el docente el que tiene la responsabilidad de hacer que los alumnos se apropien de los conocimientos: “*Aún con las cuestiones que parecen mas simples, como el contacto con los primeros números, la enseñanza puede plantearse de modos que favorecen que cada uno se apropie, se adueñe de los conocimientos, o de modos enajenantes, en los que el conocimiento es algo de otros, sin sentido, y que no se sabe utilizar”.*
Reafirman el lugar de la escuela como el espacio social en el que los alumnos tienen que aprender a realizar actividad matemática, tienen que tener oportunidades, distintas de las ofrece la vida cotidiana, de apropiarse de modos de pensar, de las prácticas específicas de la cultura matemática. A la vez, las autoras reconocen la gran complejidad de la tarea de enseñar y afirman el derecho de los docentes de contar con propuestas que funcionen, con herramientas utilizables sin mayores sofisticaciones. Así como promueven el protagonismo de los alumnos en la actividad matemática, asumen y promueven el protagonismo de los docentes en la concepción y desarrollo de la enseñanza.

Comparten un abordaje centrado en la resolución de problemas pero afirman que el mismo no excluye la importancia de la eficacia y el dominio de los conocimientos. “*Al contrario* –dicen Parra y Saiz- *profundizar el sentido de los*

conocimientos, poder abordar nuevos problemas requiere que los conocimientos adquiridos se conviertan en sólidos puntos de apoyo para aprendizajes posteriores"
Para que esto sea posible consideran necesaria una enseñanza que asuma y sostenga trabajar múltiples dimensiones en simultáneo –y en forma relacional– a lo largo de prolongados períodos. Por ello, en los diversos capítulos que presentan y analizan los diferentes aspectos relativos a la enseñanza de la suma, la resta, la numeración, la multiplicación y la división, van identificando articulaciones en la enseñanza que pueden favorecer que los alumnos construyan el mundo de relaciones que caracteriza a la aritmética.

Enseñar aritmética a los más chicos: de la exploración al dominio es una obra que se dirige a los maestros y también a quienes se están formando como maestros. Como se ha dicho, es un objetivo de las autoras que las propuestas sean realizables en la cotidianeidad de las aulas y esto lo logran acabadamente. Hay una preocupación constante por hacer inteligible tanto las propuestas como los fundamentos de las mismas, a los que va dirigida la obra.

Este libro resulta interesante no sólo porque incluye propuestas realizables en el aula sino también porque permite organizar reuniones de estudio entre colegas, o en ateneos con los noveles, alrededor de preocupaciones tales como: ¿qué tienen que aprender los alumnos de la división en el conjunto de los números naturales? o ¿cuáles son los diversos significados de la suma y de la resta que se pueden promover en la enseñanza? ¿Qué aporta el trabajo en el terreno del cálculo y de producción de escrituras a la construcción de significados?

En síntesis, consideramos este libro un genuino aporte para acompañar tanto la experiencia como el estudio, ambos componentes esenciales de las prácticas docentes.
Páginas donde se hacen comentarios sobre el libro
http://www.el-litoral.com.ar/leer_noticia.asp?IdNoticia=87804

Mtra. Daniela Andreoli. Maestra en Ciencias en Matemática Educativa. CICATA. México. Profesora en Matemática, Física y Cosmografía. Universidad Nacional del Noreste (UNNE). Argentina. Profesora Titular Exclusiva del Dpto. de Matemática (FaCENA-UNNE). Profesora Adjunta y Responsable Dedicación Simple del Dpto. de Matemática en FCA. UNNE. Investigadora en temas de Algebra Lineal en la SECyT de la UNNE. Tiene presentados y ejecutados proyectos de capacitación para el Nivel Medio. Tiene publicados artículos de investigación en Educación Matemática y Evaluación.

Junio de 2009, Número 18, páginas 158-161
ISSN: 1815-0640

Fundación Evolución.

"Haciendo Punta en la Escuela"

Dirección*:* http://www.fevolucion.org/proyecto_hpunta.asp

Historia de la Fundación Evolución

En el año 1989 Daniel Reyes -entonces director de la Escuela de la Costa en la ciudad de Puerto Madryn, (Chubut – Argentina) tomó contacto con Peter Copen, Presidente de la Fundación de la Familia Copen (CFF), en Nueva York, Estados Unidos, que en ese momento apoyaba la iniciativa de unir telemáticamente a 10 escuelas estadounidenses con otras 10 escuelas de Rusia. El propósito del enlace era mejorar la calidad de la educación y promover el entendimiento entre los estudiantes de los dos países en el período de la llamada 'guerra fría'.

Gracias al éxito de esta experiencia, la CFF decidió invitar a más países a unirse a la iniciativa, bajo el lema "*La Juventud Utilizando las Telecomunicaciones para Mejorar el Mundo*". Daniel Reyes aceptó el desafío de inmediato, convirtiéndose en el arquitecto de la Red Nacional TELAR (Todos en LA Red) y uno de los miembros fundadores de la Red Internacional iEARN.

Para dar un marco legal a las actividades de la Red TELAR - iEARN Argentina y sus programas educativos, Reyes creó la Fundación Evolución (FE), la misma es una organización no gubernamental sin fines de lucro cuyo objetivo principal es contribuir al uso educativo de las Tecnologías de la Información y la Comunicación (TIC) para promover el contacto entre jóvenes y docentes en comunidades locales y globales. Desde 1990, la Fundación ha coordinado, apoyado y alentado la participación de escuelas argentinas en la Red TELAR (a nivel nacional) y en la Red Internacional iEARN, que hoy enlaza a escuelas en 110 países.

Daniel Reyes falleció en el año 1997 en un accidente aéreo, cuando viajaba de regreso del Primer Campamento Telemático Nacional. Más de 300 estudiantes y docentes de todo el país se habían congregado en dicho campamento, en la provincia de Misiones, para compartir sus experiencias y también para planificar proyectos.

Este evento fatal y desafortunado fue un golpe duro para los miembros de la Red, pero al mismo tiempo renovó el compromiso de todos aquellos que habían empezado con su fundador y de otros que se fueron uniendo con el tiempo. Hoy, este grupo de profesionales y docentes forman el núcleo de educadores que integran y apoyan la Red TELAR, es importante destacar que realizan su trabajo en forma voluntaria.

En honor a la trayectoria del Maestro Daniel Reyes y su incansable trabajo educativo, que dio impulso al Plan Nacional de Telecomunicaciones Educativas, el Congreso de la Nación Argentina, en el año 1999, declaró a la ciudad de Puerto Madryn, **“Capital Nacional de las Telecomunicaciones Educativas”**. Además, el 29 de octubre de cada año, aniversario del nacimiento del fundador y propulsor de la Red TELAR, la Fundación Evolución entrega el Premio “**Maestro Daniel Reyes**” en homenaje a quien posibilitara, a través de la creación de la Red, el contacto entre escuelas de nuestro país y del mundo para participar en conjunto en proyectos educativos.

Los Objetivos de la Fundación

El objetivo general de la fundación es que las escuelas promuevan proyectos que rompan su aislamiento, contacten docentes y estudiantes entre sí, con el fin de transformar la enseñanza y el aprendizaje en un proceso dinámico, en el que educadores, estudiantes, padres, decisores de políticas educativas, organizaciones no gubernamentales y empresas del sector privado, aúnen esfuerzos para revitalizar la educación pública.

Los objetivos particulares son los siguientes:

- Promover la integración de las Tecnologías de la Información y la Comunicación en el aula para contribuir a la equidad en el acceso a las mismas por parte de estudiantes y docentes.
- Contribuir a que los estudiantes participen en proyectos colaborativos significativos, que promuevan la responsabilidad social y la diversidad cultural y ayuden a sus comunidades a desarrollarse en la cultura global del siglo XXI.
- Proporcionar a los docentes oportunidades de desarrollo profesional de calidad y soporte para que puedan mejorar sus prácticas de enseñanza, así como brindarles a sus estudiantes herramientas para un mejor aprendizaje.
- Mantener y fortalecer una infraestructura dinámica y sostenible para la expansión de la comunidad virtual de educadores y estudiantes que integran la Red TELAR - iEARN Argentina.
- Integrar a los proyectos que la FE lidera un número creciente de escuelas, sin descuidar aquellas que se encuentran en condiciones socioeconómicas vulnerables.

- Realizar trabajos de investigación que ayuden a crear modelos replicables y sustentables de buenas prácticas de uso de la tecnología para pedagogías constructivistas, en entornos de interacción y colaboración.
- Asociarse con organizaciones nacionales e internacionales que compartan nuestra visión, con el propósito de aunar esfuerzos y dotar a las escuelas con herramientas tecnológicas que les ayuden a mejorar la enseñanza y las oportunidades de aprendizaje de los estudiantes.

El proyecto colaborativo “Haciendo Punta en la Escuela”

“Haciendo Punta en la Escuela” es un proyecto impulsado por la Universidad de la Punta y su diseño e implementación está a cargo de la Fundación Evolución. El mismo busca apoyar a los docentes de 102 escuelas rurales de la provincia de San Luis en el desarrollo de un proyecto significativo y colaborativo en las áreas de Ciencias Naturales y de Matemática, integrando al mismo tiempo el uso pedagógico de las tecnologías de la información y la comunicación (TIC).

El proyecto plantea un viaje imaginario de un grupo de niños y dos maestros provenientes de distintos lugares del país, quienes “llegarán” a la provincia y “serán recibidos” y luego acompañados por los chicos de las escuelas de Haciendo Punta. Juntos pasarán por distintas situaciones problemáticas o “escenarios” a resolver.

Los docentes, a través de la capacitación en línea y guiados por tutores, accederán a orientaciones para trabajar cada escenario con sus alumnos, sugerencias metodológicas y los recursos necesarios.

De cada situación, los alumnos realizarán una producción digital que compartirán con el resto de las escuelas mediante su publicación en el entorno virtual del proyecto.

La participación de las escuelas se presenta de dos maneras:

- Los alumnos trabajan en un proyecto telemático colaborativo sobre Ciencias Naturales y Matemática, guiados por sus maestros.
- Los maestros reciben capacitación a distancia en línea, y apoyo local por medio de visitas presenciales, quincenales, de un docente facilitador.

Este proyecto ofrece a los docentes:

- Una oportunidad para innovar en las prácticas de enseñanza de las Ciencias y de Matemática, y de aprender a utilizar las tecnologías de la información y la comunicación (TIC) en la enseñanza, guiados por especialistas mientras se capacitan a distancia.
- Una propuesta de actividades para desarrollar en el aula que tiene en cuenta los Núcleos de Aprendizaje Prioritarios de Matemática y Ciencias Naturales, y que aplica la metodología del aprendizaje colaborativo en el que los chicos y chicas trabajan en grupos para producir soluciones y resultados propios y colectivos.
- Orientación permanente por parte de tutores en línea especializados, y de facilitadores que visitan las escuelas cada 15 días para resolver las problemáticas concretas de cada escuela.
- Guías de actividades detalladas para realizar con los estudiantes, organizadas y preparadas especialmente por nivel educativo: para 1º a 3er. Grado, para 4º y 5º grados, y para 6º y 7º grados.
- La posibilidad de compartir e intercambiar experiencias y aprendizajes con otros docentes, en un espacio virtual de capacitación.

Elda Beatriz Micheli
Dpto. de Estadística.
Fac. Economía y Administración.
Universidad Nacional del Comahue.
Neuquén, Argentina.
elda_micheli@yahoo.com.ar

UNIÓN
REVISTA IBEROAMERICANA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA

Junio de 2009, Número 18, páginas 162-164
ISSN: 1815-0640

CARLOS SALVADOR Y BEATRIZ
Fundación Canaria

AYUDAS A AMÉRICA

En el embrión de la **Fundación Canaria Carlos Salvador y Beatriz** ya estaban las ayudas a escuelas carenciadas de América. Han sido realizadas desde entonces de manera continuada. El presidente de la Fundación, Salvador Pérez, a su condición profesional de profesor de Secundaria en aquel momento, (y maestro de toda la vida), unía también su otra profesión de periodista activo en diversos medios escritos de las Islas Canarias. Por esa doble condición, no es de extrañar que pusiese en marcha dos proyectos de periódicos escolares, aunando las técnicas nuevas de Internet y el papel de siempre y aglutinando a un extenso grupo de ilusionados alumnos y alumnas con los que culminó la idea con éxito.

Sobre el destino del dinero conseguido con la venta de los dos periódicos, tanto los profesores como el alumnado involucrado tenían claro que servirían para hacer un mundo mejor, es decir, para ser solidarios con alguna causa que lo requiriese. La cantidad ascendió finalmente a 304.503,88 pesetas (que hoy serían 1830 euros). Esto fue lo que se destinó a la primera obra de colaboración con América: se enviaron 150 kilos de material escolar nuevo a escuelas de Cochabamba, en Bolivia, además de realizar entregas de dinero en metálico.

Las siguientes etapas, en América, y desde el año 2001 a 2007 fueron el envío de material escolar nuevo a tres países: Perú, Bolivia y Paraguay y entregado, de forma personal, en un acto donde se reúnen alumnos, profesores y padres.

La Fundación ha contado también con los ingresos que ha generado la venta de la obra póstuma de uno de los protagonistas de su historia y de su nombre: Carlos Salvador. Se trata de tres libros: *Dioses para cinco minutos*, prólogo del escritor y periodista, Eduardo Haro Tecglen, *Retrato de un viejo prematuro*, prólogo del periodista y escritor, Alfonso González Jerez y *Duelos del extranjero ilimitable*, prólogo del periodista y escritor, Juan Cruz Ruiz. Fueron publicados por Ediciones Idea en su Biblioteca Carlos Salvador. Las portadas son cuadros de Munch. Los libros van por su segunda edición y con seis presentaciones en Canarias en los años 2004 y 2005. La edición fue financiada por los padres del autor y el importe íntegro de la venta ha servido para continuar desarrollando los proyectos de la Fundación. Ésta fue constituida de forma oficial con el Nº 225 y con el Código de Identificación Fiscal: G38837589 como una “entidad sin fines lucrativos, Ley 49/2002”. *El futuro en esta vida “sin ellos” es dedicar nuestros esfuerzos al camino de la educación y la cultura*, sostienen los padres de Carlos Salvador y Beatriz.

En el año de 2008 la Fundación ha seguido realizando envíos de material escolar a países de América. Pero introdujo una variante nueva: la entrega de dinero en efectivo para que se destine a lo que la comunidad educativa del lugar apunte como más necesario. Según consta en el acta, la primera entrega fue realizada en

Caaguazú, Paraguay, en el mes de abril de 2008 con material escolar llevado personalmente y 300 euros en metálico. La Fundación cuenta allí con la valiosa colaboración de la Organización de Estados Iberoamericanos (OEI) que ha velado en todo momento para que se diese al dinero el destino fijado.

En el mes de octubre de 2008 se repitió la operación, también a través del vicepresidente de la Fundación, el Profesor Luis Balbuena, quien, con motivo de desplazarse a este país para participar en una acción organizada por la OEI, entregó 4000 euros en nombre de la Comunidad Educativa del Colegio Público *Princesa Tejina* de Tenerife (Islas Canarias) y de la propia Fundación. Dicha cantidad se destinará a la construcción de una escuela. De todas estas acciones se dará cuenta en las sucesivas entregas.

Para más información visitar: www.carlossalvadorybeatrizfundacion.com

CARLOS SALVADOR E BEATRIZ
Fundação Canária

AJUDAS A AMÉRICA

No embrião da **Fundação Canária Carlos Salvador e Beatriz** já estavam as ajudas a escolas carentes de América. Foram realizadas desde então de maneira continuada. O presidente da Fundação, Salvador Pérez, a sua condição profissional de professor do nível médio naquele momento, (e Mestre de toda a vida), unia também sua outra profissão de jornalista ativo em diversos meios escritos das Ilhas Canárias. Por essa dupla condição, não surpreende que pusesse em marcha dois projetos de jornais escolares unindo as técnicas novas de Internet e o papel de sempre e aglutinando um extenso grupo de iludidos alunos e alunas com os que culminou a idéia com êxito.

Sobre o destino do dinheiro conseguido com a venda dos jornais, tanto os professores como o alunado envolvido tinham claro que serviriam para fazer um mundo melhor, ou seja, para ser solidários com alguma causa que o requeresse. A quantidade ascendeu finalmente a 304.503,88 pesetas (que hoje seriam 1830 euros). Isto foi o que se destinou à primeira obra de colaboração com América: se enviaram 150 quilos de material escolar a escolas de Cochabamba, em Bolívia, além de realizar entregas de dinheiro vivo.

As seguintes etapas, em América, e desde o ano 2001 a 2007 foram o envio de material escolar novo a três países: Peru, Bolívia e Paraguai e entregado, de forma pessoal, num ato onde se reúnem alunos, professores e pais.

A Fundação contou também com os ingressos que gerou a venda da obra póstuma de um dos protagonistas da sua historia e de seu nome: Carlos Salvador. Se trata de três livros: *Dioses para cinco minutos*, prólogo do jornalista, Eduardo Haro Tecglen, *Retrato de un viejo prematuro*, prólogo do jornalista e escritor, Alfonso González Jerez e *Duelos del extranjero ilimitable*, prólogo do jornalista e escritor, Juan Cruz Ruiz. Foram publicados por Edições Idea na sua Biblioteca Carlos Salvador. As capas são quadros de Munch. Os livros vão por sua segunda edição e com seis apresentações em Canárias nos anos 2004 e 2005. A edição foi financiada pelos pais do autor e o importe íntegro da venda serviu para continuar desenvolvendo os projetos da Fundação. Esta foi constituída de forma oficial com o nº 225 e com o Código de Identificação Fiscal: G38837589 como uma “entidade sem fins de lucros, Lei 49/2002”. *O futuro nesta vida “sem eles” é dedicar nossos esforços ao caminho da educação e a cultura,* afirmam os pais de Carlos Salvador e Beatriz.

No ano de 2008 a Fundação continuou realizando envios de material escolar a países de América. Mas introduziu uma variante nova: a entrega de dinheiro vivo para que se destine ao que a comunidade educativa do lugar aponte como mais necessário. Segundo consta na ata, a primeira entrega foi realizada em Caaguazu, Paraguai, no mês de abril de 2008 com material escolar levado pessoalmente e 300 euros em dinheiro vivo. A Fundação conta ali com a valiosa colaboração da Organização de Estados Iberoamericanos (OEI) que velou em todo momento para que se desse ao dinheiro o destino estabelecido.

No mês de outubro de 2008 se repetiu a operação, também através do vice-presidente da Fundação, o Professor Luis Balbuena, quem, com motivo de mudar-se a este país para participar numa ação organizada pela OEI, entregou 4000 euros no nome da Comunidade Educativa do Colégio Público *Princesa Tejina* de Tenerife (Ilhas Canárias) e da própria Fundação. Dita quantidade se destinará à construção de uma escola. De todas estas ações se prestará contas nas sucessivas entregas.
Para mais informação visitar: www.carlossalvadorybeatrizfundacion.com

REVISTA IBEROAMERICANA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA

Junio de 2009, Número 18, páginas 165-166
ISSN: 1815-0640

Convocatoria del cargo de pro-Secretario General de la FISEM

La Secretaría General de la Federación Iberoamericana de Sociedades de Educación Matemática (FISEM), ha de convocarse cada cuatro años.

En la reunión de la Junta de Gobierno celebrada en Puerto Montt (Chile) en el seno del VI CIBEM, el ocho de enero de dos mil nueve, se acordó por unanimidad lo siguiente:

> 3.- El Secretario General anuncia que en el mes de marzo, en el número 17 de UNIÓN, aparecerá la convocatoria del puesto de Secretario General de la FISEM cerrándose el plazo de admisión de candidatos el 30 de septiembre. Álvaro Poblete propone y se acuerda, que la convocatoria sea para la elección de un Pro-Secretario General que será informado por el actual Secretario a lo largo de un año desde su elección para pasar después a ocupar la Secretaría General por el período que marca el estatuto.

En consecuencia, se CONVOCA el cargo de Pro-Secretario General de acuerdo con lo previsto en el Estatuto de la FISEM y en su reglamento de orden interno que establecen lo siguiente:

ESTATUTO:

Artículo 20.-
El Secretario General será elegido por la Junta de Gobierno entre los candidatos presentados a la convocatoria realizada al efecto, en la forma que reglamentariamente se fije, para un mandato de cuatro años. El aspirante a Secretario General ha de estar respaldado por un acuerdo de la Junta de Gobierno (u órgano asimilado) de su Sociedad.
En el caso de no concluir su mandato, la Junta de Gobierno designará un Secretario General interino y hará una convocatoria para ser resuelta en un plazo máximo de seis meses.

Artículo 21.-
Son funciones de la Secretaría General:

a) La coordinación general de todas las actividades de la FISEM.
b) Proponer a los órganos de gobierno aquellas iniciativas que redunden en beneficio de la Educación Matemática así como organizar la elaboración de estudios y trabajos que hayan sido aprobados por los mismos.
c) Elaborar la programación de actividades de la FISEM para su aprobación por la Junta de Gobierno, de acuerdo con la Comisión Ejecutiva.
d) Rendir cuenta de su gestión ante la Junta de Gobierno.
e) Informar a las Sociedades Federadas de las actividades de la FISEM.

f) Actuar como Secretario de la Junta de Gobierno y de la Comisión Ejecutiva custodiando sus actas.
g) Librar los certificados que proceda, con el visto bueno de la Presidencia, sentándolos en el correspondiente libro de certificados.
h) Ordenar los gastos.
i) Llevar la correspondencia de la FISEM con sus registros de entrada y salida.
j) Aquellas otras que le encomienden los órganos de gobierno de la FISEM.

Artículo 22.-
El Tesorero será designado por la Junta de Gobierno entre las personas que le proponga el Secretario General. Su mandato será de cuatro años.

REGLAMENTO:

Artículo 8.-
Podrá ser candidato a la Secretaría General de la FISEM cualquier socio/a de una Sociedad Federada, siempre que tenga en la misma una antigüedad mínima de dos años. La solicitud deberá dirigirse al Presidente de la FISEM y tendrá que ir acompañada de los siguientes documentos:

- *Certificado en el que conste su condición de socio activo así como su antigüedad. • Una memoria de un máximo de tres folios en la que exponga su posible programa de actuación al frente de la Secretaría General.*
- *Certificado de haber recibido el aval de la Junta de Gobierno de su Sociedad.*
- *Currículum vitae.*

Artículo 9.-
La Junta de Gobierno convocará la provisión de la Secretaría General comunicándolo a las Sociedades Federadas, con un mínimo de cuatro meses antes de que expire el mandato del Secretario General. Si la vacante se produjera por dimisión del Secretario General, entonces se comunicará la convocatoria a las Sociedades Federadas, dando un plazo mínimo de cuatro meses para la presentación de candidaturas.

Artículo 10.-
La Presidencia convocará una reunión extraordinaria de la Junta de Gobierno para proceder a la elección del Secretario General entre las candidaturas presentadas. Una vez decidida la elección, lo comunicará oficialmente a las Sociedades Federadas.

Aquellos profesores o profesoras que deseen presentar su candidatura, deberán enviar la solicitud a la Presidencia de la FISEM antes del 30 de septiembre de 2009:

Miguel A. Díaz Flores
Director Escuela de Educación y Humanidades
Universidad de Viña del Mar
Agua Santa 7255, Sector Rodelillo
Viña del Mar – Chile

El artículo 8 del Reglamento indica la documentación que ha de presentar.

UNIÓN
REVISTA IBEROAMERICANA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA

Junio de 2009, Número 18, páginas 167-171
ISSN: 1815-0640

Convocatorias y eventos

AÑO 2009

XIV JORNADAS PARA EL APRENDIZAJE Y ENSEÑANZA DE LA MATEMÁTICA.
Convoca: Federación Española de Sociedades de Profesores de Matemática.
Lugar: Girona. España.
Fecha: 1 al 4 de julio de 2009.
Información: http://www.xivjaem.org

III Congreso de Matemática en España

Convoca: Universidad de Salamanca.
Lugar: Salamanca. Facultad de Ciencias de la Universidad de Salamanca.
Fecha: 1 al 3 de julio de 2009.
Información: http://www.usal.es/~3cm/

23 Reunión Latinoamericana de Matemática Educativa (RELME 23)
Santo Domingo (República Dominicana)
Convoca: Comité Latinoamericano de Matemática Educativa.
Fecha: 13 al 17 julio de 2009
Información: www.clame.org.mx
clame@clame.org.mx

PME
International Group for the Psychology of Mathematics Education
The International Group for the Psychology of Mathematics Education (PME), is a group of researchers, established in 1976 at ICME3 in Karlsruhe.

PME33
Fecha**: 19 al 24 de Julio de 2009**
Lugar: Thessaloniki - Greece
Información: http://igpme.org/default.asp

XVII Congreso Colombiano de Matemáticas

Convoca: Sociedad Colombiana de Matemática
Lugar: Cali. Colombia.
Fecha: 3 al 6 agosto de 2009
Información: www.scm.org.co

AGENCIA NACIONAL DE PROMOCIÓN CIENTÍFICA Y TECNOLÓGICA

UNSAM
ESCUELA DE HUMANIDADES
C E D E
CENTRO DE ESTUDIOS EN DIDÁCTICAS ESPECÍFICAS

Escuela de Invierno en Didáctica de la Matemática 2009
Lugar: Buenos Aires. Argentina.
Fecha: 27 al 29 de agosto de 2009
Información: cede@unsam.edu.ar

Umalca
Unión Matemática de América Latina y El Caribe

Unión Matemática de América Latina y el Caribe
III CLAM 2009 - CONGRESO LATINO AMERICANO DE MATEMÁTICOS
Lugar: Santiago. Chile.
Convoca: Sociedad de Matemática de Chile
Sede: Universidad de Santiago de Chile
Fecha: 31 de Agosto al 4 de Septiembre del 2009.
Información: umalca@fermat.usach.cl

XIII Simposio de la Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática

Convoca: Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática
Lugar: Santander. Facultad de Ciencias. Universidad de Cantabria.
Fecha: del 10 al 12 de septiembre de 2009
Información: www.seiem.es

VIII Reunión de didáctica de la matemática del Cono Sur

Lugar**:** Asunción. Paraguay.
Convoca**:** Comité de Educación Matemática del Paraguay (C.E.M.P.A)
Fecha: 10 al 12 de septiembre de 2009
Información: jdemestri@hotmail.com

10ª International Conference Models in Developing Mathematics Education
Lugar: Dresden - Alemania
Convoca: "The Mathematics Education into the 21st Century Project" y University of Applied Sciences. Dresden.
Fecha: 11 al 17 de Septiembre de 2009

REUNION ANUAL DE LA UNION MATEMATICA ARGENTINA
Lugar**:** Mar del Plata (Argentina)
Convoca**:** Unión Matemática Argentina (UMA)
Fecha: 21 al 26 de septiembre de 2009
Información: www.union-matematica.org.ar

IX Seminario Internacional CIMPA

Convoca: IMPA-UNESCO
Sede: Universidad Nacional de Ingeniería. Lima. Perú.
Fecha: 5 al 9 de Octubre de 2009.
Información: www.imca.edu.pe

Coloquio de la Sociedad Argentina de Estadística.
Convoca : Sociedad Argentina de Estadística
Sede: Ciudad de Catamarca.
Fecha: 7 al 9 de Octubre de 2009.
Información: www.s-a-e.org.ar

10° Encuentro Colombiano de Matemática Educativa

Lugar: San Juan de Pasto. Universidad de Nariño.
Convoca: Asociación Colombiana de Matemática Educativa.
Fecha: 8 al 10 de octubre de 2009.
Información: www.asocolme.com

VIII CONFERENCIA ARGENTINA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA (VIII CAREM)

Lugar: Buenos Aires (Argentina)
Convoca: Sociedad Argentina de Educación Matemática (SOAREM)
Fecha: 8 al 10 de octubre de 2009
Información: www.soarem.org.ar

IV Seminario Internacional de Investigación en Educación Matemática.

Lugar: Universidad Católica de Brasilia – UCB.
Taguatinga – DF- Brasil
Fecha: 25 al 28 de octubre del 2009. Universidad católica de Brasilia – UCB.
Información: www.sbem.com.br

AÑO 2010

8º International Conference on Teaching Statistics (ICOTS 8)
Lugar: Ljubljan, Eslovenia
Fecha: 11 al 16 de Julio, 2010
Información: http://icots8.org/

AÑO 2011

XIII CIAEM: XIII Conferencia Iberoamericana de Educación Matemática
Lugar**:** Recife. Brasil
Convoca: Comité Interamericano de Educación Matemática.
Fecha: 26 al 29 de junio de 2011
Información: http://www.ce.ufpe.br/ciaem2011

UNIÓN
REVISTA IBEROAMERICANA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA

Junio de 2009, Número 18, página 172-173
ISSN: 1815-0640

Normas para publicar en Unión

1. Los trabajos para publicar se deben enviar a union.fisem@sinewton.org con copia a revistaunion@gmail.com. Deben ser originales y no estar en proceso de publicación en ninguna otra revista. Serán remitidos a varios evaluadores y el Comité editorial de la Revista decidirá finalmente sobre su publicación.
2. Los artículos remitidos para publicación deben ser escritos en Word, preferentemente usando la plantilla establecida al efecto (descargar plantilla) y, en todo caso, cumpliendo las siguientes normas: letra tipo **arial**, tamaño **12 puntos**, interlineado simple, márgenes de 2,5 cm. como mínimo en los 4 bordes del papel, tamaño DIN A-4. La extensión no debe ser superior a las 20 páginas, incluyendo figuras, que deben estar situadas en el lugar del texto donde deben ser publicadas. La simbología matemática necesaria se escribirá con el editor de ecuaciones de Word, se insertará como una imagen o se realizarán utilizando los símbolos disponibles en el juego de caracteres "Arial". Es importante no cambiar el juego de caracteres, especialmente **evitar el uso del tipo "Symbol"** u otros similares.
3. Las **ilustraciones y fotografías** deben estar situadas en el lugar del texto donde deben ser publicadas. Si es posible, los "pie de foto" se escribirán dentro de un "cuadro de texto" de Word (con o sin bordes) que estará "agrupado" con la imagen de referencia. Se deben numerar usando: Fig. 1, Fig. 2,… Tabla 1, Tabla 2,…
4. El artículo deberá comenzar con un **resumen(español) o resumo(portugués) y abstract (inglés)**, que tendrá una longitud máxima de 6 líneas.
5. Teniendo en cuenta el carácter internacional de la revista, se hace indispensable que cuando los autores se refieran a un determinado sistema educativo nacional lo hagan constar expresamente y que siempre que se trate de un nivel educativo se indique la edad normal de los alumnos, lo que permitirá la comparación con el sistema educativo nacional del lector.
6. Los datos de identificación de los autores deben figurar en la última página del mismo documento word que contiene el artículo. Con el fin de garantizar el anonimato en el proceso de evaluación, solamente estarán los **datos personales** en esta **última página**. En ella se hará constar los siguientes datos:
   - **De contacto**: nombre, dirección electrónica, dirección postal, teléfono.
   - **Para la publicación**: centro de trabajo, lugar de residencia y/o del centro de trabajo, así como una breve reseña biográfica de unas cinco líneas

   - Las referencias bibliográficas se incluirán al final del trabajo (y antes de la hoja de datos identificativos) y deben seguir los formatos que se indican a continuación.

Para un libro:

Bourbaki, N. (1972). *Elementos de historia de las matemáticas.* Editorial Alianza, Madrid. España.

Bermejo, A. (1998). *La enseñanza de la geometría en la educación primaria.* Editorial Pico Alto, Buenos Aires. Argentina.

Para un artículo:

Ibáñez, M. y Ortega, T. (1997). *La demostración en matemáticas. Clasificación y ejemplos en el marco de la educación secundaria*. Educación Matemática 9, 65-104.

Díaz, C. y Fernández, E. (2002). *Actividades con ordenador para la enseñanza de la suma*. Revista de didáctica de las matemáticas 19, 77-87.

Para un capítulo de libro:

Albert, D. y Thomas, M. (1991).Research on mathematical proof. En: Tall, D. (ed.), Advanced Mathematical Thinking, 215-230. Kluwer, Dordrecht.

Para artículo de revista electrónica o información en Internet:

García Cruz, J. (2008*). Génesis histórica y enseñanza de las matemáticas*. UNIÓN Nº14 [en línea]. Recuperado el 20 de marzo de 2009, de http://www.fisem.org/paginas/union/info.php?id=320

NOTA: Las normas que se indican en los puntos 2, 3 y 6 pretenden dar uniformidad a los trabajos que se reciban en la redacción y simplificar así el trabajo de composición y maquetación de la revista. Si alguien tiene dudas sobre su aplicación, puede dirigir sus preguntas (lo más concretas posible) a revistaunion@gmail.com