UNIÓN
REVISTA IBEROAMERICANA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA

Número 20 – Diciembre de 2009

Índice

REVISTA IBEROAMERICANA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA

Diciembre de 2009, Número 20, páginas 2-3
ISSN: 1815-0640

Unión. Revista Iberoamericana de Educación Matemática es una publicación de la Federación Iberoamericana de Sociedades de Educación Matemática **(FISEM)**. Tiene una periodicidad trimestral, de modo que se publican cuatro números al año, en los meses de marzo, junio, septiembre y diciembre.

Es recensionada en ***Mathematics Education Database*** y está incluida en el catálogo ***Latindex*.**

Evaluadores

Pilar Acosta Sosa
María Mercedes Aravena Díaz
Lorenzo J Blanco Nieto
Natael Cabral
María Luz Callejo de la Vega
Matías Camacho Machín
Agustín Carrillo de Albornoz
Silvia Caronia
Eva Cid Castro
Carlos Correia de Sá
Cecilia Rita Crespo Crespo
Miguel Chaquiam
María Mercedes Colombo
Patricia Detzel
Dolores de la Coba
José Ángel Dorta Díaz
Rafael Escolano Vizcarra
Isabel Escudero Pérez
María Candelaria Espinel Febles
Alicia Fort
Carmen Galván Fernández
María Carmen García Gonzalez
María Mercedes García Blanco
José María Gavilán Izquierdo
Margarita González Hernández
María Soledad González
Nelson Hein
Josefa Hernández Domínguez
Rosa Martinez
José Manuel Matos
José Muñoz Santonja
Raimundo Ángel Olfos Ayarza
Luiz Otavio.
Manuel Pazos Crespo
María Carmen Peñalva Martínez
Inés Plasencia
María Encarnación Reyes Iglesias
Natahali Martín Rodríguez
María Elena Ruiz
Victoria Sánchez García
Leonor Santos
Maria de Lurdes Serrazina
Martín M. Socas Robayna
María Dolores Suescun Batista
Ana Tadea Aragón
Mónica Ester Villarreal
Antonino Viviano Di Stefano

Diseño y maquetación

Diseño web: Daniel García Asensio
Textos: Vilma Giudice
Logotipo de Unión: Eudaldo Lorenzo
webmaster: Elda Beatriz Micheli

Colabora

CARLOS
SALVADOR
Y BEATRIZ
FUNDACIÓN
CANARIA

UNIÓN
REVISTA IBEROAMERICANA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA

Diciembre de 2009, Número 20, páginas 5-6
ISSN: 1815-0640

Editorial

**“Las matemáticas son el alfabeto con el cual
Dios ha escrito el Universo”**

Galileo Galilei.
Físico y Astrónomo italiano.
(1564-1642).

Estimados colegas y amigos:

La finalización del año invita a la reflexión sobre las acciones realizadas y a pensar en nuevos desafíos y proyectos.

Con respecto a nuestra experiencia en este primer año como responsables de la Edición de la Revista UNIÓN, podemos decir que nos ha enriquecido desde todos los órdenes, pero muy especialmente desde lo humano y profesional. Desde lo humano, por la posibilidad de entablar una relación virtual con autores y lectores que nos apoyaron con sugerencias, comentarios, intercambio de opiniones que nos enriquecieron permanentemente. Desde lo profesional, la lectura de artículos y aportes de los evaluadores sobre diversidad de temas que surgen de la Educación Matemática, las conclusiones sobre investigaciones en distintos niveles, las prácticas de aulas, las propuestas didácticas, etc.

En este número quisimos unirnos a la celebración del **Año Internacional de la Astronomía**, lo hacemos con cuatro artículos y tres secciones fijas dedicadas a este tema. Agradecemos a los especialistas investigadores sobre esta especialidad y a los profesores que aportan propuestas prácticas para el aula, que son quiénes lo hicieron posible.

Al finalizar el año, dos noticias muy significativas para celebrar:

- La incorporación de la **Asociación Nacional de Profesores de Matemáticas de Ecuador** a la **Federación Iberoamericana de Sociedades de Educación Matemática**. A partir de este número de UNIÓN, la bandera de Ecuador se suma a nuestra portada y les damos así la más cordial bienvenida.
- La designación por votación de las Sociedades Federadas de **Agustín Carrillo de Albornoz Torres** como **Prosecretario Genera**l hasta el día 15 de octubre de 2010 en que sustituirá a Luis Balbuena Castellano en el puesto de **Secretario General de la FISEM. Felicitaciones y éxitos en esta nueva función!!**

Como Brindis Final , nuestros deseos de Paz y Felicidad para todos los que colaboraron para que este proyecto soñado siga adelante y que el año 2010 nos encuentre nuevamente compartiendo ideales.

Un abrazo fraternal.

Norma S. Cotic – Teresa C. Braicovich
Directoras

Editorial

**"As matemáticas são o alfabeto com o qual
Deus escreveu o Universo"**

Galileo Galilei.
Físico e Astrónomo italiano.
(1564-1642).

Estimados colegas e amigos:

A finalización do ano convida à reflexão sobre as acções realizadas e a pensar em novos desafios e projectos. Com respeito a nossa experiência neste primeiro ano como responsáveis da Edição da Revista UNIÃO, podemos dizer que nos enriqueceu desde todos os ordens, mas muito especialmente desde o humano e profissional. Desde o humano, pela possibilidade de entablar uma relação virtual com autores e leitores que nos apoiaram com sugestões, comentários, intercâmbio de opiniões que nos enriqueceram permanentemente. Desde o profissional, a leitura de artigos e contribuas dos evaluadores sobre diversidade de temas que surgem da Educação Matemática, as conclusões sobre investigações em diferentes níveis, as práticas de aulas, as propostas didácticas, etc.

Neste número quisemos unir-nos à celebração do Ano Internacional da Astronomía, fazemo-lo com quatro artigos e três secções fixas dedicadas a este tema. Agradecemos aos especialistas investigadores sobre esta especialidad e aos professores que contribuem propostas práticas para o aula, que são quem o fizeram possível.

Ao finalizar no ano, duas notícias muito significativas para celebrar:

- A incorporação da Associação Nacional de Professores de Matemáticas de Equador à Federação Iberoamericana de Sociedades de Educação Matemática. A partir deste número de UNIÃO, a bandeira de Equador soma-se a nossa portada e damos-lhes assim a mais cordial bem-vinda.
- A designação por votação das Sociedades Federadas de Agustín Carrillo de Albornoz Torres como Prosecretario General até o dia 15 de outubro de 2010 em que substituirá a Luis Balbuena Castellano no posto de Secretário Geral da FISEM. Felicitaciones e sucessos nesta nova função**!!**

Como Brindis Final, nossos desejos de Paz e Felicidade para todos os que colaboraram pára que este projecto sonhado siga adiante e que no ano 2010 nos encontre novamente compartilhando ideais.

Um abraço fraternal.

Norma S. Cotic – Teresa C. Braicovich
Directoras

UNIÓN
REVISTA IBEROAMERICANA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA

Diciembre de 2009, Número 20, páginas 7-8
ISSN: 1815-0640

Ecuador se incorpora a la FISEM

La **Asociación Nacional de Profesores de Matemáticas de Ecuador** ha solicitado su adhesión a la **Federación Iberoamericana de Sociedades de Educación Matemática** y el Presidente de la Federación, el profesor Miguel A. Díaz Flores, les ha dirigido el siguiente mensaje:

Señor Juan Carlos Bustamente
Presidente de la Sociedad Ecuatoriana de Matemática

Hemos recibido en esta Presidencia de FISEM, con gran agrado, la solicitud de la sociedad que preside para convertirse en miembro activo de esta Federación. Han llegado a la Secretaría General los documentos que exige nuestro reglamento de régimen interior. Una vez examinados los mismos, puedo transmitirle con gran satisfacción que:

LA SOCIEDAD ECUATORIANA DE MATEMÁTICAS ES, DESDE EL DÍA DE HOY, MIEMBRO DE PLENO DERECHO DE LA FEDERACIÓN IBEROAMERICANA DE SOCIEDADES DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA - FISEM TOMANDO, POR TANTO, USTED PARTE DE LA JUNTA DE GOBIERNO DE LA MISMA.

Le ruego que trasmita a sus asociados nuestra más cordial bienvenida a esta Federación que, con la incorporación de su país da un gran paso adelante en cuanto a consolidación y a suma de esfuerzos para trabajar en pro de la mejora de la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas en todo nuestro ámbito. También comunicaré su adhesión al resto de las sociedades ya federadas.

Le ruego que acuse el recibo de este mensaje.
Lo que le comunico desde Viña del Mar - Chile - a 22 de octubre de 2009
Miguel A. Díaz F. Presidente FISEM

Desde la Revista Digital UNIÓN celebramos esta incorporación y hacemos votos para que se sigan sumando sociedades de otras naciones. A partir de este número de UNIÓN, la bandera de Ecuador se suma a nuestra portada y les damos así la más cordial bienvenida. Está de más decir que invitamos a nuestros colegas ecuatorianos a que nos transmitan sus muchas experiencias e investigaciones para hacerlas llegar a los miles de profesores y profesoras que nos visitan de manera continuada.

Sin duda sus aportes enriquecerán y contribuirán a fortalecer la función que nos compete: **la mejora de la calidad en Educación Matemática.**

UNIÓN
REVISTA IBEROAMERICANA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA

Diciembre de 2009, Número 20, página 9
ISSN: 1815-0640

Elección de Prosecretario General

Tras un proceso que se inició en el mes de marzo de 2009 con la convocatoria en UNIÓN de la plaza de Prosecretario General de la FISEM, se procedió, entre los días 1 y 15 de octubre pasado, a la votación de la única candidatura presentada por Agustín Carrillo de Albornoz Torres. Una vez realizado el escrutinio, la misma recibió el voto favorable de diez Sociedades Federadas y la abstención de dos por lo que el Presidente de la FISEM, Miguel Díaz (de la Sociedad Chilena), proclamó al citado profesor como Prosecretario General hasta el día 15 de octubre de 2010 en que sustituirá a Luis Balbuena Castellano en el puesto de Secretario General.

Desde UNIÓN queremos felicitarle y ofrecernos para colaborar en su cometido así como brindar las páginas de la revista para cuanto desee comunicar.

Agustín Carrillo de Albornoz Torres: es Profesor de Educación Secundaria de Matemáticas desde 1984; trabaja en el IES Sierra Morena de Andújar (Jaén, España); ha estado destinado en los Centros de Profesores de Jaén (como coordinador del Departamento de Informática) y en el de Andújar (como Director).
Ha impartido cursos de formación para el profesorado sobre distintos aspectos relacionados con la enseñanza de las matemáticas y sobre la utilización de las TIC como recurso para la enseñanza de las Matemáticas en Centros de Formación del Profesorado de toda España y en distintas Universidades.
Responsable en la SAEM THALES del programa de formación a distancia, en el que además ha sido, desde en curso 2001-02, tutor en cursos sobre software libre aplicado a las matemáticas, geometría dinámica o sobre cálculo simbólico.
Ha publicado varios libros en la Editorial Ra-Ma sobre las posibilidades didácticas de programas de cálculo simbólico y de geometría dinámica, así como artículos en revistas como SUMA, EPSILON o UNIÓN entre otras, relacionados con las aplicaciones de las TIC a la enseñanza de las matemáticas.
Coordinador de la sección TIC de la revista UNIÓN. Miembro del comité de redacción de la revista ÉPSILON editada por la SAEM THALES, siendo responsable de la sección TIC.
Participante como ponente en distintos Congresos regionales y nacionales sobre enseñanza y aprendizaje de las matemáticas. Ha participado en Congresos organizados por las dos Sociedades de Profesores Argentinas, impartiendo conferencias y talleres. También ha participado como conferenciante en el CIBEM celebrado en Puerto Montt en enero de 2009.
Ha coordinado un Proyecto de incorporación de las Tecnologías de la Información y la Comunicación al aula en el IES Jándula de Andújar desde su aprobación en el curso 2003-04 por la Consejería de Educación de la Junta de Andalucía hasta el curso 2007-08, siendo este centro uno de los pioneros en Andalucía en la incorporación de las TIC.
En la Sociedad Andaluza de Educación Matemática THALES desempeña el cargo de Secretario General desde el año 2004. agustincarrillo@telefonica.net

Diciembre de 2009, Número 20, página 11
ISSN: 1815-0640

Juan Díaz Godino

Breve Reseña

Nació en 1947 en la ciudad de Jaén, España. Comenzó la licenciatura en Matemáticas en la Universidad de Granada y la terminó en la Universidad Complutense de Madrid en 1971 en la especialidad de astronomía y geodesia. Trabajó en la industria como estadístico durante varios años y cursó estudios de Diplomado Superior en Estadística, finalizando su tesis doctoral en 1982 en el Departamento de Estadística de la Universidad de Granada.

Desde 1977 viene trabajando como profesor de matemáticas y didáctica de las matemáticas para la formación de profesores. Actualmente es Catedrático de Universidad en el área de Didáctica de la Matemática, con destino en la Facultad de Ciencias de la Educación de la Universidad de Granada. Coordina un grupo de investigación sobre los fundamentos teóricos y metodológicos de la investigación en didáctica de las matemáticas, imparte cursos de doctorado sobre dicho tema y ha dirigido ocho tesis doctorales sobre educación matemática.

Desde 1993 viene desarrollando un marco teórico específico sobre el conocimiento y la instrucción matemática que está siendo reconocido a nivel internacional a través de publicaciones en las principales revistas del área de conocimiento (*Educational Studies in Mathematics*, *Recherches en Didactiques des Mathématiques*, *For the Learning of Mathematics*, *The International Journal on Mathematics Education*, etc.). Una selección de sus trabajos está disponible en la página web del grupo: http://www.ugr.es/local/jgodino

UNIÓN
REVISTA IBEROAMERICANA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA
firma invitada
Diciembre de 2009, Número 20, páginas 13-31
SSN: 1815-0640

Categorías de Análisis de los conocimientos del Profesor de Matemáticas

Juan D. Godino

Resumen

En este trabajo analizamos el modelo de conocimiento del profesor propuesto por Shulman y las adaptaciones realizadas por diversos autores al campo de la educación matemática. Tras identificar algunas limitaciones en los modelos considerados proponemos un modelo que comprende categorías de análisis más finas de los conocimientos didáctico-matemáticos del profesor, basado en la aplicación del "enfoque ontosemiótico" sobre el conocimiento y la instrucción matemática. Incluimos también una pauta para la formulación de cuestiones de evaluación de los conocimientos didáctico-matemáticos basada en el modelo propuesto. Consideramos que las nociones presentadas pueden ser usadas por los profesores como herramientas de análisis y reflexión sobre su propia práctica

Abstract

In this paper we analyse the Shulman's teacher knowledge model and some adaptations and interpretations of it developed by different authors in the field of mathematics teacher education. After identifying some limitations in these models we propose a model that includes more detailed categories of analysis for mathematics and didactics teachers' knowledge, based on the application of the onto-semiotic approach to mathematical knowledge and instruction. We also describe a guideline to formulate questions to assess such knowledge based on the proposed model. These new categories can be used by the teachers as tools to analyse and reflect on their own practice.

Resumo

Neste trabalho analisamos o modelo de conhecimento do professor proposto por Shulman e as adaptações realizadas por diversos autores ao campo da educação matemática. Depois de identificar algumas limitações nos modelos considerados propomos um modelo que compreende categorias de análises mais finas dos conhecimentos didáctico-matemáticos do professor, baseado na aplicação do "enfoque ontosemiótico" sobre o conhecimento e a instrução matemática. Incluímos também uma pauta para a formulación de questões de avaliação dos conhecimentos didáctico-matemáticos baseada no modelo proposto. Consideramos que as noções apresentadas podem ser usadas pelos professores como ferramentas de análises e reflexão sobre sua própria prática.

Juan D. Godino

1.- Introducción

En la bibliografía de investigación sobre la formación y el pensamiento del profesor (Philipp, 2007; Sowder, 2007; Wood, 2008) encontramos diversos modelos teóricos que describen los tipos de conocimientos que los profesores deben poner en juego para favorecer el aprendizaje de los estudiantes. Estos modelos son necesarios para organizar los programas de formación, inicial o permanente, y para evaluar su eficacia. Aunque hay un consenso general de que los profesores deben dominar los contenidos disciplinares correspondientes, no hay un acuerdo similar sobre la manera en que se debe lograr dicho dominio, ni siquiera acerca de cómo se debería concebir la disciplina. Se suele reconocer que el conocimiento disciplinar no es suficiente para asegurar competencia profesional, siendo necesarios otros conocimientos de índole psicológica (cómo aprenden los estudiantes, conocer los afectos, dificultades y errores característicos,…). Los profesores deberían ser capaces también de organizar la enseñanza, diseñar tareas de aprendizaje, usar los recursos adecuados, y comprender los factores que condicionan la enseñanza y el aprendizaje.

El objetivo de este trabajo es presentar un modelo de conocimiento didáctico-matemático del profesor (sección 3) que tenga en cuenta las diversas facetas o dimensiones implicadas en la enseñanza y aprendizaje de contenidos específicos, así como diversos niveles de conocimiento en cada una de dichas facetas. Este modelo está basado en el "enfoque ontosemiótico" (EOS) del conocimiento y la instrucción matemática (Godino, 2002; Godino, Batanero y Font, 2007), sistema teórico para la investigación en educación matemática, cuyas categorías de análisis se pueden usar como herramientas para identificar y clasificar los conocimientos requeridos para la enseñanza de las matemáticas, y por tanto, para analizar los conocimientos puestos en juego por el profesor.

Con el fin de mostrar las nuevas posibilidades analíticas del modelo de Conocimiento Didáctico-Matemático del profesor basado en el EOS con relación a otros modelos existentes incluimos una síntesis de dichos modelos, comenzando por el propuesto por Shulman (1986; 1987). Seguidamente estudiamos la aplicación de este modelo al caso de la educación matemática realizado por Ball y colaboradores (Ball, 2000; Ball, Lubienski y Mewborn, 2001), así como la noción de "proficiencia" en la enseñanza de las matemáticas introducida por Schoenfeld y Kilpatrick (2008). En la sección 4 del trabajo aplicamos nuestro modelo de conocimiento didáctico para formular tipos de cuestiones para evaluar dichos conocimientos, o como puntos de reflexión de los profesores sobre aspectos relevantes de su propia práctica. Estas cuestiones pueden servir también como punto de partida para enunciar situaciones introductorias para el desarrollo de los conocimientos matemático-didácticos en acciones formativas específicas.

2.- Modelos de Conocimiento Didáctico del Profesor

Como se pone de manifiesto en esta sección, no hay acuerdo en la literatura de investigación en el campo de formación de profesores para designar con una única expresión el complejo de conocimientos, competencias, disposiciones, etc., que un profesor de matemáticas (o de otras áreas) pone en juego para favorecer el aprendizaje de sus estudiantes. Nuestra concepción de la Didáctica de la Matemática como disciplina que asume el compromiso de articular las diversas disciplinas interesadas en el estudio de los procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas (Godino, 1991) (matemáticas, epistemología, psicología, pedagogía, sociología, semiótica, etc.) nos lleva a proponer la expresión "conocimiento didáctico-matemático del profesor" para referirnos a dicho complejo de conocimientos y competencias profesionales. Incluimos, por tanto, en el conocimiento didáctico, el conocimiento del contenido matemático en cuanto dicho contenido se contempla desde la perspectiva de su enseñanza. El control de las transformaciones que se deben aplicar al contenido matemático para su difusión y comunicación en los distintos niveles escolares debe ser también una competencia del profesor de matemáticas.

2.1. Conocimiento del contenido para la enseñanza

El trabajo de Shulman (1986) se reconoce como pionero en llamar la atención sobre el carácter específico del conocimiento del contenido para la enseñanza. Propuso tres categorías del conocimiento del contenido: conocimiento de la materia, conocimiento pedagógico del contenido (PCK[1]) y conocimiento curricular. El PCK lo describe como "la forma particular del conocimiento del contenido que incorpora el aspecto del contenido que guarda más relación con la enseñanza" (p.9) y también como "esa amalgama especial de contenido y pedagogía que es el campo propio de los profesores, su forma especial de comprensión profesional" (p.8). En otro trabajo posterior Shulman (1987) propuso siete categorías de conocimiento que hacen posible la enseñanza, a saber:

1) conocimiento del contenido;
2) conocimiento pedagógico general;
3) conocimiento del currículo;
4) conocimiento pedagógico del contenido (PCK);
5) conocimiento de los estudiantes y sus características;
6) conocimiento de los contextos educativos; y
7) conocimiento de los fines, propósitos y valores de la educación (p. 8).

Como fuentes de este conocimiento base para la enseñanza Shulman enumera las siguientes: 1) formación académica en la disciplina a enseñar; 2) los materiales y el contexto del proceso educativo institucionalizado (por ejemplo, los currículos, los libros de texto, la organización escolar y la financiación, y la estructura de la profesión docente); 3) la investigación sobre la escolarización; las organizaciones sociales; el aprendizaje humano, la enseñanza y el desarrollo, y los demás fenómenos socioculturales que influyen en el quehacer de los profesores; y 4) la sabiduría que otorga la práctica misma, las máximas que guían la práctica de los profesores competentes.

La propuesta de Shulman ha jugado un papel importante en el desarrollo de investigaciones e implementaciones curriculares para la formación de profesores.

[1] Siglas correspondientes a la expresión inglesa, "Pedagogical Content Knowledge" .

Las categorías identificadas por este autor siguen vigentes, aún cuando las interpretaciones iniciales dadas a las mismas han ido cambiando. Ponte y Chapman (2006) sostienen que el énfasis de la comunidad de investigadores fue puesto sobre la categoría “conocimiento pedagógico del contenido”, la cual en su momento representó un avance importante en las concepciones sobre el conocimiento del profesor.

2.2. Conocimiento matemático para la enseñanza

La noción de PCK ha dominado la literatura casi durante 20 años. Recientemente la noción de “conocimiento matemático para la enseñanza” (MKT[2]) ha sido introducida en el campo en diversos trabajos de Ball y colaboradores (Ball, 2000; Ball, Lubienski y Mewborn, 2001), a partir de la observación del trabajo de los profesores en el aula de matemáticas. En Hill, Ball, y Schilling (2008) se define el conocimiento matemático para enseñar como “el conocimiento matemático que utiliza el profesor en el aula para producir instrucción y crecimiento en el alumno.” (p. 374). Los análisis del trabajo del profesor les lleva a clasificar en dos grandes grupos los conocimientos puestos en juego (Figura 1): conocimiento del contenido y conocimiento pedagógico del contenido[3]. Para la primera categoría distinguen entre, Conocimiento Común del Contenido (CCK), Conocimiento Especializado del Contenido (SCK), y Conocimiento en el Horizonte Matemático. Para el conocimiento pedagógico del contenido proponen tener en cuenta, Conocimiento del Contenido y los Estudiantes (KCS), Conocimiento del Contenido y la Enseñanza (KCT), y Conocimiento del Currículo.

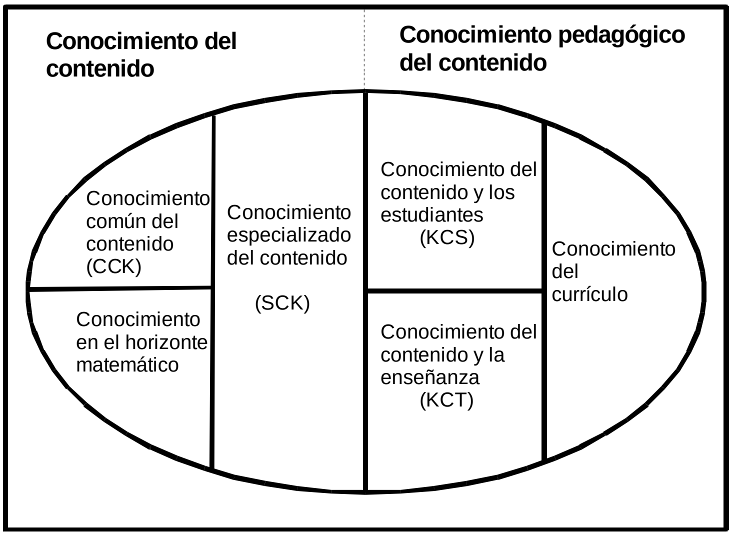


Figura 1: Conocimiento matemático para la enseñanza (MKT) (Hill, Ball y Schilling, 2008, p.377)

La distinción entre el conocimiento común del contenido (CCK) y el especializado (SCK) consiste en que, mientras el primero refiere al conocimiento puesto en juego para resolver problemas matemáticos, para lo cual un matemático, o incluso un sujeto adulto con suficiente conocimiento, está capacitado; el segundo

[2] Siglas correspondientes a la expresión inglesa, “Mathematical Knowledge for Teaching”.
[3] Una propuesta detallada de “conocimiento del contenido matemático” para profesores de educación primaria se desarrolla en Godino y cols (2004a) mientras que para el “conocimiento del contenido didáctico” se hace en Godino y cols (2004b).

refiere, por ejemplo, a realizar un ordenamiento de las secuencias con que podrían desarrollarse los diferentes aspectos de un contenido específico. Para esta última acción, es posible que un sujeto adulto, o inclusive un matemático, no tenga necesariamente la competencia ni la posibilidad de llevarla a cabo. Estos autores consideran que el profesor debe tener un conocimiento más avanzado del contenido específico que le lleve a plantearse cuestiones tales como: ¿Puede tener consecuencias matemáticas conflictivas algo que se ha dicho de manera explícita o implícita?; ¿Es esto interesante e importante desde el punto de vista matemático? ¿Hay alguna desviación en las ideas matemáticas tratadas?,… Refieren a estos aspectos del conocimiento matemático del profesor, como "conocimiento en el horizonte matemático". Se trata de conocimiento que aporta perspectiva a los profesores para su trabajo.

Hill, Ball, y Schilling (2008) definen el Conocimiento del Contenido y los Estudiantes (KCS) como el "conocimiento del contenido que se entrelaza con el conocimiento de cómo los estudiantes piensan, saben, o aprenden este contenido particular" (p. 375). Incluye el conocimiento de los errores y dificultades comunes, las concepciones erróneas, las estrategias utilizadas, el ser capaz de valorar la comprensión del alumno y saber cómo evoluciona su razonamiento matemático. Respecto al Conocimiento del Contenido y la Enseñanza (KCT) resulta de la integración del contenido matemático con el conocimiento de la enseñanza de dicho contenido. Incluye saber construir, a partir del razonamiento de los estudiantes y las estrategias utilizadas por ellos, procesos pertinentes para tratar y corregir sus errores y concepciones erróneas.

Como afirman Graeber y Tirosh (2008, p. 124), "El hecho de que muchos investigadores no ofrecen una descripción precisa y compartida de PCK sino más bien intentan caracterizarlo con listas o ejemplos es una indicación de que el concepto está aún mal definido". Similares limitaciones encuentran Silverman y Thompson (2008) para la noción de MKT: "Aunque el conocimiento matemático para la enseñanza ha comenzado a ganar atención como un concepto importante en la comunidad de investigación sobre formación de profesores, hay una comprensión limitada de lo que sea, cómo se puede reconocer, y cómo se puede desarrollar en la mente de los profesores" (p. 499).

Algunas cuestiones sobre las cuales se continúa trabajando relacionadas con el PCK se refieren a:

1) el papel de las creencias, afectos y valores en el desarrollo del PCK del profesor;

2) determinar si los componentes del PCK son dependientes de los paradigmas de enseñanza /aprendizaje asumidos;

3) mejora de los métodos para evaluar el PCK y nociones relacionadas;

4) elaboración de nociones más globales que incluyan conocimientos, creencias y afectos, tales como orientación, perspectiva e identidad del profesor (Philipp, 2007).

2.3. "Proficiencia" en la enseñanza de las matemáticas

Schoenfeld y Kilpatrick (2008) utilizan la expresión "proficiencia"[4] en la enseñanza de las matemáticas que puede ser interpretada como una referencia a los conocimientos (y competencias) que deberían tener los profesores para que su enseñanza se pueda considerar de calidad. "Una teoría de la proficiencia (en la enseñanza) dice lo que es importante – qué destrezas necesitan desarrollar las personas para llegar a ser proficientes". Se trata de extender la noción de proficiencia en la matemática escolar (introducida en Kilpatrick, Swafford y Findell, 2001) donde se incluye: comprensión conceptual, fluencia procedimental, competencia estratégica, razonamiento adaptativo, y disposición productiva.

La noción de proficiencia en la enseñanza de las matemáticas se puede interpretar en términos de competencia profesional del profesor de matemáticas. Schoenfeld y Kilpatrick (2008, p. 322) proponen distinguir las siguientes dimensiones:

1) Conocer las matemáticas escolares con profundidad y amplitud. El profesor tiene múltiples maneras de conceptualizar el contenido del nivel correspondiente, representarlo de diversas maneras, comprender los aspectos clave de cada tópico, y ver conexiones con otros tópicos del mismo nivel. El conocimiento profundo del contenido le permite seleccionar las "grandes ideas" para ser propuestas a los alumnos, así como responder con flexibilidad a las cuestiones que le planteen.

2) Conocer a los estudiantes como personas que piensan. Implica tener sensibilidad sobre lo que los estudiantes piensan, lo que proporciona información adicional sobre cómo los estudiantes dan sentido a las matemáticas y sobre cómo pueden construir sus conocimientos.

3) Conocer a los estudiantes como personas que aprenden. Esto supone ser consciente de la teoría del aprendizaje asumida y sus implicaciones en términos de las actividades de clase y las interacciones con los estudiantes.

4) Diseñar y gestionar entornos de aprendizaje. La creación de entornos productivos de aprendizaje incluye bastante más que la mera "gestión de la clase". Implica la creación de comunidades intelectuales en las que los estudiantes se comprometen en actividades intelectuales legítimas (p. 338).

5) Desarrollar las normas de la clase y apoyar el discurso de la clase como parte de la "enseñanza para la comprensión". La clase debe trabajar como una comunidad de aprendizaje; esto supone que los alumnos tienen que adoptar ciertas normas sociales en la clase, tales como la obligación de explicar y justificar sus soluciones, deben intentar comprender el razonamiento de los otros estudiantes, preguntar si no comprenden, y desafiar los argumentos con los que no están de acuerdo.

6) Construir relaciones que apoyen el aprendizaje. El profesor debe trabajar para organizar el contenido, sus diversas representaciones, y poner en relación a los estudiantes entre sí y con el contenido. El aprendizaje emerge de estas relaciones

[4] La palabra 'proficiencia' no está incluida en el Diccionario de la Lengua Española. Existe el adjetivo proficiente, "Dicho de una persona: Que va aprovechando en algo". En español se podría usar el término 'eficacia': "Capacidad de lograr el efecto que se desea o se espera"; o también, 'eficiencia', "Capacidad de disponer de alguien o de algo para conseguir un efecto determinado", en nuestro caso, una enseñanza de la matemática de alta calidad.

mutuamente constituidas.

7) Reflexionar sobre la propia práctica. “Lograr proficiencia en la enseñanza de las matemáticas, como lograr proficiencia matemática, es un proceso interactivo a lo largo de la vida. Ante un problema de la práctica de la enseñanza, el profesor de matemáticas necesita pensar reflexivamente sobre el problema si quiere resolverlo. Una vez hecha habitual, la reflexión puede llegar a ser el principal mecanismo para mejorar la propia práctica” (p. 348).

Schoenfeld y Kilpatrick concluyen que su propuesta es el primer paso hacia una teoría de la proficiencia en la enseñanza de las matemáticas, y que indudablemente, se requieren nuevos refinamientos y elaboraciones.

Algunas limitaciones de los modelos de conocimiento del profesor de matemáticas

Desde nuestro punto de vista, los modelos de “conocimiento matemático para la enseñanza” elaborados desde las investigaciones en educación matemática, incluyen categorías muy generales. Consideramos que sería útil disponer de modelos que permitan un análisis más detallado de cada uno de los tipos de conocimientos que se ponen en juego en una enseñanza efectiva (proficiente, eficaz, idónea) de las matemáticas. Ello permitiría orientar el diseño de acciones formativas y la elaboración de instrumentos de evaluación de los conocimientos del profesor de matemáticas.

A título de ejemplo, veamos la tarea sobre comparación de números racionales que Sullivan (2008) propuso a grupos de profesores para evaluar en qué medida podían describir el contenido de una tarea matemática y la manera en que podían usar dicha cuestión como punto de partida para diseñar una lección:

¿Qué es mayor 2/3 o 201/301?

a) Encuentra distintas maneras en que los estudiantes podrían resolver la tarea.

b) Si desarrollaras una lección basada en esta tarea, ¿qué matemáticas podrías esperar que los alumnos aprendieran?

Sin duda que esta tarea y las consignas a) y b) promueven la reflexión del profesor sobre la actividad matemática que los alumnos realizan al resolverla; sugiere, además, que los alumnos pueden abordar la tarea usando distintos procedimientos y que el aprendizaje matemático es el resultado de los procesos de resolución de problemas. Sin embargo, nos parece que la cuestión planteada de “qué matemáticas” podrías esperar que los alumnos aprendieran requiere que los profesores compartan un modelo explícito sobre la naturaleza de las matemáticas, y en particular los tipos de objetos y procesos que intervienen y emergen en la práctica matemática. Por otra parte, el diseño de una lección a partir de una secuencia de tareas requiere tener en cuenta, además de los conocimientos matemáticos que se ponen en juego, otras facetas que condicionan los aprendizajes (facetas cognitiva, instruccional, curricular,…). Para cada una de estas facetas consideramos necesario adoptar modelos explícitos y detallados de sus elementos constituyentes que ayuden en el análisis y reflexión sobre los procesos de enseñanza y aprendizaje.

En la siguiente sección describimos un modelo teórico sobre el conocimiento didáctico que en cierta manera contempla las categorías propuestas en los modelos descritos anteriormente, aporta nuevos niveles de análisis de las mismas, y ofrece una cierta sistematicidad en el tratamiento del tema.

3. Facetas y Niveles del Conocimiento Didáctico-Matemático del Profesor

En esta sección proponemos un sistema de categorías de análisis de los conocimientos matemáticos y didácticos del profesor que integra, organiza y extiende los modelos descritos en la sección anterior. Este modelo está basado en el marco teórico para la Didáctica de las Matemáticas que denominamos "Enfoque Ontosemiótico" del conocimiento y la instrucción matemáticos (EOS) (Godino, Batanero y Font, 2007)[5]. El EOS es un marco teórico que propone articular diferentes puntos de vista y nociones teóricas sobre el conocimiento matemático, su enseñanza y aprendizaje. Se adopta una perspectiva global, teniendo en cuenta las diversas dimensiones implicadas y las interacciones entre las mismas. Con dicho fin incluye, a) Un modelo epistemológico sobre las matemáticas basado en presupuestos antropológicos/ socioculturales; b) Un modelo de cognición matemática sobre bases semióticas; c) Un modelo instruccional sobre bases socio-constructivistas; d) Un modelo sistémico – ecológico que relaciona las anteriores dimensiones entre sí y con el trasfondo biológico, material y sociocultural en que tiene lugar la actividad de estudio y comunicación matemática.

Las nociones teóricas del EOS deben ser vistas como herramientas de análisis y reflexión sobre los procesos de enseñanza y aprendizaje, y pueden ser utilizadas por los propios profesores para indagar sobre su propia práctica. Se han elaborado varios sistemas de objetos y relaciones (categorías) que ayudan a analizar y comprender, de manera sistemática, y con distintos niveles de profundidad, los diversos aspectos implicados en la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas.

3.1. Facetas y niveles de análisis didáctico

El objeto central de estudio de la didáctica son los procesos de enseñanza y aprendizaje, implicando, por tanto, un "contenido", estudiantes, profesor, medios tecnológicos, y siendo tales procesos realizados en el seno de un contexto institucional y social determinado que condiciona y hace posible la realización del proceso educativo. Se trata del estudio de sistemas heterogéneos y complejos para los cuales es necesario adoptar modelos teóricos específicos para cada uno de los componentes. Dado que los distintos componentes del sistema interactúan entre sí se considera necesario identificar y tener en cuenta las distintas facetas intervinientes. El estudio se puede realizar, además, según distintos niveles de análisis, de acuerdo con el tipo de información requerida para la toma de decisiones instruccionales fundadas.

La figura 2 resume las facetas y niveles que propone el EOS para el análisis didáctico. Cada uno de los elementos considerados se puede interpretar como

---

[5] Una versión en español de este artículo, revisada y ampliada, así como otros trabajos relacionados, están disponibles en Internet: http://www.ugr.es/local/jgodino

categorías o componentes del conocimiento del profesor (del contenido matemático y didáctico).

Se trata de un modelo “poliédrico” cuya representación en planta indica las diversas facetas a tener en cuenta en un proceso de estudio y el alzado indica cuatro niveles de análisis sobre los cuales se puede fijar la atención. Debemos resaltar que aunque las facetas y niveles se han representado de manera disjunta, con la finalidad de discriminar su presencia en cualquier proceso de estudio de un contenido específico, tales facetas y niveles interactúan entre sí.

Figura 2: Facetas y niveles del conocimiento del profesor

Se propone tener en cuenta las siguientes facetas para analizar los procesos de instrucción matemática:

1. Epistémica: Conocimientos matemáticos relativos al contexto institucional en que se realiza el proceso de estudio y la distribución en el tiempo de los diversos componentes del contenido (problemas, lenguajes, procedimientos, definiciones, propiedades, argumentos).
2. Cognitiva: Conocimientos personales de los estudiantes y progresión de los aprendizajes.
3. Afectiva: Estados afectivos (actitudes, emociones, creencias, valores) de cada alumno con relación a los objetos matemáticos y al proceso de estudio seguido.
4. Mediacional: Recursos tecnológicos y asignación del tiempo a las distintas acciones y procesos.
5. Interaccional: Patrones de interacción entre el profesor y los estudiantes y su secuenciación orientada a la fijación y negociación de significados.
6. Ecológica: Sistema de relaciones con el entorno social, político, económico,... que soporta y condiciona el proceso de estudio.

Nuestro modelo considera como claves las facetas epistémica y cognitiva y postula para ellas un punto de vista antropológico y semiótico: la matemática como actividad humana que adquiere significado mediante la acción de las personas ante situaciones – problemas específicos. Pero también se concede relevancia a las demás facetas (afectiva, interaccional, mediacional y ecológica) ya que condicionan los aprendizajes y la enseñanza.

En cuanto a los niveles de análisis se proponen los siguientes:

1. Prácticas matemáticas y didácticas. Descripción de las acciones realizadas para resolver las tareas matemáticas propuestas para contextualizar los contenidos y promover el aprendizaje. También se describen las líneas generales de actuación del docente y discentes.
2. Configuraciones de objetos y procesos (matemáticos y didácticos). Descripción de objetos y procesos matemáticos que intervienen en la realización de las prácticas, así como los que emergen de ellas. La finalidad

de este nivel es describir la complejidad de objetos y significados de las prácticas matemáticas y didácticas como factor explicativo de los conflictos en su realización y de la progresión del aprendizaje.
3. Normas y metanormas. Identificación de la trama de reglas, hábitos, normas que condicionan y hacen posible el proceso de estudio, y que afectan a cada faceta y sus interacciones.
4. Idoneidad. Identificación de potenciales mejoras del proceso de estudio que incrementen la idoneidad didáctica.

Las facetas y niveles de análisis que hemos descrito sucintamente constituyen un sistema de categorización de los conocimientos del profesor que incluye los modelos descritos en la sección 2 y los amplía mediante las nociones teóricas que se detallan a continuación.

3.2. Herramientas para el análisis didáctico

El análisis de los conocimientos que se ponen en juego en los procesos de enseñanza y aprendizaje, con fines de diseño de experiencias formativas de profesores o de evaluación de tales conocimientos, requiere aplicar categorías más detalladas que las descritas en la sección 2 (modelos PCK, MKT, …). En el EOS se han desarrollado categorías de análisis explícitas para las dimensiones epistémica y cognitiva partiendo de una concepción de la matemática de tipo pragmático – antropológica (nociones de práctica y de institución), sin que esta visión implique el rechazo de la noción de objeto matemático. Para ello el objeto matemático es interpretado como entidad emergente e interviniente en las prácticas. En la figura 3 se resumen las categorías de objetos (y procesos) introducidos en el EOS, las cuales permiten realizar análisis pormenorizados de la actividad matemática, y por tanto, también de los conocimientos que intervienen en una enseñanza idónea de las matemáticas.

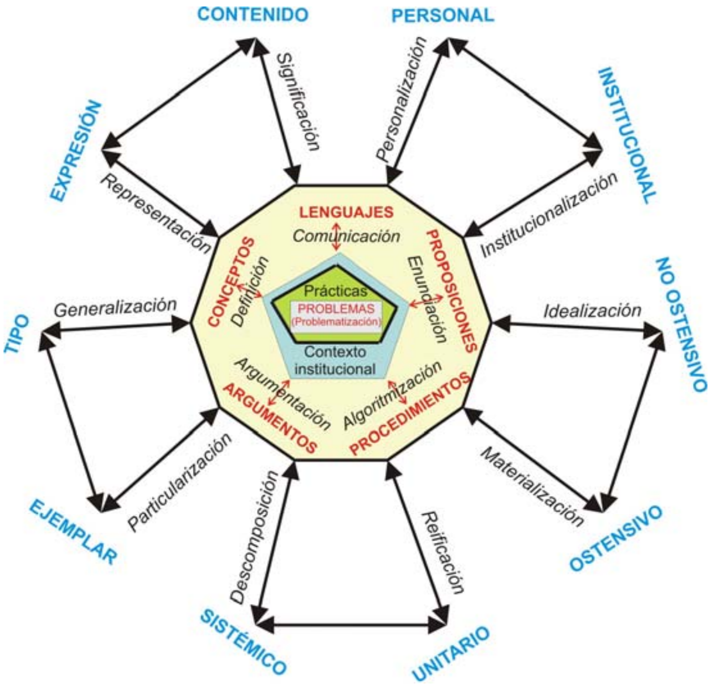


Figura 3: Prácticas, objetos y procesos matemáticos

La realización de este tipo de análisis por parte de los propios profesores se puede considerar como una competencia cuyo logro sería deseable alcanzar (Godino, Rivas, Castro y Konic, 2008), ya que permite profundizar en el conocimiento del contenido matemático para la enseñanza (conocimiento especializado y en el horizonte matemático, en la terminología de Ball y colaboradores).

Para el análisis de los procesos instruccionales el EOS ha introducido la noción de configuración y trayectoria didáctica cuyos elementos constituyentes se resumen en la figura 4. La tipología de normas (reglas, hábitos, …) que intervienen y condicionan los procesos instruccionales, elaborada en Godino, Font, Wilhelmi y Castro (2009), ayuda a comprender mejor dichos procesos, al permitir un nuevo nivel de análisis de los mismos.

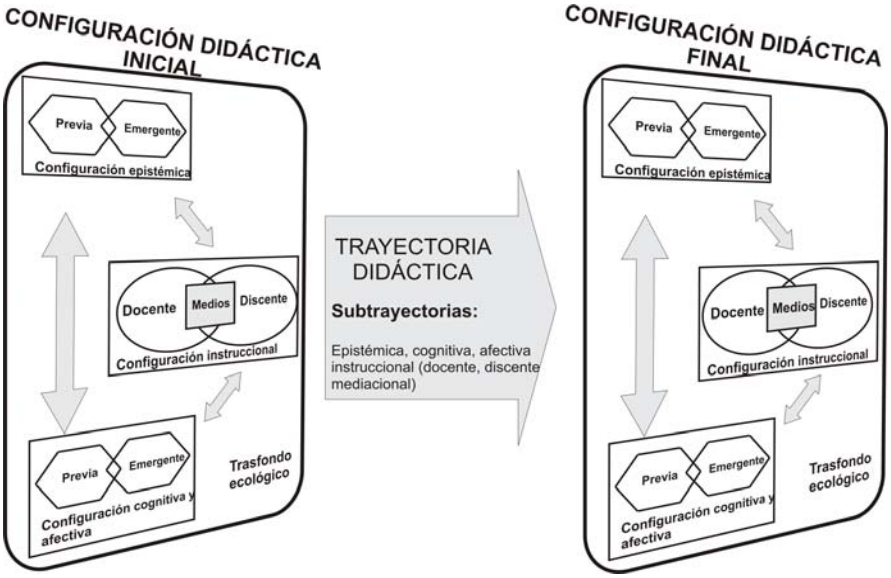


Figura 4: Configuraciones y trayectorias didácticas

Las herramientas descritas en las figura 3 y 4 permiten análisis pormenorizados de aspectos parciales de los procesos de enseñanza y aprendizaje, tales como la descripción de los objetos y procesos puestos en juego en la resolución de una tarea matemática, o las interacciones en el seno de un proceso instruccional de carácter local. El diseño y evaluación de planes de formación matemática (y didáctica) a nivel más global, como puede ser la implementación de una lección, una unidad didáctica, o un programa de estudio, requiere instrumentos conceptuales apropiados para dicho nivel.

La noción de idoneidad didáctica, sus dimensiones, criterios, y un desglose operativo de dicha noción, ha sido introducida en el EOS (Godino, Bencomo, Font y Wilhelmi, 2006) como herramienta que permite el paso de una didáctica descriptiva – explicativa a una didáctica normativa, esto es, una didáctica que se orienta hacia la intervención efectiva en el aula. La figura 5 resume las principales características de dicha noción.

La idoneidad didáctica de un proceso de instrucción se define como la articulación coherente y sistémica de las seis componentes siguientes:

- Idoneidad epistémica, se refiere al grado de representatividad de los significados institucionales implementados (o pretendidos), respecto de un significado de referencia.
- Idoneidad cognitiva, expresa el grado en que los significados pretendidos/ implementados estén en la zona de desarrollo potencial de los alumnos, así como la proximidad de los significados personales logrados a los significados pretendidos/ implementados.
- Idoneidad interaccional. Un proceso de enseñanza-aprendizaje tendrá mayor idoneidad desde el punto de vista interaccional si las configuraciones y trayectorias didácticas permiten, por una parte, identificar conflictos semióticos potenciales (que se puedan detectar a priori), y por otra parte permitan resolver los conflictos que se producen durante el proceso de instrucción.
- Idoneidad mediacional, grado de disponibilidad y adecuación de los recursos materiales y temporales necesarios para el desarrollo del proceso de enseñanza-aprendizaje.
- Idoneidad afectiva, grado de implicación (interés, motivación, …) del alumnado en el proceso de estudio. La idoneidad afectiva está relacionada tanto con factores que dependen de la institución como con factores que dependen básicamente del alumno y de su historia escolar previa.
- Idoneidad ecológica, grado en que el proceso de estudio se ajusta al proyecto educativo del centro, la escuela y la sociedad y a los condicionamientos del entorno en que se desarrolla.

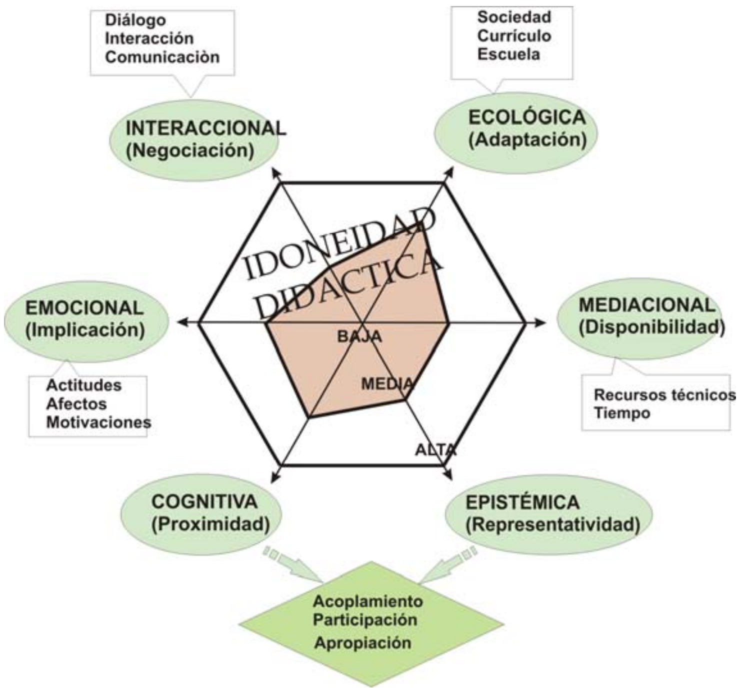


Figura 5: Idoneidad didáctica

Aunque las seis dimensiones de la idoneidad didáctica son en cierta medida similares a las dimensiones de la proficiencia, y también a las dimensiones del “conocimiento matemático para la enseñanza” (MKT), las nociones de “configuración de objetos y procesos” (en su doble versión, institucional y personal) y “configuración didáctica” proporcionan un desglose operativo de tales dimensiones, necesario para la organización de procesos formativos y su evaluación.

4. Evaluación y Desarrollo del Conocimiento Didáctico – Matemático

Incluimos en esta sección una “guía” para el enunciado de consignas (items de evaluación o propuestas de actividades) sobre el conocimiento matemático - didáctico del profesor, teniendo en cuenta el modelo descrito en la sección 3. Con las necesarias adaptaciones este tipo de cuestiones pueden ser usadas para: (i) la valoración de situaciones introductorias en procesos formativos para el desarrollo de competencias profesionales, (ii) como “cuestionario” de auto-evaluación y reflexión del profesor sobre aspectos relevantes de su propia práctica, y (iii) como instrumento de un evaluador externo para valorar un proceso de estudio implementado.

Con fines de evaluación, la metodología puede ser,

1) Elegir una tarea matemática (un proyecto, secuencia de actividades) cuya solución ponga en juego los principales aspectos del contenido, o de las competencias a desarrollar.

2) Formular consignas que cubran las distintas (o principales) facetas y niveles de análisis didáctico (figuras 2, 3 y 4). Las tablas 1 a 4 incluyen ejemplos de tales consignas, sin la pretensión de ser exhaustivos. Se puede ver que las consignas a) y b) de la tarea propuesta por Sullivan pueden ser ampliadas de manera sistemática usando las categorías de conocimiento didáctico descritas en la sección 3.

Tabla 1: Conocimiento del contenido (común, especializado y ampliado)

Faceta epistémica	Consigna
Conocimiento común	Resuelve la tarea
Conocimiento especializado:	Elabora la configuración de objetos y procesos puesta en juego en las soluciones plausibles de la tarea y otras relacionadas:
- Tipos de problemas	Identifica las variables de la tarea; generaliza (particulariza) el enunciado.
- Lenguajes (representaciones)	Resuelve las tareas usando diferentes representaciones.
- Procedimientos	Resuelve las tareas usando diferentes procedimientos (intuitivos; formales).
- Conceptos/propiedades	Identifica los conceptos y propiedades puestas en juego en las soluciones.
- Argumentos	Explica y justifica las soluciones.
Conocimiento ampliado:	
- Conexiones	-Identifica posibles generalizaciones de la tarea y conexiones con otros temas más avanzados.

La pregunta, ¿qué matemáticas podrías esperar que los alumnos aprendieran?, se concreta y hace operativa con la noción de "configuración de objetos y procesos". Esta noción lleva a pensar de manera sistemática en los diferentes procedimientos posibles de resolución, modalidades de expresión, conceptos y propiedades que se ponen en juego con distintos grados de formalidad en su formulación, así como sobre maneras de argumentar o justificar los procedimientos y propiedades. El análisis del tipo de tarea propuesta y las variables didácticas que intervienen en la misma orienta la reflexión sobre posibles generalizaciones, o particularizaciones, y las conexiones con otros contenidos matemáticos.

La reflexión sistemática sobre el aprendizaje de los estudiantes queda facilitada por los tipos de consignas que incluimos en la tabla 2.

Tabla 2: Conocimiento del contenido en relación a los estudiantes (aprendizajes)

Faceta cognitiva + afectiva	Consigna
Configuraciones cognitivas (estrategias, representaciones, enunciados, argumentaciones,…)	Describe los tipos de configuraciones cognitivas que los alumnos han desarrollado al resolver la tarea (o tareas) propuesta.
Errores, dificultades, conflictos de aprendizaje, concepciones	Describe los principales tipos de conflictos de aprendizaje en la resolución de este tipo de tareas por los alumnos.
Evaluación de aprendizajes	Formular cuestiones que permitan explicitar los significados personales de los alumnos al resolver este tipo de tareas (o contenidos).
Actitudes, emociones, creencias, valores	Describe estrategias que se pueden implementar para promover que los alumnos se involucren en la solución de estas tareas (o el estudio del tema).

La noción de configuración cognitiva se corresponde con la de configuración epistémica, incluyendo componentes similares. Aquí se supone que la tarea ha sido propuesta a los estudiantes y que se dispone de los protocolos de respuesta, o bien de observaciones de las exploraciones y argumentaciones de los estudiantes. La comparación con las configuraciones epistémicas (soluciones previstas) permite determinar el grado en que se alcanzan los objetivos de aprendizaje pretendidos.

La reflexión sistemática sobre las relaciones entre la enseñanza y el aprendizaje, y la identificación de las consecuencias que pueden tener sobre el aprendizaje los modos de gestión de la clase, se puede facilitar con el tipo de consignas que incluimos en la tabla 3.

Tabla 3: Conocimiento del contenido en relación a la enseñanza

Faceta instruccional (interaccional + mediacional)	**Consigna**
Configuración didáctica: - Roles del profesor y de los estudiantes con relación a la tarea o contenido - Modos de interacción profesor – alumnos; alumnos – alumnos; - Recursos materiales - Tiempo asignado	Describe la configuración didáctica que implementarías usando la tarea matemática dada.
Trayectoria didáctica (secuencia de configuraciones didácticas)	Describe otras tareas relacionadas con la dada y el modo de gestionar la trayectoria didáctica correspondiente.

Finalmente la reflexión sobre los aspectos que Shulman (2007) describe como conocimiento curricular, contextos educativos, fines, propósitos y valores de la educación, se puede concretar con consignas similares a las que incluimos en la tabla 4.

Tabla 4: Conocimiento del currículo y conexiones intra e interdisciplinares

Faceta ecológica	**Consigna**
Orientaciones curriculares	Identifica los elementos del currículo que son abordados mediante la realización de la tarea(s) propuesta (fines, objetivos).
Conexiones intra-disciplinares	Explica las conexiones que se pueden establecer con otros temas del programa de estudio mediante la realización de la tarea o de variantes de la misma.
Conexiones interdisciplinares	Explica las conexiones que se pueden establecer con otras materias del programa de estudio mediante la realización de la tarea o de variantes de la misma.
Otros factores condicionantes	Identifica factores de índole social, material, o de otro tipo, que condicionan la realización de la tarea o el desarrollo del proyecto educativo pretendido o implementado.

Análisis y reflexión sobre la idoneidad didáctica

Mediante los tipos de consignas descritas se abordan aspectos parciales de los procesos de enseñanza y aprendizaje, focalizados en la resolución de tareas, desarrollo de proyectos o actividades matemáticas. Esta estrategia de evaluación y formación puede ser pertinente en la preparación inicial de profesores, usualmente llevada a cabo sin relación directa con la práctica de la enseñanza.

En el caso de que la formación se realice en estrecha relación con la fase de prácticas en las escuelas o institutos, se trate de la formación de profesores en ejercicio, o se disponga de grabaciones audio-visuales de lecciones planificadas e impartidas en las escuelas será posible focalizar los procesos de evaluación y desarrollo de competencias profesionales aplicando la noción de idoneidad didáctica.

Supuesto dado un proceso de estudio "vivido" por un profesor (o del que se dispone de una descripción suficiente) la promoción y evaluación de su competencia profesional se puede hacer mediante el análisis de sus respuestas a la siguiente pregunta – tipo: ¿Cómo valorarías la idoneidad didáctica del proceso? Explica con detalle y justifica tu respuesta.

Se supone que el profesor está familiarizado con las dimensiones, componentes e indicadores empíricos de la noción de idoneidad didáctica, por lo que deberá emitir juicios razonados sobre la idoneidad epistémica, cognitiva – afectiva, instruccional y ecológica.

En Godino, Batanero, Roa y Wilhelmi (2008) se describe una experiencia de formación inicial de profesores de educación primaria en la que los estudiantes tienen ocasión de "vivir" un proceso personal de estudio matemático en el que deben realizar un proyecto de análisis de datos siguiendo un modelo didáctico específico. De esta manera el formador crea una situación de reflexión /indagación sobre la idoneidad didáctica del proceso de estudio matemático implementado, al tiempo que los estudiantes profundizan en el conocimiento especializado del contenido estadístico.

5. Reflexiones Finales

En este trabajo hemos presentado las principales características de algunos modelos de categorización de los conocimientos del profesor de matemáticas. Partiendo de la propuesta general de conocimiento del contenido para la enseñanza de Shulman, pasando por el MKT de Ball y cols., y de la proficiencia en la enseñanza de las matemáticas de Schoenfeld y Kilpatrick hemos tratado de mostrar que la noción de "idoneidad didáctica", junto con sus dimensiones, componentes e indicadores empíricos (Godino, Bencomo, Font, y Wilhelmi, 2006) permite articular los modelos anteriores al tiempo que los complementa con nuevos matices y desarrollos.

El breve análisis realizado de las categorías de conocimientos didácticos del profesor de matemáticas, introducidas por los modelos seleccionados muestra que, en mayor o menor medida, incluyen aspectos parciales de las seis facetas propuestas en el modelo basado en el EOS. Los niveles de análisis propuestos por el EOS suponen una profundización y sistematización en la descripción de cada una de las facetas que puede ser útil en el diseño de acciones formativas de los profesores, y para evaluar las concepciones y conocimientos didácticos de los mismos. Así mismo, los criterios de idoneidad didáctica formulados pueden ser una guía para el diseño, implementación y evaluación de planes de formación de los profesores, y para la reflexión/ indagación de los mismos sobre su propia práctica.

El sistema de categorías de los conocimientos del profesor de matemáticas basado en el EOS deberá ser ampliado y refinado, en particular en cuanto a las dimensiones afectiva y ecológica. Dado que se trata de un modelo elaborado desde un planteamiento racional, esto es, a partir de la asunción de unos presupuestos epistemológicos, cognitivos e instruccionales sobre la matemática y su enseñanza, se requiere que los propios profesores pongan en práctica el modelo como instrumento de análisis de sus experiencias de clase. En consecuencia, se necesita implementar una agenda de investigación en formación de profesores (Godino, Rivas, Castro y Konic, 2008) que aporte información sobre las posibles estrategias a seguir para lograr que los profesores conozcan las herramientas, las adapten y apliquen a su propia práctica.

Reconocimiento

Trabajo realizado en el marco del proyecto de investigación, SEJ2007-60110/EDUC. MEC-FEDER

BIBLIOGRAFIA

Ball, D. L. (2000). Bridging practices: Intertwining content and pedagogy in teaching and learning to teach. Journal of Teacher Education, 51, 241-247.

Ball, D. L., Lubienski, S. T. y Mewborn, D. S. (2001). Research on teaching mathematics: The unsolved problem of teachers' mathematical knowledge. In V. Richardson (Ed.), Handbook of research on teaching (4th ed., pp. 433-456). Washington, DC: American Educational Research Association.

Godino, J. D. (1991). Hacia una teoría de la Didáctica de la Matemática. En A. Gutierrez (Ed.), Area de Conocimiento Didáctica de la Matemática. (pp. 105-149). Madrid: Síntesis.

Godino, J. D. (2002). Un enfoque ontológico y semiótico de la cognición matemática. Recherches en Didactiques des Mathematiques, 22 (2/3), 237-284.

Godino, J. D. Batanero, C., y Font, V. (2007). The onto-semiotic approach to research in mathematics education. ZDM. The International Journal on Mathematics Education, 39(1-2), 127-135. (Versión ampliada en español disponible en, http://www.ugr.es/local/jgodino)

Godino, J. D., Batanero, C., Cid, E., Font, V, Roa, R. y Ruiz, F. (2004a). Matemáticas para maestros. Departamento de Didáctica de las Matemáticas. Universidad de Granada.
(Disponible en internet : http://www.ugr.es/~jgodino/fprofesores.htm)

Godino, J. D., Batanero, C., Cid, E., Font, V, Roa, R. y Ruiz, F. (2004b). Didáctica de las matemáticas para maestros. Departamento de Didáctica de las Matemáticas. Universidad de Granada.
(Disponible en internet : http://www.ugr.es/~jgodino/fprofesores.htm)

Godino, J. D., Batanero, C., Roa, R. y Wilhelmi, M. R. (2008). Assessing and developing pedagogical content and statistical knowledge of primary school teachers through project work. En C. Batanero, G. Burrill, C. Reading y A. Rossman (Eds.), Challenges for Teaching and Teacher Education. Proceedings of the ICMI Study 18 and 2008 IASE Round Table Conference.

Godino, J. D., Bencomo, D., Font, V. y Wilhelmi, M. R. (2006) Análisis y valoración de la idoneidad didáctica de procesos de estudio de las matemáticas. Paradigma, 27 (2), 221-252.

Godino, J. D., Font, V., Wilhelmi, M. R. y Castro, C. de (2009). Aproximación a la dimensión normativa en Didáctica de la Matemática desde un enfoque ontosemiótico. Enseñanza de las Ciencias, 27(1), 59–76.

Godino, J. D., Rivas, M., Castro, W. F. y Konic, P. (2008). Desarrollo de competencias para el análisis didáctico del profesor de matemáticas. Actas de las VI Jornadas de Educación Matemática Región de Murcia. Centro de Profesores y Recursos. Murcia.

Graeber, A. y Tirosh, D. (2008). Pedagogical content knowledge. Useful concept or elusive notion. En P. Sullivan & T. Woods (eds.), Knowledge and Beliefs in Mathematics Teaching and Teaching Development (pp. 117-132). Rotterdam: Sense Publishers.

Hill, H. C., Ball, D. L. y Schilling, S. G. (2008). Unpacking pedagogical content knowledge: Conceptualizing and measuring teachers' topic-specific knowledge of students. Journal for Research in Mathematics Education, 39, 372-400.

Kilpatrick, J., Swafford, J. y Findell, B. (Eds.) (2001). Adding it up: Helping children learn mathematics. Washington, DC: National Academy Press.

Philipp, R. A. (2007). Mathematics teachers' beliefs and affect. En F. K. Lester (ed.), Second Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning (pp.257-315). Charlote, NC: National Council of Teachers of Mathematics.

Ponte, J. P. y Chapman, O. (2006). Mathematics teachers' knowledge and practice. In A. Gutierrez y P. Boero (Eds.). Handbook of Research of the Psychology of Mathematics Education: Past, Present and Future. (pp. 461-494). Rotterdam: Sense Publishing.

Schoenfeld, A. H. y Kilpatrick, J. (2008). Towards a theory of profiency in teaching mathematics. En D. Tirosh & T. Wood (eds.), Tools and Processes in Mathematics Teacher Education (pp. 321-354). Rotterdam: Sense Publishers.

Shulman, L. S. (1986). Those who understand: Knowledge growth in teaching. Educational Researcher, 15(2), 4 - 14.

Shulman, L. S. (1987). Knowledge and teaching: Foundations of the new reform. Harvard Educational Review, 57(1), 1-22.

Silverman, J. y Thompson, P. W. (2008). Toward a framework for the develoment of mathematical knowledge for teaching. Journal of Mathematics Teacher Education, 11, 499-511.

Swoder, J. T. (2007). The mathematical education and development of teachers. En F. K. Lester (ed.), Second Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning (pp.157-223). Charlote, NC: National Council of Teachers of Mathematics.

Sullivan, P. (2008). Knowledge for teaching mathematics. En P. Sullivan & T. Woods (eds.), Knowledge and Beliefs in Mathematics Teaching and Teaching

Development (pp. 1-9). Rotterdam: Sense Publishers.

Wood, T. (Ed.) (2008). The international handbook of mathematics teacher education. Rotterdam: Sense Publishers.

Juan D. Godino, Departamento de Didáctica de la Matemática Facultad de Ciencias de la Educación Universidad de Granada jgodino@ugr.es; http://www.ugr.es/local/jgodino.

UNIÓN
REVISTA IBEROAMERICANA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA

Diciembre de 2009, Número 20, páginas 33 – 57
ISSN: 1815-0640

El Poema del Mío Cid y las matemáticas

Luis Balbuena Castellano

Resumen

Las obras literarias son una fuente en la que se puede encontrar matemáticas. El *Poema del Mío Cid* es una obra de obligada lectura en la literatura castellana. Cuando lo estudié en su momento, nadie me hizo reparar en que también en ese texto hay alusiones matemáticas que este artículo intenta sintetizar. Es un trabajo en proyecto al alcance de estudiantes de todos los niveles.

Abstract

Literary works are a source where Mathematics can be founded “El Poema del Mio Cid” is a work of obligatory reading in Spanish literature. When I studied the poem, nobody made me realize that there are some mathematical mentions in the test, mentions that this article tries to synthesize. It is a work in project within the reach of all levels.

Resumo

As obras literárias são uma fonte na que se pode encontrar matemáticas. O Poema do Meu Cid é uma obra de obrigada leitura na literatura castelhana. Quando o estudei em seu momento, ninguém me fez consertar em que também nesse texto há alusões matemáticas que este artigo tenta sintetizar. É um trabalho em projecto ao alcance de estudantes de todos os níveis.

1.- Introducción.
2.- Los números: Números cardinales y ordinales, grandes cantidades, fracciones.
3.- Multiplicaciones: doblar, triplicar, cuadriplicar.
4.- Partes del día: noche, día/días, anoche, mañana, madrugada, alba, albor, albores, amanecer, maitines.
5.- Otras unidades de tiempo: año, semanas, hora.
6.- Unidades de distancia: leguas, millas, asta de lanza.
7.- Aproximaciones.
8.- Marcos y dineros.
9.- Parias.
10.- Cielo/cielos.
11.- Tierra.
12.- Sol (estrellas y luna).
13.- Invierno/marzo.
14.- Oriente.
15.- Epílogo.
ANEXO 1.- Ejercicios.
ANEXO 2.- Curiosidades.

Manuscrito que se conserva en la Biblioteca Nacional

1. Introducción

Los especialistas discuten si la copia que existe del *Poema del Mío Cid* se escribió en 1207 o en 1307. Para lo que pretendo en este estudio, poco importa ese dato. Quizá resaltar que sea cual sea la fecha, el 2007 es un centenario más de ese preciado documento escrito por Per Abat y eso es lo que celebro.

El *Poema* relata las aventuras y desventuras del héroe medieval por excelencia, Rodrigo Díaz de Vivar, el Cid Campeador, en una España aun por formar, con reinos grandes y pequeños a la greña unos con otros, tanto de moros como de cristianos. Faltan un par de hojas en el manuscrito. Una de ellas es la primera y por eso la decisión del destierro es relatada a través de 130 versos como una parte reconstruida sobre el texto de la *Crónica de Veinte Reyes*. Las envidias de ciertos cortesanos hacia nuestro personaje, impulsan al rey Alfonso a desterrarlo pero seguramente, en esa decisión, pesó más lo que dicen los siguientes versos:

Nunca olvida don Alfonso   lo que en Burgos ocurrió
cuando a su hermano don Sancho   lo mataron a traición,
y don Rodrigo fue quien   la palabra le tomó
que en su muerte no hubo parte;   y de esto mucho se habló.

Con el "Camino del destierro" comienza el manuscrito de Per Abat. El Cid hace los preparativos de la salida de Castilla con los que le son más fieles y otros 115 caballeros, dejando a sus dos hijas y esposa en el monasterio de San Pedro de Cardeña. Una vez fuera de las tierras del rey Alfonso, entra en las de otros, moros y cristianos, y con ellos combate. Se extiende su fama de guerrero triunfador. Reúne una gran mesnada a la que enriquece con el botín de cada victoria. Se produce la toma de Valencia, su defensa, las bodas de sus hijas con los cobardes de los Infantes de Carrión; sigue la afrenta de Corpes, una despreciable venganza de los dos de Carrión y la posterior justicia del rey Alfonso incluido el combate entre los fieles del Cid y los hermanos. El *Poema* acaba bien pues las hijas del Campeador son pedidas en mano para los herederos de Navarra y Aragón.

No entraré ni en el análisis de la obra ni en ningún tipo de valoración sobre la posible exageración de cuanto se cuenta, pues una vez que pasa a ser una historia popular, que se transmite al principio de forma oral, hay una tendencia a transformar la realidad que, parece ser, también está presente en el *Poema*. A lo largo del relato se utilizan términos que tienen que ver con las matemáticas y es mi intención resaltarlos, analizarlos y sacarles partido didáctico en un afán de hacer ver cómo las matemáticas pueden servir, en este caso, para comprender mejor el *Poema* y saber interpretar ciertas situaciones que, tal vez, no quedarían conocidas por el lector con la profundidad debida. El estudio lo he realizado utilizando la versión métrica moderna del *Poema* que ha hecho Francisco López Estrada, edición de Castalia "Odres nuevos", año 1990.

Portada del libro

En los 3 730 versos de que consta el *Poema*, se utilizan 35 números cardinales distintos que van desde el 2 (el uno lo he excluido del conteo) hasta el 50 000 que es la mayor cantidad que aparece de forma explícita. Téngase en cuenta, no obstante, que se trata de un gran número para la época pues ciudades como Sevilla, Toledo o Burgos no llegaban a esa cantidad de habitantes en aquellos tiempos. De los ordinales solo aparecen cinco (primero, tercero, cuarta, quinto y décimo).

Existe también un conjunto de números de otro tipo, de palabras y de expresiones que tienen que ver directa o indirectamente con las matemáticas. Se estudia cada una de ellas y se señalan algunas citas textuales, especialmente cuando puede tener más de una acepción o se utilizan en contextos diferentes.

Finalmente se ofrecen dos anexos; uno en el que propongo una colección de ejercicios cuyos textos están basados en situaciones y datos que aparecen en el *Poema;* pretenden acercarse al sentido de los aspectos matemáticos que figuran en la obra que, obviamente, son elementales y no requieren explicaciones prolijas. En el otro anexo muestro algunas curiosidades que considero destacables.

2. Los números

2.1. Números cardinales

A continuación se relacionan los números del *Poema*. En una columna se indica el número y en la de al lado la cantidad de veces que aparece en el texto:

Nº	Nº de citas	Nº	Nº de citas	Nº	Nº de citas	Nº	Nº de citas
2	173	**30**	6	**200**	17	**4000**	1
3	40	**32**	1	**203**	1	**5000**	1
4	3	**34**	1	**300**	4	**7000**	1
5	5	**50**	1	**500**	3	**30000**	2
6	3	**60**	1	**510**	1	**50000**	4
7	5	**65**	1	**600**	6		
9	4	**100**	26	**1000**	7		
10	2	**104**	1	**1300**	1		
15	8	**115**	1	**3000**	7		
20	1	**130**	1	**3600**	1		

Analizo a continuación cada uno de los números entresacando algunas de las citas.

2

Es el más frecuente. Aparece ciento setenta y tres veces. Y hay razones para que sea así pues hay dos parejas que son protagonistas en varias partes relativamente largas. Se trata de las hijas del Cid, doña Elvira y doña Sol a las que se alude como "dos" en cincuenta y siete veces y los Infantes de Carrión, don Diego y don Fernando, con quienes las casaron, que son aludidos en cincuenta y una ocasiones. Por lo tanto, entre estas dos parejas, se cubren ciento ocho citas del número dos. Las bodas entre ambos y la afrenta de Corpes son los episodios en los que, obviamente, se les cita con mayor

Sello conmemorativo de 2007

frecuencia.

Las dos hijas dejo niñas; tomadlas en vuestros brazos. Esta es la primera vez que se cita a las *dos* hijas del Cid, en la escena de la despedida. Después sigue la parte en la que el Cid emprende el destierro, con todas sus conquistas y batallas hasta instalarse en Valencia. Entonces su esposa e hijas son trasladadas a esa ciudad y se convierten en protagonistas. Los siguientes versos, separados en el *Poema*, se refieren a estos *dos* pares de personajes:

- *por Jimena, tan honrada, y por sus hijas, las dos*
- *A sus dos primas dolientes a punto de muerte halló*
- *Pues las dos estáis con vida, y las dos estáis sin mal.*
- *Por las dos hijas del Cid doña Elvira y doña Sol*
- *Los Infantes de Carrión muy alegres los dos andan*
- *Con sus hijas vos, decidle, quieren casarse los dos.*
- *Nuestro Cid y sus dos yernos en Valencia se quedaron*
- *Los dos hermanos trataron de cómo hacerle traición*

Además de estas parejas, hay otras que también se repiten en el *Poema* aunque con menor frecuencia:

Pedro Bermúdez y el Mineya Alvar Fáñez, ocho veces.

Raquel y Vidas, cinco veces. Se trata de los dos judíos de Burgos.

- *Sonriese nuestro Cid, y así les estaba hablando:*
  - ¿Pues, don Raquel y don Vidas, me teníais olvidado?

a los que logra engañar para que le conceda un préstamo de seiscientos marcos a cambio de dos arcas llenas de arena, astutamente bien cerradas:

- *cubridlas con ricos cueros; y más, con clavos cerradlas*

Los cueros sean bermejos y los clavos bien dorados.

Les hacen creer que contienen los impuestos (parias) que el Cid ha defraudado al rey Alfonso.

Las espadas del Cid, *Colada* y *Tizón* se nombran como dos en seis ocasiones.

Otro verso que nombra al *dos* dos veces:

- *La tienda del rey de moros, que es la primera en el campo,*

Dos mástiles la levantan los dos son de oro labrado.

El monumento al Cid en Burgos

3

Aparece 39 veces. En seis ocasiones se refiere a días como: *Tres días lo tuvo preso; Solo tres quedan al Cid* (se refiere a los días que el rey Alfonso dio para hacer efectivo el destierro abandonando sus territorios).

También con semanas: *Al cabo de tres semanas* (hay cinco aplicaciones). *Los tres reyes de Arabia; Tres caudillos moros*; otras, en fin, en los siguientes versos:

- *A Fáriz, príncipe moro, tres veces ha golpeado*
- *Por cada uno que hiráis, dejad tres sillas sin plaza*
- *Les da el Cid tres palafrenes todos muy bien ensillados*.
- *El rey aquel (el de Sevilla) con tres heridas escapó*.
- *Llegan cerca de Valencia a tres leguas de distancia.*
- *Por los robledos de Corpes los tres solos ¡qué dolor!*
- *Que se enfrenten tres a tres, los que se retaron hoy.*

4

El cuatro es usado en tres ocasiones. Dos de ellas son las siguientes. La tercera se verá en el punto 3.3:

- *Abatió allí siete moros, y a otros cuatro los mataba.*
- *Todos los demás se han ido, los cuatro solos ¡Por Dios!*

5

Justamente está cinco veces:

- *Cinco escuderos, cinco dueñas de pro, en cinco lides campales, cinco mató con la espada* y
- *de San Pedro hasta Medina en cinco jornadas vas.*

6

Es utilizado en tres citas:

- *Seis días de los del plazo se le han pasado ya*

En el duelo entre los valedores del Cid y los Condes de Carrión para hacer justicia por la afrenta de Corpes, hay una utilización del seis para indicar una distancia:

- *De unas seis astas de lanza de donde se señaló*

También en esta escena, en la que intervienen tres por cada parte se dice:

- *Y muy bien se la dijeron a los seis la condición:*
- *que sería allí vencido quien saliese del mojón.*


Lucha del Cid con Martín Gomes. Miniatura de Crónica de España.

7

Aparece en cinco ocasiones referido a cuatro elementos diferentes:

Para las bodas de las hijas del Cid, *siete castillos de tablas el otro día se alzaron.*
En la batalla contra el rey Búcar, de Marruecos, *abatió allí siete moros.*
Tras esa misma batalla, *siete millas bien cumplidas los persiguen sin pararse.*
El Rey Alfonso decide convocar las Cortes en Toledo para juzgar a los Infantes de Carrión y avisa al Cid:

- *Que de aquí a siete semanas, se prepara, y sus vasallos,*
  y se venga a Toledo. Esto les doy de plazo.

9

Hay cuatro citas, dos de ellas se refieren a días.

Ese fue el plazo que le dio el Rey Alfonso: *Tan solo nueve días, ni uno más, ¡y lo sintió!* En ese plazo ha de avisar a sus parientes y vasallos para saber quiénes le acompañarán y hacer todos los preparativos de intendencia.

Cuando inicia su camino hacia el destierro, el rey Alfonso envió una carta con órdenes muy severas, *mandaba en ella que al Cid nadie le diese posada*. Una niña es la que se lo dice: *Nueve años tiene la niña, que ante sus ojos se planta.* Le cuenta las terribles penas a que se arriesgan si le ofrecen cobijo y termina diciéndole:

- *Ya veis, Cid, que en nuestro mal, vos no habéis de ganar nada,*
  Pues que el Criador os valga con toda su gracia santa.

El cerco que puso a Valencia duró nueve meses

- *y cuando el décimo vino se la tuvieron que dar.*

10

Aparece en dos ocasiones:

- *En aquellas correrías se pasan diez días más.*
- *Con diez que son sus parientes, aparte allí se ha juntado.*

15

Hay ocho citas referidas a moros (1), días (3), semanas (2) y hombres (2):

- *Ha descansado allí el Cid quince cumplidas semanas* (En Calatayud)
- *Y dentro de quince días, si Él nos guardare de mal*
- *Él ha elegido unos quince; con ellos pie a tierra echó*

20

- *más de veinte son los moros que Alvar Fáñez ha matado*

30

En seis ocasiones se utiliza esta cantidad. De ellas, una se refiere a marcos, cuatro veces las aplica a caballos como, por ejemplo:

- *con vos enviarle en don   treinta escogidos caballos*.

Una curiosa utilización del treinta la veremos con el cuatro mil.

32

En la larga oración que hace doña Jimena cuando se despide del Cid para que *lo libre de todo mal,* dice, refiriéndose a Cristo:

- *Por tierra treinta y dos años   anduviste, y aun es más*
  nos mostraste los milagros   de los que tanto hay que hablar

34

- *De todos aquellos moros   él ha muerto a treinta y cuatro*

El Cid ecuestre; serie de 1962

50

- *Y pues me voy de la tierra,   os daré cincuenta marcos.*

60

- *Nuestro Cid, de sus caballos,   sesenta allí regaló*.

65

- *Vinieron sesenta y cinco   caballeros a aumentar.*

100

Puede que al tratarse de una cantidad "redonda", aparezca con una frecuencia mayor que otras cantidades. Se nombra como "ciento" o como cien en veintiséis ocasiones. Algunas de ellas son:

- *A cien moros y a cien moras   libertad les quiero dar*
- *A cada uno del común   tocan cien marcos de plata.*
- *Si ciento le pidió el Cid   doscientos son los que van*
- *Él entra en medio de todos   los ciento a su alrededor*.

104

Solo hay una cita que es realmente terrorífica pues tras la batalla con Yúsuf dice:

- *De los cincuenta mil moros,   allí sus cuentas echaron*
  Que no más de ciento cuatro   con vida escapar lograron.

115

- *Ciento quince caballeros   júntanse, y con viva voz*
  Todos piden y preguntan   por el Cid Campeador.

130

- *ciento treinta caballeros   dadme a mí para luchar*.

Portada de Cronica del famoso e invencible cavallero Cid Ruy Díaz Campeador

Es la cantidad de guerreros que pide el Minaya Alvar Fáñez para participar en la lucha contra el rey Yúsuf, de Marruecos, cuanto atacó Valencia.

200

Es usado con frecuencia, hasta dieciséis veces, referidas a hombres (10), marcos (3) y caballos (3):

- *Dadme a mi otros doscientos para correr en algara.*
- *Con doscientos caballeros salióles a acompañar*
- *A cada uno de ellos doy en dote doscientos marcos*

Por los doscientos caballos que con vos me envía el Cid

203

- *Volvamos a los doscientos y tres que van en algara.*

300

Las cuatro ocasiones en las que aparece son:

- *Alistó trescientas lanzas, a trescientos moros matan, trescientas lanzas combaten, trescientos marcos de plata.*

500

Hay tres citas; dos para indicar marcos y otra para señalar con la "aproximación" de "más de" los que mataron en la lucha contra las huestes de *Yúsuf:*

- *Más de quinientos mataron en la lucha de aquel día.*
- *Los quinientos marcos dio Álvar Fáñez al abad.*

510

- *De los caballos moriscos cuando se hubieron juntado,*
  Encontraron que había quinientos diez en el campo.

600

Esta cantidad se cita cinco veces, en cuatro ocasiones se refiere a marcos y en una a personas que es cuando el Minaya da esta aproximación:

- *Nosotros somos seiscientos; puede que haya alguno más*.

1.000

En siete ocasiones aparece y en todas ellas para referirse a unidades concretas y no como frase hecha salvo quizá cuando en tres ocasiones se refiere a mil misas que pagó.

- *En la lid ganó a Tizón que mil marcos de oro vale.*

- *De los buenos y otorgados, tocáronle mil caballos* (al Cid).

1.300

- *Mil trescientos moros muertos más o menos allí están*

3.000

De las siete ocasiones en que aparece este número, cinco los aplica a marcos y dos a moros:

- *Os lleváis a tres mil moros con las armas de luchar*
- *Entre el oro y plata juntos encontraron tres mil marcos*
- *Que les vendiera Alcocer por tres mil marcos de plata*

3.600

En *Valencia* manda hacer un recuento de *cuántos son los que aquí están*

- *Cuando allí se reunieron, lista les hizo pasar:*
  Tres mil seiscientos tenía nuestro Cid, el de Vivar.

4.000

- *Son cuatro mil menos treinta y en cabeza el Cid mandando*

5.000

- *Cinco mil marcos valía lo que ganaron los dos* (se refiere a los de Carrión)

7.000

- *De los moros y las moras a siete mil cautivó.*

30.000

Es una de las grandes cantidades que se citan, solo detrás de 50.000. Lo hace en dos ocasiones, una referida a marcos, lo que supone una gran cantidad de dinero.

- *Cuando el Cid ganó a Valencia y se entró por la ciudad*,

se apoderan del oro y la plata y dice *¿quién los podría contar?* Don Rodrigo mandó apartar su quinta parte y

- *de riquezas en moneda treinta mil marcos le dan.*

En la otra cita señala el número de efectivos con los que le atacó el rey de Sevilla:

- *Entonces él acudió con treinta mil hombres de armas.*

50.000

Es la mayor cantidad que se nombra en el *Poema*. Aparece cuatro veces; tres citas se refieren al ejército de Yúsuf, el de Marruecos:

- *Cincuenta mil hombres de armas, valientes son y aguerridos*.

Sin embargo, más adelante se indican las fuerzas del Cid, expresadas de la curiosa forma ya indicada y compárense el desfase entre los efectivos de ambos ejércitos:

- *Son cuatro mil menos treinta   y en cabeza el Cid mandando*

  A los cincuenta mil moros   van a combatir ufanos

  Y se remata después con este verso:

- *Y a sus cincuenta mil moros,   los ha vencido en el campo*

Mandados por el Rey Búcar, *los guerreros de Marruecos   a Valencia a cercar van*. No dice cuántos guerreros son pero en uno de los versos se incluye esta cantidad cuando dice:

- *Cincuenta mil tiendas grandes   los moros vienen a alzar.*

Carga mora

2.2. Números ordinales.

Primer/Primero/os

Este ordinal se utiliza en ocasiones para señalar quiénes salían delante en las muchas batallas que tuvieron:

- *Dejad que salga el primero   a comenzar la batalla.*

Es lo que reclama el obispo don Jerónimo al Cid cuando se celebró la batalla contra Yúsuf. Más adelante volverá a solicitar al Cid ser el primero en salir a guerrear contra el rey Búcar.

Otros versos en los que aparece este ordinal:

- *Habló primero el Minaya,   caballero de fiar*
- *Con los primeros albores   el Cid sale a batallar*
- *La tienda del Rey de los moros,   que es la primera en el campo*

En cuanto al término *primer* es usado en las siguientes dos ocasiones:

- *Mañana, a primer hora   cuando esté el día al llegar*
- *Ya se ha pasado la noche,   ya quiebra el primer albor*

Tercer, tercera, tercero

Aparece en siete ocasiones en las voces señaladas:

- *Que criaste cielos y tierra,   y el tercero hiciste el mar*
- *Al tercer día los marcos   le fueron dados sin falta.*

- *Teruel, que se alzaba enfrente, es la tercera en pagar*

Cuarta

- *Cuando pasadas la tres semanas, y la cuarta se iba a entrar*.

Quinto

- *Al quinto día llegaba nuestro Cid Campeador*

Décimo

Tras nueve meses de sitio a Valencia,

- *Cuando el décimo vino se la tuvieron que dar*

2.3. Grandes cantidades

Hay alusiones a cantidades grandes que no se nombran sino que se dan de forma implícita usando la palabra “número”. Así, por ejemplo, se dice:

- *Recogió grandes riquezas… en número sobrado.*
- *Tantos le tocan en número que no pudieron contarlo.*
- *Nuestras valiosas riquezas son en número extremado.*

2.4. Fracciones

Medio/mitad

Esta palabra la utiliza en siete ocasiones para señalar situación, es decir, estar en la parte central de la escena, así se entiende en estos ejemplos:

- *Entra en medio de todos, los cientos a su alrededor.*
- *En medio de una montaña grande, de maravillar*

La mitad, en cambio, solo aparece una vez en la descripción de uno de los repartos de botín cuando dice:

- *Y a los peones les dieron la mitad justa y sin falta*

Quinta parte

De todos los botines que iban consiguiendo en sus sucesivas correrías, esa la fracción que correspondía al Cid. Se dice explícitamente en algunos de los versos:

- *El quinto de todo aquello en poder del Cid quedaba*.

A Alvar Fáñez, su buen Minaya, le hizo ese ofrecimiento

- *La quinta parte os otorgo si quisiereis, Minaya,* pero el Minaya la rechazó.

  Tras la conquista de Valencia se dice:
- *Y nuestro Cid don Rodrigo su quinta parte mandó apartar*

  De riquezas en monedas treinta mil marcos le dan

  También cuando se reparten caballos:
- *Por quinta tocan al Cid unos seiscientos caballos.*

Cofre, Catedral de Burgos.1962

Juramento en Santa Gadea

Diezmo

Son nombrados en una ocasión. Ocurre tras la batalla contra el rey Yúsuf de Marruecos.

- *Y nuestro Cid don Rodrigo, nacido de tan buen hado,*

  De la quinta parte suya un diezmo más le ha mandado.

3. Multiplicaciones

3.1. Doblar

Doblar en el sentido de multiplicar por dos es usado en cuatro ocasiones:

- *Si con vida salgo de esta os doblaré la soldada.*

  En San Pedro de Cardeña quedarán su esposa e hijas. Al abad le dice:
- *Y pues me voy de la tierra os daré cincuenta marcos.*

  Si tengo vida y lo cuento estos os serán doblados

3.2. Triplicar

- *Y por cada uno que hiráis, dejad tres sillas sin plaza.*

3.3. Cuadriplicar

Utiliza el Cid este número para indicar que multiplicará por cuatro cada marco que gaste el abad por encima de los cien que le dejó para la manutención de su esposa e hijas:

- *Por un marco que gastéis, daré al Monasterio cuatro*

4. Partes del día

4.1. Noche

La noche aparece sesenta y seis veces en el texto. En esta parte del día, se cuentan variadas situaciones pues no siempre la dedican a descansar como ocurrió en Calatayud:

- *Y a Calatayud llegaron   por la noche a descansar*

También en Albarracín

- *En Albarracín de noche   al llegar se descansó*.

También hay acción:

- *Anduvieron por la noche   y descanso no se dan*
- *Salió de noche a los campos   con toda su gente armada*
- *De noche pasan la sierra…*
- *Pasaré la noche en vela   en este santo lugar*

4.2. Día/días

En singular o en plural, aparece ochenta y cuatro veces.

Distingo entre las alusiones al día como la parte de las veinticuatro horas en que hay luz solar, de las que hay 21 citas y el día como séptima parte de la semana. Así, por ejemplo obsérvese la distinción en estos versos:

- *El día se va acabando   la noche se quiere entrar.*
- *Mañana, a primer hora,   cuando esté el día al llegar.*
- *Por tres días y dos noches   no cesaron en su andar*

San Pedro de Cardeña

El **día y la noche** aparecen en el mismo verso en diez ocasiones indicando así también un tratamiento del día como alusiva a la parte de luz solar y noche a la de oscuridad; no siempre en ese mismo orden:

- *Por el día y por la noche   comiéncese a preparar*
- *Decidles que rueguen por mí   así de noche y de día.*
- *Por la noche y por el día   a las señoras guardaba.* (El obispo don Jerónimo)
- *Ni de día ni de noche   el caminar no cesó*
- *De día como de noche   pido que me valga Dios.*

El resto de las alusiones al día lo consideran como unidad de tiempo para señalar períodos temporales, si bien puede haber casos en los que se produzca una cierta ambigüedad tal y como ocurre en la tercera de las citas siguientes:

- *Que en los días de su vida   no nos deje de ayudar*
- *No han de pasar quince días   si esto quiere el Creador*
- *El Cid al día siguiente   sitúa a su hueste en orden*

4.3. Anoche

Se utiliza este término en dos ocasiones.

La primera cuando la niña le explica al Cid por qué nadie le acoge:

- *Orden del Rey lo prohíbe   anoche llegó su carta.*

La otra ocasión en boca precisamente del Rey Alfonso:

- *Vos acabáis de llegar   desde anoche estoy aquí yo*

4.4. Mañana

Este término es utilizado en dos acepciones, bien para referirse al día de mañana (10) o bien para señalar la parte del día que va desde el amanecer hasta el mediodía (24). Sin embargo la tarde, como parte del día, no se nombra en todo el poema.

Algunas citas son:

- *Mañana por la mañana   enseguida a cabalgar*
- *Mañana será la lucha   a la salida del sol*
- *¡Oh Dios, qué bueno es el gozo   que sienten esta mañana!*
- *Dejad que pase la noche   y que venga la mañana.*

4.5. Madrugada

- *Cuando el rezo de oraciones,   a filo de madrugada*

4.6. Amanecer

- *En cuanto amanezca el día   comencemos a luchar*.
- *Pasemos aquí la noche,   vámonos amanecido*
- *A nuestro Cid amanecióle   en tierras de Monreal.*

4.7.- Alba, albor, albores

Es la forma de aludir al amanecer que se repite en ocho ocasiones en cualquiera de esas formas:

- *Cabalgaron por la noche;   cuando el alba quiso alzar*
- *Con los primeros albores   el Cid sale a batallar*

En una ocasión se refiere al amanecer de esta forma:

- *Antes de apuntar el día,   armados todos estad.*

El canto de gallo se utiliza para anunciar el alba como en estas dos citas:

- *Pues se marcha nuestro Cid   antes de que cante el gallo*.
- *Muy pronto cantan los gallos,   y así que quebró el albor.*

4.8.- Maitines

Es la primera y más extensa de las horas canónicas. Invariablemente se leían nueve salmos (excepto en Pascua y Pentecostés) aunque según la fecha, podían introducirse otras partes. Se rezaba antes de amanecer. En el poema aparecen en tres ocasiones cuado el Campeador se acerca al monasterio de San Pedro de Cardeña a alojar a su esposa y dos hijas:

- *Rezaba allí los maitines   a las luces del albor*
- *A maitines en San Pedro tocará este buen Abad*

En los siguientes se señala que los maitines se anunciaban con campanas antes del albor:

Burgos. Plaza de España. Sevilla

- *Antes que la noche acabe   ya comienzan a ensillar.*
- *Las campanas con gran prisa   a maitines tocan ya*

5. Otras unidades de tiempo

5.1. Año

El año es utilizado en singular o en plural bien para expresar tiempos concretos o bien para señalar periodos de tiempo. Así la expresión *En lo que queda del año* aparece dos veces. Cantidades concretas de años se tienen en edades como:

Refiriéndose a Cristo,

- *Por tierra treinta y dos años   anduviste, y aun es más,*

  Nos mostraste los milagros   de los que tanto hay que hablar.

- *Nueve años tiene la niña,   que ante sus ojos se planta.*

Tiempo anterior a la toma de Valencia:

- *En tomar aquellas villas   nuestro Cid pasó tres años*.

Muy cerca de *dos años* fue el tiempo que estuvieron los Infantes de Carrión en Valencia antes de regresar a su tierra y producir el episodio de la afrenta de Corpes.

Hay alusiones que hacen referencia a *muchos años, estos años y algunos años.*

5.2. Semanas

La semana es utilizada en diez ocasiones en cantidades de tres (5), siete (1) y quince (2):

- *Así estuvieron cercados   cumplidas las tres semanas*
- *Allí nuestro Cid estuvo   enteras las quince semanas*

Para la vindicación del Cid, el rey Alfonso el manda a decir:

- *Que de aquí a siete semanas,   se prepare, y sus vasallos,*
  Y se vengan a Toledo.   Esto les doy yo de plazo.

5.3. Hora

Refiriéndose a esta unidad de tiempo hay cinco citas. Estas son dos:

- *El Rey de Castilla dijo: - Aun es hora temprana*
- *Espero que llegue la hora que de mi sea pagado.*

Cuando se cita al Cid, en muchas ocasiones se añade una frase del estilo de *que en tan buen hora nació* o *que en buen hora ciñó la espada.*

Molina de Aragón

6. Unidades de distancia

6.1. Leguas

Esta unidad de distancias solamente se cita una vez, cuando las hijas del Cid y su esposa se acercan a Valencia: *llegan cerca de Valencia, a tres leguas de distancia*.

6.2. Millas

Se citan en una ocasión, cuando tras la batalla con el rey Búcar, el Cid les persigue:

- *Siete millas bien cumplidas los persigue sin pararse*.

6.3. Asta de lanza

Cuando al final de la obra se prepara la lucha de los fieles del Cid contra los de Carrión, se señala el campo de lucha por los árbitros del Rey y se utiliza el asta de la lanza como medida para marcar, en este caso, el diámetro de un círculo. Dice:

- *Entonces toda la gente deja un claro alrededor*
- *De unas seis astas de lanza de donde se señaló.*

7. Aproximaciones

- *Allí moran los Infantes muy cerca de los dos años.*
- *Mil trescientos moros muertos más o menos allí están.*

8.- Marcos y dineros

El marco es una unidad monetaria que se presenta en monedas de oro y de plata.

Al abad de San Pedro de Cardeña, donde quedan la esposa y las hijas del Cid, le da cincuenta marcos y

- *Para doña Jimena aquí os doy yo un ciento de marcos*.

Esta cantidad puede servir de referencia para su valor adquisitivo y así tener un dato para considerar como una gran fortuna la que consiguió el Cid en su quinta parte del botín de la conquista e Valencia que se cifró en treinta mil marcos.

Otra cita:

- *Echaron del primer golpe, trescientos marcos de plata.*
  Los contó allí don Martín; sin pesarlos los tomaba.
  Los otros trescientos dichos en oro se los pagaban.

En cuanto a los *dineros*, está citado en tres ocasiones. Según Mateu Llopis, se trata de una moneda que acuñaron en Segovia Alfonso VI y Alfonso VII y que era de plata de baja calidad. Las dos citas son:

- *y nuestro Cid no les diese ni un dinero de los falsos.*

Al Conde don Ramón le dice:

- *Saber que a vos no daré ni un solo dinero falso,*
  pues lo quiero yo para estos que andan conmigo en harapos.

El fiel Minaya Alvar Fáñez, le dice

- *que no tomaré de vos ni siquiera un dinero malo*

9. Parias

Los dos primeros versos del Poemas, reconstruidos sobre el texto de la Crónica de los

Veinte Reyes dice:

- *En guerras anda metido el rey Alfonso de España.*
  Pelea contra unos moros, y parias otros le pagan.

Se trata de un impuesto que imponía, en este caso el rey Alfonso, para no atacar los lugares que los pagaban.

Hay trece alusiones a este impuesto que aparecen en el poema antes del Cantar de las bodas de las hijas del Cid. Entre ellas estas:

- *El castillo de Alcocer ya sus parias va pagando.*
- *El val del río Martín le tributó también parias.*
- *La paria que él nos tomó nos la volverá doblada*.

10. Cielo/cielos

Es un término que solo se utiliza ligado a la idea de Dios. Catorce veces aparece en expresiones como:

- *Alzan las manos al cielo para a Dios allí rogar.*
- *Quiera el Señor de los cielos y también todos los Santos*
- *Gracias al Rey de los cielos, y a tan gran Rey como vos*

11. Tierra

La *tierra* es utilizada en relación con Dios en tres ocasiones. Como cuando el Campeador dice:

- *- ¡Demos las gracias a Dios, que el cielo y la tierra manda!*

En cambio aparece hasta ochenta y siete veces la tierra para referirse o bien a lugares (*tierras de Carrión, tierras de Montalbán, la tierra del Rey Alfonso, tierra de* *moros,* etc.) o bien en expresiones como: *besan la tierra que pisa, hincase rodilla en tierra*, etc.

12.- Sol (estrellas y luna)

De las diecinueve citas, la mayoría (catorce), se refieren al orto o al ocaso del sol, como cuando se dice:

- *A vuestro lado estaré, antes que el sol quiera alzar*
- *Aun con la luz del día, antes de ponerse el sol*
- *Por oriente sale el sol, y hacia aquella parte va.*

En cuatro ocasiones lo utiliza para destacar la blancura en expresiones como:

- *Camisa de hilo se puso que era blanca como el sol.*

Refiriéndose a la creación es cuando cita a las estrellas y la luna por única vez en el poema; dice:

- *Hiciste estrellas y luna y el sol para calentar.*
- Por *último*, en el reto a los Infantes de Carrión, se dice:
- *Por sorteo se designan quienes luchen frente al sol.*

Antigua tumba del Cid y Jimena en San Pedro de Cardeña. Hoy está en la catedral de Burgos.

13. Invierno/marzo

Tras la conquista de Valencia, esa parte acaba así:

- *El Cid y la gente suya muy a gusto que allí están.*
  El invierno es ido fuera y marzo se quiere entrar.

14. Oriente

- *Sale el sol por el oriente ¡Oh Dios, qué hermoso apuntaba!*
- *Por oriente sale el sol, y hacia aquella parte va*

15. Epílogo

Espero que tras la lectura de este trabajo, la impresión que le quede es que se pueden encontrar elementos matemáticos en las obras literarias. Es una fuente inagotable de ideas para proponer a nuestros estudiantes trabajos en proyectos. Es, además, abrir una nueva forma de leer las obras clásicas pues se trata de añadir este elemento a los tradicionales que tienen como objetivo apreciar los aspectos estrictamente literarios, la belleza de su escritura, la riqueza de vocabulario, etc. Por otra parte, para hacer con rigor el trabajo de buscar las matemáticas existentes, es necesario hacer una lectura profunda y pausada con lo que se amplía la percepción de esos otros valores.

Espero que estas nuevas formas de acceder al conocimiento matemático se conviertan en parte del *ajuar* cotidiano del profesorado. Muchos estudiantes nos lo agradecerán.

Luis Balbuena Castellano, catedrático de Matemáticas. Instituto de Enseñanza Secundaria *Viera y Clavijo*, La Laguna, Tenerife, España. Autor de numerosos libros y artículos relacionados con la educación matemática. Secretario General de la FISEM. Ha dirigido talleres, cursos de formación de profesores, etc. Ha asistido como conferenciante y ponente en congresos y otros encuentros de profesores.

ANEXO 1. Ejercicios

Se trata de aprovechar los datos y situaciones que aparecen en el *Poema* para plantear problemas de matemáticas. Con algunos de ellos se pueden clarificar algunos aspectos de la obra.

1.- Tras tomar Valencia, las tropas del Cid hacen el reparto del botín. Cuando el Cid reclama la quinta parte que a él correspondía en cada acción de este tipo, le entregan treinta mil marcos. **¿A cuántos marcos ascendió el total del botín?**

2.- Cuando el Cid deja a su esposa e hijas en el Monasterio de San Pedro de Cardeña, le deja al abad cien marcos para su mantenimiento y le dice al abad que si se le acaban y tiene que poner más:

- *Por un marco que gastéis,   daré al Monasterio cuatro.*

Cuando conquistó Valencia decidió que Alvar Fáñez fuese a por su esposa e hijas y dice el poema que el Cid:

- *Mandó mil marcos de plata   para a San Pedro llevar*

  Y que quinientos le diese   a don Sancho, el buen abad.

Según este dato, **¿cuánto se habría gastado de más el abad?**

3.- *Y nuestro Cid don Rodrigo,   nacido de tan buen hado,*

De la quinta parte suya   un diezmo más le ha mandado.

Esto dice el *Poema* después de la batalla contra el rey Yúsuf de Marruecos. Si en esa ocasión él recibió mil caballos, **¿cuántos envió al rey Alfonso, que es a quien se refiere?**

4.- Una vez concluida la batalla con el rey Búcar, al hacer el recuento de lo obtenido para hacer el reparto, se dice:

- *Por quinta tocan al Cid   unos seiscientos caballos.*

Es decir que del número de caballos conseguidos, al Cid le corresponde una quinta parte. Si a él le tocan seiscientos, **¿cuántos se consiguieron en total?**

5.- El rey de Valencia envió a dos caudillos contra el Cid cuando supo que se acercaba. Y dice el *Poema*:

- *De los caballos moriscos   cuando se hubieron juntado,*

  Encontraron que había   quinientos diez en el campo.

Por otra parte sabemos que al Cid le correspondía un quinto del botín. En unos versos más adelante se continúa diciendo:

- *Por su quinta parte al Cid   le tocaron cien caballos*

a) ¿Está correctamente hecho el reparto?

b) Suponiendo que el Cid hubiera recibido 130 caballos, ¿cuál sería el número de caballos del botín?

Detalle. Mosaico de Burgos. Plaza España. Sevilla

6.- Desde el camino del destierro hasta el final hay un total de 3730 versos. En 647 de ellos existe al menos un término que puede ser considerado matemático (número cardinal u ordinal, unidad de medida, etc.)

¿Qué porcentaje de versos tienen esa característica?

7.- En el capítulo dedicado a las bodas en Valencia hay 111 versos de los que en 20 aparece algún término matemático. En el relato de la afrenta de Corpes hay 622 versos y 128 con algún término matemático. **¿En cuál de estas dos partes hay mayor proporción?**

8.- Completar el siguiente cuadro:

Título	Nº del verso del comienzo	Nº del verso del final	Total	Nº de versos con términos matemáticos	% (con una cifra decimal)
Camino del destierro	1	403		81	
El Cid gana su pan por tierras moras	404	1086		140	
La conquista de Valencia	1087	1619		91	
La defensa de Valencia	1620	1878		50	
Los tratos de las bodas y el perdón del Rey	1879	2165		50	
Las bodas en Valencia	2166	2277		20	
La afrenta	2278	2900		128	
La vindicación del Cid	2901	3532		97	
Honra y gloria del Cid	3533	3730		40	
Total	1	3730			

9.- En la batalla del Cid contra el rey Búcar, se dice en el cuarto verso:

- *Cincuenta mil tiendas grandes   los moros vienen a alzar*

No se nombra, por tanto a cuántos efectivos llega ese ejército. Podemos hacer una suposición asignando la siguiente distribución de guerreros por tiendas y calculando los que corresponden a cada categoría:

Tiendas de avituallamiento con un guerrero: 15%

Tiendas con dos guerreros: 40%

Tiendas con tres guerreros: 35%

En el resto de las tiendas hay cuatro guerreros.

¿Cuántos guerreros pertenecen a cada categoría?

10.- Martín Antolínez fue quien contactó con dos judíos de Burgos (Raquel y Vidas) para que le prestasen al Cid 600 marcos antes de emprender el destierro. Cuando la operación quedó cerrada, dijo a los judíos:

- *Yo, que esto a ganar os di,   bien merecía unas calzas*

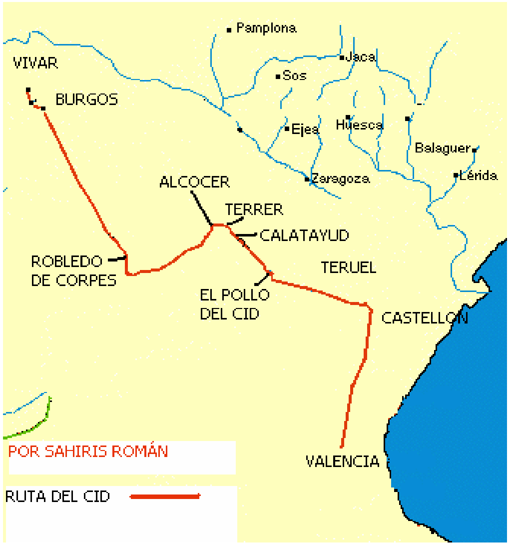
Una vez que los judíos deliberaron decidieron darle una cantidad de marcos:

- *Os damos a vos en don,   a vos damos treinta marcos.*

¿Qué porcentaje del total prestado representa esta cantidad?

11.- En varios pasajes del *Poema* se indican distancias recorridas por sus protagonistas y el tiempo que tardaban en hacerlo.

Posiblemente las rutas de entonces no fueran las mismas que las de ahora pero sí debemos suponer que serían próximas. **Localiza una guía de carreteras y trata de averiguar las distancias entre los sitios que se indican en el siguiente cuadro y podrás averiguar las velocidades a las que se movían:**



Lugar de salida	Lugar de llegada	Nº de Km	Días empleados
San Pedro	Valencia		15
San Pedro	Medina		5
Bronchales	Molina		1
Medina	Molina		1

ANEXO 2. CURIOSIDADES

* Censo y los quiñoneros

Una vez acabada la conquista de Valencia, el Cid se dirige a su Minaya Alvar Fáñez, un primo hermano que es su brazo derecho a lo largo del *Poema,* y le dice que haga un censo y que, además, lo haga por escrito:

- *- Si os parece bien, Minaya,   quiero que sean contados*
  cuántos son los que aquí están   y por mí bienes ganaron;
  que los pongan por escrito   y cuántos son, sepamos.

Los mandó a juntar y

- *Cuando allí se reunieron, lista les hizo pasar:*
  Tres mil seiscientos tenía nuestro Cid, el de Vivar.

El control y reparto del botín eran asuntos de la mayor importancia a la que se prestaba atención minuciosa a través de unos encargados especializados, los *quiñoneros*, pues *quiñones* eran las partes del botín.

* Hombre de letras

Parece que la división "letras/ciencias" es muy antigua porque de don Jerónimo, el obispo que fue de la Valencia conquistada, en el *Poema* se dice:

- *Don Jerónimo lo llaman, y es obispo por su grado;*

Entendido es en las letras, y de ánimo bien templado

* Velocidad

En el viaje de doña Jimena y sus hijas desde el monasterio en el que las dejó el Cid hasta Valencia hay dos alusiones a tiempos de recorrido que nos pueden dar una idea de la velocidad a la que se podrían desplazar. Primero dice el Minaya Alvar Fáñez, encargado por el Cid de este traslado, envía a tres caballeros para que anuncien al Cid que está en Valencia que:

- *Y dentro de quince días si El nos guardare de mal:*

su mujer y sus dos hijas conmigo le llegarán.

Después señala:

- *De San Pedro hasta Medina en cinco jornadas van*.

Por último hay otra alusión de este tipo cuando dice:

- *Pasaron por Santa María, en Bronchales noche es ya,*

Y al otro día pudieron en Molina descansar.

Consultada la guía *Michelín*, las distancias entre estos lugares son:

Lugar de salida	Lugar de llegada	Nº de Km	Días empleados
San Pedro	Valencia	530	15
San Pedro	Medina	235	5
Bronchales	Molina	70	1
Medina	Molina	66	1

Teniendo en cuenta los datos de este cuadro, podemos deducir que se movían a velocidades distintas según el tipo de desplazamiento que hacían: con prisa, con muchas personas, accidentes en el terreno, etc. En cada caso se puede obtener la velocidad media que, como se observa podía llegar a los 70 km en un día. Está planteado como ejercicio.

* Estratagema y valor relativo del dinero

Cuando el Cid hace los preparativos para su salida de las tierras de Castilla, necesita dinero pues como dice Martín Antolínez

- *De todas partes le llegan hombres de dinero faltos* *necesita por lo menos reunir seiscientos marcos*

Se supone que son gente que busca fortuna acompañando al Cid con la perspectiva de futuros botines a distribuir. El Cid acude a dos judíos de Burgos a los que engañó consiguiendo esos seiscientos marcos por el depósito de dos arcas llenas de arena y que ya se encarga de decirles

- *que no las vais a mirar en lo que queda de año.*

Hay que considerar, por tanto, que seiscientos marcos debía ser una cantidad muy importante de dinero pues con ella había que pagar y mantener a los ciento quince mercenarios que le acompañaban inicialmente:

- *En este día tan solo en el puente de Arlanzón*

Ciento quince caballeros júntanse, y con viva voz

Todos piden y preguntan por el Cid Campeador.

Carga cristiana

Por otra parte, una vez conquistada Valencia, se dice

- *de riquezas en moneda treinta mil marcos le dan*

Toda una fortuna, sin duda.

Por cierto que la pareja de judíos, cuando descubrieron el engaño, fueron a ver al Minaya Alvar Fáñez cuando éste vino a llevar a doña Jimena hasta Valencia. Esto le dijeron:

- *- Favor, Minaya, favor que sois hombre de fiar.*

El Cid nos ha empobrecido si su ayuda no nos da.

No queremos intereses si nos diese el capital.

* El Cid no era precisamente un "angelito"

A pesar de la visión que tuvo del arcángel San Gabriel, el Cid no se distinguió por imitarle pues lo que le movía especialmente en sus correrías y conquistas era conseguir botín y cuanto más, mejor. En el *Poema* se le presenta de forma tal que no había en sus acciones ni finalidad religiosa, ni cultural. Tenía que mantener sus mesnadas a las que retenía fieles gracias, entre otras cosas, al reparto del botín que hacía tras cada victoria del que, como ya se ha dicho, él se quedaba con un quinto. Quizá deba tener en cuenta que trato de juzgar al personaje con los criterios de hoy sin considerar que la España y los criterios para valorar a las personas en aquella época, son diferentes. He aquí algunos versos ilustrativos de su interés por el dinero:

- *Mandó que se repartiese todo aquel botín sin falta*
  Y que los repartidores cuentas le diesen por carta.
- *Del castillo que tomaron todos ricos parten ya.*
- *Entre Cetina y Ariza nuestro Cid se fue a albergar*
  Grandes ganancias tomó por la tierra donde va.

Además, no duda en recurrir al Señor para que le ayude en su objetivo crematístico, como en la toma de Alcocer:

- *- ¡Heridlos, mis caballeros,   sin temor tomad las armas*

  con la gracia del Señor   nuestra será la ganancia!

Unos versos después dice que a trescientos *moros matan* y al final de este episodio relata lo que hace con los que quedan vivos…

Para que no quede duda de cómo se las gastaba, esto dice el Poema en diversos lugares:

- *Estando allí nuestro Cid   muchas tierras saqueaba*
- *Y las tierras de Alcañiz   quemadas las va dejando*

Por Navarra, Aragón y Castilla mandó a pregonar este mensaje, como haría hoy una agencia de publicidad…:

- *Quien quiera dejar cuidados   y enriquecer su caudal,*

  que se venga con el Cid,   si gusta de cabalgar

Sin embargo, muestra una fidelidad a su rey muy notable:

- *Al Rey Alfonso, que él es   de mí señor natural*

Pese a que considera que lo desterró de forma injusta, hace todo lo posible para conseguir su perdón, como así fue.

También es destacable su dedicación y preocupación por la familia así como la fidelidad de los allegados al Cid, como la del Minaya Alvar Fáñez.

UNIÓN
REVISTA IBEROAMERICANA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA

Diciembre de 2009, Número 20, páginas 59 –66
ISSN: 1815-0640

O Ensino de algumas idéias matemáticas através da pipa ou papagaio[1]

Gilberto Chieus Junior

Resumo

Este artigo procura mostrar algumas alternativas de estar utilizando as pipas ou papagaios nas aulas de matemática fazendo uma ligação entre os saberes do cotidiano com os saberes escolares. Para isto procuramos mostrar a relação entre a Etnomatemática e a Modelagem. E também estamos mostrando algumas sugestões para sala de aula, com as quais vivenciamos.

Abstract

This article tries to show some alternatives to be using the kites in mathematics classes in making a link between the knowledge of everyday life with school knowledge. For this we try to show the relationship between Ethno mathematics and modeling. And we are also showing some suggestions for the classroom, with which we live.

Resumen

Este artículo busca mostrar algunas alternativas de estar utilizando las pipas o papagaios en las aulas de matemática, haciendo una conexión entre los saberes cotidianos y los saberes escolares. Para esto buscamos mostrar la relación entre Etnomatemática y Modelaje. Y también mostramos algunas sugerencias para el aula, con las cuáles convivimos.

1. Introducción

As crianças estão em férias. Momento de observarmos o céu e admirarmos as pipas ou papagaios alegrando a paisagem celeste,e, se atentarmos aos detalhes assistiremos espetáculos de manobras radicais com vôos rasantes como parte da brincadeira. Uma outra forma de brincar é quando duas pipas se encontram. Os empinadores, geralmente crianças, realizam uma caçada no ar visando cortar a linha uma da outra, e as crianças que assistem ao espetáculo correm atrás para pegá-

[1] O nome desse brinquedo altera conforme a região brasileira. O modelo que vamos analisar é conforme o desenho.

las.Para atingir tal objeto arriscam sua própria vida, não olhando o trânsito ao atravessar as ruas, pois ficam com os olhos fixos no brinquedo até alcançá – los. Correndo riscos de ser atropeladas, mesmo assim, nossas crianças continuam brincando, mas não são apenas elas que passam por esse perigo. No passado, em 1752, o norte americano Benjamin Franklin também arriscou sua vida ao utilizar as pipas para provar que o raio é uma descarga elétrica. Assim, inventou o pára – raio.

> Um outro fato interessante, mas sem correr risco de vida, ocorreu em pleno século XX, década de 90, num encontro universitário no Paraná, onde se discutia o ensino da Matemática e da Ciência em geral, o professor Eduardo Sebastiani, matemático, da Unicamp, resolveu mudar o protocolo. Ao retornar para o hotel, após as primeiras atividades, observou o meninos brincando com pipas e iniciou assim o diálogo:
>
> “*Quantos metros de linha você costuma soltar para empinar o papagaio?”*
>
> *Perguntou Sebastiani.*
>
> *“Mais ou menos cinqüenta metros”, disse um menino chamado Gelson.*
>
> *“Como você calcula para saber, que solta mais ou menos cinqüenta metros de linha?”, indaga Sebastiani.*
>
> *“A cada tanto, de dois metros mais ou menos, disse o garoto, faço um nó na linha. Quando a linha vem correndo na minha mão, vou contanto os nós e aí sei quantos metros tenho de linha solta.”*
>
> *“Em que altura você acha que está o papagaio agora?”, perguntou o matemático.*
>
> *“Quarenta metros”, disse o garoto.”Como você calculou?”*
>
> *“No quanto eu dei de linha e na barriga que a linha fez.”.*
>
> *“Poderíamos calcular esse problema fundados na trigonometria ou por semelhança de triângulo”, diz Sebastiani.*
>
> *O garoto, no entanto, disse:*
>
> *“Se o papagaio estivesse alto, bem em cima de minha cabeça, ele estaria, em altura, os mesmos metros que soltei de linha, mas como o papagaio está longe de minha cabeça, inclinado, ele está menos do que os metros soltos de linha”.*
>
> *“Houve aí um raciocínio de graus”, diz Sebastiani.* (Freire, 2000, p. 98-99)

Por meio deste diálogo verificamos que o conhecimento matemático pode ser obtido através de uma prática ou de uma experiência vivenciada, por Gelson que aprendeu observando, qual altura sua pipa se encontrará utilizando o referencial: “está longe da minha cabeça”. Essas práticas também ocorrem na construção das pipas: quando estão fazendo a distribuição das varetas geralmente não se utiliza réguas para medir o espaço das horizontais e da vertical. Isso é feito de várias formas e, uma delas, foi relatada por Thiago de Melo, que estava preocupado em saber qual a proporção ideal entre as varetas. O famão[2] Gute lhe respondeu:

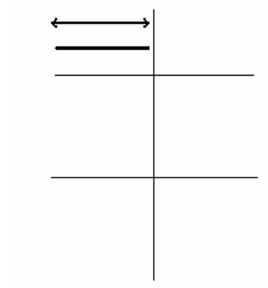
> *"Todo bom fazedor de papagaio não mede na régua, mede é no olho, essa diferença de tamanho entre a vertical e as duas horizontais".* (Mello,1983, p. 55)

Mello não se conformou e fez a mesma pergunta ao famão Paulo do Monte Cristo que lhe respondera com bastante convicção.

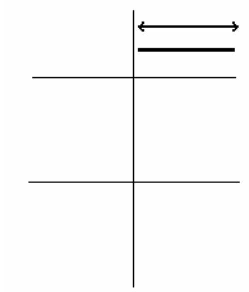
> *"Dizer a diferença na medida isso eu não sei não.Quer dizer, saber eu sei, mas eu sei é no olho. Tem gente, eu já ouvi dizer que tem gente que mede. Eu nunca precisei medir: eu olho e sei. Tiro é no olho."* (Mello,1983 p.55)

Vivenciarmos uma experiência semelhante a de Mello, quando observamos algumas crianças da cidade de Sumaré-SP, construírem suas pipas. Elas as faziam da seguinte maneira:

Primeiro amarravam as duas varetas horizontais na vertical e com auxílio de um pedaço de madeira qualquer, verificavam se a vareta vertical estava centralizada, isto é, se os espaços das duas horizontais estavam iguais. (desenho 1 e 2).



Desenho 1



Desenho 2

Essas formas de medir são diferentes das ensinadas nas escolas, uma vez, predomina o uso da régua, lápis, papel, giz, apagador e lousa. Não somos contra a utilização desses materiais, mas queremos chamar a atenção de que medir através do olhar ou utilizando algum objeto são maneiras que muitas pessoas no seu cotidiano lidam com as idéias matemáticas e segundo D'Ambrosio:

> *" O cotidiano está impregnado dos saberes e fazeres próprios da cultura. A todo instante, os indivíduos estão comparando classificando, quantificando, medindo, explicando, generalizando, inferindo e, de algum modo, avaliando, usando os instrumentos materiais que são próprios à cultura".* (D'Ambrosio, 2002, p.22)

[2] **Famão –** Em Manaus é o grande mestre empinador, conhecido em seu bairro e redondezas como o mais competente, o que tem absoluto domínio sobre o papapgaio, que ele mesmo faz, e o mais temido no momento da trança.

Na perspectiva da Etnomatemática uma das preocupações é mostrar como esses indivíduos trabalham com suas idéias matemáticas, por isso, para alguns educadores um trabalho nessa linha não é metodológico, mas de uma postura onde o educador possa compreender seus alunos em relação à forma como eles lidam com essas idéias, quais as técnicas utilizadas, e o mais importante: procurar entender o que isso representa para eles e também ao seu grupo social.

Outra maneira de trabalhar as idéias matemáticas diferenciadas do contexto escolar são as práticas de numeramento.

> *"O numeramento pode ser pensado no sentido das diversas práticas em que são produzidas diferentes, entre as quais existem aquelas que diferem das práticas escolarizadas."* (Mendes, 2007, p.17)

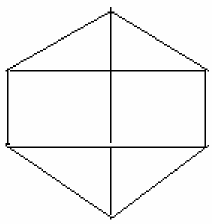
No trabalho com a pipas no contexto escolar, observarmos que essas práticas fazem parte do cotidiano dos nossos alunos e, nós, educadores, devemos respeitá-las e procurar construir um elo entre as práticas de numeramento e o conhecimento escolar.

No caso da matemática, uma das maneiras de fazer esta ponte é a modelagem: trabalhar as idéias matemáticas escolares utilizando as pipas como modelo, "*Chamaremos simplesmente de Modelo Matemático um conjunto de símbolos e relações matemáticas que representam de alguma forma o objeto estudado".* (Bassanezi,2006,p20)

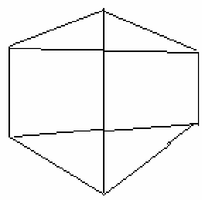
Os modelos matemáticos podem ser os mais variados, entre eles, temos os estáticos ou dinâmicos. No caso das pipas podemos trabalhar das duas formas, mas priorizamos o estático. Um exemplo de estático é a forma geométrica de um alvéolo do favo de uma colméia (Bassanezi,2006), aqui, trocaremos para pipas, a fim de mostrar algumas idéias geométricas que podem ser estudadas em sala de aula.

Algumas sugestões de como podemos utilizá-las em sala de aula:

Perpendicularismo: Quando a vareta horizontal é amarrada com as duas horizontais, são perpendiculares, isto é, formam um ângulo de 90º ou reto. Se isso não ocorrer, a pipa fica torta. Desenho (3 e 4 correta e torta respectivamente)

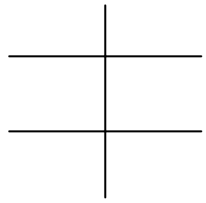


Desenho 3



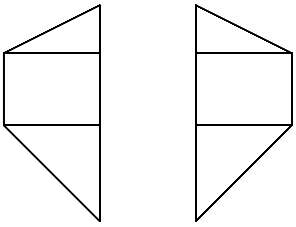
Desenho 4

Paralelismo: As duas varetas horizontais nos mostram esta idéia, pois elas não se encontram. (Desenho 5)



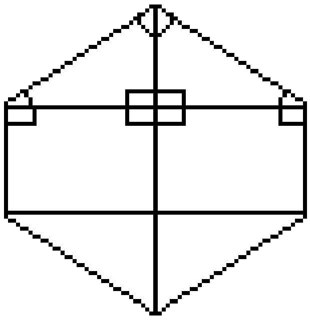
Desenho 5

Simetria: A distribuição do espaço das duas varetas horizontais devem ser iguais, segundo os alunos, se isto, não ocorrer a pipa fica "pensa", um lado maior que o outro. (Desenho 6)



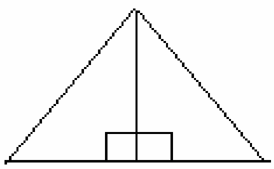
Desenho 6

Ângulos: Podemos estudar os ângulos usando o transferidor, medindo e classificando-os como: agudos, obtusos, retos, rasos e volta inteira e os complementares e suplementares. (Desenho 7)

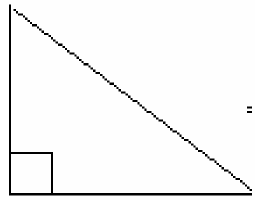


Desenho 7

Triângulos : Na parte superior e na inferior encontramos formas triangulares observando também a altura do triângulo e o triângulo retângulo. Observe os desenhos 8 e 9 respectivamente:



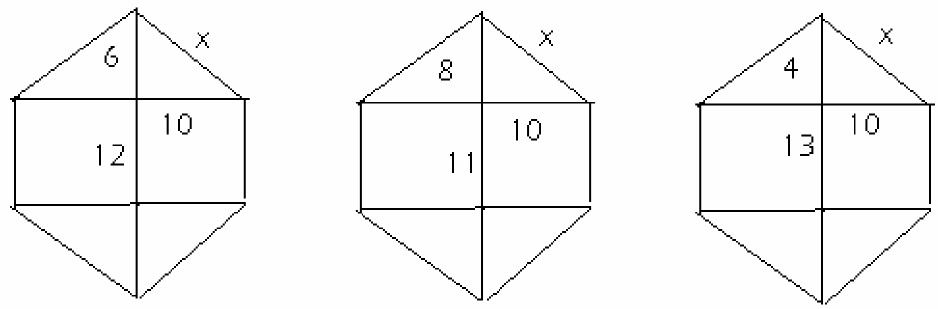
Desenho 8 – altura



Desenho 9 – Triângulo Retângulo

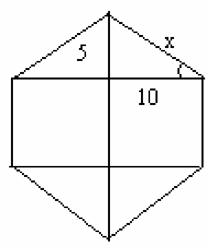
Ainda nos triângulos, se utilizarmos régua para medir os seus lados podemos classificá-los como; eqüilátero, isósceles e escaleno. Com o transferidor, medir seus ângulos internos e ao somá-los provamos que a soma dos ângulos internos de um triângulo é 180º.

Uma outra atividade é a aplicação e demonstração do teorema de Pitágoras utilizando as medidas das pipas que os alunos constroem. Citamos como exemplo, a atividade realizada na escola SESI CE 341 na cidade de Sumaré-SP. Após construção das pipas medimos as varetas onde estavam localizados os triângulos retângulos e desenhamos na lousa os modelos de cada uma. Em seguida calculamos o valor de x. Neste caso, obtivemos o tamanho da hipotenusa (linha), confirmando assim, os nossos cálculos medindo esta distância com a régua. Conforme os desenhos 10, 11 e 12:



desenho 10 desenho 11 desenho 12

Em seguida efetuamos o cálculo dos ângulos internos do triângulo retângulo utilizando as relações entre os lados seno, co-seno e tangente. Faremos agora o caminho inverso que é proposto nos livros didáticos, sendo que, a maioria dos autores fornece a medida do ângulo para calcular os lados (desenho13). Exemplo:



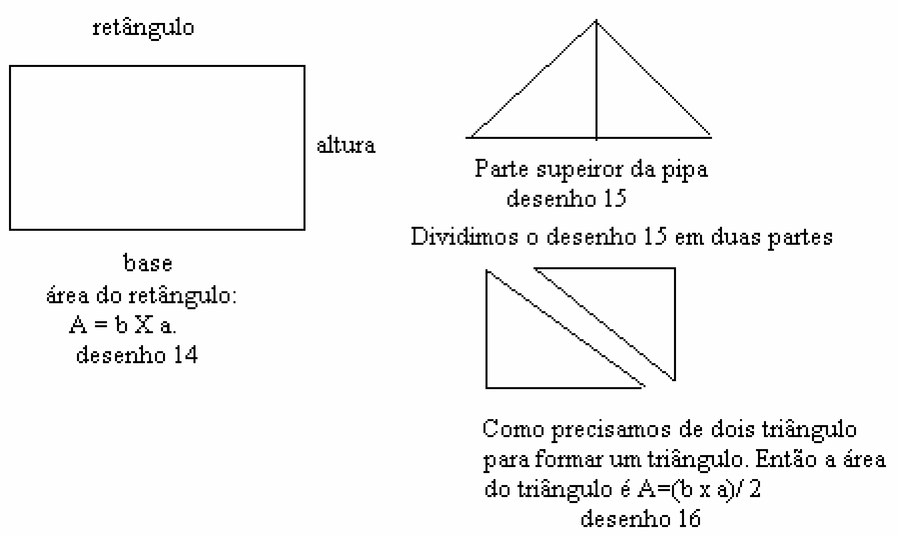
desenho 13

$X^2 = 5^2 + 10^2$

$X = 11{,}18$

arc.sen $\hat{A} = \dfrac{5}{11{,}18} \approx 0{,}45$ ângulo = 27º

Uma outra demonstração importante é provar que a área do triângulo é base que multiplica a altura e divide por dois. Para tanto, utilizaremos a área do retângulo como referência: base que multiplica a altura. Como as pipas na parte superior e inferior temos formas triangulares que utilizaremos para demonstração. Observe os desenhos 14, 15 e 16.



Conclusão

De modo geral, nós professores trabalhamos com conteúdo pronto, baseado na hierarquia dos livros didáticos, muitas vezes sem nenhuma relação com a realidade dos nossos alunos. E no trabalho com pipas, encontramos muitas idéias matemáticas que podem ser trabalhadas, por isso compartilhamos com a idéia de Paulo Freire:

> *"...como há mais de trinta anos venho sugerindo, discutir com os alunos a razão de ser de alguns desses saberes em relação com o ensino de conteúdos."*(Freire,1996,p.33)

Se utilizarmos esses saberes, professores e alunos poderão realizar vários debates, entre eles, o processo de urbanização das cidades que a cada dia as crianças não tem locais para brincarem. Como exemplo os terrenos que são utilizados como "campinho de futebol", neste local, as crianças se reúne para praticar esporte, empinar pipas e ponto de encontro, estão desaparecendo e perdendo espaço para casas e apartamento.

Podemos observar que esta forma de trabalhar não fica apenas no conhecimento matemático para matemático, mas da matemática para vida discutindo e refletindo sobre a realidade dos educandos.

Bibliografia

Bassanezi R. Carlos (2006): *Ensino – aprendizagem com modelagem matemática*: uma nova estratégia. 3ª ed. Contexto, São Paulo – SP.

D´Ambrosio U. (2002) : *Etnomatemática – elo entre as tradições e a modernidade*. 2ª ed. Autentica, Belo Horizonte - MG.

Freire P. (1996): *Pedagogia da Autonomia: saberes necessários à prática educativa*. 2ª ed. Paz e Terra, Rio de Janeiro – RJ.

Freire P. (2000): *Professora sim, tia não:cartas a quem ousa ensinar.* Olho d`Água, São Paulo – SP.

Mello T. (1983): *Arte e Ciência de empinar papagaio. 2ª ed*. Civilização Brasileira, Rio de Janeiro – RJ.

Rodrigues Mendes J.: Matemática *e práticas sociais uma discussão na perspectiva do numeramento*.pag.11-29

Rodrigues Mendes J., Granado R. Célia (2007): *Múltiplo olhares: matemática e produção de conhecimento.* Musa Editora, São Paulo – SP.

Gilberto Chieus Junior Professor de Matemática da ETEc Hortolândia (Centro Paula Souza) e da Prefeitura Municipal de Paulínia – São Paulo – Brasil.Mestre em Educação Matemática pela F.E.Unicamp.E-mail: chieus@gmail.com

UNIÓN
REVISTA IBEROAMERICANA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA

Diciembre de 2009, Número 20, páginas 67-78
ISSN: 1815-0640

Objetos de Aprendizaje para relacionar cálculo y estadística

Alicia López Betancourt

Resumen

El presente trabajo explora el diseño de applets en el software Descartes para relacionar conceptos de cálculo y estadística. Los applets se integraron en dos páginas WEB, llamadas objetos de aprendizaje (OA). En estos objetos se exploraron la función de densidad y el cálculo de área bajo la curva de la distribución normal. Los principales hallazgos de la exploración son satisfactorios: los OA permitieron que los estudiantes retomaran conceptos de cálculo y se precisaran en las hojas de trabajo; además, las representaciones institucionales de los objetos provocaron que los estudiantes relacionaran los conceptos de cálculo con estadística y les facilitaron la comprensión de la función de densidad y del cálculo de probabilidades de la curva normal. Lo cual permitió comprobar la convergencia de las representaciones de los conceptos entre los estudiantes y la del profesor con éstos.

Abstract

The present research explored the design of applets on Descarte´s Software to relate calculus and statistics. The applets were integrated in two WEB pages, to called learning objects (OA). In these objects the density function and the area under the normal curve were explored. The principal findings of the exploration were satisfactory: the OA allowed the students to retake calculus concepts and specify on the worksheets; furthermore the institutionals representatios of the OA made the students relate the calculus concepts with statistics and this provided the comprehension of the densitiy function and probabilities under normal curve. Moreover the exploration allowed to prove the convergence of the conceptsrepresentations among the students and between the students and the teacher.

Resumo

O presente trabalho explora o desenho de applets no software Descartes para relacionar conceitos de cálculo e estatística. Os applets integraram-se em duas páginas SITE, chamadas objectos de aprendizagem (OA). Nestes objectos exploraram-se a função de densidade e o cálculo de área baixo a curva da distribuição normal. Os principais achados da exploração são satisfatórios: os OA permitiram que os estudantes retomassem conceitos de cálculo e precisassem-se nas folhas de trabalho; ademais, as representações institucionais dos objectos provocaram que os estudantes relacionassem os conceitos de cálculo com estatística e lhes facilitaram o entendimento da função de densidade e do cálculo de probabilidades da curva normal. O qual permitiu comprovar a convergencia das representações dos conceitos entre os estudantes e a do professor com estes.

1. Introducción

El uso de las Tecnologías de Información y Comunicación (TIC) ha abierto una diversidad de opciones para incorporar estas tecnologías en las clases de matemáticas. Es así como, los recursos digitales pueden considerarse una buena alternativa para apoyar el aprendizaje de los alumnos en matemáticas, particularmente en cálculo.

Al respecto de incorporar las TIC en las clases de matemáticas, al menos, se encuentran dos posturas, los profesores que tienen la creencia de que el uso de las TIC no les permitirá a los estudiantes desarrollar habilidades operatorias y los de la creencia que la incorporación de las TIC permite contar con más elementos y con recursos interactivos que incluyan la visualización. Esta investigación toma esta última postura, acorde con Hitt (2003b: 23)

> El desarrollo de habilidades ligadas a la visualización matemática podrá impulsar a los estudiantes a un nivel más profundo de los conceptos propios del cálculo. El diseño de nuevos materiales es imperativo para este desarrollo integral, y no como hasta ahora se ha realizado, en donde se enfatiza en demasía un solo tipo de representación, que es el algebraico. Es necesario romper con esa idea y proporcionar al estudiante una noción más rica que le permitan realizar tareas más profundas cuando está aprehendiendo conceptos del cálculo.

Tomando a Montiel (2003:103) *"La visualización requiere de la utilización de nociones matemáticas asociadas a los ámbitos numéricos, gráficos, algebraicos o verbales, pero exige también del uso de un lenguaje común para explicar ciertos fenómenos".* Esta visualización relaciona los procesos mentales con las representaciones institucionales realizadas en el papel, la pantalla de la computadora o en pizarrón.

Con relación a lo anterior Hitt (1998:215) afirma que: "*la visualización matemática de un problema juega un papel importante y tiene que ver con entender el enunciado mediante la puesta en juego de diferentes representaciones de la situación en cuestión y ello nos permite realizar una acción que posiblemente puede conducir hacia la solución de un problema".*

Además, Chan et al. (2006:43) indican:

> El diseño educativo por objetos de aprendizaje, si se opera desde una perspectiva de promoción de la interdisciplinariedad puede tener un significado profundo en el tratamiento de los planes de estudio y estimular reusabilidad en un sentido transversal entre asignaturas.

Por su parte, Duval (1998:175) afirma: *"las representaciones semióticas son producciones constituidas por el empleo del signo que pertenecen a una representación, el cual tiene sus propios constreñimientos de significancia y de funcionamiento."*

Para Duval las representaciones semióticas son fundamentales en la actividad matemática para la aprehensión de conceptos. Un objeto matemático a través de sus representaciones semióticas y la interacción de cada una de ellas pueden permitir la aprehensión del objeto matemático. El desarrollo de la tecnología ha permitido la construcción de diferentes representaciones de los objetos matemáticos en ambientes interactivos, dinámicos y accesibles hacia los alumnos. Sin embargo, a pesar de que se pueden encontrar fácilmente representaciones en la Web o construirlas en diferentes paquetes esto no ha solucionado el problema de la aprehensión de conceptos, tal como señala Hitt (2003:215) "…*el uso de la tecnología Per se no va a resolver el problema del aprendizaje de las matemáticas por parte de los estudiantes…"*

Además, Duval (1998:176) indica que: "*Es esencial ya sea poder movilizar varios registros de representaciones semiótica (figuras, gráficas, escritura simbólica, etc.) en el transcurso de una misma gestión o poder escoger un registro en lugar de otro", además de al tener una gamma de diferentes representaciones se cuente con una organización y coordinación de diferentes registros.*

Independientemente de las diferentes representaciones del objeto matemático, lo más importante sigue siendo el objeto matemático representado. Duval (1998:174) dice: *"La distinción entre un objeto y su representación es pues, un punto estratégico para la comprensión de las matemáticas"*; sin embargo, agrega Duval: "*No obstante las diferentes representaciones semióticas de un objeto matemático son absolutamente necesarias".*

Este mismo autor plantea lo que llama la paradoja cognitiva del pensamiento matemático: *"Por un lado la aprehensión de los objetos matemáticos no puede ser otra cosa que una aprehensión conceptual, y por otro lado, solamente por medio de las representaciones semióticas es posible una actividad sobre los objetos matemáticos".*

El presente trabajo desarrolló un conjunto articulado de diferentes representaciones del concepto de derivada y sus relaciones con la estadística. Por cada representación se construyó un conjunto de *applets* que permitió visualizar la representación mencionada. Esta visualización a través de los *applets* permitirá que sea interactiva y dinámica para tener mayor profundidad en el tema. Las *representaciones institucionales* de acuerdo con Hitt (2007a y 2007b) son las que utiliza el profesor, o las que aparecen en los libros ó en la pantalla de una PC, en el caso de esta investigación se referirán a los applets construidos en *Descartes* integrados en páginas Web.

Con base en lo anterior la pregunta de investigación fue:

¿Cómo los objetos de aprendizaje diseñados en *Descartes* responden a las representaciones institucionales de los conceptos matemáticos que relacionan cálculo y estadística?

La cual se desprendió en el objetivo siguiente:

Objetivo:

Diseñar y explorar los objetos de aprendizaje en el software Descartes para los contenidos de cálculo y estadística a través de representaciones semióticas

Material y método

Se resumen los aspectos metodológicos de esta investigación, así como su implantación. El trabajo estuvo centrado en el diseño y aplicación de los objetos de aprendizaje con el propósito de que retomaran y relacionaran el cálculo con la estadística.

En este estudio se trabajó con un modelo mixto que incluye datos cuantitativos y cualitativos. Se especificó el modelo mixto en el diseño triangular propuesto por

Creswell y Plano (2007), específicamente con la variante llamada modelo convergente. Los autores identifican el término QUAN al aspecto cuantitativo y QUAL al cualitativo. Se muestra en la figura 1 el esquema del modelo Creswell y Plano (2007:63). En el rubro *QUAN:* la colección de datos fue a través del cuestionario en línea, la evaluación del OA1 (Anexo A) y la evaluación del OA2 (Anexo B). El aspecto QUAL incluyó en la colección de datos las hojas de trabajo (Anexo C), por parte de los estudiantes del OA1 y del OA2. El análisis de los datos se realizó a través de la palabra escrita y de las representaciones institucionales de los estudiantes, registrada en las hojas de trabajo mencionadas. Los resultados se obtuvieron a partir de este análisis. Lo anterior permitió comparar y contrastas los resultados QUAN y QUAL, para finalmente obtener la interpretación, a través de la suma de los aspectos cuantitativos y cualitativos.

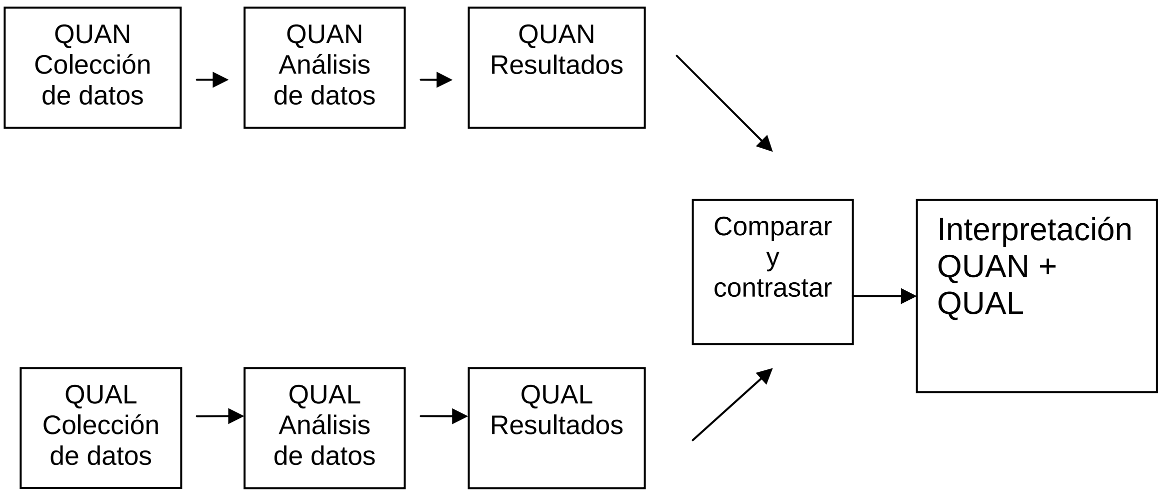


Figura 1. Diseño triangular: modelo convergente propuesto por Creswell y Plano (2007: 63)

Se realizó la exploración en un grupo de 20 egresados de la Licenciatura en Matemáticas Aplicadas, al trabajar un curso de actualización llamado Estadística con nuevas tecnologías en junio del 2008. El curso se trabajo cuatro fines de semana apoyado con aula virtual dentro del sistema virtual de la Universidad Juárez del Estado de Durango en México. La Universidad es de carácter público con aproximadamente 15,000 estudiantes.

Resultados

Los estudiantes exploraron las representaciones del objeto de aprendizaje OA1 (ver Fig. 2) y respondieron la hoja de trabajo correspondiente utilizando conceptos de cálculo. Lo cual muestra que el OA1 provocó que los estudiantes retomaran sus conocimientos de cálculo y lo relacionaran con la estadística.

El objeto de aprendizaje provocó la generación de conocimiento, ((Chan, 2006a)) y permitió a los alumnos relacionar conceptos de cálculo con la estadística en la tarea establecida. En la construcción del OA1 estuvo presente la virtualización ((Chan, 2006a), esto en el proceso de digitalización del contenido de función de densidad. En este proceso de digitalización se analizó en el qué propiedades de la función de densidad se querían estuvieran reflejadas en el OA1. El *software Descartes*, respondió de forma adecuada para esta digitalización. Cuevas y Martínez (2005) menciona que los *applets* en *Descartes* son una nueva forma de comunicación. Esta nueva forma de comunicación entre el estudiante, los conceptos matemáticos reflejados en los applets a través de diferentes representaciones, implica un nuevo paradigma para la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas. Ver la figura 3 referente a la hoja de trabajo resuelta por un estudiante para el OA1.

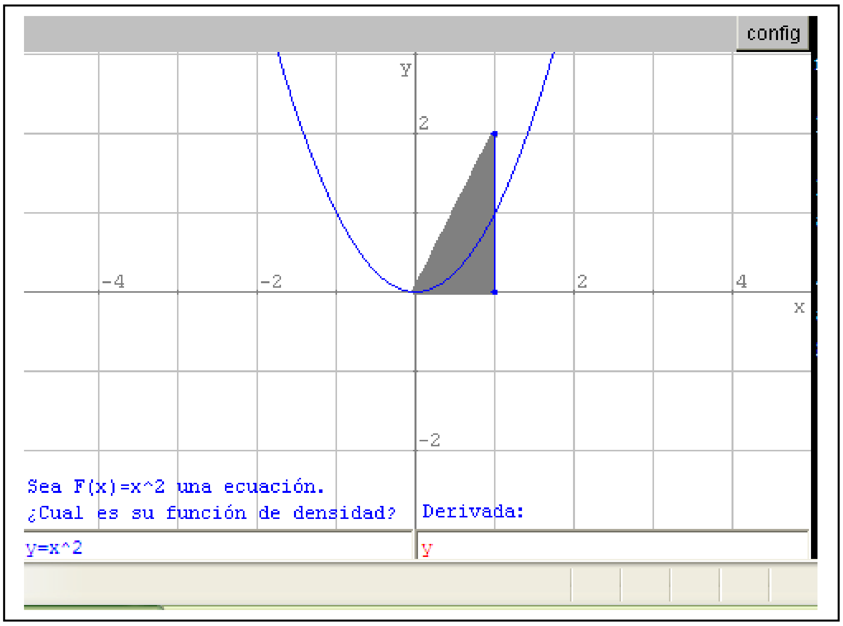


Figura 2. *Applet* Función de Densidad.

El objeto de aprendizaje OA2 (ver Fig. 4) se diseñó para apoyar al estudiante para que explore, analice y conjeture acerca del cálculo de las áreas bajo la curva de la función normal y su relación con sus probabilidades. Se registraron los resultados de las opiniones de los estudiantes con respecto a la conexión del área bajo la curva y el cálculo de probabilidades. Ver gráficas cinco y seis. Durante la sesión algunos de los estudiantes mostraron confusión porqué tenían que navegar a través de la exploración de los applets en *Descartes*, *Excel* y *MatLab*.

CURSO DE TITULACIÓN

Objeto de Aprendizaje 1.

Para cada uno de lo siguientes ejercicios conteste las siguientes preguntas

1.-Introduzca la función densidad en el recuadro y presione Enter

2.- Encuentre la moda de X

3.- Determine si la distribución es simétrica o asimétrica

4.- Si las fórmulas geométricas usuales para áreas son aplicables, calcule el área bajo la gráfica y el eje X para el intervalo dado.

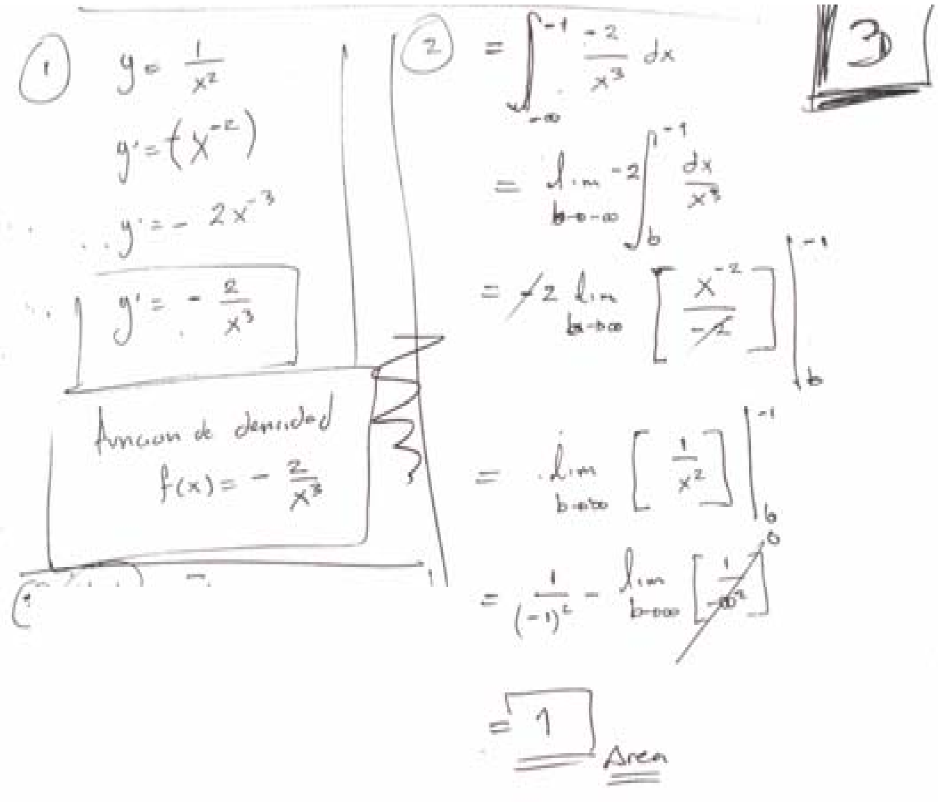


Figura 3. Hoja de trabajo del OA1 resuelta por un estudiante.

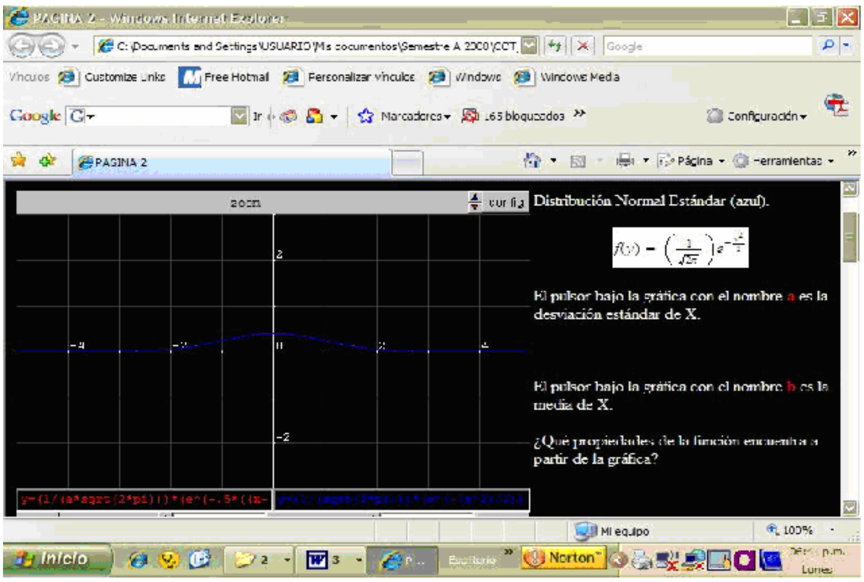


Figura 4. OA2: página Web que contiene los *applets* y otras TIC

Se presenta en la figura 5 algunas de las conclusiones de los estudiantes en sus hojas de trabajo. El estudiante opina que es más fácil en *Matlab,* es cierto, porque sólo hay que conocer y aplicar el comando correspondiente, pero como señala Cuevas (2005) el *Matlab* es un software que si sólo se usan los comandos, sin tener una reflexión en el cómo se esta calculando; se puede perder de vista los procesos que la computadora realiza, ya que sólo presenta los resultados. También, hace el comentario que se puede programar en *MatLab*; esto sería una buena opción porque deberán comprender el proceso de los métodos para realizar su programa correspondiente. Es un egresado que es profesor y por tanto tiene experiencia. El propósito de haber utilizado el *Excel* fue no caer en obtener resultados inmediatos del *MatLab* sin saber que estaba ocurriendo. La dificultad que se presentó fue en la introducción de las fórmulas de los métodos numéricos para la aproximación de integrales, que son muy extensas, se debe tener cuidado con la jerarquía de las operaciones. Dos estudiantes tuvieron ésta dificultad. Kieran (1989) señala estas limitaciones en el álgebra. Al realizar una lectura de Hugues (2005) parece conveniente tener sesiones en donde se trabaje sólo con el *Excel* y posteriormente con el OA2.

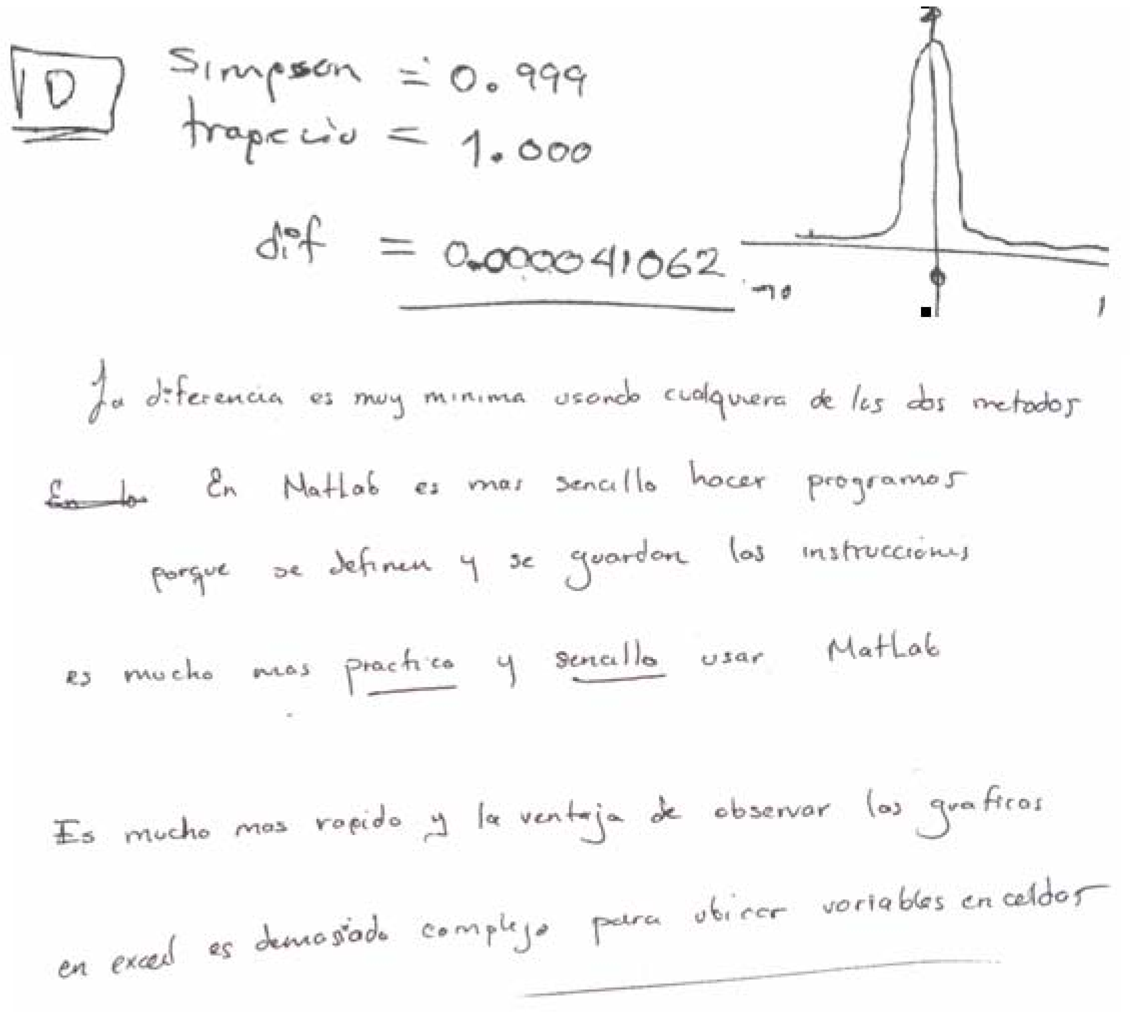


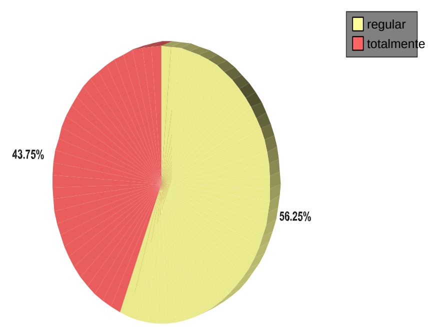
Figura 5. Hoja de trabajo del OA2 con las conclusiones de un estudiante.

La participación de los estudiantes fue dinámica y entusiasta en las sesiones que se trabajaron con los objetos de aprendizaje. Se precisó motivación en los estudiantes y se tuvo un trabajo colaborativo que se reflejó en intercambio de ideas y apreciaciones. Los estudiantes expusieron sus conclusiones de forma clara y coherente, particularmente, para el OA1 cuyo objetivo era presentar las representaciones institucionales gráficas de la función de densidad.

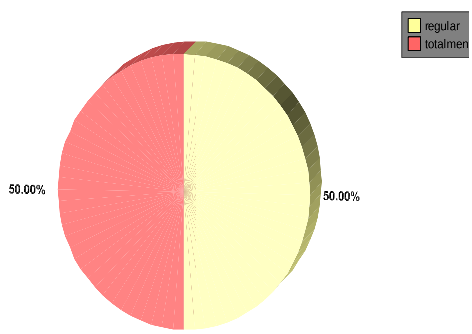
La primera parte de la exploración con el objeto se realizó sin dificultad. Los estudiantes movieron la barra visualizando el sombreado de la gráfica correspondiendo al área, introdujeron la derivada y empezaron a trabajar con su hoja de trabajo. Se mostró que los alumnos retomaron sus conocimientos de cálculo en esta parte.

El porcentaje en la opinión acercade la claridad de las instrucciones, resultó favorable en ambos objetos. Pero se puede apreciar un porcentaje regular (56%) en el OA1. Este objeto se centró únicamente en Descartes y si bien tiene las bondades de la visualización y movimiento al sombrear áreas, tuvo menos posibilidades de navegación para los estudiantes (Gráficas 1 y 2).

Gráfica 1. ¿Entendió las instrucciones del OA1?



Gráfica 2. ¿Entendió las instrucciones del OA2?

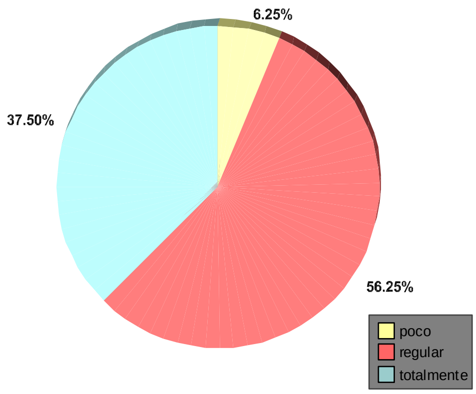


El segundo objeto presentó mayor navegación a los alumnos: se trabajó inicialmente en la primera parte visual; después se presentaron anotaciones teóricas; luego exploraciones y cálculos auxiliándose de Excel y la interacción con el *Matlab*. Este dinamismo del OA2 se reflejó en el interés por parte de los estudiantes. Lo anterior en relación con lo comentado por Chan (2006b): *"Hay pues instrucciones que le dan coherencia a los componentes del objeto y que suponen un diseño orientado al aprendizaje. Estas son internas y permiten la "navegación" dentro del objeto".*

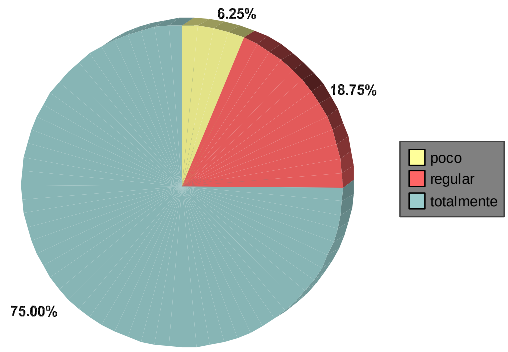
Sin embargo, presentó en algunos de los estudiantes dificultades, al trabajar con *Excel.* Los alumnos presentaban poca familiaridad con el software, lo cual trajo como consecuencia atraso en la realización de la hoja de tarea; pero el entusiasmo ayudó bastante, observando que estos estudiantes se quedaron a trabajar en el tiempo del receso.

Se complementa esta parte con los resultados gráficos de las evaluaciones de los estudiantes al trabajar con los objetos de aprendizaje:

Gráfica 3. ¿El OA1 le ayudó a entender el concepto de función de densidad?

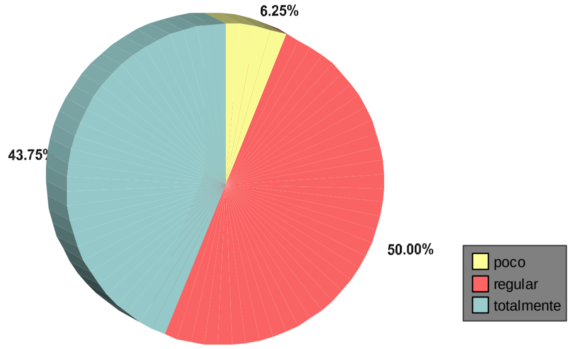


Gráfica 4. ¿El OA1 provocó que retomará conceptos de cálculo?

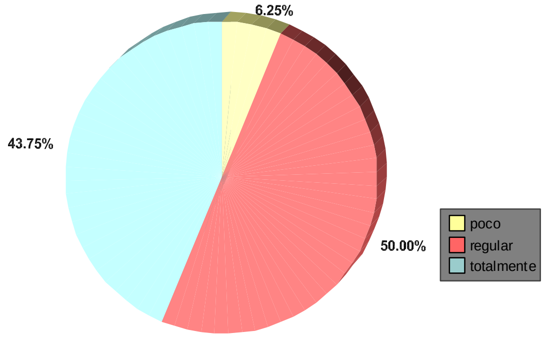


En cuanto al objetivo de relacionar los objetos de aprendizaje con los temas de estadística y cálculo, los estudiantes opinaron en un 75% que el OA1 les había permitido reflexionar en la conexión entre el cálculo y la estadística. Las preguntas correspondientes para el OA2 se muestran en las gráficas cinco y seis.

Gráfica 5. ¿El OA2 le ayudó al cálculo de área bajo la curva y su relación con la probabilidad?

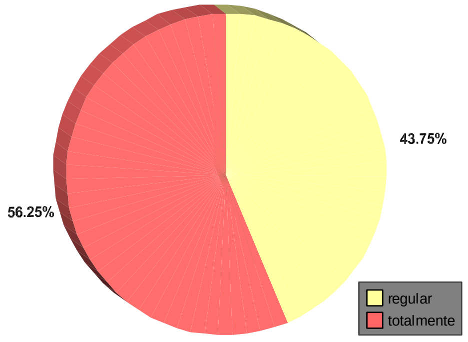


Gráfica 6. ¿El OA2 le ayudó a comprender el cálculo de probabilidades de la distribución nomal?

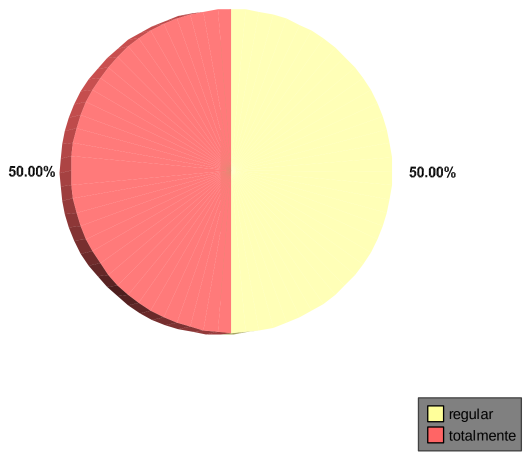


En la pregunta correspondiente a comprensión general del tema, la opinión de los estudiantes se muestra en las gráficas siete y ocho.

Gráfica 7 ¿En general el OA1, le permitió comprender el tema?

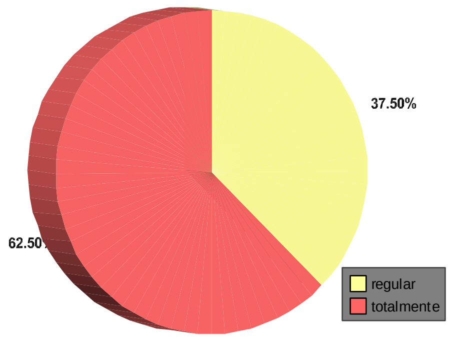


Gráfica 8. ¿En general el OA2 le permitió comprender el tema?

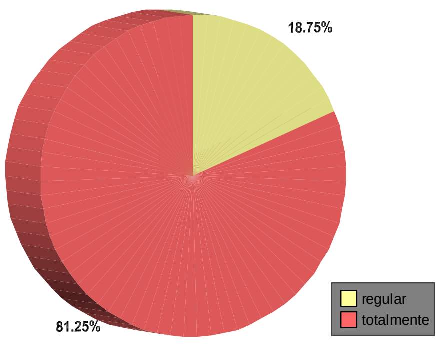


Por último la opinión de los estudiantes en cuanto al aspecto visual de los objetos de aprendizaje, se muestra en las gráficas nueve y diez.

Gráfica 9. ¿En qué medida el aspecto visual del OA1 le apoyó a resolver el ejercicio?



Gráfica 10. ¿En qué medida el aspecto visual de OA2 le apoyó a resolver el ejercicio?



La teoría de Duval de semiosis y noesis (1993, 1995) se centra en las tareas de conversión entre representaciones, lo cual resulta esencial para la construcción de conceptos. Acorde con Hitt (2007b), *“Duval, marca un punto trascendental en su investigación, que es que los objetos matemáticos son accesibles a través de las representaciones semióticas”.*

Al tomar la teoría de Duval como base para la explicación de la comprensión de conceptos, las representaciones institucionales resultan preponderantes. Estas representaciones institucionales son en este caso las gráficas de los OA. Lo ideal es que las representaciones institucionales de los profesores estén cercanas a las de los estudiantes. Aunque la opinión de los estudiantes con respecto a comprensión de los conceptos en los temas es bastante aceptable como lo muestran las gráficas tres y cuatro, así como el examen en línea aplicado a los estudiantes, se comprobó que las preguntas relacionadas con el concepto de función de densidad tuvieron un 83% de aciertos. Esto se comprobó al revisar la sección de análisis de elementos que proporciona el aula virtual. Además, las hojas de trabajo muestran la aplicación del cálculo en la solución de los problemas, por parte de los estudiantes. Sin embargo, las representaciones de los estudiantes a través de sus hojas de trabajo indican mayor énfasis en los procedimientos algorítmicos; también presentaron dificultades para precisar el valor de la moda.

Conclusiones

Los objetos de aprendizaje OA1 y OA2 respondieron de manera satisfactoria al provocar en los estudiantes que retomaran conceptos de cálculo y a su vez que los relacionaran con el concepto de función de densidad y cálculo de áreas bajo la curva de la distribución normal. También al trabajar con los objetos favorecieron la visualización permitiendo en los alumnos desarrollar habilidad para representar, comunicar y reflejar información visual a través de las representaciones institucionales registradas en sus hojas de trabajo. Se pudo precisar la cercanía de las representaciones del profesor con la de los estudiantes y de este modo cerciorarse de que estamos llevando hacia un conocimiento convergente al utilizar las TIC, en nuestro caso los objetos de aprendizaje.

A manera de recomendación se puede seguir explorando la conexión entre el cálculo y la estadística en otros temas como puede ser teoría de la medida. Por los resultados de esta investigación sería interesante continuar en la construcción de otros objetos de aprendizaje realizando combinaciones de diferentes recursos tecnológicos.

Bibliografía

Chan, M.E., Galeana, L. (2006a): F. Capra (1994): “Objetos de Aprendizaje e innovación educativa”. Trillas. DF, México.

Chan, M.E. (2006b): “Objetos de aprendizaje: una herramienta para la innovación educativa”. Documento word. Tamaulipas, México.

Creswell, J.W. Plano, C.V. (2007): “Mixed methods research”. SAGE Publications. Estados Unidos.

Cuevas, C.A. Martínez, M. (2005). “Algunos usos de la computadora en el aula”. En Acta Latinoamericana de Matemática Educativa. Vol. 18. Editor: Martínez Sierra G. Ed. Comité Latinoamericano de Matemática Educativa A.C. Págs. 733-740. México, D.F.

Duval, R. (1998): “Registros de representación semiótica y funcionamiento cognitivo de pensamiento”. Investigaciones en Matemática Educativa II. Grupo Editorial Iberoamérica. DF, México.

Hitt, F. (1998). "Difficulties in the Articulation of Different Representations Linked to the Concept of Function". Journal of Mathematical Behavior, 17(1). Págs. 123-134. New Jersey, Estados Unidos.

_____. (2003a): "Una reflexión sobre la construcción de conceptos matemáticos en ambientes con tecnología". Boletín de la Asociación Matemática Venezolana. Vol. X. No. 2. Págs, 213-224. Venezuela.

_____. (2003b): "Dificultades en el Aprendizaje del Cálculo". Documento Word. Presentado en el décimo encuentro de profesores de matemáticas del nivel medio superior. Universidad Michoacana de San Nicolás de Hidalgo. Morelia, México. Documento Web. http://matedu.cinvestav.mx/librosfernandohitt/Doc-6.doc. Consultado el 24 de septiembre del 2006.

_____. (2007a): "El carácter funcional de las representaciones". Departamento de Matemática Educativa del Cinvestav-IPN. Documento PDF. DF, México.

_____. (2007b): "Utilisation de calculatrices symboliques dans le cadre d'une méthode d'apprentissage collaboratif, de débat scientifique et d'auto-réflecion". In M. Baron, D. Guin et L. Trouche (Éditeurs), *Environnements informatisés pour l'éducation et la formation scientifique et technique : modèles, dispositifs et pratiques*. Hermes. Montréal, Canadá.

Hugues, E. (2005): "Uso de hojas electrónicas en la enseñanza de la distribución normal". En Acta Latinoamericana de Matemática Educativa. Vol. 18. Editores Martínez Sierrra. Ed. Comité Latinoamericano de Matemática Educativa A.C. Págs.757-764. DF, México.

Kieran, C. (1989). "The early learning of algebra: A structural perspective". Research issues in the learning and teaching of algebra. Págs. 35-56, National Council of Teachers of Mathematics; Wagner & C. Kieran (Eds). Nueva Jersey, Estados Unidos.

Montiel Espinosa, G. (2003). "Construcción visual de las funciones lineales cuadráticas y cúbicas". Mosaicos Matemáticos. No. 11. Instituto Politécnico Nacional. DF. México.

Alicia López Betancourt: Doctorado en Educación Internacional con especialidad en Tecnologia (2004-2008). Profesora de Tiempo completo en la Escuela de Matemáticas de la Universidad Juárez del Estado de Durango. Incorporada en el Cuerpo Académico de Matemática Educativa. Publicación de los anuarios institucionales y evaluaciones institucionales de la UJED 1996-1999. Estudio de egresados de la Licenciatura en Matemáticas Aplicadas. (2002). Participación en congresos nacionales e internacionales de matemática educativa. Estancia internacional em: Fresno State University. Instructional Technology and Resource Center (2006) y Université du Québec à Montréal. Department of Mathématiques (2007). **ablopez@ujed.mx**

UNIÓN
REVISTA IBEROAMERICANA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA

Diciembre de 2009, Número 20, páginas 79-87
ISSN: 1815-0640

Infinito, a debater no ensino secundário!

Patrícia Sampaio

Resumo

Apresenta-se um estudo sobre as concepções de infinito numa turma do 12º ano de escolaridade, tendo-se verificado que este conceito não é abordado com rigor no percurso de um aluno que estude matemática. Aplicou-se uma webquest como forma de extensão e refinamento do conhecimento e verificou-se que esta ferramenta cognitiva se mostrou eficaz. Durante a experiência realizaram-se dois testes de resposta aberta constituidos por três questões. No primeiro teste, os alunos demonstraram dificuldades de aceitação do infinito e apenas consideraram a existência do infinito potencial. Já no segundo teste, os alunos demonstraram aceitar a existência de vários infinitos e a comparação entre os mesmos, em termos de cardinalidade de conjuntos.

Abstract

We present a study about the concepts of infinity in a 12th grade class, having verified that this concept is not talked with rigor in the mathematics curricula of a student. It was implemented a webquest as a way of extending and refining knowledge and it was verified that this mindtool was efficient. During the experience we applied two tests with three open questions each. In the first test, students demonstrated some difficulties in accepting infinity, having just considered potential infinite. In the second test, students demonstrated that they accepted different infinites and the comparison between them, in terms of cardinality.

Resumen

Se presenta un estudio sobre las concepciones de infinito en un grupo de 12º año de escolaridad, habiéndose verificado que este concepto no ha sido abordado con rigor previamente. Se aplicó una webquest como forma de extensión y refinamiento del conocimiento y se verificó que esta herramienta cognitiva se mostró eficaz. Durante la experiencia se realizaron dos pruebas de respuesta abierta constituidas por tres cuestiones. En la primera prueba, los alumnos demostraron dificultades de aceptación del infinito y sólo consideraron la existencia del infinito potencial. Ya en la segunda prueba, los alumnos demostraron aceptar la existencia de varios infinitos y la comparación entre los mismos, en términos de cardinalidad de conjuntos.

Introdução

Aparentemente, o Infinito não é um tema tabu na Matemática do ensino português, no entanto, este é frequentemente esquecido. Trata-se de um conceito abordado, ainda que tenuemente, ao longo do percurso escolar de um aluno do ensino português. No 3º ciclo (7º, 8º e 9º anos de escolaridade, dos 12 aos 15 anos de idade) estudam-se os conjuntos dos números naturais, inteiros, racionais e reais, há uma familiarização com a noção de número irracional e é introduzida a noção de função. Segundo Abrantes (2001, p. 67), no final do 3º ciclo do ensino básico os alunos deverão adquirir a “compreensão do conceito de função e das facetas que pode apresentar, como correspondência entre conjuntos”. Na passagem para o ensino secundário (10º, 11º e 12º anos de escolaridade, dos 15 aos 18 anos de idade) estamos em condições de adquirir contornos muito mais formais. Nestes três anos, o conceito de função é aprofundado, tentando desenvolver-se com algum rigor. No 10º ano é trabalhada a noção de função, no 11º é introduzido o uso informal das noções de limite, continuidade e sucessão e no 12º ano estudam-se estes conceitos de uma forma mais rigorosa. Segundo Silva (2002a, p. 9), os alunos devem “chegar aos conceitos de infinitamente grande, de infinitamente pequeno e de limite de uma sucessão”.

A noção de infinito potencial é intuitiva e deste modo facilmente compreendida pelos alunos, fazendo parte do currículo nacional do ensino básico, no entanto as noções de infinito actual e cardinalidade de um conjunto podem não ser abordadas no ensino secundário. A introdução de conceitos tão complexos como o infinito deve ser suportada por processos didácticos que tenham em conta os obstáculos dos estudantes, assim como as suas concepções prévias (Igliori e Silva, 1998; Singer e Voica, 2003; Waldegg, 1996). Tendo em conta que a história da Matemática nos mostra que o conceito de infinito gerou muitas polémicas durante séculos, torna-se um ponto de partida para entender as dificuldades do conceito em causa e permitir aos alunos compreender os paradoxos do passado que se instalam facilmente nos seus pensamentos.

Apresenta-se uma experiência numa turma do 12º ano de escolaridade composta por 16 alunos, numa escola do Norte de Portugal, cujas idades se situam nos 17 (6 alunos), 18 (8 alunos), 19 (1 aluno) e 25 (1 aluno) anos, com 75% de indivíduos do sexo feminino. Neste estudo implementou-se uma estratégia de ensino, uma webquest, pretendendo-se saber se a sua aplicação poderia contribuir para uma melhor compreensão quer do infinito potencial quer do actual, contribuindo para a extensão e refinamento do conhecimento, tendo para tal sido elaborados dois questionários, um pré e um pós a utilização desta ferramenta cognitiva, tendo por base a investigação realizada, em Portugal, por Martinho (1996) sobre uma análise das concepções de Infinito numa turma do 10º ano e as investigações realizadas, no estrangeiro, por Tall (1980) e Tall e Tirosh (2001) sobre as concepções de Infinito, limites e números reais. Ambos os questionários são compostos por três questões, de resposta aberta, abordando diversos temas relacionados com o infinito.

Questão 1 do Q1

Relativamente à primeira questão do primeiro questionário exigia-se a interpretação de um excerto do texto “Parliamo tanto di me” (cap. XVI) de César Zavattini sobre uma competição Matemática, à qual quem ganha é quem pronunciar o número mais elevado. 50% dos alunos responderam que “ninguém” ganharia, 25% responderam “quem disser infinito”, 12,5% afirmaram que ganhava “quem disser o número mais elevado” e 6,25% responderam que o “pai” (um concorrente) ganharia. É necessário referir a ausência de resposta por parte de 1 aluno.

Para quem respondeu que ninguém poderia ganhar o concurso, ocorreram vários tipos de respostas, podendo ser categorizadas pela sua justificação:

- os números são infinitos;

Sujeito 13 - "O pai não tem razão porque os números são infinitos, por isso poderia estar eternamente a repetir *mais um*, *mais dois*, … *mais biliões*, que haveria sempre alguém a dizer *mais dois*, *mais três*, … *mais biliões mais um*, isto é, ninguém poderá ganhar o concurso, é impossível."

- a competição está relacionada com o tempo;

Sujeito 4 - "A questão é complexa e ninguém tem razão. Tudo isto porque este jogo e a sua vitória estão relacionados com o tempo. A verdade é que como o tempo é contínuo, muitos outros assuntos associados ficam indeterminados."

- o infinito remete para um processo inacabado.

Sujeito 9 - "Qualquer um poderia ganhar o concurso, teriam apenas que acrescentar sempre números ao resultado anterior até que houvesse desistências. Caso contrário, ninguém ganharia, pois o infinito remete para um número inacabado."

Quanto aos estudantes que responderam "quem disser infinito" houve dois tipos de respostas:

- a que invocava simplesmente o "infinito";

Sujeito 7 - "Não ganha quem disser mais dois porque alguém poderia dizer infinito e ganhava essa pessoa."

- a que assume o "infinito".

Sujeito 15 - "Este pai não tem razão porque existe o infinito e o infinito não tem fim."

Questão 3 do Q1

Na terceira questão os alunos apenas tinham de responder quantos elementos possuía cada conjunto, sendo constituída por quatro alíneas, salientando-se que este assunto já foi abordado no ensino básico. A percentagem de respostas correctas é muito elevada nas três primeiras questões. Já relativamente à questão 3.4 nota-se uma enorme lacuna na compreensão do conceito de intervalo de números reais.

A primeira destas quatro alíneas referia-se ao cardinal do conjunto vazio tendo os alunos respondido zero elementos na totalidade dos casos. Desta forma, a percentagem de respostas correctas é 100%. Na segunda alínea, 93,75% dos estudantes responderam correctamente que o conjunto $\{-1,2,5,8\}$ é formado por quatro elementos e 1 aluno considera que o conjunto é infinito. Na terceira, a maioria considerou que um conjunto com reticências é infinito (87,5%). No entanto, é de salientar que 2 alunos afirmaram que o conjunto $\{1,2,3,4,5,...\}$ possui cinco elementos, não o considerando, deste modo, infinito.

A 3.4 foi a questão deste grupo que maior número de respostas erradas obteve. Apenas 9 dos 16 alunos afirmaram que o intervalo $[1,3]$ é infinito, isto é, 56,25% responderam correctamente. Os outros 7 (43,75%) consideraram os números 1 e 3 e responderam dois elementos, ou seja, não pensaram nos infinitos números reais que existem entre o 1 e o 3, enfatizando a incompreensão do conceito de intervalo de números reais aprendida no 9º ano de escolaridade e desenvolvida ao longo do ensino secundário.

Comparação da questão 2 do Q1 com a questão 1 do Q2

No primeiro questionário era pedido aos alunos para indicarem algumas palavras que associassem ao infinito e no segundo questionário era-lhes solicitado para indicarem como explicariam a alguém o que é o infinito. Ambas as questões pretendem analisar as concepções dos alunos relativas ao infinito (quadro 1).

O leque de ideias que estes alunos associam ao infinito é muito variado, tendo sido contabilizadas 14 expressões diferentes com o primeiro questionário e 10 expressões com o segundo. A expressão mais comum é “sem fim” e representa 68,75% e 87,5% do total dos alunos nos primeiro e segundo questionários, respectivamente. De realçar a diferença existente entre o número de alunos que associaram o infinito a um processo contínuo antes de realizarem a webquest (1) e depois de a realizarem (7).

Q_1 - Indica algumas palavras que associes ao INFINITO. **Q_2** - Como poderias explicar a alguém o que é o infinito?

	Nº de respostas Q_1	**Nº de respostas Q_2**
Sem fim	11	14
Contínuo	1	7
Ilimitado	3	3
Números	3	2
Incontável		2
Universo	2	
Muito grande	2	
Recta	1	1
Transcendente		1
Céu		1
Indeterminado		1
Inatingível	1	
Sem princípio	1	
Desconhecido	1	
Além	1	
Mar	1	
Inexistente	1	
Muito pequeno	1	

Quadro 1: Ideias que os alunos associam ao infinito.

Dos 16 estudantes que realizaram a webquest:

- 4 mantiveram a mesma ideia;

Sujeito 3

Q1	Q2
"Ilimitado, algo sem fim."	"O infinito é algo ilimitado, que não tem fim."

- 7 ampliaram a ideia inicial;

Sujeito 14

Q1	Q2
"Algo que nunca tem fim"	"Algo que nunca tem fim, que envolve um processo contínuo."

- 5 mudaram de opinião.

Sujeito 1

Q1	Q2
"Espaço, números."	"É algo que nunca acaba, que não tem fim, que envolve um processo contínuo."

Questão 2 do Q2

Tendo em conta um excerto da conferência dada por David Hilbert, em 1925, intitulada "Hotel de Hilbert", proferida no encontro da Sociedade de Matemática de Westphalie em memória a Weierstrass, era pedido aos alunos que comparassem o número de elementos do conjunto $\{1,2,3,4,5,6,7,8,9,...\}$ com o do conjunto $\{2,3,4,5,6,7,8,9,10,...\}$. A maioria dos estudantes (87,5%) disse que o matemático tinha razão, isto é, concordaram que era possível estabelecer uma correspondência entre estes dois conjuntos, como se evidencia na figura 1, associada ao texto. Considerava-se um hotel hipotético com infinitos quartos, todos ocupados, mas como o hotel possui um número infinito de quartos, o hóspede do quarto número 1 mudava-se para o 2, o do quarto 2 para o 3 e assim sucessivamente, ficando o quarto número 1 vago para hospedar o senhor que havia chegado. Apenas 1 aluno não concordou com o matemático e 1 aluno não respondeu à questão.

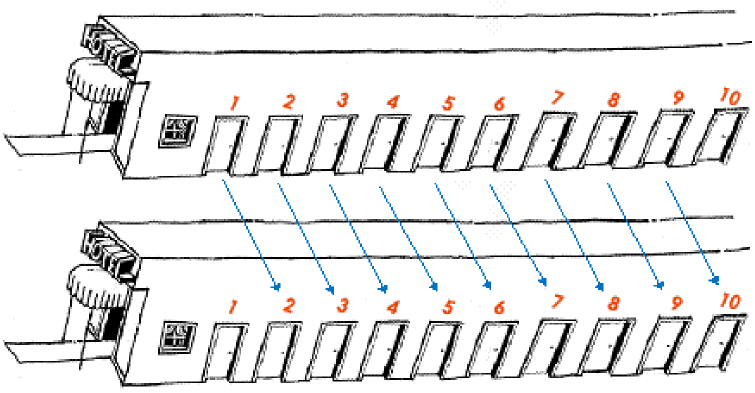


Figura 1: Correspondência entre dois conjuntos.

Esta questão visava entender como eles estabeleciam as correspondências entre dois conjuntos e de acordo com as suas justificações as respostas foram agrupadas em cinco categorias:

- 9 alunos responderam que existe uma correspondência entre os dois conjuntos;

Sujeito 10 – "O matemático tem razão porque se se pode estabelecer uma correspondência entre estes dois conjuntos então eles têm o mesmo número de elementos."

- 3 alunos disseram que existe uma correspondência um a um entre os dois conjuntos;

Sujeito 16 – "O matemático tem razão porque se há uma correspondência um a um entre os elementos dos conjuntos, estes têm o mesmo número de elementos."

- 1 aluno respondeu que os conjuntos têm o mesmo cardinal;

Sujeito 1 – "Quando há uma correspondência entre dois conjuntos, eles têm o mesmo cardinal, logo se $1 \rightarrow 2, 2 \rightarrow 3, 3 \rightarrow 4, \ldots$ então a cada elemento do primeiro conjunto posso corresponder um elemento do outro conjunto. Logo, o matemático tem razão."

- 1 estudante referiu que os conjuntos são infinitos;

Sujeito 9 – "Sim. Ambos os conjuntos remetem para o infinito."

- 1 estudante fez uma associação a conjuntos finitos.

Sujeito 15 – "Acho que não. Por exemplo, os quartos eram de 1 a 20. O senhor do quarto 20 teria de se mudar para o quarto nº 1."

Questão 3 do Q2

A última questão deste questionário era mais filosófica. A sua interpretação prendia-se com o facto de vários conjuntos serem infinitos e terem o mesmo cardinal apesar de serem distintos ou de existirem diversos conjuntos infinitos com cardinais diferentes. Deste modo, pedia-se aos alunos para comentarem a figura 2.

Figura 2: Imagem da questão 3 do Q_2.

As ideias salientes nas respostas dadas foram sintetizadas no quadro 2. Metade deles associou a figura à ideia de que existem vários conjuntos infinitos, podendo ter cardinais diferentes (2) ou iguais (1) e que nem todos os conjuntos infinitos têm o mesmo número de elementos (3), dando alguns exemplos.

	Nº de respostas
Vários conjuntos infinitos	8
Cardinais diferentes	2
Cardinais iguais	1
$\#\mathbb{R} > \#\mathbb{N}$	3
$\#\mathbb{N} = \#2\mathbb{N}$	1
$\#\mathbb{Q} < \#\mathbb{R}$	2
$\#\mathbb{R} > \#\mathbb{Z}$	1
Nem todos os conjuntos infinitos têm o mesmo número de elementos	3
$\frac{1}{6} = 0{,}1(6)$ **é infinito**	1
Há dois infinitos: $+\infty$ **e** $-\infty$	1
Problema da identificação do infinito	1
O infinito é indeterminado	1
O infinito não tem fim	2
O infinito é transcendente à normalidade humana	1
A vida é infinita	1
Não sabe	1

Quadro 2: Respostas obtidas à questão 3 do Q_2.

Discussão dos resultados

Pela análise da questão 2 do primeiro questionário verificamos que 68,75% dos estudantes associaram a expressão “sem fim” ao infinito, revelando uma concepção de infinito limitada apenas ao *potencial*. Foram obtidas 14 ideias diferentes de infinito, demonstrando a falta de precisão do termo. Já na questão 1 do segundo questionário que visava o mesmo, 25% dos alunos mantiveram a mesma ideia, 43,75% ampliaram a ideia inicial e 31,25% mudaram de opinião. Sendo de salientar que agora 87,5% consideram que o infinito é "algo sem fim".

Na questão 2 do segundo questionário, 87,5% dos estudantes consideraram que era possível estabelecer uma correspondência entre os conjuntos $\{1,2,3,4,5,6,7,8,9,...\}$ e $\{2,3,4,5,6,7,8,9,10,...\}$, mas destes apenas 3 referiram uma "correspondência um a um" e 1 usou a expressão "mesmo cardinal".

A última questão do segundo questionário que apresentava duas figuras a afirmarem que ambas eram o infinito, era aberta e de carácter mais filosófico. Metade dos alunos respondeu que existem vários conjuntos infinitos, tendo 18,75% mencionado que há conjuntos com cardinais diferentes/iguais, 18,75% dito que nem todos os conjuntos têm o mesmo número de elementos e 43,75% dado exemplos concretos de comparação de conjuntos. Demonstrando uma aprendizagem efectiva sobre a cardinalidade de um conjunto.

Conclusão

O infinito actual não é intuitivo! É necessário abordar o tema com cuidado, salientando os paradoxos da história da matemática. Neste caso, analisou-se as concepções de infinito de uma turma do 12º ano de escolaridade e verificou-se que a maioria destes alunos aceita o infinito potencial, mas não considera o infinito actual. Aplicou-se uma webquest sobre o tema de forma a ampliar e refinar o conhecimento e verificou-se que a noção de infinito realmente sofreu alterações. No fim da experiência alguns alunos já conseguiram comparar conjuntos com o mesmo cardinal e entender que existem diferentes infinitos, embora ainda com algumas limitações. Trata-se de um conceito que necessita de ser abordado com mais rigor na escolaridade básica e secundária em Portugal.

Bibliografia

Abrantes, P. (2001). Currículo nacional do ensino básico – competências essenciais de Matemática. Lisboa: Departamento do ensino básico, Ministério da educação. p. 57-71.

Hilbert, D. (1926). Sobre o infinito. Mathematische Annalen, vol. XCV. In HILBERT, David (2003 [1898-99]). Fundamentos da geometria. Lisboa: Gradiva. p. 234-255.

Igliori, S.; Silva, B. (1998). Conhecimento de concepções prévias dos estudantes sobre números reais: um suporte para a melhoria do ensino – aprendizagem. CD, 21ª ANPEd.

Marthinho, M. (1996). O infinito através da obra de M. C. Escher – Uma experiência sobre as concepções acerca do infinito numa turma de Métodos Quantitativos. Tese de mestrado não publicada. Universidade do Minho.

Silva, J.; Fonseca, M., Fonseca, C.; Lopes, I.; Martins, A. (2001). Programa do 10º ano - Matemática A. Lisboa: Departamento do ensino secundário, Ministério da educação.

Silva, J.; Fonseca, M.; Fonseca, C.; Lopes, I.; Martins, A. (2002a). Programa do 11º ano - Matemática A. Lisboa: Departamento do ensino secundário, Ministério da educação.

Silva, J.; Fonseca, M.; Fonseca, C.; Lopes, I.; Martins, A. (2002b). Programa do 12º ano - Matemática A. Lisboa: Departamento do ensino secundário, Ministério da educação.

Singer, M.; Voica, C. (2003). Perception of infinity: does it really help in problem solving?. In Proceedings of the International Conference: The decidable and the undecidable in Mathematics education. Brno, Czech Republic. (URL: http://math.unipa.it/~grim/21_project/21_brno03_Singer.pdf acessível em 25/03/2009).

Tall, D. (1980). The notion of infinite measuring number and its relevance in the intuition of infinity. In Educational Studies in Mathematics. vol. XI. p. 271– 284.

Tall, D.; Tirosh, D. (2001). Infinity – the never-ending struggle. In Educational studies in Mathematics. nº 48. p. 199-238.

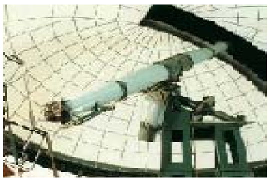
Waldegg, G. (1996). Identificación de obstáculos didácticos en el estudio del infinito actual. In Revista mexicana de investigación educativa. vol. I. nº 1. p. 107-122.

Zavattini, C. (1943). *Parliamo tanto di me*. Milano: Bompiani Editore.

Patrícia Sampaio, professora de Matemática do ensino secundário, licenciada em Matemática pela Universidade do Minho (Portugal) e mestre em Tecnologia Educativa pela mesma universidade. Formadora reconhecida pelo Conselho Científico-Pedagógico da Formação Contínua e pelo Instituto do Emprego e Formação Profissional. Ganhou os prémios de "Melhor aluna da 4ª classe" em 1987 pela Sociedade Martins Sarmento; a "Menção Honrosa do 6º ano" pela Escola Preparatória de Creixomil em 1990**.** **patsampaio@gmail.com**

REVISTA IBEROAMERICANA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA

Diciembre de 2009, Número 20, páginas 89-103
ISSN: 1815-0640



MONOGRÁFICO ASTRONOMÍA

Usando ondas de radio para estudiar nuestro Universo

Edmundo Marcelo Arnal

Resumen

La Radioastronomía es una técnica relativamente joven que usan los astrónomos para investigar en el Universo que habitamos, objetos y fenómenos que no pueden ser estudiados en otras regiones del espectro electromagnético. En este trabajo se definen conceptos que son inherentes a esta técnica y se hace una breve descripción de algunos de los instrumentos que se usan para llevar a cabo las investigaciones. Se hace una breve mención a algunos de los descubrimientos más importantes realizados por esta rama de la Astronomía

Abstract

The Radioastronomy is a relatively young technique widely used by astronomers to study in the Universe we are immersed in, objects and phenomena that can not be studied at other wavelengths of the electromagnetic spectrum. In this paper, technical concepts deeply linked to this technique are defined, and major radiotelescopes that will become operational in the forthcoming years are briefly described. A succinct description of some of the important findings of this branch of the astronomical research is made

Resumo

A Radioastronomía é uma técnica relativamente jovem que usam os astrónomos para pesquisar no Universo que habitamos, objectos e fenómenos que não podem ser estudados em outras regiões do espectro electromagnético. Neste trabalho definem-se conceitos que são inherentes a esta técnica e se faz uma breve descrição de alguns dos instrumentos que se usam para levar a cabo as investigações. Faz-se uma breve menção a alguns das descobertas mais importantes realizados por este ramo da Astronomia.

1. Introducción

La Astronomía es la ciencia que se ocupa de estudiar los cuerpos celestes (sus movimientos, composición química, propiedades físicas, edad, distancia, etc.) que componen el Universo en el que nos encontramos inmersos. El estudio de los mismos se lleva a cabo por medio del análisis de la información que nos llega de ellos en la *radiación electromagnética*(1) que los mismos emiten.

La Astronomía es una de las ciencias más antiguas, y podría afirmarse, dejando escaso margen para el error, que nació casi al mismo tiempo que la humanidad. La curiosidad humana con respecto al origen del día, de la noche, el movimiento del Sol y de la Luna, las fases de esta última, y la posición de las estrellas, fueron de utilidad para esos primeros habitantes de nuestro planeta a los fines de, entre otras cosas, definir el tiempo, orientarse en su habitat, y establecer con cierta precisión las épocas adecuadas de siembra y cosecha.

En sus inicios, los únicos “instrumentos” astronómicos fueron los ojos humanos. Con el correr del tiempo, y la aparición en escena de ciertos avances científicos y tecnológicos, el ojo humano pudo escudriñar el Universo haciendo uso de un instrumento mucho más poderoso: el telescopio. En el año que corre, se celebra el Año Internacional de la Astronomía, que conmemora los 400 años que han transcurrido desde que Galileo Galilei usó un muy rudimentario (¡para los estándares modernos!) telescopio para observar por primera vez a Júpiter y sus satélites más conspicuos.

Hasta mediados del siglo XX, nuestro conocimiento de los objetos que constituyen el Universo, así como el estudio de sus propiedades y de los procesos físicos que tienen lugar en los mismos, se basó exclusivamente en el estudio de la radiación que llegaba a la superficie de la Tierra luego de atravesar la atmósfera de la misma. Pero dicha radiación se encuentra confinada a un estrecho rango de frecuencias. El ojo humano puede percibir todos los colores que se encuentran presentes en el *arco iris*. Dicho de una manera más técnica, el ojo humano sólo es sensible a radiaciones que se encuentran comprendidas en un cierto rango de frecuencias. Estos colores (cada uno de los cuales tiene asociada una frecuencia de oscilación específica) abarcan desde el violeta hasta el rojo, y los mismos constituyen lo que se denomina *ventana óptica*. Fuera de ese rango, es decir fuera de las frecuencias abarcadas por la ventana óptica, el ojo humano no puede detectar radiación alguna.

En la Figura 1 se muestra el espectro electromagnético [(2)], y dentro del mismo la ubicación de la ventana óptica. Puede fácilmente apreciarse que esta última es extremadamente angosta en comparación con todo el rango de frecuencias presentes en el espectro electromagnético.

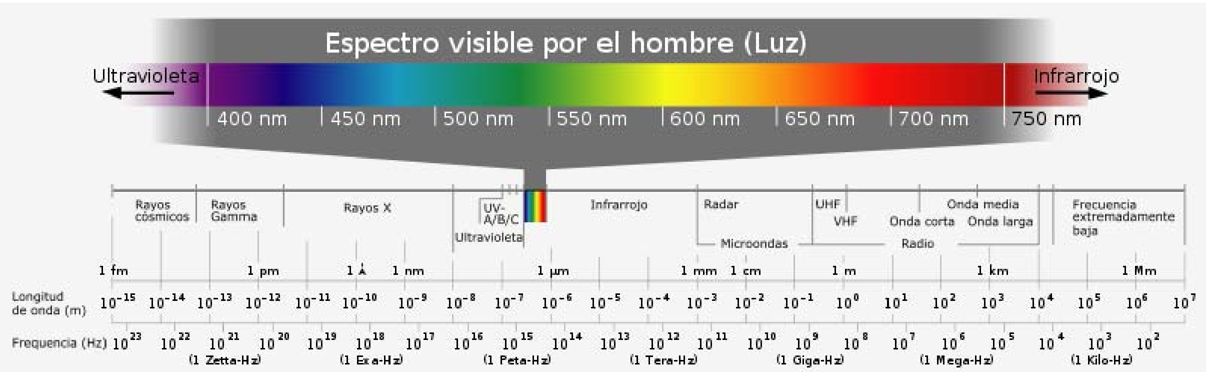


Fig. 1. Espectro electromagnético y ventana óptica. En esta última, las longitudes de onda se encuentran expresadas en nanómetros [(3)]. Las frecuencias que corresponden a cada una de las longitudes de onda se encuentran indicadas, en notación científica[(4)] y en unidades de ciclos por segundo (Hz), en la parte inferior.

correspondientes a la ventana óptica, a atmósfera terrestre es totalmente opaca e impide que las mismas (¡afortunadamente para el ser humano!) alcancen la superficie de nuestro planeta. En consecuencia, esa parte del espectro electromagnético es inaccesible desde la superficie de la Tierra, y no se puede estudiar desde la misma los fenómenos que tienen lugar en el Universo a esas frecuencias (radiación ultravioleta, rayos X, rayos gamma). Hacia el otro extremo de la ventana óptica, se encuentra la radiación infrarroja y las frecuencias que corresponden al reino de las microondas. Si bien la atmósfera terrestre también es opaca a la mayoría de las frecuencias que componen la parte infrarroja y de microondas del espectro electromagnético, existen ciertos rangos de frecuencias que (dependiendo de condiciones geográficas y meteorológicas locales) pueden ser utilizados por los astrónomos profesionales para estudiar el Universo. En estos rangos, la atmósfera es bastante transparente (equivalente a decir que toda, o gran parte, de la energía que incide sobre la parte externa de la atmósfera llega a la superficie de la Tierra). En la Figura 2 se puede apreciar la transparencia de la atmósfera en al rango de las microondas, y la dependencia de la misma con la cantidad de vapor de agua presente en la atmósfera. Esta última se encuentra dada por la cantidad *pwv* (iniciales de las palabras inglesas, *precipitable water vapor*) que aparece inserta en la parte derecha de la Figura 2. En forma simple, podría decirse que la magnitud *pwv* representa la altura, expresada en milímetros y dentro de un tubo cilíndrico imaginario que atravesaría toda la atmósfera, que alcanzaría la cantidad de vapor de agua presente en la atmósfera dentro de ese tubo si las condiciones físicas permitieran la condensación (pasar del estado gaseoso al líquido) del vapor de agua presente en la atmósfera contenida dentro del tubo. De la Figura 2 puede concluirse que los sitios sobre la superficie de la Tierra que posean menor cantidad de vapor de agua precipitable (zonas de color rosa en la Fig. 2), son los que permitirán que las radiaciones de alta frecuencia en la banda de microondas lleguen a la superficie de la Tierra. En la Figura 2 también se nota la presencia de regiones angostas en las que la transparencia de la atmósfera llega a valores cercanos a cero (casi nada de la energía que incide a esa frecuencia sobre la parte superior de la atmósfera podría ser "recogida" por un instrumento que trabajase a esa frecuencia sobre la superficie). Esas zonas de transparencia casi nula, separan intervalos de frecuencia, más o menos anchos, en los que la transparencia atmosférica es notablemente mayor. Estas últimas zonas se denominan "ventanas" del espectro electromagnético en la banda de microondas. En dichas "ventanas" es posible observar, en la superficie de la Tierra, la energía que podría generarse en los objetos que componen el Universo. Cabe mencionar que las localizaciones geográficas con bajo contenido de vapor de agua (*pwv* inferior a unos pocos milímetros) se encuentran en zonas desérticas cuya altura sobre el nivel del mar supera los 4.000 metros.

Como puede apreciarse en la Fig. 1, la banda de microondas abarca un rango en frecuencias muy superior al de la ventana óptica. Las frecuencias más elevadas (del orden de 900 a 1.000 GHz) corresponden a longitudes de onda de milímetros, o de fracción de milímetro, mientras que las frecuencias más bajas (de unos pocos MHz) corresponden a longitudes de onda de metros. A bajas frecuencias, las observaciones en la ventana de microondas que pueden llevarse a cabo desde a superficie de a Tierra se encuentran limitadas por la *ionósfera*[5]*,* que atenúa enormemente las ondas con frecuencias inferiores a los 3 MHz.

La investigación tecnológica, y los enormes avances que la misma ha permitido en numerosas ramas del conocimiento, posibilitó el desarrollo de una enorme variedad de nuevos instrumentos para la investigación de nuestro Universo. En este contexto cabe mencionar el lanzamiento de satélites que poseen a bordo instrumentos diseñados para la investigación astronómica. Con la ayuda de dichos instrumentos los astrónomos han podido lleva a cabo estudios en regiones del espectro electromagnético que eran inaccesibles desde la superficie de la Tierra. En pocos años una plétora de instrumentos ubicados a bordo de satélites han permitido llevar a cabo estudios en rayos gamma, rayos X, en el ultravioleta, y en el infrarrojo lejano.

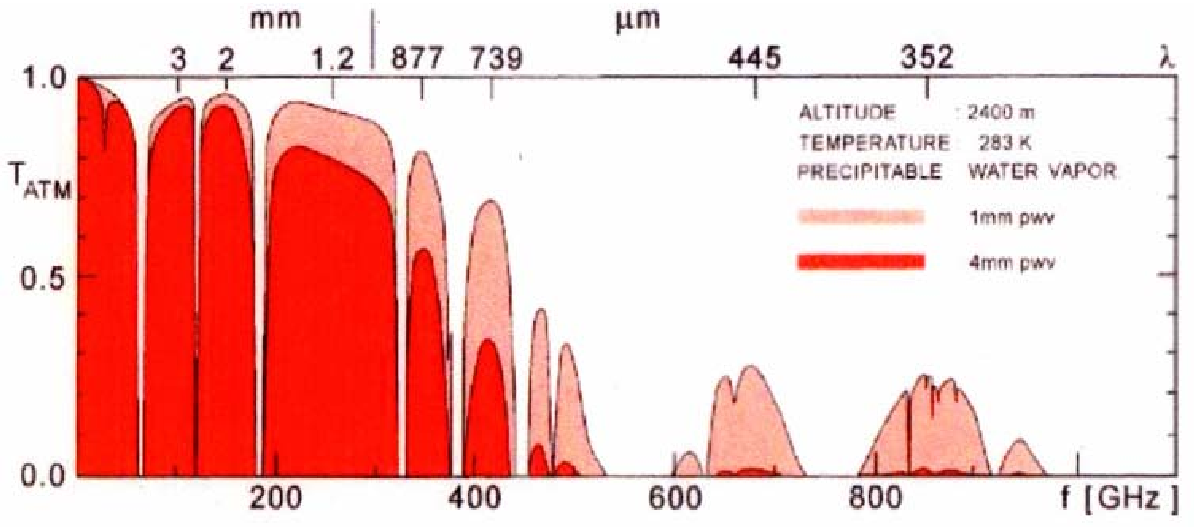


Fig. 2. Transparencia de la atmósfera en función de la frecuencia para dos valores de a cantidad de vapor de agua precitable (*pwv*). Puede apreciarse que a transparencia de la atmósfera es mayor a frecuencia bajas que a altas, y que en estas últimas la atmósfera es cas totalmente opaca (T_{ATM} cercano a 0) para valores elevados de *pwv*. En la parte inferior del gráfico se indica la frecuencia, expresada en GHz, mientras que la longitud de onda que corresponde a una frecuencia dada se encuentra dada en el borde superior. A frecuencias inferiores a 300 GHz, la longitud de onda se encuentra expresada en milímetros, y en micrones a frecuencias superiores.

También en la ventana óptica (accesible para telescopios ubicados en la superficie de nuestro planeta) los satélites han jugado un rol de importancia. En este caso, instrumentos ubicados a bordo de los satélites observan el Universo sin que la energía que llega a los mismos sufra los efectos (centelleo, atenuación, distorsión del frente de onda, entre otros) que afectan a los estudios llevados a cabo con telescopios convencionales. Los desarrollos tecnológicos en el área de comunicaciones ocurridos en la Segunda Guerra Mundial, permitieron detectar radiaciones en la banda de radio que se originaban fuera de nuestro planeta. Estas señales, extremadamente débiles, fueron detectadas por primera vez hacia el año 1931 por el físico e ingeniero Karl Jansky, que a la sazón se encontraba trabajando para la compañía Bell Telephone Laboratories. Con una antena rudimentaria (Figura 3) que trabajaba en la frecuencia de 20 MHz (equivalente a una longitud de onda de 15 metros) el Ing. Jansky detectó radiación que se originaba en el centro de nuestra galaxia. La comunicación oficial de tal descubrimiento fue realizada el 23 de abril de 1933 en Washington D.C., Estados Unidos. Puede decirse que esa es la fecha de nacimiento de una nueva rama de la Astronomía: la Radioastronomía.

El desarrollo de las telecomunicaciones y de las técnicas de radar durante la Segunda Guerra Mundial significó un enorme impulso para el ulterior progreso de la radioastronomía.

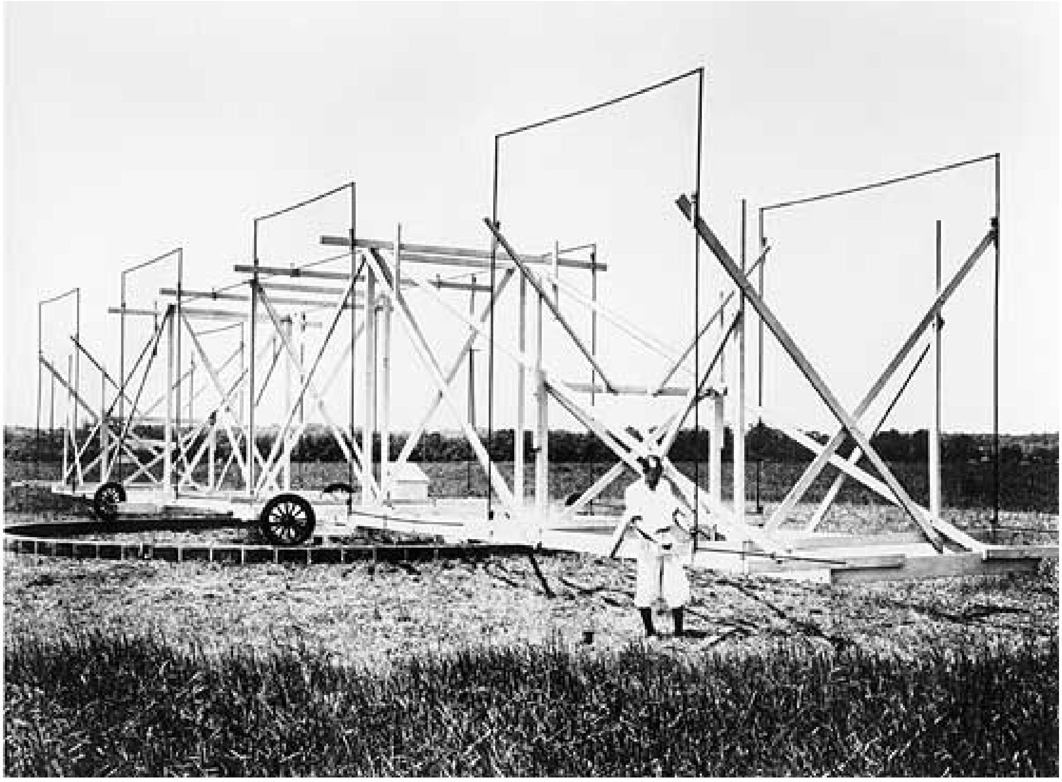


Fig. 3. Instrumento usado por el físico e ingeniero Karl Jansky (persona parada frente al instrumento), para detectar por primera vez radiación originada en el centro de nuestra galaxia, la Vía Láctea.

Radiotelescopios

Los instrumentos que se usan para la investigación astronómica en la banda de radio, se denominan radiotelescopios. Sus tamaños y formas son muy variados, y dependen principalmente del rango de frecuencias (o longitudes de onda) en el que deban trabajar.

Las ondas de radio que se reciben del espacio son extremadamente débiles por lo que se necesitan antenas de gran tamaño, para así poder recoger la mayor cantidad de energía posible. La mayoría de los radiotelescopios están constituidos por una antena parabólica que concentra la radiación que cae sobre la superficie de la parábola en un punto que se denomina foco de la parábola. Debido a que la señal es muy débil, en ese lugar (el foco del paraboloide) se instalan instrumentos electrónicos cuya principal misión es la de amplificar la señal recibida, para luego transportar la misma, pasando por una serie de dispositivos electrónicos que cumplen diversas funciones, hasta un lugar en el que la información recogida por el radiotelescopio es almacenada en computadoras, para su posterior análisis por parte del astrónomo. Los radiotelescopios pueden trabajar en distintas partes de la *ventana de radio*[6] (es tecnológicamente *imposible* construir un *único radiotelescopio* que sea capaz de trabajar en *todas* las frecuencias que componen la banda de radio), en frecuencias que van desde los 15 MHz (longitudes de onda de unos 20 m) hasta casi los 1.000 GHz (longitudes de onda de unos 0,3 mm). Las antenas parabólicas que componen los radiotelescopios poseen tamaños, como ya ha sido mencionado muy disímiles. Una de los parámetros importantes a definir cuando se construye una antena, es la *resolución* de la misma. Esta última puede definirse en términos simples, como la mínima distancia angular bajo la cual pueden distinguirse como separados, dos objetos que se encuentren próximos. Cuando mayor sea la resolución angular, se podrán apreciar mayores detalles del objeto bajo estudio. En términos cualitativos, puede decirse que para un radiotelescopio de un tamaño dado, la resolución angular se incrementa (se pueden apreciar mayores detalles) cuando la longitud de onda disminuye. De la misma manera, si se mantiene fija la longitud de onda, la resolución angular se incrementa si el tamaño del radiotelescopio se incrementa (la antena posee mayor tamaño). Por una convención, se dice que la resolución angular de un instrumento se incrementa cuando disminuye la distancia angular entre los dos puntos que puede distinguir separados. El mayor radiotelescopio del mundo posee un diámetro de 305 m (Figura 4) y se encuentra en Arecibo, Puerto Rico.

Fig. 4. Radiotelescopio de Arecibo, Puerto Rico. La superficie del instrumento posee un diámetro de 305 metros. Para mayor información visitar el sitio *http://www.naic.edu*

Otra característica técnica de un radiotelescopio es su *sensibilidad.* Esta última se define como la capacidad de detectar objetos débiles. Un objeto es débil cuando el radiotelescopio recibe poca energía del objeto bajo estudio, ya sea porque el mismo se encuentra lejos o porque emite poca radiación. En aras del cabal entendimiento de este concepto por parte del lector, permítaseme un ejemplo no demasiado académico. Imaginemos que la energía que llega desde los objetos celestes al radiotelescopio es visualizada como una “lluvia”. Cada gota de esa “lluvia” lleva consigo una parte de la energía emitida por el objeto. Continuando con nuestro ejemplo, imaginemos que el radiotelescopio, cuya función es “colectar” la energía que proviene del objeto, es un paraguas invertido. En este caso se entiende fácilmente que nuestro hipotético radiotelescopio (¡el paraguas!) recogerá mayor cantidad de energía (gotas de lluvia, en nuestro ejemplo) cuando mayor tamaño posea. Cuando mayor es la energía que mi instrumento es capaz de recoger (colectar) más fácil será la detección del objeto. En el mundo tecnológico real, el ejemplo anterior significa que un radiotelescopio será más sensible cuando mayor sea la superficie de su antena. A modo de ejemplo de la sensibilidad que poseen los radiotelescopios, valga el siguiente ejemplo. Supongamos que una lámpara de 100 W de filamento incandescente en vez de emitir energía lumínica emitiese la misma potencia en la banda de las microondas. Dentro de esta última, supongamos que la emisión se encuentra concentrada en una pequeño rango de frecuencias alrededor de 1.420 MHz. La pregunta es, ¿A que máxima distancia del radiotelescopio debería ubicar la lámpara para que la potencia emitida por la misma sea detectable por un radiotelescopio? La respuesta es sorprendente: tal lámpara serían detectable por uno de los radiotelescopios del Instituto Argentino de Radioastronomía (el diámetro de la antena es de 30 metros) a una distancia máxima de 1.170 millones de kilómetros. Esta enorme distancia equivale a ubicar la lámpara a una distancia equivalente a casi 8 veces la distancia de la Tierra al Sol. Esta última es de unos 150 millones de kilómetros.

Las necesidades científicas de observar objetos con mayor detalle (lo que requiere incrementar la resolución angular), la imposibilidad constructiva de incrementar indefinidamente el tamaño físico de las antenas, ha llevado a que los radioastrónomos desarrollen la técnica conocida como *interferometría*.

Un interferómetro es un grupo de antenas que funciona simultáneamente (todas apuntan al mismo lugar de cielo en el mismo momento) combinando las señales recibidas por cada una de ellas en un dispositivo electrónico especial denominado “correlador”. De esta forma se alcanza una resolución angular muy elevada, equivalente a la que se obtendría con un instrumento que tuviese un diámetro igual a la distancia que existe entre las antenas más alejadas del interferómetro. Las antenas individuales del interferómetro pueden estar separadas por distancias de varios kilómetros y encontrarse todas unidas al “correlador” por cables (Figura 5), encontrarse en distintos continentes. En este último caso las antenas no se encuentran físicamente conectadas entre si. En este caso, las señales que se reciben del objeto que se estudia son grabadas, junto con señales de tiempo muy precisas de relojes atómicos, en dispositivos especiales en cada radio observatorio. A posteriori, los datos obtenidos en los distintos radio observatorios son llevados a un centro especial de procesamiento, donde computadoras procesan la información obtenida por los distintos observatorios de forma tal que “simulan” un interferómetro constituido por antenas conectadas entre si. Esta última técnica se denomina Interferometría de Línea de Base muy Larga (VLBI, acrónimo derivada del inglés *Very Long Baseline Interferometry*). Recientemente, con los avances tecnológicos disponibles y usando redes dedicadas exclusivamente al transporte de datos vía Internet, se ha logrado llevar a cabo experimentos de VLBI en casi tiempo real. Esta novedosa técnica se denomina e-VLBI.

Fig. 5. Interferómetro del Very Large Array (VLA). Consta de 27 antenas de 22 m de diámetro cada una. Cada una de las antenas puede moverse a lo largo de rieles, cuyo diseño sobre el terreno se asemeja al de una gigantesca letra Y. Cada “pata” de la Y posee una extensión máxima de 21 km. La máxima distancia entre las antenas es del orden de 36 km. Para mayor información visitar el sitio *http://www.vla.nrao.edu*.

La mejora de los instrumentos usados en astronomía, va de la mano del avance tecnológico. En los próximos años, poderosos instrumentos radioastronómicos, que prometen revolucionar la investigación en el campo, entrarán en funcionamiento. En este sentido cabe mencionar dos instrumentos. Uno es el denominado Atacama Large Millimeter Array (ALMA), y el otro es el Square Kilometre Array (SKA). El primero es un interferómetro constituido por 66 antenas de 12m de diámetro cada una, que se encuentra en construcción en el Llano de Chajnantor, a 5.000 metros de altura y 60 km al este de la localidad de San Pedro de Atacama, en el desierto chileno de Atacama. El proyecto ALMA es una colaboración entre Europa, Japón y Norteamérica en cooperación con la República de Chile, y el costo del instrumento alcanza los 1.200 millones de dólares estadounidenses. Se espera que empiece a funcionar hacia fines del año 2012. Este instrumento trabajará entre las longitudes de onda de 350 micrómetros y 10 mm y alcanzará una resolución angular máxima de 10 milisegundos de arco (¡equivale a distinguir una moneda de 1$ de curso legal de la República Argentina ubicada a una distancia de 8,3 km!). Este proyecto, entre sus múltiples objetivos científicos, será clave para el estudio de los procesos que conducen a la formación de estrellas, y para los estudios relacionados con la química de las moléculas en el medio interestelar. Por su parte, el instrumento SKA, será un interferómetro gigantesco cuya superficie colectora será equivalente a un kilómetro cuadrado (¡100 hectáreas!), y operará en el rango de frecuencias que va de aproximadamente 100 MHz hasta 30 GHz. A mediados del año 2007, luego de numerosos estudios de diversa índole (desde meteorológicos, geofísicos, sísmicos, económicos, y hasta de estabilidad política) que demandaron más de cinco años de trabajo, un grupo de expertos concluyó que los proyectos con mejores condiciones globales para instalar el instrumento SKA, eran los presentados por Australia/Nueva Zelanda y Sudáfrica. Cabe mencionar que hasta ese momento sólo cuatro proyectos para albergar el SKA habían quedado en pie: los de Argentina/Brasil, Australia/Nueva Zelanda, China, y Sudáfrica. Las antenas individuales que constituirán el mismo se encontrarán concentradas en una zona central denominada núcleo del sistema, y las más alejadas se encontrarán diseminadas sobre un enorme círculo de unos 3.000 km de diámetro.

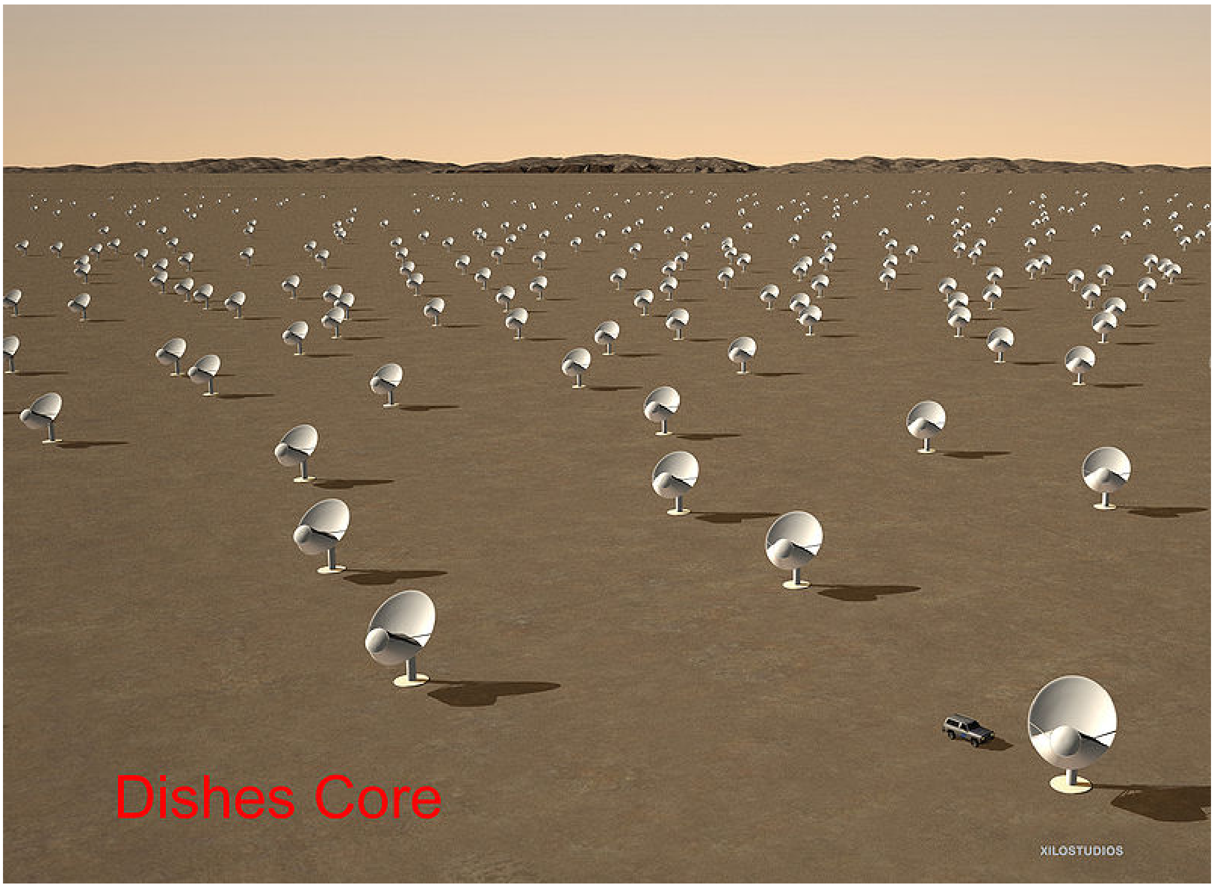


Fig. 6. Representación artística de las antenas que constituyen el núcleo del proyecto SKA. Puede apreciarse que las mismas se encuentran dispersas sobre una gran área y en posiciones fijas. (Dibujo artístico extraído del proyecto SKA (http://www.skatelescope.org/PDF/brochure/SKABrochure_2008.pdf).(Para mayor información sobre el proyecto ver *http://www.skatelescope.org*).

Las señales de las distintas antenas viajarán, en tiempo real (al mismo momento que las antenas se encuentran adquiriendo los datos), por medio de enlaces de fibra óptica de elevadísima velocidad hasta un centro de procesamiento muy sofisticado. Este instrumento podrá detectar objetos unas 50 veces más débiles que los más débiles que hoy día se conocen, y tendrá la capacidad, gracias a la tecnología que incorporará, de apuntar simultáneamente en diversas direcciones del cielo. El presupuesto total de este proyecto ronda los 1.500 millones de euros, y entraría en operaciones en el 2017 y se encontraría completamente terminado hacia el 2023. Algunos de los objetivos científicos que se persiguen con la construcción de este instrumento son: 1) ¿Qué sucedió *luego* de la formación del Universo en el Big Bang y *antes* de que se formaran las primera estrellas?; 2) ¿Qué se formó primero, las estrellas o las galaxias?; 3) ¿Cómo se forman las galaxias como evolucionan?; 4) ¿Cuáles la naturaleza de la misteriosa energía oscura?; 5) ¿Cuál es el origen del magnetismo que se observa en el Universo?; 6) ¿Cómo afecta el magnetismo la formación de las galaxias y de las estrellas?; 7) Búsqueda de planetas alrededor de otras estrellas; 8) Búsqueda de otras civilizaciones en nuestro Universo . La lista de objetivos es enorme, y valgan los mencionados a modo de ejemplo de la diversidad de los mismos.

La radioastronomía ha permitido realizar descubrimientos de enorme importancia como, sólo por mencionar algunos dentro de una larguísima lista, los cuásares, los púlsares, los púlsares de milisegundo, las galaxias activas, el fondo cósmico de microondas, y la mayor parte de las moléculas existentes en el medio interestelar. El avance científico y tecnológico provocado por todos estos descubrimientos ha sido tan importante, que cinco premios Nobel han sido otorgados a investigadores que han realizado importantes contribuciones en este campo, a saber: M. Ryle (en 1974 por el desarrollo de la síntesis de apertura, técnica que hace posible la interferometría), A. Hewish (en 1974 por el descubrimiento de los púlsares), A. Penzias y R. Woodrow (en 1978 por el descubrimiento de la radiación de fondo cósmico), R. Hulse y J. H. Taylor (en 1993, por el descubrimiento de los pulsares de milisegundo) y, J. Mather y G. Smooth (en 2006, por las medidas del fondo cósmico que apoyan la teoría del Big Bang).

Los radiotelescopios también han servido para inferir la presencia de materia oscura en el Universo y han sido utilizados en todos los campos de la astrofísica: desde el estudio del Sol y la elaboración de los primeros "mapas" (mediante el uso de técnicas de radar) de algunos planetas y asteroides del Sistema Solar, hasta la detección de las galaxias más lejanas conocidas en nuestro Universo.

Es imposible en un artículo de difusión como este, incursionar (¡aunque sea brevemente!) en los distintos campos de investigación que podrían beneficiarse con el uso de radiotelescopios. Sin embargo, permítaseme mencionar una importante diferencia entre las investigaciones que se llevan a cabo en la ventana óptica, y aquellas que se realizan en la ventana de las microondas. En la *astronomía óptica* se observa energía originada mayoritariamente en estrellas, mientras que la radiación que se estudia en la ventana de radio se origina principalmente en material que se encuentra ubicado entre las estrellas. Este material, que está constituido por gas y polvo sometidos a condiciones físicas muy particulares, se denomina medio interestelar. En algunos lugares del medio interestelar se han encontrado nubes frías (temperaturas cercanas a los -260 C) y densas (con una densidad de partículas enormemente superior a la que normalmente se encuentra en el medio interestelar ,1 partícula/cm^3) las que se encuentran constituidas principalmente por material molecular. En esos objetos, denominados “nubes moleculares”, se estarían formando nuevas generaciones de estrellas. En otras zonas, las estrellas ya formadas podrían estar interactuando con este medio, calentándolo (a temperaturas que podrían llegar a varios millones de grados) y variando su composición química por medio de la pérdida de masa que ocasionan los vientos estelares. En una galaxia “típica”, el medio interestelar posee una fracción importante de la cantidad total de materia presente en la galaxia.

Los cambios de energía en los átomos, iones (7) o moléculas que constituyen el medio interestelar, producen emisiones muy angostas a una frecuencia tal que dichas emisiones pueden ser observadas en la banda de radio. Estas frecuencias son características, una especie de huella digital, de las especies que las originan y de las propiedades físicas del medio en el que se originan. Estas observaciones reciben el nombre genérico de *observaciones espectroscópicas*. Además, si las regiones del espacio en las que se encuentran las especies atómicas o moleculares, se están moviendo como un todo o el material que las componen se encuentra en movimiento, se producen por efecto Doppler (8) pequeños cambios en las frecuencias emitidas por los átomos o moléculas, lo que permite determinar la velocidad con la que se mueve el material. El resultado importante es que observando “las emisiones espectrales” es factible analizar la composición química del medio interestelar; deducir la cantidad de materia presente; y conocer como se está moviendo dicha región respecto del observador. En los referente a moléculas, se han encontrado en el medio interestelar entre las estrellas) y circumestelar (cercano a las estrellas) cerca de 126 especies moleculares. Algunas corresponden a moléculas diatómicas (formadas por dos especies de átomos distintas) como el monóxido de carbono (CO), hasta moléculas tan complejas como el formiato de etilo (C_2H_5OCHO) y e n-propil cianuro (C^3H^7CN). La glicina (NH_2CH_2COOH), el amino ácido más simple, no ha sido identificado todavía en las nubes moleculares. A fin de ilustrar algunas de las contribuciones realizadas a la Astronomía por la radioastronomía, valga mencionar que la primera transición espectroscópica que fue observada en la banda de radio, corresponde a la denominada línea de 21-cm del hidrógeno neutro. La referencia “21-cm” hace mención de la longitud de onda que corresponde a esa emisión. ¿Porqué el átomo de hidrógeno y no otra especie atómica como el helio, carbono, nitrógeno, oxígeno, etc. fue la primera es ser detectada? La respuesta es simple: el átomo de hidrógeno es la especie atómica que mayor abunda en el Universo que conocemos. El mismo representa el 90% de la materia que conocemos, el helio un 7% y todas las otras especies atómicas contribuyen con sólo un mero 3%. La línea de hidrógeno atómico fue detectada por primera vez, en forma casi simultánea e independiente, hacia inicios de 1950 por grupos de radioastrónomos estadounidenses, australianos y holandeses. Estas investigaciones han permitido conocer la forma que tiene la Vía Láctea, que es la galaxia en la que el Sol y su sistema planetario se encuentran ubicados. En la Figura 7, se muestra la estructura en espiral de la Vía Láctea, tal como sería visible a un hipotético observador ubicado fuera de la misma.

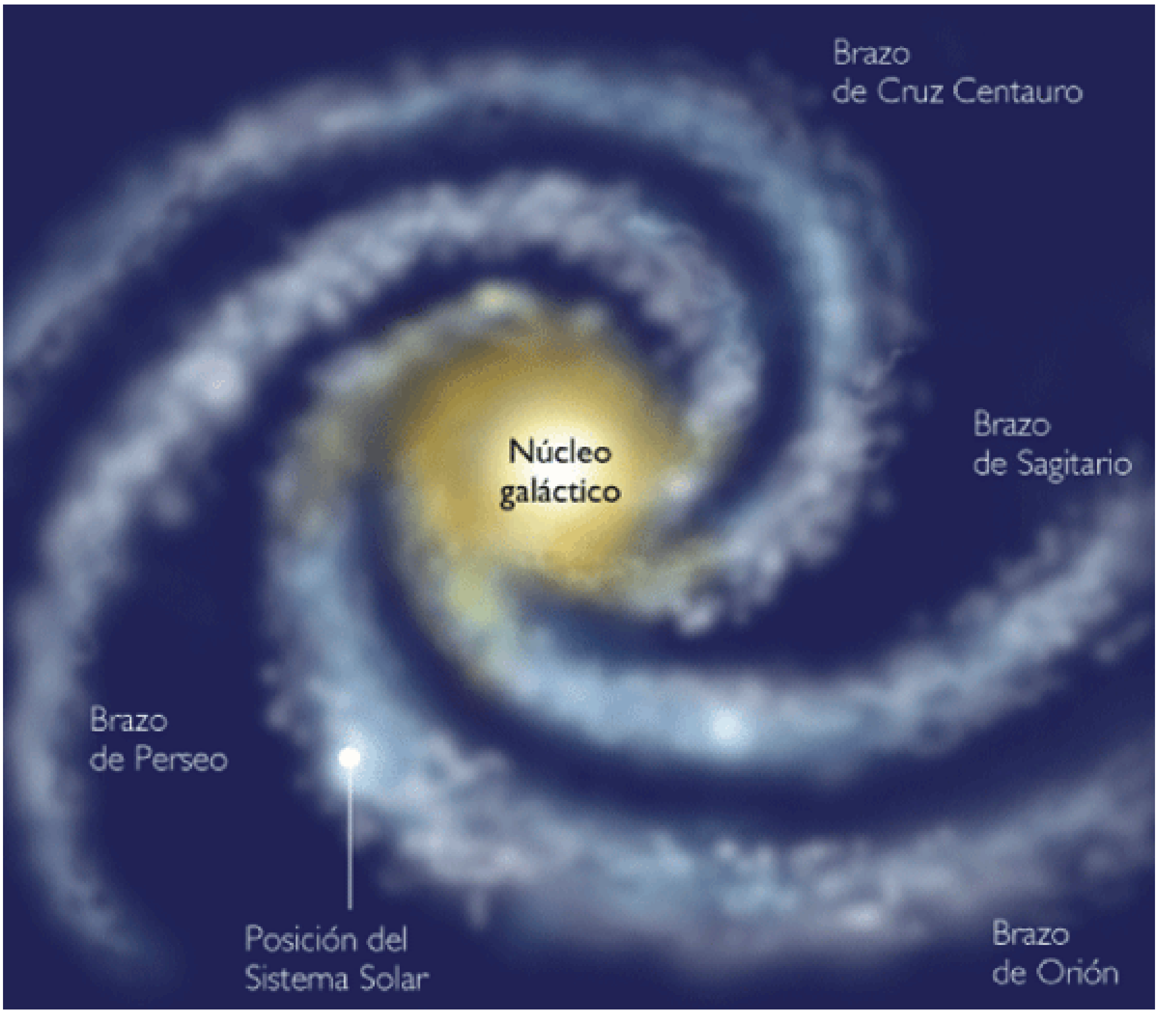


Fig. 7. Distribución espacial del hidrógeno neutro en la Vía Láctea, derivada a partir de las observaciones. Los datos indican que en la Vía Láctea el hidrógeno atómico se encuentra concentrado a lo largo de “brazos” que tiene confieren a la Vía Láctea una estructura en forma de espiral. También puede apreciarse que en la parte central se destaca una estructura más brillante (intensa) que corresponde al núcleo de la galaxia. Como puede apreciarse, el Sol se encuentra ubicado en un brazo en espiral.

En la Fig. 7 se indica la posición del Sol, y su sistema planetario, dentro de la Vía Láctea. La distancia del Sol al núcleo de la galaxia es de unos 27.700 años luz [9].

Vista en forma lateral, la Vía Láctea se asemeja a la estructura mostrada en la Figura 8. En dicha figura puede apreciarse que la estructura en forma de espiral se extiende a ambos lados del núcleo de la galaxia, como una estructura muy delgada.

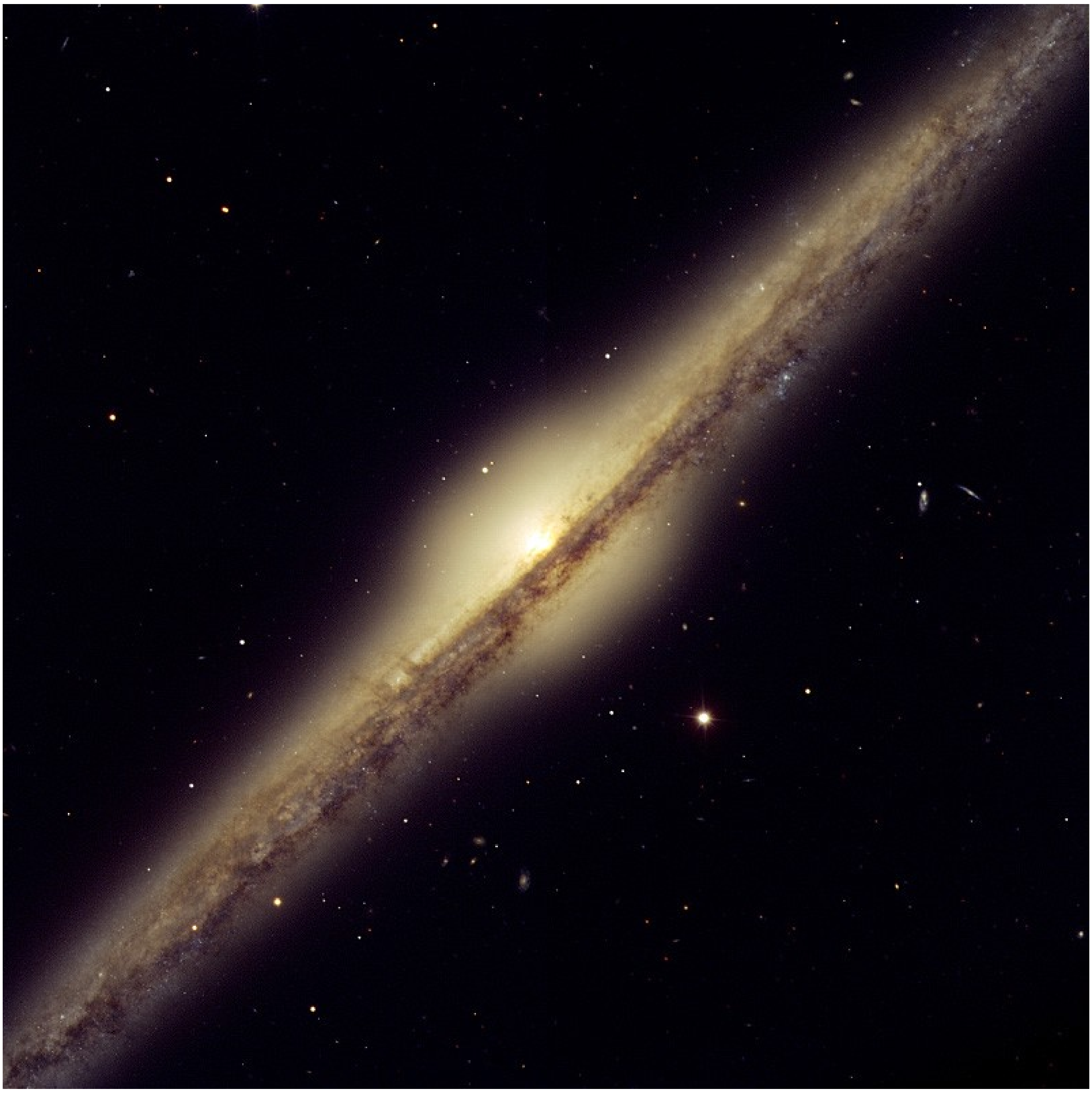


Fig. 8. Vista lateral de una galaxia en espiral como la Vía Láctea. La franja que se aprecia en la imagen corresponde a pequeñas partículas, que constituyen lo que se denomina polvo interestelar, que bloquean parcialmente (de ahí que se vea una franja oscura) la luz emitida por las estrellas y el gas del medio interestelar. Se puede apreciar claramente el núcleo de la galaxia.

Muchas interacciones entre iones y electrones, entre electrones y campos magnéticos, producen una variedad de pulsos de energía cuya frecuencia cae en la ventana de radio. La intensidad, frecuencia de emisión, y ancho en frecuencia de dichos pulsos es variable. La superposición de un gran número de los mismos, produce una emisión que puede ser observada en un rango muy amplio de frecuencias. Esta radiación recibe el nombre genérico de *radiación de continuo,* y la observación de la misma recibe el nombre de *observación de continuo*. Tal radiación pueden originarse en una variedad de procesos físicos, y su estudio requiere la posibilidad de observar en frecuencias muy disímiles. En algunos casos esta emisión también podría encontrarse polarizada [(10)]. En este último caso, usualmente campos magnéticos se encuentran involucrados, y el análisis de la radiación de continuo permite derivar propiedades tanto de la fuente en la que se origina la radiación como del medio interestelar en el que se propaga la misma.

En términos generales todos los objetos presentes en el Universo emiten radiación electromagnética en todas las frecuencias de dicho espectro. Sin embargo, en muchas ocasiones la intensidad de la emisión de estas fuentes en frecuencias que caen fuera de la ventana de radio es extremadamente débil, de modo que las mismas sólo pueden ser estudiadas con técnicas radioastronómicas.

La radiación que se observa en la banda de radio (sea esta de continuo u originada en átomos, iones o moléculas) puede ser constante en el tiempo, o mostrar variaciones temporales en escalas de tiempo que van desde los milisegundos hasta varios años.

En la ventana de radio las señales que se observan son generalmente muy débiles para los estándares terrestres. En estas condiciones la presencia de señales "*artificiales*" (originadas en la actividad humana) a lo largo del espectro electromagnético representa una seria amenaza para las observaciones radioastronómicas. Estas señales *artificiales,* que usualmente son mucho más intensas que las radiaciones recibidas de los cuerpos celestes y suelen ser variables en el tiempo, reciben el nombre de *interferencias*. Si la cantidad de interferencias siguiese incrementándose, el futuro de los estudios radioastronómicos llevados a cabo con observatorios ubicados en la superficie terrestre se vería seriamente compromentido.

Bibliografía

Arnal E. M., Morras R., García Lambas D. R., y. Recabarren P. G. A (2009) ¿Dónde instalamos el telescopio?. Ciencia Hoy, Vol. 11, No. 110, 57-62.

Cohen J., Spoelstra T,., Ambrosini R., y Van Driel W. (eds.) (2005). CRAF Handbook for Radio Astronomy, European Science Foundation, accesible (febrero de 2009) en http://www.craf.eu/handbook.htm

Estalella R.y. Anglada G (208). Introducción a la física del medio interestelar. Departament d'Astronomia i Meteorolgia, Universitat de Barcelona.

Edmundo Marcelo Arnal. Doctor en Astronomía. Profesor Titular con dedicación exclusiva en la Facultad de Ciencias Astronómicas y Geofísicas de la UNLP; Investigador Principal en la Carrera del Investigador Científico del CONICET. Director del Instituto Argentino de Radioastronomía ***http://www.iar.unlp.edu.ar***. Publicaciones científicas internacionales (con referato por pares): noventa (90).Publicaciones científicas nacionales: diez (10). Presentaciones en Congresos Nacionales e Internacionales: Director de Becarios, Tesis de Doctorados y grupos de investigación..

Glosario

(1) Radiación electromagnética
La radiación electromagnética es una combinación de campos eléctricos y magnéticos oscilantes, que se propagan a través del espacio transportando energía de un lugar a otro del mismo. Las ondas electromagnéticas poseen una propiedad que se denomina longitud de onda (λ), que representa la distancia entre dos crestas consecutivas. La longitud de onda es inversamente proporcional (λ=c/ν) a la frecuencia (ν). La constante c indica la velocidad de la luz. La unidad de medida de la frecuencia es el Herz (Hz). Múltiplos de esta unidad son el MHz (= 10^6 Hz) y el GHz (=10^9 Hz).

(2) Espectro electromagnético.
El espectro electromagnético es el conjunto de longitudes de onda de todas las radiaciones electromagnéticas. Abarca desde los rayos gamma hasta las ondas de radio, pasando por los rayos X, la radiación ultravioleta, la luz visible, y la radiación infrarroja.

(3) Nanómetro
El nanómetro es la unidad de longitud que equivale a una milmillonésima parte de un metro

(4) Notación científica
La notación científica es un modo conciso de representar un número utilizando potencias de base diez. Los números se escriben como un producto: $\mathbf{a}\times10^n$, (siendo **a** un número mayor o igual que 1 y menor que 10, y **n** un número entero). En esta notación un millón se expresa como 1x 10^6 (o directamente 10^6). Esta notación se utiliza para poder expresar fácilmente números muy grandes o muy pequeños.

(5) Ionosfera
La ionosfera es la parte de la atmósfera terrestre que posee en forma permanente una gran cantidad de partículas cargas de electricidad que son originadas por la radiación solar que incide sobre la atmósfera terrestre. Esta capa se extiende, aproximadamente, entre los 80 y 500 Km. de altura.

(6) Ventana de radio
La misma se encuentra definida por el rango de frecuencias (o longitudes de onda) en el que la atmósfera terrestre permite el paso hasta la superficie de la Tierra, de la radiación originada fuera de la misma. La misma comprende longitudes de onda que van desde varios metros hasta fracciones de milímetro.

(7) Ión
Un ión es una especie química, ya sea átomo o molécula, cargado eléctricamente en forma positiva (si la especie neutra pierde electrones) o positiva (si la especie neutra gana electrones)

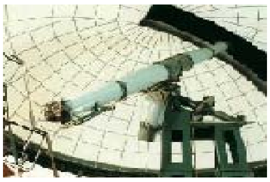
(8) Efecto Doppler
Cuando un objeto en movimiento se acerca al observador, las ondas que emite dicho objeto llegan al observador con una frecuencia ligeramente mayor (si el objeto se acerca) o menor (si el objeto se aleja). Este fenómeno se denomina efecto Doppler.

(9)Año-luz
Es la distancia que recorre la luz en el vacío durante un año, teniendo en cuenta que la velocidad de la luz es de casi 300.000 km/seg. Equivale a 9,46 billones de kilómetros.

(10) Polarización
Una onda electromagnética, como las ondas observadas en la ventana de radio, es una onda transversal compuesta simultáneamente por un campo eléctrico y un campo magnético, que oscilan perpendicularmente entre sí. En una onda no polarizada el campo eléctrico oscila en todas las direcciones normales a la dirección de propagación de la onda. Cuando el campo eléctrico de una onda electromagnética oscila sólo en un plano determinado, se dice que la onda se encuentra polarizada.

UNIÓN
REVISTA IBEROAMERICANA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA

Diciembre de 2009, Número 20, páginas 105-112
ISSN: 1815-0640



MONOGRÁFICO ASTRONOMÍA

Breve reflexión sobre el Año Internacional de la Astronomía: Motivación para las matemáticas y las ciencias

Miguel Volpe; Christian Schaerer.

Resumen

El presente trabajo presenta una breve descripción del Año Internacional de la Astronomía 2009 y su connotación en el Paraguay. Año decretado como de interés educativo, cultural y científico; y se constituyó en un motor para la articulación de eventos seminales de iniciación, restructuración y motivación a la ciencia. También, presentamos una breve descripción de las Olimpiadas Latinoamericanas de Astronomía y Astronáutica que surgió como un mecanismo de comunicación e integración regional. En lo que respecta al Paraguay, la Olimpiada Paraguaya de Astronomía y Astronáutica - OPAA y varios otros eventos del AIA2009, se han enmarcado en la estructura organizacional y han seguido los delineamientos de las Olimpiadas Matemáticas. Presentamos algunas lecciones aprendidas a lo largo de este año. Este texto es de carácter por sobre todo divulgativo.

Abstract

The present work presents a brief description of the International Year of the Astronomy 2009 and his connotation in the Paraguay. Year decreed like of educational, cultural and scientific interest; and it was constituted in an engine for the joint of seminal events of initiation, restructuración and motivation to the science. Also, let's sense beforehand a brief description of the Latin-American Olympics of Astronomy and Astronautics that arose as a mechanism of communication and regional integrationRegarding the Paraguay, the Paraguayan Olympiad of Astronomy and Astronautics - OPAA and several other events of the AIA2009, they have placed in the structure organizacional and have followed(continued) the delineations of the Mathematical Olympics. Let's sense beforehand some lessons learned throughout this year. This text is of character for especially divulgative.

Resumo

O presente trabalho apresenta uma breve descrição do Ano Internacional da Astronomía 2009 e sua connotación no Paraguai. Ano decretado como de interesse educativo, cultural e cientista; e constituiu-se num motor para a articulación de eventos seminales de iniciación, restructuración e motivação à ciência. También, presentamos una breve descripción de las Olimpiadas Latinoamericanas de Astronomía y Astronáutica que surgió como un mecanismo de comunicación e integración regional. En lo que respecta al Paraguay, a Olimpiada Paraguaia de Astronomía e Astronáutica - OPAA e vários outros eventos do AIA2009, têm-se enmarcado na estrutura organizacional e seguiram os delineamientos das Olimpiadas Matemáticas. Apresentamos algumas lições aprendidas ao longo deste ano. Este texto é de carácter por sobretudo divulgativo.

"No pudiera haber hecho tales observaciones por falta de instrumentos (que no se traen de Europa a estas provincias por no florecer en ellas el estudio de las matemáticas) a no haber fabricado con mis manos los instrumentos necesarios para dichas observaciones…"
Buenaventura Suárez, S.J., Lunario, San Cosme y Damian, 1743[1].

1. Un año mundial

El nacimiento de la astronomía se remonta posiblemente a los primeros humanos quienes contemplaron impresionados la multitud de luminarias contrastando con el oscuro cielo nocturno. La admiración humana del cosmos ha estado presente en todas las culturas. El impacto de la astronomía en la ciencia y la cultura ha sido profundo y está fuertemente unido a los adelantos culturales y tecnológicos. La astronomía ha sido una fuente de inspiración para descubrimientos más profundos sobre la naturaleza del Universo y nuestro lugar dentro del mismo.

En 1609 Galileo Galilei apuntó por primera vez uno de sus telescopios hacia el cielo nocturno e hizo notables descubrimientos que cambiaron el mundo para siempre: montañas y cráteres en la Luna, una plétora de estrellas invisibles al ojo desnudo, lunas alrededor de Júpiter, entre otros. La humanidad ha avanzado desde aquella época; hoy vivimos en medio una era de notables descubrimientos astronómicos. Hace cien años apenas sabíamos de la existencia de nuestra propia galaxia, la Vía Lácea. Hoy conocemos que muchas miles de millones de galaxias forman nuestro universo al que le fechamos su origen como de aproximadamente 13,7 mil millones años. Conocemos más de 200 planetas alrededor de otras estrellas en nuestra Vía Láctea, algo insospechado hasta hace poco tiempo. Cien años atrás estudiábamos el cielo usando únicamente nuestros ojos y telescopios ópticos. Hoy observamos el Universo con telescopios provistos de avanzados detectores digitales, tanto en la Tierra como en el espacio, sensibles a emisiones de rayos gamma de alta energía y hasta de emisiones de radio frecuencia. Hemos ampliado enormemente el espectro multicolor de nuestro Universo.

Los instrumentos y observatorios que van surgiendo en este siglo, prometen confirmar y desechar teorías actuales, revelar cómo se conjugan los planetas y las estrellas, cómo aparecen y se desarrollan las galaxias, cómo aparecieron las primeras estrellas, y cuál es la estructura actual de nuestro universo. Hoy los humanos estamos al borde de una nueva era de descubrimientos, una que promete ser tan intensa como la que Galileo introdujo cuando apuntó su telescopio en aquellas gloriosas noches llenas de estrellas hace 400 años.

En Diciembre del 2007 la Organización de las Naciones Unidas declaro el año 2009 como el Año Internacional de la Astronomía. AIA2009 en conmemoración de los 400 años desde que Galileo utilizara por primera vez el telescopio de forma a realizar observaciones astronómicas y con ello el inicio de los grandes descubrimientos que transformaron la ciencia y la cultura, y cuya repercusión se extiende hasta nuestros días. El AIA2009 fue concebido para ser una celebración

1 El sacerdote Jesuita Buenaventura Suárez, nació en Santa Fe de la Vera Cruz en el año de 1679. Realizo sus observaciones y escritos astronómicos en la ciudad de San Cosme y Damian.

global de la astronomía y de sus contribuciones para la sociedad, presentándose como una iniciativa pacífica de unión de los científicos en una gran familia internacional y multicultural, trabajando en conjunto para descubrir respuestas para algunas de las cuestiones más fundamentales para la humanidad[2]. El AIA2009 es por sobre todas las cosas una actividad que pretende transmitir el entusiasmo por el descubrimiento personal, el placer de compartir el conocimiento sobre el universo y el lugar que la humanidad ocupa en él. Al ser planteado como tal, pretende conseguir especialmente la participación e incorporación de los jóvenes tanto en la astronomía cuanto en toda la ciencia en general [1]. Es interesante resaltar que también se recuerda los 400 años en que Johannes Kepler publicara *Astronomia nova* señalando que las órbitas de los planetas alrededor del Sol son elípticas [9].

De forma a coordinar este evento mundial, la Unión Astronómica Internacional conformó organismos encargados de su realización y sugirió que cada país, que hoy en total suman 148, tuviera un contacto con la UAI y una estructura, llamada Nodo Nacional, encargada de coordinar los eventos locales y los de proyección regional e internacional.

Las metas de la ONU para el Desarrollo en el Milenio forman un documento acordado por cada país y por instituciones líderes en desarrollo de todo el mundo. Los aspectos inspirativos del Año Internacional de la Astronomía son un recurso inestimable para la humanidad y tienden a contribuir con cuatro de estas metas (para detalles vea [1]):

- **Ayudar a conseguir una educación primaria universal.** El AIA2009 quiere aumentar la calidad de la educación primaria haciendo acceder a maestros y alumnos del mundo al conocimiento de la astronomía básica.
- **Ayudar a erradicar la pobreza extrema y el hambre**. Se ha demostrado que el aumento en la riqueza científica y tecnológica va asociado con un crecimiento del bienestar económico en los países en vías de desarrollo; en consecuencia, es un elemento válido para combatir la pobreza, crear capacidad en la población y conseguir importantes mejoras en la gobernabilidad.
- **Promover la igualdad de género y dar trascendencia a la mujer**. Una de las metas del AIA2009 es mejorar el balance de géneros entre los científicos en todos los ámbitos y promover un mayor compromiso con las minorías subrepresentadas en las carreras científicas y de ingeniería.

Las metas que guían las actividades a ser desarrolladas en el marco de la AIA2009 son agrupadas en los ejes siguientes:

- Aumentar el conocimiento científico del público en general a través de la comunicación de resultados científicos de la astronomía y temas relacionados, así como el proceso de investigación y el pensamiento crítico que lleva a estos resultados.

[2] Texto extraído parcialmente del folleto de difusión del AIA2009. El texto hace referencia a las palabras de Catherine Cesarsky - Presidenta de la UAI.

- Promover el acceso amplio al conocimiento universal de la ciencia fundamental a través de la emoción de la astronomía y la estimulante experiencia de observar el cielo.
- Fortalecer las comunidades astronómicas en los países en vías de desarrollo a través de la colaboración internacional.
- Apoyar y mejorar la educación formal e informal de la ciencia en las escuelas a través de centros científicos, planetarios y museos participativos.
- Proporcionar una imagen moderna de la ciencia y de los científicos, para reforzar los vínculos entre la educación en la ciencia y las carreras científicas, y así estimular un aumento a largo plazo de la matriculación de estudiantes en los campos científicos y tecnológicos, fomentando el aprecio para el aprendizaje de por vida.
- Facilitar nuevas redes, y fortalecer las existentes, conectando a Astrónomos Aficionados, Educadores, Científicos y Profesionales de la Comunicación a través de actividades locales, regionales, nacionales e internacionales.
- Mejorar el equilibrio de géneros entre los científicos en todos los ámbitos y promover un mayor compromiso con las minorías subrepresentadas en las carreras científicas y en la ingeniería.
- Facilitar la preservación y protección de nuestro mundo cultural, la herencia natural de los cielos oscuros y sitios astronómicos.

1.1. El evento de lanzamiento en Paraguay.

Para el Lanzamiento del AIA 2009 en Paraguay, el Nodo Nacional conformó una Comisión Organizadora Local ya que por estrategia de desarrollo fue elegida la capital del primer departamento, la ciudad de Concepción. Fueron organizados 4 días de eventos que incluyeron: charlas, eventos musicales, teatro y exposiciones de interés científico y tecnológico. El acto central fue realizado el viernes 6 de febrero del 2009, en el Campus de la Universidad Nacional de Concepción que incluyó el lanzamiento de globos sondas, los discursos de las autoridades, eventos pirotécnicos y la observación con telescopios. Las charlas en los días posteriores fueron realizadas tanto en la Universidades Católica cuanto en la Universidad Tecnológica Intercontinental. En total se realizaron más de 30 Charlas, unas 60 exposiciones de afiches, muestras de meteoritos y varias jornadas participativas tecnológicas y de ciencias. El evento de Lanzamiento del AIA se hizo coincidente con el “Primer Encuentro Internacional de Orquestas Juveniles”, con orquestas provenientes de seis países, con más de 1600 músicos, organizado por Sonidos de la Tierra [6]. Es importante resaltar que este Lanzamiento fue considerado por la Secretaria del AIA2009 de la UAI como uno de los eventos de mayor dimensión del mundo del primer semestre del año, en términos de asistencia y repercusión [8].

Hemos constatado la importancia de considerar la ciencia como un instrumento de inclusión social y de estímulo, sobre todo teniendo en cuenta las dificultades de la región en recibir informaciones científicas y tecnológicas. Eventos de esta naturaleza permiten levantar la autoestima de la región, fomentan la integración con un factor de impacto muy positivo, especialmente para los jóvenes que comienzan a ver a la ciencia como un detonante en su crecimiento personal y su utilidad como elemento dinámico de desarrollo.

1.2. Observaciones del AIA2009.

Las múltiples actividades realizadas en conmemoración al AIA2009 en diversas regiones del país, si bien estaban orientadas a uno de los principales llamados de la UAI y promocionadas por las comunidades: mostrar las maravillas del cielo usando telescopios, enseñó a encontrar actividades sustitutivas válidas para las ocasiones en que las nubes las escondían. Exposiciones de afiches, maquetas astronáuticas, de telescopios y de meteoritos, proyección de documentales y conferencias audiovisuales a desarrollarlas en ambientes más o menos cerrados, mientras que para lugares abiertos: construcciones in situ y lanzamientos de cohetes hidroneumáticos usando recipientes plásticos desechables de bebidas gaseosas con agua y aire a presión logrado con pequeños infladores de ruedas de bicicletas, que sorprendieron por lo atrapante que resultaron ser, tanto para niños y jóvenes como para adultos, dado por la sencillez del sistema constructivo y de lanzamiento como por las distancias alcanzadas y las interacciones lúdicas hasta de padres e hijos.

2. La Olimpiada Latinoamericana de Astronomía y Astronáutica - OLAA.

Tuvo su nacimiento en la reunión de delegados para la Olimpiada Regional realizada en Montevideo del 10 al 12 de octubre del 2008, estando presentes los delegados de Brasil, Chile, Colombia, Paraguay, Uruguay, un Asesor de UNESCO y en línea virtual, el delegado de México. En la oportunidad se creó el Consejo de Delegados de los Países Participantes, la Olimpiada Latinoamérica de Astronomía y Astronáutica - OLAA y se aprobó su Estatuto. El Brasil fue establecido como la primera sede, a ser desarrollada en Río de Janeiro en octubre del 2009 y a México como la segunda sede. Las autoridades electas para el Consejo fueron: João Batista Garcia Canalle (Presidente), Julio Blanco (Vicepresidente) y Olga Hernández de la Fuente (Secretaria) [2].

Fue estipulado que la OLAA sería organizada anualmente por el Consejo de los Países Miembros, y los participantes serian los estudiantes secundarios de dichos países. Los objetivos principales de la OLAA son [3]:

- el fomento entre los jóvenes del estudio de la Astronomía, la Astronáutica y las ciencias afines;
- la promoción del intercambio de actividades, la comunicación de conocimientos y el espíritu de convivencia pacífica entre los participantes;
- el apoyo a las actividades de las diferentes asociaciones de aficionados y/o alumnos de con el fin de promover los vínculos de amistad e intercambio de conocimiento;
- el apoyo de la construcción de observatorios, museos de ciencias y la inclusión curricular de la astronomía en los países. De esta forma la OLAA fue constituida para ser un evento netamente educativo [3].

El concepto fundamental de la OLAA es el fomento del honor, la disciplina, la humildad y el cooperativismo entre los participantes, estimulando la parte técnico-científica [3]. Dentro de este contexto, fue pensado que las pruebas deberían estar constituidas por una parte escrita, una parte observacional y otra parte experimental, todas basadas en una relación de contenidos previamente establecida; y que las pruebas deberían ser realizadas algunas en forma individual, otras por delegaciones y otras por equipos formados por alumnos de distintos países. Esto último de forma a estimular la integración regional y la amistad entre los participantes. Estas particularidades conceptuales hacen que la OLAA sea única como elemento motivador de integración y de trabajo mancomunado para el trabajo científico cooperativo entre los participantes.

Muchas personas han colaborado para ser realidad la OLAA, ciertamente no todas fueron nombradas en este texto. Una nomina de las personas que han colaborado puede ser encontrada en el sitio oficial de la OLAA: http://www.olaa.pro.br/index.html.

2.1. La relación de contenidos de la OLAA.

Los contenidos fueron estructurados de forma a otorgar al alumno una visión espacial y capacidad de manipulación de datos (tablas y gráficos), para ello el lenguaje físico - matemático tiene un papel importante dentro del esquema de la Olimpiada. El otro punto importante es el estimulo a la creatividad y la capacidad de realizar cálculos aproximados y al raciocinio conceptual [4].

Los contenidos son organizados en los siguientes grupos:

- Historia e Epistemología.
- Conocimientos sobre la Tierra, Luna y Sol.
- Astronomía fundamental.
- Mecánica celeste.
- Astrofísica.
- Cosmología.
- Medidas e Instrumentos Astronómicos.

2.2. La primera Olimpiada Paraguaya de Astronomía y Astronáutica.

De forma a que los representantes de los países participen en la OLAA, en cada país se realizó una clasificación. En el caso paraguayo, para la clasificación fueron usados los resultados de la Primera Olimpiada Paraguaya de Astronomía y Astronáutica organizada por el Nodo Nacional del AIA 2009 Capítulo Paraguay [6], con el total apoyo de OMAPA [7], bajo la supervisión organizacional de Gabriela Gómez Pasquali y Rodolfo Berganza. El material base para la competencia, fue trabajado conjuntamente por Waldemar Villamayor Venialbo y Rodolfo Berganza, en base a los temas que se desarrollan dentro del plan curricular de ciencias en las escuelas y colegios del país. El examen fue realizado el sábado 12 de setiembre en la Universidad Autónoma de Asunción. Los clasificados que conformaron el primer equipo olímpico paraguayo para la OLAA fueron, los titulares: Iván Torales, Yuliana Viterbori, Federico Krauch, Santiago Noto, Mariana Noto, y suplentes: Carmen Sánchez y Marcelo Martínez.

Un punto importante a resaltar es que los estudiantes estuvieron muy motivados después de la clasificación local, y este estímulo los llevo a participar sin ausencias de las clases preparatorias y complementarias para la OLAA. Estas clases fueron necesarias ya que el plan curricular normal secundario, a pesar de contener gran parte del programa, se encuentra resumido y diseminado en varias materias del programa. Era importante aglutinarlas, profundizarlas y completarlas en un temario organizado para que los alumnos tengan mayor comprensión de los temas que serían abordados en la olimpiada.

Todo el proceso de preparación, así como la experiencia paraguaya en la OLAA, muestra que las olimpiadas competitivas son un instrumento importante para motivar y estimular el despertar el interés científico de los jóvenes. Sin duda este concepto puede ser extraído de otras olimpiadas más consolidadas y antiguas como la Olimpiada de Matemática[3]. La competencia como elemento motivador juvenil es un instrumento que debe ser adecuadamente explorado y la participación de eventos ya sea de carácter nacional o internacional, brinda un estimulo adicional fuerte.

Aprendimos que con los jóvenes dos factores deben ser adecuadamente trabajados: el control de la ansiedad y la administración de la frustración. El primero juega un rol importante en los momentos del aprendizaje y en la concentración durante la prueba. En varios casos el éxito depende más de este factor que del conocimiento. El manejo de la frustración por su parte, es importante especialmente para aquellos alumnos que por algún motivo, mismo con puntajes altos, no fueron clasificados para la representación nacional. La administración de la frustración es un punto que debe ser considerado y que si es manejado convenientemente, se convierte en un factor importante en la formación de la personalidad positiva del alumno.

3. Conclusiones.

Con el pretexto de la astronomía se ha realizado numerosos eventos de difusión científica y cultural. Se observa que esto ha contribuido positivamente en las comunidades, mismo que en algunos casos los eventos necesiten mayor contenido científico. Se nota que es un buen comienzo e inclusive la discusión sobre la importancia de la ciencia comienza a tener un espacio en la agenda nacional y regional. El trabajo cooperativo entre las organizaciones ha sido fundamental para la realización de los eventos y la implantación del concepto de la necesidad de la ciencia como camino para el desarrollo y la inclusión social.

Desde el punto de vista educativo se ha constatado la necesidad de incorporar más ciencia dentro de los programas curriculares y de ferias competitivas e integrativas de ciencia, como elementos motivadores de la creatividad.

Agradecimientos.

Los autores agradecen a Waldemar Villamayor Venialbo por informaciones y sugerencias acerca de las publicaciones relacionadas al Padre Buenaventura Suárez.

Referencias

[1] Año Internacional de la Astronomía, *Unión Astronómica Internacional* - UAI AIA2009, ESO/ESA/ST-ECF, Alemania. http://www.astronomy2009.org/general/about/goals/

[2] Julio Blanco, Informe No1, *Olimpiada de Astronomía y Astronáutica*, octubre 2008. http://www.olaa.pro.br/informes.html

[3] OMAPA tiene una antigüedad de 20 años.

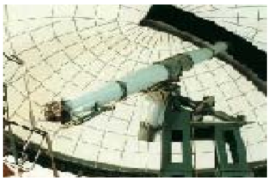
[3] Consejo de Delegados de los Países Miembros, Estatuto de la Olimpiada Latinoamericana de Astronomía y Astronáutica, *Olimpiada de Astronomía y Astronáutica*, octubre 2008. http://www.olaa.pro.br/regulamento.html
[4] Relación de Contenidos, *Olimpiada de Astronomía y Astronáutica*, 2009. http://www.olaa.pro.br/regulamento.html
[5] Buenaventura Suárez Garay, Lunario de un siglo, *Francisco da Silva Printer*, 2nd Edition, 1748.
[6] Nodo Nacional Paraguayo, Año Internacional de la Astronomía 2009. http://www.astronomia2009.org.py/; http://www.astronomy2009.org/
[7] Olimpiadas Matemáticas Paraguayas; Organización Multidisciplinar de Apoyo a Profesores y Alumnos – OMAPA, http//www.omapa.org.py/
[8] International Year of Astronomy 2009, Unión Astronómica Internacional, http://www.iau.org/public_press/news/detail/iau0914/
[9] Alonso, L. (2009) Galileo Legado genuino y mito histórico. Investigación y Ciencia, Scientific American, NY., 94-96.

Miguel A. Volpe, es Ingeniero Civil por la Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas de la Universidad Nacional de Asunción-Paraguay, Profesor Titular de la Cátedra de Electricidad y Magnetismo de la Facultad de Ingeniería; Vicepresidente de la Sociedad Científica del Paraguay; Miembro del CONACYT; contacto con la UAI; Coordinador del Nodo Nacional Paraguayo para el AIA2009; Miembro del Comité Científico de la Liga Iberoamericana de Astronomía y Presidente del Club de Astrofísica del Paraguay (www.cpia.org).
e-mail: **mvolpe@cpia.org**

Christian E. Schaerer, es Ingeniero Electromecánico por la Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas de la Universidad Nacional de Asunción-Paraguay. Realizó estudios de Maestría y Doctorado en Ciencias en la Universidad Federal de Río de Janeiro, Brasil, y Postdoctorado en Matemática en el IMPA. Actualmente Presidente de la Sociedad Matemática Paraguaya y Miembro del Nodo Nacional Paraguayo para el AIA2009. Dirección de contacto: Politécnica, Universidad Nacional de Asunción.
e-mail: **cschaer@pol.una.py**

UNIÓN
REVISTA IBEROAMERICANA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA

Diciembre de 2009, Número 20, páginas 113-116
ISSN: 1815-0640



MONOGRÁFICO ASTRONOMÍA

Astronomía y Matemáticas

Alberto Castellón Serrano

En ocasiones se olvida que son dos las efemérides que se celebran en este 2009, declarado Año Internacional de la Astronomía (AIA/IYA 2009). Aunque ambas acontecieron hace cuatro siglos, una de ellas disfruta de mayor difusión. Por un lado, Galileo apuntó por primera vez al cielo con un anteojo fabricado por él mismo. Provisto de ese nuevo aparato, el científico pisano contempló un universo muy distinto al aceptado hasta entonces. El Sol y la Luna no eran discos perfectos. En el primero se advertían manchas. En el segundo, cráteres, montañas y mares. Tampoco Saturno adoptaba la forma ideal de un círculo pues se distinguían en él un par de abultamientos antípodas. Galileo Galilei (1564-1642) se dio cuenta de que el aspecto blanquecino y uniforme de la Vía Láctea se debía a una gran aglomeración de estrellas. Y otras de sus observaciones dotaban de credibilidad al modelo heliocéntrico propuesto por Copérnico (1473-1543), a saber: Venus pasaba por un ciclo completo de fases, y alrededor de Júpiter giraban cuatro astros. Así, mientras que las fases de Venus solo se explicaban concibiendo su órbita centrada en el Sol, la existencia de satélites en Júpiter despojaba a la Tierra del privilegio de ocupar el centro del cosmos.

Mas si estos descubrimientos revolucionaron a la astronomía, aquel 1609 se produjo otro hecho crucial para el desarrollo de la ciencia. Se trataba de un logro matemático de primera magnitud: Johannes Kepler (1571-1630), tras una década de investigaciones, publicaba *Astronomía nova*. En esta obra se muestran dos resultados rotundos a los que se conoce como *primera ley de Kepler* y *segunda ley de Kepler*. (La tercera apareció diez años más tarde en *Harmonice mundi*.) Conviene aquí recordar sus enunciados:

Primera ley: Los planetas se mueven según órbitas elípticas que tienen al Sol como uno de sus focos.

Segunda ley: El radio que une un planeta con el Sol barre áreas iguales en tiempos iguales.

Tercera ley: Los cubos de los radios medios de las órbitas de los planetas son proporcionales a los cuadrados de los tiempos que invierten en recorrerlas.

Estas tres sentencias describían y cuantificaban las evoluciones de las llamadas *estrellas errantes*. Además, permitían calcular con precisión las posiciones que ocuparían los planetas en la esfera celeste a una fecha dada. Por ejemplo, Kepler consiguió predecir tránsitos de Venus y Mercurio por delante del disco solar, aunque no vivió lo suficiente como para presenciarlos. Así mismo comprobó, teniendo en cuenta los tres modelos cosmológicos que se debatían en la época (el de Ptolomeo, el de Copérnico y el de Brahe), que los datos observacionales cuadraban con los calculados si se presuponían las leyes anteriores.

Porque hasta la genialidad de Kepler, no se concebían otras órbitas para los planetas que las circulares (o epiciclos compuestos a partir de circunferencias). Imposible que la inteligencia del Creador hubiera recurrido a trayectorias más imperfectas que la circunferencia. Sin embargo, la matemática griega ya había aportado toda una teoría acerca de estas curvas, no por impuras, menos esbeltas. Apolonio de Perga, quien nació alrededor del 262 a. de C., tuvo en su tiempo reputación como excelente astrónomo, pero alcanzó en realidad la fama por su tratado sobre *Secciones cónicas*, del que nos han llegado 7 de sus 8 libros. Apolonio adoptó los nombres *elipse*, *hipérbola* y *parábola* de los antiguos términos pitagóricos para la aplicación de áreas.

La situación resulta pues sorprendente. En efecto. Cabe imaginar a un Kepler que anhela corroborar las propuestas copernicanas por medio de las matemáticas, que logra hacerse con las valiosísimas *Tablas rudolfinas*, minuciosas y precisas medidas de la posición de Marte compendiadas por Tycho Brahe (1546-1601) gracias al imponente círculo mural de su castillo de Uraniborg. Cabe imaginar al matemático alemán reconstruyendo la órbita del planeta bajo la hipótesis circular, desechándola por no concordar sus cálculos con las mediciones reales, probando después con distintos tipos de óvalos, rechazándolos por la misma causa… En definitiva, diez años de rastreo de una pieza que, al fin, se logra cazar al rescatar de los textos clásicos a aquellas cónicas estudiadas dieciocho siglos atrás por Apolonio. En verdad que resulta sorprendente. Porque, con anterioridad a este hito de la ciencia, las cónicas no pasaban de un ejercicio teórico sin soporte material. Bello, eso sí, mas poco o nada práctico. Obviando la leyenda de los espejos parabólicos supuestamente construidos por Arquímedes para incendiar los barcos romanos que asediaban Siracusa, hasta el movimiento balístico investigado por Galileo, o el discurrir de los planetas alrededor del Sol, no se apreciaban cónicas en la naturaleza. De ahí que deba sorprender la anticipación de un soporte matemático para describir lo que acontece el mundo real.

No obstante, si se reflexiona algo más, tampoco habría de extrañar tanto semejante circunstancia. Roger Penrose (1931) clasifica a las teorías físicas en tres grupos: soberbias, útiles y tentativas. Y no duda en encuadrar a la geometría euclídea en el primero. Según Penrose, el formidable edificio axiomático construido por Euclides en *Los elementos* nació con vocación de modelo cosmológico. Recuérdese, si no, el origen de la palabra *geometría*. Además, la anticipación mencionada más arriba habría de repetirse con frecuencia a lo largo de la historia. De una persecución esencialmente estética, como fueron los sucesivos intentos de deducción del axioma de la paralela a partir de los otros cuatro, nació la *geometría no euclídea*, conocida hoy también como *lobatchewskiana* o *hiperbólica*. Nada más lógico que quien primero la sistematizara como teoría nueva, K. F. Gauss (1777-1855), se decidiese a comprobar sobre el terreno si el cosmos se ajustaba o no al patrón euclídeo. Apasiona el relato en el que el príncipe de las matemáticas aborda la medición de los ángulos de un gran triángulo con vértices en las cumbres de los montes alemanes Hohenhagen, Inselberg y Brocken. Incluso diseñó un aparato cuya precisión solo ha sido superada en tiempos recientes por los teodolitos provistos de láser. El curso normal de la investigación matemática habría de llevar al genial Rieman (1826-1866) a establecer las bases de la geometría de variedades y generalizar el problema con nuevas herramientas. Fue el matemático húngaro Marcel Grossmann (1978-1936) quien introdujo a Einstein en tales técnicas y colaboró con él en la consecución de la teoría de la relatividad general. (Se cuenta que Einstein (1879-1955) se pasó la vida quejándose de que necesitaba saber más matemáticas.) Lo importante de este asunto es que de nuevo, y sin pensarlo, se había establecido con antelación un soporte matemático eficaz para modelar el universo.

En la actualidad hay un gran número de matemáticos que trabajan en esta línea, llamada *geometría de Lorentz*, y colaboran con lo físicos en cuestiones cosmológicas. La astrofísico Janna Levin (1968) describe con humor las diferentes mentalidades de unos y otros. Según ella asevera, los matemáticos, al estar desprovistos de prejuicios empíricos, se atreven a aventurar hipótesis que jamás formularía un físico, y que con frecuencia se convierten en la clave buscada.

Hasta aquí se han expuesto algunos casos en los que se evidencian las relaciones entre astronomía y matemáticas. Por supuesto que no son los únicos. Sabido es que la matemática, al margen de su carácter de ciencia independiente, da soporte a la mayoría de las disciplinas, ya científicas, ya de humanidades o de otro tipo. Incluso las partes de la matemática que en principio se creían no contaminadas de aplicaciones prácticas resultan a la postre útiles para resolver problemas insospechados. (Se han vivido ejemplos recientes con la teoría de categorías o la topología general, eficaces ambas en el estudio de la semántica denotacional de los lenguajes de programación, o la teoría de números subyacente a la criptografía.) Mas, en el caso de la astronomía, el matrimonio interdisciplinar se produce desde sus mismos inicios. Raro que en la biografía de un astrónomo histórico no se lea "astrónomo y matemático". Ya sea en astronomía de posición, en mecánica celeste, en astrometría o en cosmología, las matemáticas inundan tanto los fundamentos como los métodos utilizados. Y en astrofísica, la matemática ocupan el papel que le corresponde como herramienta instrumental de la física.

Recíprocamente, la astronomía ha espoleado por su parte a la matemática, la ha urgido a desarrollar lo que le hacía falta, logaritmos, técnicas de cálculo, modelos teóricos, trigonometría esférica… En este punto, no ha de sorprender que en medio de los razonamientos de Kepler, Galileo, Copérnico o Newton se encuentre un nuevo teorema de geometría sintética que ha necesitado su autor para proseguir con el discurso. Se recomienda al lector que hojee, aunque solo sea por satisfacer la curiosidad de cómo se argumentaba entonces, los textos originales de aquellos gigantes de la astronomía…, y, por descontado, de las matemáticas.

Bibliografía

Eves, H. (1969), *Estudio de las geometrías*, Unión Tipográfica Editorial Hispano Americana, México.

Hawking, S., (2003)*A hombros de gigantes*, Crítica, Barcelona.

Levin, J., 2002*Cómo le salieron las manchas al universo*, Lengua de trapo, Madrid.

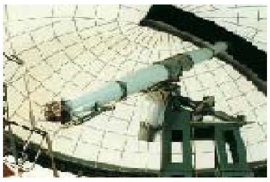
Penrose, R., 2006*La nueva mente del emperador*, DeBOLS!LLO, Barcelona,

Schoolz, E., *Gauss, Carl F.,* 2005. *El "gran triángulo" y los fundamentos de la geometría*, Gaceta de la Real Sociedad Matemática Española, Vol. 8, Nº 3, , págs. 683-712

Alberto Castellón Serrano: escritor, astrónomo aficionado y profesor titular de álgebra de la Universidad de Málaga

REVISTA IBEROAMERICANA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA

Diciembre de 2009, Número 20, páginas 117-125
ISSN: 1815-0640



MONOGRÁFICO ASTRONOMÍA

¿Qué vemos cuando vemos?
Respuestas sencillas para preguntas frecuentes sobre astronomía.

Raquel Márquez; Martín Chaktoura

Resumen

La Astronomía es una ciencia afín a la Matemática. De hecho, muchos profesores de Matemática somos también profesores de Astronomía. Más de una vez, en nuestro quehacer docente, nos encontramos con preguntas de los chicos referidas a cuestiones astronómicas. Algunas de las más célebres son: *¿Qué son las estrellas fugaces? ¿Cómo se forma el arco iris? ¿Por qué el cielo es azul?*
El objetivo de este artículo es acercar herramientas a los docentes para satisfacer éstas y otras inquietudes de sus alumnos, y a la vez incentivar el entusiasmo por esta ciencia.

Abstract

The Astronomy is a science akin to the Math. In fact, many teachers of Mathematics are also teachers of Astronomy. More than once, in our work as teachers, we are faced with questions of the kids dealing with astronomical issues. Some of the most famous are: *What are the shooting stars? How is a rainbow formed? Why is the sky blue?*
The objective of this paper is to bring tools to teachers to satisfy these and others concerns of their students, and at the same time encourage the enthusiasm for this science.

Resumo

A Astronomía é uma ciência afín à Matemática. De facto, muitos professores de Matemática somos também professores de Astronomía. Mais de uma vez, em nosso quehacer docente, encontramos-nos com perguntas dos garotos referidas a questões astronómicas. Algumas das mais célebres são: ¿Que são as estrelas fugaces? ¿Como se forma o arco íris? ¿Por que o céu é azul?
O objectivo deste artigo é acercar ferramentas aos docentes para satisfazer estas e outras inquietudes de seus alunos, e ao mesmo tempo incentivar o entusiasmo por esta ciência.

1. Introducción

Hace dos años, las Naciones Unidas proclamaron al 2009 como el Año Internacional de la Astronomía. Esta iniciativa de la Unión Astronómica Internacional y de UNESCO tiene como motivo la conmemoración del aniversario número 400 de la presentación del telescopio ante el Senado de Venecia, por el científico italiano

Galileo Galilei. En Argentina, así como en varios países del mundo, se organizaron festejos y actividades especiales alusivas a esta área del conocimiento.

En este contexto, como *Organizadores, Expositores y Telescopistas* a cargo de la alfabetización astronómica de un poco más de tres mil personas durante el pasado mes de enero en la provincia de San Luis (Argentina)[1], hemos notado que la mayoría de la gente con la que tratamos, independientemente de sus antecedentes culturales y formación académica, coincidían en ciertas preguntas astronómicas, todas ellas de aparente simpleza, pero cuya respuesta distaba mucho de serlo.

Por tal motivo, nos ha parecido bien compartir con la comunidad docente algunas de las inquietudes que surgieron durante las mencionadas charlas de divulgación científica junto con algunas propuestas para responder a las mismas de forma sencilla, con el objeto de acercarlos más a esta ciencia.

2. Algunas de las preguntas frecuentes

Como mencionamos anteriormente, en las charlas de divulgación científica surgieron toda clase de inquietudes, que se traducen en preguntas del tipo: ¿Por qué el cielo es azul? ¿Qué son las estrellas fugaces? ¿Cómo se forma el arco iris? ¿Sale siempre el sol por el Este? ¿Qué mide el año luz? ¿Son infinitas las estrellas? ¿De qué color son las estrellas ¿Cómo se forman las estaciones? ¿Por qué la Luna no se cae? ¿El Sol es la más grande de las estrellas? ¿Por qué se forman las estaciones? ¿Hace más frío cuando nos alejamos del Sol? ¿Por qué se producen las fases de la Luna? ¿Son cuatro? ¿Por qué se producen los eclipses? ¿Por qué no hay todos los años? ¿Por qué la Luna se ve más grande y amarilla cuando está más cerca del horizonte? ¿Es porque está más cerca? ¿Qué son los signos del zodíaco? ¿Por qué son 12? ¿Son 12? Si los chinos están abajo nuestro, ¿Por qué no se caen? ¿Por qué a veces se ve la Luna de día? ¿Qué es el Lucero de la Mañana? ¿Es una estrella? ¿Todo lo que brilla en el cielo son estrellas? ¿El Sol es de fuego? ¿Qué se está quemando? ¿Se va a apagar el Sol? ¿Qué es el cielo? ¿Se puede tocar?

El 27 de agosto, ¿Marte se va a ver tan grande como la Luna? ¿Por qué el agua gira en distinto sentido en el hemisferio norte?

A continuación desarrollaremos tres de esas preguntas frecuentes[2].

- ***¿Qué son las estrellas fugaces?***

Durante siglos fueron objeto de admiración; sinónimos de buen augurio. Aunque se desvanecen en solo unos segundos, no es raro escuchar a alguien pedirle que le cumpla tres deseos. Nos referimos a esos intensos puntos luminosos que algunas noches vemos cruzar rápidamente una parte del cielo. Debido a su

[1] En el Proyecto Provincial "San Luis Coelum", llevado adelante mediante la Universidad de La Punta, en el marco de las acciones que realiza el gobierno de esa provincia Argentina como aporte a los festejos por el "Año Internacional de la Astronomía", en el que estuvimos a cargo de la alfabetización astronómica de los residentes y turistas de las ciudades de Juana Koslay, El Trapiche y Villa Mercedes.

[2] Las siguientes preguntas son una selección de las que presentamos en el Panel *"¿Qué vemos cuando vemos? Respuestas sencillas para preguntas frecuentes sobre astronomía"*, durante la VIII Conferencia Argentina de Educación Matemática (CAREM) organizada por la Sociedad Argentina de Educación Matemática (SOAREM) desarrollada en Buenos Aires del 8 al 10 de octubre de 2009.

pequeño tamaño e intenso brillo no es extraño que se piense que son estrellas cayendo a la tierra, por lo que se los suele llamar “estrellas fugaces”.

Fig. 1 Imagen artística de una estrella fugaz

Fig. 2 Ejemplo de un bólido

Pero lejos de ser estrellas, son en realidad *meteoros extraterrestres*, es decir, pequeños trozos de roca, algunos tan pequeños como granos de arena, que están diseminados por el espacio moviéndose a gran velocidad. Cuando esas partículas de polvo entran en nuestra atmósfera terrestre, el roce con el aire hace que se quemen rápidamente emitiendo luz y provocando ese efímero y a la vez hermoso trazo brillante característico.

Hay épocas en el año en que el número de estrellas fugaces que podemos ver es mucho mayor. Este fenómeno se conoce como *lluvia de estrellas fugaces* o *lluvia de meteoros* y ocurre cuando la Tierra atraviesa la que fuera la órbita de algún cometa.

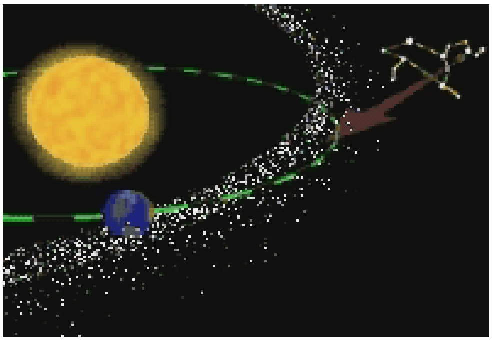


Fig. 3 Las Leónidas deben su nombre a que el punto radiante pertenece a la constelación de Leo.

Fig. 4 Esta imagen de las Leónidas es una composición digital de 22 fotogramas diferentes, tomadas en 2001 en Australia. El punto radiante se observa en la parte inferior derecha de la imagen

Dado que los restos de las partículas cometarias que los forman permanecen en el espacio después que éstos han pasado, cada vez que el planeta cruza o se acerca a dichas franjas, se produce una lluvia de meteoros. Desde la superficie terrestre se observan lluvias e incluso, en ocasiones especiales, tormentas de más de miles por hora[3].

[3] Los cometas están compuestos de hielo y polvo. Cada vez que un cometa se acerca al sol, el hielo se sublima y libera las partículas, quedando éstas en la órbita del cometa.

Si prestamos atención una de esas noches, los meteoros parecerán proceder de un mismo punto del cielo, llamado radiante, aunque eso se debe a un efecto de perspectiva; por esa razón, se bautiza a la lluvia de meteoros con el nombre de la constelación en la que se ubica su radiante.

Así, en agosto vemos que las Perseidas parecen surgir de Perseo y en noviembre las Leónidas, de la constelación de Leo.

Casi todas las partículas se destruyen al atravesar la atmósfera. Algunos de estos meteoros son tan brillantes que pueden verse incluso de día. En ese caso reciben el nombre de *bólidos*. Y los meteoros que fueron tan grandes que no llegaron a desintegrarse en la atmósfera, sino que alcanzan la superficie terrestre, reciben el nombre de *meteoritos*.

- ***¿Cómo se forma el arco iris?***

Es uno de los fenómenos atmosféricos más conocidos. Solo basta con que se den las condiciones necesarias para poder observar ese espectáculo. ¿Cuáles son esas condiciones?

En principio, para responder esa pregunta, debemos establecer algunas nociones previas que tienen que ver con la naturaleza de la luz y un fenómeno físico llamado refracción.

Si desplegamos los colores de la luz blanca que nos llega del Sol, aparece un continuo de diferentes longitudes de onda que van desde el rojo hasta el violeta, dependiendo de la frecuencia de cada uno.

Fig. 5 Arco iris.

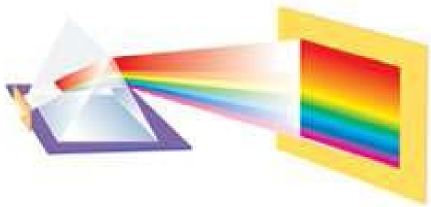


Fig. 6 Esquema de la refracción de la luz.

Se sabe que si se hace incidir un rayo de luz blanca a través de un prisma, éste se refracta y emerge desplegando todos los colores que la componen. Si prestamos atención a la disposición de los rayos emergentes notaremos que la dirección de cada uno de éstos cambia respecto de la dirección de su correspondiente en el rayo incidente.

Comparando las direcciones de cada rayo, con respecto a la dirección de la luz blanca incidente, notaremos que el rayo que más ha cambiado de dirección al refractarse, es el violeta. Asimismo, la mínima refracción se observa en los rayos rojos.

Comprender el fenómeno de la refracción de la luz nos ayudará a comprender por qué se forma el arco iris y cuáles son las condiciones necesarias para su formación.

Para que exista un arco iris tiene que haber gotas de agua suspendidas en la atmósfera, ya sea debido a una lluvia, a unas cataratas o a la rociadura de una manguera de jardín. Sólo bastará ubicarse de modo tal que el Sol quede a nuestra espalda pero ilumine las innumerables gotas de agua, que actúan como diminutos prismas y espejos.

Cuando un rayo de luz entra en cada gota, se refracta y se descompone en todos los colores del espectro; luego se refleja en la superficie interior de la gota y vuelve a refractarse al salir de la gota al exterior, llegando hasta nuestros ojos. La gota actúa como lo haría un prisma: la primera refracción separa los colores que contiene el rayo de luz y la segunda refracción incrementa aún más esta separación.

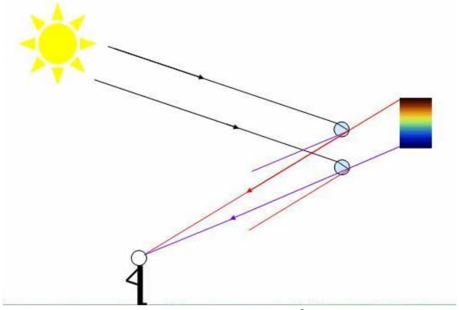


Fig. 7Esquema para la formación de un arco iris.

Fig. 8 Arco iris simple.

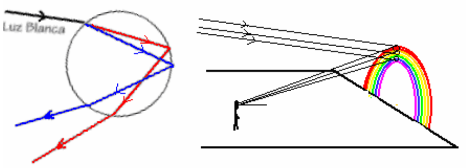


Fig. 9 Esquema para la formación del arco iris primario.

Como la luz de cada color se refracta según un ángulo ligeramente distinto, vemos bandas bien definidas: rojo, anaranjado, amarillo, verde, azul y violeta, siendo ese el orden en el arco iris principal, si contamos desde el exterior al interior. De este modo, la luz nos llega siguiendo los ángulos de refracción desde innumerables gotas esparcidas por el cielo, y como consecuencia vemos el arco iris como una curva continua, que forma un arco de círculo, con su parte inferior cortada por el horizonte. El centro del arco iris se encuentra justo en un punto opuesto al sol, frente al observador y por debajo.

En realidad el número de reflexiones internas puede ser mayor de dos (dependiendo de por donde entra la luz en la gota) y puede dar lugar a la aparición de dos arcos iris: el primario más fuerte e interior y el secundario más débil y exterior.

Fig. 10 Arco iris doble.

La luz que forma el arco iris secundario sufre dos reflexiones, lo que le da mayor ángulo, le resta luminosidad, e invierte el orden de los colores. Como la luz refractada se concentra en estos dos arcos, el espacio entre ellos parece más oscuro que fuera de ellos; a este espacio se le conoce como "**banda de Alexander**".

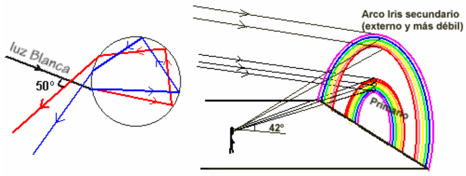


Fig. 11 Esquema para la formación del arco iris secundario.

Bajo ciertas circunstancias, se puede ver desde un avión a gran altura, alguna torre o desde la cumbre de una montaña un arco iris como un círculo completo.

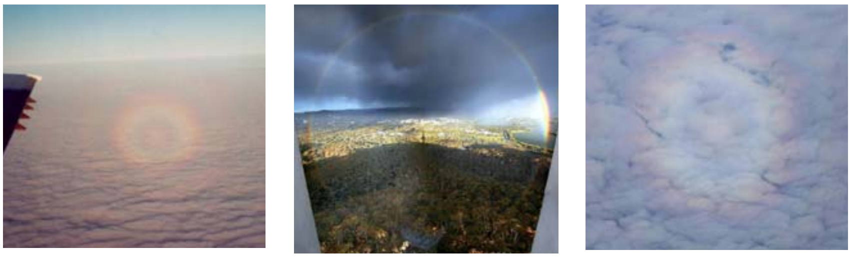


Fig. 12 Ejemplos de arco iris circulares completos

¿Por qué el cielo es azul?

¿Por qué es azul el cielo diurno? Parece ser una pregunta simple, pero en realidad, la respuesta implica aspectos profundos que deben ser tenidos en cuenta, dado que el color del cielo se debe a tres factores: a la *composición de la luz*, a la *atmósfera* y a nuestra *fisiología*.

Fig. 13 Cielo azul celeste.

Entonces, para entender por qué el cielo es azul durante el día, primero debemos saber qué es la luz.

Como todos sabemos, la luz natural en la Tierra proviene de la estrella más cercana a nosotros, el Sol. La luz solar viaja a 300000 km/s en el espacio interplanetario, por lo que tarda aproximadamente 8 minutos y 20 segundos en llegar a nuestro planeta, donde además debe interactuar con la atmósfera terrestre antes de llegar hasta nuestros ojos.

Fig. 14 Imagen del Sol, la estrella más cercana a la Tierra, tal como se observa desde la superficie terrestre.

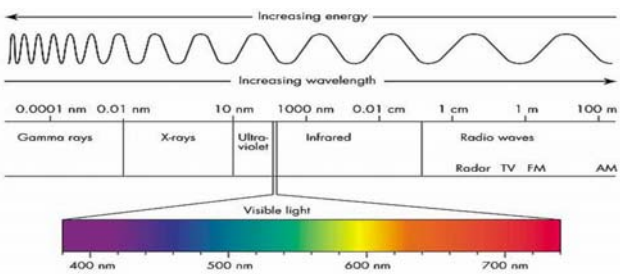


Fig. 15 Esquema del espectro electromagnético.

La luz blanca que vemos es solo una parte de la radiación llamada “espectro electromagnético”, que consiste en todas las diferentes longitudes de onda, que incluye la luz visible, las ondas de radio, los rayos X., etc. La única región del espectro electromagnético a la que nuestros ojos son sensibles es a la luz visible.

Si usamos un prisma podemos descomponer la luz visible en un continuo de colores del arco iris. En un extremo del espectro visible se encuentra el rojo, cuya longitud de onda es la más larga y, por ello, su frecuencia la más baja y en el otro extremo el violeta, cuya longitud de onda es la más corta y, por ello, su frecuencia la más alta.

Ya hemos mencionado que la luz del sol tiene que atravesar la atmósfera para llegar a nosotros, pero ocurre que las minúsculas partículas de polvo y de agua en suspensión que se encuentran en ella, son más pequeñas que las longitudes de ondas de la luz visible, y puesto que no tienen tamaño suficiente para repeler la onda, solamente la desvían ligeramente de su camino original.

Una vez desviados, los rayos azules y violetas interactúan con otras partículas y son desviados nuevamente. Así una y otra y otra vez. Esto se conoce como *dispersión*.

Puesto que las longitudes de onda del extremo azul del espectro, son más cortas, son dispersadas en mayor medida que las del resto de colores, lo que confiere una coloración azul-violácea a nuestro cielo.

Ahora bien, si la longitud de onda del violeta es menor que el azul, y por tanto, es la que más se dispersa, ¿por qué no vemos el cielo violeta?

Aquí es donde entra en juego los órganos de la visión. Ocurre que nuestro cerebro interpreta la frecuencia de las ondas según la información recibida a través de los ojos y de su particular fisiología.

Nuestros ojos poseen unos conos sensibles a solo tres colores: rojo, verde y azul. El resto de colores excita varios tipos de conos a la vez, es decir, podemos obtener el resto de colores a partir de la combinación de esos tres. Aún cuando a la luz violeta le corresponde una longitud de onda más corta que a la luz azul, los ojos del ser humano son más sensibles al color azul que al violeta. Por esa razón y debido al propio efecto de dispersión tenemos la impresión que el color azul del cielo llega hasta nuestros ojos desde todos los puntos y no desde un punto fijo, tal como ocurre cuando observamos el Sol.

Sin embargo, ¿quién no ha disfrutado en una puesta de Sol, ver el disco rojo ocultándose en el horizonte? ¿Por qué se ve el Sol rojo? ¿Qué sucede al amanecer y al atardecer?

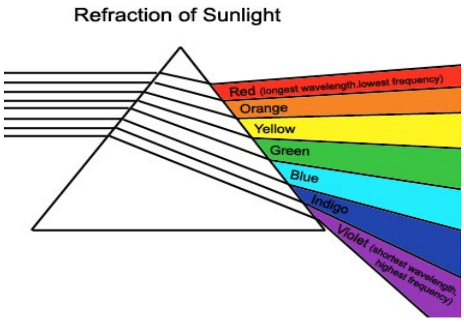


Fig. 16 Esquema de la refracción de la luz.

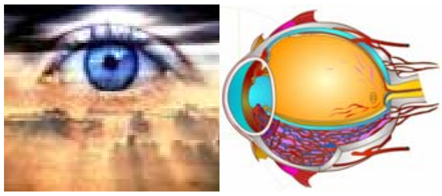


Fig. 17 Representación y esquema del ojo.

Fig. 18 Cielo azulado.

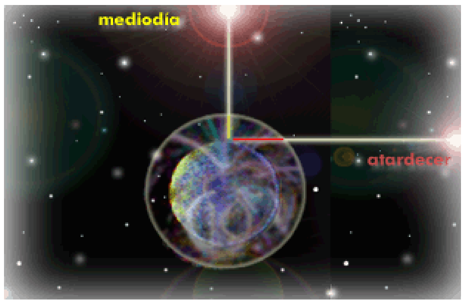


Fig. 19 Esquema de la incidencia de los rayos solares durante los crepúsculos.

Fig. 20 Cielo rojizo del crepúsculo.

Cerca del horizonte, la luz tiene que recorrer mayor distancia y atravesar una parte más densa de la atmósfera, donde hay más partículas de polvo.

Se produce el mismo efecto de dispersión sobre la luz azul, pero la luz azul es incapaz de pasar por la distancia extra y alcanzar nuestros ojos. Solo la luz roja pasa, sin obstáculos por la atmósfera, y llega hasta nuestros ojos en una línea directa, con escasa o nula dispersión. Debido a esto en el amanecer y en el atardecer el cielo se ve rojizo.

3. Reflexiones Finales

La dinámica de trabajar desde las preguntas que plantean los chicos no es casual, sino decididamente intencional. Esto nos garantiza, de alguna manera, *estar en sintonía con sus intereses* y nos da la posibilidad de partir de ellos para incentivar la curiosidad y el entusiasmo por la matemática y la ciencia en general.

Por eso, nos hemos propuesto acercar herramientas a los docentes de escuela media para que puedan aprovechar de manera positiva las inquietudes naturales de sus alumnos por el universo que los envuelve y, por qué no, despertar alguna vocación científica.

Créditos

Fig. 3) Imagen tomada de una animación de Science@NASA
http://www.cientec.or.cr/astronomia/leonidas.html)
Fig. 4) Composición digital de las Leónidas.
http://www.astromia.com/fotostierra/leonidas.htm
Fig. 7, 15 y16) Esquemas de la formación de un arco iris, el espectro electromagnético y la refracción de la luz.
http://www.myuniversalfacts.com/2006/04/how-rainbows-are-formed-what-causes.html
Fig. 9 y 11) Esquemas de la formación de los arco iris primario y secundario.
http://teleformacion.edu.aytolacoruna.es/FISICA/document/fisicaInteractiva/color/arcoIris/ArcoIris.htm

Bibliografía

Feinstein, A; Tignanelli, H. (2005) *Objetivo Universo: Astronomía curso completo de actualización.* Editorial Colihue, Buenos Aires. Argentina.
Hewitt, P. (2008) *Física Conceptual*. Editorial Pearson. México.
Perelman, Y. *Astronomía Recreativa*. Recuperado el 20 de junio de 2009 de http://www.librosmaravillosos.com.

Raquel Márquez. Profesora en Matemática y Astronomía, ISP " Dr. Joaquín V. González". Actualmente se desempeña como Profesora de Matemática y Físico-Química en escuelas medias y técnicas de la Provincia de Buenos Aires, al tiempo que concluye el Curso de Especialización para Profesores en Astronomía en el ISP “Dr. Joaquín V. González”. Presentó un panel en la Conferencia Argentina de Educación Matemática, Buenos Aires este año y ha participado en numerosas campañas de alfabetización astronómicas, destinadas a docentes, estudiantes de profesorado y el público en general. Entre ellas la “Campaña porteña por la recuperación de la latitud. La ciudad da vuelta el mundo”, por el Ministerio de Educación de la Ciudad de Buenos Aires, y el proyecto provincial San Luis Coelum, a cargo de la Universidad de la Punta. e-mail: **raquel_marquez1@yahoo.com**

Martín Chaktoura. Profesor en Matemática y Astronomía egresado del Instituto Superior del Profesorado "Joaquín V. González". Actualmente se desempeña como Profesor de Matemática en el Colegio Northlands, en sus sedes de Olivos y Nordelta, al tiempo que concluye sus estudios de grado en matemáticas. Es tres veces ganador del Certamen Nacional Número de Oro, organizado por la Olimpíada Matemática Argentina. Interesado en la difusión de la Astronomía, presentó un panel en la Conferencia Argentina de Educación Matemática (2009) y trabajó en calidad de docente invitado como expositor y telescopista en el proyecto San Luis Coelum. e-mail: **martin_chaktoura@yahoo.com.ar**

REVISTA IBEROAMERICANA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA

Diciembre de 2009, Número 20, páginas 127-129
ISSN: 1815-0640

MONOGRÁFICO ASTRONOMÍA

Dinamización matemática

Un aporte astronómico a la enseñanza de las matemáticas

Gonzalo Vicino

El enfoque dado a la enseñanza de la astronomía, en el bachillerato, es por cierto bien diferente al de las matemáticas. La astronomía es una “ciencia natural” en el sentido amplio: busca explicar los fenómenos de la naturaleza, y para ello, fieles al método galileano, se hace necesario observarlos, formular hipótesis explicativas, contrastarlas con nuevas observaciones o experimentos, y por último generalizar los resultados mediante la enunciación de leyes generales.

Las matemáticas, por el contrario, van a la abstracción de conceptos tales como los números naturales, los números reales, los imaginarios, las geometrías, etc.

Es fácil constatar que a los adolescentes, con innata incapacidad para la abstracción, y más aún en esta era de las imágenes (que valen más que mil palabras, según un conocido proverbio chino) la comprensión de muchos conceptos matemáticos se hace muy difícil, cuando no imposible. En la etapa escolar, la aritmética puede materializarse con ejemplos ingenuos, como aquello de “sumar 3 naranjas con 5 manzanas”. Pero frente a una ecuación de segundo grado, no hay materialización posible.

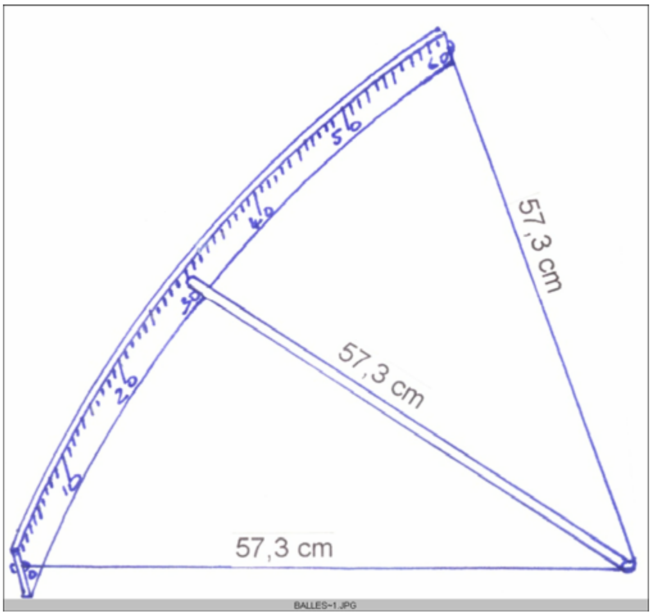
Hay algunos puntos, sin embargo, en que la enseñanza de la astronomía, valiéndose de recursos matemáticos, ayuda a la comprensión de algunos temas de esta ciencia exacta.

Durante los años en que ejercí la Inspección de Astronomía del Consejo de Educación Secundaria, intenté poner en práctica algunas ideas de lo que di en llamar “Didáctica del Aprendizaje Activo”. Esto es: hacer del estudiante un participante activo de su educación. Esto implica hacerle observar los fenómenos naturales, y no librarlos a leerlos en libros; y hasta construir sus propios instrumentos de observación: el desarrollo de la actividad manual es muy estimulante en los adolescentes.

Sumergidos en los distractivos ajetreos de la vida moderna, y más aún en medio del ruido de las ciudades, los estudiantes no suelen mirar el cielo, y si lo hacen, desconocen lo que allí se les muestra.

Nuestros profesores debían entonces guiar a los estudiantes a la observación de los movimientos de los planetas, de la Luna y del Sol, por ejemplo. Y para observar movimientos en el cielo, les enseñábamos a construir pequeños aparatos, tales como la ya clásica “ballestilla”, que permite a los jóvenes medir ángulos en el cielo, y a través de estas mediciones, establecer sus movimientos.

Este instrumento es un simple arco de madera compensada, o de durabor, graduado en centímetros (para facilitar su construcción), que es sostenido en la mano, apoyando un mástil (que es un radio del arco) en la mejilla del observador. Dadas las dimensiones de este radio, cada centímetro de la graduación es visto con un ángulo de un grado. Se presenta un esquema de este instrumento:



Proyectando esta escala graduada sobre el cielo, se puede leer en grados la separación angular entre dos puntos cualesquiera, por ejemplo: entre dos astros. Y así se pueden medir los movimientos de la Luna, por ejemplo, tomando como referencia las sucesivas distancias de este astro a estrellas fácilmente reconocibles, de día en día.

Pero la ballestilla tiene muchas otras aplicaciones, por ejemplo, cuando se intenta explicar cómo se calculan las distancias de la Tierra a los astros, se debe explicar el método de triangulación trigonométrica, el mismo que emplean los agrimensores o los geodestas para las mediciones de distancias sobre la superficie terrestre.

Y luego de una introducción sobre el fenómeno de la visión binocular (que tiene el mismo principio), resulta muy útil hacer un ejercicio práctico con los estudiantes: en el patio del liceo, o en la cancha deportiva, o en la plaza del pueblo, se fija una base de triangulación, medida con una cinta métrica, y se calcula la distancia hasta un punto fijado de antemano (un mástil, por ejemplo), mediante la medición de dos ángulos desde los extremos de la base. Luego, es un simple ejercicio de trigonometría calcular la distancia entre la base y ese punto fijado.

Generalmente, hacemos la medición con el grupo de estudiantes, y dejamos en el patio a 3 ó 4 de ellos para verificar la medición con la cinta métrica, en tanto volvemos con el resto de los alumnos al salón de clase para hacer el cálculo trigonométrico. Y cuando regresan los “medidores” al salón, cotejamos lo calculado con la medición hecha realmente. A pesar de la rusticidad del método, generalmente el acuerdo es notable, con sólo un pequeño margen de error.

Y da gran satisfacción escuchar, como los he oído muchas veces, a los chicos decir: “ahora entiendo para qué me enseñaron la trigonometría”.

Gonzalo Vicino. Profesor de Astronomía. Ha sido Inspector de la asignatura en el Consejo de Educación Secundaria de Uruguay, Conferencista y encargado de Programación Docente del Planetario Municipal. Autor de numerosos libros de divulgación científica: “Ya está aquí el Cometa Halley”, “Atlas del Cielo”, “Hacia una didáctica de la Astronomía”, “Prácticas de Astronomía”, “Las estrellas”, “Relatividad y Cosmología”. Creador y Director del Observatorio Astronómico Eta Carinae, en Villa Serrana, Depto. de Lavalleja, Uruguay.
e-mail: **galoxdos@adinet.com.uy**

UNIÓN
REVISTA IBEROAMERICANA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA

Diciembre de 2009, Número 20, páginas 131-139
ISSN: 1815-0640

El rincón de los problemas

Uldarico Malaspina Jurado

Pontificia Universidad Católica del Perú
umalasp@pucp.edu.pe

Conteo y pensamiento matemático

Problema

Encontrar diversas maneras de contar los círculos dibujados según la siguiente configuración:

O
O O O
O O O O O
O O O O O O O
O O O O O
O O O
O

Este problema fue presentado por Pessia Tsamir, Dina Tirosh, Esther Levenson, Michal Tabach y Ruthi Barkai en el 33rd Annual Meeting of the International Group for the Psychology of Mathematics Education, que tuvo lugar en Tesalónica, en julio del presente año[1]. Fue muy interesante la experiencia de participar en el Discussion Group *Mathematics and kindergarten teachers. A chalenge to the research community* en el que trabajamos este problema y ahora escribo este artículo divulgando algunas de las soluciones que surgieron y aportando con nuevas ideas.

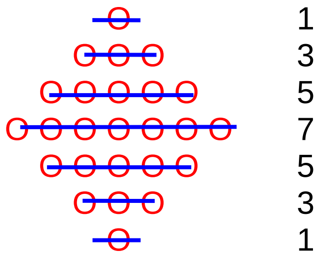
Algunas de las soluciones encontradas

Ciertamente, una forma de contar los círculos – no necesariamente la que primero se le ocurre a las personas – es marcándolos uno por uno y siguiendo un cierto orden. Pero lo interesante es contar los círculos de otra manera, considerando bloques o subconjuntos de círculos con configuraciones similares entre sí, que permitan hacer algunas operaciones aritméticas para obtener el total, teniendo cuidado de descontar en los casos que se cuente dos veces un círculo o un bloque.

Algunas de tales formas fueron:

[1] 2009. In Tzekaki, M., Kaldrimidou, M & Sakonidis, H. (Eds.) *Proceedings of the 33rd Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, Vol. 1, pp. 289-289. Thessaloniki, Greece: PME

I)



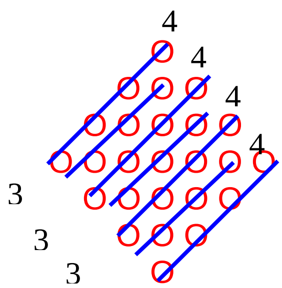
Observando los bloques marcados, tenemos la siguiente expresión aritmética:

1+3+5+7+5+3+1 = 25

Si el conteo se hace observando la simetría y considerando los extremos, se tiene la siguiente expresión aritmética, ciertamente equivalente a la anterior:

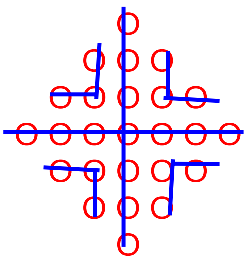
2(1) + 2(3) + 2(5) + 7 = 25

II)



Es claro que se observan 4 bloques de 4 círculos y 3 bloques de 3, y así tenemos:
4x4 + 3x3 = 25

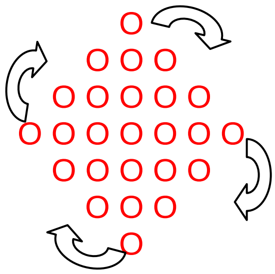
III)



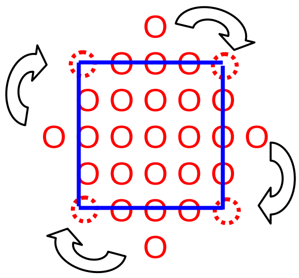
En este caso se suman los círculos de las dos "diagonales" del "rombo", se descuenta el círculo central que está en las dos "diagonales" y se añaden los 4 bloques de 3 círculos cada uno:

7 + 7 – 1 + 4(3) = 25

IV)



Estos "movimientos" nos conducirían a la siguiente configuración



En la que se ve claramente que la configuración rómbica inicial de los círculos, se ha convertido en una configuración cuadrada de **5x5.**

Los lectores quedan invitados a encontrar otras formas de contar estos círculos. ¡Hay por lo menos ocho formas más!

Comentarios

a. Es un problema sencillo, con desafíos a la creatividad ante dificultades que se perciben superables y que invitan a combinar la observación de patrones con criterios geométricos, particiones de un conjunto y operaciones elementales de multiplicación, adición y sustracción. (Esta última, para descontar en los casos que se esté contando más de una vez un círculo o un bloque.)

b. El problema fue propuesto como parte de las actividades de formación matemática para profesores de educación inicial, sin embargo puede ser usado también – como veremos – con profesores de otros niveles educativos y con alumnos de diversos grados de educación primaria, secundaria y superior.

c. Lo interesante del problema es que sin requerir conocimientos matemáticos avanzados, brinda la oportunidad de ejercitar el pensamiento matemático. Ciertamente no es un problema para los niños de educación inicial, pero sí para los niños que todos tenemos dentro, especialmente los profesores y profesoras de educación inicial. Tener este tipo de experiencias matemáticas contribuirá a su propia formación matemática, que es tan importante para "promover el pensamiento matemático entre sus alumnos" (Tsamir, P. et al, en Tzekaki, M. et al, 2009, 1,p.289).

Otras ideas en torno a este problema

1. *De expresiones aritméticas a configuraciones geométricas.*

Hagamos una variante al modo de encontrar nuevas maneras de contar los círculos. Hemos visto que al encontrar formas de contar los círculos, se encuentran también expresiones aritméticas del número 25. Una idea nueva y experimentada con alumnos de secundaria y profesores de primaria y secundaria, es – luego de tener la experiencia de encontrar algunas formas de contar los círculos – escribir una expresión aritmética correspondiente a una configuración geométrica para contar los círculos y tener como reto descubrir tal configuración geométrica u otra que corresponda a la expresión aritmética escrita.

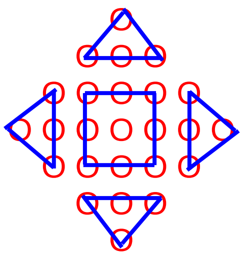
En el taller realizado con profesores de primaria y secundaria, esta situación se presentó en fichas para trabajo grupal. Una de las actividades que se les pidió desarrollar fue la siguiente:

> Carlos, Elsa y María encontraron maneras distintas de contar los círculos, y las expresiones aritméticas correspondientes a tales maneras son las siguientes:
>
> Carlos: ***9 + 4x4***
> Elsa: **7x7 – 4x6**
> María: **3x10 – 2x4 + 3**
>
> Encontrar y explicar las maneras de contar que usaron Carlos, Elsa y María, para llegar a tales expresiones aritméticas.

A continuación resumiré y sistematizaré lo que expresaron los grupos al exponer y mostrar sus gráficos en la pizarra, luego de sus trabajos grupales, en los cuales mis intervenciones fueron principalmente para aclarar dudas y estimular sus iniciativas.

De Carlos: **9 + 4x4**

Se trata de un bloque de 9 círculos y 4 bloques de 4, lo cual sugiere un bloque central y los otros simétricos:

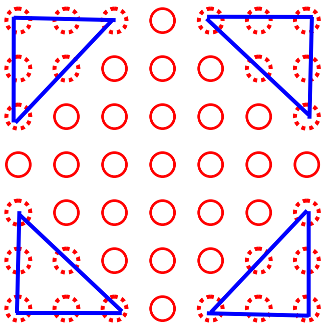


Se tiene así una configuración geométrica con un "cuadrado" central y cuatro "triángulos" ubicados simétricamente.

De Elsa: **7x7 – 4x6**

La expresión sugiere un bloque cuadrado de 7x7 al que se le ha quitado 4 bloques de 6 círculos cada uno. Esto se obtiene añadiendo círculos a la configuración dada hasta conseguir el cuadrado, para luego quitar lo que se ha añadido. (Como se hace muchas veces en álgebra, por ejemplo para factorizar expresiones algebraicas.)

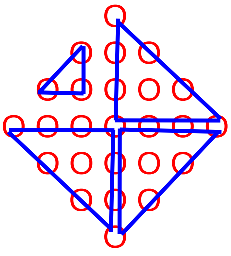
En el gráfico mostramos con trazos discontinuos los círculos que se han añadido para obtener el cuadrado de 7x7:



Podemos ver que se han añadido 4 bloques de 6 y el número de círculos de la configuración inicial es la diferencia entre el número de círculos del "cuadrado grande" (7x7) y el número de círculos de los cuatro bloques de 6 círculos añadidos (4x6).

De Maria: **3x10 – 2x4 + 3**
(Ésta fue la que causó más dificultad a todos los grupos.)

La expresión sugiere 3 bloques de 10, con 2 repeticiones de 4 y 1 bloque de 3. Con esta idea, mostramos la siguiente configuración geométrica con 3 bloques triangulares de 10 círculos cada uno y 1 bloque triangular de 3 círculos.



Las repeticiones en el conteo – que deben descontarse – se hacen evidentes al observar que hay dos casos en los que los "catetos" de dos "triángulos" diferentes pasan por los mismos 4 círculos.

Otra manera de trabajar esta idea es jugando entre grupos: un grupo encuentra una configuración geométrica para hacer el conteo, escribe en un papel la expresión aritmética correspondiente y lo entrega a otro grupo para que descubra la configuración geométrica que le dio origen.

2. *Algunas generalizaciones.*

El problema ofrece interesantes posibilidades de examinar lo general a partir de lo particular. En esa línea, en el taller propuse, por razones de tiempo, solo las siguientes actividades, para trabajos grupales:

> a) Teniendo la configuración dada, ¿cuántos círculos más se deben dibujar para obtener una configuración similar, pero que tenga 6 círculos en cada lado del "rombo"?
>
> b) ¿Cuántos círculos tiene una configuración similar a la dada, con *n* círculos en cada lado del "rombo"?

Ambas actividades fueron desarrolladas sin mayores dificultades. La actividad (a) cumplió el papel previsto de facilitar la actividad (b), sobre todo para los profesores de primaria. Fue muy interesante la interacción entre los miembros del grupo, especialmente en aquellos en los que había profesores de primaria y secundaria.

Se llegó a describir la configuración dada como "4, 3, 4, 3, 4, 3, 4" y la configuración de la actividad (a) como "6, 5, 6, 5, 6, 5, 6, 5, 6, 5, 6". Así, obtuvieron que el número de círculos en esta configuración es 6x6 + 5x5 = 61. Observé satisfacción entre los profesores al verificar empíricamente (contando) que el número de círculos que se deben añadir es 36, que es el mismo que se obtiene "sin contar", al restar 61 menos 25.

Para la actividad (b) se intuyó fácilmente la configuración general como "*n, n-1, n, n-1, ….n-1, n*", considerando *n* veces *n* y (*n*-1) veces (*n*-1), con lo cual, se llegó a la respuesta nxn + (n-1)x(n-1) que naturalmente fue expresada como $n^2 + (n-1)^2$.

3. *Sucesiones y pensamiento recursivo*

A partir de la experiencia desarrollada y pensando más en "sacarle el jugo" al problema, pensé en otras actividades e interrogantes que se pueden proponer, en el marco de las *sucesiones de figuras y de números*. A continuación propongo algunas:

i) Construir los cinco primeros términos de una sucesión de configuraciones rómbicas de círculos, como las que hemos trabajado, de modo que el cuarto término sea la configuración rómbica dada en el problema inicialmente planteado.

ii) Explicar la estrategia que se usa para construir un término de la sucesión de configuraciones rómbicas de círculos, a partir del término anterior de tal sucesión. Por ejemplo, cómo obtener el 5º término de la sucesión, añadiendo círculos al 4º término de tal sucesión.

iii) Explicitar la sucesión de números que resulta de asociar a cada elemento de la sucesión de configuraciones rómbicas de círculos, el número de círculos que tiene cada configuración.

iv) ¿Cuál es el término general de la sucesión de números anterior?

v) ¿Cuántos círculos deben añadirse al término n-ésimo de la sucesión de configuraciones rómbicas de círculos, para obtener el término (n+1)-ésimo? Relacionar esta respuesta con la actividad (ii).

vi) ¿Existe algún término de la sucesión de configuraciones rómbicas de círculos que tenga un número par de círculos? ¿Por qué?

vii) Con una traslación adecuada de algunos círculos, la configuración rómbica de círculos del cuarto término de la sucesión se convierte en una configuración cuadrada de 5x5 círculos (Es la forma **IV** de contar los círculos en el problema inicialmente planteado). ¿Es posible obtener una correspondiente configuración cuadrada para algún otro término de la sucesión de configuraciones rómbicas?

Observemos que en la actividad (vii), a partir de un problema lúdico de conteo, estamos llegando a un problema relacionado con ternas pitagóricas. Así, la forma **IV** de hacer el conteo nos lleva a 5^2, y recordando la forma **II** de hacer el conteo, tenemos $4^2 + 3^2$ y verificamos que $4^2 + 3^2 = 5^2$, que corresponde a la aplicación del famoso teorema de Pitágoras al triángulo rectángulo cuyos catetos tienen longitudes 3 y 4 y cuya hipotenusa tiene longitud 5.

En todas las configuraciones de círculos de la sucesión, tendremos $n^2 + (n-1)^2$ círculos, siendo n el número de círculos que hay en cada lado del "rombo", y entonces la pregunta de la actividad (vii) es equivalente a preguntarse sobre la existencia de ternas pitagóricas con enteros consecutivos correspondientes a los catetos del triángulo rectángulo. El caso $n = 4$ es particularmente interesante, pues siendo 5 el número correspondiente a la hipotenusa, se tienen tres números consecutivos; es decir, un caso en el que se cumple

$$n^2 + (n-1)^2 = (n+1)^2.$$

La pregunta natural es ¿existe otro caso como éste? Buscando una solución a la ecuación, obtenemos fácilmente que $n = 0$ ó $n = 4$. Como 0 no tiene sentido en este contexto, el único valor posible para n es 4, lo cual responde la pregunta planteada. Sin embargo queda pendiente el caso general; es decir, en términos algebraicos, para qué valores de n existe un número entero k tal que

$$n^2 + (n-1)^2 = k^2.$$

Esto lleva a pensar en formas generales de obtener ternas pitagóricas. (p, q, r), con p, q longitudes de catetos y r longitud de hipotenusa. Una de ellas es la siguiente:

Para números enteros positivos arbitrarios, a y b:

$$p = a^2 - b^2$$
$$q = 2\,ab$$
$$r = a^2 + b^2$$

(Es fácil verificar que se cumple que $p^2 + q^2 = r^2$.)

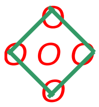
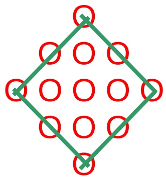
Se puede verificar que con $a = 2$ y $b = 1$ se obtiene la terna pitagórica (3, 4, 5) y que con $a = 5$ y $b = 2$ se obtiene la terna pitagórica (21, 20, 29), lo cual nos dice que en el término 21º de la sucesión de configuraciones rómbicas de círculos, es posible reacomodar los círculos de modo que se tenga una configuración cuadrada de 29x29.

Es claro que el algoritmo presentado no es el mejor para buscar ternas pitagóricas de enteros consecutivos correspondientes a los catetos. Un análisis más general puede hacerse usando ecuaciones de Pell. Para estimular la curiosidad del lector, le dejo la información que 169^2 puede expresarse como la suma de los cuadrados de dos enteros consecutivos.

Otra fuente interesante de problemas y de construcciones matemáticas, es "definir"[(2)] recursivamente la sucesión rómbica de círculos; así, denotando C_n a la configuración rómbica de orden n, "definimos":

C_1 = O (un solo círculo)
C_n = C_{n-1} con un "marco" adicional rómbico de n círculos por lado.

Con esta "definición" se puede ir construyendo la sucesión rómbica:

C_1 = O , C_2 =  , C_3 = 

Se ha destacado con líneas verdes los marcos rómbicos que se añaden al término anterior de la sucesión. Se ve que C_2 es C_1 con el marco rómbico de 2 círculos por lado y que C_3 es C_2 con el marco rómbico de 3 círculos por lado.

Si se denota :

(C_n) = número de círculos de la configuración rómbica de orden n,

se puede definir recursivamente esta sucesión numérica:

$$\#\,(C_1) = 1$$
$$\#\,(C_n) = \#\,(C_{n-1}) + 4n - 4 \quad ^{(3)}$$

(2) Las comillas son porque no damos una definición matemáticamente rigurosa. Un caso conocido de definición recursiva es la definición de *factorial de un número natural* n: $0! = 1$; $n! = n\,(n-1)!$

(3) El número de círculos de la configuración rómbica n-ésima se obtiene añadiendo al número de círculos de la configuración rómbica (n-1)-ésima, el número de círculos del "marco" que tiene la configuración rómbica n-ésima. Este "marco" rómbico tiene n círculos en cada lado, pero realmente son $4n - 4$ círculos, ya que no se deben contar dos veces a los 4 círculos de las esquinas.

Observemos que se pueden ir obteniendo sumas de cuadrados de enteros consecutivos:

$$\#(C_2) = \#(C_1) + 4(2) - 4 = 1 + 4 = 1^2 + 2^2$$

$$\#(C_3) = \#(C_2) + 4(3) - 4 = 1^2 + 2^2 + 8 = 2^2 + 3^2$$

$$\#(C_4) = \#(C_3) + 4(4) - 4 = 2^2 + 3^2 + 12 = 3^2 + 4^2$$

…….

$$\#(C_n) = (n\text{-}1)^2 + n^2.$$

La expresión final es consistente con la obtenida al desarrollar la actividad (b) en el taller con profesores.

Los lectores quedan invitados a hacer talleres, experiencias didácticas e investigaciones a partir de este problema, con las ideas dadas en este artículo y con otras ideas que pueda suscitarles, usando marcos teóricos de la didáctica de las matemáticas. Considero que con la teoría de situaciones didácticas, el enfoque ontosemiótico de la cognición e instrucción matemática (EOS) o la teoría antropológica de lo didáctico, se puede a arribar a conclusiones interesantes.

REVISTA IBEROAMERICANA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA

Diciembre de 2009, Número 20, páginas 141-151
ISSN: 1815-0640
Coordinado por
Agustín Carrillo de Albornoz

Análisis y conclusiones que surgen de la implementación de un taller de Geometría Dinámica para alumnos del Profesorado de Matemática

Teresa del Carmen Facello, Elsa Beatriz Osio

Resumen

El uso de recursos tecnológicos, adecuadamente diseñados, puede guiar al alumno a un aprendizaje significativo. Claro está que la calidad educativa de estos medios de enseñanza dependerá del uso o explotación didáctica que realice el docente. Surge entonces la idea de realizar un taller para alumnos del Profesorado de Matemática, futuros docentes, para que incursionen en las herramientas informáticas que les ayuden a comprender mejor los procesos de construcción de las figuras geométricas para luego poderlos volcar a sus futuros alumnos.

Abstract

The use of technological resources, properly designed, can guide to the student to a significant learning. It's obvious that the educative quality of these means of education will depend of the use or didactic exploitation that realize the teacher. Arises then the idea to realize a workshop for students of the Profesorado en Matemática, future teachers, so that they can know about the computational tools that help them to comprise better the processes of building of the geometrical figures for afterwards be able to upset them to his future students.

Resumo

O uso de recursos tecnológicos, adequadamente desenhados, pode guiar ao aluno a uma aprendizagem significativa. Claro está que a qualidade educativa destes meios de ensino dependerá do uso ou exploração didáctica que realize o docente. Surge então a ideia de realizar uma oficina para alunos do Profesorado de Matemática, futuros docentes, para que incursionen nas ferramentas informáticas que lhes ajudem a compreender melhor os processos de construção das figuras geométricas para logo os poder virar a seus futuros alunos.

1. Fundamentación

Los avances de las nuevas tecnologías han generado un espacio social y de aprendizaje que puede resultar excelente aliado del docente, puesto que proporciona instancias de producción que facilitan el acercamiento entre docente y alumnos. Estos recursos pueden resultar una herramienta didáctica que facilita el proceso de enseñanza- aprendizaje por el impacto favorable que ocasiona en los alumnos. La utilización de estos recursos permitirá que el estudiante asuma un rol activo en el proceso de enseñanza-aprendizaje guiándolo hacia el desarrollo de destrezas para la construcción de conocimientos y la formación de un pensamiento crítico. Es por esto que todo docente debería tenerla en cuenta dentro de la práctica pedagógica.

Como miembros del proyecto de investigación denominado "Enseñanza de la Geometría: Qué dar, qué no dar, qué mejorar" desarrollado en la Universidad Nacional del Comahue- Neuquén- Argentina, que tiene como objetivo investigar algunos problemas relacionados con la enseñanza y el aprendizaje de esta rama de la Matemática en el Nivel Medio, y a través de una encuesta realizada a docentes de distintas escuelas de esta provincia, surge que sólo el 30% utiliza recursos informáticos en sus clases y esto se debe en gran parte a la dificultad que tienen para su implementación.

La incorporación de estos materiales didácticos a la enseñanza lleva a un replanteo del acto de cómo enseñar. Hacer esto no es sencillo ya que exige una modificación en la actitud del docente quien deberá ceder un paso a su protagonismo en la transmisión de la información, para transformarse en observador y orientador en el sentido de acompañar e incentivar a los estudiantes en el descubrimiento de conceptos, proveyendo un verdadero "andamiaje" en todo el proceso de construcción del conocimiento.

Si bien utilizar estas herramientas computacionales puede mejorar el rendimiento académico del estudiante, no siempre los docentes nos detenemos a pensar bajo qué condiciones se aplica un software educativo. La calidad educativa de estos medios de enseñanza, depende, más que de sus características técnicas, del uso didáctico que realice el docente. No es sólo instalar un software y presentar unos problemas; la utilización de estos recursos requiere un adecuado diseño que permita que el alumno asuma un rol activo en el proceso de enseñanza-aprendizaje, desarrollando destrezas en la construcción de conocimientos. El uso más productivo y significativo de la tecnología en el aprendizaje no ocurrirá si las tecnologías son empleadas sólo como vínculos que transportan contenidos e información. Las tecnologías facilitan el aprendizaje cuando satisfacen una necesidad del educando, cuando las interacciones con las tecnologías son iniciadas por el educando, controladas por él y son conceptual e intelectualmente motivadoras. Estas deben funcionar como herramientas que permitan a los mismos construir interpretaciones, significados y representaciones del mundo.

Es por esto que surge la idea de realizar un taller que tiene como objetivo hacer que los alumnos del profesorado de Matemática, futuros docentes, incursionen en las herramientas informáticas que les ayuden a comprender de mejor manera los procesos de construcción de las figuras geométricas para luego poderlos volcar a sus futuros alumnos.

Para ello se trabajó con el Cabri-, programa útil para evaluar muchas propiedades así como también sugerir contraejemplos para verificar la falsedad de algunas proposiciones. Estos programas son una herramienta muy importante tanto para los estudiantes como para los profesores y es fundamental que estos últimos conozcan las bondades de los mismos para luego integrarlos a sus clases.

2. Experiencia

2. 1. Objetivos

- Lograr que los participantes se familiaricen con el uso de los programas de geometría dinámica pudiendo intuir- inducir-deducir propiedades geométricas en general.
- Revisar los contenidos básicos de la geometría del plano.
- Explorar las posibilidades que brindan estos programas en la preparación de material didáctico

2.2. Población

Participaron de este taller 15 alumnos del Profesorado de Matemática.

2.3. Cronograma de actividades:

Este taller se desarrolló en cinco encuentros de 3 hs. cada uno, en una sala de informática. Los alumnos contaron con una guía de trabajos prácticos además de un apunte teórico en donde se presentan las propiedades básicas que deberían conocer para poder resolver los ejercicios planteados. Contaron también con un instructivo sobre el manejo del Cabri.

En los primeros tres encuentros se buscó familiarizar a los participantes con los distintos comandos del programa por medio de ejercicios de construcción y planteamiento de conjeturas sobre propiedades de las figuras. En el cuarto encuentro se mostró a los alumnos la posibilidad que brinda el Cabri para generar material didáctico. En el quinto encuentro los alumnos presentaron los trabajos finales para su evaluación.

2.4. Guía de Actividades propuestas para práctica con el Programa Cabri.

A. Verificación de propiedades

Construir figuras que permitan verificar la validez de las propiedades enunciadas a continuación. Estas verificaciones *NO REEMPLAZAN* las demostraciones formales.

A1.- En un triángulo isósceles, las alturas con respecto a los lados iguales son iguales.

A2.- En un triángulo isósceles las bisectrices correspondientes a los ángulos iguales son iguales.

A3.- En un triángulo isósceles las medianas de los lados iguales son iguales.

A4.- En cualquier triángulo la mediana correspondiente a un vértice equidista de los otros dos vértices.

A5.- En cualquier triángulo las medianas (alturas, mediatrices, bisectrices) concurren en un punto.

A6.- En un triángulo rectángulo la altura de la hipotenusa divide al ángulo recto en dos ángulos respectivamente iguales a los ángulos agudos.

A7.- La base media de un triángulo es paralela a la base e igual a su mitad.

A8.- Los puntos medios de un cuadrilátero cualquiera forman un paralelogramo.

A9.- Los paralelogramos (triángulos) que tienen la misma base y la misma altura, tienen la misma área.

A10.- El ortocentro, el centroide y el circuncentro de un triángulo están alineados (recta de Euler).

A11.- La circunferencia de los nueve puntos.

A12.- La potencia de un punto respecto de una circunferencia es constante.

A13.- Teorema de Ceva.

A14.- Las diagonales de un trapecio isósceles concurren con la mediatriz de las bases.

A15.- Recta de Simson.

A16.- Si un hexágono (no regular) está inscripto en una circunferencia, las intersecciones de las prolongaciones de los pares de lados opuestos están alineadas.

B. Construcción de figuras planas.

B1.- Marcar tres (cuatro, seis, *n*) puntos equidistantes sobre un segmento.

B2.- Trazar la bisectriz de un ángulo cuyos lados no se cortan dentro del plano del dibujo.

B3.- Dada una recta y un segmento exterior a ella, determinar un punto de la recta que equidiste de los extremos del segmento.

B4.- Trazar una recta que equidiste de dos puntos dados. (Infinitas soluciones).

B5.- Dados tres puntos no alineados A, B y C, trazar por C una recta que equidiste de A y de B.

B6.- Trazar una recta que equidiste de tres puntos dados no alineados.

B7.- Trazar una recta paralela a otra dada y que equidiste de dos puntos dados.

B8.- Dada una recta y dos puntos en el mismo semiplano con respecto a la recta, determinar el camino más corto entre los dos puntos, que toque a la recta (problema del billar).

B9.- Trazar las tangentes a una circunferencia desde un punto exterior.

B10.- Trazar las tangentes a una circunferencia dada, que sean paralelas a una recta dada.

B11.- Dados tres puntos no alineados, trazar la circunferencia que pase por ellos.

B12.- Construir el arco capaz de un ángulo dado sobre un segmento dado.

B13.- Eje radical de dos circunferencias. (Eje radical de dos circunferencias no concéntricas: lugar de los puntos que tienen la misma potencia respecto de ambas circunferencias.)

B14.- Centro radical de tres circunferencias.

C. Lugares Geométricos

C1.- Determinar el lugar geométrico de los puntos que son centros de las circunferencias que pasan por dos puntos dados.

C2.-Por un punto pasa un haz de rectas concurrentes. Desde otro punto se trazan perpendiculares a las rectas del haz. Construir el lugar geométrico de los pies de las perpendiculares.

C3.- Un punto es fijo sobre un eje vertical. Otro punto es variable sobre un eje horizontal. Hallar el lugar geométrico de los puntos que completan un triángulo equilátero con los dos anteriores.

C4.- Construir el lugar geométrico de las circunferencias cuyo centro varía sobre una recta fija y que pasan por un punto fijo.

C5.-Construir el lugar geométrico de las circunferencias cuyo centro varía sobre una circunferencia fija y que pasan por un punto fijo.

C6.- Un segmento de longitud dada se desplaza de manera que cada extremo permanece sobre un lado de un ángulo recto. Investigar el lugar geométrico de un punto ligado al segmento (punto medio y otras posiciones)

C7.- Construir el lugar geométrico de los puntos medios de las cuerdas de una misma longitud de una circunferencia dada.

D. Confección de plantillas.

D1.-Confección de figuras con varios ejes y centros de simetría, mediante transformaciones rígidas. (Teselaciones.)

D2.-Trazado del “hacha india”, instrumento para trisección de un ángulo. Alternativa: la “escuadra de carpintero”.

D3.- Piezas del Tangram.

D4.- Desarrollos laterales del tetraedro, cubo, octoedro, dodecaedro e icosaedro regulares.

D5.- Juegos de caras de poliedros regulares y semirregulares (arista constante).

D6.- Rompecabezas tetraedro (6 tetraedros $\equiv$ 1 cubo).

D7.- Juego de piezas para visualización del cubo de un binomio.

2.5. Evaluación

Los participantes debieron presentar un trabajo en forma escrita y oral según las siguientes opciones:

- Exposición de un tema a elección haciendo uso del programa.
- Presentación de una guía de actividades para la enseñanza de un tema a elección para alumnos de nivel medio.
- Preparación de material concreto de tres dimensiones con el uso de dichos programas para el desarrollo de algún tema de geometría en el nivel medio.

Al término del taller los asistentes respondieron a un cuestionario escrito con la finalidad de conocer sus opiniones sobre el mismo.

2.6. Desarrollo de la experiencia

Primer encuentro: se explicó y ejercitó el uso de las distintas funciones del programa Cabri. Con ese fin se trabajó en una guía de sugerencias de verificación de propiedades de figuras planas. Los participantes mostraron interés y la sesión fue muy dinámica. El grado de habilidad de los asistentes en el manejo del programa era diverso, no obstante se mostraron muy activos en la resolución de los ejercicios propuestos, formulando las consultas pertinentes.

Segundo encuentro: Se siguió con una guía de actividades consistente en la construcción de figuras planas, aplicando propiedades de la Geometría Euclidiana. Cumpliendo uno de los objetivos del taller, se recordaron gran cantidad de definiciones y propiedades clásicas; a tal efecto, los participantes disponían de un breve catálogo de propiedades de las figuras planas (enunciados sin demostración). Se mantuvo el entusiasmo observado en la primera sesión, y algunos participantes investigaron por iniciativa propia funciones más avanzadas del programa.

Tercer encuentro: Esta sesión se dedicó a la construcción de lugares geométricos. El procedimiento para cada uno de los propuestos consistió en formular hipótesis relativas a la forma del lugar geométrico y luego construirlo para comprobar la validez de la suposición o rectificar la percepción previa. Este encuentro resultó particularmente atractivo para los participantes, que manifestaron muchas veces su sorpresa ante los resultados obtenidos.

Cuarto encuentro: Se realizó un uso poco convencional del programa, consistente en la preparación de plantillas para la construcción de materiales y herramientas que podrían ser útiles en la tarea didáctica. De este modo el programa fue utilizado como generador de dibujos. Los asistentes se mostraron interesados en la capacidad de Cabri como instrumento de diseño. Esto se manifestó en la preferencia de dicho uso para la elección del trabajo de evaluación a presentar.

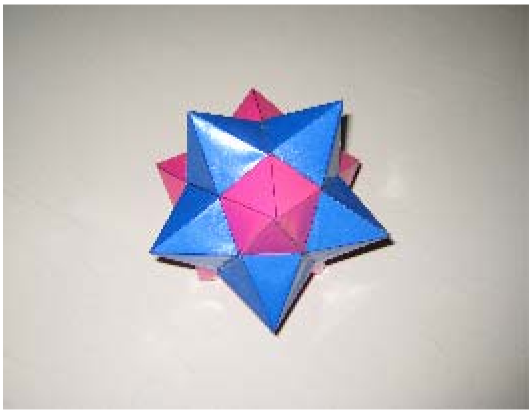
Quinto encuentro, de evaluación: se presentaron seis trabajos realizado por los alumnos los que se agruparon de a dos o tres.

2.7. Resultados sobre trabajo final

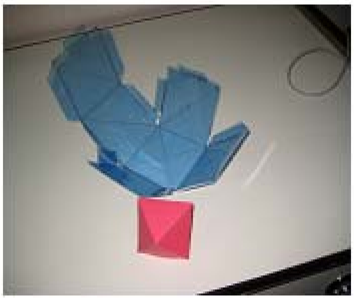
Los trabajos presentados estuvieron bien planificados y expuestos (se observó una preparación cuidadosa de los mismos). En los temas elegidos se aplicaron diferentes aspectos del uso del programa. Se presentaron los siguientes trabajos:

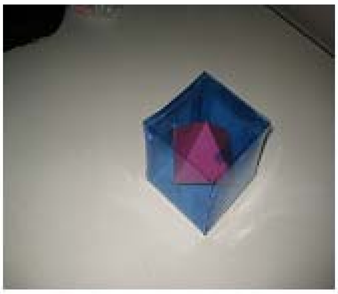
- Un par de poliedros duales. Dibujo de plantillas para construcción en materiales semirrígidos.
- Guía de trabajo práctico sobre construcción de figuras para la verificación de las propiedades: a) Suma de ángulos interiores de un triángulo. b) Visualización del teorema de Pitágoras.

- Octoedro truncado y secciones eliminadas. Dibujo de plantillas para construcción.
- Dos poliedros arquimedianos: el cuboctoedro y el tetraedro truncado. Dibujo de plantillas para construcción.
- Un problema de tangencia de circunferencia. Construcción de la solución aplicando propiedades.
- Un poliedro estrellado. Dibujo de plantillas para su construcción.



Poliedro estrellado





Poliedros duales

PROBLEMA: Construir una circunferencia que sea tangente a una circunferencia dada y a una recta dada en un punto dado de ésta.
PROPIEDAD
Si dos circunferencias admiten tangentes interiores comunes, éstas cortan a la recta de los centros en el centro de la homotecia negativa. Si existen tangentes exteriores comunes y éstas cortan a la recta de los centros, lo hacen en el centro de la homotecia positiva.

SOLUCION

Sean la circunferencia dada C(O,r), la recta dada m y el punto dado A sobre m

Veamos el caso en que m es exterior.

Existen dos soluciones posibles según que la circunferencia buscada sea tangente exterior o interior a C(O,r), dichas circunferencias deben encontrarse en el mismo semiplano en el que se encuentra la circunferencia dada respecto a m.

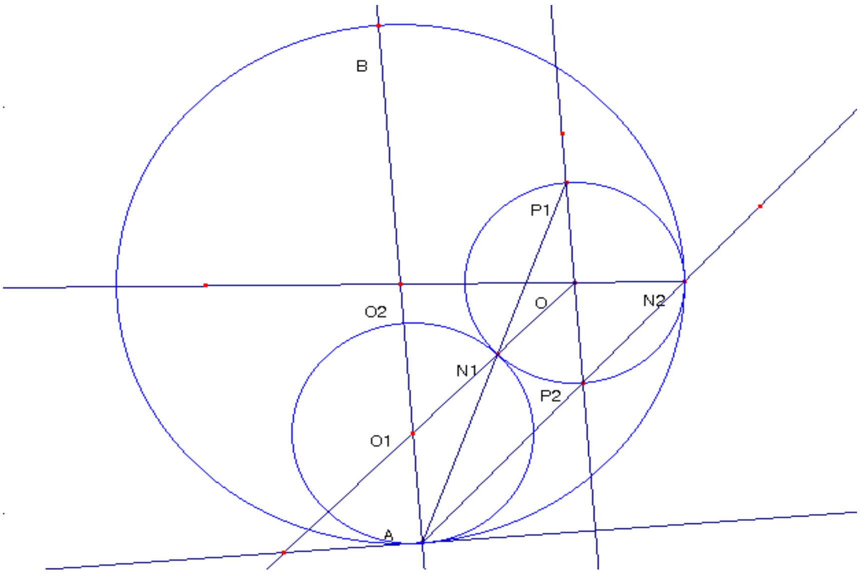
Dado que las circunferencias buscadas deben ser tangentes a m en el punto A, sus centros O1 y O2 deben hallarse en la recta perpendicular a m que corte en A.

Si la circunferencia buscada es tangente interior (exterior) a la C(O,r), entonces existe una única recta tangente interior (exterior) común a ambas que pasa por la intersección N1(N2) de las mismas, donde N1 (N2) se encuentra en la recta que une los centros O y O1 (O2)

Por la propiedad, el punto de contacto N1 (N2), es el centro de homotecia positiva (negativa) que relaciona las circunferencias.

PROCEDIMIENTO
En el semiplano con respecto a la recta dada m que contiene a C(O,r), trazamos la semirrecta AB perpendicular a m.
Por O trazar la paralela a la recta AB, esta cortará a C(O,r) en los puntos P1 y P2.
Trazamos las semirrectas AP1 y AP2, las cuales cortan a C(O,r) en los puntos N1 y N2 respectivamente.
Se trazan las semirrectas N1O y ON2 que cortan a la recta AB en O1 y O2 respectivamente, y tomemos al segmento O1N1=r1 y al segmento O2N2=r2, entonces las circunferencias C(O1, r1) y C(O2,r2) son las circunferencias buscadas.

A través de este programa se puede observar qué sucede cuando la recta m es tangente o secante a C(O,r), si variamos el radio de ésta y además, se puede mostrar como varía la gráfica ubicando en distintas posiciones la recta m, el punto A de m, el centro de la circunferencia dada.

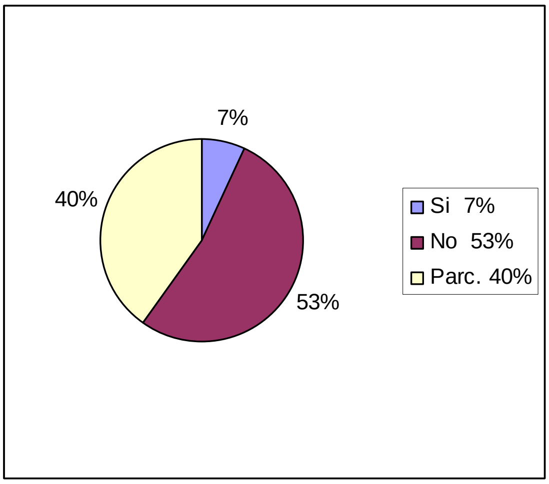


Circunferencias tangentes

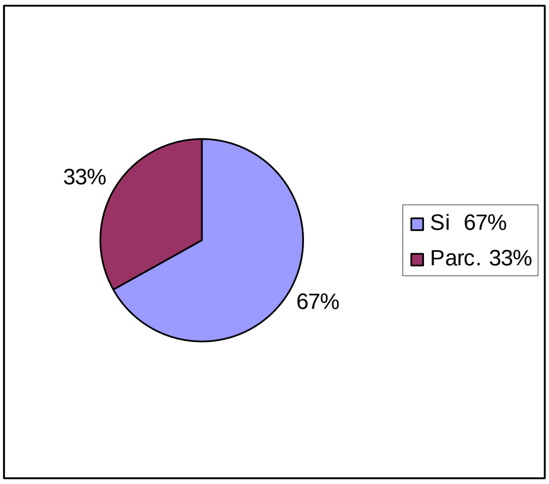
Encuesta

Una vez finalizado el taller se entregó a los participantes una encuesta que debían responder en forma individual para luego ser analizada.

1. ¿Tenía usted experiencia en el manejo del Cabri?



2.a ¿Considera que este taller le ayudo a comprender mejor su manejo?



2.b. ¿Le ayudó a comprender mejor, la importancia de este programa como herramienta didáctica? ¿Por qué?

El 100% dijo que sí le había ayudado a comprender la importancia de este programa como herramienta didáctica. En cuanto al por qué surgen los siguientes comentarios textuales:

"*Sí, trabajar con este programa permite generalizar los ejercicios y mostrar como varían las variables para que los alumnos saquen sus propias conclusiones".*

"Sí, ya que es una herramienta práctica y de fácil manejo que permite generar las figuras y analizar sus propiedades"

"Sí, ya que nos permite participar activamente y esto nos motiva en el estudio de la geometría"

"Sí, me ayudó muchísimo tanto para conceptos de geometría del plano como para geometría del espacio, ya que en esta última hay conceptos difíciles de imaginar y con esta herramienta es posible verlos".

“Sí, creo que esta herramienta incentiva más al alumno para el estudio de geometría”.

“Sí, el taller me brindó la posibilidad de planificar la clase utilizando otro instrumento de mediación, me resultó una clase más motivadora y dinámica”.

“Sí, porque pude encontrar ideas para introducir algunos contenidos escolares. El programa es una herramienta útil que permite visualizar propiedades geométricas, realizar construcciones y desarrollar la creatividad matemática”

3. ¿Considera necesario modificar algo de lo presentado en este taller?

“Nunca había usado este programa, para mi estuvo bien y no modificaría nada”

“Me gustaría ver más sobre su aplicación.”

“Me hubiera gustado tener más encuentros para poder profundizar lo que vimos.”

“No, ya que las dificultades fueron de un grado menor a uno mayor, pero comprensibles en todas las etapas.”

“Creo que se debería modificar el tiempo agregando unas horas más”

4. ¿Le interesaría completar el mismo con un segundo taller?

El 100% de los alumnos respondió que si.

5. ¿Qué conclusión saca de esta experiencia?

Con respecto a esta pregunta algunos comentarios textuales fueron los siguientes:

“Fue una propuesta interesante, quizá no pude apreciar completamente el taller ya que aún no curso geometría del plano. Pero valió la pena realizarlo.”

“Con la utilización de este programa se pudo ampliar algunos temas ya vistos en geometría plana de una manera muy buena.”

“Fue una muy buena experiencia, me ayudó a recordar los conocimientos vistos en la materia geometría del plano, a conocer curiosidades como gráficos obtenidos por simetrías , cuerpos formados con plantillas, etc, y a ver de que manera se puede utilizar en el aula”

“Mi conclusión es que el Cabri ayuda mucho para la enseñanza de la geometría y que debería enseñarse en la carrera del Profesorado de Matemática”.

“Este taller me permitió replantearme la forma de planificar y como utilizar este recurso didáctico.”

“Me pareció super enriquecedora, además de interesante y motivadora. Me gustaría que se dictaran más de este tipo de talleres que nos permiten conocer nuevas herramientas didácticas que nos servirán como futuros docentes.”

4. Conclusión

El desarrollo de este taller no sólo ha permitido familiarizar a los participantes con el programa Cabri- Géomètre, sino que también propició que los alumnos retomaran algunos conceptos básicos de la geometría y fundamentalmente comprendieran la importancia que tiene la introducción de este tipo de software como herramienta didáctica en la enseñanza de la misma. En los trabajos presentados queda confirmada la adquisición del dominio de esta herramienta y su potencial aplicación en la enseñanza. Por todo lo mencionado consideramos que los objetivos propuestos en este taller fueron alcanzados en forma satisfactoria.

5. Proyección futura

Implementar nuevos talleres de geometría dinámica para alumnos del Profesorado de Matemática y docentes de Nivel Medio con el objetivo de familiarizar a los mismos en el manejo de estas herramientas informáticas y llevarlos a reflexionar en torno a algunos aspectos de la enseñanza de la geometría en cuanto a la actuación docente en el aula y las características del conocimiento que construye el alumno y que difiere de los correspondientes a un tratamiento mas tradicional.

Bibliografía

Alsina, C. (2000): *Sorpresas Geométricas.* Red Olímpica.
C. Alsina, C. Burgués, J. Fortuny (1991): *Materiales Para Construir La Geometría.* Síntesis.
Bonomo, F. D'andrea, C. Laplagne, S. Szew, M. (1996): *Explorando La Geometría En Los Clubes Cabri.* Red Olímpica.
Coxeter, H. (1971): *Fundamentos De Geometría.* Lisuma-Wiley.
Lang, S. Murrow, G. Gene (1988): *Geometry*. Springer.
Puig Adam, P. (1969): *Curso De Geometría Métrica*. Tomo I: Fundamentos. Biblioteca Matemática S. L.
Santaló, L. A. (1993): *La Geometría En La Formación De Profesores.* Red Olímpica.
Tirao, J. A. *El Plano*. Ed. Docencia.

FACELLO, Teresa del Carmen. Docente de Matemática y algunas disciplinas afines en diferentes niveles educativos. Docente del Dpto. de Matemática de la Fac.de Economía de la Universidad del Comahue. Miembro del proyecto de investigación "Enseñanza de la Geometría: Qué dar, qué no dar, qué mejorar.
e-mail: **tfacello@uncoma.edu.ar**

OSIO, Elsa Beatriz. Calculista Científica. Universidad Nacional de La Plata. Magister en Enseñanza de las Ciencias. Orientación Matemática. Universidad Nacional del Comahue. Participación en el Proyecto "*Ciencias Básicas y orientación Vocacional de articulación entre la Universidad Nacional del Comahue con escuelas Medias de Río Negro y Neuquén.* Miembro del proyecto de investigación "Enseñanza de la Geometría: Qué dar, qué no dar, qué mejorar.
e-mail: **osioe@jetband.com.ar**

UNIÓN
REVISTA IBEROAMERICANA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA

Diciembre de 2009, Número 20, páginas153-162
ISSN: 1815-0640

Coordinado por
Martha Iglesias

Ideas para Enseñar

Aportes didácticos para abordar el concepto de función

Graciela Rey; Carolina Boubée; Patricia Sastre Vazquez; Alejandra Cañibano.

Resumen

Las limitaciones de nuestros alumnos están relacionadas, muchas veces, con la ausencia del potencial modelizador de la noción de función, el excesivo hincapié en el registro algebraico, la falta de articulación entre registros, el oscurecimiento de los elementos fundamentales de variabilidad y dependencia, y el trabajo descontextualizado, tan frecuente en matemática.
En este artículo proponemos algunos aportes didácticos simples y viables.

Abstract

The limitations of our students are related, sometimes, with the absence of the potential modeling of the function notion, the excessive anxiety in the algebraic record, the articulation lack among registrations, the dimness of the fundamental elements of variability and dependence, and the work outside of context, so frequent in mathematical.
In this paper we propose some simple and viable didactic contributions.

Resumo

As limitações de nossos alunos estão relacionadas, muitas vezes, com a ausência do potencial modelizador da noção de função, o excessivo hincapié no registo algebraico, a falta de articulación entre registos, o oscurecimiento dos elementos fundamentais de variabilidad e dependência, e o trabalho descontextualizado, tão frequente em matemática.
Neste artigo propomos alguns contribuas didácticos simples e viables.

Introducción

De las múltiples dificultades que presentan los alumnos ingresantes a la Universidad, dentro del área Matemática, creemos que por su generalización y por su importancia en el desarrollo de las carreras, se destaca el tema "funciones". El presente trabajo intenta aportar elementos alternativos para el abordaje didáctico de este tema, y en particular de la función lineal.

El concepto de función, como otros, es abordado en la enseñanza secundaria o polimodal, pero los alumnos ingresantes a la Universidad no demuestran haber adquirido la capacidad de interpretar, definir y graficar funciones que modelicen situaciones problemáticas, tanto del campo de la matemática como de otras áreas del conocimiento.

Desarrollo

Todos los objetos de saber sufren un importante trabajo de preparación didáctica, trabajo de transformación elaborado apuntando al pasaje de estos objetos al seno de la situación de enseñanza. Tanto los libros de texto como los programas oficiales adaptan los objetos matemáticos a ciertas exigencias que precisa todo saber que se desea incluir en el sistema de enseñanza, las que le provocan transformaciones.

Algunas de las exigencias a las que nos referimos son las siguientes (Ruiz Higueras, 1998):

- Dividirlo en campos de saber delimitados, dando lugar a un fraccionamiento y autonomización de los saberes parciales;
- Definir una progresión ordenada en el tiempo, lo que implica una programación de los aprendizajes;
- Verificar la conformidad entre la progresión y los conocimientos de los alumnos, lo que se expresa en objetivos o expectativas de logro y que implica la necesidad de evaluación;
- La explicitación de algunas nociones matemáticas que se emplearán como herramientas para resolver problemas, lo que implica su introducción como objetos de estudio.

En varios libros de texto, el concepto de función aparece como caso particular del concepto de relación y éste es definido a partir de algunos conceptos elementales de la teoría de conjuntos.

En muchos casos, primero se formaliza el conocimiento a enseñar y luego se lo aplica en la resolución de ejercicios que, en general, están construidos exclusivamente para la aplicación directa del concepto aprendido, sin ningún tipo de transformación. Ruiz Higueras expresa:

> *"Nuestros alumnos de secundaria manifiestan en general una concepción de la noción de función como un procedimiento algorítmico de cálculo... Podemos decir que sus definiciones no determinan el objeto función, sino las relaciones que han mantenido con él".*
> *"Tanto se ha descompuesto el objeto función en segmentos para su enseñanza que el alumno no logra unificarlos dándoles una significación global. El alumno ha visto muchos objetos allí donde sólo debía* existir uno".

Encontramos en nuestros alumnos una diversidad de concepciones respecto de la noción de función. Probablemente, el sistema de enseñanza del que provienen no ha promovido el estudio y análisis de la variabilidad de fenómenos sujetos a cambio, donde las funciones encontrarían una especial significación estrechamente ligada a sus orígenes epistemológicos. Las situaciones ligadas a las diferentes concepciones de los alumnos se refieren al uso de rutinas y procedimientos algorítmicos: construir tablas, calcular dominios, representar funciones, etc. Se utilizan fórmulas como "recetas", sin utilizar su gran poder modelizador. Las fórmulas algebraicas son visualizadas como conjunto de técnicas eficaces para encontrar el valor de las incógnitas, esta concepción elimina el sentido de variabilidad, movilizando incógnitas en lugar de variables.

El tratamiento dado por el sistema de enseñanza a la noción de función da lugar a la formación de concepciones muy limitadas, que no generan una concepción más completa de la misma.

Dado que la variable didáctica es la única que depende casi exclusivamente de una elección docente o de un proyecto del sistema educativo, nos detenemos sobre ésta e intentamos plantear algunos aportes vinculados a ella.

Pensar en modificaciones didácticamente posibles de llevar a cabo para optimizar el aprendizaje de los alumnos, nos ha hecho plantear distintos interrogantes.

¿Cuáles son las dificultades más frecuentes de los alumnos referidas a este concepto? ¿Cómo tratar los errores que cometen? ¿A qué aspectos conviene dar más importancia? ¿Cómo encarar la enseñanza, en la Universidad, de un tema visto en niveles anteriores?

Somos conscientes que la formación de un concepto matemático se lleva a cabo a través de un largo proceso. Shlomo Vinner (1983), presenta un modelo de construcción de un concepto, que involucra las representaciones, las propiedades asociadas al concepto y las definiciones del mismo. Dice este autor:

> *"Sea C un concepto y P una persona. La representación mental que P hace de C es el conjunto de todas las representaciones que se han asociado con C en la mente de P. La palabra representación está usada en sentido amplio e incluye cualquier representación visual del concepto, incluyendo símbolos. El gráfico de una función específica, algún diagrama, fórmula y/o tabla, la expresión simbólica y = f (x), etc. pueden estar incluidas en la representación mental del concepto de función de alguna persona.*
>
> *Además de la representación mental de un concepto puede haber un conjunto de propiedades asociadas con el concepto (en la mente de nuestra persona P). Por ejemplo, si alguien piensa que una función siempre se puede expresar por una única fórmula, en su mente se encuentra esta propiedad asociada al concepto de función (existe en su mente esta asociación, independientemente de su veracidad). Se llama imagen de un concepto a su representación mental junto con el conjunto de propiedades asociadas al concepto. Queda claro por su definición, que la imagen de un concepto es propia de cada persona.*

Se entiende por definición de un concepto a una formulación verbal que explica el concepto con precisión, en un sentido no circular Para algunos conceptos tenemos sumada a su imagen mental su definición verbal, para muchos otros sólo tenemos su imagen. Por ejemplo, no tenemos una definición de naranja, casa, etc., pero si muy claras imágenes mentales de los mismos. Ellos fueron adquiridos cuando éramos chicos, probablemente por medio de definiciones ostensivas.

El modelo plantea la existencia, en la estructura cognitiva, de dos celdas diferentes: una para la imagen del concepto y otra para su definición verbal (para evitar confusión aclaramos que no se trata de celdas biológicas). Puede existir interacción entre ambas aunque pueden haberse formado independientemente. La forma de introducir un concepto puede activar una o la otra.

Para manipular un concepto se necesita la imagen del concepto y no su definición. Al pensar o reflexionar casi siempre se evoca la imagen del concepto y no su definición. Esto es así sobre todo en el aprendizaje informal. En el aprendizaje formal la situación puede ser diferente, aquí sí entra en juego la definición verbal. Las definiciones verbales tienen dos orígenes: o bien nos las han enseñado o bien las fabricamos cuando tenemos que explicar otros conceptos. Las que nos han enseñado forman parte de un sistema general (en el caso de conceptos matemáticos y científicos en general) al que no estamos necesariamente familiarizados. A veces nos presentan definiciones antes de que tengamos una imagen del concepto y esperamos aprender más para llenar este vacío. Las definiciones verbales tienen su razón de ser: por un lado ayudan a formar la imagen del concepto y por otro son de utilidad en la ejecución de ciertas tareas cognitivas".

Muchas de las dificultades que tienen los alumnos aparecen cuando utilizan las representaciones del concepto de función, que son muy variadas, a veces limitadas y no siempre veraces.

Las limitaciones están relacionadas, muchas veces, con la ausencia del potencial modelizador de la noción de función. Uno de los conceptos constitutivos de la noción de función entendida como herramienta apta para modelizar fenómenos de cambio es la noción de dependencia. La noción de dependencia implica la existencia de un vínculo entre cantidades y conlleva la idea de que un cambio en una de las cantidades tendrá efectos sobre las otras.

Pero la noción de dependencia es difícilmente identificable sin otra noción que constituye el verdadero punto de partida del concepto de función la variabilidad. En efecto, el único medio de percibir que una cosa depende de otra es hacer variar cada una por vez y constatar el efecto de la variación. Los principales elementos que integran la noción de función son, entonces, la variación, la dependencia, la correspondencia, la simbolización y expresión de la dependencia, y sus distintas formas de representación.
Para que las funciones puedan ser una verdadera herramienta de modelización, es necesario que no se oscurezca su esencial significado de dependencia entre

variables, perdiendo su carácter dinámico para transformarse en algo puramente estático.

El COPREM (Comisión para la Reflexión sobre la Enseñanza de la Matemática) formuló la siguiente recomendación (1978*): "Una función no es ni una estadística de valores ni una representación gráfica ni un conjunto de cálculos ni una fórmula, sino todo ello al mismo tiempo".*

El concepto de función permite modelizar múltiples situaciones del mundo real, relacionando variables diversas. De esta manera, se posibilita el análisis de las situaciones desde un punto de vista dinámico, lo que permite sacar conclusiones y formular generalizaciones.

Caracterizaremos brevemente a la actividad matemática y al proceso de estudio de la matemática, siguiendo a Chevallard, Gascón y Bosch (1997), como el trabajo de modelización encaminado a resolver problemas pertenecientes tanto a objetos o procedimientos propios de la matemática (intramatemáticos) como a objetos o fenómenos ajenos a la matemática (extramatemáticos).

Se debe tener en cuenta en la elección de problemas, que estén formulados dentro de un marco que le resulte familiar a los alumnos, o de fácil apropiación, incluyendo conocimientos con los que el alumno ya esté familiarizado. En la siguiente tabla 1 mostramos distintas formas de abordar un mismo contenido, en éste caso referido a función lineal, con actividades contextualizadas, o no:

Tabla 1

Contenido Matemático	Actividad Contextualizada	Actividad Descontextualizada
Ecuación de la recta que pasa por dos puntos.	Un cultivo de soja produce 2,6 ton/ha aplicando una fertilización con fosfato diamónico (DAP) de 45kg/ha, y produce 3 ton/ha si se fertiliza con 55 kg DAP/ha. a) Expresar la relación entre la producción (P) y la fertilización (f) con DAP en forma de función P(f). b) Otra variedad de soja se comporta diferente frente al mismo fertilizante: produce 2,7 ton/ha si se aplican 40 kg DAP/ha, y 3,3 ton/ha si se agregan 60 kg DAP/ha. Exprese la relación $P_2(f)$. c) Compare el comportamiento de ambas variedades y saque conclusiones. d) ¿Qué información está representada en la pendiente y la ordenada al origen de cada una de las funciones?	Hallar la ecuación de la recta que pasa por los puntos $P_1(45; 2,6)$ y $P_2 (55;3)$. Graficar. Identificar pendiente y ordenada al origen.

Ecuación de la recta que pasa por un punto y tiene pendiente u ordenada conocida.	En una experiencia de alimentación de ganado bovino, el lote A es alimentado con forraje natural, iniciando la experiencia con un promedio de 300 kg de peso por animal, y alcanzando los 360 kg promedio a los 90 días. El lote B es suplementado con grano, teniendo un peso promedio de 290 kg por animal a los 15 días de iniciada la experiencia, y aumentando 800 g/día. Si la relación planteada se adapta a una función lineal: a) Hallar las ecuaciones correspondientes para el lote A y para el lote B. b) Grafique las rectas correspondientes en un mismo sistema de ejes. c) Compare ambas ecuaciones y responda: c.1) ¿Qué lote alcanza antes los 350 kg por animal? c.2) ¿Cuál sería el peso promedio del lote luego de 100 días de experiencia? c.3) ¿Qué tipo de alimentación es más eficiente para el engorde del ganado, y como lo reflejan las ecuaciones?	Hallar la ecuación de la recta que pasa por P (360; 90) y corta al eje *y* en 300. Graficar. Hallar la ecuación de la recta cuya pendiente es $m = 800$ y pasa por P (290; 15). Graficar.

Para resolver un problema matemático es necesario identificar a qué conceptos y a qué resultados ya producidos recurrir, es decir, el dominio de la matemática en el que conviene encararlo. Dado que existen muchas maneras de presentar o expresar una información, es necesario encontrar una representación adecuada para cada concepto matemático involucrado.

El concepto de función puede admitir representaciones en diferentes registros, con diversos alcances y limitaciones. Un registro no está ligado ni a objetos ni a conceptos particulares; está constituido por los signos, en el sentido más amplio del término: trazos, símbolos, íconos. Los registros son medios de expresión y de representación y se caracterizan precisamente por las posibilidades ligadas a su sistema semiótico. Un registro da la posibilidad de representar un objeto, una idea o un concepto, no necesariamente matemático.

La noción de función puede representarse en diferentes registros:

- Registro verbal: En este registro la función admite como representación una descripción en lenguaje natural. Si se quiere estudiar un fenómeno utilizando una función como modelo, se cuenta generalmente, en principio, con una descripción de este tipo.

- Registro tabla: En este registro, una función se representa con una tabla de valores que pone en juego la relación de correspondencia. Este registro tiene limitaciones ya que en una tabla sólo puede incluirse un número finito de pares de valores.

- Registro gráfico: En este registro, una función se puede representar por medio de una curva (continua o no) en el plano cartesiano. Se pone en juego la noción de grafo de una función. También presenta limitaciones, ya que como en el caso de la tabla, es necesario imaginar que continúa más allá de lo que es posible observar.

- Registro algebraico: En este registro, una función se puede representar por una expresión algebraica o fórmula, que permite calcular la imagen f(x) para toda x perteneciente al dominio de la función, por lo tanto esta representación tiene pocas limitaciones y son aquellas que provienen del cálculo.

- Registro algorítmico: en este registro, la representación de una función es un programa o un procedimiento, como los que utilizan las calculadoras o computadoras. Representa el proceso para calcular la imagen a partir de los valores del dominio.

La articulación entre el registro gráfico y algebraico resulta en general la más dificultosa para los alumnos. La lectura de representaciones gráficas involucra una interpretación global; ya que se trata de discriminar variables visuales y percibir las variaciones correspondientes en los símbolos de la escritura algebraica.

En la enseñanza se suelen proponer actividades de pasaje de la representación algebraica de una función a la representación gráfica construida punto por punto y es poco frecuente que se considere el pasaje inverso.

En algún momento del aprendizaje del concepto de función, el alumno debería poder distinguir la función de sus representaciones. Las actividades de articulación entre registros podrían favorecer dicha diferenciación.

En la mayoría de los libros de texto referidos a función lineal, el alumno encuentra fórmulas para hallar la ecuación de la recta que pasa por un punto, conocida la pendiente, o que pasa por dos puntos, y sus respectivas deducciones.

Esas fórmulas son válidas, pero si el alumno no alcanza a apropiarse de su verdadero significado, pasan a ser simples fórmulas memorizadas, y si falla la memoria, la fórmula carecerá de utilidad. (ver Tabla 2)

Tabla 2

	Con fórmula	Sin fórmula
Ecuación de la recta dados un punto y la pendiente	$y - y_1 = m(x - x_1)$	Si tenemos un punto $P_1 = (x_1 ; y_1)$ que pertenece a una recta con pendiente m, entonces se puede obtener la ecuación de esa recta, dado que: Ecuación explícita de cualquier recta: $f(x) = mx + b$ Para este caso particular, $f(x) = y_1$; y $x = x_1$; entonces $y_1 = m\ x_1 + b$ Despejando $b = y_1 — m\ x_1$ La ecuación de esa recta es: $f(x) = m\ x + (y_1 - m\,x_1)$
Ecuación de la recta dados dos puntos	$\dfrac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \dfrac{x - x_1}{x_2 - x_1}$	Si tenemos dos puntos $P_1 = (x_1 ; y_1)$ y $P_2 = (x_2 ; y_2)$ que pertenecen a una recta, entonces se puede obtener la ecuación de esa recta, dado que: La pendiente de la recta, según fue definida, es Para este caso particular, para el punto P_1 : $f(x) = y_1$; y $x = x_1$; y para el punto P_2 : $f(x) = y_2$; y $x = x_2$ Entonces, hallada la pendiente y con uno de los dos puntos P_1 o P_2 , se puede utilizar la técnica desarrollada en el ítem anterior, resultando: $b = y_1 - m\ x_1$ o bien $b = y_2 - m\ x_2$ Entonces: $f(x) = m\ x + (y_1 - m\ x_1)$ o bien $f(x) = m\ x + (y_2 - m\ x_2)$

En cambio, utilizando el significado geométrico de la pendiente y de la ordenada al origen, puede hallarse la ecuación de una función lineal y graficarla sin la realización de una tabla de valores (*x*,*y*).

Esta metodología de trabajo evita la utilización de fórmulas de memoria, y ayuda a consolidar los conceptos y la interpretación de la función lineal y sus parámetros. Se trabaja conceptualmente y no memorísticamente, a lo cual nuestros alumnos no se hallan habituados y plantea un verdadero e importante desafío a los docentes.

Conclusiones

La alternativa de enseñanza del tema función (y en particular función lineal) que pretendemos superadora de la clásica, se sostiene sobre los siguientes pilares:

- reconocimiento de las representaciones mentales de los alumnos adquiridas previamente al ingreso a la Universidad;

- poder modelizador del concepto de función, basado en sus elementos constitutivos de dependencia y variabilidad que le otorgan su carácter dinámico;
- diferenciación del concepto de función de sus representaciones en los distintos registros;
- resolución de situaciones problemáticas contextualizadas, que promuevan la articulación entre los diferentes registros.

Cada docente, como constructor de su propia metodología de enseñanza, reformula constantemente su práctica docente. Es fundamental reflexionar sobre la propia práctica, analizarla, evaluarla, con vistas a aumentar su saber didáctico, en pos de tomar decisiones que mejoren la enseñanza y promuevan el aprendizaje.

El docente necesita libertad y creatividad en su acción, pero debe hacer uso responsable de las mismas. Lo que está en juego es demasiado importante como para experimentar sin fundamentación.

Bibliografía

Camuyrano, M. y otros. (1997) *Matemática. Temas de su Didáctica. Algunos aspectos de la enseñanza de las funciones.* Prociencia. Conicet.

Chevallard, Y. Bosch, M. Gascón J. (1997). *Estudiar Matemáticas. El eslabón perdido entre enseñanza y aprendizaje.* I.C.E. Universitat Barcelona.

Ruiz Higueras, L. (1998) *La noción de función: análisis epistemológico y didáctico.* Universidad de Jaén. España.

Vinner, S. (1983) *Definición e imagen de un concepto y la noción de función.* Universidad de Jerusalem. Israel.

U.N.C.P.B.A. (2000)Facultad de Ciencias. Exactas. Fac. de Ciencias. Humanas. *Aportes para la Enseñanza de la Matemática en el Tercer Ciclo de la EGB*. Tandil.

U.N.C.P.B.A. (2004) Facultad de Agronomía. *Introducción a la Matemática. Cuadernillo.* Azul.

Patricia Sastre Vázquez, Agrimensora. Doctora en Matemática Aplicada, por la Universidad de Alicante (España). Profesora Titular del Área de Matemática de la Facultad de Agronomía de Universidad Nacional del Centro de la Provincia de Buenos Aires, UNCPBA, (Argentina). Directora del Proyecto: “La enseñanza de la Matemática en una Facultad de Agronomía: Una perspectiva desde la Teoría de los Obstáculos Epistemológicos. Dictó cursos de postgrado en el país y en el extranjero.
e-mail: **pasava2001@yahoo.com.ar**

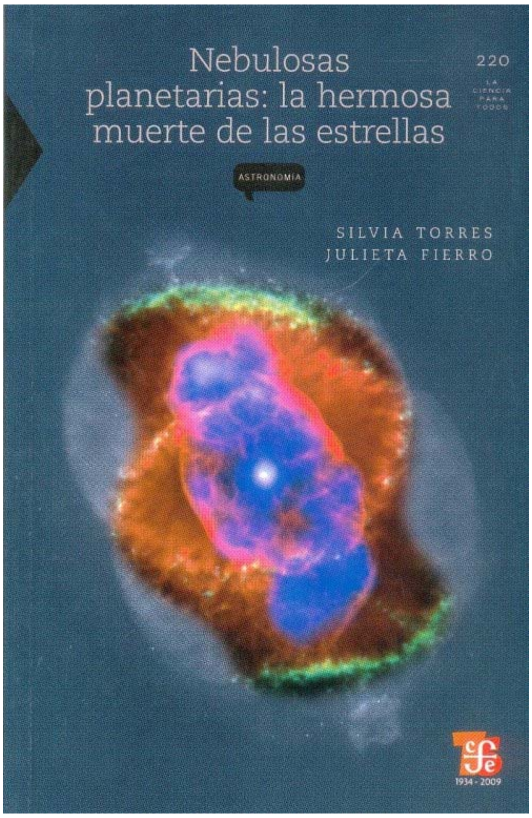
Graciela Rey, Ingeniero Agrónomo.Diplomatura Superior en Ciencias Sociales con Mención en Constructivismo y Educación. Post Título de Formación Docente con Especialización en EGB 3 y Polimodal. Instituto Superior de Formación Docente Nº 22 de Olavarría, (Argentina). Jefe de Trabajos Prácticos del Área Físico/Matemática de la Facultad de Agronomía de UNCPBA, Integrante del Proyecto: "La enseñanza de la Matemática en una Facultad de Agronomía: Una perspectiva desde la Teoría de los Obstáculos Epistemológicos".
e-mail: **grey@faa.unicen.edu.ar**

Carolina Boubée, Profesora de Matemática, Física y Cosmografía, Licenciada en Educación. Orientación: Enseñanza de la Matemática Cursando estudios en la Especialización / Maestría en Docencia Universitaria. Profesora de: "Historia de la Matemática", "Perspectiva Pedagógico Didáctica II (Didáctica Especial)" y "Educación, Ciencia y Tecnología". integrante del Proyecto: "La enseñanza de la Matemática en una Facultad de Agronomía: Una perspectiva desde la Teoría de los Obstáculos Epistemológicos".
e-mail: **cboubee@faa.unicen.edu.ar**

Alejandra Cañibano, Agrimensora Maestría en Metodología de la Investigación Biológica Aplicada a las Ciencias Agropecuarias. Integrante del Proyecto: "La enseñanza de la Matemática en una Facultad de Agronomía: Una perspectiva desde la Teoría de los Obstáculos Epistemológicos". Secretaria de Ciencia y Técnica de la UNCPBA.
e-mail: **acanibano@speedy.com.ar**

UNIÓN
REVISTA IBEROAMERICANA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA
Diciembre de 2009, Número 20, página 163
ISSN: 1815-0640

MONOGRÁFICO ASTRONOMÍA



NEBULOSAS PLANETARIAS: LA HERMOSA MUERTE DE LAS ESTRELLAS.

Autoras:

Silvia Torres y Julieta Fierro

Editorial:

Fondo de Cultura Económica. México. 2009.

Colección Ciencia para todos

ISBN 9786071600721

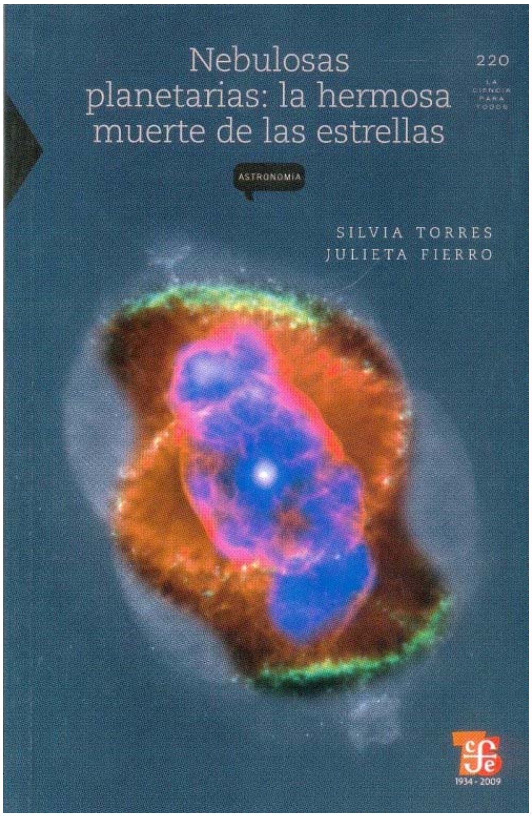
La presentación de la investigación de las autoras, ambas investigadoras del Instituto de Astronomía de la Universidad Nacional Autónoma de México (UNAM), sobre las nebulosas planetarias llama la atención tanto de especialistas como legos.

El análisis sobre la evolución de las estrellas hasta su muerte genera interrogantes que son bien explicados, así como la interpretación de que los elementos nuevos que generan en su interior salen arrojados al espacio y se mezclan con las materias en el universo dando origen a nuevas estrellas. Como si las estrellas fueran recicladores de las sustancias químicas de modo que en su final arrojan al espacio los nuevos elementos químicos que formarán la nueva generación de estrellas.

En el año Internacional de la Astronomía, este libro sobre las Nebulosas Planetarias constituye un aporte muy significativo para los docentes de todos los niveles, que deseen incorporar el tema en una forma agradable y amena.

Liliana Budal

Diciembre de 2009, Número 20, página 163
ISSN: 1815-0640



NEBULOSAS PLANETARIAS:
LA HERMOSA MUERTE DE LAS ESTRELLAS.

Autoras:

Silvia Torres y Julieta Fierro

Editorial:

Fondo de Cultura Económica.
México. 2009.

Colección Ciencia para todos

ISBN 9786071600721

La presentación de la investigación de las autoras, ambas investigadoras del Instituto de Astronomía de la Universidad Nacional Autónoma de México (UNAM), sobre las nebulosas planetarias llama la atención tanto de especialistas como legos.

El análisis sobre la evolución de las estrellas hasta su muerte genera interrogantes que son bien explicados, así como la interpretación de que los elementos nuevos que generan en su interior salen arrojados al espacio y se mezclan con las materias en el universo dando origen a nuevas estrellas. Como si las estrellas fueran recicladores de las sustancias químicas de modo que en su final arrojan al espacio los nuevos elementos químicos que formarán la nueva generación de estrellas.

En el año Internacional de la Astronomía, este libro sobre las Nebulosas Planetarias constituye un aporte muy significativo para los docentes de todos los niveles, que deseen incorporar el tema en una forma agradable y amena.

Liliana Budal

UNIÓN
REVISTA IBEROAMERICANA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA

Diciembre de 2009, Número 20, páginas 165-168
ISSN: 1815-0640

MONOGRÁFICO ASTRONOMÍA

M@temátic@s en l@ red

Sitios de Astronomía en la Red

A continuación presentamos algunos sitios de Astronomía, los mismos se presentan de acuerdo a los países que integran la FISEM:

Argentina

Asociación Argentina "Amigos de la Astronomía"

Cielo Sur

Complejo Astronómico El Leoncito CASELO

Comisión Nacional de Actividades Espaciales CONAE

Estación Astronómica Río Grande EARG

Facultad de Ciencia Astronómicas y Geofísicas Universidad Nacional de La Plata

Instituto Argentino de Radioastronomía IAR

Instituto de Astronomía y Física del Espacio IAFE

Observatorio Astronómico Instituto Copérnico

Observatorio Astronómico de Córdoba

Observatorio San José

Pierre Auger Observatory

Bolivia

Planetario Max Schreier

Brasil

Agência Espacial Brasileira AEB

Astronomia na Web

Astronomia no Zênite

Cosmobrain Astronomia e Astrofísica

Departamento de Astronomia IFUSFRGS, Instituto de Física da Universidade do Rio Grande do Sul

Fundação Planetário da Cidade do Rio de Janeiro IplanRIO

Grupo de Estudos de Astronomia GEA

Instituto de Astronomia, Geofísica e Ciências Atomosféricas IAG, Universidade de São Paulo

Instituto Nacional de Pesquisas Espaciais INPE

Laboratório Nacional de Astrofísica LNA

Museu de Astronomia e Ciências Afins MAST

Observatório Astronômico Antares Universidade Estadual de Feira de Santana

Observatório Astronômico Frei Rosário Universidade Federal de Minas Gerais

Observatório Nacional ON

Sociedade Astronômica Brasileria SAB

Chile

Asociación Chilena de Astronomía y Astronáutica ACHAYA

The Atacama Large Millimeter Array

Las Campanas Observatory Carnegie Observatories

Cerro Tololo Inter-American Observatory CTIO

Departamento de Astronomía Universidad de Chile

Departamento de Astronomía y Astrofísica Pontificia Universidad Católica de Chile.

European Southern Observatory ESO

Instituto de Astronomía Universidad Católica del Norte

Oficina de Protección de la Calidad del Cielo del Norte de Chile OPCC

Colombia

Asociación de Astrónomos Autodidactas de Colombia ASASAC

Historia de la Astronomía en Colombia Gonzalo Duque-Escobar

Observatorio Astronómico Universidad Sergio Arboleda

Observatorio Astronómico Nacional OAN, Universidad Nacional de Colombia

Red de Astronomía de Colombia RAC

Ecuador

Observatorio Astronómico de Quito

España

http://sea.am.ub.es/ Sociedad Española de Astronomía

México

Area de Astronomía Departamento de Investigación en Física de la Universidad de Sonora

Astrónomos Profesionales en México

Departamento de Astronomía Universidad de Guanajuato

Instituto de Astronomía UNAM

Instituto de Astronomía y Meterología Universidad de Guadalajara

The Large Millimeter Telescope LMT

Paraguay

Club de Astrofísica del Paraguay.

Nodo Nacional Paraguayo, Año Internacional de la Astronomía 2009.

Perú

Comisión Nacional de Investigación y Desarrollo Aeroespacial CONIDA

Grupo Astronomía Universidad Nacional de Ingeniería

Radio Observatorio de Jicamarca Instituto Geofísico del Perú

Portugal

http://www.astronomia2009.org **Sociedade Portuguesa de Astronomia**

Uruguay

Asociación de Aficionados a la Astronomía

Departamento de Ciencias de Astronomía Universidad de la República

Observatorio Kappa Crucis

Portal Uruguayo de Astronomía

Sociedad Uruguaya de Astronomía SUA

Venezuela

Astroaborigen

Centro de Investigaciones de Astronomía CIDA

Glosario de Astronomia de los Caribes de Venezuela

MetVen Meteoros

Observatorio ARVAL

Sociedad Universitaria de Astronomía SUNA

Liga Iberoamericana de Astronomía LIADA

UNIÓN
REVISTA IBEROAMERICANA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA

Diciembre de 2009, Número 20, páginas 169-172
ISSN: 1815-0640

Información

Fundación Carlos Salvador y Beatriz: sigue el camino

La Fundación Canaria *Carlos Salvador y Beatriz* sigue con su rumbo por la Educación y la Cultura, las únicas herramientas para hacer un mundo mejor. Con el poeta Antonio Machado “hace camino al andar” y lo que partió de una tragedia familiar – la muerte en accidente de tráfico, con 27 y 25 años, de los dos únicos hijos de los excelentes maestros Salvador y Aurora- se ha convertido en un camino de esperanza y de afirmación para hacer algo por los demás…

Continúa la labor de entrega de **material escolar nuevo** a escuelas públicas carenciadas de algún lugar de Iberoamérica. En 2009 se han llevado a cabo en Paraguay y Bolivia, continuando una estela que dio comienzo en el 2001. Se hacen, bien con envíos de paquetes a través de correos o de forma directa y personal por el Vicepresidente de la Fundación, Luis Balbuena Castellano, aprovechando sus desplazamientos para participar en congresos, seminarios u otros eventos relacionados con su especialidad como docente: la enseñanza de las matemáticas.

Pero la Fundación desea ir más allá y, también en Paraguay ha dotado de mobiliario a dos escuelas y aportado los medios económicos para construir los servicios higiénicos de otra que se encontraban en pésimo estado. Asimismo, se están haciendo las gestiones necesarias para la **construcción de una escuela**. Cuenta para ello con los planos y con la dotación de un presupuesto de 10.300 euros. Es su deseo que la escuela se construya en terrenos de titularidad pública y que su único destino sea la impartición de enseñanza. Se mantienen los necesarios contactos con la Intendencia, Secretaria de la Niñez y Ministerio de Educación de dicho país donde está respaldada –como todas nuestras actividades en América – por la Organización de Estados Iberoamericanos (OEI).

María Irene Salgado y Darío Hernán Wejchenberg

Son destacados estudiantes del Profesorado en Matemática del Instituto de Formación Docente Nº 39 de Vicente López, Provincia de Buenos Aires, Argentina que asistieron a la VIII CAREM organizada por la SOAREM (Sociedad Argentina de Educación Matemática) en octubre de 2009 becados por nuestra Fundación.

El 12 de mayo pasado, la Fundación firmó un convenio marco de colaboración con la Universidad canaria de La Laguna. El primer fruto de esa colaboración ha sido la presentación del ***I Premio de Investigación en el Ámbito Psicosocial*** para profesionales o para investigadores vinculados a la Psicología que trabajen en Canarias. Está dotado de 2000 euros y la publicación de la obra. El plazo de presentación de trabajos finaliza el 20 de junio de 2010. Además La Universidad de La Laguna nos ha concedido la Mención Honorífica (el primer premio fue para la saharaui Aminetu Haidar) del **Premio a la Creatividad Social** que nos acaban de entregar el día 12 de de diciembre en acto celebrado en el Paraninfo de la ULL.

Está próximo a convocarse el ***II Premio Literario*** **para autores y autoras hasta los 35 años de cualquier parte del mundo** con tal de que la obra sea original e inédita y escrita en lengua castellana; está dedicado a la poesía (con una extensión entre 200 y 500 versos) y dotado con 2000 euros y publicación de la obra ganadora. El plazo de presentación de las obras finaliza el 31 de enero de 2011.

Por último, queremos señalar que es la culminación de un buen año para la **FUNDACIÓN CANARIA CARLOS SALVADOR Y BEATRIZ,** a modo de breve resumen: 1) ayudas de material escolar nuevo, en cerca de 40 actuaciones, a cuatro países: Paraguay, Bolivia, Perú y Argentina; 2) dotación de mobiliario a dos escuelas en Paraguay; 3) construcción de servicios higiénicos a una escuela en Paraguay; 4) construcción de una nueva escuela, en camino, en Paraguay por 10.300 euros; 5) II Premio Literario, ahora en poesía; 6) I Premio de Psicología (dotados ambos con 2000 euros y la publicación de la obra) 7) patrocinio de la Revista de Matemáticas "UNION" que llega a 13 países; 8)Becas, ayudas, etc...

Es una Fundación que parte de la desgracia a la esperanza y está dispuesta a "hacer cosas por los demás". Si no eres socio y deseas serlo es fácil: con 5 o 10 euros al año podemos hacer mucho por la educación, la cultura y la solidaridad.
Estamos orgullosos pero no satisfechos: podemos hacer más.
Para tener más información, les invitamos a que visiten nuestra página web
www.carlossalvadorybeatrizfundación.com
Hay muchas fotos pues, muchas veces, una imagen vale más que mil palabras…
¡¡Les esperamos!!

Fundação Carlos Salvador e Beatriz: segue o caminho

María Irene Salgado y Darío Hernán Wejchenberg

São destacados estudantes do Profesorado em Matemática do Instituto de Formação Docente Nº 39 de Vicente López, Província de Buenos Aires, Argentina que assistiram à VIII CAREM organizada pela SOAREM (Sociedade Argentina de Educação Matemática) em outubro de 2009 becados por nossa Fundação.

O 12 de maio passado, a Fundação assinou um convênio marco de colaboração com a Universidade canaria da Laguna. O primeiro fruto dessa colaboração foi a apresentação do I Prêmio de Investigação no Âmbito Psicosocial para profissionais ou para pesquisadores vinculados à Psicologia que trabalhem em Canárias. Está dotado de 2000 euros e a publicação da obra. O prazo de apresentação de trabalhos finaliza o 20 de junho de 2010. Ademais A Universidade da Laguna concedeu-nos a Menção Honorífica (o primeiro prêmio foi para a saharaui Aminetu Haidar) do Prêmio à Criatividade Social que nos acabam de entregar no dia 12 de de dezembro en acto celebrado no Paraninfo da ULL.

Está próximo de convocar-se o II Prêmio Literário para autores e autoras até os 35 anos de qualquer parte do mundo contanto que a obra seja original e inédita e escrita em língua castelhana, está dedicado à poesia (com uma extensão entre 200 e 500 versos) e dotado com 2000 euros e publicação da obra ganhadora. O prazo de apresentação das obras finaliza o 31 de janeiro de 2011.

Por último, queremos assinalar que é a culminación de um bom ano para a FUNDAÇÃO CANARIA CARLOS SALVADOR E BEATRIZ, a modo de breve resumem: 1) ajudas de material escolar novo, em cerca de 40 actuações, a quatro países: Paraguai, Bolívia, Peru e Argentina, 2) dotação de mobiliario a duas escolas em Paraguai; 3) construção de serviços higiénicos a uma escola em Paraguai, 4) construção de uma nova escola, em caminho, em Paraguai por 10.300 euros; 5) II Prêmio Literário, agora em poesia; 6) I Prêmio de Psicologia (dotados ambos com 2000 euros e a publicação da obra), 7) patrocinio da Revista de Matemáticas "UNION" que chega a 13 países; 8)Bolsas, ajudas, etc...

É uma Fundação que parte da desgraça à esperança e está disposta a "fazer coisas pelos demais". Se não és sócio e desejas o ser é fácil: com 5 ou 10 euros ao ano podemos fazer muito pela educação, a cultura e a solidariedade.

Estamos orgulhosos mas não satisfeitos: podemos fazer mais.

Para ter mais informação, convidamos-lhes a que visitem nossa página site:

www.carlossalvadorybeatrizfundación.com

Há muitas fotos pois, muitas vezes, uma imagem vale mais que mil palavras…

¡¡Esperamos-lhes!!

UNIÓN
REVISTA IBEROAMERICANA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA

Diciembre de 2009, Número 20, páginas 173-181
ISSN: 1815-0640

VIII Reunión de didáctica del Cono Sur

La VIII REUNION DE DIDACTICA DE LA MATEMATICA DEL CONO SUR se realizó por primera vez en Asunción, Paraguay los días 10, 11 y 12 de setiembre del corriente, en la Universidad Iberoamericana. La organización del evento estuvo a cargo del COMITÉ DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA DEL PARAGUAY.

Comité Internacional de Didáctica de la Matemática del Cono Sur

Presidentes Honorarios: Dr. Luis Santaló
Dr. Ubiratan D'Ambrosio
Dra Alicia Villar
Prof. Nelly Tapia
Presidente: Miguel Angel Riggio
Vicepresidente: Ana Tadea Aragón.
Secretaria: Norma Susana Cotic.
Vocales: Begoña Grigoriu, Celia Carolino Pires, Avelina Jojot de Demestri, Hernán González Guajardo, Bernardo Camou y María de las Mercedes Moya
Vocales suplentes: Paulo Fegueiredo Lima, Miguel Díaz, María del Carmen Sartori, María Judith Cabral de Velázquez y Nilda Zubieta.

Comisión Organizadora Local

"Comité de Educación Matemática del Paraguay" C.E.M.P.A.

Comisión Directiva
Presidenta: Avelina Jojot de Demestri
Vicepresidenta: Pascuala Duarte
Secretaria: Nélida Centurión Acha
Prosecretaria: María Ediht Edwards de Pedro
Tesorera: Amelia Delgado
Protesorera: Emma Miró
Vocales: Mirian Segovia, Marta Rojas, Stela Ovelar de Smith, Zunilda Giret de Servín

Comité Evaluador

Norma Aragón, Edda Curi, Gustavo Bañuelos Tuma, Ada Ledesma, Etda Rodríguez, Rutilia Ramírez, Ramona Lezcano, Ingrid Wagenner, Selva Rojas de Valiente, Carmen Juliana Frutos de Vargas

Comité de Educación Matemática del Paraguay

La "VIII Reunión" fue declarada de Interés Educativo por Resolución N° 1951 del 23.12.08 por el Ministerio de Educación y Cultura y de Interés Institucional por la Facultad de Ciencias Exactas y Naturales. F.A.C.E.N.-U.N.A. y por la Universidad Iberoamericana. UNIBE

Este evento contó con la participación de importantes personalidades del mundo de la matemática, representantes de las Sociedades de Educación Matemática de América y de Europa, investigadores y educadores matemáticos quienes compartieron sus trabajos en 6 conferencias centrales, 8 conferencias paralelas, 31 talleres, 57 comunicaciones breves, y 9 posters. Abarcando los niveles de la Educación Inicial, Educación Escolar Básica, Educación Media , Universitaria, Formación Docente.

El acto inaugural se realizó en el Aula Magna de la UNIBE, el día jueves 10 con la presencia de autoridades del Ministerio de Educación y Cultura, del Vice Decano de la Facultad de Ciencias Exactas y Naturales de la U.N.A. y de los Vice Decanos de la Universidad Iberoamericana, UNIBE. La apertura estuvo a cargo de la Presidenta del Comité de Educación Matemática del Paraguay, Lic. Avelina Jojot de Demestri y la Conferencia Central a cargo de la Lic. Nancy Oilda Benitez, Directora General de Curriculum del Ministerio de Educación y Cultura.

Los invitados especiales fueron los Profesores: Luis Balbuena Castellano (España), Norma Cotic. (Argentina), Celia Carolino Pires. (Brasil), Antonia Gil Armas. (España) y Vicente Pistilli. (Paraguay).

Seguidamente se desarrollaron las actividades previstas en el programa, en las modalidades de Comunicaciones Breves, Talleres, Posters, Conferencias Paralelas y en el cierre del día se participó en la Conferencia Central: "Enseñanza de la Geometría desde distintas perspectivas" siendo disertante la Prof. Lic. Norma Cotic.

Las siguientes son algunas de las presentaciones llevadas a cabo en la Reunión:

Conferencias Centrales

- Enseñanza de la Geometría desde distintas perspectivas.
  Disertante: Norma Cotic. Argentina.
- La búsqueda de la matemática. El caso del Ñandutí.
  Disertante: Luis Balbuena Castellano. España
- La matemática en el Paraguay precolombino.
  Disertante: Vicente Pistilli. Paraguay
- Professores de matemática e conhecimento sobre organizacão e desenvolvimento curricular.
  Disertante: Celia Carolino Pires. Brasil.
- De la enseñanza de la Estadística a la Educación Estadística.
  Disertante: Antonia Rosa Gil Armas. España
- Cómo trabajar la Matemática en proyectos globalizadores.
  Disertante: Mercedes Camperi. Paraguay.

Conferencias Paralelas

- Como trabajar la matemática en Proyectos Globalizadores.
  Disertante: Mercedes Camperi. Paraguay.
- Las matemáticas como elementos educativos.
  Disertante: Christian Schaerer. Paraguay.
- Enseñanza de grafos: un desafío para los docentes.
  Disertante: Teresa Braicovich. Argentina.
- Gestión del conocimiento matemático.
  Disertante: Jorge Sagula. Argentina.
- La matemática de los Simpson.
  Disertante: Claudio Sánchez. Argentina.
- La necesidad de axiomatizar la teoría de conjuntos.
  Disertante: Dennis Redwiztz. Paraguay.
- Cuando dos más dos son cinco.
  Disertante: Luis Ramirez. Paraguay.
- Las adaptaciones curriculares como estrategia de acción docente.
  Disertante: Rocío Soledad Florentin. Paraguay.

Talleres, entre otros, se dictaron los siguientes:

- Estudio de las rotaciones en el plano con un software de geometría dinámica. Autores: Marta Martinez de Castilla y Sergio Peralta. Uruguay.

- La historia de la matemática en la formación actual de profesores. Autora: Ana Tadea Aragón. Argentina.
- “Hacia una matemática inteligente” La visión de la Teoría Inteligencias múltiples. Autores: Patrica María Talavera y Luis Fernando Ramírez. Paraguay.
- La manipulación un camino hacia la abstracción. Autores: Begoña Grigoriu; Nilda Zubiete. Bolivia.
- Un recorrido por el pensamiento geométrico. Autora: Norma S. Cotic. Argentina.
- La enseñanza de la Estadística mediante proyectos. Autora: Antonia Rosa Gil Armas. España.
- Modelización y Simulación numérica de problemas reales. Autor: Antonio Aquino. Paraguay.
- El uso de fichas didácticas en la enseñanza de la matemática: Un recurso de aula que promueve un pensamiento matemático. Autores: Miguel Alejandro Rodríguez; Ruth Galindo Navarro. Chile.
- Algunas curvas especiales. Autora: Etda Rodríguez. Uruguay.
- Recursos didácticos y modelos para la enseñanza de la geometría espacial. Autora: Ana María Redolfi Gandolfo. Brasil.

Comunicaciones breves, entre otras, se dictaron las siguientes:

- Tarefas fundamentais e o ensino de Geometría Analítica. Autor: Roberto Carlos Dantas. Brasil.
- Los disfraces de la Matemática. Autores: Martín Miguel Herran; Estela Valdez; Carlos P: Karla Viviana Obreque. Chile.
- A Geometría na Licenciatura de Matemática. Autor: José Carlos Pintos Leivas. Brasil.
- Ejemplos de aplicaciones didácticas de planillas electrónicas. Autor: Horacio Feliciangeli. Paraguay.
- El Teatro, un recurso didáctico en la enseñanza y el aprendizaje de la Matemática. Autora: Sonia Mabel García. Paraguay.
- Trabajando con el Libro Electrónico en un recurso de Polimodal. Autores: Ma. De las Mercedes Moya; Héctor Funes. Argentina.
- Estudio explorativo sobre el efecto de usar software educativo de Estadística para desarrollar la noción de variabilidad en alumnos de bachillerato. Autor: Jesús Sánchez. México.
- Los ciclos de resolución de problemas en la formación de profesores para desarrollar la idea de variación. Autores: Marta Bonilla; Luis Angel Bohorquez Arenas; Jaime Humberto Romero Cruz. Colombia.

De izquierda a derecha:
Luis Balbuena Castellano,
Avelina Jojot,
Celia Carolino Pires,
Norma S. Cotic,
Amparo R. de Velásquez (Vicerrectora de la UNIBE) ,
Nidia Sanabria de Romero (Presidenta de la UNIBE) ,
Etda Rodriguez,
Ana Aragón,
José Luis Muniz

El evento contó con la participación de aproximadamente 120 expositores y participantes de: Argentina, Brasil, Uruguay, Chile, Bolivia, Colombia, México, España y de aproximadamente 185 paraguayos.

FOTODE~1.JPG

El día viernes 11 se rindió un homenaje a la **Prof. Lic. ALICIA VILLAR,** destacada educadora uruguaya, Fundadora de las Reuniones de Didáctica de la Matemática del Cono Sur.

El Prof. Lic. José Luis Muñiz leyó la laudatio de Alicia. También, destacaron la labor desempeñada por la Dra Alicia Villar, la Prof. Lic. Ana Tadea Aragón (Argentina), Prof. Lic. Etda Rodríguez (Uruguay) y el Prof. Lic. Luis Balbuena (España).

Así mismo la Comisión Organizadora de las Reuniones de Didáctica de la Matemática del Cono Sur otorgó a la Profesora Alicia una placa recordatoria, también la FISEM se ha hecho presente con otra placa y la Universidad Iberoamericana le ha otorgado una Mención Honorífica.

Placa recordatoria de la FISEM

A continuación de este homenaje se compartió un acto artístico y un brindis de confraternidad con todos los presentes.

El día sábado 12 las actividades se desarrollaron normalmente, de acuerdo al programa establecido.

El cierre del evento estuvo a cargo del Prof. Lic. Luis Balbuena, quién presentó la conferencia: “La búsqueda de la matemática: el caso del Ñandutí”, en la misma se pudo apreciar los fundamentos matemáticos que subyacen en los encajes de ñandutí, aportando de esta forma una mirada “matemática” al bello material artesanal.

A continuación se transcribe la Laudatio de la Dra. Alicia Villar, a cargo del Lic. José Luis Muñiz:

Acto de homenaje a Alicia Villar.

Comenzaré diciendo que es un alto honor para mí, el que se me haya encargado realizar esta *laudatio*, en la cual tengo que plantearles una reflexión lo más objetiva posible que responda a las razones por las que estamos realizando el merecido Homenaje a la Profesora Alicia Villar. Una reflexión que se hace difícil en su tono si tenemos en cuenta que hay también, necesariamente, una dosis de emoción en todo lo que yo pueda decir: a la imagen de la profesora, un día sucedió la de la compañera y luego la de la amiga.

Conocí a Alicia en mi formación como profesor. Profesora de Matemática y Física egresada del Instituto de Profesores Artigas. Excelentes calificaciones en las dos carreras!!!!!! Ya había concluido sus estudios de Profesor Agregado en Geometría, en la misma casa de estudios y su Doctorado en Metodología y Didáctica de la Matemática, realizado en la ciudad de Roma en donde contó, entre otros, con la profesora Ema Castelnuovo.

Por supuesto ya había iniciado su producción bibliográfica con Libros de texto de Matemática y obviamente seguía elaborando más y más. Para la Escuela Primaria el libro de texto "Matemática segundo año". En la Enseñanza Secundaria y Profesorado, la serie de Módulos Didácticos: "La Matemática y el mundial de Fútbol", "Número de oro, arte y la pintura de Joaquín Torres García", "Volver al futuro" y "Enseñando Geometría", son algunas muestras.

Sobreviene luego la época en la que, en todo lo que incursiona, tiene éxito; obtuvo varios premios, algunos ejemplos son:

- En una emisora radial uruguaya (radio Carve) por difundir temas de Educación Matemática para todo el país (Montevideo 1988).
- En una exposición internacional de Ciencias en Brasil, junto a alumnos de Enseñanza Secundaria (Campinas 1989).
- "La señorita Blackie". Un cuento matemático con el que obtuvo el primer premio en un concurso en Literatura, otorgado por una prestigiosa revista uruguaya (Montevideo 1995).
- Con el libro de texto: "Matemática segundo año", libro para la Escuela Primaria en Uruguay (Montevideo 1998).

Trabajadora incansable, dictó cursos en innumerables ocasiones y sobre diversos temas. Son ejemplos de ello, los de Secundaria en Uruguay, y, muchos de los cursos de Profesorado. Además los de Alta Dirección en la Presidencia de la República y en la Oficina del Servicio Civil para capacitar funcionarios. Cursos de Lógica y otros de Creatividad y Humanidad para altos ejecutivos de la Administración Pública. Sin dejar de contar los Minicursos de Educación Matemática dados en Radio Nuevotiempo.

Figura destacada en diversos congresos (CIAEM, CIBEM, ICMI y RDMCS, entre otros) llevando adelante diversos talleres, cursos y minicursos, así como ponencias y conferencias.

Ha organizado congresos de Educación Matemática nacionales en nuestro país e internacionales como por ejemplo la X CIAEM, en 1999, en Uruguay. Fue miembro de diferentes comités: varias veces vocal y Vicepresidenta, del comité de la Conferencia InterAmericana de Educación Matemática y, vicepresidenta también, del comité de la Reunión de Didáctica de Matemática del Cono Sur, reunión que fue gestada fundamentalmente por ella, en año 1992.

Impulsó la creación de los primeros posgrados en Educación Matemática a nivel oficial en Uruguay. Luego de creados, en el año 1990, se desempeñó como profesora y tutora de las tesis.

Es de hacer notar que fue precursora en Investigación Didáctica en nuestro país, en una época cuando nadie hablaba de Investigación en Educación. Queda así en evidencia además, su capacidad de innovar: gracias a ella, se desarrolla el concepto innovación educativa en Uruguay.

Por otro lado es imposible no tener en cuenta hoy por ejemplo:

- cuando escribía en el pizarrón, algún dibujo o alguna demostración de un teorema, sin mirar el pizarrón: siempre mirando a la clase!!! ¿Quién puede olvidar eso?
- o cuando decía "tomando el sol en el jardín de casa se me ocurrió este problema", proponerlo y después claro … había que resolverlo!!!
- su imagen, descendiendo elegantísima por las escaleras de nuestra casa de estudios: el querido Instituto de Profesores Artigas.
- o su particular manera de cruzar Av. Del Libertador. *La primera vez que lo hice con ella, realmente me asusté, pero llegamos ilesos al IPA: <u>Alicia no cruza por los semáforos</u>. Otro fue el chiste cuando lo hicimos (o mejor dicho, lo hizo ella y yo la seguí) en una ocasión en Caracas, donde el tránsito es mucho más desordenado que en Montevideo, y, realmente, en esa ocasión creí que tenía que ir a algún hospital o algo así, en lugar de ir al Congreso que nos convocaba en ese momento.*
- <u>recordar</u> también, su alegría y su satisfacción cuando vio que "sus alumnos" pasábamos a ser "sus colegas": los colegas de Alicia Villar.

¿Desde cuándo irrumpe su personalidad en la vida de sus alumnos?

- Desde mis primeras prácticas de aula. Pocos deben ser los que no le preguntaron alguna vez: Alicia ¿cómo darías este tema? Alicia ¿por qué lado se entenderá más este teorema en quinto?
- Desde mis prácticas áulicas de más grande. Intentando escribir en el pizarrón sin dejar de mirar a mis alumnos, por ejemplo.
- Desde mis viajes académicos. Cuando enorgullece comprobar que en el exterior no solo es conocida, sino que es reconocida por su excelencia profesional.
- Ciertamente desde cualquier situación. Recuerdo sorprenderme evocándola una vez, frente a un cuadro de la época cubista de Picasso y pensar "Todo lo que haría Alicia con esto!!!!!!"

En ese proceso, en el cual se nos avisa que todo transcurre, la profesora Villar, pasó de ser la profesora del IPA, a ser la compañera en Jornadas y Congresos, y, la amiga, con la cual no solo compartimos viajes de placer, sino que logró que su presencia, definitivamente, se instalara en la vida de muchos de nosotros, ocupando espacios profesionales y personales, verdaderamente importantes.

Alicia nos ha enseñado tanto!!!

- a entender para qué sirve el método de Inducción Completa. *Cuando yo ingresé al IPA, tenía un grupo de compañeros de clase realmente buenos (hoy excelentes profesionales todos) y, creíamos que poco era lo que íbamos a aprender de Matemática. El día que Alicia comenzó hablando del Axioma de Inducción Completa, del teorema y luego del método de I.C., muchos de nosotros quedamos maravillados y a la vez pasmados, porque veníamos realizando "ejercicios" de Inducción Completa mecánicamente, sin entender la esencia, que era exactamente lo que descubríamos en ese momento.*
- a explicarles a nuestros alumnos que Ruffini no es una escalera; "aunque ellos bajen por Ruffini".
- a comprender que **lo más difícil de todo, es explicar de manera sencilla**.

Tanto, tanto nos enseñó, que también hoy, cuando tengo que dialogar con mis alumnos del IPA, busco la forma de ser claro y justo, como lo es ella a la hora de dar indicaciones, y trato de alimentar su vocación y "acompañar" sus carreras, tal como ella lo hizo con muchos de nosotros.

Por todo esto, es que me alegra que hoy estemos realizando este merecido homenaje.

Asunción, septiembre de 2009.

UNIÓN
REVISTA IBEROAMERICANA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA

Diciembre de 2009, Número 20, páginas 183-184
ISSN: 1815-0640

Convocatorias y eventos

AÑO 2010

IV CONGRESO PERUANO DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA
Organiza: Sociedad Peruana de Educación Matemática.
Lugar: Lima. Perú.
Fecha: 20 al 23 de enero de 2010
Información: ivconem@sopemat.org
http://www.sopemat.org

V COLOQUIO INTERNACIONAL SOBRE ENSEÑANZA DE LAS MATEMÁTICAS
Organizan: IREM-Perú y Maestría en Enseñanza de las Matemáticas de la Pontificia Universidad Católica del Perú (PUCP).
Lugar: Lima. Perú.
Fecha: 10 al 12 de febrero de 2010.
Más información: irem@pucp.edu.pe
http://www.pucp.edu.pe/departamento/ciencias/matematicas/irem

virtual educa   Universidad de Alcalá   FUNDIBEQ

I Congreso Iberoamericano sobre Calidad de la Formación Virtual (CAFVIR 2010)
Alcalá de Henares (España), 24-26 de Febrero de 2010
Más información: cafvir2010@uah.es
http://www.cafvir2010.uah.es

III Jornada Nacional de Educação Matemática.
XVI Jornada Regional de Educação Matemática
Organiza: Instituto de Ciências Exatas e Geociências. Laboratório de Matemática. Universidade de Passo Fundo.
Lugar: Rio Grande do Sur. Brasil.
Fecha: 4 al 7 de mayo de 2010.

---

24 Reunión Latinoamericana de Matemática Educativa (RELME 24)
Ciudad de Guatemala- Guatemala
Convoca: Comité Latinoamericano de Matemática Educativa.
Fecha: 5 al 9 de Julio de 2010
Información: www.clame.org.mx - clame@clame.org.mx

8º International Conference on Teaching Statistics (ICOTS 8)
Lugar: Ljubljan, Eslovenia
Fecha: 11 al 16 de Julio, 2010
Información: http://icots8.org/

VII Congreso Venezolano de Educación Matemática
Organiza: Asovemat
Lugar: Caracas. Venezuela.
Fecha: 5 al 8 de octubre 2010
Información: **asovematrc@cantv.net**

AÑO 2011

XIII CIAEM: XIII Conferencia Iberoamericana de Educación Matemática
Lugar**:** Recife. Brasil
Convoca: Comité Interamericano de Educación Matemática.
Fecha: 26 al 29 de junio de 2011
Información: http://www.ce.ufpe.br/ciaem2011

UNIÓN
REVISTA IBEROAMERICANA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA

Diciembre de 2009, Número 20, página 185-186
ISSN: 1815-0640

Normas para publicar en Unión

1. Los trabajos para publicar se deben enviar a union.fisem@sinewton.org con copia a revistaunion@gmail.com. Deben ser originales y no estar en proceso de publicación en ninguna otra revista. Serán remitidos a varios evaluadores y el Comité editorial de la Revista decidirá finalmente sobre su publicación.
2. Los artículos remitidos para publicación deben ser escritos en Word, preferentemente usando la plantilla establecida al efecto (descargar plantilla) y, en todo caso, cumpliendo las siguientes normas: letra tipo **arial**, tamaño **12 puntos**, interlineado simple, márgenes de 2,5 cm. como mínimo en los 4 bordes del papel, tamaño DIN A-4. La extensión no debe ser superior a las 20 páginas, incluyendo figuras, que deben estar situadas en el lugar del texto donde deben ser publicadas. La simbología matemática necesaria se escribirá con el editor de ecuaciones de Word, se insertará como una imagen o se realizarán utilizando los símbolos disponibles en el juego de caracteres "Arial". Es importante no cambiar el juego de caracteres, especialmente **evitar el uso del tipo "Symbol"** u otros similares.
3. Las **ilustraciones y fotografías** deben estar situadas en el lugar del texto donde deben ser publicadas. Si es posible, los "pie de foto" se escribirán dentro de un "cuadro de texto" de Word (con o sin bordes) que estará "agrupado" con la imagen de referencia. Se deben numerar usando: Fig. 1, Fig. 2,… Tabla 1, Tabla 2,…
4. El artículo deberá comenzar con un **resumen(español) o resumo(portugués) y abstract (inglés)**, que tendrá una longitud máxima de 6 líneas.
5. Teniendo en cuenta el carácter internacional de la revista, se hace indispensable que cuando los autores se refieran a un determinado sistema educativo nacional lo hagan constar expresamente y que siempre que se trate de un nivel educativo se indique la edad normal de los alumnos, lo que permitirá la comparación con el sistema educativo nacional del lector.
6. Los datos de identificación de los autores deben figurar en la última página del mismo documento word que contiene el artículo. Con el fin de garantizar el anonimato en el proceso de evaluación, solamente estarán los **datos personales** en esta **última página**. En ella se hará constar los siguientes datos:
   - **De contacto**: nombre, dirección electrónica, dirección postal, teléfono.
   - **Para la publicación**: centro de trabajo, lugar de residencia y/o del centro de trabajo, así como una breve reseña biográfica de unas cinco líneas

   - Las referencias bibliográficas se incluirán al final del trabajo (y antes de la hoja de datos identificativos) y deben seguir los formatos que se indican a continuación.

   Para un libro:

   Bourbaki, N. (1972). *Elementos de historia de las matemáticas.* Editorial Alianza, Madrid. España.

   Bermejo, A. (1998). *La enseñanza de la geometría en la educación primaria.* Editorial Pico Alto, Buenos Aires. Argentina.

Para un artículo:

Ibáñez, M. y Ortega, T. (1997). *La demostración en matemáticas. Clasificación y ejemplos en el marco de la educación secundaria*. Educación Matemática 9, 65-104.

Díaz, C. y Fernández, E. (2002). *Actividades con ordenador para la enseñanza de la suma*. Revista de didáctica de las matemáticas 19, 77-87.

Para un capítulo de libro:

Albert, D. y Thomas, M. (1991).Research on mathematical proof. En: Tall, D. (ed.), Advanced Mathematical Thinking, 215-230. Kluwer, Dordrecht.

Para artículo de revista electrónica o información en Internet:

García Cruz, J. (2008*). Génesis histórica y enseñanza de las matemáticas*. UNIÓN Nº14 [en línea]. Recuperado el 20 de marzo de 2009, de http://www.fisem.org/paginas/union/info.php?id=320

NOTA: Las normas que se indican en los puntos 2, 3 y 6 pretenden dar uniformidad a los trabajos que se reciban en la redacción y simplificar así el trabajo de composición y maquetación de la revista. Si alguien tiene dudas sobre su aplicación, puede dirigir sus preguntas (lo más concretas posible) a revistaunion@gmail.com