UNIÓN
REVISTA IBEROAMERICANA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA

Número 22 – Junio de 2010

Índice

UNIÓN
REVISTA IBEROAMERICANA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA

Junio de 2010, Número 22, páginas 3-4
ISSN: 1815-0640

Unión. Revista Iberoamericana de Educación Matemática es una publicación de la Federación Iberoamericana de Sociedades de Educación Matemática **(FISEM)**. Tiene una periodicidad trimestral, de modo que se publican cuatro números al año, en los meses de marzo, junio, septiembre y diciembre.

Es recensionada en ***Mathematics Education Database*** y está incluida en el catálogo ***Latindex*.**

Evaluadores

Pilar Acosta Sosa
María Mercedes Aravena Díaz
Lorenzo J Blanco Nieto
Natael Cabral
María Luz Callejo de la Vega
Matías Camacho Machín
Agustín Carrillo de Albornoz
Silvia Caronia
Eva Cid Castro
Carlos Correia de Sá
Cecilia Rita Crespo Crespo
Miguel Chaquiam
María Mercedes Colombo
Patricia Detzel
Dolores de la Coba
José Ángel Dorta Díaz
Rafael Escolano Vizcarra
Isabel Escudero Pérez
María Candelaria Espinel Febles
Alicia Fort
Carmen Galván Fernández
María Carmen García Gonzalez
María Mercedes García Blanco
José María Gavilán Izquierdo
Margarita González Hernández
María Soledad González
Nelson Hein
Josefa Hernández Domínguez
Rosa Martinez
José Manuel Matos
José Muñoz Santonja
Raimundo Ángel Olfos Ayarza
Luiz Otavio.
Manuel Pazos Crespo
María Carmen Peñalva Martínez
Inés Plasencia
María Encarnación Reyes Iglesias
Natahali Martín Rodríguez
María Elena Ruiz
Victoria Sánchez García
Leonor Santos
Maria de Lurdes Serrazina
Martín M. Socas Robayna
María Dolores Suescun Batista
Ana Tadea Aragón
Mónica Ester Villarreal
Antonino Viviano Di Stefano

Diseño y maquetación

Diseño web: Daniel García Asensio
Textos: Vilma Giudice
Logotipo de Unión: Eudaldo Lorenzo
webmaster: Elda Beatriz Micheli

Colabora

CARLOS
SALVADOR
Y BEATRIZ
FUNDACIÓN
CANARIA

REVISTA IBEROAMERICANA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA

Junio de 2010, Número 22, páginas 5-6
ISSN: 1815-0640

Editorial

"Nos olvidamos pronto
de lo que hemos aprendido;
no nos olvidamos nunca
de lo que hemos descubierto"

Emile de Girardin

Estimados colegas y amigos:

En este número estamos compartiendo excelentes artículos de colegas que se desempeñan en distintos niveles educativos y diferentes contextos que invitan a la reflexión sobre nuestra práctica y a enriquecernos con los aportes de investigación. Nuestra firma invitada nos ofrece un descripción de la génesis y el desarrollo de una de las líneas de investigación de la didáctica de la matemática de las últimas tres décadas.

Se presentan temas tan interesantes como: la enseñanza de funciones a través de metodologías y estrategias novedosas y la utilización de recursos informáticos acordes, la resolución de problemas que inducen a modificar actitudes ante la matemática y a adquirir nuevas competencias, la modelización como recurso didáctico, geometrías no euclidianas, y también otros temas que se introducen ya sea como experiencias o reportes de investigación.

Los colaboradores de las Secciones fijas nos brindan, como siempre, propuestas muy interesantes sobre desafíos matemáticos, utilización de GeoGebra, materiales didácticos, reseñas de libros y páginas web, etc.

A todos ellos, y a los demás que han colaborado en esta edición, evaluando artículos, asesorando, etc. les agradecemos e invitamos a continuar con nosotros en esta hermosa tarea de divulgación.

Mostramos también la gran obra que ha realizado y se encuentra realizando la **Fundación Canaria Carlos Salvador y Beatriz** en Paraguay, donde se encuentra construyendo una escuela.

Para finalizar, adaptamos el lema propuesto en el Congreso Iberoamericano de Educación. Metas 2021, que se realizará en la ciudad de Buenos Aires en el mes de septiembre de este año:

"***Pensemos entre todos la Educación Matemática que deseamos***"

Un fuerte abrazo

Norma S. Cotic – Teresa C. Braicovich
Directoras

Editorial

“Esquecemos-nos cedo
do que aprendemos;
não nos esquecemos nunca
do que descobrimos”

Emile de Girardin

Estimados colegas e amigos:

Neste número estamos a compartilhar excelentes artigos de colegas que se desempenham em diferentes níveis educativos e diferentes contextos que convidam à reflexão sobre nossa prática e a nos enriquecer com os contribuas de investigação. Nossa assinatura convidada oferece-nos uma descrição da génesis e o desenvolvimento de uma das linhas de investigação da didáctica da matemática em Espanha durante as últimas três décadas.

Apresentam-se temas tão interessantes como: o ensino de funções através de metodologías e estratégias inovadoras e a utilização de recursos informáticos conformes, a resolução de problemas que induzem a modificar atitudes ante a matemática e a adquirir novas concorrências, a modelización como recurso didáctico, geometrías não euclidianas, e também outros temas que se introduzem já seja como experiências ou como reportes de investigação.

Os colaboradores das Secções fixas brindam-nos, como sempre, propostas muito interessantes sobre desafios matemáticos, utilização de GeoGebra, materiais didácticos, reseñas de livros e páginas web, etc.

A todos eles, e aos demais que colaboraram nesta edição, avaliando artigos, asesorándonos, lhes agradecemos e convidamos a continuar conosco nesta formosa tarefa de divulgação.

Mostrámos também a grande obra que realizou e se encontra realizando a **Fundação Canaria Carlos Salvador e Beatriz** em Paraguai, onde está a construir uma escola.

Para finalizar, adaptamos o lema proposto no Congresso Iberoamericano de Educação. Metas 2021, que realizar-se-á na cidade de Buenos Aires, Argentina, no mês de setembro deste ano:

“***Pensemos entre todos a Educação Matemática que desejamos***

Um forte abraço.

Norma S. Cotic – Teresa C. Braicovich
Directoras

UNIÓN
REVISTA IBEROAMERICANA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA
firma invitada

Junio de 2010, Número 22, página 7
ISSN: 1815-0640

Josep Gascón Pérez

Breve Reseña

Nació en Badalona (Barcelona) en 1951 y se licenció en Ciencias Matemáticas en 1975 por la Universitat de Barcelona. En 1980 obtuvo, por oposición libre, el título de catedrático de Bachillerato de Matemáticas y en 1989 el título de Doctor en Matemáticas por la Universitat Autònoma de Barcelona (UAB) con la primera tesis de didáctica de las matemáticas aceptada en el departamento de matemáticas de la UAB: *El aprendizaje de métodos de resolución de problemas de matemáticas*.

Trabaja en didáctica de las matemáticas desde 1981. Es profesor de didáctica de las matemáticas en el Departamento de Matemáticas de la UAB desde el curso 1987-1988. Actualmente es Profesor Agregado a tiempo completo en dicho departamento.

Es autor de numerosos libros de texto de matemáticas de todos los niveles de Enseñanza Secundaria. Entre los libros de los que es autor destaca el elaborado en colaboración con Yves Chevallard y Marianna Bosch: *Estudiar matemáticas. El eslabón perdido entre la enseñanza y el aprendizaje* (Barcelona: ICEUB/Horsori, 1997) del que se han publicado diversas ediciones en México, Brasil y Perú.

Ha impartido cursos de *doctorado* de didáctica de las matemáticas y de *formación del profesorado* en numerosas universidades españolas e iberoamericanas. Desde 1990 trabaja en el ámbito de la Teoría Antropológica de lo Didáctico (TAD) en estrecha colaboración con Marianna Bosch e Yves Chevallard. Sus investigaciones versan sobre el álgebra elemental, el paso de Secundaria a la Universidad, los Talleres de Prácticas Matemáticas, el problema de la articulación de la matemática escolar, el análisis didáctico de la actividad matemática, las prácticas docentes del profesor de matemáticas, la formación del profesorado, la ecología de la modelización matemática y el diseño y experimentación de Recorridos de Estudio e Investigación. En relación a estos temas ha publicado múltiples artículos en las principales revistas científicas de todo el mundo.

UNIÓN
REVISTA IBEROAMERICANA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA
Junio de 2010, Número 22, páginas 9-35
ISSN: 1815-0640

firma invitada

Del *Problem Solving* a los *Recorridos de Estudio e Investigación*. Crónica del viaje colectivo de una comunidad científica

Josep Gascón Pérez

Resumen

En este trabajo describiremos brevemente la génesis y el desarrollo de *una de las líneas de investigación* de la didáctica de las matemáticas en España desde principios de los años 80 del pasado siglo hasta nuestros días. Esta descripción será inevitablemente sesgada y en cierta medida autobiográfica, pero los verdaderos protagonistas de la historia serán los problemas a los que una pequeña comunidad se ha enfrentado a lo largo de estos 30 años. Ambos, los tipos de problemas y la comunidad, han evolucionado paralelamente y ésta se ha constituido como comunidad científica compartiendo, utilizando y desarrollando la Teoría Antropológica de lo Didáctico (Chevallard 1992, 1997, 1999; Chevallard, Bosch & Gascón 1997)

Abstract

In this work we will describe brief the genesis and the development of one of the lines of investigation of the didactics of the mathematics in Spain from beginning of the 80s of last century to the present day. This description will be inevitably slanted and uo to a point autobiographical, but the real protagonists of the history will be the problems which a small community has faced throughout these 30 years. Both, the types of problems and the community, they have evolved parallel and this one has been constituted as scientific community sharing, using and developing the Anthropologic Theory of the Didactic. (Chevallard 1992, 1997, 1999; Chevallard, Bosch & Gascón 1997)

Resumo

Neste trabalho descreveremos brevemente a gênese e o desenvolvimento de uma das linhas de pesquisa da didática das matemáticas na Espanha desde princípios dos anos 80 do século passado até os nossos dias. Esta descrição será inevitavelmente sesgada e em certa medida autobiográfica, mas os verdadeiros protagonistas da história serão os problemas aos que uma pequena comunidade se enfrentou ao longo destes 30 anos. Ambos, os tipos de problemas e a comunidade, evoluíram paralelamente e esta se constituiu como comunidade científica compartilhando, utilizando e desenvolvendo a Teoria Antropológica da Didática (Chevallard 1992, 1997, 1999; Chevallard, Bosch & Gascón 1997).

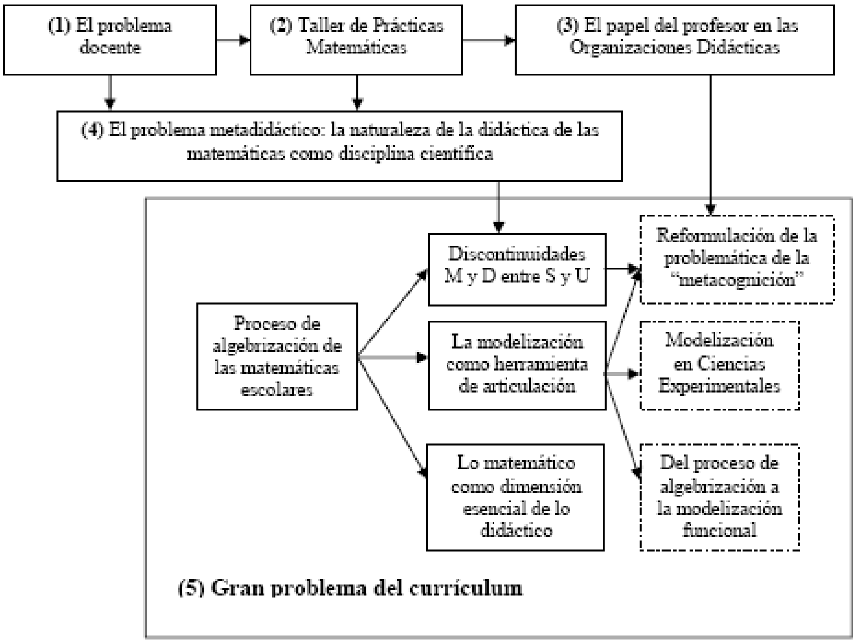
Josep Gascón Pérez

> Si estuviera reescribiendo este libro empezaría con un análisis de la estructura comunitaria de la ciencia, tema que recientemente se ha convertido en importante objeto de la investigación sociológica, y que también empiezan a tomar en serio los historiadores de la ciencia.
>
> Thomas S. Kuhn
> *La estructura de las revoluciones científicas*
> *Posdata* (1969)

Introducción

El desarrollo de toda disciplina científica está profundamente ligado, como no podría ser de otra manera, a la *evolución de los problemas* de los que sucesivamente se ocupa y, por tanto, debe interpretarse a la luz del desarrollo de dichos problemas. Como sucede en todos los ámbitos científicos el desarrollo de la didáctica de las matemáticas se lleva a cabo en el seno de una comunidad de investigadores fragmentada en pequeñas subcomunidades. En lo que sigue tomaremos como protagonistas de la narración a los *problemas didácticos* que constituyen la "razón de ser" de una de dichas subcomunidades.[1]

Con la perspectiva que proporcionan treinta años de trabajo continuado, podemos mostrar un esquema general de las cuestiones problemáticas que nuestra comunidad ha ido estudiando a lo largo de todo este tiempo y disponer así de un mapa global del recorrido. Es importante subrayar, sin embargo, que la evolución de esta problemática no ha sido continua ni lineal ni, mucho menos, previsible de antemano y que se ha ido diversificando a medida que se tomaba conciencia de la magnitud y la complejidad del *problema de la Educación Matemática* (Gascón 2002). Esquemáticamente puede hablarse de cinco líneas de investigación profundamente relacionadas entre sí, que surgen históricamente de un *problema docente* (Gascón 1999b).



[1] Utilizaré las notas a pie de página para dar algunos datos biográficos de esta pequeña comunidad científica que también denominaré "nuestra comunidad". A este respecto hay que decir que si bien en la primera mitad de este periodo (1980-1995) yo fui el responsable de coordinar el trabajo de la citada comunidad, desde 1995 podemos hablar de una coordinación compartida con Marianna Bosch.

En determinados trabajos, y hasta en ciertas etapas relativamente prolongadas, algunos de estos problemas toman un protagonismo especial mientras que otros parecen haber desaparecido completamente. Pero a la larga los problemas importantes reaparecen con nuevas implicaciones, modificando de nuevo el panorama de la problemática didáctica global[2].

1. La problemática docente de la enseñanza de las matemáticas como punto de partida

Si nos situamos en 1980 podemos visualizar una pequeña comunidad de profesores de matemáticas que no compartíamos el punto de vista mayoritario que consideraba en aquel momento la enseñanza de las matemáticas como un "arte" que difícilmente podía ser objeto de investigaciones sistemáticas ni de indagaciones disciplinadas. En contra de esta idea dominante empezaba a tomar fuerza en nuestra incipiente comunidad la convicción de que muchas cuestiones importantes y no triviales relativas a la enseñanza de las matemáticas eran ignoradas debido a una falsa *transparencia* originada por su inmediatez. Reclamábamos, en consecuencia, un cierto *distanciamiento* para poder llevar a cabo un estudio "científico" de la problemática docente del profesor de matemáticas.

Se empezaba así a poner en duda la que podríamos denominar *solución del sentido común* al problema de la Educación Matemática y, en particular, los presupuestos implícitos (y también muchos de los explícitos) del *movimiento de renovación de materiales*, que había jugado un papel muy importante en la dinamización de la enseñanza de las matemáticas en España a lo largo de la década de los 70 pero que, por razones que nadie intentaba explicar, no estaba dando en la práctica los resultados esperados.

Empezaron a plantearse preguntas que apuntaban hacia una especie de investigación "fundamental". Entre dichas preguntas podemos citar:

(a) ¿Cómo *fundamentar los criterios* para decidir el tipo de material matemático que debería diseñarse así como la metodología didáctica más adecuada en una situación escolar dada? Se preconizaba así, aunque de forma incipiente, la irrenunciable ambición de construir una nueva disciplina científico-experimental: la didáctica de las matemáticas.

(b) ¿De donde proviene la *misteriosa persistencia y universalidad* de las dificultades en el aprendizaje de las matemáticas?

(c) ¿Hasta qué punto estas dificultades dependen de la *especificidad de los diferentes aprendizajes matemáticos*? De aquí emergerá posteriormente la convicción de que la nueva ciencia debería desarrollarse en el seno de la comunidad matemática porque su objeto de estudio era, primariamente, la propia actividad matemática.

(d) ¿Cuál es la relación entre *motivación y aprendizaje*? ¿Existe una relación causal simple entre ellas o, simplemente, una correlación alta?

[2] Así, por ejemplo, la problemática en torno a la *dimensión ostensiva* de la actividad matemática fue abordada en la tesis de Marianna Bosch (1994) y ha reaparecido recientemente con fuerza (Arzarello et Alt. 2008).

(e) ¿Cómo medir experimentalmente los *cambios en el aprendizaje* producidos por una intervención didáctica determinada?

Esta primera etapa concluye con las investigaciones relativas a la *Resolución de Problemas*[3] y una interpretación crítica del movimiento clásico del *Problem Solving* mediante el planteamiento de una problemática más básica:

(1) ¿Qué se entiende por *problema de matemáticas*? ¿Qué papel juegan los problemas resolubles mediante un *algoritmo*? ¿Y los problemas de *demostración*?

(2) ¿Problemas aislados o *clases de problemas*? ¿De donde extraer los criterios de clasificación de problemas?

(3) ¿Cómo diseñar una instrucción dirigida a mejorar la capacidad de resolver problemas? ¿Basta con dar una "descripción" de la actividad que llevan a cabo los resolutores expertos? (Kilpatrick 1967) ¿De donde extraer, en este caso, las categorías para llevar a cabo dicha descripción? ¿No sería necesario utilizar un modelo teórico?

(4) ¿Cómo identificar los cambios que sufre la actividad de resolución de problemas en función del tipo de instrucción escolar?

Sin pretender resumir aquí las respuestas (parciales) a estas cuestiones que empezaron a emerger en el trabajo de nuestra incipiente comunidad, describiremos brevemente los *supuestos metodológicos y epistemológicos* en los que dichas respuestas se fundamentaban. Esta explicitación de los supuestos básicos es importante porque es precisamente la evolución de los mismos y su crítica parcial o, en otros términos, su *contextualización en un marco más comprensivo*, la que dará origen posteriormente a nuevas perspectivas de la investigación y, en definitiva, constituirá el motor que hará evolucionar la problemática.

En primer lugar no se pretendía investigar los *mecanismos psicológicos* del aprendizaje de los métodos de resolución de problemas. En consecuencia se definía *problema*, *clase de problemas* y *método de resolución* sin hacer ninguna referencia a los estados mentales del sujeto que resuelve el problema. En segundo lugar, el interés se centraba en el *dominio de los métodos de resolución*, en lugar de utilizar la actividad de resolución de problemas para motivar o posibilitar la adquisición de ciertos *sistemas conceptuales*. En tercer lugar se introducía la noción de *alumno hipotético* con el objetivo de idealizar la actividad de resolución de problemas y liberarla, provisionalmente, de las variables contextuales y cognitivas que distorsionan la estructura formal de los métodos de resolución.

A partir de estos supuestos básicos se proponía un esbozo de una teoría general de la resolución de problemas de matemáticas, se diseñaban metodologías didácticas concretas y se formulaban hipótesis contrastables empíricamente. Dicha contrastación se llevó a cabo en el aula, iniciándose así el estudio de la *actuación del solucionador real de problemas* en base al modelo proporcionado por el alumno hipotético.

[3] Uno de los frutos de esta primera etapa es la presentación de la tesis doctoral (Gascón 1989). Esta tesis fue la primera de Didáctica de las Matemáticas que se leía en el Departamento de Matemáticas de la Universitat Autònoma de Barcelona. Para poder ser aceptada se requirieron informes favorables de los profesores Lluis Santaló y Peter Hilton.

2. Primera ampliación de la problemática. El *Taller de Prácticas Matemáticas* y la necesidad de nuevos dispositivos didácticos

A finales de los años 80 y principios de los 90 entramos en contacto con los trabajos sobre *modelización* llevados a cabo por el equipo del profesor Yves Chevallard de la Universidad de Aix-Marsella. Los resultados de estos trabajos influyeron sobre nuestro punto de vista respecto al papel de la Resolución de Problemas en el ámbito global de la enseñanza escolar de las matemáticas.

Estos trabajos se situaban en la línea de los análisis precursores de Guy Brousseau de los fenómenos didácticos dentro de una perspectiva sistémica. En síntesis, mientras la tradición anglosajona del *Problem Solving*[4] centró el interés en torno a las reglas heurísticas potencialmente útiles para resolver problemas (lo que constituye una posible interpretación, pero no la única, de la heurística de Pólya), la mal denominada "escuela francesa" se interesó prioritariamente por la *situación didáctica* creada en torno a la actividad de resolución de problemas en el aula, entendiendo esta actividad como un medio para "hacer matemáticas" más que como un fin en sí misma.

Estos trabajos mostraban que el punto de vista dominante en el movimiento clásico del *Problem Solving* tendía a provocar una *descontextualización del problema*: éste se presentaba, en el uso escolar habitual, *aislado y sin conexión con el sistema* (matemático o extra-matemático) a partir del cual surge en una determinada actividad matemática. Se planteaba, implícitamente, una cierta contraposición entre el *conocimiento del sistema* y la simple *resolución de los problemas* que resultan (o deberían resultar) del estudio del mismo. Esta separación podría explicar, al menos parcialmente, la dificultad de los alumnos para hacerse suyo el problema (la *devolución del problema* en la terminología de Brousseau), dado que dicha devolución sólo parece posible a partir de una devolución previa del sistema en el seno del cual surge el problema en cuestión.

¿Cuál es la relación entre este punto de vista y los trabajos iniciales de nuestra comunidad en resolución de problemas? La respuesta no es sencilla, pero lo que está claro es que en ambos casos se pretende superar, aunque en direcciones diferentes, las limitaciones del punto de vista clásico sobre la resolución de problemas liderado por el movimiento del *Problem Solving*.

Parecía interesante, por tanto, plantearse la posibilidad de elaborar un modelo capaz de abarcar ambas generalizaciones: la que lleva del problema a un método de resolución y, por lo tanto, al *estudio de una clase de problemas* y la que lleva del problema a un *sistema* (matemático o extra-matemático) que le proporciona un contexto y que converge en el *proceso de modelización de dicho sistema.*

[4] El denominado movimiento del *Problem Solving* en matemáticas tiene su origen en los trabajos de Pólya (1945, 1954, 1962-5) y fue desarrollado inicialmente por Kilpatrick (1967), Bell (1976), Lesh & Landau (1983) y Schoenfeld (1985) entre otros, así como por Landa, Luria y Tsvetkova dentro de la escuela soviética (Kilpatrick & Wirszup 1969-75). En este trabajo no analizaremos ni la primera etapa del movimiento del *Problem Solving*, etapa que podríamos denominar "clásica" y que se describe en Kilpatrick (1985), ni tampoco el desarrollo posterior de dicho movimiento (en el número 39 de *ZDM Mathematics Education*, publicado en 2007, se hace una revisión del estado actual de las investigaciones en torno a la Resolución de Problemas).

El avance en esta dirección condujo muy pronto a situar la problemática de la resolución de *clases de problemas* en relación con la *modelización matemática*. En este estadio del desarrollo de la problemática didáctica surgió el interés por llevar a cabo un análisis más fino de la actividad matemática, esto es, la necesidad de construir y utilizar un modelo funcional de dicha actividad.[5] Con la emergencia de la *teoría de los momentos didácticos* apareció la necesidad ineludible de crear un nuevo dispositivo didáctico en el que el momento del *trabajo de la técnica* pudiese vivir con normalidad en las instituciones docentes. A dicho dispositivo se le dio el nombre de *Taller de Prácticas Matemáticas*.

Nació así una nueva línea de investigación que ocupó gran parte del trabajo de nuestra comunidad en los años sucesivos y que se materializó en el diseño y experimentación de diversos Talleres de Prácticas Matemáticas y, también en la indagación de las funciones potenciales de ese nuevo dispositivo didáctico en la enseñanza universitaria de las matemáticas (Bosch & Gascón 1993, 1994).

3. Segunda ampliación de la problemática. El papel del profesor en las Organizaciones Didácticas escolares

Paralelamente al desarrollo de la línea de investigación que partiendo del *Problem Solving* hace una primera estación en los *Talleres de Prácticas Matemáticas*, surgen nuevas cuestiones problemáticas relacionadas en primera instancia con el problema de la formación matemático-didáctica del profesorado de matemáticas[6] y, posteriormente, con el papel del profesor en el proceso de enseñanza-aprendizaje de las matemáticas.

Éste es otro de los problemas omnipresentes, aunque como problema *teórico explícito* tiene una aparición bastante tardía. Podría afirmarse que en la segunda mitad de la década de los 90 aunque no se había planteado explícitamente el *problema del currículum de matemáticas* ni, mucho menos, el *problema de la articulación de la matemática escolar*, se estaban empezando a tratar dichos problemas "en acto" mediante el diseño de libros de texto y las correspondientes Guías Didácticas[7]. En estos textos se pretendía incorporar algunos aspectos de la actividad matemática cuya importancia había sido puesta de manifiesto en los trabajos de investigación.

Así, por ejemplo, se planteaba la actividad matemática escolar como el *estudio de campos de problemas matemáticos* que van desarrollándose a medida que se avanza en el proceso de estudio. Se enfatizaba que resolver un problema no es una cuestión de suerte y que "entender" las matemáticas *no es un proceso instantáneo*. Para hacer matemáticas, como para llevar a cabo cualquier otra actividad humana

[5] A través de Marianna Bosch, en esos momentos alumna de tesis de Chevallard, tuvimos la oportunidad de invitar al profesor Yves Chevallard a la UAB en enero de 1991. Éste impartió un curso titulado *Teoría y Práctica de la ingeniería didáctica: algunas consideraciones.* En él empezó a desarrollar las ideas básicas para analizar la actividad matemática en términos del *enfoque antropológico*. Pero lo más importante es que dicho curso constituyó el germen de la *teoría de los momentos didácticos* y en él Chevallard subrayó la importancia capital de una dimensión de la actividad matemática bastante desconocida y mal considerada: el *momento del trabajo de la técnica.*

[6] También aparecieron cuestiones relativas al papel potencial de la Didáctica de las Matemáticas en la formación de todo matemático, independientemente de la profesión que como tal matemático vaya a desarrollar en un futuro. Ninguna de estas cuestiones puede separarse de la problemática, siempre presente, de la naturaleza de la Didáctica de las Matemáticas como disciplina.

[7] En este proyecto participaron, además de M. Bosch, los profesores Josep Maria Lamarca, Albert Compta y Pedro Miguel G. Urbaneja.

(como, por ejemplo, jugar a baloncesto), *existen técnicas* (normalmente no algorítmicas) que hay que trabajar hasta llegar a dominarlas para poder acceder a un nivel más alto de la actividad. Se trata de un proceso lento que, como sucede con cualquier otra actividad humana que persigue un objetivo valioso y que requiere paciencia y el establecimiento de objetivos a largo plazo.

En cuanto a la *teorización didáctica explícita* de la problemática que gira en torno al *papel del profesor* en el proceso de estudio escolar de las matemáticas, hay que decir que se ha empezado a tratar en épocas relativamente recientes. Lo cierto es que aún hoy día estamos lejos de disponer de las herramientas teóricas para tratar globalmente dicho problema. De hecho, en el ámbito del *enfoque epistemológico* en didáctica de las matemáticas las investigaciones sobre las "*prácticas docentes*" del profesor de matemáticas han aparecido bastante tardíamente y, desde luego, mucho más tarde que en las investigaciones llevadas a cabo dentro del *enfoque cognitivo*. Puede considerarse que no fue hasta principios de la década de los 90 cuando, por primera vez, el desarrollo de algunas teorías que se sitúan inequívocamente en el Programa Epistemológico – singularmente la Teoría de las Situaciones Didácticas (TSD) y la Teoría Antropológica de lo Didáctico (TAD) – permitió empezar a abordar el estudio de la *modelización del papel del profesor*[8].

En los primeros trabajos de nuestra comunidad en esta línea de investigación se postula la importancia de la formación didáctica básica para *todas las profesiones del matemático* (y no sólo para los futuros profesores de matemáticas) y se empieza a criticar el prejuicio que lleva a buscar la solución de los problemas de la *formación del profesorado* en conocimientos que supuestamente "deben existir ya en algún lugar" y que, por tanto, únicamente faltaría identificarlos.

Las primeras aportaciones de nuestra comunidad a este basto problema pueden esquematizarse en dos apartados: una reformulación del problema para despersonalizarlo y situarlo en el ámbito más comprensivo de las Organizaciones Didácticas (OD) y una primera descripción de la codeterminación (o determinación recíproca) entre ciertos tipos ideales de OD y el modelo epistemológico de las matemáticas que las sustenta.

3.1. Reformulación en el ámbito de la TAD del problema del papel del profesor

Partiendo de la noción cultural de "prácticas docentes del profesor de matemáticas" se constata que dichas prácticas constituyen una parte inseparable de la "*praxeología didáctica espontánea del profesor*" (que contiene, además de la praxis, los discursos que interpretan y justifican dichas prácticas) y, por tanto, que es imprescindible modelizar ésta como un todo. Pero, además, lo que hace un profesor particular en una situación de enseñanza concreta proviene siempre de una *amalgama de préstamos institucionales* cuyas funciones permanecen desconocidas y que van cambiando a lo largo del tiempo. Se trata, por tanto, de una utilización ocasional y oportunista de fragmentos de una organización que denominaremos *praxeología (u organización) didáctica institucional.* Es obvio que para dar razón de la praxeología didáctica espontánea del profesor se requiere esta segunda ampliación del sistema empírico a modelizar. Sólo así se podrá superar el punto de

[8] Fue precisamente en l'École d'Été de 1991 en la que, por primera vez, se trató explícitamente en el ámbito del Programa Epistemológico el tema "*La place de l'enseignant dans le système didactique*".

vista de los enfoques esencialmente cognitivos e individualistas que pretenden responder a cuestiones del tipo:

(a) ¿Cómo caracterizar los *conocimientos* y las *concepciones de un profesor* (o de un determinado tipo de profesores)?

(b) ¿Cómo se relacionan dichas concepciones con las *prácticas docentes* que éstos llevan a cabo? ¿En qué medida los "puntos de vista respecto a lo que son las matemáticas y a cómo se deben enseñar" determinan las *prácticas docentes* que el profesor realiza efectivamente en el aula?

(c) ¿Cómo inciden los conocimientos y las concepciones del profesor sobre el *aprendizaje matemático de los alumnos*?

Sustituyendo este planteamiento por un conjunto de cuestiones mucho más comprensivas relativas a las OD institucionales y que, con las herramientas que proporciona la TAD, pueden formularse como sigue (Barbé et Alt. 2005):

(a) ¿Cómo caracterizar las *organizaciones didácticas* que viven en las instituciones escolares?

(b) ¿Cuáles son las restricciones que las OD imponen sobre la emergencia y la evolución de las *praxeologías espontáneas del profesor*? ¿Qué papel juega la formación matemático-didáctica del profesor en el desarrollo de su relación personal a las praxeologías matemáticas y didácticas institucionales?

(c) ¿Cómo se condicionan mutuamente las OD y las OM que viven en una institución escolar determinada? ¿Qué implicaciones tienen sobre la matemática "a enseñar" y sobre la matemática "efectivamente enseñada"?

Es obvio que los resultados de la investigación didáctica relativos a la *práctica docente del profesor de matemáticas* (y, más en general, los resultados relativos a la determinación mutua entre las OM y las OD escolares) deberán servir para modificar las condiciones de trabajo de éste (los dispositivos didácticos institucionalizados, la reorganización de la matemática escolar, el diseño de programas de estudio, etc.). Pero, en contra de la evidencia del sentido común, no está claro que todo conocimiento necesario para el control de una actividad deba ser forzosamente transmitido a los actores de dicha actividad, puesto que no está probado que dicho conocimiento explícito mejore la actividad en cuestión. Puede mostrarse que, en algunos casos y en determinadas condiciones, dicho conocimiento puede entorpecer y hasta desvirtuar el desarrollo de la actividad[9].

En otros términos, aunque tuviésemos resultados concluyentes respecto a los problemas relativos al papel del profesor de matemáticas en las OD escolares, no está claro en qué medida ni en qué forma sería conveniente enseñar estos resultados (o las *técnicas didácticas* que pudiesen derivarse de ellos) a dichos profesores como parte de su formación didáctica. Ésta es, por tanto, otra cuestión abierta y, por cierto, nada trivial.

---

[9] Esta idea, con ciertas variantes, aparece en Brousseau (1993): "La posibilidad de enseñar didáctica a los profesores depende de la capacidad de éstos para mantener una separación entre, por un lado, su actividad profesional como profesores de matemáticas, y por otro, los medios profesionales que posibilitan esta actividad. Y esta separación no está, en principio, asegurada. No se pueden lanzar en paracaídas resultados de didáctica a los profesores, sin más, de la misma manera que no se pueden dar medicamentos a un pueblo en el que no hay ni médicos ni hospitales. La eficacia docente de los conocimientos didácticos depende, por lo tanto, de la posibilidad social de organizar las relaciones futuras entre profesores y didactas. Sin esta organización fracasaremos. Y este es el punto crucial del desarrollo y control de la actividad de los profesores […]".

3.2. Descripción de los tipos ideales de OD y análisis de su relación con el modelo epistemológico de las matemáticas en el que se sustentan

Como respuesta (parcial) a las citadas cuestiones se caracterizaron tres tipos ideales de OD bidimensionales: *clásicas*, *empiristas* y *constructivistas* mostrando que cada uno de ellos se sustenta en un modelo epistemológico general de las matemáticas y se elaboró un "espacio" de los *tipos ideales de OD posibles* como instrumento metodológico para analizar las OD empíricas (Gascón 2001a).

Se ha mostrado que sobre las OD posibles en una institución determinada inciden restricciones más específicas que las que provienen del nivel de la disciplina matemática considerada como un todo (esto es, más específicas que las que provienen del modelo epistemológico *general* de las matemáticas) y, también, restricciones más genéricas. Entre las primeras se han estudiado las restricciones originadas por el modelo epistemológico *específico* de un área o de un sector de las matemáticas escolares y entre las segundas algunas las provenientes de los niveles "pedagógico", "escolar" y "social".

3.2.1. *El caso del álgebra elemental*

Se ha estudiado la influencia del modelo epistemológico específico del álgebra elemental dominante en la ESO sobre las OD que existen en esta institución escolar. Algunos trabajos han puesto de manifiesto que el modelo epistemológico específico del álgebra elemental es una parte esencial del discurso que pretende justificar, interpretar y engendrar las técnicas didácticas de la enseñanza del álgebra en la E.S.O. (Bolea, Bosch & Gascón 2001a, 2001b, 2004). Dado que el álgebra es un contenido presente "casi por todo" en la Enseñanza Secundaria de las matemáticas, su estudio abre la vía para estudiar la influencia del modelo epistemológico general (de las matemáticas) dominante en una institución escolar sobre las OD que pueden vivir en dicha institución. En la sección 5.1. se analiza con más detalle este caso.

3.2.2. *El caso de los límites de funciones*

En este caso hemos estudiado el fenómeno de la *bicefalia del currículum*, cuya explicación última habría que buscarla en el proceso histórico de *transposición didáctica*[10] y en la presión del discurso matemático sabio sobre la matemática enseñada en Secundaria. Como resultado de este fenómeno no ha sido posible articular la práctica matemática escolar que el diseño curricular propone llevar a cabo en la Secundaria post-obligatoria española con las exigencias "sabias" de rigor y formalismo correspondientes. El resultado final es conocido: en el diseño curricular de la enseñanza secundaria española no se construye un *discurso tecnológico* adecuado a la práctica de cálculo de límites que se puede desarrollar efectivamente en dicha institución ni se propone una *práctica matemática* que pueda sustentarse en la teoría de los límites de funciones (en términos ε-δ) que aparece efectivamente. Esta *teoría* debe considerarse como un mero "artefacto decorativo" puesto que no permite ni describir, ni justificar ni interpretar la actividad matemática que propone la escuela en torno a los límites de funciones (Barbé et Alt. 2005).

[10] La TAD puede considerarse como el desarrollo histórico de la Teoría de la Transposición Didáctica cuya primera publicación en forma de libro data de 1985 (Chevallard 1985/1991). En Bosch & Gascón (2007) se describe la evolución del enfoque antropológico entre 1980 y 2005 y sus principales aportaciones al desarrollo de la ciencia didáctica.

Este fenómeno de la *bicefalia* tiene dos consecuencias didácticas importantes:

(a) Provoca enormes dificultades para descifrar, a partir de los datos curriculares, *cuál es la OM a enseñar*. Es previsible que, de forma más o menos implícita, el profesor tome el "álgebra de límites" como la *OM a enseñar*, puesto que se trata de la OM local más cercana (en términos de los objetos matemáticos que la constituyen) al conjunto de tareas, técnicas y tecnologías existentes en el currículum a este nivel de enseñanza. Pero esta elección no eliminará las dificultades y hasta contradicciones originadas por la ausencia curricular de la tecnología matemática necesaria para interpretar y justificar la práctica efectivamente realizada y por la presencia de elementos tecnológicos "ajenos" a la misma.

(b) *Hace prácticamente imposible* "*dar sentido*" matemático a la OM a enseñar puesto que sin salir del tema del "cálculo de límites" no es posible dar cuenta del *porqué* y *para qué* debe estudiarse dicho tema. Pero el *encierro en el nivel temático* hace que el profesor no tenga ni los medios ni la legitimidad para reestructurar las relaciones entre el conjunto de los *temas* de un *sector* del currículum (y, mucho menos, de los *sectores* de un *área* como, por ejemplo, el cálculo diferencial escolar).

Tanto el fenómeno de la bicefalia como sus indeseables consecuencias didácticas pueden interpretarse, al menos parcialmente, como el resultado de la incidencia del modelo epistemológico específico de la OM escolar en torno a los límites de funciones sobre la OD escolar correspondiente (esto es, sobre la forma de organizar el proceso de estudio de los límites de funciones). Este trabajo constituye un ejemplo paradigmático de la fecundidad de los resultados de la investigación didáctica cuando se reformula en el ámbito de la TAD el problema del papel del profesor.

4. El problema "metadidáctico" de la naturaleza de la didáctica de las matemáticas como disciplina

El interés de nuestra comunidad por el problema de la *epistemología de la didáctica de las matemáticas*, esto es, por el problema de la naturaleza de la didáctica de las matemáticas como disciplina se remonta, de hecho, a los orígenes, en 1980. Ya en esa época se proponía, en contra de la ideología dominante en aquellos momentos, construir una nueva disciplina científico-experimental, la didáctica de las matemáticas, que tomase la actividad matemática como su objeto primario de estudio. Pero, naturalmente, el tratamiento sistemático de dicho problema ha requerido de desarrollos teóricos relativamente recientes y que, de hecho, se siguen elaborando[11].

[11] En 1991 nuestra comunidad se integra en un Seminario a nivel del estado español: el *Seminario Interuniversitario de Investigación en Didáctica de las Matemáticas* (SI-IDM) que se funda en ese momento. Dicho Seminario ha mantenido una importante actividad científica desde su nacimiento hasta el año 2005. Entre sus objetivos fundacionales figura explícitamente y de manera muy relevante estudiar el problema de la naturaleza de la didáctica de las matemáticas como disciplina. No es de extrañar que, cuando en 1998 un importante número de miembros del SI-IDM manifestamos la intención de constituirnos como grupo de trabajo en el seno de la incipiente *Sociedad Española de Investigadores en Educación Matemática* (SEIEM), lo hiciésemos bajo la denominación de *Didáctica de las Matemáticas como Disciplina Científica* (DMDC). De hecho, una de las preocupaciones principales comunes al SI-IDM y al grupo DMDC gira en torno al esclarecimiento del objeto de estudio propio de la didáctica de las matemáticas, la naturaleza de los problemas didácticos, la relación de la didáctica con otras disciplinas y, muy en especial, a las relaciones entre las matemáticas y la didáctica de las matemáticas.

Un primer posicionamiento de nuestra comunidad en relación a este problema es el siguiente: para clarificar el problema “metadidáctico” debemos realizar el esfuerzo de evitar confusiones entre las *prácticas sociales* relacionadas con la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas y la *disciplina* que estudia los fenómenos emergentes de dichas prácticas. A fin de contribuir a clarificar dicha distinción, parece razonable, al menos en este punto, seguir la tradición europea y denominar “*didáctica de las matemáticas*” a la disciplina en cuestión[12].

Es precisamente en el momento en que la didáctica de las matemáticas se distingue de ese conglomerado de “enfoques”, “paradigmas”, “teorías”, “tradiciones” y “prácticas profesionales” de diversos tipos que constituyen lo que habitualmente se denomina *Mathematics Education*, cuando puede empezar a ser considerada como disciplina autónoma (relativamente, como todas) y cuando puede surgir la cuestión epistemológica de cuál es su naturaleza como tal disciplina y, en particular, la cuestión del *universo de disciplinas* en el que se sitúa, así como el ámbito dentro del cual hemos de *delimitar su objeto de estudio*. La respuesta a estas cuestiones determinará en gran medida el tipo de problemas que tratará y, por tanto, la naturaleza de la disciplina.

Siguiendo el punto de vista de Yves Chevallard en este problema, nuestra comunidad propone situar la *didáctica de las matemáticas* en el universo de la *antropología de las matemáticas* (Chevallard 1991) en el que compartirá con la historia y la epistemología[13] de las matemáticas un mismo objeto de estudio: *la génesis, el desarrollo, la utilización y la difusión personal e institucional del saber matemático*. Cada una de estas disciplinas se caracterizará, dentro del ámbito de la antropología de las matemáticas, por la *forma específica de tomar en consideración* “*lo matemático*”. En una primera aproximación propusimos caracterizar la didáctica de las matemáticas, en el ámbito de la antropología de las matemáticas, como la disciplina cuya manera específica de tomar en consideración “lo matemático” consiste en *integrarlo con* “*lo pedagógico*”. Simplificando mucho las cosas, se postula que existen, esencialmente, dos maneras diferentes de llevar a cabo este proceso de integración o *didactificación conjunta de lo pedagógico y lo matemático* que se corresponden con los dos Programas de Investigación que aparecen en cierta reconstrucción racional del desarrollo de la didáctica de las matemáticas[14].

Desde el punto de vista del Programa Cognitivo se supone que el problema de la Educación Matemática puede ser abordado y resuelto a partir del análisis de

[12] Nuestra disciplina recibe diferentes nombres en las diversas tradiciones culturales. Entre éstos figura el de “*Matemática Educativa*” que, al parecer, se acuñó en México y se utiliza en algunos países iberoamericanos. “En el mundo anglosajón, el nombre que le han dado a la práctica social asociada es el de *Mathematics Education*, mientras que en la Europa continental le han llamado [a la disciplina] *didactique des mathématiques* o *didaktik der mathematik* [...]” (Cantoral 1996, p. 133).

[13] La epistemología de las matemáticas tal como se la conceptualiza en nuestra comunidad es el resultado de una doble ampliación de la epistemología clásica: la primera tuvo lugar a partir de la década de los setenta gracias, especialmente, a los trabajos de Imre Lakatos (1971, 1976, 1978a, 978b); la segunda ampliación de la epistemología de las matemáticas está generada por la necesaria ampliación de su base empírica para alcanzar el rango de disciplina “experimental” (Gascón 1993).

[14] Se utiliza la *reconstrucción racional* (Lakatos 1971), de la evolución de la didáctica de las matemáticas que se describe inicialmente en Gascón (1998) y se desarrolla en Gascón (2002, 2003a, 2003b) y que expresa nuestro punto de vista respecto a la naturaleza de nuestra disciplina. Partiendo de la *problemática de la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas*, –como objeto de investigación básico de la didáctica de las matemáticas– se postula la existencia de dos ampliaciones sucesivas de dicha problemática que modifican progresivamente su *objeto primario de investigación* dando origen, respectivamente, a dos Programas de Investigación (Lakatos 1978b) en didáctica de las matemáticas: el *Programa Cognitivo* y el *Programa Epistemológico*.

ciertas *características individuales de los sujetos* (actitudinales, cognitivas, metacognitivas, motivacionales, lingüísticas, etc.) relativas a su relación con los *objetos matemáticos*. Por tanto, para tratar dicho problema, la didáctica de las matemáticas debe construir y contrastar empíricamente modelos:

(a) De la *estructura cognitiva* asociada a un concepto.

(b) Del *desarrollo del pensamiento matemático* del sujeto.

Así, por ejemplo, Ed Dubinsky inicia la Teoría APOS (Asiala et Alt. 1996) a partir de la reformulación del mecanismo de la *abstracción reflexiva* de Piaget, para aplicarla a las matemáticas "avanzadas" y considera que: "La teoría *APOS* trata de describir el desarrollo, en la mente del alumno, de la comprensión de un concepto matemático". (Dubinsky 2000, p. 61). Por su parte, Alan H. Schoenfeld considera, análogamente, que elaborar una "*teoría de la mente*" es uno de los objetivos principales de la Investigación en Educación Matemática (Schoenfeld 2001).

Desde el punto de vista del Programa Epistemológico, por el contrario, el problema de la Educación Matemática debe ser abordado a partir del análisis de las *prácticas matemáticas* que se llevan a cabo en las diferentes instituciones (no sólo docentes). Por tanto, para tratar dicho problema, la didáctica de las matemáticas debe construir y contrastar empíricamente:

(a) Un modelo *epistemológico general* de las matemáticas y los correspondientes *modelos locales* de sus diferentes ámbitos (que deben ser coherentes con el modelo epistemológico general).

(b) Modelos de la *génesis y el desarrollo* (la "ecología") *de las OM* en cada una de las instituciones y de su *difusión* intra-institucional e inter-institucional.

Esta hipótesis provoca una *matematización*[15] del problema de la Educación Matemática y, al mismo tiempo, una *despersonalización* del mismo puesto que lo sitúa a un *nivel institucional*, relativamente independiente de la *voluntad*, la *formación*, la *motivación*[16] y las restantes *características individuales* de los sujetos de las instituciones (Gascón 2002).

5. Líneas de investigación en torno al gran problema del currículum

Todos los problemas que nuestra comunidad ha ido formulando y abordando a lo largo de estos 30 años y, en particular, aquellos que han convergido en las tesis que se han dirigido y elaborado en su seno, presentan dos características principales:

(a) Por una parte tienden a abarcar un ámbito cada vez más amplio del universo didáctico-matemático. Se observa una tendencia a tratar problemas didácticos cuyo ámbito matemático engloba, al menos, el nivel de las áreas (el álgebra, la geometría o el cálculo) mucho más allá de las nociones, los objetos y los temas matemáticos concretos.

[15] Puesto que el análisis científico de las prácticas matemáticas requiere *elaborar* modelos epistemológicos nuevos de los diferentes ámbitos de las matemáticas (así como un modelo epistemológico general). Esto no puede hacerse sin llevar a cabo *reorganizaciones* de los saberes matemáticos para que puedan ser reconstruidos en las diferentes instituciones y difundidos entre ellas. Dichas reorganizaciones deben ser consideradas como una actividad genuinamente matemática.

[16] Así, por ejemplo, cuando se pretende resolver el problema de la Educación Matemática apelando básicamente a la *formación de los profesores* y a la *motivación de los alumnos* se vuelve a caer en el mito pedagógico que, resurgiendo de sus cenizas, vuele a proponer una presunta "solución" repetidamente fracasada.

(b) Y, por otra, se relacionan con aspectos específicos del que podríamos llamar *problema del currículum* (¿Cómo diseñar, de manera didácticamente fundamentada, el currículum de matemáticas para cierta etapa educativa?) y con el problema asociado al fenómeno de la *desarticulación* de la matemática escolar (¿Cómo organizar la enseñanza escolar de las matemáticas de manera que provoque la articulación de todos los tipos de contenidos que propone el currículum: procedimentales, conceptuales y actitudinales? ¿Cómo conseguir, en definitiva, que los conocimientos matemáticos aprendidos por los alumnos no se reduzcan a un conjunto completamente desarticulado de técnicas más o menos algorítmicas y carentes de sentido?).

Podría decirse que ha sido la propia evolución interna de cada uno de los problemas, construidos y abordados con la ayuda de las herramientas que proporciona la TAD, la que ha provocado un desarrollo de la problemática en esta dirección.

En lo que sigue, para simplificar el relato, agruparemos los tipos de problemas didácticos estudiados en torno a *líneas de investigación* que, a su vez, cristalizan en sendas tesis doctorales dirigidas y realizadas dentro de nuestra comunidad. Hay que subrayar, sin embargo, que las intersecciones entre estas diferentes líneas de investigación –así como entre cada una de ellas y los problemas más generales descritos anteriormente– son múltiples. Por otra parte, muchos de los trabajos que desembocaron en un proyecto de tesis doctoral se iniciaron con bastante anterioridad a la explicitación de dicho proyecto y, como es natural, se prolongan más allá de la lectura de la tesis.

5.1. El proceso de algebrización de las Organizaciones Matemáticas escolares[17]

La línea de investigación que desemboca en el trabajo de tesis de Pilar Bolea tiene su origen en los trabajos germinales de Yves Chevallard (1985, 1989a, 1989b, 1989c) y en otros trabajos que relacionan el patrón de *Análisis-Síntesis* con la emergencia del lenguaje algebraico (Gascón 1989, 1993, 1993-94, 1999a). En estos trabajos preliminares se desarrollan algunas ideas que relacionaban el Patrón de Análisis-Síntesis con la emergencia del lenguaje algebraico (o, en la terminología de Lakatos, que ponían de manifiesto la “naturaleza analítica del álgebra). A partir de este momento hemos desarrollado una gran cantidad de esfuerzos (artículos, cursos de doctorado y ponencias) en esta dirección. Aunque no es posible resumir las aportaciones de esta línea de trabajo, esquematizaremos brevemente en lo que sigue las principales cuestiones tratadas en este ámbito hasta el año 2002, añadiendo en cada caso algún elemento de respuesta a la misma.

1. *El “álgebra elemental”, ¿aparece en la ESO como una OM en sí misma o como un instrumento de estudio de otras praxeologías*? Ni como una cosa ni como la otra. Debería aparecer inicialmente como un “instrumento algebraico” para dar origen, progresivamente, a OM cada vez más algebrizadas. Sólo posteriormente el modelo algebraico puede independizarse del sistema de partida.

[17] Esta línea de investigación cristalizó en la tesis doctoral de Pilar Bolea defendida en 2002 (Bolea 2003).

2. *Utilizando la estructura de las OM, ¿cómo se pueden caracterizar las modelizaciones algebraicas en el conjunto de modelizaciones matemáticas*? (a) Permiten modelizar explícita y materialmente las técnicas matemáticas. (b) Sitúan el modelo en el nivel tecnológico de la OM modelizada. (c) El modelo algebraico de una OM puede interpretarse como una extensión de OM.

3. *¿Qué relación hay entre las modelizaciones algebraicas y el grado de algebrización de las praxeologías matemáticas*? Existe una *dualidad* entre las OM algebrizadas (que hemos caracterizado a partir de un conjunto de indicadores IGA1-IGA4) y las modelizaciones algebraicas.

4. *¿Cómo se transforman las OM y la OD a lo largo del proceso de algebrización*? (a) Integración de los componentes de OM. (b) Reducción drástica del material ostensivo utilizado. (c) Completación relativa de la OM.

5. *¿Cuál es el grado de algebrización de las OM que se estudian actualmente en la Enseñanza Secundaria*? Fenómeno de la desalgebrización del currículum de la ESO. Carácter problemático del proceso de algebrización de las OM escolares (contradicción con el contrato didáctico institucional vigente actualmente en la ESO).

6. *¿Por qué, en la institución escolar de Secundaria, se tiende a identificar el "álgebra" con una obra que prolonga y generaliza unilateralmente la "aritmética escolar" (aritmética generalizada)? ¿Por qué la introducción al álgebra escolar siempre está ligada a la aritmética? ¿Cómo se relaciona este fenómeno, que podríamos denominar "aritmetización del álgebra escolar" con el fenómeno, aparentemente inverso, de la "algebrización de la aritmética escolar moderna*"? Fenómeno de la atomización del proceso de estudio en las instituciones escolares.

7. *¿Es posible algebrizar una OM concreta en el segundo ciclo de la ESO (14-16 años), aunque ésta aparezca como una obra prealgebraica en la OM escolar*? Las modificaciones encaminadas a hacer vivir localmente una OM algebrizada en la ESO serán inestables y tenderán a desaparecer a corto plazo. Ver el caso de la divisibilidad (Gascón 2001b).

8. *¿Qué características específicas, en términos de los momentos del estudio y de los dispositivos didácticos, debería tener una OD escolar para hacer posible el estudio escolar de una OM plenamente algebrizada? ¿Cuáles son las restricciones que dificultan la existencia de este tipo de procesos de estudio en la Enseñanza Secundaria*? (a) Posibilidad de llevar a cabo un cuestionamiento tecnológico. (b) Potenciación del carácter manipulativo (escrito) del momento exploratorio. (c) Creación de un dispositivo didáctico en el pudiese vivir el momento del trabajo de la técnica.

9. *¿Cómo podemos describir y analizar la actividad didáctica del profesor como director del proceso de estudio del álgebra escolar? ¿Cuál es la "tecnología didáctica" dominante en la ESO respecto del álgebra escolar? ¿Cómo afecta dicha tecnología –esto es, el discurso interpretativo y justificativo de las técnicas didácticas que se utilizan en la enseñanza del álgebra– sobre el proceso de estudio?* El modelo que identifica el "álgebra escolar" con una prolongación y generalización unilateral de la "aritmética escolar" (aritmética generalizada) constituye la base sobre la que

descansa la tecnología didáctica espontánea del profesor respecto de la enseñanza del álgebra escolar.

5.2. Discontinuidades Matemáticas y Didácticas entre la Secundaria y la Universidad[18]

Partiendo de un problema docente que es percibido como "acuciante" por parte de los profesores de matemáticas del primer ciclo universitario, se inició esta línea de investigación en la década de los años 90 (Gascón 1997).

Fue en el año 2000 cuando de manera clara se empezó a formular una conjetura general, a modo de hipótesis básica de esta línea de investigación, utilizando las nociones de *praxeología puntual*, *local* y *regional*. Se trata de una caracterización de las OM que se estudian en Secundaria como *puntuales*, *rígidas* y *aisladas* y de las OM que se estudian en la Universidad como *regionales* cuya presentación suele concentrarse, por razones de economía, en una teoría en la que la OM en cuestión acaba cristalizando. En ambas instituciones se dificulta enormemente la reconstrucción de OM *locales relativamente completas* lo que hace que el tránsito de Secundaria a la Universidad sea un momento especialmente delicado del proceso global de estudio de las matemáticas y ponga de manifiesto de manera prototípica el *fenómeno de la desarticulación de la matemática escolar*.

Los trabajos que se sitúan en esta línea de investigación giran en torno a cinco conjeturas específicas que hemos propuesto para describir en primera instancia los diferentes aspectos o dimensiones de la rigidez de las OM que, según la conjetura general, se estudian en Secundaria:

C1: Dependencia de la nomenclatura asociada a una técnica.

C2: Ausencia del cuestionamiento tecnológico de las técnicas y, en particular, de la interpretación del resultado obtenido con ella.

C3: Inexistencia de dos técnicas escolares diferentes para realizar una misma tarea. No forma parte de la responsabilidad matemática asignada al alumno decidir de entre dos técnicas (o dos variaciones de una misma técnica) cuál es la más adecuada para realizar una tarea concreta.

C4: No reversión de las técnicas para realizar la tarea "inversa" de una tarea dada.

C5: Ausencia de situaciones abiertas que requieran un trabajo de modelización.

La metodología de investigación utilizada consistió en la comparación entre dos tipos de indicadores empíricos de estas conjeturas (una muestra de estudiantes de primeros cursos de diferentes facultades y escuelas técnicas y una muestra de los libros de texto más utilizados. Los resultados obtenidos en esa comparación ponen claramente de manifiesto que la *relación personal* de los alumnos a las OM que se estudian en Secundaria está esencialmente determinada por la *relación institucional* a dichas OM. Se confirma, una vez más, que el origen del fenómeno que estamos analizando es institucional, lo que constituye uno de los postulados básicos del enfoque epistemológico.

[18] Esta línea de investigación cristalizó en la tesis doctoral de Cecilio Fonseca (2004).

Otro resultado importante obtenido en esta línea de investigación es la caracterización de las *OM locales relativamente completas* tanto en lo que se refiere a su estructura, en términos de los componentes que la constituyen: tipos de problemas, técnicas, tecnología y teoría, como al proceso de una hipotética reconstrucción escolar de las mismas, en términos de momentos del proceso de estudio (Bosch, Fonseca & Gascón 2004)

Asimismo se puso de manifiesto la conveniencia de partir de una cuestión (que acabará siendo la "razón de ser" de la OM que se construirá) suficientemente rica como para generar nuevas cuestiones y requerir como respuesta una OM local relativamente completa. Dicha cuestión puede ser intramatemática o extramatemática. Así, por ejemplo, algunos trabajos partieron de una cuestión planteable en el ámbito de la economía y cuya respuesta requiere construir una OM local relativamente completa en torno a la diagonalización de matrices (Bosch, Fonseca & Gascón 2003). Resultó, en definitiva, que las discontinuidades entre la Secundaria y la Universidad no dependen únicamente, ni principalmente, de la naturaleza de las OM que se estudian en Secundaria y que se han caracterizado como OM *puntuales*, *rígidas* y *aisladas*. En efecto, otra de las aportaciones importantes de esta línea de investigación demuestra que en la Enseñanza Universitaria no se retoman las técnicas matemáticas que se estudian en Secundaria para mostrar sus limitaciones, desarrollarlas con ayuda de los nuevos elementos tecnológicos y teóricos que aporta la matemática universitaria e incluirlas en OM más amplias (locales, regionales, …) y completas. Y esto es así incluso en aquellos casos en que las técnicas de Secundaria se vuelven a utilizar en la Universidad como es el caso de la Regla de Ruffini (Bosch, Fonseca & Gascón, to appear**)**.

5.3. La modelización como instrumento de articulación de la matemática escolar. De la proporcionalidad a las relaciones funcionales[19]

El problema de la articulación de la matemática escolar o, en otros términos, la problemática en torno al fenómeno de la desarticulación de las OM escolares y en particular el aislamiento escolar de la *relación de proporcionalidad*, ha estado latente desde mediados de los años 90. En efecto en un libro de texto del año 1995 ya se proponía una OM a enseñar (en torno a las relaciones funcionales entre dos magnitudes) que *integra la relación de proporcionalidad de magnitudes* como una más dentro de un determinado conjunto limitado de relaciones funcionales. Esta propuesta podría interpretarse como una aportación implícita al problema didáctico de la articulación de la matemática escolar. Sin embargo hay que esperar al año 2001 para que se relacione explícitamente la articulación con la modelización matemática. Los primeros trabajos en dicha dirección se refieren a la desarticulación de la geometría escolar y, en particular, con el estudio de la incidencia del *autismo temático* sobre dicha desarticulación (Gascón 2003c; García et Alt. 2006).

En el caso de la proporcionalidad este punto de vista requiere cuestionar el modelo epistemológico de la proporcionalidad que se desprende de los libros de texto y del diseño curricular y que, por tanto, es el dominante en la institución escolar

[19] Esta línea de investigación culminó en la tesis doctoral de Francisco Javier García (2005). La profesora Luisa Ruiz Higueras de la Universidad de Jaén asumió la codirección de esta tesis doctoral.

y acaba siendo asumido implícitamente (y acríticamente) por la inmensa mayoría de las investigaciones en este campo.

El cuestionamiento de dicho modelo ha conducido a discutir abiertamente la posibilidad de tomar el "*razonamiento proporcional*" como objeto de estudio en sí mismo. Dado que el aislamiento de la proporcionalidad como ámbito de investigación se corresponde con la distribución tradicional de la matemática escolar (en temas, sectores y áreas) impuesta por los programas oficiales, la tesis también cuestiona el criterio que guía dichos programas para aislar la relación funcional de proporcionalidad y sugiere alternativas.

De este doble cuestionamiento, que pone en tela de juicio la pertinencia de aislar la proporcionalidad como objeto de investigación y como objeto matemático a enseñar, surge otra de las principales aportaciones de esta línea de investigación: el problema didáctico de la proporcionalidad debe ser integrado en el estudio mucho más comprensivo del problema de la enseñanza-aprendizaje de las *relaciones funcionales entre magnitudes*.

La respuesta que proponemos al problema didáctico planteado se materializa en el diseño y experimentación de un *Recorrido de Estudio e Investigación* (REI) (Chevallard 2005, 2006) generado por una cuestión relativa a los posibles Planes de Ahorro.

(a) En primer lugar se postula que la necesaria articulación entre las OM escolares en torno a las relaciones funcionales entre magnitudes (incluyendo entre ellas la relación de proporcionalidad) debe partir del *cuestionamiento de las razones de ser* de dichas relaciones funcionales y de la posibilidad de plantearlas más allá del nivel temático.

(b) En segundo lugar se acepta que la citada razón de ser común a las relaciones funcionales entre magnitudes radica en la problemática de la *modelización de sistemas* en los que dos o más magnitudes son susceptibles de estar relacionadas entre sí. Este segundo postulado responde a la *capacidad articuladora* de la actividad de modelización matemática.

5.4. Lo matemático en la creación y análisis de Organizaciones Didácticas. El caso de los Sistemas de Numeración y la medida de magnitudes continuas[20]

En la confluencia del problema metadidáctico (sobre la epistemología de la didáctica de las matemáticas) y el problema del papel del profesor en las OD escolares se encuentra el problema de la relación entre "lo matemático" y "lo didáctico". Con los instrumentos que proporciona la TAD se ha empezado a estudiar este último problema en dos casos muy relacionados entre sí: la medida de magnitudes continuas y los sistemas de numeración. En ambos casos "lo matemático" aparece como el núcleo o el "esqueleto" en torno al que se estructura la organización del proceso de estudio, esto es, la Organización Didáctica.

En el caso de los *Sistemas de Numeración* se parte de una *cuestión generatriz* que pretende indagar cuáles son las características que cumple nuestro sistema de numeración (posicional completo) para que se haya impuesto de manera absoluta

[20] Esta línea de investigación ha dado origen al trabajo de tesis doctoral de Tomás Ángel Sierra (2006).

sobre todos los que han existido a lo largo de la historia (cosa que no ha sucedido, por ejemplo, con las lenguas).

Se diseñó y experimentó un proceso de estudio en el que la reconstrucción del sistema de numeración posicional completo se obtenía como el resultado final de una sucesión creciente de OM que abarcan tipos de problemas cada vez más amplios y técnicas progresivamente más potentes.

$$q \rightarrow \mathrm{OM}_i \subset \mathrm{OM}_a \subset \mathrm{OM}_h \subset \mathrm{OM}_p$$

En este esquema del MER diseñado, *q* representa la citada cuestión generatriz, OM_i la Organización Matemática inicial que o bien dispone de un solo símbolo o bien de infinitos símbolos (uno para cada número natural). Las tres últimas Organizaciones Matemáticas son, respectivamente, OM desarrolladas entorno a: un sistema de numeración "aditivo" (OM_a), un sistema de numeración "híbrido" (OM_h) y un sistema de numeración "posicional" (OM_p). Cada una de estas OM intermedias constituye un eslabón del "esqueleto" matemático y puede considerarse como una respuesta parcial y provisional (que se completa relativamente en la siguiente OM de la cadena) a la cuestión generatriz.

El objetivo del proceso didáctico no puede reducirse en ningún caso a la OM_p finalmente construida (que no es otra que la OM en torno a al sistema de numeración posicional completo) sino que debe abarcar todo el recorrido de estudio puesto que las OM intermedias son las que *motivan y dan sentido* a la OM final.

En el caso de la *medida de magnitudes continuas* se elaboró un MER con el objetivo de integrar los tres dominios que, según Brousseau (2000) aparecen separados para los alumnos y de una manera un poco confusa: (a) el universo de los objetos medibles concretos, (b) el universo de los procedimientos de definición de la aplicación medida y (c) el universo de la estructura numérica. Dicha integración comporta la decisión de incluir en el MER de la medida de magnitudes el universo de los *objetos medibles* y la actividad de *medición efectiva*, lo que contrasta con la práctica escolar habitual que no considera dicho universo como verdaderamente "matemático" debido a la sujeción de la Escuela a la institución "sabia" productora del saber.

Mediante dicha integración se pretendía empezar a poner las condiciones que permitan superar el fenómeno indeseable de la *aritmetización de la medida* y, por otra, volver a instaurar en la matemática escolar la *dialéctica entre la medida exacta y la medida aproximada*.

5.5. Metacognición, Resolución de Problemas y Enseñanza de las Matemáticas. Reformulación de la problemática de la metacognición desde el enfoque antropológico[21]

Utilizando las herramientas que proporciona el enfoque antropológico (en particular, la *complejidad creciente de las praxeologías* y los *niveles de codeterminación didáctica*) se muestra que la problemática en torno a lo que habitualmente se denomina "metacognición" puede interpretarse como un aspecto más de la actividad matemática y tratarse propiamente en el ámbito de la

[21] Esta línea de investigación ha dado origen al trabajo de tesis doctoral de Esther Rodríguez (2005).

problemática didáctico-matemática. Se trata, en definitiva, de abordar, con las nuevas herramientas, algunos de los problemas didácticos que habían quedado abiertos en antiguas investigaciones en torno a la resolución de problemas de matemáticas.

Así el problema del papel de la *metacognición* en la resolución de problemas de matemáticas se ha abordado utilizando una reformulación del problema que parte de reinterpretar los "hechos didácticos" que están en la base del Problema de Pólya[22] abordado por el movimiento clásico del *Problem Solving* (Rodríguez, Bosch & Gascón 2008).

Desde el punto de vista de la TAD se postula que muchos de los hechos didácticos que son considerados como indicios de *dificultades cognitivas o metacognitivas de los estudiantes* pueden explicarse mejor a partir del análisis de la estructura de las OM y de las OD que tienen cabida en la institución escolar. Para sustentar esta afirmación se reinterpretaron como sigue algunos de los hechos que constituyen la base empírica del Problema de Pólya.

(1) La *planificación de estrategias* matemáticas para resolver problemas no rutinarios requiere poder situar el problema en una OM al menos local y esto es muy difícil en las actuales instituciones docentes puesto que, como hemos mostrado en trabajos anteriores, las OM locales relativamente completas están prácticamente ausentes en la matemática escolar (Bosch, Fonseca & Gascón 2004).

(2) El *control de las estrategias* matemáticas y la capacidad de *evaluar* y *regular* su funcionamiento y sus resultados sólo pueden llevarse a cabo en relación explícita con la *razón de ser* de la OM en la que el problema en cuestión ha surgido, esto es, en referencia a las cuestiones a las que dicha OM responde. Pero de nuevo hay que recordar que la ausencia escolar de la razón de ser de las OM que se estudian en la Escuela es un hecho habitual que está directamente relacionado con un fenómeno didáctico de largo alcance que se ha denominado *autismo temático* (Chevallard 2001, Gascón 2003c).

(3) Para incluir la denominada *regulación metacognitiva* en la escuela habría que superar la separación estricta entre lo (considerado como) matemático y lo (considerado como) pedagógico en la institución escolar. Esto comportaría una nueva distribución de responsabilidades entre el profesor y los estudiantes que llevaría a compartir, en cierta medida, algunas responsabilidades presuntamente pedagógicas (en el sentido de no matemáticas) y que el *contrato didáctico* actual asigna en exclusiva al profesor.

5.6. Ecología de la Modelización Matemática en la enseñanza universitaria de las Matemáticas. Los Recorridos de Estudio e Investigación[23]

Dado un programa oficial de estudios propuesto en una institución docente determinada y descrito en términos clásicos, esto es, mediante temas (que

[22] El que denominamos "problema de Pólya" puede formularse en los siguientes términos: Suponiendo que los estudiantes dominan las técnicas "básicas" o elementales y poseen los conocimientos matemáticos necesarios, ¿cómo conseguir que sean capaces de construir y utilizar adecuadamente *estrategias complejas* para resolver "verdaderos" problemas matemáticos o problemas "creativos"? (Bosch & Gascón 2005).

[23] Esta línea de investigación ha dado origen al trabajo de tesis doctoral de Berta Barquero (2009).

contienen "definiciones", "teoremas", "demostraciones" y algunos tipos de problemas), ¿cómo diseñar un proceso de estudio que permita articular en una OM suficientemente comprensiva y relativamente completa las OM puntuales y bastante rígidas que aparecen aisladas en el programa en cuestión?

Se postuló que la modelización matemática ha de jugar un papel esencial en este proceso de articulación y, en consecuencia, cualquier ingeniería didáctica deberá sustentarse en un análisis previo de las *restricciones transpositivas* que dificultan que la modelización matemática viva con normalidad en las instituciones docentes, incluyendo las de nivel universitario.

Así, después de reformular el problema docente de la enseñanza de las matemáticas en CCEE en términos de *articulación y funcionalidad* de la matemática enseñada para que ésta pueda utilizarse como herramientas para *dar respuesta a cuestiones problemáticas* dentro de las CCEE, se plantea una segunda reformulación en la que la modelización, en sentido clásico, juega un papel central: ¿cómo conseguir que las matemáticas se enseñen como una *herramienta de modelización de situaciones* o *hechos científicos*, de tal forma que la enseñanza globalmente considerada no se organice en función de los contenidos matemáticos sino de los problemas o proyectos que los estudiantes deben realizar?

Pero la formulación del problema en el ámbito de la TAD requirió, además, una redefinición de la noción de *modelización matemática* para integrarla en el modelo epistemológico de las matemáticas que propone la TAD y una ampliación del espacio institucional tradicionalmente reservado a la didáctica de las matemáticas a fin de subrayar la *dimensión ecológica* del problema:

(a) ¿Qué *condiciones* se requieren y qué *restricciones* dificultan o impiden que las OM se enseñen, aprendan, estudien y utilicen como herramientas de modelización en los actuales sistemas de enseñanza de las matemáticas para CCEE?

(b) ¿En qué nivel de la *escala de codeterminación matemático-didáctica* aparecen estas restricciones y en qué nivel deberíamos situarnos para poder considerarlas como condiciones "modificables"?

(c) ¿Qué tipo de OD posibilitarían una integración global (más allá de una experimentación local) de la modelización matemática (interpretada como la TAD propone) en los citados sistemas de enseñanza? ¿Cuál es la *ecología* de estas organizaciones didácticas?

Para empezar a responder al problema didáctico así planteado hemos llevado a cabo un estudio empírico muy amplio con ayuda del cual hemos ido caracterizando el modelo didáctico y el modelo epistemológico dominantes en la institución universitaria de los que se desprenden las primeras restricciones sobre la vida de la modelización matemática en las instituciones universitarias. Para responder a estas restricciones, hemos propuesto, diseñado e implementado un nuevo dispositivo didáctico, los *Recorridos de Estudio e Investigación* (REI) introducidos por Chevallard (2005, 2006). Este nuevo dispositivo didáctico apuesta por la introducción de una nueva epistemología escolar que reemplaza el paradigma escolar de la "monumentalización" de los saberes por un paradigma de cuestionamiento del mundo.

A propósito de los REI, podemos esquematizar una evolución que se inició en la problemática docente en torno al papel de la *resolución de problemas* en la enseñanza de las matemáticas (y cuya respuesta inicial fue propuesta por el movimiento clásico del *Problem Solving*), continuó con la problemática en torno al papel del *trabajo de la técnica* como dimensión esencial de la actividad matemática (y cuya respuesta la proporcionó el *Taller de Prácticas Matemáticas*) y que ahora culmina en los REI como dispositivo didáctico que constituye la respuesta de la TAD al problema de la desarticulación y de la falta de sentido de la matemática escolar.

5.7. Iniciación escolar al álgebra elemental y su articulación con la modelización funcional[24]

Después de los citados trabajos de tesis de Javier García surgió la necesidad de estudiar el *problema ecológico* de la modelización funcional lo que requirió, a su vez, la elaboración previa de un MER de dicho ámbito de la matemática escolar (situado, en el caso de España, en el nivel de Bachillerato, esto es, para alumnos de entre 16 y 18 años). Al abordar el correspondiente problema de ingeniería didáctica mediante el *diseño y experimentación* de un proceso de estudio en el que la modelización funcional era imprescindible, aparecieron múltiples *restricciones* institucionales entre las que destaca el *carácter prealgebraico* de la matemática escolar (Ruiz Munzón et Alt. 2007a, 2007b). Reaparecía así el problema, en cierto sentido "previo", de la necesaria introducción temprana del álgebra elemental que aunque había sido descrito y analizado en la tesis de Pilar Bolea, no había sido tratado en su totalidad.

Apareció así la conveniencia de diseñar un MER capaz de articular globalmente la introducción del álgebra elemental en los primeros cursos de la ESO (12-14 años), lo que incluye el lenguaje algebraico y los números negativos (Bolea & Cid 2007), con el desarrollo del instrumento algebraico en la segunda etapa de la ESO (14-16 años) y con la modelización funcional en el Bachillerato (16-18 años). Dicho MER se formuló en términos de una sucesión de OM cada vez más amplias y completas de tal manera que cada una de las OM que aparecen puede considerarse como un modelo matemático de la anterior (Ruiz Munzón et Alt. to appear).

Nos planteamos, en primer lugar, el problema de *cómo introducir el álgebra* (entendida como un instrumento de modelización) en la primera etapa de la ESO (12-14 años). Mostramos, mediante un desarrollo teórico y un extenso trabajo experimental, que es posible introducir el instrumento algebraico en la enseñanza obligatoria de manera completamente *funcional*, en lugar de reducir el álgebra elemental a la *manipulación formal* del cálculo algebraico (lo que incluye la resolución de ecuaciones y la resolución de ciertos prototipos de problemas de "planteo algebraico").

Para ello fue necesario proponer una "razón de ser" del álgebra escolar, esto es, explicitar y dar visibilidad institucional a un tipo de cuestiones que, postulamos, son las cuestiones que viene a resolver la modelización algebraica y las que dan sentido a la introducción temprana del álgebra. Además, dado que pretendíamos iniciar a los alumnos en el *uso de la modelización algebraica*, debíamos elegir un

[24] Esta línea de investigación ha dado origen al trabajo de tesis doctoral en fase de finalización de Noemí Ruiz Munzón que se presentará en el Departamento de Matemáticas de la Universitat Autònoma de Barcelona.

sistema inicial para modelizar que cumpla fuertes restricciones institucionales, puesto que situamos la citada introducción en la primera etapa de la ESO española (en concreto en el segundo curso, 13-14 años). Tomamos como punto de partida el sistema de los "*problemas aritméticos*", esto es, problemas que pueden resolverse mediante una cadena de operaciones aritméticas (+, –, ×, /) ejecutables a partir de los *datos* que acostumbran a ser cantidades conocidas de ciertas magnitudes. Tanto las cantidades que resultan de las operaciones intermedias como la *cantidad incógnita*, tienen que poder ser interpretadas en el contexto del enunciado del problema. Las técnicas clásicas de resolución de los problemas aritméticos escolares se materializan en *discursos verbales* que, partiendo de los datos y mediante una cadena de operaciones aritméticas, permiten calcular la cantidad incógnita.

¿Qué cuestiones problemáticas pueden dar sentido (requerir necesariamente) la introducción funcional del lenguaje algebraico? Postulamos que se trata de un tipo de cuestiones que se caracterizan por *plantearse en términos de relaciones* entre las variables del problema y cuya respuesta es, en general, otra *relación*. Una vez que los alumnos estén en posesión del instrumento algebraico, ¿qué ampliaciones progresivas de dicha OM se requerirán para avanzar en las *sucesivas etapas del proceso de algebrización*? ¿Qué nuevos dispositivos didácticos se requerirán para llevarlo a cabo? A medida que avance el proceso de algebrización, ¿cómo se modificará el estudio del resto de las OM escolares? ¿Cómo se reorganizará el currículum de matemáticas de la Enseñanza Secundaria, desde la divisibilidad, la geometría sintética, la probabilidad y la estadística, hasta el estudio de las relaciones funcionales entre magnitudes y la introducción del cálculo diferencial e integral? Estos son algunos de los problemas que se tratan en el trabajo de tesis de Noemí Ruiz Munzón.

6. ¡Salvemos los problemas!

Toda investigación parte de un problema y, como dice Lakatos, debería concluir generando nuevos problemas más profundos y relevantes. Este convencimiento, que es muy claro para todo investigador, corre el peligro de diluirse y hasta de desaparecer en una cultura cada vez más mercantilizada. Como dice Daniel Innerarity refiriéndose a la filosofía, es absolutamente imprescindible salvar la capacidad de generar problemas y, podríamos añadir, la capacidad de vivir con ellos:

[…] en unos momentos en los que la solución de los problemas pasa por ser el convencimiento –nada ingenuo, cuidadosamente forjado a base de prisas y olvidos– de que no hay problemas, cuando abundan soluciones demasiado fáciles a problemas apenas formulados, cuando la facilidad se ha convertido en indecencia y la rapidez aliada de lo rudimentario. […] Cultura es también, y sobre todo, respeto a las preguntas que no podemos responder […]. Salvemos los problemas frente a la presión de los competentes […] (Innerarity 2005).

En lo que concierne a la *didáctica de las matemáticas*, y dado que formamos parte de la generación fundadora de esta disciplina, podemos decir que estamos todavía inmersos en pleno proceso de *desmagificación* (Bosch, Chevallard & Gascón 2006). Así, es habitual encontrarnos todavía con ilusionistas, no siempre desinteresados, que proponen soluciones "mágicas" a los problemas didáctico-matemáticos. Dichas soluciones suelen presentarse en forma de *eslóganes pedagógicos* que, naturalmente, pretenden dar soluciones *inmediatas*, *directas* y *completas* a los problemas que el "sentido común" plantea utilizando las nociones aceptadas y vigentes en la cultura escolar.

Así pues, como en el caso de la filosofía, es imprescindible *salvar los problemas didácticos* frente a la presión de los ilusionistas y los competentes. Éste ha sido uno de los impulsos que, sin ser muy conscientes de ello, ha guiado la génesis y el desarrollo de nuestra pequeña comunidad científica a lo largo de los últimos 30 años.

Referencias bibliográficas

Arzarello, F., Bosch, M., Gascón, J. & Sabena, C. (2008). The ostensive dimension through the lenses of two didactic approaches, *Zentralblatt für Didaktik der Mathematik*, 40, 179-188.

Asiala, A., Brown, A., De Vries, D., Dubinsky, E., Mathews, D. & Thomas, K. (1996). *A Framework for Research and Curriculum Development in Undergraduate Mathematics Education*, en Kaput J., Shoenfeld, A. y Dubinsky, E. (Eds.), Research in Collegiate Mathematics Education II, pp.1-32.

Barbé, J., Bosch, M., Espinoza, L. & Gascón, J. (2005). Didactic restrictions on the teacher's practice: the case of limits of functions in Spanish high schools, *Educational Studies in Mathematics* 59, 235-268.

Barquero, B. (2009). *Ecología de la Modelización Matemática en la enseñanza universitaria de las Matemáticas,* Tesis doctoral, Universitat Autònoma de Barcelona.

Bell, A. W. (1976). *The Learning of General Mathematical Strategies, Doctoral dissertation, Shell Center for Mathematical Education*, University of Nottingham.

Bolea, P. (2003). *El proceso de algebrización de organizaciones matemáticas escolares.* Monografía del Seminario Matemático García de Galdeano, 29. Departamento de Matemáticas. Universidad de Zaragoza.

Bolea, P., Bosch, M. & Gascón, J. (2001a). La transposición didáctica de organizaciones matemáticas en proceso de algebrización. El caso de la proporcionalidad, *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 21/3, 247-304.

Bolea, P., Bosch, M. & Gascón, J. (2001b). Cómo se construyen los problemas en Didáctica de las Matemáticas. *Educación Matemática*, 13(3), 22-63.

Bolea, P., Bosch, M. & Gascón, J. (2004). Why is modelling not included in the teaching of algebra at secondary school? *Quaderni di Ricerca in Didattica*, 14, 125-133.

Bolea, P. & Cid, E. (2007). Diseño de un modelo epistemológico de referencia para introducir los números negativos en un entorno algebraico, *II Congreso Internacional sobre la TAD*, Uzès (Francia), pendiente de publicación.

Bosch, M. (1994). La dimensión ostensiva en la actividad matemática. El caso de la proporcionalidad, Universitat Autònoma de Barceona, tesis doctoral.

Bosch, M., Chevallard, Y. & Gascón, J. (2006). Science or magic? The use of models and theories in didactics of mathematics, *Proceedings of the Fourth Congress of the European Society for Research in Mathematics Education*, Universitat Ramon Llull, Barcelona.

Bosch, M., Fonseca, C. & Gascón, J. (2003). Una situación fundamental de álgebra lineal, *Seminario Interuniversitario de Investigación en Didáctica de las Matemáticas (SI-IDM),* Córdoba.

Bosch, M., Fonseca, C. & Gascón, J. (2004). Incompletitud de las Organizaciones Matemáticas Locales en las instituciones escolares, *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 24/2; 205-250.

Bosch, M., Fonseca, C. & Gascón, J. (to appear). El momento del trabajo de la técnica en la completación de Organizaciones Matemáticas: el caso de la división sintética y la factorización de polinomios, *Educación Matemática*, (aceptado para su publicación).

Bosch, M. & Gascón, J. (1993). Prácticas en Matemáticas: el trabajo de la técnica, en: Filloy E. y Puig L., *Memorias del Tercer Simposio Internacional sobre Investigación en Educación Matemática* (Valencia, junio 1991), CINVESTAV, México, 141-152.

Bosch, M. & Gascón, J. (1994). La integración del momento de la técnica en el proceso de estudio de campos de problemas de matemáticas, *Enseñanza de las Ciencias,* 12 (3), 314-332.

Bosch, M. & Gascón, J. (2005). La praxéologie comme unité d'analyse des processus didactiques. In Mercier, A., Margolinas, C. (eds.), *Balises pour la didactique des mathématiques*, (pp. 107-122), La Pensée Sauvage : Grenoble.

Bosch, M. & Gascón, J. (2007). 25 años de transposición didáctica, en Ruiz-Higueras, L., Estepa, A. y García, F.J. (eds.) *Sociedad, Escuela y Matemáticas. Aportaciones de la Teoría Antropológica de lo Didáctico*. Jaén: Servicio de Publicaciones de la Universidad de Jaén, 385-406.

Brousseau, G. (1993). La didáctica de las matemáticas en la formación del profesorado, conferencia pronunciada en las *Segundas Jornadas de Matemáticas y Didáctica de las Matemáticas*, Universitat Autònoma de Barcelona. [Publicada en catalán, La didàctica de les matemàtiques en la formació del professorat, *Butlletí de la Societat Catalana de Matemàtiques*, 11/1, 33-45 (1996)].

Brousseau, G. (2000). Les différents univers de la mesure et leurs situations fondamentales. Un exemple d'utilisation de la théorie des situations pour l'ingénierie. *Quaderni di Ricerca in Didattica,* 9. Disponible en: http://dipmat.math.unipa.it/~grim/quaderno9.htm.

Cantoral, R. (1996). Una visión de la matemática educativa, en *Investigaciones en Matemática Educativa*, Grupo Editorial Iberoamérica: México, 131-147.

Chevallard, Y. (1985/1991). *La Transposition Didactique. Du savoir savant au savoir enseigné*. La Pensée Sauvage, Grenoble (2ª edición 1991).

Chevallard, Y. (1985). Le passage de l'arithmétique à l'algèbre dans l'enseignement des mathématiques au collège: l'évolution de la transposition didactique, *Petit x* 5, 51-94.

Chevallard, Y. (1989a). Le passage de l'arithmétique à l'algébrique dans l'enseignement des mathématiques au collège - Deuxième partie: Perspectives curriculaires : la notion de modelisation. *Petit x, 19*, 45-75.

Chevallard, Y. (1989b). Le passage de l'arithmétique à l'algébrique dans l'enseignement des mathématiques au collège – Troisième partie: Perspectives curriculaires: voies d'attaque et problèmes didactiques. *Petit x, 25*, 5-38.

Chevallard, Y. (1989c): *Aspects d'un travail de théorisation de la didactique des mathématiques. Etude du cas de l'algèbre élémentaire*, Nota de síntesis disponible en el IREM d'Aix-Marseille.

Chevallard, Y. (1991): *Didactique, anthropologie, mathématiques*, Postfacio a la 2ª edición de *La transposition didactique. Du savoir savant au savoir enseigné*, La pensée Sauvage: Grenoble.

Chevallard, Y. (1992): Concepts fondamentaux de la didactique: Perspectives apportées par une approche anthropologique, *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 12/1, 73-112.

Chevallard, Y. (1997): Familière et problématique, la figure du professeur, *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 17/3, 17-54.

Chevallard, Y. (1999): L'analyse des pratiques enseignantes en théorie anthropologique du didactique, *Recherches en Didactique des Mathématiques,* 19/2, 221-266.

Chevallard, Y. (2001). Aspectos problemáticos de la formación docente, *XVI Jornadas del Seminario Interuniversitario de Investigación en Didáctica de las Matemáticas*, Huesca. Recuperable en http://www.ugr.es/local/jgodino/siidm.htm

Chevallard, Y. (2005). La place des mathématiques vivantes dans l'éducation secondaire: transposition didactique des mathématiques et nouvelle épistémologie scolaire. *Conferencia dada en la 3ª «Université d'été Animath», Saint-Flour, 22-27 de Agosto de 2004.* Publicado en *La place des mathématiques vivantes dans l'éducation secondaire, APMEP,* 239-263.

Chevallard, Y. (2006). Steps towards a new epistemology in mathematics education. *Proceedings of the Fourth Congress of the European Society for Research in Mathematics Education*, Universitat Ramon Llull: Barcelona, 21-30.

Chevallard, Y., Bosch, M. & Gascón, J. (1997). *Estudiar matemáticas. El eslabón perdido entre la enseñanza y el aprendizaje*. ICE/Horsori, Barcelona.

Dubinsky, E. (2000). De la investigación en matemática teórica a la investigación en matemática educativa: un viaje personal, *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa* (*RELIME*), 3(1), 47-70.

Fonseca, C. (2004). *Discontinuidades Matemáticas y Didácticas entre la Secundaria y la Universidad*, Universidad de Vigo, Tesis doctoral.

García, F. J., Gascón, J., Ruiz Higueras, L. & Bosch, M. (2006). Mathematical modelling as a tool for the connection of school mathematics, *Zentralblatt für Didaktik der Mathematik,* 38(3), 226-246.

García, F. J. (2005). *La modelización como instrumento de articulación de la matemática escolar. De la proporcionalidad a las relaciones funcionales.* Jaén: Tesis Doctoral, Departamento de Didáctica de las Ciencias, Universidad de Jaén.

Gascón, J. (1989). *El Aprendizaje de Métodos de Resolución de Problemas de Matemáticas*, Tesis doctoral, Universitat Autònoma de Barcelona.

Gascón, J. (1993). Desarrollo del conocimiento matemático y análisis didáctico: Del patrón análisis-síntesis a la génesis del lenguaje algebraico. *Recherches en didactique des mathématiques,* 13(3), 295-332.

Gascón, J. (1993-1994). Un nouveau modèle de l'algèbre élémentaire comme alternative à l'« arithmétique généralisée ». *Petit x,* 37, 43-63.

Gascón, J. (1997). Cambios en el contrato didáctico: el paso de estudiar matemáticas en Secundaria a estudiar matemáticas en la Universidad, *SUMA*, 26, 11-21.

Gascón, J. (1998). Evolución de la didáctica de las matemáticas como disciplina científica. *Recherches en Didactique des Mathématiques.* 18(1) 7-34.

Gascón, J. (1999a). La naturaleza prealgebraica de la matemática escolar. *Educación matemática.* 11(1), 77-88.

Gascón, J. (1999b). Fenómenos y problemas en didáctica de las matemáticas. In T. Ortega, (Ed.), *Actas del III Simposio de la SEIEM* (pp. 129-150). Valladolid: SEIEM.

Gascón, J. (2001a). Incidencia del modelo epistemológico de las matemáticas sobre las prácticas docentes. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa* (*RELIME*), 4(2), 129-159.

Gascón, J. (2001b). Reconstrucción de la divisibilidad en la Enseñanza Secundaria. *Quadrante. Revista Teórica e de Investigação*, 10/2; 33-66.

Gascón, J. (2002). El problema de la Educación Matemática y la doble ruptura de la Didáctica de las Matemáticas, *Gaceta de la Real Sociedad Matemática Española,* 5/3; 673-698.

Gascón, J. (2003a). From the Cognitive to the Epistemological Programme in the Didactics of Mathematics: Two Incommensurable Scientific Research Programmes? *For the Learning of Mathematics* 23/2, 44-55.

Gascón, J. (2003b). La Pedagogía y la Didáctica frente a la problemática del profesorado Conferencia plenaria, XVI Congreso de ENCIGA, Cangas do Morrazo (Pontevedra).

Gascón, J. (2003c), Efectos del "autismo temático" sobre el estudio de la Geometría en Secundaria. Parte I. Desaparición escolar de la razón de ser de la geometría, *Suma. Revista sobre la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas*, 44; 25-34.

Innerarity, D. (2005). Salvemos los problemas, *EL PAIS* – Opinión – 07-06-2005.

Kilpatrick, J. (1967). *Analyzing the solution of word problems in mathematics: an exploratori study*, Doctoral dissertation, Stanford University.

Kilpatrick, J. (1985). A retrospective account of the past twenty-five years of research on teaching mathematical problem solving. In E. Silver (Ed.), *Teaching and learning mathematical problem solving: multiple research perspectives* (pp. 1-15). Hillsdale, NJ: Erlbaum.

Kilpatrick & Wirszup (1969-75). *Soviet Studies in the Psychology of Learning and teaching Mathematics,* Vol. III, Problem Solving in Arithmetic and Algebra, Survey of recent east European mathematical literature, University of Chicago.

Kuhn, T.S. (1969). *La estructura de las revoluciones científicas.* México: Fondo de Cultura Económica (1979).

Lakatos, I. (1971). *History of Science and its Rational Reconstructions*, en R. C. Buck y R. S. Cohen (eds.): *P.S.A..,* 1970, Boston Studies in the Philosophy of Science, 8, pp. 91-135. Dordrecht: Reidel [Trad. española: *Historia de la ciencia y sus reconstrucciones racionales*, Tecnos: Madrid, 1974].

Lakatos, I. (1976). *Proofs and Refutations: The logic of mathematical discovery* (J. Worrall and E. Zahar, Eds.). Cambridge University Press.

Lakatos, I. (1978a). *Mathematics, Science and Epistemology: Philosophical Papers*, Vol. 2, Cambridge University Press: Cambridge [Trad. española: *Matemáticas, ciencia y epistemología*, Alianza:Madrid, 1981].

Lakatos, I. (1978b). *The Methodology of Scientific Research Programmes*, Philosophical Papers Vol. 1, Cambridge University Press: Cambridge [Trad. española: *La metodología de los programas de investigación científica*, Alianza: Madrid, 1983].

Lesh, R. & Landau, M. (1983). *Acquisition of Mathematics Concepts and Processes*, Academic Press: New York.

Pólya, G. (1945). *How to solve it* (2d ed. 1957). Princeton: Princeton University Press.

Pólya, G. (1954). *Mathematics and Plausible Reasoning* (Volume 1: *Induction and analogy in mathematics*; Volume 2: *Patterns of plausible inference*). Princeton: Princeton University Press.

Pólya, G. (1962-5). *Mathematical Discovery* (*2 Vol.*) New York: John Wiley and Sons.

Rodríguez, E. (2005). *Metacognición, resolución de problemas y enseñanza de las matemáticas: una propuesta integradora desde el enfoque antropológico.* Tesis Doctoral. Madrid: Universidad Complutense de Madrid.

Rodríguez, E., Bosch, M. & Gascón, J. (2008). A networking method to compare theories: Metacognition in Problem Solving reformulated within the Anthropological Theory of the Didactic, *Zentralblatt für Didaktik der Mathematik*, 40, 287-301.

Ruiz Munzón, N., Bosch, M. & Gascón, J. (2007a). Modelización funcional con parámetros en un taller de matemáticas con WIRIS. En A. Estepa, L. Ruiz, F. J. García (Eds.), *Sociedad, escuela y matemáticas. Aportaciones de la Teoría Antropológica de lo Didáctico (TAD)* (pp. 677-702). Jaén: Publicaciones de la Universidad de Jaén.

Ruiz Munzón, N., Bosch, M. & Gascón, J. (2007b). The functional algebraic modelling at Secondary level. En D. Pitta-Panzati & G. Philippou (Eds.), *Proceedings of the Fifth Congress of the European Society for Research in Mathematics Education* (pp. 2170-2179). Nicosia: University of Cyprus.

Ruiz Munzón, N., Bosch, M. & Gascón, J. (to appear). Un modelo epistemológico de referencia del álgebra como herramienta de modelización. *3rd Conference on the Anthropological Theory of the Didactic (Sant Hilari Sacalm, Spain, January, 26-29, 2010).* http://www.crm.cat/cdidactic/

Schoenfeld, A.H. (1985). *Mathematical problem solving,* San Diego, CA: Academic Press.

Schoenfeld, A. H. (2001). Objetivos y métodos de la investigación en Educación Matemática, *La Gaceta de la Real Sociedad Matemática Española,* 4/1, 185-203.

Sierra, T. A. (2006). *Lo matemático en la creación y análisis de Organizaciones Didácticas. El caso de los Sistemas de Numeración*, Tesis Doctoral, Universidad Complutense de Madrid.

UNIÓN
REVISTA IBEROAMERICANA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA

Junio de 2010, Número 22, páginas 37-51
ISSN: 1815-0640

De Euclides às geometrias não euclidianas

Vincenzo Bongiovanni , Ana Paula Jahn

Resumo

As Geometrias não Euclidianas têm uma história repleta de hesitações, dúvidas e contradições que só foram eliminadas após um longo trabalho de reflexão e apuramento. É uma história de 20 séculos que rompe com a crença de que a geometria euclidiana é única. Ela se confunde com a história do quinto postulado de Euclides. O fracasso de todas as tentativas de provar esse postulado levou lentamente a uma nova concepção da Matemática em que todos os elementos de uma teoria devem ser cuidadosamente explicitados.

Abstract

The *non Euclidean Geometries* have a history full of hesitations, doubts and contradictions that were eliminated only after a long process of reflection and clearance. It is a history of 20 centuries that breaks with the belief that Euclidean geometry is unique. She is confused with the history of the fifth postulate of Euclid. The failure of all attempts to prove this postulate led slowly to a new conception of mathematics in which all elements of a theory should be carefully explained.

Resumen

Las geometrías no euclidianas tienen una historia llena de vacilaciones, dudas y contradicciones que se han eliminado sólo después de un largo proceso de reflexión y de aclaración. Es una historia de 20 siglos que rompe con la creencia de que la geometría euclidiana es única. Ella se confunde con la historia del quinto postulado de Euclides. El fracaso de todos los intentos de demostrar este postulado condujo lentamente a una nueva concepción de la matemática en la que todos los elementos de una teoría deben ser explicado detenidamente.

1. Os Elementos de Euclides

O mais antigo texto matemático grego que nos chegou completo é a obra de Euclides *Os Elementos*. Essa obra constituída de 13 livros expõe resultados da matemática elementar em ordem lógica, desde a época de Tales (600 a.C) até Euclides (300 a.C). O quadro abaixo, apresenta os tópicos de cada um dos treze livros.

Livro I	Propriedades dos triângulos, teoria das paralelas (proposições 27 a 32) e figuras equivalentes	23 definições, 9 axiomas, 5 postulados, 48 proposições
Livro II	Álgebra geométrica	2 definições, 14 proposições
Livro III	A geometria do círculo	11 definições, 39 proposições
Livro IV	Polígonos regulares	7 definições, 16 proposições
Livro V	A teoria das proporções	18 definições, 25 proposições
Livro VI	Tales e figuras semelhantes	4 definições , 33 proposições
Livro VII	Teoria dos números	23 definições, 39 proposições
Livro VIII	Teoria dos números	27 proposições
Livro IX	Teoria dos números	36 proposições
Livro X	Números incomensuráveis	4 definições, 115 proposições
Livro XI	Geometria espacial de posição	28 definições, 39 proposições
Livro XII	Áreas e volumen	18 proposições
Livro XIII	Poliedros regulares	18 proposições

O que distingue a obra de Euclides de todas as outras que chegaram até nós e faz a sua grandeza é a sua estrutura axiomática. O livro I é a chave da apresentação do método axiomático. A partir de algumas definições, 9 axiomas e 5 postulados Euclides deduz 465 teoremas. Os postulados eram proposições que se pediam que fossem aceitos sem demonstração e segundo a tradução de VITRAC eram cinco:

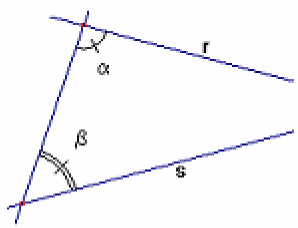
Postulado1: Pode-se traçar uma reta de qualquer ponto a outro ponto qualquer.
Obs.: a palavra *reta* na obra de Euclides equivale ao nosso *segmento de reta***.** É um postulado garante a existência do segmento.

Postulado2: Pode-se prolongar uma reta infinitamente.
Obs.: o postulado 2 garante a existência da reta.

Postulado3: Pode-se descrever uma circunferência com qualquer centro e qualquer raio.
Obs.: esse postulado garante a existência da circunferência.

Postulado4: Pode-se considerar todos os ângulos retos iguais entre si.

Postulado5: Se duas retas interceptadas por uma terceira reta, formam, do mesmo lado dessa reta secante, dois ângulos internos cuja soma é menor que dois ângulos retos, as retas quando suficientemente prolongadas se interceptam por esse lado da secante.
Obs.: A partir do diagrama abaixo, o quinto postulado de Euclides será enunciado numa linguagem moderna: Se $\alpha+\beta<180°$ então as retas r e s se intersectam do lado de α e β.



O livro I foi objeto de vários comentários por causa desse quinto postulado. A sua forma um pouco complicada incitou muitos matemáticos a tentar deduzi-lo a partir dos outros. Entre aqueles que tentaram estabelecer sem sucesso uma prova podemos citar:

No mundo grego	No mundo árabe	No Ocidente
Ptolomeu (Século II)	Al Haytam (séculoXI)	Saccheri (1733)
Proclus (Século V)	Al Kayyam (séculos XI-XII)	Lambert (1766)
Aganis (século VI)	Al Tusi (século XIII)	Legendre(1794)

Obs.: Legendre(1752-1833) estava tão obcecado em provar o quinto postulado de Euclides que, durante um período de 29 anos, publicou inúmeras tentativas, uma após outra, em diferentes edições do seu livro *Elementos de geometria*.

1.1 A equivalência entre o quinto postulado de Euclides e o postulado das paralelas

Em 1795, o enunciado do quinto postulado de Euclides foi substituído por um outro, equivalente, chamado hoje de *postulado das paralelas*. Tal formulação é devida a Playfair: "*Por um ponto fora de uma reta pode-se traçar uma única paralela à reta dada*." Todavia, esse postulado já havia sido considerado por Proclus em sua obra *Comentários sobre o primeiro livro dos elementos de Euclides*.

1.2 Alguns enunciados equivalentes ao quinto postulado de Euclides

As inúmeras tentativas infrutíferas de provar o quinto postulado de Euclides esbarravam no uso indevido de resultados equivalentes ao quinto postulado de Euclides.

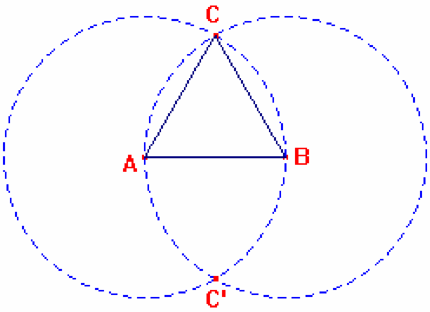
Entre esses resultados podem-se citar :

- A soma das medidas dos ângulos de um triângulo é igual a 180°.
- A soma das medidas dos ângulos de um quadrilátero é igual a 360°.
- As retas paralelas são equidistantes.
- Por três pontos não alinhados passa sempre uma circunferência.
- A linha dos pontos equidistantes a uma reta dada e do mesmo lado da reta é uma reta.
- Existe um retângulo.
- Por um ponto situado no interior de um ângulo pode-se sempre conduzir uma reta que intercepta as duas semi-retas que formam o ângulo.
- Todo ângulo inscrito numa semi-circunferência é reto.
- Se uma reta corta uma de duas retas paralelas então ela corta também a outra

1.3 Imperfeições na obra de Euclides

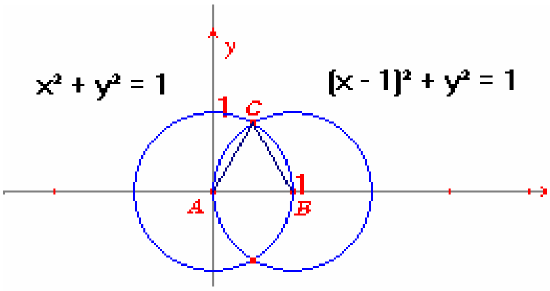
O fracasso de todas as tentativas de provar o quinto postulado de Euclides levou lentamente a uma nova concepção da matemática em que todos os elementos de uma teoria deveriam ser cuidadosamente explicitados. Uma análise atenta do sistema de postulados de Euclides, mostra que há muitos apelos à intuição nas definições e demonstrações.

Euclides usava fatos que não eram postulados ou conseqüências de teoremas anteriormente provados. Por exemplo, na proposição I do livro I Euclides pede para construir um triângulo eqüilátero sobre um segmento dado.



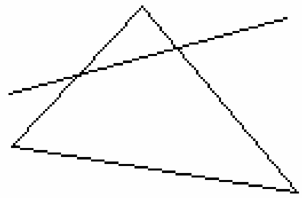
Com o centro em A e raio AB descreve uma circunferência, e com centro em B e raio BA descreva-se outra circunferência. Na demonstração Euclides usa o fato de que as duas circunferências se cortam no ponto C. Mas isso não é necessariamente verdadeiro a partir dos postulados enunciados por ele.

Considere um plano formado por todos os pares ordenados (x,y) com x e y *racionais.*

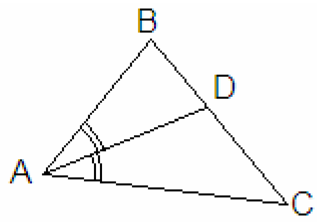


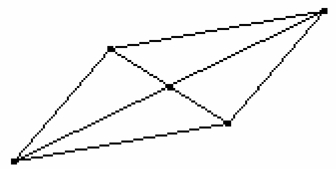
Sejam $x^2+y^2=1$ e $(x-1)^2+y^2=1$ as duas equações das circunferências. Resolvendo o sistema obtém-se C $(1/2, \sqrt{3}/2)$. As circunferências não se intersectam nesse plano pois que a ordenada do ponto C é irracional. Portanto nessa proposição Euclides usou um postulado de continuidade (se uma circunferência tem um ponto interno e um ponto externo a outra circunferência então as duas circunferências se intersectam em dois pontos) não enunciado anteriormente.

No fim do século XIX vários matemáticos passaram a trabalhar num estudo mais rigoroso da geometria de Euclides, principalmente no que se refere à ordem. Utilizando os postulados de Euclides não se pode provar que se uma reta intersecta um lado de um triângulo então ela intersectará o outro lado do triângulo. Este fato só foi percebido em 1882 pelo o matemático Pasch que o adotou como postulado nas suas demonstrações.



Outros resultados utilizados freqüentemente em demonstrações não podem ser provados com o sistema de Euclides. Por exemplo, não é possível provar que se a bissetriz interna AD de um ângulo de um triângulo ABC intersecta o lado BC no ponto D então esse ponto está entre B e C e também não se pode provar que as diagonais de um paralelogramo se intersectam num ponto.



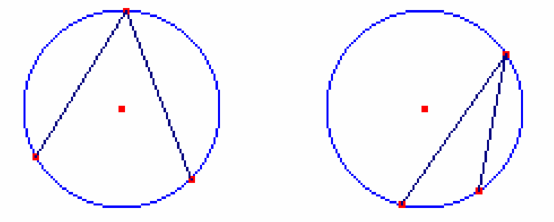


Outra imperfeição encontrada na obra de Euclides é que as demonstrações por superposição não eram rigorosas. Usavam deslocamentos que não eram definidos. Para provar o caso de congruência LAL Euclides começa por mover um dos triângulos de forma a fazê-lo coincidir com o outro, mas nenhum dos postulados lhe permitia esse movimento.

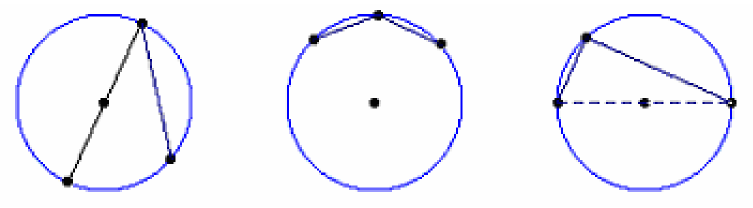
Como garantir que o movimento não alterava a forma do triângulo? Faltava, portanto um postulado que garantisse que as propriedades das figuras (comprimentos e ângulos) permanecessem inalteradas durante seu deslocamento. Alguns geômetras sugeriram o seguinte postulado "*as figuras geométricas podem deslocar-se sem modificar seu tamanho e forma*." Esse postulado foi utilizado por todos os geômetras gregos mas sem enunciá-lo explicitamente.

Em 1557, o geômetra Pelletier o considera como uma definição. Em 1638, o geômetra Borelli toma a precaução de advertir: vamos sobrepor os triângulos não materialmente mas sim intelectualmente. Em 1898, Hilbert o inclui na lista de seus postulados (hoje, a maioria dos sistemas axiomáticos o denomina de caso LAL de congruência de triângulos).

Outro problema na axiomática de Euclides é o fato das demonstrações se basear apenas na figura considerada. Vários resultados eram generalizados a partir da demonstração de um único caso particular. Na proposição 20 do livro III, Euclides demonstra que o ângulo inscrito num triângulo é o dobro do ângulo central correspondente. Para isso, ele distingue somente dois casos de figura onde o ângulo inscrito é agudo.



Nenhuma palavra é dita sobre os casos em que os ângulos inscritos são obtusos, ou retos ou possuindo um lado passando pelo centro.



Os exemplos acima mostram que o sistema de postulados de Euclides não era completo. Faltavam postulados de separação, de continuidade e de congruência. Além disso Euclides não reconheceu a importância dos conceitos não definidos.

1.4 Algumas das adaptações dos Elementos de Euclides

Durante séculos, a obra de Euclides serviu de modelo para o ensino da geometria. Cada autor de manual respeitava a divisão feita por Euclides, e no interior de cada livro, a disposição e a formulação das diferentes proposições.

Em 1741, Clairaut fêz uma tentativa de apresentar a geometria elementar de uma maneira intuitiva. Segundo Lehmann e Bkouche: « *Clairaut propõe-se definir as condições que permitem ao principiante adquirir um conhecimento da Geometria a partir da observação e da experiência e de desenvolver, por meio de problemas bem escolhidos, os métodos de raciocínio que lhe permitem progredir. Os problemas que servem de ponto de partida são aqueles das medidas de terreno, mais próximos das idéias geométricas. Clairaut discorda da exposição euclidiana e do papel da lógica no ensino , e prefere enfatizar o papel desempenhado pela experiência.* »

Uma outra tentativa de adaptação dos *Elementos* foi feita por Lacroix que escreveu um livro fazendo um equilíbrio entre o rigor e a aceitação de verdades evidentes.

Legendre teve uma outra preocupação e foi na direção contrária a uma geometria intuitiva. Tratou a geometria de uma maneira mais rigorosa, mais axiomática. Legendre pode ser considerado como um precursor da axiomática moderna.

1.5 A estrutura do livro I de Euclides

Apresentamos abaixo a Estrutura do livro I de Euclides extraída do livro *Os Elementos* de Euclides, volume I, tradução de Vitrac, página 514. Observe que há propriedades que dependem do quinto postulado de Euclides e propriedades que não o utilizam.

Proposição	Definição	Postulados	Noções Comum	Proposição
1	15,20	1,3	1	
2	15,20	1,2,3	1,3	1
3	15	3	1	2
4			7,9	
5		1,2	3	3,4
6		1	8	3,4
7		1	8	5
8			7	7
9	20	1		1,3,8
10	20			1,4,9
11	10,20	1		1,2,3,8
12	10,15	1,3		8,10
13	10		1,2	11
14		2,4	1,2,3,8	13
15		4	1,2,3	13
16		1,2	8	2,3,4,10,15
17		2	4	13,16
18		1	8	3,5,16
19				5,18
20		1,2	8	2,5,19
21		2	4	16,20
22	15	1,3	1	2,3,20
23		1		8,22
24		1	1,8	2,4,5,19,23

Proposição	Definição	Postulados	Noções Comum	Proposição
25				4,24
26		1	1,8	3,4,16
27	23	2		16
28		4	1,2,3	13,15,27
29	23	2,**5**	1,2,4	13,15
30			1	27,**29**
31		1,2		23,27
32		2	1,2	13,**29**,31
33		1		4,27,**29**
34		1	2	4,26,**29**
35			1,2,3	4,**29**,**34**
36		1	1	**33,34,35**
37		2	6	31,**34**,**35**
38		2	6	31,**34**,**36**
39		1	1,8	31,**37**
40		1	1,8	31,**38**
41		1	1,2	**34**,**37**
42		1	1,2	10,23,31,**38**,**41**
43		1	2,3	**34**
44		1,2,**5**	1,8	15,**29**,**30**,31,**42**,**43**
45		1	1,2	14,**29**,**30**,**33**,**34**,**42**,**44**
46	22	4	1,3	2,3,11,**29**,31,**34**
47		1,4	1,2,5	4,14,**30**,31,**41**,**46**
48		1	1,2	2,3,8,11,**47**

O quadro acima mostra que as proposições 1 a 28 e a proposição 31 não dependem do 5º postulado de Euclides.

1.6 A geometria absoluta

No sistema axiomático de Euclides, chama-se **geometria absoluta** ao estudo das propriedades que utilizam todos os postulados de Euclides exceto o quinto.

Legendre demonstrou que na geometria absoluta valem os seguinte resultados: A soma das medidas dos ângulos internos de um triângulo é menor ou igual a 180^o e a soma das medidas dos ângulos internos de um quadrilátero é menor ou igual a 360^o

Saccheri (1667-1733) foi um padre jesuíta que antes de morrer publicou um livro com o título "*Euclides liberto de qualquer imperfeição*". Nele, Saccheri tenta demonstrar o quinto postulado de Euclides usando o raciocínio por absurdo. Nega o quinto postulado e tenta deduzir uma contradição. Com as propriedades da geometria absoluta prova-se que ambos os ângulos superiores do quadrilátero de Saccheri são congruentes. Ele considerou três hipóteses para os ângulos superiores a) ambos retos b) ambos obtusos c) ambos agudos.

Admitindo que os ângulos eram obtusos, chegava numa contradição. Mas Saccheri por mais que tentasse não conseguia chegar num absurdo quando admitia que ambos eram agudos. Conseguia deduzir vários resultados estranhos, mas nunca uma contradição. Foi aí que mesmo sem encontrar uma contradiçãp, enganou a si mesmo pronunciando uma frase célebre: "*a hipótese de ambos os ângulos serem agudos é falsa, pois repugna a natureza da reta."* Sem saber Saccheri estava dando os primeiros passos em direção às geometrias não euclidianas.

2. O aparecimento das geometrias não euclidianas

Pelo fim do século XVIII foram feitas novas tentativas de demonstrar o quinto postulado de Euclides por meio de demonstrações indiretas. Mas, em vez de conduzir a uma contradição, este novo conjunto de axiomas formou a base de uma teoria consistente chamada hoje de **geometrias não euclidianas.**

Lobatchevsky em 1829, negou o quinto postulado de Euclides, admitindo que por um ponto fora de uma reta passam pelo menos duas retas paralelas. Ele foi a primeiro a publicar esta teoria, por isso é considerado o fundador oficial das geometrias não euclidianas, embora Gauss em 1824 numa carta enviada a Taurinus, já soubesse dessa possibilidade. Em 1832, Bolyai, independentemente, obteve os mesmos resultados. Essa geometria passou a ser chamada de **geometria hiperbólica**. Em 1854, Riemann nega o quinto postulado de Euclides admitindo a outra negação: por um ponto fora de uma reta não se pode conduzir uma reta paralela à reta dada. Essa outra geometria não euclidiana passou a ser chamada de **geometria esférica.**

Mas faltava ainda uma prova para dizer que nesta nova geometria não surgiriam contradições. Beltrami, Klein e Poincaré demonstram a consistência desta nova geometria pelo método dos modelos. Um modelo para um dado sistema axiomático é uma interpretação dada aos conceitos primitivos de modo que os axiomas sejam todos verdadeiros.

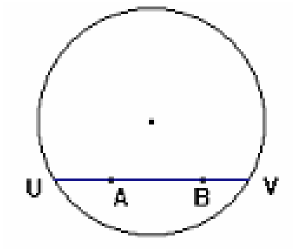
Fundadores das Geometrias Não Euclidianas	Os modelos
Gauss (1824)	Beltrami (1869)
Lobatchevsky (1829)	Klein (1871)
Bolyai (1832)	Poincaré (1881)
Riemann (1854)	

O primeiro modelo que mostra a consistência dessa nova geometria foi apresentado por Beltrami. Trata-se do modelo da pseudo-esfera para a geometria hiperbólica. A dificuldade em interpretar nesse modelo levou Klein a procurar uma representação plana das retas da pseudo-esfera chamadas geodésicas.

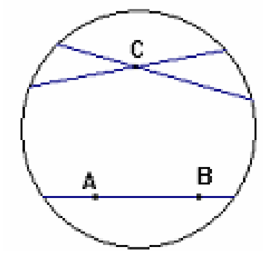
Ele obteve esse modelo considerando o interior de um círculo. As retas da pseudo-esfera tornavam-se cordas desse círculo. E dessa forma ele descobriu as primeiras regras do que se chamaria de modelo de Klein-Beltrami. Nesse modelo o plano é o interior de um disco de centro O e raio r e qualquer ponto no interior do disco é um ponto hiperbólico. A reta é uma corda qualquer sem as suas extremidades e a distância entre dois pontos A e B é dada pela fórmula

$$\left| \ln (AU/AV)/ (BU/BV) \right|$$

onde U e V são os pontos de intersecção da corda com a circunferência e AU,AV,BU e BV são distâncias euclidianas.

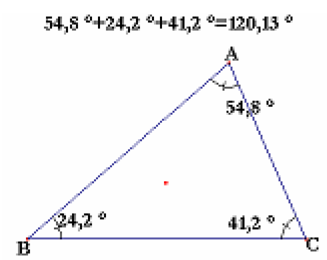


Esta interpretação constitui um modelo da geometria hiperbólica pois que os quatro primeiro postulados de Euclides e o postulado hiperbólico (por um ponto fora de uma reta passam pelo menos duas retas paralelas à reta dada) são verificados.

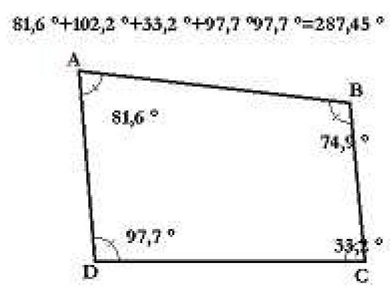


Como conseqüência do postulado hiperbólico pode-se provar que:

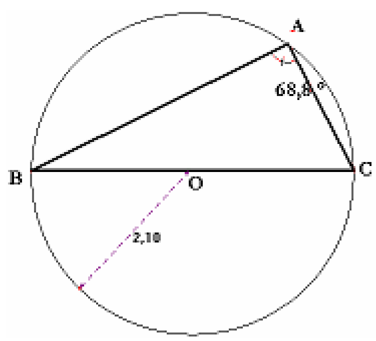
A soma das medidas dos ângulos de um triângulo é menor que 180°



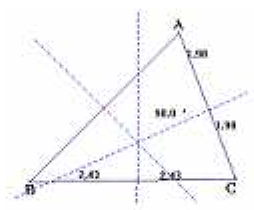
A soma das medidas de um quadrilátero convexo é menor que 360°

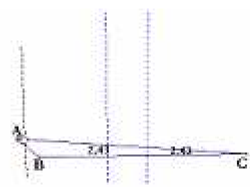


Todo ângulo inscrito numa semi-circunferência é agudo.

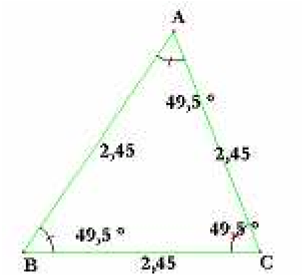


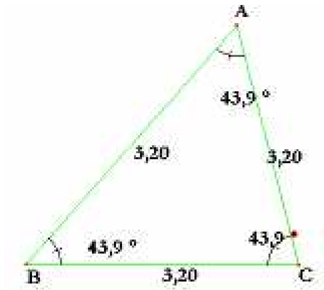
Nesse modelo temos vários resultados surpreendentes (em relação à geometria euclidiana) tais como: as mediatrizes de um triângulo podem ser concorrentes ou paralelas.



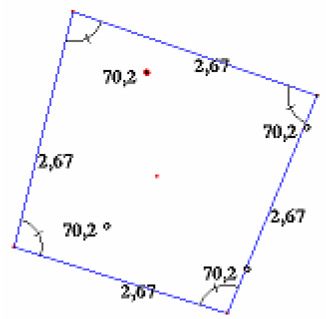


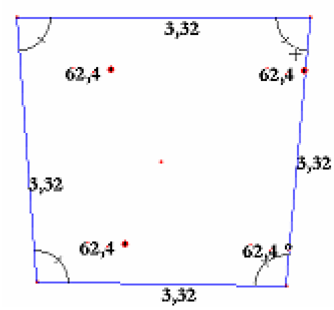
Um outro resultado sem equivalente na geometria euclidiana é que os triângulos eqüiláteros (3 lados iguais) não são semelhantes entre si (têm ângulos diferentes) .



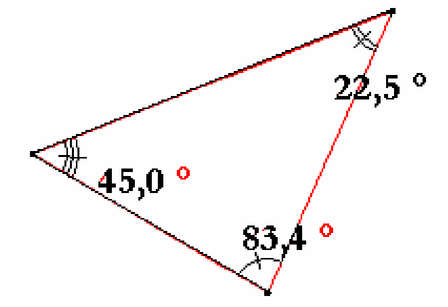


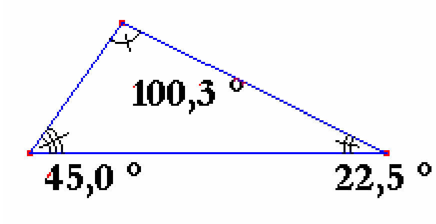
O mesmo ocorrendo com os quadrados. Os quadrados abaixo não são semelhantes.



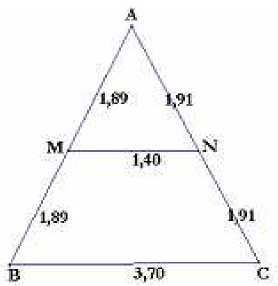


Na geometria hiperbólica dois triângulos podem ter dois pares de ângulos congruentes sem terem o terceiro par de ângulos congruentes.

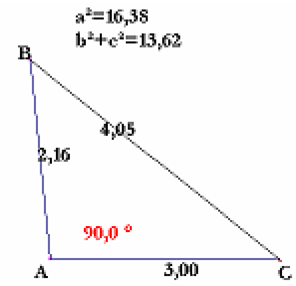




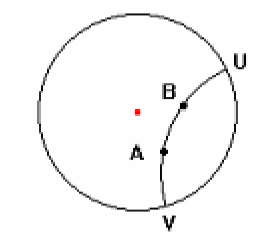
O teorema dos pontos médios não é válido pois depende do postulado das paralelas



A relação $a^2=b^2+c^2$ conhecida como teorema de Pitágoras não é válida na geometria hiperbólica. Sendo a,b e c respectivamente as medidas da hipotenusa e dos catetos de um triângulo retângulo temos que $a^2>b^2+c^2$.



Um outro modelo que mostra a consistência dessa nova geometria é o modelo plano do disco de Poincaré. Nesse modelo consideramos **o plano** como o interior de um disco de centro O e raio r. Qualquer **ponto** no interior do disco será considerado como um ponto nesse modelo. A **reta** será um diâmetro qualquer da circunferência de centro O e raio r sem as extremidades ou a intersecção de um arco de uma circunferência ortogonal à circunferência dada e o interior do círculo dado. O **ângulo** formado por duas retas hiperbólicas será o ângulo euclidiano formado pelas retas euclidianas tangentes às retas hiperbólicas no ponto de encontro. A distância entre dois pontos A e B do plano hiperbólico será dada pela fórmula $|\ln (AU/AV)/ (BU/BV)|$ onde U e V são as intersecções da circunferência ortogonal que contém as retas hiperbólicas com o disco de centro O e raio r e AU,AV,BU,BV são distâncias euclidianas.



2.1 As caracterizações das geometrias pelas transformações

Em 1872 Klein apresentou um trabalho intitulado ”Considerações comparativas sobre recentes investigações geométricas” que ficou conhecido como Programa de Erlangen. Nesse trabalho Klein mostra um novo método de investigação que consiste na fusão entre ramos da matemática aparentemente separados. Apoiado na obra de Jordan “o tratado das substituições” publicada em 1870 onde a teoria dos grupos e as transformações geométricas são enfatizadas, Klein relaciona a geometria euclidiana, a geometria projetiva e as geometrias não euclidianas a partir das transformações geométricas e por meio da teoria dos grupos. Ele foi o primeiro a mostrar que a geometria projetiva não depende do quinto postulado de Euclides.

Klein considera o conjunto formado pelas translações, rotações, reflexões em retas e suas composições. Esse conjunto forma o *grupo das isometrias* em relação à operação composição. Acrescentando a esse último conjunto as homotetias, obtém o *grupo das semelhanças*. Juntando a esse último grupo as afinidades forma-se o *grupo afim*. Incorporando a esse último as projetividades obtém-se o *grupo projetivo*. A partir desses conjuntos, Klein define as geometrias de acordo com o seu grupo de transformações.

A geometria euclidiana, a geometria das semelhanças, a geometria afim e a geometria projetiva são definidas respectivamente como o estudo das propriedades das figuras que permanecem inalteradas quando os elementos dessas figuras são submetidos às transformações, respectivamente, do grupo das isometrias, do grupo das semelhanças, do grupo afim e do grupo projetivo.

Hoje, costumamos chamar de *geometria euclidiana* o estudo das propriedades das figuras que permanecem inalteradas quando os elementos dessas figuras são submetidos às transformações do *grupo das semelhanças* (e não das isometrias como usava Klein) e chamamos de *geometria métrica* o estudo das propriedades das figuras que permanecem inalteradas quando os elementos dessas figuras são submetidos às transformações do *grupo das isometrias.*

Nessa nova apresentação das geometrias, as transformações geométricas fazem o papel de elo entre duas configurações. Elas permitem passar de uma figura a outra transportando as suas propriedades e o estudo das figuras é substituído pelo estudo das propriedades das transformações.

2.2 Adaptações dos Elementos de Euclides no século XIX

Charles Méray (1835-1911) em 1874 escreve a obra "Les nouveaux éléments de géométrie" onde rompe com a tradição grega de ensinar geometria plana (livros I a VI de Euclides) antes de geometria espacial (livros XI a XIII). Nessa obra ele realiza a fusão entre as duas. Explicita um conjunto de axiomas diferentes dos de Legendre, introduz o estudo das transformações geométricas na sua obra e utiliza a idéia de movimento nas demonstrações. Além disso, propõe um equilíbrio entre uma geometria intuitiva e experimental e uma geometria dedutiva.

Na mesma época, em 1884, na Itália, R. de Paolis escreve um livro-texto intitulado “Elementi di geometria” onde apregoa também a fusão entre a geometria plana e a geometria sólida.

3. Um sistema completo de axiomas para a geometria euclidiana

As inúmeras tentativas fracassadas de provar o quinto postulado de Euclides, mostraram a necessidade de se ter um sistema completo de axiomas eliminando da geometria toda referência à intuição.

No fim do século XIX vários matemáticos começaram a se preocupar com os fundamentos da matemática e em especial com a axiomatização da geometria. O matemático Pasch percebeu que utilizando somente os postulados de Euclides não se podia provar que “*se uma reta intersecta um lado de um triângulo então ela intersectará o outro lado do triângulo*”. Tal fato foi adotado como postulado nas suas demonstrações. Ele também observou, magistralmente, que a noção de “ordem” podia ser desenvolvida sem fazer referência à medida. Essa noção era praticamente desconhecida antes do século XIX. Em 1882, ele publica o livro *Lições de geometria moderna* que é considerado o primeiro desenvolvimento axiomático da geometria projetiva plana. Muitos desse axiomas foram importantes para as axiomatizações das geometrias euclidianas e não euclidianas. O sistema de Pasch foi gradualmente aperfeiçoado por Peano (1889) e Pieri. Mas a formulação axiomática da geometria de Hilbert(1862,1943) foi a que mais se consolidou entre os matemáticos.

Hilbert apresentou o seu trabalho num curso dado por ele em 1898 e publicado em 1899 com o título de *Fundamentos da geometria*. Ele baseou a sua exposição em três conceitos primitivos (ponto, reta e plano), em três relações fundamentais (incidente, estar entre e congruente) e em cinco grupos de axiomas (axiomas da incidência, axiomas da ordem, axiomas da congruência, axiomas da continuidade e o axioma do paralelismo). Os axiomas estabelecem as ligações entre os conceitos primitivos e as relações fundamentais. A geometria euclidiana pode ser construída passo a passo partindo do primeiro grupo de axiomas até chegar no quinto grupo.

A *geometria da incidência* é obtida a partir dos axiomas do primeiro grupo de Hilbert e das conseqüências deles decorrentes; a *geometria ordenada* a partir dos dois primeiros grupos de axiomas de Hilbert e de suas conseqüências; a *geometria absoluta* a partir dos quatro primeiros grupos de axiomas de Hilbert e de suas conseqüências; e a *geometria euclidiana* a partir dos cinco grupos de axiomas de Hilbert. O quinto grupo é constituído apenas pelo axioma das paralelas com o seguinte enunciado "por um ponto fora de uma reta passa no *máximo* uma reta paralela à reta dada".

Há uma pequena sutileza na forma de apresentação desse postulado com o quinto postulado de Euclides na forma de Playfair. Hilbert ao usar a palavra *máximo* permite também a não existência da reta paralela por um ponto. A negação do axioma de Hilbert apresenta a seguinte forma "por um ponto fora de uma reta passam pelo menos duas retas paralelas à reta dada". Essa negação recebeu o nome de axioma de Bolyai-Lobatchevsky.

A geometria que resulta dos 4 primeiros grupos de axiomas de Hilbert e do axioma de Boyai-Lobatchevsky recebe o nome de *geometria hiperbólica.* A geometria que utiliza o sistema de axiomas de Hilbert é frequentemente chamada de geometria sintética.

3.1 Uma nova formulação axiomática da geometria euclidiana

O geômetra George E.Martin, no seu livro *The foundations of geometry and the non-euclidean plane* , editora Springer, 1975, capítulo 14, página 155 diz:

"Em 1832 apareceu um texto de geometria contendo um curto apêndice escrito por John Bolyai. Esse apêndice tem sido descrito por G.B.Halsted como " as mais extraordinárias 24 páginas de toda a história do pensamento..." Bolyai e Lobachevsky são reconhecidos como os fundadores das geometrias não euclidianas. Nós pularemos um século até 1932. Esse ano viu a publicação de A set of postulates for plane geometry based on scale and protractor (O conjunto dos postulados da geometria plana baseados na régua graduada e no transferidor) escrita por George David Birkhoff . Embora ninguém tenha sugerido, esse artigo é tão importante quanto o apêndice de Bolyai.*

Birkhoff (1884-1944) introduz um sistema de axiomas equivalente ao de Hilbert que incorpora o conjunto dos números reais. Os axiomas de Birkhoff, ao contrário dos de Hilbert, introduzem a idéia de medida desde o início. Os segmentos e os ângulos são medidos com os números reais. Faremos uma breve descrição da evolução das idéias de Birkhoff apoiados no artigo O *ensino da geometria e a solução de Birkhoff* de COSTA, H.C.A

Em 1925 Birkhoff escreve um livro de divulgação científica intitulado *The origin, Nature and influence of Relativity*, tentando explicar fatos geométricos básicos de forma acessível. Desenvolve as primeiras idéias da geometria euclidiana a partir de propriedades sugeridas pela régua graduada e pelo transferidor. Em 1930 Birkhoff escreve um artigo em parceria com o professor Ralph Beatley onde apresenta 5 princípios intuitivos sobre medidas de segmentos e de ângulos e utiliza o sistema numérico dos reais para o seu desenvolvimento. Em 1932 Birkhoff reapresenta as suas idéias numa axiomática formada por 4 postulados. Mas essa formulação é inadequada ao ensino elementar pois o quarto postulado admitido é o caso LAL de semelhança de triângulos que substitui o postulado de paralelismo de Euclides. Em 1940 Birkhoff novamente com o professor Beatley publica o livro Basic Geometry para o ensino secundário. O livro apresenta cinco postulados e deduz um conjunto de teoremas. Os postulados são os quatro postulados da versão de 1932 acrescido de um outro que diz: todos os ângulos rasos são iguais entre si e medem 180^o .

A seguir são apresentados sete teoremas chamados por ele de *teoremas básicos.* São eles em ordem: O caso AA de semelhança; se um triângulo é isósceles então os ângulos da base são congruentes e reciprocamente; o caso LLL de semelhança; a soma das medidas dos ângulos de um triângulo igual a 180º ; todo ponto e nenhum outro da mediatriz eqüidista das extremidades de um segmento; por um ponto fora de uma reta passa uma única reta perpendicular à reta dada; o teorema de Pitágoras. E finalmente apresenta a teoria do paralelismo demonstrando o postulado das paralelas.

Entendemos ser muito difícil para um professor acostumado a iniciar o seu curso de geometria, com a teoria do paralelismo e terminar com a teoria da semelhança, inverter a sua seqüência didática para se submeter ao novo formato apresentado por Birkhoff. Provavelmente seja esse o motivo pela sua não aceitação pelos professores do secundário. Em 1959 MacLane aponta as vantagens do método de Birkhoff e apresenta uma variante mais satisfatória e compreensível. Mas continua sendo pouco indicada à sala de aula.

Somente quando a organização educacional norte americana SMSG (School Mathematics Study Group) apresenta em 1960 uma outra variante da axiomática de Birkhoff, com uma formulação dedutiva também para a geometria espacial é que o tratamento métrico começa a ter aceitação nos Estados Unidos, país onde se desenrola toda a história desta axiomática. Entre os geômetras que adaptaram com sucesso o sistema de Birkhoff para o ensino citamos E.E Moise (1962). No Brasil essa axiomática é utilizada como referência na maioria dos livros didáticos. A geometria que utiliza esse sistema de axiomas recebeu o nome de geometria métrica.

3.2 A axiomática de Bachmann

Em 1959, Bachmann fornece um novo ponto de vista para a apresentação dos fundamentos da geometria. É uma abordagem totalmente algébrica que identifica simetrias ortogonais a retas e simetrias centrais a pontos e que permite incluir todos os outros tipos de geometrias. Essa axiomática é atualmente considerada como o estado da arte do programa d'Erlangen de Félix Klein.

3.3 Uma formulação axiomática da geometria euclidiana via álgebra linear

Em 1964 Jean Dieudonné publica o livro *Algèbre linéaire et géométrie élémentaire* com uma nova apresentação da geometria euclidiana. Define o plano (ou o espaço) como um espaço vetorial sobre R, de duas (ou três) dimensões munido de um produto escalar. Portanto, substitui os postulados da geometria euclidiana pelos axiomas do espaço vetorial.

Bibliografia

Boyer C.B. (1996):*História da Matemática*. São Paulo: Editora Edgard Blücher,.

Castrucci B. (1976): *Lições de geometria plana*, livraria Nobel S.A

Costa H.C.A (1985): *O ensino da geometria e a solução de Birkhoff*, Monografias da Sociedade Paranaense de Matemática

Euclides(1994) : *Les Éléments*, volume 1,2,3,4, PUF,1994 Tradução Bernard Vitrac

Greenberg M (1994): *Euclidean and non Euclidean Geometries: development and history*. New York: Freeman and Company.

Hilbert D. (1971): *Les fondements de la géométrie*, Éditions Jacques Gabay

Klein F. (1974): *Le programme d'Erlangen*, Gauthier-Villars Éditeur

.Laborde, J.M (1997): Exploring non-Euclidean geometry in a Dynamic Geometry Environment like cabri-géomètre

Moise, E.E. (1976). *Geometria elemental desde um punto de vista avanzado*,C.E.C.S.A

Proclus de Lycie(1948): *les Commentaires sur le premier livre des Éléments d´Euclides*, IREM de Lille.

Vincenzo Bongiovanni, possui graduação em Licenciatura em Matemática pela Universidade de São Paulo (1973), mestrado em Matemática pela Pontifícia Universidade Católica de São Paulo; (1987) e doutorado em Didática da matemática - Université Joseph Fourier (2001). Atualmente é professor do Programa de Pós-Graduação da Universidade Bandeirante de São Paulo. Vincenzo.bongiovanni@uol.com.br

Ana Paula Jahn, possui Bacharelado e Licenciatura em Matemática pela Pontifícia Universidade Católica de São Paulo (1989), Mestrado em Educação Matemática pela Pontifícia Universidade Católica de São Paulo (1994) e Doutorado em Didática da Matemática pela Universidade Joseph Fourier - Grenoble I, França (1998). Atualmente é professora-pesquisadora do Programa de Pós-graduação em Educação Matemática da Universidade Bandeirante de São Paulo (UNIBAN). anapjahn@gmail.com

REVISTA IBEROAMERICANA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA

Junio de 2010, Número 22, páginas 53-63
ISSN: 1815-0640

Experimento didáctico: un camino metodológico para la investigación en la educación matemática

Wellington Lima Cedro; Manoel Oriosvaldo de Moura.

Resumen

La educación matemática es un campo de conocimiento que está viviendo un proceso de construcción y elaboración de sus bases epistemológicas y ontológicas. En este sentido, las discusiones metodológicas son de vital importancia para el área. Con el objetivo de contribuir para ese debate, este trabajo presenta uno de los posibles caminos metodológicos para la investigación que tiene como principal foco investigativo el proceso de enseñanza y de aprendizaje en el aula de matemática: el experimento didáctico. Partiendo del informe de una investigación sobre la enseñanza de álgebra para niños de la enseñanza primaria, definiremos y caracterizaremos esta propuesta metodológica. Además, abordaremos las principales contribuciones y las dificultades que se presentan en una actividad investigativa desarrollada sobre las bases teóricas del experimento didáctico.

Abstract

Mathematical education is a knowledge field that is living a process of construction and elaboration of its epistemological and ontological bases. In this sense, the methodological discussions are vitally important for the area. With the aim of contributing to that debate, this article presents one of the possible methodological ways for the investigation that has as main research center the process of education and learning in the mathematical classroom: the teaching experiment. Starting off as a report of an investigation on the teaching of algebra for children of primary level, we will define and characterize this methodological proposal. In addition, we will discuss the main contributions and the difficulties that appear in a developed research activity on the theoretical bases of the teaching experiment.

Resumo

A educação matemática é um campo de conhecimento que está vivendo um processo de construção e elaboração das suas bases epistemológicas e ontológicas. Neste sentido, as discussões metodológicas são de vital importância para a área. Com o objetivo de contribuir para esse debate, este trabalho apresenta um dos possíveis caminhos metodológicos para a pesquisa que tem como principal foco investigativo o processo de ensino e de aprendizagem na classe de matemática: o experimento didático. Partindo do relatório de uma pesquisa sobre o ensino de álgebra para crianças do ensino primário, definiremos e caracterizaremos esta proposta metodológica. Ademais, abordaremos as principais contribuições e as dificuldades que se apresentam numa atividade investigativa desenvolvida sobre as bases teóricas do experimento didático.

1. Introducción

La entrada en el medio académico exige el cumplimiento de ciertas reglas y normas, es decir, la elección de un tema de investigación y de una metodología para la resolución del problema a ser estudiado. Utilicemos una situación expuesta por Asti Vera (1978, p.100, traducción nuestra) para mostrar la dificultad de esta cuestión:

> La pregunta obligatoria de los estudiantes, cuando deben escribir una monografía, es: '¿Cómo se hace?' La respuesta obligatoria del profesor debería ser necesariamente la siguiente: 'No se escribe sino para decir algo, y, para hacerlo, se debe comenzar por tener un tema. De lo contrario se cae en el verbalismo'.

Ciertamente la elección no es fácil, aún más en un área del conocimiento científico todavía en construcción, como es la de la educación matemática. Un área que recibe influencias de dos fuentes principales: las ciencias humanas y las ciencias exactas.

Lo más importante en la metodología a ser usada, a pesar de la dificultad en escogerla, es que ella pueda satisfacer las necesidades del investigador, o sea, que le permita encontrar explicaciones para el problema propuesto; y eso exige un individuo realmente motivado e interesado en resolver una situación-problema. Moura (2002, p.43, traducción nuestra) apunta lo siguiente sobre este asunto: "la producción de una tesis en educación matemática, no es nada más ni nada menos que la producción de conocimiento de cierto sujeto interesado en solucionar un problema".

Con el objetivo de contribuir para la discusión en torno a ese momento crucial de la investigación, presentaremos un experimento didáctico. Desde nuestro punto de vista, este se plantea como uno de los posibles caminos metodológicos, que los jóvenes investigadores de la Educación Matemática pueden utilizar para la solución de su problema de investigación.

Siendo así, el recorrido que seguiremos en este texto es el siguiente: inicialmente, abordaremos la necesidad del método y su vinculación con la investigación educacional en la clase; posteriormente, delinearemos los fundamentos teóricos del experimento didáctico; por fin, presentaremos el experimento desarrollado por nosotros durante la realización del máster en Educación.

2. El método y la investigación científica

"Método", según Abbagnamo (1963), tiene dos significados principales: a) toda investigación u orientación de la investigación; b) técnica particular de investigación. El primer significado, no puede ser distinguido de los términos investigación y doctrina, y relaciona expresiones como "método Hegeliano", "método dialéctico", etc. Ya el segundo, remite a una comprensión más restringida y determina "un procedimiento de investigación ordenado, repetible y autocorregible que garantiza la obtención de resultados válidos" (Abbagnamo, 1963, p.802). Está relacionado con expresiones del tipo: "método silogístico", "método de los residuos" y otras que señalan procedimientos de investigación o de control particulares.

Esta última comprensión más restringida del método acaba por confundirse con el significado del término metodología (Abbagnamo, 1963, p.802), que tanto puede ser:

1) la lógica o la parte de la lógica que estudia los métodos;
2) la lógica trascendental aplicada [como fue definida por Kant en su obra 'La crítica de la razón pura'];
3) el conjunto de los procedimientos metódicos de una ciencia o de varias ciencias;
4) el análisis filosófico de tales procedimientos.

Otra posibilidad de comprensión del método parte de la siguiente idea: Etimológicamente, el término método, significa demanda, y de acuerdo con Lalande (1992, p.97, traducción nuestra), tiene como "consecuencia, [el] esfuerzo para alcanzar un fin, investigación, estudio". A partir de esta afirmación, Lalande (1992, p.97, traducción nuestra) apunta dos acepciones posibles que son consecuencia de esta interpretación:

- Primero, camino por el cual se llega a determinado resultado, aun cuando ese camino no haya sido previamente fijado de manera intencionada y reflexiva. [...]
- Segundo, programa que regula de antemano una secuencia de operaciones a ejecutar y señala ciertos errores que deben evitarse, con el objetivo de alcanzar un resultado determinado.

Estas dos afirmaciones imponen al método, la condición de que él sea siempre una dirección definible y regularmente seguida en una operación del pensamiento sobre un objeto determinado. Por ello, se convierte en "un medio de obtención de determinados resultados en el campo del conocimiento y de la práctica" (Kopnin, 1978, p.91, traducción nuestra), y consecuentemente comprende el conocimiento de las leyes objetivas. Este hecho implica, por lo tanto, un lado objetivo y uno subjetivo dentro del método. El sentido objetivo del método corresponde a la interpretación de las leyes objetivas. Ya el aspecto subjetivo comprende los recursos de investigación y la transformación de los fenómenos que consideraremos como la metodología.

De esta forma, concordamos con Kopnin (1978), al afirmar que el método comprende los procedimientos basados en las leyes objetivas que posibilitan la sucesiva interpretación y transformación de la realidad, para la obtención de nuevos resultados. Recordamos que según Cheptulin (1982, p.253, traducción nuestra), la ley implica algunas relaciones y conexiones necesarias, o sea, "la ley es, y por lo tanto, se manifiesta, necesariamente en determinadas condiciones apropiadas", pues la necesidad existe bajo la forma de propiedades y conexiones entre los fenómenos. Por ejemplo, la ley del valor, la ley física de la dependencia de la resistencia de un conductor, etc.

Así, el método no puede ser algo abstracto, sino que debe estar conectado a la vivencia de un problema. Esta comprensión del método lleva consecuentemente, a un significado diferente para la investigación educacional.

La investigación debe ser entendida como un diálogo inteligente con la realidad, tomándola como proceso y actitud, y como elemento integrante de lo cotidiano de los sujetos (Demo, 2001). Pues, "ella no nos proporciona resultados que nosotros podamos aplicar, sino, que nos ofrece herramientas para pensar nuestro trabajo" (Kilpatrick, 1996, p.104, traducción nuestra).

Concebir la investigación como una herramienta, significa una comprensión de que ella constituye un instrumento, que puede ser tanto físico o simbólico, externo o interno (Leontiev, 1983) y que, por lo tanto, determina los métodos y las operaciones. De esta forma, la comprensión semántica que se tiene de investigación, como "búsqueda cuidadosa" hecha por todas partes, inquiriendo, informándose bien, adquiere una nueva calidad. Ahora, la investigación pasa a ser entendida como una actividad humana (Leontiev, 1978; 1983), y siendo así es eminentemente creadora, social y colectiva.

3. La investigación educacional en el aula

La historia del desarrollo humano demuestra que el hombre es esencialmente un ser de naturaleza social, es decir, su fuente de hominización proviene de su vida en sociedad, en el seno de la cultura generada por su grupo social a través del tiempo. Sin embargo, esta fuente de recursos para el proceso de hominización se presenta en constante movimiento, pues tanto los seres humanos como las condiciones de vida siempre se modifican con el transcurso del tiempo. Entonces, se hace necesario descubrir una forma de fijación y transmisión de estos recursos.

Leontiev (1978, p.283, traducción nuestra) indica que "los fenómenos externos de la cultura material e intelectual son la forma de fijación y transmisión a las generaciones siguientes de las adquisiciones de la evolución" y que "esta forma particular de fijación y de transmisión" debe su aparición al hecho de que los hombres tienen una actividad creadora: el trabajo, que es su realización fundamental.

De esta forma, a partir de la apropiación del patrimonio cultural de la humanidad por medio de actividades productoras y sociales, cada generación inicia su propia vida y desarrolla características típicamente humanas. Leontiev (1978, p.284, traducción nuestra) señala así la esencialidad de la vida social como factor de hominización:

> Está fuera de cuestión que la experiencia individual del hombre, por más rica que sea, baste para producir la formación de un pensamiento lógico o matemático abstracto y los sistemas conceptuales correspondientes. Sería preciso no una vida, sino mil. De hecho, el pensamiento y el saber de una generación se forman a partir de la apropiación de los resultados de la actividad cognitiva de las generaciones precedentes.

Ese proceso de apropiación del mundo y, consecuentemente, de sus objetos y fenómenos es un proceso dinámico en el cual surge la necesidad de desarrollo de una actividad que reproduzca, formalmente, las características esenciales de la actividad plasmada en el objeto o en el fenómeno. Esto significa producir en el hombre nuevas aptitudes y funciones psíquicas adecuadas a dicha actividad.

Debe quedar claro aquí, que no es posible que esta actividad de apropiación surja bajo la influencia propia de los objetos y fenómenos. Para corroborar este hecho, Leontiev (1978) indica que las actividades del individuo con relación al mundo están siempre insertadas dentro de la comunicación, es decir, en su relación con los otros, lo que constituye condición necesaria y especifica del desarrollo humano. En otras palabras:

> La adquisición del desarrollo histórico de las aptitudes humanas no le es simplemente dada a los hombres en los fenómenos objetivos de la cultura material y espiritual que la representa, sino que está ahí sólo puesta. Para apropiarse de estos resultados [...], el niño [...] debe entrar en relación con los fenómenos del mundo circundante a través de otros hombres, es decir, en un proceso de comunicación con ellos. Así el niño aprende la actividad adecuada. Por su función este proceso es, por lo tanto, un proceso de educación (Leontiev, 1978, p.290, traducción nuestra).

Por lo tanto, percibimos que el movimiento de la historia de la humanidad solamente es posible por medio de la transmisión de las adquisiciones culturales del hombre, o sea, por medio de la educación.

Definir qué es educación no es una tarea fácil de ser realizada, principalmente porque el término es utilizado en varios contextos distintos. El sinónimo más común atribuido a este término se refiere a la escolarización y trae a la mente todo el conjunto de actividades que tienen lugar en las instituciones de enseñanza. Sin embargo, esto es solamente una de las piezas que componen el significado del concepto de educación. Sabemos que ella es un factor imprescindible para el desarrollo humano: nosotros, a diferencia de los otros animales, necesitamos procesos educativos para la producción de nuestra existencia. Para corroborar esta idea, Vygotsky (2003, p.82, traducción nuestra) define la educación de la siguiente forma:

> La educación puede ser definida como la influencia y la intervención planeadas, adecuadas al objetivo, premeditadas, conscientes, en los procesos de crecimiento natural del organismo. Por eso, sólo tendrá carácter educativo el establecimiento de nuevas reacciones que, en alguna medida, intervengan en los procesos de crecimiento y los orienten.

De esta forma, nadie puede escapar de la educación. Teniendo en mente toda su amplitud, podemos definir la educación como:

> Una práctica social (como la salud pública, la comunicación social, el servicio militar) cuyo fin es el desarrollo individual que puede ser aprendido entre los tipos de saber existentes en una cultura, para la formación de tipos de sujetos, de acuerdo con las necesidades y exigencias de su sociedad, en un momento dado de la historia. (Brandão, 1995, p. 73-74, traducción nuestra)

Siendo la educación una práctica social, entonces, los principales canales de divulgación, implementación y conservación son las instituciones sociales como la familia, la iglesia, el mercado profesional, la escuela, la midia etc. Mirando desde ese ángulo, podemos entonces comprender dos categorías céntricas de la educación (Cortella, 2000):

- La educación **vivencial** y espontanea , el ‘viviendo y aprendiendo'.

- La educación **intencional** o conducida , deliberada y organizada en locales determinados y con instrumentos específicos.

Focalizando nuestro mirar en esta educación intencional organizada en la escuela, no es ninguna novedad la afirmación de que la clase es un espacio de difícil entendimiento. Para los profesores, la complejidad del aula surge frente a las situaciones inesperadas que pueden ocurrir durante una clase, como por ejemplo, la elección de un tiempo adecuado, del mejor comentario que permita al alumno la comprensión de un hecho. Ya para un investigador, esa misma complejidad está representada en la diversidad de variables de estudio y en las relaciones mutuas que existen entre ellas.

Por lo tanto, este ambiente intrincado, exige del investigador la elección de un método de investigación que permita la integración entre estos dos modos de comprender la realidad del aula. Creemos que el experimento didáctico surge como un camino para la realización de la investigación en el aula, ya que, presenciamos el fracaso de las metodologías clásicas, que se basan en el aislamiento de las variables envueltas en el proceso de investigación.

4. El experimento didáctico: lo que no es y lo que puede ser

El experimento didáctico tiene sus orígenes en las ideas de Vygotsky (1998) sobre el método genético formativo o genético experimental. Al estudiar los cambios en los procesos mentales de los individuos después del proceso de la enseñanza, Vygotsky lanzó las nociones básicas del experimento didáctico. Según Hedegaard (2002, p.214, traducción nuestra) éste es el método de investigación necesario para estudiar la formación y el desarrollo de los aspectos conscientes de la relación de los estudiantes en el aula.

> El experimento didáctico es una concretización de la afirmación de Vygotsky de que el método genético formativo es un método de investigación necesario para investigar la génesis y el desarrollo de los aspectos conscientes de la relación de los seres humanos con el mundo.

Debemos dejar bien claro, que al hablar de “experimental”, no estamos refiriéndonos a la parte de la investigación en la cual las variables son manipuladas y sus efectos sobre otras variables son observados. En otras palabras, no estamos hablando de la búsqueda linear de las relaciones causa-efecto entre las variables envueltas en el proceso educacional (Steffe; Thompson, 2000).

Históricamente, el experimento didáctico tiene sus raíces en el siglo XX, en la antigua Unión Soviética de los años 30 (Mienchinskaya, 1968), por lo tanto, posee sus bases en el materialismo dialéctico de Marx. Pero, encontramos una nueva formulación de estas ideas a partir de los años 70, con su llegada a Estados Unidos. Esa relectura americana, hecha por investigadores vinculados a la Educación Matemática (Thompson, 1979; Steffe; Thompson, 2000), vinculó el experimento didáctico a las ideas construtivistas de Von Glasersfeld (1995). Sin embargo, aun sabiendo la existencia de estas variaciones teóricas, en este trabajo enfatizaremos la tradición marxista del experimento didáctico, representada modernamente en las obras de Davydov (1982; 1988).

El experimento didáctico es un método de investigación psicológico y pedagógico que permite estudiar la esencia de las relaciones internas entre los diferentes procedimientos de la educación y de la enseñanza y el correspondiente carácter de desarrollo psíquico del sujeto. Uno de los puntos esenciales de esta perspectiva es que ella presupone la intervención activa del investigador en los procesos psíquicos que él estudia (Davydov, 1988). De acuerdo con Thompson (1979), en líneas generales podemos caracterizar el experimento didáctico de la siguiente manera:

- Por una orientación para los procesos apropriados por los alumnos al internalizar correctamente los conceptos escolares;
- Por la naturaleza longitudinal de la investigación;
- Por la intervención del investigador en el aprendizaje de los estudiantes;
- Por la constante interacción entre las observaciones recogidas y la planificación futura de las acciones;
- Porque los datos son más cualitativos que cuantitativos.

De forma general, podemos resumir que el experimento didáctico plasma la unidad entre la investigación del desarrollo psíquico de los sujetos, la enseñanza y su educación.

La realización del experimento didáctico presupone la proyección y el modelado del contenido de las nuevas estructuras psíquicas que se proponen, de los medios psicopedagógicos y las vías de formación. Según Zankov (1977, pg. 52, traducción nuestra) “la realización del experimento didáctico está organizada sobre la piedra angular de que la enseñanza debe ofrecer la máxima efectividad en el desarrollo general de los sujetos”.

Partiendo de esta base teórica, expondremos en la próxima sección nuestra visión de un experimento didáctico, que fue realizado junto al proyecto “Club de Matemática”.

5. Nuestro experimento didáctico en el Club de Matemática

La iniciativa de la formación del Club de Matemática puede ser entendida como una búsqueda para la creación de ambientes propicios para el aprendizaje. Este es un proyecto de pasantía desarrollado en la Facultad de Educación de la Universidad de São Paulo (FEUSP) que comprende en sus actividades alumnos del curso de Pedagogía, de Matemática y de Física de la Universidad de São Paulo, de la post-graduación en Enseñanza de Ciencias y Matemática de la FEUSP y de la enseñanza primaria del Colegio de la FEUSP. El principal objetivo del proyecto es el establecimiento de un espacio para discusión y reflexión sobre la enseñanza y el aprendizaje de matemática, a partir de los presupuestos teóricos del abordaje histórico-cultural y de la Teoría de la Actividad.

El concepto de actividad fue desarrollado en los estudios hechos por Leontiev (1978, 1983). Éste concibe que las actividades humanas son formas de relación del individuo con el mundo, dirigidas por motivos y por necesidades. El concepto de actividad implica la noción de que el hombre se mueve por objetivos, actuando de forma intencional, por medio de acciones planeadas. En el abordaje histórico-cultural, el término cultural, de acuerdo con Fichtner (1996), se refiere a la organización elaborada por la sociedad, a partir de determinado nivel de desarrollo, de los problemas y de las tareas que cada individuo debe enfrentar en la propia vida colectiva, además de ofrecer las posibilidades y prohibiciones de acceso a los instrumentos y medios culturales que permitan la solución de los problemas. Ya el histórico, se refiere a los medios e instrumentos elaborados durante el proceso de la historia social del ser humano.

El Club de Matemática es un espacio de aprendizaje tanto para los pasantes como para los alumnos. Por medio del desarrollo de actividades orientadoras de enseñanza, que "son las actividades de enseñanza que respetan los diferentes niveles de los individuos y que definen un objetivo como problema colectivo" (Moura, 1996, p. 32, traducción nuestra), los pasantes tienen la oportunidad de vivenciar las acciones relacionadas a la actividad de un profesor, mientras que los niños pueden aprender los conceptos matemáticos de forma significativa.

Teniendo como foco el aprendizaje, partimos del presupuesto de que todo espacio de aprendizaje exige una organización de la enseñanza que propicie a los niños los medios para su desarrollo psíquico (Vygotsky, 1993, 1998; Davydov, 1982, 1988). Siendo así, buscamos analizar las acciones de los alumnos que conduzcan a la ampliación, modificación y construcción de significados dentro de las actividades de enseñanza desarrolladas en el Club de Matemática. Para esto, elaboramos, organizamos y analizamos un conjunto de actividades pedagógicas que fueron organizados en forma de experimento didáctico, direccionado a la enseñanza de matemática en la escuela primaria, más específicamente para la enseñanza de ecuaciones de primer grado. El experimento didáctico fue desarrollado en las dependencias de la Facultad de Educación de la Universidad de São Paulo (FEUSP), con un grupo de 12 niños, matriculados en quinto año de enseñanza primaria de la Escuela de Aplicación de la FEUSP, vinculados al proyecto Club de Matemática. Las características de nuestro experimento fueron las siguientes:

- Cada alumno debe ser considerado cuando se planea la clase como un colectivo, pues hay necesidad de comprender las peculiaridades del desarrollo psíquico de los alumnos en proceso de actividad de estudio;
- Organización colectiva del trabajo;
- El contenido de la enseñanza debe estar relacionado con el tema general de las actividades;
- La motivación y el interés por el contenido deben ser trabajados en los alumnos;
- Desarrollar en los niños la capacidad de analizar crítica y sistemáticamente sus actividades prácticas y sus conclusiones.

El experimento didáctico fue fundamentado en la idea del desarrollo de tres contextos: la crítica, el descubrimiento y la práctica social. El mismo también se basó en las actividades orientadoras de la enseñanza, que son aquellas que se estructuran para permitir que los sujetos interactúen, mediados por un contenido, negociando significados con el objetivo de solucionar una situación-problema (Moura, 1996, 2001).

La elección de las ecuaciones de primer grado, como objeto de actividades de enseñanza, no se hizo por casualidad. Es indiscutible, dentro del medio escolar, la importancia de la enseñanza de las matemáticas como uno de los elementos formadore**s** de los alumnos. En consecuencia, la enseñanza de uno de los temas principales de álgebra es también esencial para el desarrollo psicológico de los niños. De acuerdo con Vygotsky (1987, p.180, traducción nuestra):

> [...] por medio del aprendizaje de álgebra, el niño pasa a comprender las operaciones aritméticas como casos particulares de operaciones algebraicas. Eso da al niño una visión más libre, más abstracta y generalizada de las operaciones con cantidades concretas. [...] pues el álgebra libera el pensamiento del niño de la prisión de las relaciones numéricas concretas y lo eleva al nivel más abstracto [...].

El reconocimiento de esta esencialidad tiene implicaciones directas en la elaboración y organización de las formas de enseñanza de los conocimientos algebraicos. Sin embargo, esa necesidad no ha sido un factor suficiente para el desarrollo de una educación algebraica adecuada. Por el contrario, lo que se percibe en el medio académico es la insuficiencia de las actuales prácticas de enseñanza, apuntada en varios trabajos (Gallardo; Rojano, 1988; Moretti, 1998; Booth, 1995) que investigaron las principales dificultades de los niños en el aprendizaje de los conocimientos matemáticos.

Dentro del experimento didáctico, el desarrollo de las actividades orientadoras de enseñanza tuvo como objetivo principal demostrar que las ecuaciones de primer grado constituyen una de las formas de lenguaje matemático que posibilitan el control del movimiento de las cantidades. Para la elaboración y organización de las actividades, partimos de un estudio del desarrollo histórico del álgebra y del concepto de ecuación de primer grado. A partir de ahí, establecimos los nexos conceptuales, los 'gérmenes' del concepto que constituyeron los temas de los módulos de las actividades:

- *El movimiento de las cantidades:* el objetivo general de este módulo es fomentar en los niños la posibilidad de percibir y comprender el carácter mutable de los aspectos cualitativos y cuantitativos en la vida y en el mundo.
- *El control del movimiento de las cantidades:* en ese módulo, objetivamos la necesidad de que el niño perciba que el movimiento de las cantidades puede ser representado por medio del lenguaje.
- *Un lenguaje particular del movimiento de las cantidades*: este módulo tuvo como objetivo mostrar a los niños que el lenguaje de las ecuaciones es una forma particular (específica) de comprender el movimiento más amplio de las cantidades.

A pesar de que tenemos conciencia que esta breve explicación sobre los principios y la organización general que regulan el experimento didáctico no consigue abarcar toda su potencialidad, esperamos que estas líneas despierten la curiosidad de los investigadores de la Educación Matemática.

6. Consideraciones finales

Este texto tuvo la aspiración de contribuir a la discusión sobre la investigación en Educación Matemática, por medio del relato de nuestra experiencia durante la realización del máster. Al presentar el experimento didáctico como un camino posible para la investigación en el aula de Matemática, destacamos que su desarrollo permite la aprehensión del sentido de la acción del profesor y del alumno frente a una sociedad que exige nuevas acciones de los sujetos; permite un análisis estructural de la actividad céntrica de los sujetos por medio de la comprensión de su composición, de sus conexiones y de su contexto; Además de eso, permite la reflexión, la apropiación, la diseminación y la reestructuración de la actividad de los sujetos.

No obstante, es imprescindible que el investigador de Educación Matemática, que opte por el experimento didáctico, tenga conciencia de la importancia de la profundización teórica para realizar este tipo de actividad de investigación. De este modo, evitaremos las reflexiones simplistas e inconsistentes que proliferan en buena parte de la producción científica actual. Además de eso, de alguna forma estaremos huyendo de los trabajos clasificados por Sisto (1992) como "Frankstein", que son aquellos que resultan de un posicionamiento teórico conflictivo con un modo de producción.

Bibliografía

Abbagnamo, N. (1963). *Diccionario de filosofía*. México: fondo de cultura econômica.

Asti Vera, A. (1978*). Metodologia da pesquisa científica*. Trad. Maria Helena Guedes Crespo e Beatriz Marques Magalhães. Porto Alegre: Globo.

Booth, L. (1995). *Dificuldades das crianças que se iniciam na álgebra*. In: Coxford, A.; Shulte, A. (orgs.). As idéias da álgebra. Trad. Hygino H. Domingues. São Paulo: Atual

Brandão, C. (1995). *O que é educação*. 33a. Ed. – São Paulo: Brasiliense. (Coleção primeiros passos: 203).

Cortella, M. (2000). *A escola e o conhecimento: fundamentos epistemológicos e políticos* . São Paulo: Editora Cortez: Instituto Paulo Freire. (Coleção perspectiva)

Davydov, V. (1982). *Tipos de generalización en la enseñanza*. Habana: Pueblo y Educación.

Davydov, V. (1988). *La enseñanza escolar y el desarrollo psíquico: investigación psicológica teórica y experimental*. Trad. Marta Shuare. Moscou: Editorial Progreso.

Demo, P. (2001). *Pesquisa: principio científico e educativo*. São Paulo: Cortez.

Fichtner, B. (1996). *A escola histórico-cultural e a teoria da atividade: a importância na pedagogia moderna*. Santa Maria: Editora da UFSM. (Cadernos de pesquisa).

Gallardo, A.; Rojano, T. (1988). *Áreas de dificultades en la adquisición del lenguaje aritmético-algebraico*. Recherches en didatique des mathematiques. Vol. 9, n. 2. pp. 155-188.

Hedegaard, M. (2002). *A zona de desenvolvimento proximal como base para o ensino*. In: Daniels, H. (org). Uma introdução a Vygotsky. Trad. Marcos Bagno. São Paulo: Edições Loyola.

Kilpatrick, J. (1996). *Fincando estacas: uma tentativa de demarcar a educação matemática como campo profissional e cientifico*. Zetetiké, vol.4, n.5.

Kopnin, P. (1978). *A dialética como lógica e teoria do conhecimento*. Rio de janeiro: Civilização Brasileira.

Lalande, A. (1992). *Vocabulário técnico e crítico da filosofia*, vol.2. Lisboa: RES-editora.

Leontiev, A. (1978). *O desenvolvimento do psiquismo*. Lisboa: Horizonte Universitário.

Leontiev, A.(1983). *Actividad, Conciencia y personalidad.* Habana: Editorial Pueblo y Educación.

Menchinskaia, N. (1968). *Fifty years of the soviet psychology of learning*. Soviet education, vol. X, n.06, april.

Moretti, V. (1998). O *conceito de função: os conhecimentos prévios e as interações sociais como desencadeadores da aprendizagem*. Dissertação (Mestrado em Educação), Faculdade de Educação - Universidade de São Paulo, São Paulo.

Moura, M. (1996). *A atividade de ensino como unidade formadora*. Bolema, São Paulo, ano II, n.12, pp. 29-43.

Moura, M. (2001). *A atividade de ensino como ação formadora*. In: CASTRO, A.; CARVALHO, A (orgs). *Ensinar a ensinar: didática para a escola.* São Paulo: Editora Pioneira.

Moura, M. (2002). *Metodologia de pesquisa em educação matemática: tendência ou opção?* In: Anais do VI EBRAPEM – Realizado de 8 a 9 de novembro de 2002, Campinas, SP/ Encontro Brasileiro de Estudantes de pós-graduação em Educação Matemática. Campinas: Gráfica da FE. pp. 40- 45.

Sisto, F. (1992). *Reflexões sobre a produção de conhecimento na pós-graduação: situações e necessidades.* Pró-posições, Campinas, SP: FE-UNICAMP, vol. 3, n.1[7], março. Paulo, São Paulo, São Paulo, Brasil**.** modmoura@usp.br

Steffe, L.; Thompson, P. (2000). Teaching experiment methodology: underlying principles and essential elements. In Lesh, R.; Kelly, A. (eds). Research design in mathematics and science education, pp. 267-307, Hillsdale, NJ: Erlbaum.

Thompson, P. (1979). *The constructivist teaching experiment in mathematics educatio*n research. Paper presented at the research reporting session, annual meeting of NCTM, Boston, March.

Von Glasersfeld, E. (1995). *Radical constructivism: a way of knowing and learning*. Washington D.C: falmer press.

Vygotsky, L. (1987). *The collected work*s of L. S. Vygotsky, vol.1, Problems of general psychology incluindo Thinking and speech. Rieber, R.; Carton, A (eds). Trad. N. Nimick. New York: Plenim Press.

Vygotsky, L. (1993). *Pensamento e Linguagem.* Tradução: Jefferson Luiz Camargo. São Paulo: Martins Fontes.

Vygotsky, L.. (1998). *A formação* social da mente: o desenvolvimento dos processos psicológicos superiores. Michael Cole et al (orgs.); trad. Jose Cippola Neto, Luis Silveira Menna Barreto, Solange Castro Afeche – 6ª. Ed. São Paulo: Martins Fontes (Psicologia e pedagogia).

Zankov, L. et al. (1977). *Teaching and development: a soviet investigation*. Soviet education, vol. XIX, n.04-05-06, february-march-april.

Wellington Lima Cedro,. Profesor del Instituto de Matemática e Estatística da Universidade Federal de Goiás, Goiânia, Goiás, Brasil. wcedro@mat.ufg.br.

Manoel Oriosvaldo de Moura. Profesor de la Faculdade de Educação da Universidade de São Paulo, São Paulo, São Paulo, Brasil. modmoura@usp.br

UNIÓN
REVISTA IBEROAMERICANA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA

Junio de 2010, Número 22, páginas 65-76
ISSN: 1815-0640

Cambiar las actitudes hacia las matemáticas resolviendo problemas. Una experiencia en Formación del Profesorado de Educación Primaria.

María José Castelló Esnal; Roser Codina Pascual; Pere López Cuesta

Resumen

Reflexiones a partir de una experiencia realizada en la Facultad de Formación del Profesorado de Primaria de la Universidad de Barcelona, donde un trabajo inicial en Resolución de Problemas sirve para promover un cambio positivo en las actitudes respecto de las Matemáticas en los alumnos y alumnas.
Temas principales:1. Clarificar la diferencia entre ejercicio y problema. 2. Dar a conocer la existencia de estrategias heurísticas adecuadas a Primaria. 3. Promover la discusión sobre las actitudes que aparecen en la Resolución de Problemas. 4. Proponer criterios de evaluación en Resolución de Problemas.

Abstract

Reflections from an experience realized in the Faculty of Formation of the Professorship of Primary of the University of Barcelona, where an initial work in Resolution of Problems serves to promote a positive change in the attitudes respect of the Mathematics in the pupils and pupils.
Principal topics: 1. To clarify the difference between exercise and problem. 2. To announce the existence of heuristic strategies adapted to Primary. 3. To promote the discussion on the attitudes that appear in the Resolution of Problems. 4. To propose criteria of evaluation in Resolution of Problems

Resumo

Reflexões a partir de uma experiência realizada na Faculdade de Formação do Professorado de Nível Primário da Universidade de Barcelona, onde um trabalho inicial em Resolução de Problemas serve para promover uma mudança positiva nas atitudes em relação às Matemáticas nos alunos e alunas.
Temas principais: 1. Clarificar a diferença entre exercício e problema. 2. Dar a conhecer a existência de estratégias heurísticas adequadas ao nível Primário. 3. Promover a discussão sobre as atitudes que aparecem na Resolução de Problemas. 4. Propor critérios de avaliação em Resolução de Problemas.

Introducción

La actitud positiva del profesorado respecto de las matemáticas es un elemento imprescindible para un buen aprendizaje. En el trabajo cotidiano en el aula, el enseñante transmite a sus alumnos y alumnas su propia relación emotiva con las matemáticas (placer, interés, curiosidad, inseguridad, rechazo...), y también sus creencias y opiniones sobre las mismas. Un profesor o profesora que disfruta con las matemáticas generalmente hace que sus alumnos disfruten con ellas, pero si no es así puede transmitir desánimo, aburrimiento. De ahí la importancia de incidir en la **actitud** del profesorado respecto de esa materia y un momento clave sería el de su propia formación en las Facultades. Lo que vivan como alumnos y alumnas será un factor decisivo para su desarrollo profesional.

Las reflexiones que queremos compartir en este artículo, surgen principalmente de nuestra práctica docente, tanto en la Facultad de Formación del Profesorado como en diferentes cursos de Formación Permanente[1].

Pensamos que la Resolución de Problemas (en adelante RP) puede ser un instrumento privilegiado para promover cambios positivos en la actitud respecto de las matemáticas.

1. Las actitudes en matemáticas

Situemos primero lo que entendemos por actitudes. Para nosotros son manifestaciones de la conducta que tienen su origen en creencias, emociones, hábitos y experiencias anteriores.

1.1 Creencias

Pensamos que las creencias son premisas u opiniones que nos son útiles para comprender y situarnos. Pero no son absolutas: frecuentemente deben revisarse para su adaptación a nuevos datos o nuevas situaciones.

Las creencias sobre las matemáticas influyen en la manera de plantear su enseñanza y en la forma de trabajarlas. Así dos personas con prácticamente los mismos conocimientos se comportan, a veces, de manera distinta en el trabajo matemático, dependiendo de sus creencias respecto de la naturaleza de las mismas.

Algunas creencias sobre las matemáticas las muestran como “objetivas” y “neutras”, como una construcción perfecta y sin fisuras, como una ciencia exacta. También como indicador para clasificar al alumnado en más o menos inteligente. Pero hay quien cree, basándose en la historia de las matemáticas, que son una construcción humana relacionada con las necesidades sociales del momento.

Las matemáticas se consideran a veces la disciplina privilegiada que “enseña a razonar”. Frecuentemente se pretende que la lógica y los métodos deductivos son la única vía posible para desarrollar una argumentación. Pero hay quien piensa que una concepción estrictamente deductiva es ahistórica y corre el riesgo de dejar de lado los aspectos heurísticos, intuitivos y creativos que han sido los motores del desarrollo matemático.

A menudo hemos oído que las matemáticas son “intrínsecamente difíciles”, “no pueden explicarse de otra manera” y es el alumnado el que debe esforzarse para entenderlas. Por contra hay quien cree que no tendría por qué ser así y que el simbolismo matemático es el que a veces contribuye a crear una imagen críptica de esta materia. La formulación sintética de los textos matemáticos o ciertas maneras

[1] Facultad de Formación del Profesorado de Educación Primaria, de la Universidad de Barcelona (España). El alumnado proviene del bachillerato, pero el hecho de no ser las matemáticas obligatorias hace que haya personas que desde los 16 años, en que han terminado la Educación Secundaria Obligatoria, no hayan estudiado esta materia. En el Estado Español la educación que ha recibido nuestro alumnado se organiza de la siguiente forma:
- Educación Primaria, que consta de seis cursos (desde seis hasta doce años).
- Educación Secundaria Obligatoria (ESO), consta de cuatro cursos (hasta 16 años).
- Bachillerato, que no es obligatorio y consta de dos cursos.
- Para acceder a la Universidad, tras aprobar el Bachillerato, se realiza una prueba de acceso (Selectividad).

de construir un razonamiento muchas veces producen rechazo en el alumnado, no habituado a este tipo de lenguaje.

1.2 Emociones

Las emociones juegan un papel crucial en el aprendizaje: disfrute, interés, curiosidad, pasión por descubrir... generalmente relacionados con las ganas de probar, de investigar, con la necesidad de saber, de conocer, con no tener miedo a equivocarse... o por el contrario los sentimientos negativos como miedo, rechazo, inseguridad, aburrimiento, incapacidad... que pueden ser debidos a una baja autoestima, a algún trauma en la etapa escolar anterior, a un desinterés por no haber disfrutado antes en una actividad matemática, al temor a ser juzgado...

1.3 Hábitos

Los hábitos y rutinas del comportamiento son también fundamentales para el aprendizaje. Nos referimos a los hábitos de trabajo, como por ejemplo, insistir tenazmente, o bien abandonar el intento de resolver un problema si no se encuentra rápidamente la solución.

También los hábitos de pensamiento, como por ejemplo, frente a un desafío intelectual intentar descifrar el significado y preguntarse el por qué, o desconfiar habitualmente de la propia capacidad para hallar un método, diferente de los aprendidos y por tanto no intentarlo.

1.4 Experiencias escolares anteriores

Las experiencias escolares marcan profundamente la relación emocional con las matemáticas. Las expectativas que tienen las alumnas y los alumnos de sí mismos en cuanto a su éxito en esta disciplina vienen condicionadas por esas experiencias, y como futuros enseñantes influirán en su actitud.

Estos cuatro aspectos comentados a menudo actúan conjuntamente. Así una creencia puede determinar un hábito, y una experiencia pasada feliz o traumática desembocará en diferentes creencias y en emociones positivas o negativas.

1.5 Las actitudes y la Resolución de Problemas

El razonamiento que se utiliza para descubrir la solución de un problema de matemática elemental (razonamiento heurístico)[2], es similar al que se utiliza en la vida cotidiana, donde frecuentemente se presentan diversas situaciones a las que hay que buscar solución y se actúa motivado por la necesidad de encontrarla. En concreto las estrategias heurísticas adecuadas a Primaria son formas de razonamiento de "sentido común", que frecuentemente son utilizadas en contextos no estrictamente matemáticos. Justamente el que no exista una frontera entre la actividad en el aula y la actividad fuera de ella es esencial para un aprendizaje consolidado.

Así mismo el resolver un problema siguiendo un razonamiento propio, sin necesidad de recurrir a "recetas", aumenta la seguridad y la autoestima. El

[2] "El razonamiento heurístico es un razonamiento que se considera no como definitivo y riguroso, sino simplemente como provisional y plausible y cuyo objeto es descubrir la solución del problema propuesto. El razonamiento heurístico es de empleo frecuente. No se llega a una certeza plena sino después de haber obtenido la solución completa, pero hasta ahí nos contentaremos con frecuencia con una hipótesis más o menos plausible." (*Cómo plantear y resolver problemas*. G. Polya).

reconocimiento de la importancia de la RP en el aprendizaje de las matemáticas no es nuevo: El NCTM recomendaba, ya en la década de los 80, que la RP fuera el objetivo principal de la enseñanza de las matemáticas[3].

Actualmente a pesar de las directrices contenidas en el Curriculum[4], hemos observado la escasa relevancia concedida a la RP en los textos y la práctica de Enseñanza Primaria aunque enmascarada tras ejercicios y actividades que no son realmente problemas.

También pensamos que aun siendo la RP un tema recurrente en congresos y jornadas, no acaba de concretarse en un trabajo en el día a día de clase.

2. Nuestra experiencia

Creemos que la RP tiene interés en sí misma, con contenidos específicos de razonamiento que subyacen a todos los demás contenidos de la materia. Por lo tanto tiene entidad propia y pensamos que debería situarse al principio de cada curso y no sólo al final de cada tema para trabajar los contenidos curriculares.

Por ello ya desde hace algunos años al planificar nuestros cursos nos propusimos potenciar una actitud positiva de los alumnos respecto de las matemáticas y proporcionar a los futuros maestros herramientas que les permitieran integrar en la Enseñanza Primaria la Resolución de Problemas. Para conseguirlo tuvimos en cuenta los siguientes aspectos:

- ***Clarificar la diferencia entre ejercicio y problema.***
- ***Dar a conocer la existencia de estrategias heurísticas adecuadas a la Educación Primaria.***
- ***Promover la discusión sobre las actitudes que aparecen en la RP.***
- ***Proponer criterios de evaluación en RP.***

2.1 Clarificar la diferencia entre ejercicio y problema.

La dificultad de un **ejercicio** estriba únicamente en aplicar correctamente los contenidos que se han trabajado con anterioridad en clase. Es decir, en la resolución de un ejercicio no hay planteamiento propiamente dicho, basta darse cuenta de qué conceptos, fórmulas, algoritmos, etc., hay que aplicar. En un verdadero **problema**, a la dificultad propia de los **ejercicios** antes citada, se añade otra completamente distinta: la dificultad de que en un **problema** para poder hallar la solución primero hay que plantearlo, es decir hay que ver como a partir de los datos que tenemos establecemos un razonamiento que nos lleve a la solución, lo cual en el caso de un **problema** no es evidente. Dicho de otra forma, en un **problema** pueden conocerse perfectamente los contenidos matemáticos relevantes para su resolución y no obstante, ésta no estar clara en absoluto.

Por lo tanto la diferencia entre **ejercicio** y **problema** no es simplemente cuestión del grado de dificultad, ya que en un **problema** hay una dificultad adicional cualitativamente diferente de la propia de un ejercicio. Por ejemplo, si en una clase de Primaria se han explicado los conceptos de múltiplo, divisor, mcm y mcd, el enunciado "**Hallar un número natural sabiendo que es el menor que tiene la**

[3] National Council of Teachers of Mathematics (NCTM) (1980): *An Agenda for Action.* Washington,DC.
[4] Currículum educación primària- Generalitat de Catalunya. Decret 142/2007 DOGC núm. 4915.

propiedad de ser múltiplo de 5, 10 y 14”, corresponde a un ejercicio, y el profesor podrá comprobar si los alumnos han comprendido el concepto de mcm de dos o más números. En cambio el enunciado: **“En una mercería se quieren guardar cajitas de 14 x 10 x 5 cm^3 en cajas cúbicas. ¿Cual es el tamaño mínimo que han de tener estas cajas?**” corresponde a un problema, ya que tras la lectura del enunciado no es en absoluto evidente la presencia en él del concepto de mcm, y tampoco la forma de resolverlo.

2.2 Dar a conocer la existencia de estrategias heurísticas adecuadas a la Educación Primaria.

Las estrategias heurísticas son modelos de razonamiento que frecuentemente ayudan a descubrir cómo solucionar de un problema. Hay muchas, pero aquí sólo citaremos las que, en nuestra opinión, son de más utilidad en la RP de matemática elemental, ilustrándolas con ejemplos.

2.2.1 Prueba y error

Es la más sencilla de todas, aunque a menudo es ignorada en los textos de RP. Se trata de probar una posible solución para ver si verifica las condiciones del enunciado (prueba). Si se comprueba que no las verifica (error) se descarta, y hacemos una nueva prueba. Por ejemplo, tenemos el problema:

“He comprado pasteles de fruta y de chocolate, 50 en total. ¿Cuantos hay de cada clase, si los de fruta valen 2 € cada uno, los de chocolate 3 € y en total me he gastado 133 €?”

Probemos una posible solución: “Si hubiera comprado 25 de cada clase me habría gastado 50 + 75 = 125 €. Por lo tanto, tenemos que aumentar el número de pasteles de chocolate. Si probamos 20 de fruta y 30 de chocolate me hubiera gastado en total 40 + 90 = 130 €. Probamos ahora con 17 y 33 respectivamente y tendríamos en total 34 + 99 = 133 €, por lo tanto esta es la solución”.

Este método, tan empleado en la vida cotidiana, creemos que sería deseable que se utilizara tanto en Primaria como en Secundaria en aquellos problemas, como el del ejemplo, en que la solución sabemos que es un número natural, no demasiado grande. El método algebraico es realmente imprescindible cuando la solución puede ser un número negativo, fraccionario o irracional.

2.2.2 Razonar sobre un modelo concreto

Es una de las más usadas en Primaria. Frecuentemente en la resolución de un problema necesitamos un modelo concreto que nos facilite el razonamiento. A menudo un simple dibujo es suficiente, pero a veces es preciso utilizar otro tipo de modelos, construidos con papel, cuerdas, madera, plástico etc. También entraría en este apartado el realizar una dramatización del problema, para ayudar a comprenderlo y resolverlo. Por ejemplo: **“María y Joan tienen 16m. de tela para hacerse el disfraz de Carnaval. María necesita 4m. más que Joan. ¿Me podrías decir cuántos metros utilizará cada uno?”**

Construimos un modelo concreto:

Representamos por dos tiras de papel desiguales la tela que usará cada uno. Si Joan tuviera 4m. más, usarían la misma cantidad de tela y entre los dos tendrían 20m. Por tanto la mitad, 10m., es la que usa María y 6m. la que usa Joan.

2.2.3 Hallar un antecedente de la solución

Es decir, para poder responder a lo que nos pide el problema ¿qué tendríamos que saber previamente?. Como ejemplo:

"**Un paquete de 10 cuadernos vale 12 €, y quiero comprar 3 cuadernos, ¿cuánto dinero tendré que gastar?"**

¿Qué hace falta saber para poder hallar lo que nos piden? Para saber cuanto valen 3 cuadernos primero hemos de saber cuanto vale 1 cuaderno, o sea 12/10 = 1,2 €. Ahora ya podemos hallar cuanto valen 3 cuadernos: 1,2 x 3 = 3,6 €.

2.2.4 Construir una tabla y descubrir pautas o regularidades

Puede ser una tabla de posibles soluciones (ver **prueba y error**), de valores particulares, etc. Como ejemplo:

"Tenemos una cinta de papel. Uniendo los extremos y aplanando hacemos un pliegue. Volviendo a unir los extremos de la cinta doblada, hacemos otro pliegue. Si se repite el proceso 11 veces, ¿cuantas rayas nos aparecerán en la cinta al desplegarla?"

Hacemos una tabla: Tomamos una cinta de papel (modelo concreto), hacemos un pliegue y desplegamos, nos aparece una raya; hacemos 2 pliegues y desplegamos, contamos 3 rayas; hacemos 3 pliegues y desplegamos, contamos 7 rayas, hacemos 4 pliegues y desplegamos, contamos 15 rayas...

Nº pliegues	1	2	3	4	...
Nº rayas	1	3	7	15	...

Hallamos una pauta: El nº de rayas que aparecen es 2-1, 2^2-1, 2^3-1, 2^4-1...es decir siguen la pauta "dos elevado al nº de pliegues que hemos hecho, menos uno". Por tanto cuando hayamos hecho 11 pliegues las rayas serán 2^{11}-1.

Si el problema se propusiera en Secundaria la resolución se tendría que completar con la demostración de la pauta que hemos encontrado, que entonces la consideraríamos una conjetura plausible.

2.2.5 Resolver un problema relacionado, más sencillo

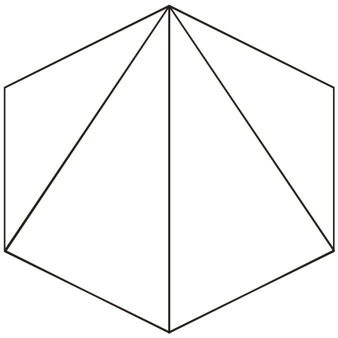
Puede ser que el problema tal como está enunciado presente una excesiva dificultad, pero que otro relacionado, más sencillo, no solamente lo podamos resolver sino que nos proporcione la clave del problema inicial. Como ejemplo:

"Hallar cuantas diagonales tiene un polígono de 17 lados"

Consideramos un problema más sencillo:

Si tuviéramos un hexágono:

Desde cada vértice podemos dibujar 3 diagonales (tantas como vértices menos 3). Si esto lo repetimos desde cada vértice tendremos 3 x 6 = 18 diagonales, pero lo tendremos que dividir por 2, ya que si no, cada diagonal la contaríamos dos veces.



Este mismo razonamiento es válido para un polígono de 17 lados: desde cada vértice podremos trazar: 17 – 3 = 14 diagonales. En total habrá 17 x 14/2 = 119 diagonales.

2.2.6 Razonar hacia atrás

En algunos problemas en que el enunciado tiene la forma de un relato, puede ayudar empezar el razonamiento por el final y remontar hasta el principio. Como ejemplo:

> **Voy a comprar al mercado. En la pescadería gasto 1/3 del dinero, en la frutería 2€, en la panadería la mitad de lo que me queda, y en la verdulería 4€. Ahora solo me quedan 2 € ¿con cuánto dinero he salido de casa?**

Razonamos, comenzando por el final:
Los 2 € que me quedan, más los 4 que me he gastado en la verdulería son los que tenía tras gastar en la panadería la mitad de lo que me quedaba, por lo tanto antes de entrar en la panadería tenía 12 €. En la frutería había gastado 2, luego antes tenía 14. Como en la pescadería me había gastado 1/3 de lo que tenia, estos 14 serán los 2/3 restantes, por lo tanto en la pescadería había gastado 7 y al principio tenía 21.

2.3 Promover la discusión sobre las actitudes que aparecen en RP.

Describiremos ahora algunas situaciones observadas en nuestra práctica docente. Los ejemplos pueden parecer triviales pero el propósito es ilustrar, al nivel más sencillo, tal como hacemos en el aula, unas actitudes que condicionan fuertemente al alumnado.

2.3.1 Miedo o rechazo a utilizar el sentido común en la clase de matemáticas

Muchas veces parece que si no se sigue el modelo aprendido en el aula, la respuesta no tiene ningún valor aunque el razonamiento sea correcto. Lo ilustramos con un problema propuesto en clase:

> **"Hay un puñado de caramelos sobre la mesa. El tío Juan toma la mitad, el padre 1/3 de los que quedan, la abuela 1 y Eloisa los 3 últimos. ¿Cuántos había al principio?"**

Una alumna comentó: "*Yo lo he resuelto, pero esto que he hecho no son matemáticas*".

Le pedimos que explicara cómo lo había resuelto: "*Los* 4 *caramelos que se comen entre la abuela y Eloisa son los* 2/3 *que ha dejado el padre tras comerse* 1/3 *de los que quedaban. Eso quiere decir que* 1/3 *son* 2 *caramelos, o sea que el padre se encontró* 6 *caramelos sobre la mesa. Estos son la mitad que había dejado el tío Juan. Por lo tanto al principio había* 12 *caramelos*". De hecho había utilizado la estrategia heurística "razonar hacia atrás". La alumna, acostumbrada a resolver problemas algebraicamente, creía que esta forma de razonar mediante un relato no era propia de las matemáticas.

Para intentar modificar esta actitud nosotros valoramos positivamente el uso del sentido común, resolviendo problemas por la "cuenta de la vieja", por "prueba y error", etc. También promovemos la discusión crítica de ciertos métodos (ecuaciones, uso de demostraciones abstractas) por no adaptarse al nivel cognitivo de la Educación Primaria.

Explicamos cómo a lo largo de la historia de la matemática, los matemáticos han utilizado el sentido común. Por ejemplo la conocida anécdota de Gauss al calcular la suma de los 100 primeros números naturales ante el estupor de sus compañeros y su maestro[5].

2.3.2 Temor a cometer errores.

Esta actitud la encontramos frecuentemente en la clase.

- El alumno o alumna que ante un problema queda paralizado ("Si no estoy seguro, mejor no hago nada").
- Cuando se muestran remisos a salir a la pizarra a explicar lo que han hecho ("Lo que he hecho seguro que está mal" o "Lo que he hecho está mal, por lo tanto no vale la pena explicarlo").

Argumentamos que los errores pueden ser oportunidades para aprender, en esto se basa el método de prueba y error como estrategia heurística válida y efectiva para muchos problemas. A base de probar una posible solución y analizar el error, se puede encontrar la solución.

Asimismo si al aplicar una estrategia no funciona, analizando el por qué, se puede obtener nueva información que ayude a hallar una estrategia alternativa.

También la historia de las matemáticas proporciona ejemplos de errores que han servido para progresar. Por ejemplo: La creencia pitagórica de que todas las medidas tenían que venir dadas por números naturales o razones entre ellos fue refutada por su propio descubrimiento de las magnitudes inconmensurables. Este hecho posibilitó la posterior aparición de los números irracionales.

2.3.3 Hábito de usar métodos memorísticos, mecánicos.

Prácticas habituales son los diversos métodos para resolver "problemas tipo" como problemas de regla de 3, problemas de móviles, de grifos, etc. Cada uno con su "receta" correspondiente, el uso memorístico de fórmulas para el cálculo de áreas y volúmenes...

[5] 5. C.B. Boyer (1986): *Historia de la Matemática,* pag. 627.

En contraposición valoramos el razonamiento heurístico. Por ejemplo los problemas de “regla de 3” pueden resolverse prescindiendo del clásico esquema rutinario, simplemente hay que “hallar un antecedente de la solución”.

2.3.4 Creencia de que existe una única forma de resolver un problema, que es la válida.

Un comentario frecuente entre nuestros alumnos y alumnas suele ser: “En la escuela el maestro nos obligaba a resolver este tipo de problemas por este método, si no, consideraba que estaban mal”.

Nosotros valoramos positivamente llegar a la solución mediante diferentes métodos, sobre todo si alguno de ellos es original o inesperado.

Creemos que este es uno de los aspectos en que se aprecia más claramente un cambio en los estudiantes, ya que cuando sienten que tienen libertad para “inventar”, empiezan a atreverse a proponer soluciones muchas veces imprevistas para el profesor o profesora. Por ejemplo ante el problema:

> **“Enrique quiere estrenar con sus amigos un juego que le han regalado. Si reparte 4 fichas a cada uno, sobran 6, y si reparte 6 faltan 4. Hallar cuántos amigos juegan”**

La mayoría de estudiantes intentó aplicar la estrategia heurística de “prueba y error”, pero una alumna propuso la siguiente solución: “Si al repartir 4 por cada jugador sobran 6 fichas y al repartir 6 (o sea 2 fichas más) faltan 4, eso quiere decir que al repartir 2 fichas más por jugador se necesitarían 10 fichas más, por lo tanto son 5 jugadores”.

2.4 Proponer criterios de evaluación en RP.

La evaluación en RP tiene que ser coherente con los planteamientos trabajados a lo largo del curso, y debe servir para reforzar este cambio en las actitudes. Para ello realizamos una prueba escrita que consta de dos partes:

A. Resolución de problemas "estandard" resolubles según los métodos propios de Educación Primaria que se han trabajado en clase.

B. Resolución de problemas del tipo "¡ajá!" que requieren para resolverlos una cierta inspiración creativa o una "feliz idea".

Los criterios que tenemos en cuenta para la evaluación de cada una de las dos partes son:

a) Evaluación de la habilidad de resolución de problemas estandard.

Para cada uno de los problemas del tipo A se tienen en cuenta los siguientes criterios:

a.1 Si en su resolución utilizan métodos adecuados a la Educación Primaria.

a.2 Si lo resuelven correctamente desde un punto de vista matemático.

a.3 Si explican diferentes métodos de resolución.

a.4 Si la explicación es clara, comprensible y sin complicaciones innecesarias para un alumno de Educación Primaria.

b) Valoración de la creatividad en la resolución de problemas.

b.1 ¿En alguno de los problemas de A utiliza alguna idea, método, razonamiento, etc.,... original o creativo?

b.2 ¿Resuelve alguno de los problemas de B?

Comentarios:

- *Es conveniente y se valorará positivamente, presentar los "borradores" donde figuren las diversas pruebas y tentativas de resolución de los problemas propuestos.*
- *Cada uno de los problemas de* A*, se puntúa de* 0 *a* 10*. La nota final es la media aritmética de estas notas, incrementada hasta un máximo de* 3 *puntos en función de los criterios* b.1 *y* b.2*.*

Modelo de examen

A. Problemas "Estandard"

1. La capacidad del depósito de mi coche es 5/7 de la del tuyo. En el depósito del tuyo caben 16 litros más que en el del mío. ¿Cual es la capacidad de cada depósito?

2. En un corral tenemos gallinas y conejos. En total hay 30 cabezas y 94 patas. ¿Cuántos animales de cada clase hay?

3. Los 298 alumnos y alumnas de un Instituto han de practicar algún deporte: fútbol o baloncesto, de forma que se ha podido constituir un cierto número de equipos de cada uno de esos deportes. Sabemos que la cantidad de inscritos en cada uno de ellos es mayor que 100. ¿Cuántos alumnos y alumnas juegan a fútbol y cuántos a baloncesto? (Los equipos de fútbol son de 11 jugadores y los de baloncesto de 5 jugadores).

4. Si Montse y Sara pueden pintar una casa en 5 horas y Montse lo puede hacer sola en 8 horas, ¿cuanto tardaría Sara en pintarla ella sola?.

5. Tenemos fichas numeradas del 1 al 999. Queremos saber si es posible distribuir les fichas en dos cajas de forma que la suma de los números de las fichas de cada una de las cajas sea la misma.

B. Problemas "¡Ajá!"

1. He comprado en la pastelería 3 bolsas de caramelos. Una es de caramelos de fresa, otra de café con leche, y otra en que están mezclados los de fresa y café con leche. Pero acaban de llamar de la pastelería avisándome de que las etiquetas están cambiadas y ninguna corresponde a su contenido. ¿Cómo podré averiguar qué hay en cada bolsa, probando el mínimo número de caramelos?.

2. Con 12 palillos iguales cómo podría construir 6 cuadrados de forma que cada lado de un cuadrado sea un palillo.

3. Conclusiones

Este trabajo en RP que solemos hacer al comenzar el curso también nos ha llevado a tratar de forma diferente los demás tópicos de la asignatura (Didáctica de la Matemática), por ejemplo dando más relevancia al propio razonamiento de los alumnos y alumnas. Así observamos una evolución en su trabajo, de modo que se va abandonando una manera de actuar, reproduciendo el razonamiento del profesor o profesora, para intentar hallar métodos propios. La búsqueda de patrones y regularidades, el representar modelizando, etc, se convierten en prácticas habituales favoreciendo su autonomía.

Así planteada, la RP va más allá de mejorar las actividades propuestas en clase y ayuda a los futuros enseñantes a descubrir la cantidad de factores, muchos de ellos emocionales, que intervienen al realizarlas.

Las reflexiones contenidas en este artículo intentan ser una aportación al viejo debate sobre el fracaso escolar en matemáticas. Nuestra experiencia muestra que es positivo considerar la relevancia de los aspectos heurísticos de la matemática en la formación de los docentes. En nuestra opinión, todavía en pleno siglo XXI, es excesivo el predominio en la enseñanza, de la concepción formalista en detrimento de la heurística, y frecuentemente encontramos un exceso de procedimientos estereotipados, a los que el alumno no les ve el sentido, en detrimento de usar el propio razonamiento, la intuición y el sentido común.

Pensamos que esta propuesta de trabajo puede influir positivamente en las actitudes de los futuros maestros y maestras, lo cual incidirá a su vez de manera favorable en el rendimiento de sus alumnos.

Bibliografia

Boyer, C.B. (1986): *Historia de la Matemática.* Alianza Universidad, Madrid.
Callejo, M.L. (1994): *Un club matemático para la diversidad.* Narcea, Madrid.
Clements, M.A. (1999): "Planteamiento y resolución de problemas: ¿Es relevante Polya para las matemáticas escolares del siglo XXI?", *Suma* 30, 27-36.
Codina, R. (coord.) (2004): *Matemàtiques i la seva didàctica.* Publicacions i Edicions de la Universitat de Barcelona, Col. Textos Docents nº 287, Barcelona.
Contreras, L.C.; Carrillo, J. (1997): "La resolución de problemas en la construcción de conocimiento. Un ejemplo". *Suma* 24, 21-25.
Fisher, R., Vince, A. (1991): *Investigando las matemáticas.* Akal, Madrid.
Gardner, M. (1981): *Inspiración ¡Ajá!*. Labor, Barcelona.
Giménez, J, Santos, L. Ponte, J.P. (coords.) (2004): *La actividad matemática en el aula. Homenaje a Paulo Abrantes.* Biblioteca de Uno 204, Graó, Barcelona.
De Guzmán, M. (1991): *Para pensar mejor.* Labor, Barcelona.
Mason, J. Burton, L., Stacey, K. (1988): *Pensar matemáticamente.* Labor, Barcelona.
NCTM (2003): *Principios y estándares para la educación matemática.* Sociedad Andaluza de Educación Matemática Thales, Sevilla.
Polya, G. (1966): *Matemáticas y razonamiento plausible.* Tecnos, Madrid.
Polya, G. (1985): *Cómo plantear y resolver problemas.* Trillas, México.
De la Rubia, D. (1989): "Un problema cualquiera". *Suma* 2, 5-16.
Schoenfeld, A. (1985): *Mathematical Problem Solving.* Academic Press, Orlando.
Shell Centre for Mathematical Education (1993): *Problemas con pautas y números.* Universidad del País Vasco, Leiva.
Stacey, K., Groves, S. (1999): *Resolver problemas: Estrategias.* Narcea, Madrid.

Maria José Castelló Esnal. Barcelona, 1946. Licenciada en Ciencias (Matemáticas). Líneas de trabajo: Resolución de problemas, Matemáticas en Educación Infantil, Mujer y Ciencia. Departamento de Didáctica de las Ciencias Experimentales y de la Matemática. Facultad de Formación del Profesorado. Universidad de Barcelona.mjcastello@ub.edu

Roser Codina Pascual. Barcelona 1954. Licenciada en Ciencias (Matemáticas). Líneas de trabajo: Resolución de problemas, Enseñanza de la Geometría, Historia de la Ciencia, Mujer y Ciencia. Departamento de Didáctica de las Ciencias Experimentales y de la Matemática. Facultad de Formación del Profesorado. Universidad de Barcelona. rosercodina@ub.edu

Pere López Cuesta. Lleida 1945. Licenciado en Ciencias (Matemáticas). Líneas de trabajo: Resolución de problemas, Arte y Matemáticas, Enseñanza de la Geometría, Matemática de la vida cotidiana. Departamento de Didáctica de las Ciencias Experimentales y de la Matemática. Facultad de Formación del Profesorado. Universidad de Barcelona. plopez@ub.edu.

UNIÓN
REVISTA IBEROAMERICANA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA

Junio de 2010, Número 22, páginas 77-89
ISSN: 1815-0640

La Demostración en los programas de secundaria de matemática en Chile

William Antonio Campillay Llanos

Resumen

Una de las actividades matemáticas más desafiantes es la demostración. Este trabajo pretende describir el estatus de la demostración en los programas de secundaria en Chile, mediante una presentación de las actividades planteadas en el curriculum escolar y una propuesta general para incorporar esta actividad de manera continua durante el proceso educativo.

Abstract

One of the most challenging mathematical activities is the proof. This work tries to describe the status of the proof in the programs of secondary in Chile by means of a description of the activities raised in the school curriculum and one presents a general offer to incorporate this activity of a constant way during the educational process.

Resumo

Uma das atividades matemáticas mais desafiantes é a demonstração. Este trabalho pretende descrever o status da demonstração nos programas de ensino secundário em Chile, mediante uma apresentação das atividades propostas no currículo escolar e uma proposta geral para incorporar esta atividade de maneira contínua durante o processo educativo.

1. Un poco de historia para comenzar

La concepción de la demostración desde los años de la Grecia antigua no ha tenido grandes modificaciones hasta nuestros días, ha conservado su característica fundamental, que es la de entender la demostración como un encadenamiento de deducciones. Para realizar un estudio sintético de la demostración durante la historia nos hemos basado en una publicación de Evelyn Barbin (IREM du Mans, Francia), quien divide la historia de la demostración en tres etapas:

La primera corresponde a los tiempos de la cultura en Grecia, donde la demostración buscaba convencer en medio del debate. Como cultura chilena debemos considerar el gran aporte de este pueblo a nuestros pensamientos, y como no mencionar personajes como Sócrates, Platón, Aristóteles, Euclides, Pitágoras, entre otros, quienes han contribuido, con su aporte intelectual a la formación de nuestros ciudadanos.

La segunda etapa correspondiente, se sitúa en el siglo XVII, en aquellos tiempos se buscaba que las demostraciones aclararán más que convencieran, donde los métodos de descubrimientos desempeñaban un papel fundamental. Siglo en cuál se conforma una nueva visión de pensamiento, esta nueva forma de mirar el mundo, de una perspectiva más racional queda perfectamente reflejada en el pensamiento de un personaje francés llamado René Descartes (1596-1650), es importante destacar su aporte para el desarrollo de la humanidad, en su gran obra "El discurso del método" comienza escribiendo lo siguiente: ***"Le bon sens est la chose du monde du mieux portagée"***, esta aseveración incluye a la humanidad completa, es por eso que como sociedad Chilena, podemos reconocer y comprender que esta afirmación es una concepción que también corresponde a nuestro contexto cultural, pues concordamos que la razón es la cosa del mundo mejor repartida, mediante este pensamiento es que nosotros consideramos a nuestros estudiantes capaces de mirar el mundo de una manera racional, y por supuesto incorporar dentro de las actividades matemáticas, la tarea de demostrar.

Y la tercera comienza en el siglo XIX, donde se regresa al rigor, que permitió hacer frente a nuevas concepciones de los objetos matemáticos, lo cual trajo consigo problemas de fundamentos de la Matemática y la aceptación de teorías antiintuitivas o no evidentes.

Como se puede apreciar durante la historia de la Matemática, la actividad matemática de demostrar no ha sido simple, en ocasiones ha sido una tarea muy difícil, como es el caso de demostrar que el quinto axioma propuesto por Euclides, era dependiente de los otros, trajo consigo interesantes aportes a la matemática, pero la tarea fue dura y tuvieron que pasar siglos para aclarar esta demostración, la cuál trajo grandes frutos para la matemática, como no mencionar el último Teorema de Fermat, es por esto que es de esperar que en el procesos de enseñanza aprendizaje, se generen obstáculos didácticos de origen epistemológicos, pues esto se encuentra en la historia misma de la validación de las proposiciones matemáticas, tomando en cuenta lo anterior "No se trata de considerar los obstáculos externos como la complejidad, la fugacidad de los fenómenos, no de incriminar la debilidad de los sentidos y del espíritu humano; es en el caso mismo de conocer íntimamente que aparece por una suerte de necesidad funcional lentitudes y problemas. Uno conoce en contra de un conocimiento anterior[1]". Es por esto y por otras razones (explicitadas en las páginas siguientes) que es posible y necesario que los estudiantes comprendan la utilidad de la demostración y las construyan, ya que una postura que debemos asumir en la enseñanza de la matemática, es la necesidad de enfrentar a los estudiantes a situaciones similares que a los de los matemáticos para que creen su propio conocimiento. Y la demostración juega un rol fundamental en el mundo matemático.

2. La demostración en distintos contextos institucionales

A continuación presentamos diferentes contextos donde esta presente la actividad de demostrar.

2.1 Lógica y fundamentos de la matemática.

En este contexto la noción de demostración esta íntimamente ligada con la noción de deducción y de sistema axiomático, siendo el argumento deductivo el principal objeto de la lógica formal, es importante que se tenga un lenguaje y este debe ser rigurosamente presentado mediante símbolos elementales y reglas presentadas. Lo que es característico de un sistema axiomático, es que a partir de

[1] Bachelar

nociones fundamentales, las cuales no se pueden demostrar se deducen otros enunciados, llamados teorema, los cuales se admiten verdaderos si la validez de basa en las reglas lógica utilizas en el proceso de demostración. Consideremos como ejemplo el sistema axiomático de Euclides donde él propone los siguientes postulados:

1. Postúlese el trazar una línea recta desde un punto cualquiera hasta un punto cualquiera.
2. Y el prolongar continuamente una recta finita en línea recta.
3. Y el describir un circulo con cualquier centro y su distancia.
4. Y el ser todos lo ángulos rectos iguales entre si.
5. Y que si una recta al incidir sobre dos rectas hace los ángulos internos del mismo lado menores que dos rectos, las rectas prolongadas indefinidamente se encontrarán en el lado en el que están los (ángulos) menores que dos rectos.

Euclides en el libro primero de los *Elementos* plantea la proposición 47 (o teorema), la cuál se puede demostrar dentro del sistema axiomático presentado anteriormente.

Proposición 47: En los triángulos rectángulos el cuadrado del lado que subtiende el ángulo recto es igual a los cuadrados de los lados que comprenden el ángulo recto.

Es así como se vive el proceso de demostración en la lógica y fundamentos de la matemática siendo la característica de este proceso la deducción, pero no debemos olvidar lo siguiente "¿Cuál es la naturaleza del razonamiento matemático? ¿Es realmente deductivo ? Un análisis profundo nos muestra que no es así; que "participa en una cierta medida de la naturaleza del razonamiento inductivo, y por eso es fecundo"[2] es por eso que quizás este contexto enmascara el razonamiento inductivo, debemos considerar que la aprobación de los axiomas o postulados se realizan mediante argumentaciones intrínsicamente inductivas.

2.2 Matemática profesional.

La idea de demostración tiene un fuerte cambio debido a que esta noción se transforma en un procedimiento puramente algorítmico, que puede ser materializado mediante el uso de los ordenadores, esto genera que la matemática actual este llena de demostraciones informales, bajo este contexto las demostraciones son inductivas pero no formales. Hoy día surgen nuevas estrategias para la validación de las proposiciones matemáticas estas se realizan en forma experimentales y principalmente con ordenadores, es por eso que podríamos describir la "demostración en la práctica real del matemático como un argumento convincente juzgado como tal por jueces calificados[3]". A pesar que esta noción de demostración no tiene mucha relación con la anterior si debemos reconocer que en ellas hay algún tipo de organización jerárquica, y para establecer la relación entre el contexto de la Lógica y fundamentos de la matemática y la Matemática profesional, citamos a Balachef (1987), quien distingue tres tipos de situaciones que requieren procesos de validación, las cuales se reconocen en el trabajo del matemático, él caracteriza estas

[2] Poincaré, 1902
[3] Hersh, 1993

situaciones por la función de las demostraciones producidas: para *decidir* y *convencer* estas dos primeras utilizan como criterio la eficacia, mientras que la tercera tiene la función de *saber* y el criterio es el rigor.

2.3 Ciencias experimentales

En este contexto la demostración se basa principalmente en prácticas argumentativas, generalmente del tipo empírico inductivas. Donde una proposición puede ser verdadera en circunstancias semejantes o con cierta probabilidad. A continuación presentamos como se concibe la validez de los enunciados de contenido empírico.

a) No tiene carácter absoluto y universal
b) Su validez se incrementa a medida que se muestran o producen más hechos que se ajusten al enunciado.
c) Un ejemplo que no se cumpla no invalida completamente la afirmación

2.4 Vida Cotidiana

Comúnmente en la vida cotidiana utilizamos una argumentación informal o natural, que depende del contexto, e incluso del estado emocional de la persona, Según Fernández y Carretero la lógica informal tiene las siguientes características:

a) Se aplica a la vida cotidiana, aunque también a cuestiones profesionales y académicas.
b) Está relacionada con la capacidad de elaborar y valorar argumentos y contra argumentos.
c) No utiliza un lenguaje formal o simbólico sino el lenguaje ordinario.
d) Es dinámico y muy dependiente del contexto.
e) Se aplica a tareas abiertas y mal definidas.
f) Se aplica a tareas no deductivas.

Durante el proceso de formación del estudiante un objetivo primordial es que tome conciencia de las diferencias y similitudes entre el lenguaje matemático y el lenguaje cotidiano, y que comprenda que la adopción de símbolos permite dotar de rapidez y eficacia al pensamiento, es importante hacer notar las diferencias debido a que cuando se habla en matemáticas, él lenguaje toma un rol fundamental, donde debe precisar el significado de los objetos a trabajar y por ningún motivo debe presentar ambigüedades, es decir debe ser uniforme y unívoco, donde cada objeto matemático tienen un significado preciso, que en la vida cotidiana puede tomar diferentes matices.

También es importante saber claramente que es una proposición matemática, esta es "Una afirmación que se refiere a objetos ya introducidos o definidos, siendo esta verdadera o falsa".

Ejemplo 1*:* ¡*No*, *No quiero ir al cine*!

Esta afirmación en el lenguaje común equivale a decir, que por ningún motivo la persona ira al cine, pero si traducimos esto al lenguaje matemático esta afirmación tendrá el sentido de que si quiere ir al cine.

Ejemplo 2*:* También encontramos expresiones que tiene similitud, como:

“Para cada número par *p* hay algún número entero *k* tal que *p=2k*”

“Para cada calle de Santiago hay dos veredas”

3. Una propuesta para incorporar la actividad de demostrar

Como hemos visto en la primera y segunda parte apreciamos que no existe una concepción inmutable y única de la demostración, en relación a esto no podríamos tener una sola concepción de la demostración y menos caer en un rigor exagerado, lo cuál desvirtúa el sentido y funcionalidad de la demostración.

El cuadrado siguiente presenta un esquema basado en los contenidos de los programas chilenos, se presenta la demostración como un proceso continuo, acompañando a las otras actividades matemáticas. Dividiendo este proceso en cuatro etapas siendo las dos primeras análogas al los dos último estadio cognitivos propuesto por Piaget.

<table>
<tr><td>Quinto</td><td>Sexto</td><td>Séptimo</td><td>Octavo</td><td>Primero</td><td>Segundo</td><td>Tercero</td><td>Cuarto</td></tr>
<tr><td colspan="2">Etapa I</td><td colspan="3">Etapa II</td><td colspan="2">Etapa III</td><td>Etapa IV</td></tr>
</table>

Etapa I:

En esta etapa se encuentran los estudiantes que cursan quinto y sexto básico, en general tienen desde 10 a 12 años, es en este periodo donde los estudiantes deben observar construcciones geométricas para establecer algunas conjeturas, argumentar acerca de figuras, en esta etapa se debe poner énfasis a la geometría observativa.

Esta división del programa es coherente con los estadios cognitivos propuestos por Piaget, que corresponde al de operaciones concretas (7-11 años). El sujeto educativo en esta fase no sólo usa el símbolo, sino es capaz de usar estos de una manera lógica y, a través de la capacidad de conservar y llegar a generalizaciones. Es importante considerar que el niño ha adquirido la noción de conservación de superficies. Por ejemplo, puesto frente a cuadrados de papel se puede dar cuenta que reúnen la misma superficie aunque estén esos cuadrados amontonados o aunque estén dispersos. En esta etapa es fundamental aclarar la idea de una proposición matemática, la cuál corresponde a una “afirmación que se refiere a objetos ya introducidos o definidos, es decir, que tiene uno de los dos valores posibles V (verdadero) o F (falso)[4]”,

Etapa II:

Esta segunda etapa que hemos considerado como fundamental para motivar la actividad matemática de demostrar, los estudiantes tienen desde 12 a 15 años y es la etapa donde se le debe presentar la necesidad de demostrar con situaciones interesantes que permitan motivar e insertar al estudiante en la investigación para que conjeture y pueda aventurarse a demostrar. A diferencia de la etapa anterior,

---

[4] Cómo hablar, demostrar y resolver en matemática-Miguel de Guzman

donde el estudiante presentaba dificultades al aplicar sus capacidades a situaciones abstractas. Por ejemplo, si un adulto le dice "no te burles de "Juanito" porque es gordo... ¿qué dirías si te sucediera a ti?", la respuesta del sujeto en el estadio de sólo operaciones concretas sería: "Yo no soy gordo". Es recién desde los 12 en adelante, según Piaget, que el cerebro humano está potencialmente, para formular pensamientos realmente abstractos, es aquí el momento para comenzar con el razonamiento hipotético deductivo, se deben presentar actividades, a los estudiantes, para que comprendan la utilidad del razonamiento deductivo y los principales objetivos a alcanzar serán:

- Conocer un contra ejemplo suficiente para invalidar un enunciado.
- Comprender que unos ejemplos no son suficientes para comprobar la veracidad de una proposición.
- Una constatación de medidas sobre un dibujo no es suficiente para probar que un enunciado de geometría es verdadero.
- Saber enunciar el reciproco de una propiedad de la forma "Si…..entonces….".
- Saber buscar y redactar encadenamientos deductivos.
- Saber expresar demostraciones simples utilizando escrituras.

Etapa III:

Los estudiantes tienen entre 15 y 17, es en este periodo que se puede presentar a los estudiantes el genero de tarea como necesario e importante dentro de las actividad matemática, para convencerse de las técnicas utilizadas en matemáticas que ha ocupado durante su proceso de formación, esto va acompañado con las unidades que facilitan este proceso, principalmente como "Lenguaje Algebraico", Transformaciones Isométricas", "Congruencia de Figuras Planas", "Semejanza de figuras Planas", "La circunferencia y sus ángulos", "Más sobre triángulos rectángulos"

En esta etapa es importante, considerar y organizar una praxeología matemática que permita al alumno elaborar técnicas de razonamientos, para desarrollar los tipos de tareas relacionado con la actividad de demostrar.

Etapa IV:

Esta cuarta etapa los estudiantes tienen entre 17 y 18, esta corresponde a una etapa de reflexión, más bien evaluativa, la cuál corresponde al último año de formación del ciudadano en su etapa escolar, es por eso que en esta fase se debe motivar y presentar demostraciones que sean útiles y que complementen su formación, es importante destacar la utilidad de ésta actividad matemática debido a que uno de los ejes centrales para la formación del estudiantes son los objetivos fundamentales transversales, y en ellos se hace explicito la necesidad de formar seres que reflexionen razonadamente, que sean críticos y puedan contribuir al desarrollo social.

4. Descripción de los programas

Para comenzar nos planteamos la siguiente interrogante ¿Cuál es el estatus de la demostración en la educación chilena? "No debemos olvidar que lo que constituye una demostración varia de una cultura a otra, así como de una época a otra[5]" es por eso que como sociedad debemos llegar a un acuerdo general en relación a que objetivos se buscan con la intención de realizar la actividad matemática de demostrar

Cuando hablamos del estatus nos referimos a la posición que se le asignan a esta actividad matemática en los programas nacionales. Para comenzar este análisis debemos considerar el camino seguido durante la formación del estudiante, y como progresivamente se pretende que se aventure en la exploración del género de tarea de demostración, para esto, en un comienzo, realizamos una revisión exhaustiva de los programas de estudio de quinto a octavo básico, pues es necesario considerar esta etapa de estudio, ya que en ella se construye, a nuestro juicio, la intencionalidad matemática referida a desarrollar algunos elementos y habilidades matemáticas que permitan el estudio de esta disciplina, comprendiendo la importancia de la matemática como una actividad cultural importante.

A continuación presentamos frases y un análisis de los programas de Quinto a Octavo básico.

"*En el ámbito del espacio y de la geometría, se continúa el desarrollo del sentido espacial, el estudio de figuras y cuerpos geométricos, enfatizando las propiedades y relaciones geométricas que se pueden observar en diversas situaciones que están al alcance de niños y niñas (construcción, dibujo, manipulación) más que en sus definiciones y clasificaciones preestablecidas[6]". Este punto es importante a considerar, pues se manifiesta la necesidad de comprensión de los elementos geométricos, pretendiendo que se formen una idea de una manera intuitiva y puedan apreciar los elementes geométricos presentados mediante la observación, este paso es importante para comenzar con la geometría deductiva. También explícitamente nos encontramos con la palabra "Construcción" y consideramos que dentro de las actividades matemáticas que se trabajan a este nivel, debe tener una posición relevante en el que hacer del estudiante, pues la construcción en geometría implica redactar un programa de construcción el cuál en una primera instancia el estudiante debe "indicar los objetos matemáticos a construir, sus nombres, sus designaciones y sus particularidades, luego el sujeto educativo debe explicitar el orden en el cual a realizado las trazas, procurando no describir ni los instrumentos utilizados ni los gestos efectuados[7]*", esto permite que los estudiantes adquieran un orden mental y puedan estructurar ideas.

Una tarea fundamental de los docentes es procurar que las situaciones de aprendizaje propuestas a los niños y niñas les den múltiples oportunidades para:

- Explorar y probar estrategias diversas para resolver problemas.
- Desarrollar procesos ordenados y sistemáticos para la resolución de problemas o desafíos matemáticos.
- Comunicar procesos, resultados y conclusiones, incorporando, progresivamente, el uso de lenguaje matemático.
- Justificar, argumentar y fundamentar, tanto resultados como procedimientos;

[5] Wilder 1981.
[6] Programa de estudio de quinto básico.
[7] Libro de estudio sixieme, Hachette, Francia.

- Buscar y establecer regularidades y patrones, tanto en el ámbito de los números como del espacio y la geometría;
- Trabajar con materiales manipulativos concretos y simbólicos.
- Desarrollar trabajos individuales y colectivos, en los que discutan tanto sobre procedimientos y resultados como sobre el sentido de las actividades.
- Proponer nuevas preguntas y problemas.
- Detectar y corregir sus errores. (Programa de estudio de quinto básico)"

La pregunta natural que puede surgir ¿Cómo los docentes diseñan este tipo de actividades? Y ¿Cuáles son?, pero como esta no es la intencionalidad del trabajo, rescatamos los componentes teóricos que presentan los programas (Queda como una investigación a realizar, para responder la preguntas planteadas) , destacando las siguientes actividades "Explorar, Probar, Desarrollar procesos ordenados y sistemáticos, Justificar, argumentar y fundamentar, Buscar y establecer regularidades y patrones, Comunicar procesos, resultados y conclusiones, incorporando, progresivamente, el uso de lenguaje matemático". Estas actividades corresponden a la base de un proceso de demostración, pero ahora es el momento de preguntarse ¿Qué entendemos por ellas?, ¿Y que importancia tienen para la demostración?

En los programas de sexto básico siguen con las mismas ideas que en quinto pero de debe destacar que en la parte geometría se pretende que los alumnos centren la atención en familias de figuras más que en figuras aisladas, esto es indispensables para que los estudiantes aprendan a organizar sus ideas y puedan distinguir y relacionar objetos matemáticos.

En séptimo se continua con la intención de desarrollar la geometría observativa continuando con el desarrollo del sentido espacial, el estudio de figuras y cuerpos geométricos y el análisis de las propiedades y relaciones geométricas que se pueden observar en diversas situaciones que están al alcance de niños y niñas (construcción, dibujo, manipulación) más que en sus definiciones y clasificaciones preestablecidas.

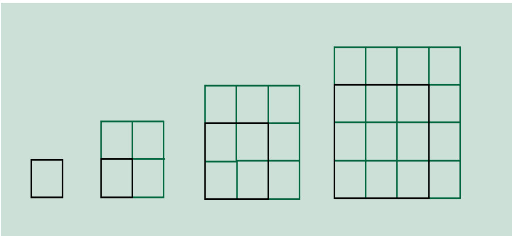
Y finalmente en Octavo "Se continúa el estudio de figuras y cuerpos geométricos y el análisis de las propiedades y relaciones geométricas. Esto último se realiza a través de diversas situaciones que están al alcance de los alumnos y alumnas, tales como construcción, dibujo, manipulación, más que en sus definiciones y clasificaciones preestablecidas[8]". Es aquí que es conveniente realizar una critica debido a que nuevamente se explicita que no será importante las definiciones y clasificaciones preestablecidas, creemos que es importante y fundamental que los estudiantes en este nivel manejen definiciones y clasificaciones, pues es útil para comenzar una nueva de etapa de estudio, es importante no subestimar la capacidad del sujeto educativo de aprender y comprender las definiciones matemáticas.

Una vez realizado el análisis anterior, continuamos con la revisión de los planes de estudio de la educación media, se debe explicitar que las actividades que se

[8] Programa de Octavo básico

exponen a continuación fueron extraídas de los mismos programas, escogidas de manera que tenga relación directa con la demostración.

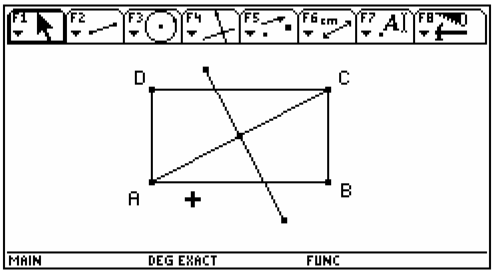
Encontramos por primera vez, en los contenidos mínimos obligatorios, la palabra de *Demostración* en el nivel de primero medio, esto corresponde a la segunda unidad correspondiente al Lenguaje algebraico y se proponen que los alumnos *demuestren propiedades asociadas a los conceptos de múltiplo, factores y divisibilidad,* en esta unidad se propone al profesor las siguientes actividades “Demostrar que la suma de tres números consecutivos es siempre múltiplo de 3” ,“ Determinar la suma de los n primeros números naturales” y “¿Para cuáles valores enteros positivos de n, la expresión 36/(n + 2) es un número entero?”. También se propone la siguiente actividad para la evaluación.



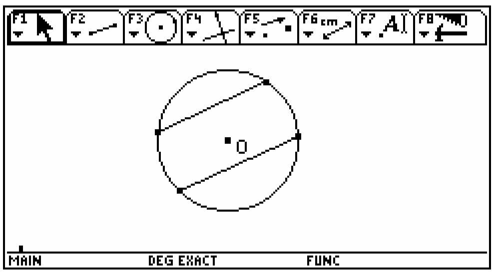
Describir la regla de formación, indicando el número de cuadraditos que se agregan cada vez y el número que corresponde al total de cuadraditos en cada caso.
Considerando la descripción anterior, ¿cuánto es 1 + 3 + 5 + ... + 55 ?

Luego en la unidad número siete, llamada Congruencia de figuras planas, encontramos nuevamente la demostración como contenido, y se pretende que los estudiantes *demuestren propiedades de triángulos, cuadriláteros y circunferencia relacionadas con congruencia,* este tema es importante pues los estudiantes comienzan el fascinante camino de la geometría deductiva. Las actividades propuestas son:

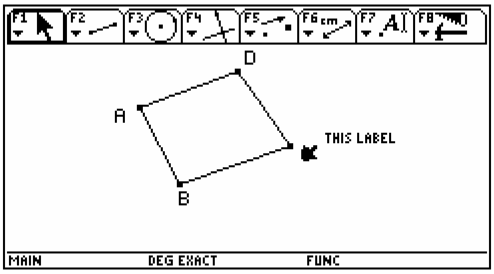
- Demostrar que si por el punto medio de la diagonal de un rectángulo se traza una perpendicular a ésta, se divide al rectángulo en dos trapecios congruentes.



- Demostrar que si en una circunferencia dos cuerdas están a la misma distancia del centro, tienen la misma longitud.

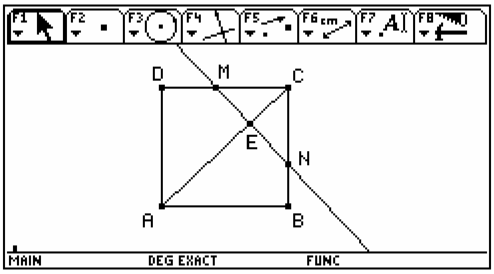


- Demostrar que en un cuadrilátero equilátero las diagonales generan triángulos congruentes



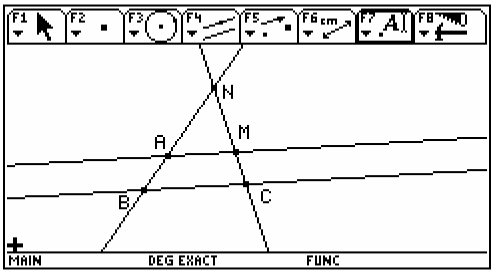
- En un cuadrado cualquiera ABCD, copiar un lado sobre la diagonal AC partiendo desde A; se obtiene el punto E. Trazar por E una perpendicular a AC generando los puntos M y N en los lados CD y CB respectivamente. Demostrar que los triángulos ABN, ANE, AEM y AMD son congruentes

.

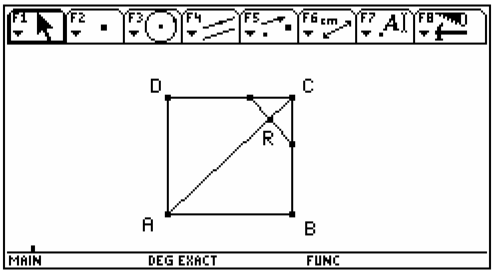


En segundo medio en los contenidos expuesto encontramos que el profesor debe enseñar la unidad de *Semejanza de figuras planas*, en esta encontramos las siguientes actividades:

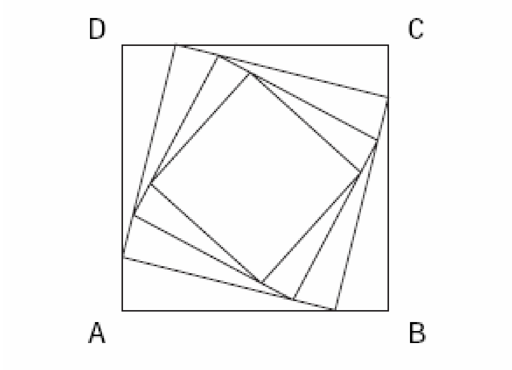
- Analizar una demostración del teorema de Thales



- ABCD es un cuadrado; R es punto cualquiera de la diagonal; trazar por R una perpendicular a la diagonal. Esta perpendicular intersecta dos lados del cuadrado generando dos triángulos. Demostrar que esos triángulos son congruentes entre sí y semejantes con el triángulo que genera la diagonal con los lados del cuadrado.



- En el siguiente dibujo, ABCD es un cuadrado y los vértices de la figura inscrita dividen el lado en la razón 1:4. Demostrar que las figuras que se generan son cuadrados y determinar la razón de semejanza entre dos cuadrados consecutivos.



También consideramos la siguiente actividad: Analizar las situaciones que se describen a continuación y determinar si se trata o no de figuras semejantes.

a) Dos triángulos cualesquiera.

b) Dos triángulos isósceles T y T’ en los que el ángulo del vértice de T y de T’ miden 45º.

c) Dos triángulos rectángulos R y R’ en que un cateto de R es el doble de un cateto de R’.

d) Dos triángulos rectángulos R y R’ en que un ángulo agudo de R es congruente con un ángulo agudo de R’.

e) Dos rectángulos A y B en que un lado de A es la mitad de un lado de B.

f) Dos cuadrados cualesquiera.

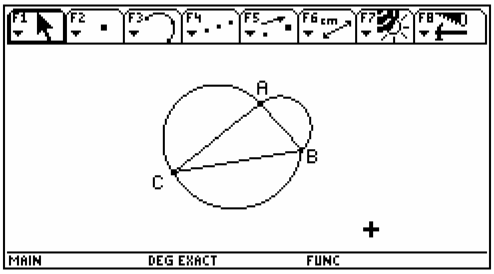
g) Dos rectángulos cualesquiera.

Es necesario destacar el siguiente contenido, que es *La distinción entre hipesis y tesis. Organización lógica de los argumentos* es a partir de esto nos preguntamos ¿Cuál es el lenguaje simbólico que los alumnos manejan? ¿Es necesario?, y creemos que este contenido debe ser tratado transversalmente y no como un contenido específico del curso, pero si estamos de acuerdo que es un momento ideal para reforzar y resaltar la importancia del lenguaje matemático.

Uno de los contenidos que debemos considerar dentro del marco demostrativo es *Conocer la evolución del pensamiento geométrico durante los siglos XVI y XVII, y los aportes de René Descartes al desarrollo de la relación entre álgebra y geometría,* en nuestro esquema de trabajo hemos considerado este contenido como inicio a la comprensión de la demostración, recordemos que René Descartes da una “demostración racional de la existencia de Dios”, ¿Qué tiene que ver esto con la Matemática?, se valora a intencionalidad, pues trata de explicar una verdad que para muchas personas es trascendental para sus vidas , pero no hay duda que gracias a esta manera de pensar el desarrollo científico y matemático tuvo un progreso enorme, considerando siempre los encadenamientos deductivos intrínsicos al razonamiento y fundamentales para comenzar a trabajar la actividad matemática de demostrar.

En tercero medio en la unidad de tres, denominada Más sobre triángulos rectángulos aparece como contenido *la demostración del teorema de Euclides relativos a la proporcionalidad en el triángulo rectángulo*, y se plantean las siguientes actividades

- Demostrar que $sen^2(\alpha)+\cos^2(\alpha)=1$
- Demuestran los teoremas de Euclides. Aplican este teorema en la construcción de raíces cuadradas.
- Comparan diversas maneras de demostrar el Teorema de Pitágoras.
- Demostrar el Teorema de Pitágoras recurriendo a los teoremas de Euclides.
- Demostrar que en un triángulo rectángulo, el área de la semicircunferencia. Construida sobre la hipotenusa es igual a la suma de las áreas de las semicircunferencias construidas sobre los catetos



Y finalmente en cuarto medio no encontramos la demostración expuesta explícitamente dentro de los tres contenidos principales que son Estadística y probabilidad, Funciones potencias, logarítmica y exponencial y Geometría en el espacio.

En relación a las orientaciones didácticas presentadas en los programas, el énfasis primordial se le otorga a la resolución de problemas, esto es fundamental dentro de la actividad matemática, pues los avances matemáticos importantes se han realizado gracias al esfuerzo de resolver problemas específicos, pero debemos considerar y elevar el estatus de la demostración en los programas y en la actividad práctica en el aula, ya que si no la consideramos como parte importante es como si elimináramos los últimos pasos del método científico, es coherente resaltar esta posición pues esta acorde con los Objetivos fundamentales transversales, siendo un motivo más para considerar la actividad de demostrar como necesaria para la formación del ciudadano ya que perseguimos con esto que el estudiante desarrolle sus habilidades de pensamiento tales como son la exploración de estrategias cognitivas en la resolución de problemas, la anticipación de resultados y la *utilización de los sistemas y el instrumental de las matemáticas en la interpretación del mundo circundante (muy importante)*, la recopilación, sistematización, interpretación, evaluación y comunicación de información y en la apropiación significativa de la realidad.

La intencionalidad de la demostración también se refiere a los OFT en el ámbito *Crecimiento* y Autoafirmación Personal, los cuáles corresponden al interés en conocer la realidad, y habilidades de selección de información, uso del conocimiento, razonamiento metódico y reflexivo, y resolución de problemas.

El programa plantea objetivos, contenidos y actividades que buscan desarrollar en alumnas y alumnos las capacidades de explorar diferentes estrategias para resolver problemas, sistematizar procedimientos, descubrir regularidades y patrones, organizar y analizar información cuantitativa, y justificar y comunicar eficazmente procedimientos y resultados, detectar y corregir errores, dando énfasis al trabajo metódico.

Bibliografia

Barberi, D., Concas, C. y otros (2002): *Maths 4 emé*. Bordas, Francia.
Boye, A, Montaigne, M. y otros (2000): *Mathématiques second*. Hatier, Francia.
Chaparon, G., Mante, M (1997): *Mathématiques 5.* Hatier, Francia.
Hanouch, B., Choquer, A. (2004): *Maths 2 reperes*. Hachete, Francia
Yeterian, A., Hug, B. (2007): *Du raisonnement a la demosntration*, Francia
Recherche en didactique des mathématiques, vol 3. 3-1982, Francia
Guzmán, M. (2003): *Como hablar y demostrar en matemáticas*. Base Universitaria, España.
Planes y programas de matemática de la educación chilena de 6 básico a 4 medio vigentes en el año 2008

William Antonio Campillay Llanos, Licenciado en matemática educativa Universidad Metropolitana de la Ciencias de la Educación (UMCE). Chile. Profesor de Matemática y estadística educacional (UMCE), estudiante de magister en Matemática (Universidad de Talca, Chile). Docente de Matemática en la Universidad de Talca, Chile. wcampillay@utalca.cl

UNIÓN
REVISTA IBEROAMERICANA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA

Junio de 2010, Número 22, páginas 91-107
ISSN: 1815-0640

Propuesta didáctica para la enseñanza del tema funciones a través de la utilización de estrategias metacognitivas y el uso del Derive

José Ramón Terrero Dominici; Olga Lidia Pérez González

Resumen

El trabajo aborda como a través de la utilización de estrategias metacognitivas y el uso del Derive para en la enseñanza del tema funciones, se puede mejorar el proceso de enseñanza-aprendizaje de los contenidos sobre funciones en los estudiantes del Nivel Medio (Secundaria Básica) de COLAPEC de la Universidad APEC (UNAPEC) de la República Dominicana.

Abstract

The work approaches like through the use of strategies metacognitivas and the use of the Derive stops in the teaching of the topic of Functions it can improve the process of teaching-learning of the topics on Functions in the students, of the Half Level of COLAPEC of the University APEC (UNAPEC) of the Republic Of the Dominican Republic

Resumo

O trabalho aborda como através da utilização de estratégias metacognitivas e o uso do Derive para o ensino do tema funções, se pode melhorar o processo de ensino-aprendizagem dos conteúdos sobre funções nos estudantes do Nível Médio (Secundário Básico) de COLAPEC da Universidade APEC (UNAPEC) da República Dominicana

1. Introducción

Las nuevas exigencias que supone el desarrollo social mundial, hacen que las políticas educativas en el siglo XXI, sean un aspecto que necesite ser atendido especialmente en un país como la República Dominicana, donde el desempleo y el analfabetismo han alcanzado en estos últimos años, los más altos niveles en la población, causa principal del subdesarrollo que nos ha caracterizado y del cual hasta ahora no hemos podido salir.

República Dominicana requiere de un maestro actualizado constantemente, que localice y haga uso de la información que necesita por diferentes vías, que tenga pleno dominio de los contenidos que imparte, así como de los principios pedagógicos, filosóficos, psicológicos, epistemológicos de la educación, y que sepa aplicar la ciencia y la tecnología en su práctica educativa, permitiéndole diseñar estrategias educativas didácticas para lograr el aprendizaje de sus estudiantes.

En el caso particular de la enseñanza de las matemáticas tiene gran importancia el valor cultural del conocimiento de esta asignatura para la comprensión del mundo físico, económico, social y tecnológico, ella es una disciplina de extraordinario valor formativo para el ser humano, su aprendizaje favorece la posibilidad de desarrollar valores, actitudes como la autoestima, flexibilidad del pensamiento, tolerancia hacia la incertidumbre y perseverancia.

A pesar de los muchos esfuerzos, que se hacen por mejorar el aprendizaje de las matemáticas en República Dominicana, los autores de esta investigación, mediante la observación participativa, entrevistas y aplicación de pruebas diagnósticas han detectado que aún existen problemáticas que atentan contra la mejora de los resultados, como son:

- La falta de correspondencia existente en algunos casos, entre la bibliografía utilizada y los contenidos temáticos del grado contemplados en el diseño curricular.
- La inexistencia de orientaciones metodológicas para realizar una evaluación adecuada.
- La poca creatividad desarrollada en los estudiantes, que los hace más reproductivos que productivos.

Además de esto y a pesar de que las actitudes que deben desarrollar y poseer los estudiantes están establecidas en los objetivos, no se contempla en ellos la forma en que cada competencia debe ser evaluada. Como puede observarse para incidir en la mejora del aprendizaje de la enseñanza de la matemática se debe abordar desde diferentes puntos de vistas. El que se asume en esta investigación está relacionado con las estrategias de enseñanza aprendizaje.

En el Colegio APEC “Minetta Roques” (COLAPEC) de la Universidad APEC de la República Dominicana, en tercero de bachillerato del Nivel Medio, se ha podido constatar la problemática de que: existe un alto porcentaje de reprobados cada período, los alumnos no logran apropiarse de los conceptos que involucran el tema de las funciones y por tanto tampoco logran el desarrollo de las habilidades establecidas en la propuesta curricular vigente, además, no son capaces de interpretar el significado las soluciones halladas en un problema específico.

Dentro estas habilidades, la vinculación de las funciones exponenciales y logarítmicas en la modelación de problemas de la vida diaria es la que más se dificulta lograr en los alumnos.

De acuerdo con lo expuesto anteriormente se puede decir que se aprecian deficiencias en la conceptualización, manipulación y resolución de problemas que involucran funciones en tercero de bachillerato del COLAPEC por lo que esta investigación asume como problema científico: las dificultades que tienen los alumnos, del Nivel Medio del COLAPEC, en el aprendizaje del tema de las Funciones y por ende los bajos resultados académicos que se obtienen.

En este trabajo se hace una propuesta didáctica que tenga en cuenta la utilización de estrategias metacognitivas y el uso del Derive para la enseñanza del tema Funciones. Las bases teóricas de la propuesta didáctica se sustentan fundamentalmente en la zona de desarrollo próximo (Vigotsky, L S. 1979), en el aprendizaje desarrollador (Zilberstein, J. 2001) y en la metacognición (Labarrere, A. 1994), (Jiménez, M. 2000).

El trabajo se estructura de la siguiente forma: En la primera sección se hace un estudio gnoseológico contextual del problema, el objeto y campo de acción de la investigación, es decir el proceso enseñanza aprendizaje de la matemática, en el Nivel Medio de COLAPEC y las estrategias metacognitivas en el proceso de enseñanza-aprendizaje de la matemática sustentadas en el uso del Derive. En la segunda sección se dan los fundamentos teóricos que sustentan la propuesta. En la tercera sección se hace la propuesta didáctica para la enseñanza del tema de las funciones en el Nivel Medio, se ejemplifica en el tema de Funciones Logarítmicas y se caracterizan las exigencias didácticas para la colección de ejercicios, en la cuarta sección se muestran los resultados de la valoración de especialistas y profesores sobre la propuesta didáctica.

2. Problema de Investigación

Actualmente la Universidad APEC (UNAPEC) tiene una constante preocupación por resolver los problemas en el aprendizaje de las Matemáticas, a través del Proyecto de Mejoría de la su enseñanza que ejecuta esta Institución Universitaria.

Prestigiosos investigadores de la Matemática Educativa, apuntan sobre las principales dificultades que se manifiestan en los alumnos, ellas son:

- Tendencia a reproducir contenidos y a no razonar sus respuestas (Zilberstein, J. 2001[a])
- En el tránsito por los grados, tienen limitaciones en la generalización y aplicación de los contenidos (Zilberstein, J. 2004[a]).
- Muy pocos elaboran preguntas, argumentan y valoran; es limitada la búsqueda de procedimientos para aprender y planificar sus acciones (Zilberstein, J. 2001[a]).
- No se percatan de los errores que cometen.
- Poseen pocas posibilidades para la reflexión crítica y autocrítica de lo que aprende, lo que provoca una limitada inclusión consciente en su aprendizaje (Zilberstein, J. 2004[a]).
- No asocian cuáles son los contenidos a utilizar para resolver un problema geométrico determinado, olvidando con rapidez los contenidos que se consideraban vencidos de un grado a otro y más aún de un nivel a otro, hasta llegar a las aulas universitarias (García, R. 2003).

Estas deficiencias están estrechamente ligadas a problemas de *independencia* y a la *solidez de los conocimientos*, así como a un uso limitado *de estrategias para "aprender a aprender*", lo que indica la necesidad de trabajar por favorecerlas.

La Matemática ocupa un lugar de privilegio en los programas escolares, está presente en todos los currículos de la Enseñanza General en República Dominicana, influye en el desarrollo integral de los jóvenes, constituye un medio de comprensión y mejoramiento del mundo científico, industrial y tecnológico de estos momentos.

La preocupación por elevar la calidad de su enseñanza, (la que es considerada una tarea difícil (de Guzmán, M. 1993, Ortega, Tomás y Blázquez, Sonsoles 2003), es una ocupación constante en todas las latitudes (Araya, R, 2002), Díaz, A., y otros, 2002) , (Olivares, D., 2001).

En diagnóstico realizado en el Colegio APEC Minetta Roques de la UNAPEC, los resultados no son nada alentadores, donde en muchos casos los alumnos, a pesar de dominar relativamente diversos contenidos, tienen serias dificultades cuando tratan de integrar los mismos, carecen de la habilidad de buscar recursos para la modelación y/o simplificación esquemática del problema matemático enfrentado, no utilizan estrategias para planificar, organizar, evaluar su propio aprendizaje, lo que repercute en el aprendizaje de temas medulares como el tema de funciones.

Con este diagnóstico se identificó que los alumnos no logran relacionar gráficos con propiedades y funciones, y éstos a la resolución de problemas vinculados al contexto histórico en que se desarrollan los estudiantes, sin embargo la experiencia de este autor y la opinión de más del 70 % de los docentes encuestados coincide en que la gran mayoría de los escolares no dominan los gráficos de las funciones elementales, que no pueden realizar el trazado del gráfico de una función y que justifica el hecho de que en las tareas que se les encomiendan existen dificultades cuando tratan de representarlas o de analizar sus propiedades, a pesar de que estos contenidos son abordados en función del desarrollo de estas habilidades en el Colegio APEC Minetta Roques.

Este análisis se complementa con los resultados que obtienen los estudiantes en los exámenes, donde la acumulación de insuficiencias en el resultado del aprendizaje, se incrementan de grado en grado y se manifiesta en el limitado desempeño de los alumnos en la asimilación y uso de los conocimientos, los que en general no rebasan el plano reproductivo. Por lo que este autor propone utilizar estrategias de enseñanza para solventar esta situación, logrando la aplicación de ellos a la resolución de problemas.

Por otro lado, en República Dominicana, las TIC ayudan al enriquecimiento científico de la sociedad y los docentes tienen entonces, la misión de integrar estos avances al proceso de enseñanza-aprendizaje, pero muchos de los software existentes limitan la búsqueda de procedimientos para aprender y planificar las acciones a realizar por el estudiante, un alto porciento busca la respuesta final, sin precisar los errores y ofrecen pocas posibilidades para la reflexión crítica y autocrítica de lo aprendido, lo cual provoca una limitada inclusión consciente en el aprendizaje, por lo que se exige del maestro utilizar metodologías que tenga en cuenta la utilización de estrategias para el uso del Derive de forma tal que se favorezca el aprendizaje de los contenidos en los estudiantes, del Nivel Medio de COLAPEC.

Así, es tarea de los docentes perfeccionar el aprendizaje de la Matemática para lo que se necesita introducir nuevos cambios a través de mecanismos, instrumentos y estrategias que puedan promoverlos, favorecerlos e inducirlos.

Por lo que se hace necesario introducir estrategias de enseñanza en el proceso de enseñanza-aprendizaje de la Matemática, con la utilización de medios de cómputo, para que el estudiante "aprenda a aprender", favoreciendo su aprendizaje.

3. Fundamentos teóricos que sustentan la propuesta.

El trabajo con las *estrategias de enseñanza* propicia el cambio, pasar del estado actual a otro deseado, permite por tanto al docente valorar las potencialidades de cada uno de sus estudiantes diagnosticando que orientación deberá recibir en cada momento, lo que guarda relación directa con el concepto de Zona de Desarrollo Próximo, con el que Vigotsky critica las posiciones psicológicas tradicionales que se centraban en la medición del nivel alcanzado por el estudiante para enjuiciar la efectividad del aprendizaje, destacando la necesidad de valorar las potencialidades de cada alumno para la actividad cognoscitiva dependiente de la colaboración, más que a lo que ya logra realizar independientemente. (Torres, P. 1999).

En la **teoría de L S. Vigotsky** (1979) el desarrollo mental de cada individuo se manifiesta en dos niveles: el nivel evolutivo real, que se establece como resultado de los ciclos evolutivos llevados a cabo definiendo los productos finales del desarrollo, las funciones que ya han madurado en el individuo; y el nivel de desarrollo potencial, determinado por las acciones que realiza bajo la guía de un adulto o con la ayuda de otro compañero más capaz. La diferencia entre estos dos niveles es lo que denominó zona de desarrollo próximo la cual "no es otra cosa que la distancia entre el nivel real de desarrollo, determinado por la capacidad de resolver independientemente un problema, y el nivel de desarrollo potencial, determinado a través de la resolución de un problema bajo la guía de un adulto o en colaboración con otro compañero más capaz" (Vigotsky. L. 1979). A nuestro juicio el trabajo con las estrategias permitirá guiar al estudiante hasta que llegue a ser capaz de solucionar la tarea por sí solo, intensificando su estudio independiente.

El paso del desarrollo real al potencial se favorece por el intercambio entre el estudiante y el docente u otros alumnos, con la negociación de saberes, con el empleo y solución de contradicciones que generen desarrollo. Este concepto constituye un reto para todos los educadores, los que con la utilización de *estrategias* en correspondencia con las características individuales de los escolares, potenciarán la misma.

Un aprendizaje desarrollador, es personalizado, integrando las funciones instructiva, educativa y desarrolladora. (Zilberstein, J. 2001), promoviendo un continuo ascenso en la calidad de lo que el alumno realiza, vinculado inexorablemente al desarrollo de su personalidad, en el que no puede ser ajeno la atención al grupo y a la individualidad, en un respeto a la diversidad. (Ginoris, O.; 2001), y la propuesta didáctica que se elabora, tiene presente estos supuestos. L. S. Vigotsky, reconocía que una educación desarrolladora es aquella que conduce al desarrollo, que va delante del mismo -guiando, orientando, simulando- que tiene en cuenta el desarrollo actual para ampliar continuamente los límites de la zona de desarrollo próximo o potencial, y por lo tanto, los progresivos niveles de desarrollo del sujeto (Vigotsky. L. 1979).

Un proceso así, incluye la *metacognición* lo que implica el conocimiento sobre el propio funcionamiento psicológico, en este caso, sobre el aprendizaje, ser conscientes de lo que se está haciendo, de tal manera, que se controlen los propios procesos mentales. Labarrere, plantea al referirse a ella que “por común hace alusión a un tipo particular de proceso que tiene lugar en la actividad cognoscitiva que posee como característica principal la de ejercer una función reguladora” (Labarrere, A. 1994). Para Jiménez este tipo de estrategias es necesaria para “desarrollar también la reflexión y autorregulación en los estudiantes” (Jiménez, M. 2000), por lo que deben ser introducidas en la fijación del conocimiento y el desarrollo de las habilidades..

El concepto de metacognición fue desarrollado por J. H. Flavell a partir de una serie de trabajos sobre diferentes aspectos de la memoria, como fruto de una investigación realizada en 1970 (Flavell, J. 1976). En 1976, este autor trabaja sobre los aspectos metacognitivos en la resolución de problemas, y la definición dada fue tomada como punto de partida por muchos investigadores, considerando que en la *metacognición* se hace referencia, al monitoreo activo y la consecuente regulación y orquestación de los procesos cognitivos en función de una meta concreta u objetivo. A nuestro juicio se ponen de manifiesto dos momentos: el nivel del conocimiento acerca del propio conocimiento, el conocimiento y conciencia que el sujeto tiene de las estrategias utilizadas, de los lados fuertes y débiles de su ejecución, preferencias o tendencias a un determinado estilo o modalidad de procesamiento, y de sus posibilidades intelectuales, así como el grado de conciencia acerca de la tarea que realiza, sus condiciones, prerrequisitos, exigencias y los obstáculos involucrados, es decir se reflexiona sobre los propios procesos o se desarrollan metaconocimientos y el proceso de chequeo, monitoreo y control, lo que implica, según (Castellanos, D. 1999) el desarrollo de las habilidades y estrategias para regular el proceso de aprendizaje y de solución de tareas.

Para Ortiz la metacognición está vinculada a la autorregulación de la persona y la regulación ejercida por otros en el propio acto de aprender (Ortiz, E. 2001). Esta posición hace que aún cuando en la literatura se reconoce como *estrategias de aprendizaje: las metacognitivas,* que se asuma que el docente debe utilizarlas dentro de las estrategias de enseñanza, para potenciar la metacognición, al utilizar recursos de aprendizaje para los procesos de chequeo, monitoreo y control, que conduzcan al alumno a saber qué es lo que sabe sobre sus propios procesos cognitivos, en función de las metas o fines que se proponga, por lo que proponer ejercicios para estos fines debe constituir un requerimiento a tener en cuenta en el trabajo con las estrategias y en el propio proceso de enseñanza-aprendizaje de la matemática.

De esta forma el docente al hacer a los estudiantes reflexionar sobre la propia estrategia utilizada por él, incidirá en el aprendizaje de la misma por el alumno, el que después podrá aplicarla por si solo.

Por tanto el alumnado deberá tener un cierto conocimiento sobre sus propios procesos de aprendizaje. La vía fundamental para la adquisición de ese metaconocimiento será la reflexión sobre su propia práctica escolar, qué recursos y procedimientos de la actividad intelectual ejecuta, qué condiciones y exigencias cumple o debe cumplir para lograrlo, lo cual debe ser enseñado por el docente al utilizar sus estrategias. “La condición metacognitiva de un aprendizaje desarrollador implica el dominio del objetivo perseguido, la determinación de estrategias para alcanzarlo, las fortalezas y las debilidades que a cada uno acompañan.”(Ginoris, O., 2002), por lo que este autor coincide con Hernández Hechavarría en que las estrategias de enseñanza, desde el Enfoque Histórico Cultural, posición teórica que matiza la propuesta didáctica, son mediadores externos que se modelan en el decursar de las interacciones entre los que aprenden y los que enseñan (Hernández, D. 2001).

De acuerdo a lo planteado por en la metodología para la utilización de estrategias de enseñanza en la Matemática I de las carreras de Ciencias Técnicas (Tarifa, L. 2005), el docente al hacer uso de las estrategias de enseñanza, de forma reiterativa, con una ejercitación variada de las mismas, al emplear la modelación de cada una de ellas, facilitando al estudiante el conjunto de acciones para cada una de ellas, reflexionando sobre su importancia en el trabajo futuro, evaluando los efectos que ella produjo en la resolución de determinado problema, en el aprendizaje de los contenidos, estará incidiendo en que las estrategias utilizadas para la enseñanza se conviertan en estrategias de aprendizaje.

Para el autor de esta investigación este proceso debe ser **desarrollador**, asumiendo el mismo como: “aquel que constituye un sistema donde tanto la enseñanza como el aprendizaje, como subsistemas, se basan en una educación desarrolladora, lo que implica una comunicación y actividad intencionales, cuyo accionar didáctico genera estrategias de aprendizajes para el desarrollo de una personalidad integral y autodeterminada del educando, en los marcos de la escuela como institución social transmisora de la cultura” (González, A, Recarey, S., Addine, F. 2002), “constituye la vía mediatizadora esencial para la apropiación de conocimientos, habilidades, hábitos, normas de relación, de comportamiento y valores, legados por la humanidad, que se expresan en el contenido de enseñanza, en estrecho vínculo con el resto de las actividades docentes y extradocentes que realizan los estudiantes” (Silvestre, M., Zilberstein, J. 2002).

Para alcanzar los objetivos de la asignatura Matemática en los diferentes planes de estudio se exige que se aumente progresivamente *la independencia de los estudiantes* en la realización de las tareas y que se desarrollen sus capacidades creadoras, (Almeida, B, J. 2001[a]), es necesario entonces, la selección de procedimientos que propicien un nivel de asimilación productivo y la adecuada dirección de la actividad de los estudiantes en la adquisición de los conocimientos, así como las acciones que han de realizar, lo que está en correspondencia directa con el proceso de enseñanza-aprendizaje desarrollador que se defiende. Cada alumno tiene un ritmo de aprendizaje y esto requiere una atención del docente para ofrecer una orientación especial a los que lo requieran (Ortega, T., Blázquez, S. 2003).

4. Propuesta didáctica para la enseñanza del tema funciones en el Nivel Medio

Las etapas que componen la propuesta son:

Etapa 1

Análisis y determinación de las formas de introducción y conceptualización del contenido para mantener la atención y motivación de los estudiantes, mediante la utilización de estrategias de enseñanza. Las estrategias serían: utilizar las TIC´s como medidores del proceso de enseñanza (Derive, Encarta, Internet) y precisar el sistema de acciones para resolver ejercicios y problemas que se modelan mediante ecuaciones logarítmicas y exponenciales.

Etapa 2

Utilización de estrategias que desarrollen la metacognición.

Etapa 3

Elaboración de una colección de ejercicios sobre los contenidos matemáticos, que propicien la ejercitación, modelación, lenguaje matemático adecuado, reflexión y la argumentación.

A continuación se presenta la ejemplificación de las etapas de la propuesta didáctica en el tema de Funciones Logarítmicas.

Etapa 1

Se parte de precisar las habilidades que se deben lograr en los temas donde se aborda este contenido, ellas son: explicar las propiedades de la función exponencial mediante un análisis de su gráfica, relacionar las propiedades algebraicas de la función exponencial, explicar el proceso infinito que conduce al número *e,* graficar funciones que contienen exponenciales a partir de las operaciones básicas con las gráficas de funciones, interpretar y aplicar el concepto de función logarítmica como inversa de la exponencial, trazar la gráfica de una función logarítmica con base mayor o menor que 1 y, a partir de ella, enunciar las características de la función, describir las propiedades de los logaritmos, expresar los conceptos de logaritmos comunes y logaritmos naturales y su relación con las exponenciales correspondientes y resolver ecuaciones exponenciales y logarítmicas.

Para la introducción y conceptualización del contenido se debe explicar que las funciones exponenciales se evalúan muy fácilmente para valores enteros de *x,* para valores racionales, utilizando algunos artificios algebraicos, para valores irracionales, hallar su valor es muy difícil y se necesita recurrir a tablas, calculadoras y asistentes matemáticos. Se propone, además, que a partir de la definición se realice conjuntamente con los estudiantes los siguientes ejemplos.

Ejemplo 1

Consideremos la función exponencial de base 2 siguiente: $f(x)=2^x$. Hallemos: $f(5); f(-3); f(2/3)$

Solución:

$$f(5)=(2)^5=(2).(2).(2).(2).(2)=32$$

$$f(-3)=2^{-3}\frac{1}{2^3}=\frac{1}{8}=0{,}125$$

$$f(2/3)=2^{2/3}=(2^2)^{1/3}=4^{1/3}=\sqrt[3]{4}=1{,}587401051$$

Construir una tabla de la función anterior para valores enteros de x entre –5 y 5, graficar el resultado obtenido.

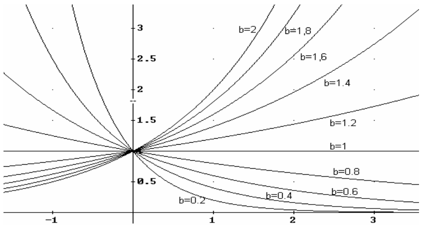
Solución:

Utilizando Derive basta con la instrucción VECTOR([x, 2^x], x, -5 ,5, 1), la cual forma pares del tipo [x, 2x] para valores de x entre –5 y 5 con incrementos de 1. A continuación se muestra una tabla construida para valores enteros de x entre –5 y 5 y se muestran en una gráfica los puntos correspondientes:

Ejemplo 2

Para la exponencial $f(x)=\left(\frac{1}{2}\right)^x$ mostrar su tabla y su gráfica y hacer notar que, cuando la base es mayor que 1, la función exponencial es creciente, y si es menor que 1 la función es decreciente.
Se debe mostrar, a través de la siguiente gráfica, el comportamiento de la función exponencial cuando se toman diferentes bases.

Tomaremos las bases 0,2; 0,4; 0,6; 0,8; 1; 1,2; 1,4; 1,6; 1,8 y 2 y graficaremos utilizando Derive todas las funciones. Para generar las expresiones utilizamos el comando:
VECTOR(b^x,b,0.2,2,0.2): b varía de 0.2 hasta 2 con incremento 0.2



Del análisis realizado con los ejemplos se concluye con las propiedades de la función exponencial, de manera que los estudiantes puedan describirlas.

Se sugiere utilizar un póster con las propiedades algebraicas de la función exponencial, las cuales ya han sido objeto de estudio en cursos anteriores y se deben incluir aquí a modo de recuerdo. Se supone siempre que las bases *a* y *b* son ambas positivas y diferentes de 1.

Se sugiere tratar las aplicaciones de la función exponencial, pues ellas aparecen ligada a múltiples e importantes problemas. Algunos de ellos son:

- El crecimiento de una población de animales (incluso, hombres) cuando los recursos de subsistencia son ilimitados.
- La desintegración de materiales radiactivos.
- El enfriamiento o calentamiento de un cuerpo debido a su medio ambiente.

La razón de por qué esto sucede se verá en cursos posteriores, sobre todo en la Universidad cuando se estudien las ecuaciones diferenciales. Por el momento, es importante que el alumno pueda operar con estos modelos de manera adecuada.

El número e

Se sugiere que el maestro comente que este importante número está asociado a tantos problemas teóricos y aplicados que, después de la constante $\pi = 3{,}1415926...$, es el número más importante de toda la Matemática.

Debe quedar bien explicado que esta constante fue descubierta por el matemático alemán Leibniz en 1690 (que la llamó b) y fue llamada *e* por Euler 37 años más tarde. Euler descubrió interesantes propiedades de este número y por eso muchos lo llaman, erróneamente, constante de Euler. La constante de Euler es otro número importante que se verá en la Universidad.

El número *e* esta vinculado a la función $\left(1+\frac{1}{m}\right)^m$ cuando *m* toma valores muy grandes. Hacer notar que cuando *m* es muy grande, la base de la potencia se hace muy próxima a 1 pero a su vez el exponente crece, de modo que es difícil predecir qué sucede.

Esto debe verse experimentalmente construyendo una tabla de dicha función para valores de *m*, cada vez más grandes, a través del Derive para ahorrar los cálculos.

Usar el comando: VECTOR([m,(1+1/m)^m],m,10,100,10)

Hacer notar a los estudiantes que en la tabla de dicha función se observa que la función se acerca cada vez más a un valor fijo. Desde el siglo XVII se probó que este valor fijo es, con 15 cifras exactas: 2,718281828459045..., y a ese número se le designó con la letra *e* inicial de la palabra "exponencial".

Se debe explicar que: el número *e* aparece en múltiples cuestiones teóricas y prácticas, pero que se va a emplear, en particular, como base de una función exponencial, la función: $f(x) = e^x$.

De todas las funciones exponenciales, la de base *e* es la más importante. Las razones se comprenderán en Cálculo Infinitesimal en la Universidad. Por esta razón, cuando las personas se refieren a la función exponencial, sin indicar la base, se sobreentiende que es la exponencial de base *e*. Como *e* es mayor que 1, su gráfica es creciente y presenta todas las características ya vistas para las funciones exponenciales. A continuación se deberá mostrar la grafica construida en Derive.

Debatir conjuntamente con los alumnos que, como se observa, es una función que crece con gran rapidez cuando *x* toma valores positivos y también decrece con gran rapidez a medida que *x* va tomando valores negativos alejados del origen.

Esta función aparece en todas las calculadoras científicas y en todos los lenguajes de programación, casi siempre designada como $exp(x)$ y también está tabulada desde hace siglos con gran precisión. Por esa causa, es usual que las demás exponenciales se expresen en términos de e^x lo cual, veremos ahora, siempre es posible.

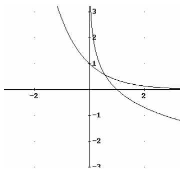
A continuación se sugiere la discusión de cómo expresar b^x en términos de e^x. Observando la grafica de e^x se debe hacer notar que esta función toma todos los valores reales positivos y que como hemos supuesto que *b* > 0, siempre existirá un número, llamado *k* tal que $e^x = b$.

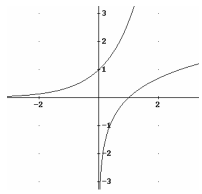
Hacer notar que: si *b* > 1, entonces *k* es positivo y si b < 1, entonces k es negativo, entonces la función b^x la podemos escribir: $b^x = (e^k)^x = e^{k.x}$, precisando que en la práctica raras veces se emplean otras exponenciales que no sea la de base *e*. Para la conceptualización de la función logarítmica se debe partir de su definición

<u>Definición</u>: Sea b un número positivo y diferente de 1. La función $\log_b x$ se define como la función inversa de b^x, es decir: $y = \log_b x$ equivale a $x = b^y$.

Debatir que esto quiere decir que: "El logaritmo en base *b* del número *x* es el exponente al que hay que elevar a *b* para obtener *x*".

De la definición debe deducirse que *x* solo podrá tomar valores positivos ya que b^y siempre es mayor que cero, el rango se verá más fácilmente al analizar la gráfica de la función y que como las funciones exponencial y logaritmo de base *b* son inversas, sus gráficas deben ser simétricas una a otra respecto a la bisectriz del primer cuadrante. La gráfica va a depender de si la base b es menor o mayor que 1. Discutir ambos casos:





Debe resumirse que la función logarítmica con base b > 1 posee las siguientes propiedades:

- Está definida para x > 0, es decir, su dominio es R^{+},
- Toma el valor 0 para x = 1,
- Es una función creciente que toma valores negativos para 0 < x < 1 y positivos para x > 1,
- Crece rápidamente para las x <1 y muy lentamente para x > 1,
- Su rango son todos los números reales,
- La función es continua en todo su dominio.

Para las propiedades algebraicas de los logaritmos, debe explicarse y obtener conjuntamente con los estudiantes como consecuencia inmediata de propiedades análogas de las exponenciales y demostrarse de esa forma.

Se debe comentar a los estudiantes someramente las razones de estas propiedades sin entrar en una demostración detallada.

A partir de una gráfica hacer que los alumnos detecten que:

- Debido a que tanto 10 como e son números mayores que 1, el comportamiento de ambas funciones es similar.
- La gráfica de $\log x$ crece más lentamente que la de $\ln x$ porque 10 > e.
- Destacar que la gráfica de $\log x$ pasa por (10, 1) y la de $\ln x$ pasa por (e, 1)

Ejemplos:

Construya la gráfica de las siguientes funciones tomando en cuenta las operaciones básicas que se han realizado sobre la función original $y = \ln x$

1. $y = 2.\ln x + 2$ 2. $y = 4.\ln(x-3)$

Solución:

Se han realizado en la primera función las siguientes operaciones:

- Multiplicar la función original por 2: Lo cual duplica cada ordenada y equivale a estirar la gráfica al doble de su tamaño en el sentido vertical.
- Sumar 2: Que equivale a elevar la gráfica 2 unidades en el sentido vertical.

Utilizando el derive, mostrar a los estudiantes lo que sucede con la función original y las que resultan después de cada transformación. Sobre las aplicaciones del logaritmo, se debe destacar que en algunas situaciones reales, existen magnitudes que varían dentro de una escala tan grande que resulta muy difícil medirlas con una escala normal. Un par de ejemplos son la intensidad de los sonidos y la energía que desarrolla un sismo.

Por último se sugiere hacer las siguientes preguntas de comprobación:

- ¿Es cierto que $b^x + a^x = (a+b)^x$?,
- ¿Es cierto que $(a.b)^x = a^x.b^x$?,
- ¿Es cierto que $b^x + b^y = b^{x.y}$?,
- ¿Cómo se define el número e?,
- ¿Por qué los lenguajes de programación solo contienen la función exponencial de base e?,
- ¿Cómo se define la función logaritmo de base b?,
- Teniendo en cuenta su gráfica, mencione cuatro características importantes de la función logarítmica,
- ¿Cuáles son los dos sistemas logaritmos más importantes?

Etapa 2

Utilización de estrategias que desarrollen la metacognición. La fijación juega un papel importante para el logro de la solidez por lo que se propone la utilización de una colección de ejercicios y problemas en los que el estudiante necesite reflexionar sobre lo aprendido, con su profesor, con otros estudiantes o consigo mismo, y regular su forma de proceder. La utilización entonces, de estrategias que involucren estos procesos está relacionada con la metacognición y para ello se asume en esta investigación la diseñada por Jiménez, M (2000). Estas estrategias están dirigidas a:

- Elaborar preguntas acerca del contenido de estudio.
- Identificar, caracterizar y definir lo que se estudia.
- Comparar, estableciendo semejanzas y diferencias.
- Clasificar objetos, fenómenos o procesos.
- Plantear ejemplos.
- Valorar lo que se estudia.
- Interpretar el contenido de una ilustración, un esquema, o un modelo presentado.
- Evaluar.

Etapa 3

Elaboración de una colección de ejercicios sobre los contenidos matemáticos, que propicien la ejercitación, modelación, lenguaje matemático adecuado, reflexión y la argumentación

La colección está dirigida a lograr que el alumno pueda: definir el concepto de función exponencial, deducir la forma de la gráfica de las funciones exponenciales mediante su evaluación para valores enteros de la variable, explicar las propiedades de la función exponencial mediante un análisis de su gráfica, relacionar las propiedades algebraicas de la función exponencial, aplicar las leyes de los exponentes al trabajo con funciones exponenciales, modelar problemas sencillos de crecimiento y decrecimiento exponencial, explicar el proceso infinito que conduce al número *e*, graficar funciones que contienen exponenciales a partir de las operaciones básicas con las gráficas de funciones, explicar por qué todas las exponenciales se pueden escribir mediante la exponencial de base *e*, definir el concepto de función logarítmica como inversa de la exponencial, trazar la gráfica de una función logarítmica con base mayor o menor que 1 y, a partir de ella, enunciar las características de la función, escribir expresiones que contienen logaritmos en términos de exponenciales y viceversa, describir las propiedades de los logaritmos, utilizar las propiedades de los logaritmos para la transformación de expresiones.

Definir los conceptos de logaritmos comunes y logaritmos naturales y su relación con las exponenciales correspondientes, Trazar gráficas de funciones que contienen logaritmos a través de las transformaciones básicas con las gráficas de las funciones, Utilizar los logaritmos en la modelación de problemas.

Se debe partir de la discusión de las siguientes preguntas:

- ¿Cómo es una función exponencial?
- ¿Qué características posee la gráfica de una función exponencial en dependencia del valor de la base?
- ¿Por qué los lenguajes de programación solo contienen la función exponencial de base *e*?
- ¿Cómo se define la función logaritmo de base b?
- Es cierto que el logaritmo de una suma es el producto de los logaritmos?
- ¿A qué es igual el logaritmo de una potencia?
- Si el logaritmo en base b de 3 es 1 ¿Cuánto vale b?
- ¿Cómo es la gráfica de la función $y = \ln|x|$? ¿y la de $y = |\ln x|$?

Exigencias didácticas de colección de ejercicios:

Los ejercicios propuestos deben ser concebido de forma que propicien la ejercitación, modelación, lenguaje matemático adecuado, reflexión y la argumentación.

- **La Ejercitación:** Como una de las formas de consolidación o fijación, su objetivo fundamental en la matemática, es contribuir al desarrollo de habilidades y hábitos en los estudiantes y en el centro de su estructuración se encuentran los ejercicios (Bernaveu, M y Quintana, A., 2004), los cuales deben ser variados, sin una repetición mecánica, pero con una ejercitación suficiente para cada una de ellas, téngase en cuenta que a partir de la utilización consciente de los pasos para enfrentar con éxito las tareas y del algoritmo de solución, que se utilice, depende que la estrategia de enseñanza permita al estudiante “aprender a aprender”, ahora pasarán éstas a ser **estrategias para su aprendizaje** y las volverá a necesitar en la realización de otras actividades, las generalizará a otros contextos, por lo que se pone de manifiesto el **carácter activo** de los procesos psíquicos; el alumno no sólo **reflexiona** sobre su proceder o domina los contenidos que debe aplicar, sino que realiza actividades para lo que recurre a determinadas estrategias.
- **La Modelación:** En la solución a cada ejercicio, por parte del profesor y que podrá ser consultada por el estudiante si lo necesita para resolverlo o para **reflexionar** sobre la práctica de su proceder por lo que se deberán explicitar todos los pasos para la realización con éxito de la misma, de forma tal que sirva de modelo al estudiante al enfrentar otras situaciones, y esta se convierta entonces en una **estrategia de aprendizaje** para él; así el procedimiento de solución ofrecido por el

docente actúa como un **mediador** entre las estrategias de enseñanza y las de aprendizaje, al hacerlos conscientes de cómo deben ser utilizadas.

- **La utilización del lenguaje matemático adecuado:** La matemática es un medio de comunicación. Permite resolver los más disímiles problemas de la realidad a través de la abstracción a determinados modelos. La utilización del lenguaje adecuado en cada caso posibilita al estudiante, interactuar con determinados objetos o fenómenos de la realidad. En la comunicación matemática, se determinan situaciones claras, unívocas, que para todos y en todas las circunstancias significan lo mismo, con conexiones lógicas precisas. En las estrategias que se diseñen se deberá habituar al alumno a expresar correctamente en el lenguaje de la matemática, la realidad presente en los problemas planteados, y una vez solucionado el mismo **interpretar** el significado de los resultados obtenidos en la realidad.
- **La reflexión:** Tener en cuenta que no debe utilizarse solo una práctica repetitiva con una ejercitación variada, sino que además el estudiante debe tener la oportunidad de reflexionar sobre sus metas, por qué realiza determinada actividad, qué propósitos persigue y que por tanto el estudiante abandonará el reforzamiento del aprendizaje de determinados contenidos matemáticos, cuando los motivos que incidieron, hayan dejado de existir o hayan cumplido sus fines, lo que se corresponde con el carácter consciente de los procesos psíquicos que propugna el Enfoque Histórico Cultural, como se apuntó en los fundamentos teóricos. De igual forma el alumno tendrá la posibilidad en cada ejercicio de reflexionar sobre su propia estrategia de solución, la podrá comparar con la utilizada por el docente, corrigiendo los posibles errores cometidos. En esto debe tenerse presente el control del **tiempo** en la resolución de los ejercicios, por lo que el estudiante estará consciente de ello y podrá autorregularse, reflexionando sobre qué estrategias deberá utilizar para disminuirlo, si fuera necesario.
- **La argumentación:** Esto permitirá expresar el razonamiento empleado para demostrar una proposición, para convencer a los demás de lo que se afirma o se niega, estableciendo para ello semejanzas y diferencias entre el hecho propuesto y lo que se concluye. De esta forma con la utilización de la argumentación el docente podrá evaluar si la orientación efectuada en cada actividad, fue la correcta, si los estudiantes se sienten motivados por su realización, si son capaces de valorar su proceder adecuadamente y poder elaborar las acciones para corregir las deficiencias que se detecten, perfeccionar la estrategia y evaluar en qué medida el estudiante ha interiorizado el empleo de una determinada estrategia.

5. Valoración de especialistas y profesores sobre la propuesta didáctica.

La propuesta metodológica antes expuesta nos permite introducir una propuesta didáctica que tenga en cuenta la utilización de estrategias metacognitivas y el uso del Derive para la enseñanza del tema de Funciones, de forma tal que se favorezca el aprendizaje de los contenidos en los estudiantes, del Nivel Medio de COLAPEC.

Se seleccionó un grupo de profesores y especialistas a los cuales se les solicitó la valoración de esta propuesta, los resultados obtenidos muestran alto grado de aceptación.

Gran aceptación tuvo por los maestros las exigencias didácticas para los ejercicios: la ejercitación, la modelación, la utilización del lenguaje matemático adecuado, la reflexión y la argumentación.

6. Conclusiones

En la República Dominicana, a pesar de que se han hecho grandes esfuerzos por mejorar la educación existente, las políticas educativas que se han seguido no han sido lo suficientemente efectivas como para ponernos al nivel de los avances que requiere desarrollo socioeconómico y político actual.

El mejoramiento de la educación y la búsqueda de vías que faciliten la enseñanza son retos que tenemos que asumir para poder lograr nuestro objetivo: la formación de seres concientes, capaces y creativos que puedan hacer frente con certeza y determinación a las problemáticas que se presenten.

El valor de los conceptos matemáticos en la formación de un estudiante es una realidad que no se puede poner en dudas por la utilidad, la importancia y el valor cultural del conocimiento de esta asignatura para la comprensión del mundo físico, económico, social y tecnológico, así como también para el desarrollo de valores y actitudes.

Después de todas las investigaciones realizadas en el trabajo explicado anteriormente podemos emitir corroboraciones e inferencias:

1. El empleo de las Tic´s en el proceso enseñanza-aprendizaje, ha evidenciado la necesidad de transformar el trabajo metodológico actual en uno que incorpore el uso de las computadoras para la compresión por parte de los estudiantes de los contenidos que reciben en las diferentes asignaturas.
2. Resultados de estudios diagnósticos han puesto en evidencia que los estudiantes del Nivel Medio presentan insuficiencias en la asimilación de los conceptos que se les imparte.

A través de las estrategias propuestas el estudiante, con la ayuda del uso de las computadoras, puede apropiarse de los conceptos en una forma que le resulta más atractiva y menos laboriosa, y a la vez se propicia la ejercitación, modelación, lenguaje matemático adecuado, la reflexión y la argumentación.

La propuesta metodológica ha contado con la valoración positiva de los involucrados en el proceso, dígase, estudiantes y profesores especialistas en la materia objeto de estudio, quienes reconocen en la metodología, una vía adecuada para la asimilación de concepto a través del uso de las computadoras.

Bibliografia

Almeida, B. Borges, J., (2001[a].) El trabajo con la tarea para el estudio individual en la clase de Matemática. Memorias COMAT 2001. ISBN 959-160098-4.

Araya, R. (2002). ¿Qué significa comprender una idea Matemática? Informe presentado de los resultados del Proyecto Fondef D99I1049 de la Universidad de Chile.

Bernaveu, M y Quintana, A., (2004). Dirección del proceso del aprendizaje de las asignaturas priorizadas. Matemática. En: Seminario nacional para educadores, Noviembre de 2004.

Castellanos, D. (1999). Centro De Estudios Educacionales. Investigación: El Cambio Educativo En La Secundaria Básica: Grupo De Aprendizaje: Aprendizaje Desarrollador: Dimensiones, Sub-Dimensiones e Indicadores.

De Guzmán, M, (1993). Enseñanza de las ciencias y la Matemática. Organización de Estados Iberoamericanos para la Educación, la Ciencia y la Cultura. Editorial Popular. ISBN: 84-7884-092-3

Díaz Barriga, A. (2002). Hacia las aplicaciones de la Matemática en la escuela media superior de México. Universidad Autónoma de Querétaro. México. Año2. N°4. Xixim. En: [http://www.uaq.mx/matematicas/red m]

Flavell, J. (1976). Metacognitive Aspects of Problem Solving. In: Resnick, Lauren B. . (ed.): The Nature Of Intelligence. L. Erlbaum, NJ

Flavell, John H./ Friedrichs, Ann/ Hoyt, Jane. (1970). Developmental Changes in Memorization Processes. In: Cognitive Psychology, 1, 1970, 324-340.

Ginoris, Quesada, O. (2001). Didáctica desarrolladora: teoría y práctica de la escuela cubana. Curso Preevento No. 43. IPLAC. Pedagogía 2001. La Habana.

Ginoris, Quesada, O. (2002). Didáctica Desarrolladora; Teoría y Práctica de La Escuela Cubana, Conferencia impartida en Memorias del V evento Internacional de Enseñanza de la Matemática Instituto Superior Pedagógico. “Juan Marinello”. Diciembre, 2002 Matanzas.

González, A., Recarey, S. y Addine, F. (2002). “Capítulo 4: El proceso de enseñanza aprendizaje: un reto para el cambio educativo”, Aprender es crecer. La Habana. Cuba.

Hernández, D., Sánchez, A., Laguna, A. (2001). ¿Cómo organizar el proceso de enseñanza aprendizaje en la carrera de Economía utilizando estrategias didácticas? En:[http://www.monografias.com/trabajos13/artestrg/] Consultado el 20 de febrero de 2005.

Jiménez, M., (2002). Sistema de conocimientos geométricos que deben dominar los estudiantes de preuniversitario según el programa de matemática vigente. ISP “Enrique José Varona”. Documento Microsoft Word, abril, 2002.

Labarrere, A. (1994). Pensamiento. Análisis y Autorregulación de la actividad cognoscitiva de los alumnos. Ángeles Editores, México DF.

Lira Olivares, D. (2001). Enfoque integral para la enseñanza de la Matemática en Secundaria. Correo del Maestro Núm. 62.

Llivina, M., (1998). “Una Propuesta Metodológica para contribuir al desarrollo de la capacidad para resolver problemas matemáticos”. Tesis en opción al grado de Doctor en Ciencias Pedagógicas. La Habana. Cuba.

Ortega, T. (2003). Otras orientaciones de la licenciatura de matemáticas. Revista Electrónica Interuniversitaria de Formación del Profesorado, 4(2) ISSN 1575-0965. La Habana. Cuba.

Ortega, T.; Blázquez, S. (2003) Otras orientaciones de la licenciatura de matemáticas. Revista Electrónica Interuniversitaria de Formación del Profesorado, 4(2) ISSN 1575-0965.

Ortiz, Torres, E. (2001). El enfoque cognitivo del aprendizaje y la informática educativa en la Educación Superior. Congreso Internacional Online de Psicología Aplicada. Disponible en [http://www.psicologia-online.com/ciopa2001]. Consultado el 15 de febrero 2002.

Silvestre M y Zilberstein, J. (2002), ¿Cómo hacer más eficiente el aprendizaje?, Ediciones CEIDE, México.

Tarifa, L. (2005). Metodología para la utilización de estrategias de enseñanza en la Matemática I de las carreras de Ciencias Técnicas. Tesis de Doctorado. Matanzas. Cuba.

Torres, P. (1999). La Matemática Educativa, Vigotsky, y la manipulada ZDP ISPEJV, Cuba. Documento WORD.

Vigotsky, L. S. (1979). El desarrollo de los procesos psíquicos superiores. Barcelona. Edición crítica.

Zilberstein, J (2001ª.) Hacia una enseñanza de las ciencias en el nuevo milenio y el desarrollo del pensamiento de las alumnas y alumnos. Perspectiva desde una concepción desarrolladora. Conferencia Impartida En Pedagogía 2001.

Zilberstein, J. (2001). Calidad Educativa y Diagnóstico del Aprendizaje Escolar. Curso Pre-congreso Pedagogía 2001, Instituto Pedagógico Latinoamericano y Caribeño (IPLAC). La Habana, Cuba, febrero 2001.

Zilberstein, J. (2004ª). Calidad de la Educación aprendizaje y diagnóstico integral. Artículo tomado del libro: Diagnóstico y transformación de la Institución Docente. Zilberstein J , Ediciones CEIDE, México, 2004.

José Ramón Terrero Dominici. Máster en Ciencias de la Educación con Mención en Enseñanza de la Matemática, profesor de Matemáticas del Colegio APEC “Minetta Roques” (COLAPEC) de la Universidad APEC (UNAPEC) de la República Dominicana.

Olga Lidia Pérez González. Doctora en Ciencias Pedagógicas, Master en Educación Superior y Profesora Titular de Matemática en la Universidad de Camaguey (UC). Secretaria General del Comité Latinoamericano de Matemática Educativa (CLAME**).** Vicedecana de Investigación y Postgrado de la Facultad de Informática de la UC. Miembro de Comité Académico de Maestrías de Educación con mención en enseñanza de la MateMiembro de Comité Académico de Maestrías de Educación con mención en enseñanza de la Matemática en Cuba, México y República Dominicana.

UNIÓN
REVISTA IBEROAMERICANA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA

Junio de 2010, Número 22, páginas 109-119
ISSN: 1815-0640

Desarrollo de la comprensión y de habilidades sociales. Una experiencia en álgebra lineal.

Sonia Pastorelli; Lilian Cadoche

Resumen

En este trabajo se da cuenta de una forma de intervención realizadas en la cátedra Álgebra, donde interesó relacionar las habilidades sociales con los desempeños de comprensión alcanzados por jóvenes a través del desarrollo de un proyecto de laboratorio integrador usando un sistema algebraicos de cómputos. Se trata de un estudio de caso cuyo objetivo es retratar algunas de las interacciones logradas con los alumnos que exhibieron distintos niveles de comprensión. Para ello se realizaron y analizaron entrevistas donde los estudiantes valorizaron comprensión y habilidades propias y de pares.

Abstract

In this work we gives an account of a form of intervention realized in Algebra of engineering. We were interested to relate the social skills with the perfomances of understanding achieved by youngsters through the development of a project of laboratory work using an algebraic system of computation. This is a case study which aims to portray some of the successful interaction with students who exhibited different levels of understanding. For this, analysis and interviews were conducted where students valued skills and understanding of themselves and peers.

Resumo

Neste trabalho presta-se conta de uma forma de intervenção realizada na disciplina Álgebra, onde interessou relacionar as habilidades sociais com os desempenhos de entendimento alcançados por jovens através do desenvolvimento de um projeto de laboratório integrador usando um sistema algébrico de cômputos. Trata-se de um estudo de caso cujo objetivo é retratar algumas das interações conseguidas com os alunos que mostraram diferentes níveis de compreensão. Para isso se realizaram e analisaram entrevistas onde os estudantes valorizaram compreensão e habilidades próprias e dos colegas.

Introducción

A través de experiencias realizadas en cátedras del área matemática hemos encontrado evidencias de que los software SAC (Sistemas Algebraicos de Cómputos) son herramientas que apoyan la colaboración y el aprendizaje entre pares, el ensayo de distintos caminos en la resolución de problemas, el uso de distintos registros para el abordaje de los temas, la autovaloración de los avances y el desarrollo de desempeños de comprensión cada vez más refinados.

Sin descuidar la atención en el rendimiento académico del alumno (la dimensión quizás más valorada en el proceso de enseñanza y aprendizaje), en este trabajo nos interesa relacionar las habilidades sociales, desempeños de comprensión y motivación alcanzados por jóvenes a través del desarrollo de un proyecto integrador.

Se trata de un estudio de caso cuyo objetivo es retratar algunas de las interacciones logradas con los alumnos que exhibieron distintos niveles de comprensión. Para ello se realizaron y analizaron entrevistas donde los estudiantes valorizaron comprensión y habilidades propias y de pares.

El análisis obedece a la idea de que de esta comunicación e intercambio se obtienen mejores indicadores de ese proceso difícil de evaluar, complejo y a la vez fascinante, que es el que se desarrolla cuando se intenta enseñar para la comprensión.

Objetivo de la experiencia

El objetivo de la investigación que da origen a esta comunicación fue diseñar una secuencia didáctica para mejorar los desempeños de comprensión de un grupo de alumnos que cursó la asignatura álgebra perteneciente a la carrera Licenciatura en Organización Industrial. Nos preguntamos: ¿Puede, el diseño de una secuencia didáctica apropiada que incorpore softwares matemáticos, ayudar a mejorar la comprensión de los conceptos matriz pseudoinversa y noción de cuadrados mínimos en el estudio de sistemas lineales?

Para dar respuesta a este interrogante se diseñó una secuencia didáctica. El énfasis se centró en la comprensión y uso activo de los conocimientos compartidos, basando esta experiencia en el marco conceptual de la Enseñanza para la Comprensión (EpC). Esta metodología de la enseñanza deriva de cuatro preguntas claves que se realiza todo docente:

- ¿Qué tópicos se deben comprender?
- ¿Qué aspectos de esos tópicos deben ser comprendidos?
- ¿Cómo podemos promover la comprensión?
- ¿Cómo podemos averiguar lo que comprenden los alumnos?

Las respuestas a estas preguntas son los pilares de la EpC y se denominan respectivamente Tópicos Generativos, Metas de Comprensión, Desempeños de Comprensión y Evaluación Diagnóstica Continua.

En esta experiencia se adoptó como tópico generativo el “ajuste de datos”; como meta de comprensión que “los alumnos comprendan como utilizar lo que saben para encontrar ecuaciones que representen razonablemente bien un fenómeno dado a través de datos”. El desempeño final de síntesis fue realizar un proyecto consistente en “reproducir, utilizando un sistema algebraico de cómputos, un dibujo diseñado en papel”, mientras que la valoración continua de los aprendizajes tuvo su eje en la tutoría para el desarrollo del proyecto.

La EpC aboga por la mejora de los desempeños de comprensión a través de la valoración continua de los mismos, recurso pocas veces usados en la universidad (en este contexto la evaluación tradicionalmente se hace a través de un examen final, con propósitos de evaluación sumatoria). Los desarrollos de proyectos son adecuados para este fin, ya que a la vez que permiten observar los desempeños de los estudiantes, posibilitan retroalimentar y andamiar el aprendizaje. La observación de los desempeños durante la etapa de investigación guiada junto a los desplegados en la evaluación integradora permitió reconocer el nivel de comprensión de los tópicos para cada estudiante.

Diseño de la experiencia

La secuencia involucra inicialmente el desarrollo práctico de los tópicos utilizando tecnologías tradicionales (calculadoras, transparencias, retroproyector). El tratamiento de los contenidos en esta clase lo denominamos intuitivo-numérico, se realizó en la 8º semana de la cursada y reflejó el previsto por el diseño curricular, a juicio del orden enunciado en los contenidos mínimos; esto es, luego de sistemas lineales, antes de espacios vectoriales.

La valoración de la comprensión a través de esta metodología (tradicional) se realizó a través de un ejercicio de la segunda prueba parcial (9º semana). Más allá de ser una evaluación sumatoria, se diseñó un instrumento para valorar la comprensión previa (considerando ésta como la alcanzada sin utilizar los SAC).

El desarrollo de los contenidos utilizando sistemas algebraicos lo denominamos intuitivo-gráfico ya que es previo al tratamiento teórico y permite advertir visualmente la aproximación de la solución aproximada por mínimos cuadrados del sistema lineal derivado de un ajuste de datos. Se realizó en la 10º semana en el laboratorio de computación. Desde aquí y hasta el final de la cursada (17º semana) cada alumno desarrolló su proyecto (esto es reproducir su diseño, utilizando el software matemático, lo que involucra conocer una ecuación para cada trazo del mismo).

Finalmente el tratamiento formal de los contenidos, luego del desarrollo de espacios vectoriales, se realizó en la 14º semana de cursada.

La observación de los desempeños durante la etapa de investigación guiada junto a los desplegados en la evaluación integradora permitió reconocer el nivel de comprensión de los tópicos para cada estudiante, así las actitudes de cooperación y las habilidades sociales desarrolladas por los mismos.

Una entrevista final, permitió indagar, según la visión del estudiante, la influencia del desarrollo del proyecto en la comprensión de los contenidos de la asignatura, y su opinión sobre la experiencia educativa.

Para resumir el proyecto personal de cada alumno, pilar fundamental de esta experiencia, se ejemplifica en el gráfico 1 con las tres entregas del proyecto de una alumna.

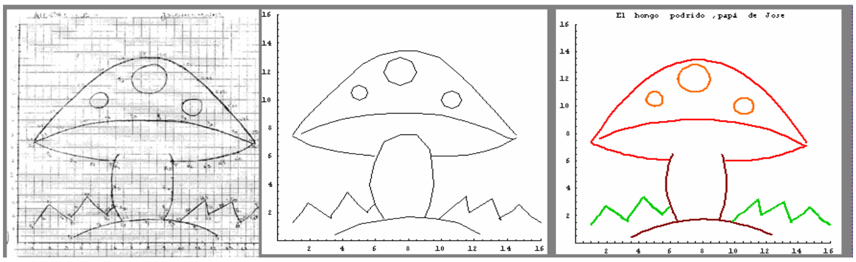


Fig. 1: Las tres entregas de un proyecto

En la primera entrega planificada para la cuarta semana de la cursada, los estudiantes debieron realizar un diseño sobre papel cuadriculado respetando consignas. En la segunda se replicaba el dibujo usando el soft *Mathematica* usando el comando ListPlot, lo que significa sintéticamente que para ello se debían relevar las coordenadas de los puntos y unirlos a través del comando (trabajando en forma similar a lo que se haría con un lápiz). Esta entrega fue proyectada para ser realizada durante la séptima semana y con el objetivo que los estudiantes se familiarizaran en la manipulación del soft. En la tercer entrega también se replicaba el dibujo usando el soft pero usando ahora la primitiva gráfica ParametricPlot, lo que significa que el estudiante debió conocer una ecuación matemática que liga las coordenadas (x,y) de los puntos pertenecientes a cada línea. Fue en esta tercera entrega donde se debían utilizar e integrar los conceptos cuyos desempeños de comprensión interesaba desarrollar a la vez de observar.

Los estudiantes

En esta experiencia participaron 41 jóvenes (20 mujeres y 21 varones). 24 de ellos son jóvenes egresados de la media recientemente, mientras que para 11 tienen más de 22 años. El 60% no trabaja, mientras que el 20% trabaja más de 44 horas semanales. La mayoría se siente a gusto estudiando matemática.

En la encuesta realizada a inicio de la cursada, los alumnos manifiestan reconocer que comprenden cuando ocurre lo que muestra la figura 2 (muchos eligen más de una opción)

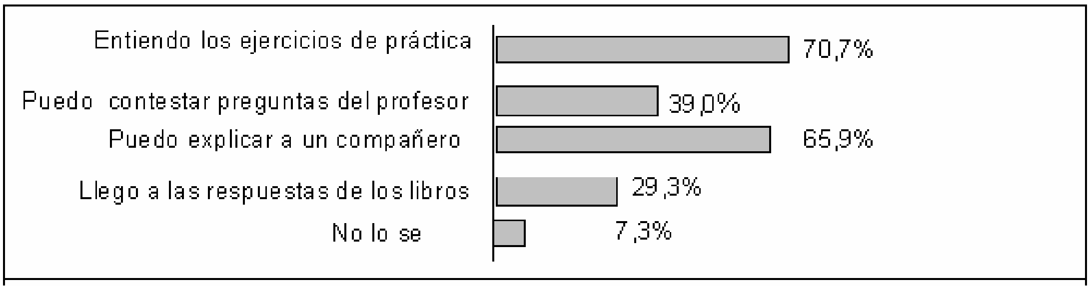


Fig. 2: Respuesta a la pregunta ¿cómo sabes que comprendiste un concepto?

Sobre esto es de remarcar que las habilidades comunicacionales (puede explicar a un par) están colocadas al mismo nivel que las típicas manipulativas (entiende los ejercicios de prácticas). Sin embargo ante la pregunta “¿con quién estudiás álgebra?”, solo un 29,6% responde que con pares, y de éstos, la mayoría prefiere estudiar con los estudiantes que “saben más”.

Resultados de la experiencia desde la perspectiva de la comprensión

Dado que interesó comparar la comprensión antes y después de la experiencia, y como la comprensión es un constructo difícil de medir, con este marco fue posible observando los niveles de desempeños antes y después de la incorporación de los sistemas algebraicos de cómputos.

La EpC destaca cuatro dimensiones para la comprensión: contenidos, métodos, propósitos y formas de comunicación.

La dimensión de los contenidos valora el nivel hasta el cual los alumnos han trascendido las perspectivas intuitivas, el grado hasta el cual pueden moverse con flexibilidad entre ejemplos y generalizaciones en una red conceptual coherente y rica.

La dimensión de los métodos evalúa la capacidad de los estudiantes de mantener un sano escepticismo acerca de lo que se conoce o lo que se les dice, así como el uso de métodos confiables para construir y validar afirmaciones y trabajos verdaderos.

La dimensión de los propósitos aprecia la capacidad de los aprendices para reconocer los propósitos e intereses que orientan la construcción del conocimiento, su capacidad para usar este conocimiento en múltiples situaciones y las consecuencias de hacerlo. La dimensión de los formas de comunicación juzga el uso de sistemas de símbolos para expresar lo que se sabe (escribir ensayos, realizar una presentación o explicar un algoritmo).

Para describir la comprensión se evalúan los niveles alcanzados en cada una de las dimensiones. Estos niveles se pueden observar a través de los desempeños alcanzados. Los desempeños de comprensión ingenua son poco reflexivos y no estructurados. Los de principiante están predominantemente basados en procedimientos ritualizados y mecanismos de prueba. Los de aprendiz están asentados en conocimientos y modos de pensar disciplinarios y demuestran un uso flexible de conceptos. Los maestría son predominantemente integradores, creativos y críticos.

La valoración de la experiencia se realizó contrastando la comprensión inicial (antes de usar SAC) y la final (luego de usarlos) de los 41 alumnos. La comprensión inicial se valorizó en la 9º semana, a través de un ejercicio de un parcial. Es importante aclarar aquí que no creemos que la comprensión, en todas sus dimensiones, pueda quedar reflejada en una única evaluación. Sin embargo es éste el método al cual más se recurre en la universidad para valorizar la comprensión.

Para valorizar el nivel de comprensión inicial se describieron los parámetros que la reflejan. Así por ejemplo para la dimensión de los propósitos éstos fueron: reconoce el porqué ajustar datos (el uso para extrapolar); si argumenta la función elegida (gráfico, tabla, etc.); si discute la factibilidad de las proyecciones obtenidas.

Los resultados obtenidos se esquematizan en el gráfico 3. Notar que más del 85% de los estudiantes no superan el nivel de comprensión ingenua, esto significa que no han superado los conocimientos intuitivos, poco reflexivos y nada estructurados. Solo el 12 % alcanzó un nivel de principiante, nivel basado en procedimientos ritualizados y mecánicos, alumnos que necesitan de validación externa, incapaces de usar algún mecanismo de control. Ninguno alcanzó los dos niveles de comprensión más elevado.

La comprensión final, a diferencia de la inicial; tuvo distintas oportunidades para ser valorada, andamiada y superada; pilar fundamental de la EpC. Los momentos los clasificamos en:

- Tutorías: clases de laboratorio; un espacio donde los alumnos pudieran construir su proyecto. El docente brindó las ayudas oportunas para mejorar los desempeños.
- Proyecto: producción de cada estudiante en la tercera entrega del proyecto (que es donde se utilizan los tópicos de los cuales se desea observar la comprensión).

- Evaluación Integradora: donde los jóvenes debieron explicar, justificar, extrapolar, vincular, ejemplificar y aplicaran los contenidos.
- Entrevista Final, la que tuvo por propósito indagar, según la visión del estudiante, la influencia del desarrollo del proyecto en la comprensión de los contenidos de la asignatura, y su opinión sobre la experiencia educativa.

El instrumento de evaluación para la comprensión final fue pues más refinado que para la inicial. Se construyó para valorizar cada una de las dimensiones de la comprensión a través de los rasgos de cada una. Para retratar y relevar los desempeños se definieron criterios o pautas, las que se plantearon bajo la forma de respuestas a 21 preguntas que refieren a los rasgos o cualidades de cada dimensión de la comprensión. Los resultados se resumen en la figura 3.

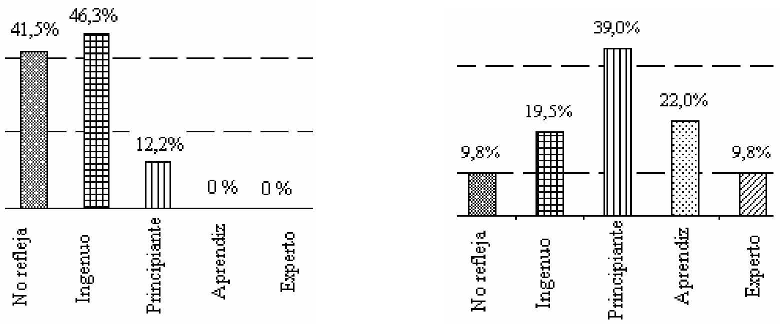


Fig. 3: Porcentajes de alumnos en cada nivel de comprensión inicial y final.

Como puede apreciarse a través del contraste de la compresión antes y después la campana de distribución de la comprensión evolucionó notablemente. Los resultados al finalizar la experiencia muestran una distribución normal en torno del nivel de comprensión de principiante. Esta situación refuerza la idea de que la experiencia ha logrado mejorar los niveles de comprensión de un tema intrínsecamente complejo hasta llevarlo a niveles estándar.

La mayoría de los jóvenes participantes en esta experiencia la valorizaron el proyecto como favorecedor de la comprensión, como lo muestra la figura 4.

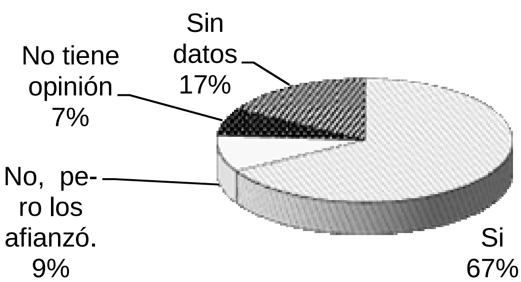


Fig. 4: Opinión de los estudiantes ante la pregunta ¿Facilitó la comprensión de algún concepto?

Resultados de la experiencia desde la perspectiva de las habilidades sociales

Se dijo, que más allá del rendimiento académico del alumno (la dimensión quizás más valorada en el proceso de enseñanza y aprendizaje), en este trabajo interesa relacionar las habilidades sociales, desempeños de comprensión y motivación alcanzados por jóvenes a través del desarrollo de un proyecto integrador. La entrevista final fue semi-estructurada y su protocolo contenía 11 preguntas. Las respuestas a tres de ellas permiten indagar algunas habilidades sociales exteriorizadas por los jóvenes. Una de las preguntas fue: "¿Ayudaste a algún compañero? ¿Algún compañero te ayudó?". En el caso que el estudiante no lo expresara espontáneamente se repreguntó a fines de indagar si las ayudas dadas o recibidas eran claras y precisas. Es de destacar que si bien el proyecto era individual, los jóvenes coordinaban horarios para asistir al laboratorio de la facultad a los efectos de trabajar "juntos". Estos grupos los conformaban libremente, seguramente por afinidad en estilos de estudios y vivencias comunes. Normalmente se reunían antes de la clase pautadas para que el docente brindara su tutoría.

Lo primero a destacar, se pudieron encontrar "sociedades de aprendizajes", alumnos que mencionaban a tres o cuatro compañeros a los que ayudaban y éstos a su vez ofrecieron ayuda clara, dejando en evidencia que el aprendizaje no es un producto individual. Otra situación a resaltar, es que dos alumnos de rendimiento académico medio (Gustavo y Facundo) fueron los más mencionados por el grupo completo de jóvenes.

También en las observaciones durante el desarrollo del proyecto se notó que estos jóvenes interactuaban activamente tanto dentro de su grupo de estudio, como con otros. Estos jóvenes mostraron en todo momento actitud positiva hacia el desarrollo de su proyecto, contagiando siempre estas actitudes a sus compañeros. Por el contrario, dos jóvenes de las de más alto rendimiento académico (Virginia S y Gisela R) fueron poco solitarias. Una solo ayudo a su hermana (¡y la ayuda consistió en realizarle una parte del proyecto, porque le resultó mas rápido hacerla que explicarla!). Ante la repregunta sobre porqué no ayudó a otros compañeros mostró sus actitudes poco fraternas contestando con la pregunta*"¿porqué?, ¿había que hacerlo?"* La otra reconoce que ayudar a sus compañeros le era muy "complicado" porque, debido a su trabajo, sus tiempos eran reducidos. A manera quizás de "acallar su conciencia" aclara haber brindado alguna información a Gustavo y a Facundo, los que siempre compartían sus avances con los demás compañeros.

Esto permite concluir que no es necesario ser un experto en un contenido para ayudar a sus pares en el aprendizaje de éste. Y por el contrario, tener la capacidad de manipularlos no es garantía que se comparta tal información con sus pares. Pero si es una enseñanza para los docentes que cuando formamos grupos de tareas intentamos hacerlo incluyendo alumnos de alto rendimiento académico en los grupos, cuando tal vez deberíamos incluir alumnos con alta motivación o actitudes solidarias y capacidades comunicativas.

Otra observación a destacar es que cada sociedad de aprendizaje (espontáneamente formada) tenia un "vocero", sin que el docente lo pidiera (en general era un estudiante de cada grupo el que hacia al docente una pregunta cuya respuesta era requerida por todos los integrantes). Esto refuerza la idea que los jóvenes tienen a ubicarse en la posición para la cual tienen mayor capacidad (en este caso la comunicacional). Por otro lado, las personas a las que les hace falta desarrollar esas habilidades tienden a eludir la tarea. Esto nos deja a docentes otro parámetro para trabajar cuando deseamos formar los grupos de tareas: asignar roles distintos en momentos distintos.

Resultados de la experiencia desde la perspectiva de la motivación: un análisis de casos

La conclusión más importante que se podrá observar a través del siguiente análisis de casos es que la motivación no fue una garantía de desarrollo de desempeños de comprensión ni viceversa.

Virginia S y Juan Manuel son dos de los cuatros alumnos categorizados con un nivel de comprensión final de Expertos. Su motivación totalmente distinta. Virginia invirtió muchas horas en el desarrollo del proyecto solo para perfeccionarlo (aclara en la entrevista refiriendo a las horas dedicadas al proyecto "… *20 horas, pero porque como vio, ¡yo quise!).* Juan Manuel muy pocas. Ante la pregunta ¿Te gustó realizar el proyecto? Juan Manuel se encoje de hombros y contesta "*No me disgustó*". Preguntado sobre las horas dedicadas responde "Menos *de 10…Lo hacía cuando no tenía nada que hacer.*

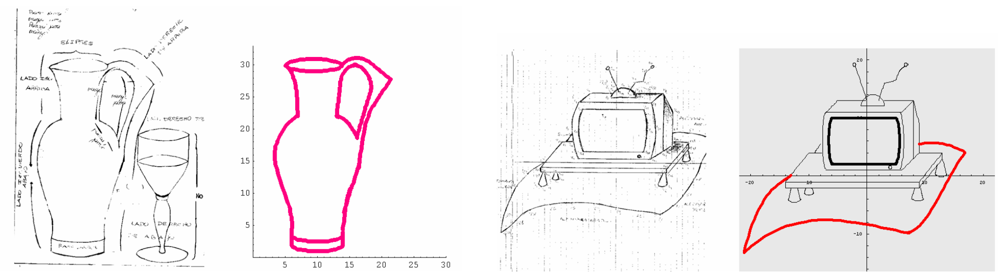


Fig 5**:** Proyectos de Virginia   y Juan Manuel (la más y el menos motivado del grupo con comprensión final experta).

De los nueve estudiantes que desplegaron desempeños finales de aprendices, tres jóvenes se mostraron fascinadas con la tarea (siempre dispuestas ha invertir más tiempo en mejorar su proyecto) y una con actitudes algo negativas (frecuentemente preguntaba *"¿con esto ya está?,¿zafo?*". Los seis restantes se mostraron gustosos con la tarea, pero invirtieron en ella las horas estrictamente necesarias.

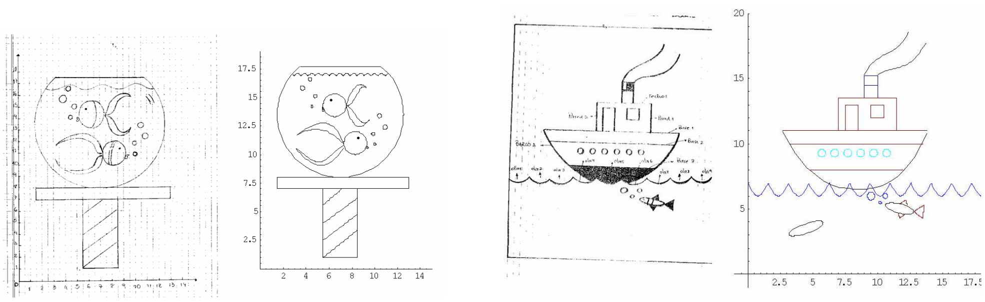


Fig. 6: Proyectos de Trinidad   y María José (la más y la menos motivada del grupo con comprensión final aprendiz).

Fueron 16 los alumnos con comprensión final de principiante. Pertenecen a este grupo los dos jóvenes de los más estimulados y solidarios (Gustavo y Facundo) y paradójicamente los más reticentes (cinco jóvenes, entre ellos María José, consideran que el proyecto sólo se constituye en una carga extra en el cursado).

Es de destacar que los 8 estudiantes del grupo con comprensión final ingenua han tenido una motivación cambiante a través del desarrollo del proyecto. Mientras que a Estefanía la experiencia le fascinó a Ignacio le resultó indiferente y a Germán le generó actitudes muy negativas (“*Fue una frustración. Pero digamos que me sirvió para saber lo que falta aprender”).*

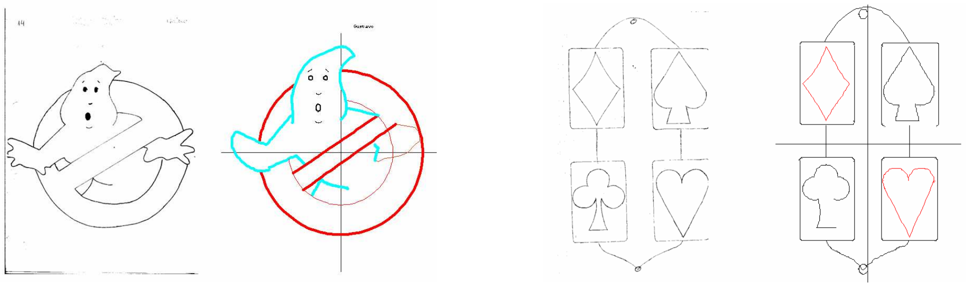


Fig. 7: Proyectos de Gustavo y María José (el más y la menos motivada del grupo con comprensión final principiante).

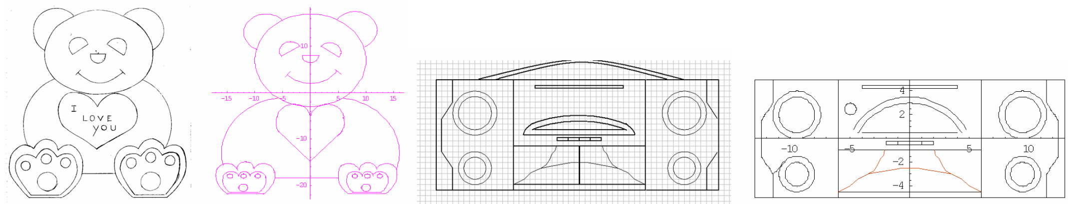


Fig. 8: Proyectos de Estefanía y Germán (la más y el menos motivado del grupo con comprensión final ingenua).

Finalmente, un caso interesante para analizar es el de Ezequiel, tal vez porque resume buena parte de los beneficios obtenidos. Ezequiel es un joven educado y extremadamente tímido. El típico alumno “invisible” de una clase. No parece interesado en la clase, no hace aportes ni pregunta, aunque tampoco mostraba actitudes negativas o molestas. En el desarrollo del proyecto fue todo “un caso especial”. Asistió a las clases especiales, y si bien trabajaba en su proyecto, dos veces dijo “*lo perdí, porque la computadora se colgó*”. Faltando pocos días para la fecha final de entrega consiguió un permiso especial para trabajar con un compañero con el argumento “*El está de acuerdo, es más, usted le dijo que el dibujo era difícil cuando se lo aceptó”.* En la entrevista como beneficios del proyecto mencionó “*Varios, saber encontrar las ecuaciones, usar la compu productivamente, aprender a usar el soft, hacerme amigo de los chicos, trabajar en grupo”.* Analizando luego la situación pensamos que Ezequiel buscó “*perder*” su trabajo (tal vez de forma inconsciente) como recurso para insertarse en el grupo, a pesar de su timidez. Cuando se le preguntó por si ayudó a compañeros su respuesta fue “*Si, a Facu, pero para mejorar la presentación. Busqué en la ayuda algunas funciones”* dejando evidenciar que también el proyecto posibilitó gestionar información (que está en inglés).

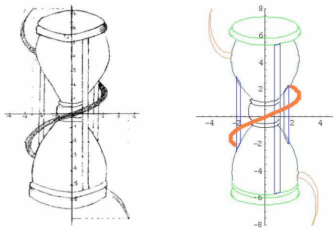


Fig.9: Proyecto de Ezequiel

Consideraciones finales

Contrastando los niveles de comprensión antes y después del uso de los SAC es posible desprender que el propósito inicial de mejorar los desempeños de comprensión en dos tópicos de mucha utilidad para el futuro profesional fue alcanzado en la mayoría de los estudiantes. Por otro lado, si bien el uso de sistemas algebraicos de cómputos es una exigencia curricular, en esta experiencia fue revalorizado, no sólo como herramienta para resolver complejos y tediosos cálculos sino como favorecedor de la comprensión y motivador del aprendizaje.

El punto quizás más fuerte de la experiencia es el clima de comunidad educativa que se generó en las clases. La posición de "docente y evaluadora" inicial fue virando a través del desarrollo del proyecto a "facilitadora de conocimientos" y "colaboradora en la tarea".

El proyecto de Enseñanza para la Comprensión definió a la "comprensión" como la capacidad de pensar y desempeñarse flexiblemente con los conocimientos que cada uno dispone para, por ejemplo, resolver un problema, presentar ideas de manera clara y convincente, aplicar conceptos para explicar algo, etc. El proyecto denominó a estas actividades "desempeños de comprensión" y comprobó que eran medios efectivos de desarrollar y al mismo tiempo demostrar la comprensión. Si pretendemos que los alumnos piensen por sí mismo o lleguen a ser capaces de aplicar lo que saben apropiada y creativamente, el proceso de aprendizaje debe implicarlos, precisamente, en este tipo de pensamiento activo.

Los docentes efectivos diseñan desempeños en los cuales sus alumnos pueden usar lo que Gardner (1994) llama las "inteligencias múltiples", vale decir las diferentes formas de expresión que pueden incluir actividades verbales, matemáticas, visuales, musicales, de movimiento, introspectivas e interpersonales.

Adherimos a las ideas de Stone Wiske (1999) y consideramos que esta experiencia avala su teoría en cuanto a que las nuevas tecnologías pueden perfeccionar y enriquecer los desempeños de comprensión de diversas maneras, ya que permite que el estudiante investigue nuevas ideas y produzca conocimientos utilizando una variedad de inteligencias.

La motivación en esta experiencia fue importante para propiciar un clima de trabajo ameno y la cooperación entre pares, pero no un antecedente ni en un consecuente de la comprensión.

Bibliografía

Gardner, H. (1994): *Estructuras de la mente. La teoría de las inteligencias múltiples*. Fondo de la Cultura. México.

Stone Wiske, M. (1999): *La enseñanza para la comprensión. Vinculación entre la investigación y la práctica.* Paidós. Buenos Aires.

Sonia Pastorelli. Ingeniera en Construcciones y Master en Didáctica, Profesora de Matemática en la Universidad Tecnológica Nacional, Argentina, con más de 25 años de antigüedad en la docencia, ha codirigido varios proyectos de investigación en educación Matemática y es autora de varios libros y numerosas publicaciones en revistas de educación matemática. sonia_pastorelli@yahoo.com.ar.

Lilian Cadoche. Lic en Matemática y Master en Didáctica, Profesora de Matemática en la Universidad Nacional del Litoral, Argentina, con más de 25 años de antigüedad en la docencia, ha dirigido varios proyectos de investigación en educación y educación Matemática y es autora de varios libros y numerosas publicaciones en revistas de educación. lcadoche@fcv.unl.edu.ar

UNIÓN
REVISTA IBEROAMERICANA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA

Junio de 2010, Número 22, páginas 121-131
ISSN: 1815-0640

Un acercamiento a la idea de continuidad de funciones en estudiantes de Ciencias Económicas

Nora Gatica; Alexander Maz-Machado; Gladys May; Cristina Cosci; Graciela Echevarría; Juan Renaudo

Resumen

En este documento presentamos un estudio exploratorio y descriptivo sobre la dificultad que presentan alumnos universitarios de Ciencias Económicas ante la tarea de determinar la continuidad de una función, cuando ésta está definida a trozos. Para esto se utilizó una prueba escrita con registro algebraico. Se analizaron las respuestas dadas por los estudiantes tomando como referencia los registros de representación semiótica puestos en evidencia. Los resultados revelan que existe un importante porcentaje de alumnos que no tienen en cuenta la representación gráfica realizada al momento de determinar la continuidad de este tipo de función y además presentan contradicciones entre la representación gráfica y las argumentaciones.

Abstract

In this document we present an exploratory and descriptive research about the difficulty of university students of Economics at the task of determining the continuity of a function when it is set to pieces. For this we used a written test with registration algebraic. We analyzed the responses of students by reference to the semiotic representation registers placed in evidence. The results reveal that there is a significant percentage of students who do not take into account the representation made in determining the continuity of this type of function and also inconsistencies between the graphic representation and arguments.

Resumo

Neste documento apresentamos um estudo exploratório e descritivo sobre a dificuldade que apresentam alunos universitários de Ciências Econômicas ante a tarefa de determinar a continuidade de uma função, quando esta está definida em trechos. Para isto se utilizou uma prova escrita com registro algébrico.
Analisaram-se as respostas dadas pelos estudantes tomando como referência os registros de representação semiótica postos em evidência. Os resultados revelam que existe uma importante percentagem de alunos que não têm em conta a representação gráfica realizada ao momento de determinar a continuidade deste tipo de função e ademais apresentam contradições entre a representação gráfica e as argumentações.

Introducción

La experiencia docente indica que el aprendizaje de los temas de Cálculo en primer año de la Universidad, suele ser problemático para los alumnos. Entre estos temas conflictivos se encuentra el concepto de continuidad de una función. En la literatura especializad muchas investigaciones revelan que los estudiantes tienen apuro con el concepto de límite, más si esté esta en el contexto de las funciones y de la continuidad (Artigue, 1992; Breidenbach, Dubinsky, Hawks y Nichols, 1992;

Cornu, 1992; Sierpinska, 1987; Tall y Vinner, 1981). Por otra parte se tiene que, muchas de estas dificultades encontradas en los estudiantes cuando hacen frente a otros conceptos de temas en el aprendizaje del Cálculo (continuidad, diferenciación, integración, etc.) se pueden relacionar con sus dificultades con los límites (Cottrill *et al*., 1996).

Son muchos los recursos que en la actualidad se incorporan a la enseñanza del Cálculo, pero si bien todas ellos son importantes herramientas, es primordial la comprensión que los alumnos hagan de los conceptos relacionados con dicho tema. Por ello cobra importancia conocer cómo interpretan las funciones continuas y discontinuas, entre cosa porque tradicionalmente, a la enseñanza de este concepto, no se le la misma trascendencia que a otros temas (límite, derivadas, integrales, etc.).

El propósito de toda función es mostrar como varia algo (Tall, 1985) y a lo largo de la historia la función se fue convirtiendo en un objeto matemático aceptado, pero la definición de función continua significó importantes esfuerzos a los matemáticos. La sutileza de esta noción requería de una definición extremadamente cuidadosa.

A principios del siglo XIX se inició la formulación rigurosa de este concepto, así se tiene que Bolzano (1817) la define como:

> *"f(x) es continua en un intervalo, si para todo valor de x en un intervalo, la diferencia $f(x+\Delta x)$ - f(x) llega a ser y permanece menor que cualquier cantidad dada Δx suficientemente pequeña, ya sea positiva o negativo".*

Posteriormente Cauchy dio otra definición que no es esencialmente diferente que la anterior:

> *"La función f(x) permanecerá continua respecto a x entre límites dados, si entre esos límites, un incremento infinitamente pequeño de la variable, produce siempre un incremento infinitamente pequeño de la función misma".*

Con Cauchy se llegó entonces a la formulación definitiva y rigurosa del concepto de continuidad, tal como ahora lo conocemos, por medio de la siguiente definición:

> *"f(x) es continua dentro de un intervalo, si el límite de la variable f(x) cuando x se aproxima a x_0 es $f(x_0)$, para todo x del intervalo".*

A pesar de la larga historia de este concepto, los alumnos la consideran como una noción intuitiva y por lo tanto evidente.

Este concepto no es un tema aislado, ya que se considera que forma parte de un gran tema como es el análisis del comportamiento de una función de variables reales. El análisis de la continuidad de una función en un punto es una propiedad local. Esta propiedad puede ser instruida a partir de las gráficas de funciones en determinados puntos.

La enseñanza habitual de esta noción (como también en otros conceptos básicos de Análisis matemático) se aborda desde dos perspectivas: una constituida por cuerpos teóricos deductivos y otra conformada por una organización de expresiones algebraicas (Aparicio & Cantoral, 2003).

En general, en la docencia, se utilizan y enseñan criterios para decidir la continuidad de una función, comparando el valor del límite de la función para *x* tendiendo hacia *a* con el valor de la función en el punto. De esta manera, se estudia la continuidad puntual para luego seguir con la continuidad global (Spivak, 1998), surgiendo ésta como el resultado de generalizar la continuidad puntual a todos los puntos del intervalo.

Sin embargo, dada la simplicidad de esta noción en la vida cotidiana provoca problemas de aprendizaje de esta noción desde el punto de vista matemático: *"[...] el movimiento libre de la mano que se desplaza de un lado a otro sin cesar, las imaginamos proyectorias continuas describiendo su movimiento...la caída de los graves se piensa que estos pasan por todos los puntos intermedios de su trayectoria* [..]" (Aparicio y Cantoral, 2003; p. 171),

Los procesos de la naturaleza y ciencias en general son continuos a trozos con un número finito de saltos.

Históricamente ya Newton explicó que todas las magnitudes geométricas se generan a través de movimientos continuos. Por ejemplo, la línea es el resultado del movimiento de un punto, un ángulo en el plano como generado por la rotación de una recta sobre un punto (Guttenberg, 1993).

Para determinar las dificultades en la comprensión de este concepto, es necesario analizar que respuestas dan a preguntas relacionadas con la continuidad. Para ello, solicitamos a los alumnos, en una primera instancia, realizar la representación gráfica de una función a trozos y determinar, a partir de este gráfico, si se trata de una función continua. En otro ítem, debían justificar analíticamente esta respuesta.

Diversas investigaciones nos muestran que decidir si un gráfico ha de ser representado en forma continua o discontinua, no es una cuestión trivial (Fabra & Deulofeu, 2000) y el registro grafico aunado a la justificación matemática permite identificar cuál es la comprensión que un individuo hace de un concepto determinado y en este caso, sobre continuidad.

Marco teórico

Algunos autores señalan que los objetos matemáticos no son directamente accesibles a la percepción (Duval, 1998) y por tal razón enfatizan en la importancia de la *representación* en Matemáticas, estableciendo que no es posible estudiar los fenómenos relativos al conocimiento sin recurrir a ella. Sin embargo, que no se deben confundir los objetos matemáticos con su representación. Duval (1998) define los registros de representación como un medio de expresión que se caracterizan por sus signos propios y la forma en que éstos se organizan. De la misma manera, establece que es posible representar un concepto matemático en diversos registros de representación. Por ejemplo, una palabra escrita, una notación, un símbolo o una gráfica representan a un objeto matemático. Asimismo, un *registro* está constituido por signos tales como símbolos, iconos o trazos, es decir, son medios de representación semiótica**.**

Para la comprensión de un concepto es necesaria la coordinación de los diferentes registros de representación, ya que con la representación en un solo registro (mono-registro) no se obtiene la comprensión integral del concepto. Sin embargo, la conversión entre registros no se realiza en forma espontánea, a menos que se trate de representaciones congruentes entre el registro de partida y el de llegada.

Se puede observar que la mayoría de los alumnos no reconocen el mismo objeto a través de representaciones que son dadas en sistemas semióticos diferentes.

En esta teoría se considera que la *comprensión integral de un concepto* está basada en la coordinación de al menos dos registros de representación y esta coordinación se pone de manifiesto por medio del uso rápido y la espontaneidad de la conversión cognitiva, logrando articulaciones entre diferentes registros de representación semiótica. Algunos ejemplos de estos registros pueden ser el lenguaje natural, las escrituras algebraicas o los gráficos cartesianos.

Los alumnos deben aprender a realizar conversiones en distintos registros como una actividad necesaria, por lo que la coordinación entre dichos registros es de vital importancia para el desarrollo del pensamiento. Dado que, entre las habilidades matemáticas necesarias para resolver un problema, se combinan generalmente, tratamientos y conversiones, la diferenciación de registros de representación y la coordinación entre ellos son los puntos más importantes para el desarrollo del aprendizaje. Sin embargo, el traslado entre registros no se realiza en forma espontánea, a menos que se trate de representaciones congruentes entre el registro de partida y el de llegada, por lo tanto, este traslado da lugar a fenómenos de congruencia y no congruencia semántica.

Metodología

Este es un estudio exploratorio descriptivo, que explora las ideas que los estudiantes universitarios ponen de manifiesto cuando se enfrentan a tareas de continuidad matemática en un punto dado, a través del análisis de los distintos registros escritos que utilizan en su solución.

El instrumento utilizado fue un cuestionario escrito ad-hoc compuesto de varias preguntas relacionadas con los conceptos de límite, continuidad y derivada de una función. En el presente trabajo analizamos solamente las preguntas relacionadas con continuidad.

Para la elaboración del cuestionario se analizaron algunos libros de texto de primer año de universidad con el fin de determinar el nivel de grado de comprensión del concepto y categorizar los distintos niveles de respuesta de los alumnos.

Como método de validación del cuestionario se utilizó la triangulación con pares y un estudio piloto. Se elaboraron las preguntas relacionadas con el tema objeto de nuestro estudio, las cuales fueron pasadas a un grupo de cinco alumnos de primer año universitario y a varios profesores de matemáticas, para estimar el tiempo de resolución y probar su claridad. Luego de algunas leves modificaciones se aplicó en forma definitiva.

Este instrumento fue aplicado el último día de clase del curso de Análisis Matemático I, a 76 estudiantes de las carreras de Ciencias Económicas de la Universidad Nacional de San Luis.

Objetivos

Los objetivos específicos de nuestro estudio fueron:

- Analizar si el alumno identifica la continuidad de una función a partir de distintos registros de representación.
- Analizar los errores que comente al realizar conversiones entre los registros.

Se elaboraron distintas preguntas con la finalidad de que los alumnos realizaran conversiones a diferentes registros. En este artículo sólo presentaremos los resultados relacionados con la segunda pregunta (Fig. 1), porque fue una de las que aportó mayor información.

Dada la función: $f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{si x} \leq 3 \\ 2x+1 & si \; x > 3 \end{cases}$

A. Realizar la representación gráfica de la función.
B. Indique si la función es continua en x = 3.
C. En caso de no ser continua, indique el tipo de discontinuidad que presenta. Justifique su respuesta.
D. De ser posible redefina la función para que sea continua.

Fig. 1. Tarea propuesta

Conversión del registro algebraico al gráfico

Para analizar como realizan la conversión entre estos registros, se definió el *contenido* de la tarea de la siguiente forma: En la primera parte de la tarea, se les solicita que realicen la representación gráfica de una función definida a trozos. Diversas investigaciones nos muestran que los alumnos tienen dificultades al realizar las conversiones entre los registros gráfico y simbólico (Tall y Vinner, 1981; Villalobos y Farfán, 2001). Con mas razón en este caso, al tratarse de una función definida a trozos. De otra parte, es conocido que los alumnos tienen la tendencia a unir todos los puntos de una función (Gatica, Tauber y Ruiz, 2002).

La construcción de gráficas a partir de un enunciado simbólico implica para los alumnos, acciones de cambio de registros. Al analizar las respuestas, es posible identificar sus concepciones y este caso particular sobre la continuidad de funciones.

De acuerdo a Leinhart, Zaslavsky y Stein (1990) la graficación comprende acciones de interpretación y construcción. La interpretación se refiere a la habilidad de los estudiantes para leer y darle significado a una gráfica, mientras que la construcción se refiere a crear algo nuevo, elaborando una gráfica a partir de una regla funcional o tabla.

En la segunda parte de la tarea se les solicita que determinen si la función es continua habiendo realizado la representación gráfica. En este caso la visualización juega un papel importante para encontrar la respuesta correcta. Leinhard *et al.* (1990) señalan la importancia y la variedad de aspectos en que es posible centrar la atención, en particular en tareas dentro del lenguaje gráfico.

Al solicitarles en la última parte de la tarea, que justifiquen la repuesta, se hace necesario que interpreten y se apoyen en el registro algebraico para poder definir este concepto.

Resultados

A pesar que el dominio y recorrido de una función, es un tema que ya ha sido estudiado por ellos en unidades anteriores, no lo tienen en cuenta al realizar el gráfico de una función definida a trozos. La tabla 1 muestra las categorías y las respuestas dadas por los estudiantes.

Tabla 1. Resultados de la representación gráfica

Categorías de las respuestas	Nº alumnos	%
Grafica correctamente la función	24	31,6
Dibuja las funciones como si fueran dos, sin tener en cuenta el dominio de definición.	5	6,5
Grafica una sola función (parábola)	11	14,6
En el punto de corte unen como si fueran continuas	10	13,2
Dibuja dos rectas	9	11,8
Grafica la función a partir de cuatro, cuando la condición es $x > 3$	8	10,5
No contesta	9	11,8
Total	**76**	**100**

Si bien en ésta primera parte de la tarea se les solicita que realicen la representación gráfica con la intención que se apoyen en el registro gráfico para determinar la continuidad de la función, solo el 32,6% responden correctamente. Solamente el 49,9% tomaron en cuenta la discontinuidad de la función, si bien no todos la graficaron correctamente.

En cuanto al análisis de la continuidad, la tabla 2 revela que el 35% de los alumnos persistía en la continuidad de la función, aceptando como suficientemente válida la representación gráfica que habían realizado en el apartado A de la pregunta.

Tabla 2. Análisis de la continuidad en x = 3

Categorías de las respuestas	Nº de alumnos	%
Contesta en forma correcta	6	7,9
Considera nada más que el valor de la función en el punto	11	14,6
Considera nada más que el límite de la función	9	11,8
Analiza el valor de la función en el punto y calculando el límite, sacan mal la conclusión	5	6,6
Verifica en una sola parte de la función	9	11,8
Afirma que la función es continua y no efectúa ningún análisis	27	35,5
No contesta	9	11,8

Muy pocos alumnos contestaron correctamente (7,9%) esto contradice los resultados de la tabla 1, porque un gran porcentaje de los que graficaron correctamente la función, afirman que dicha función es continua, estableciéndose una incoherencia entre la representación gráfica y la interpretación analítica.

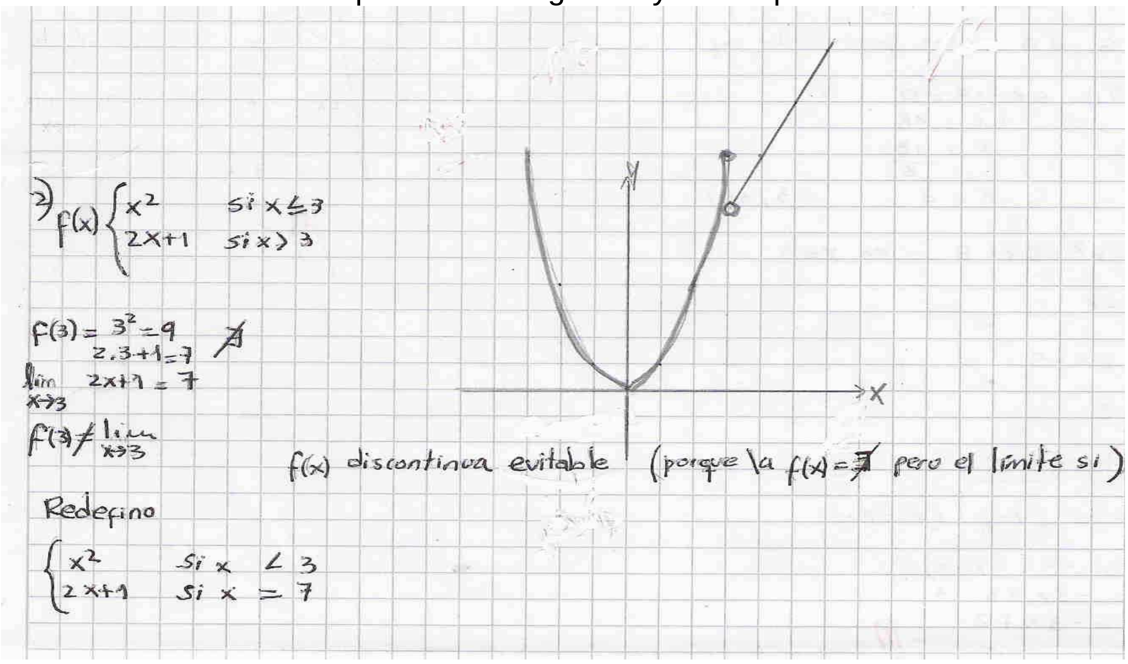


Fig. 2. Incoherencia entre representación gráfica y

La figura 2 presenta una situación donde el alumno realiza correctamente la gráfica de la función dada, pero responde incorrectamente respecto al tipo de discontinuidad. Los alumnos ponen de manifiesto que no dominan las condiciones de continuidad de una función en un punto dado, puesto que en unos consideraban solamente o el valor de la función o dicho punto o la existencia del límite. Algunos graficaron cada trozo de la funciones como si fuesen dos funciones distintas e independientes (Figura 3).

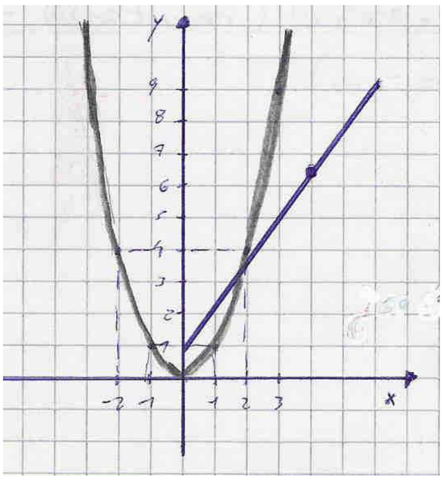


Fig. 3. Representación cada trozo de función como

La mayoría de los alumnos responden mal o no indican cuál es el tipo de discontinuidad (Tabla 3). El 47% se equivocaron en el tipo de discontinuidad y sumado con los que no respondieron se tiene que el 79% es incapaz de reconocer la clase de discontinuidad, lo cual es un valor demasiado alto para estudiantes universitarios que recién han terminado de cursar una asignatura de análisis matemático.

Tabla 3. Justificación del tipo de discontinuidad

Categorías de las respuestas	Nº de alumnos	%
Justificaron en forma correcta	8	10,5
Contestan bien pero sin justificar	5	6,6
Contestan bien pero lo justifican mal	3	3,9
Contestan mal	36	47,4
No contestan	24	31,6

El 21% de los alumnos indicaron correctamente el tipo de discontinuidad, aunque sólo el 10,5% realizó la justificación correcta.

Si bien en las clases prácticas, los estudiantes han realizado ejercicios en los que para determinar la continuidad de una función en un punto, deben verificar las tres condiciones, no las tienen en cuenta al justificar la respuesta.

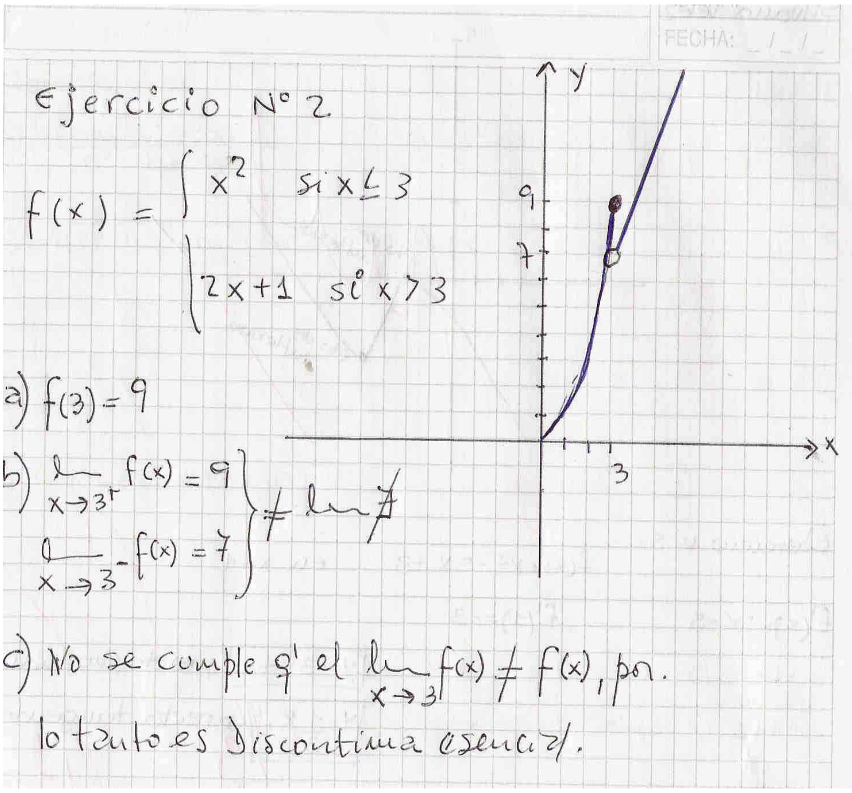


Fig. 4. Error de argumentación sobre el tipo

En la figura 4 se observa como el alumno grafica correctamente la función pero cuando intenta argumentar formalmente para justificar el tipo de discontinuidad, comete un error conceptual y lo que intenta es señalar de forma mecánica. las condiciones para la existencia de la continuidad, pero no toma en consideración cuáles son las que indican el tipo de discontinuidad. Por otra parte la notación utilizada es sumamente confusa.

En la tabla 4 se recogen los datos relacionados con la redefinición de la función. Se observa incapacidad en los alumnos para redefinir la función de forma que ésta pase a ser continua. Es llamativo que el 76,3% de los alumnos no contesten, ni hagan ningún intento por responder la preguntar, si bien debe recordarse que el 35,5% ya había asumido la continuidad y por tanto no les era necesaria redefinir la función.

Tabla 4. Redefinición la función para que sea continua

Categorías de las respuestas	Nº de alumnos	%
Contestan en forma correcta	8	
Redefinen la función a pesar de que se trata de una discontinuidad esencial	10	
No contestan	58	76,3

Conclusiones

Aunque se trata de una función con una discontinuidad esencial, el 7,6 % de los alumnos la redefinen como si se tratara de una función con una discontinuidad evitable, esto es una clara evidencia de que los estudiantes no han comprendido el concepto.

No obstante que la visualización gráfica ayuda a determinar la continuidad de una función, una eficiente comprensión (lectora) de la definición debería ser suficiente para responder correctamente a esta cuestión, capacidad que sería importante ejercitarla en los cursos universitarios.

Las respuestas de los estudiantes ponen en evidencian la existencia de dificultades en la comprensión de este concepto. El análisis de las respuestas señala que posiblemente esto sucede porque en dicho concepto se encuentran involucrados otras nociones importantes como son: funciones y límites de funciones.

El estudio revela el poco nivel de comprensión conceptual de la continuidad de funciones, las dificultades para la graficación de tales funciones y la incapacidad para identificar el tipo de discontinuidad. Esto es de suma importancia por cuanto los estudiantes de Ciencias Económicas, más adelante deberán manejar en economía funciones de coste de naturaleza discontinua y debería investigarse su desempeño ante tales temas.

Por otra parte el estudio amerita una reflexión por parte del propio profesorado universitario acerca de las estrategias utilizadas en la enseñanza y trabajo en ese tema.

Bibliografía

Aparicio, E. y Cantoral, R. (2003). Sobre la noción de continuidad puntual: un estudio de las formas discursivas utilizadas por estudiantes universitarios en contextos de geometría dinámica. *Epsilon* (56), 169-198.

Artigue, M. (1992). Analysis. En D. Tall (Ed.), *Advanced mathematical thinking* (pp. 167-198). Dordrecht, The Netherlands: Kluwer Academic.

Bolzano, B. (1817/1981). Rein Analytische Beweis des Lehrsartz". En Novy, L. (ed.): *B. Bolzano, early mathematical works, 1781-1848.* Prague: Institute of Slovak and General History.

Breidenbach, D., Dubinsky, E., Hawks, J. y Nichols, D. (1992). Development of the process conception of function. *Educational Studies in Mathematics*(23), 247-285.

Cornu, B. (1992). Limits. En D. Tall (ed.), *Advanced mathematical thinking* (pp. 153-166). Dordrecht, The Netherlands: Kluwer Academic.

Cottrill, J., Dubinsky, E., Nichols, D., Schwingendorf, K., Thomas, K. y Vidakovic, D. (1996). Understanding the limit concept: Beginning with coordinated process. *Journal of Mathematical Behaviour*(15), 167-192.

Duval, R. (1998). Registros de Representación semiótica y funcionamiento cognitivo del pensamiento. En F. Hitt (ed.), *Investigaciones en Matemática Educativa* (Vol. II, pp. 173-201). México: Departamento de Matemática Educativa. Cinvestav.

Fabra, M. y Deulofeu, J. (2000). Construcción de gráficos de funciones: Continuidad y prototipos. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa RELIME, 3*(2), 207-230.

Gatica, N., Tauber, L. y Ruiz, F. (2002). Registros de representación puestos en juego en el concepto de función: un estudio en estudiantes ingresantes a la carrera de ingeniería. En M. Penalva, G. Torregrosa y J. Valls (eds.), *Aportaciones de la didáctica de la matemática a diferentes perfiles profesionales* (pp. 417-430). Alicante: Universidad de Alicante.

Guttenberg, E. (1993). Introducción de los conceptos fundamentales del Cálculo Diferencial e Integral. Una propuesta didáctica. *Revista Educación Matemática, 5*(3), 93-123.

Leinhardt, G., Zaslavsky, O. y Stein, M. (1990). Functions, graphs and graphing: tasks. Learning and teaching. *Review of Educational Research, 60*(1), 1-64.

Sierpinska, A. (1987). Humanities students and epistemological obstacles related to limits. *Educational Studies in Mathematics*(18), 371-397.

Tall, D. (1985). Understanding the calculus. *Mathematics Teaching* (110), 49-53.

Tall, D. y Vinner, S. (1981). Concept image and concept definition in mathematics, with special reference to limits and continuity. *Educational Studies in Mathematics* (12), 151-169.

Villalobos, A. y Farfán, R. (2001). Identificación de obstáculos en la construcción de gráfica de funciones. *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa* (14), 396-399.

Nora Gatica. Doctora por la Universidad de Valladolid. Departamento de Análisis y Didáctica de la Matemática. Profesora de Análisis Matemático en carreras de Ingeniería. Facultad de Ingeniería y Ciencias Económico Sociales. Universidad Nacional de San Luis, Argentina.

Alexander Maz-Machado. Doctor por la Universidad de Granada, Departamento de Didáctica de la Matemática. Profesor del Departamento de Matemáticas de la Universidad de Córdoba, España. ma1mamaa@uco.es

Gladys May. Profesora Universitaria en Matemáticas. Profesora de Análisis Matemático en carreras de Ciencias Económicas. Facultad de Ingeniería y Ciencias Económico Sociales. Universidad Nacional de San Luis. Argentina.

Cristina Cosci. Especialista en docencia universitaria. Profesora de Matemáticas. Profesora de Análisis Matemático en carreras de Ingeniería. Facultad de Ingeniería y Ciencias Económico Sociales. Universidad Nacional de San Luis. Argentina.

Graciela Echevarria. Especialista en docencia universitaria. Técnica en Laboratorio Industrial. Profesora de Análisis Matemático en carreras de Ingeniería. Facultad de Ingeniería y Ciencias Económico Sociales. Universidad Nacional de San Luis, Argentina.

Juan Renaudo. Especialista en docencia Universitaria. Ingeniero Civil. Profesor de Análisis Matemático en carreras de Ciencias Económicas. Facultad de Ingeniería y Ciencias Económico Sociales. Universidad Nacional de San Luis, Argentina.

UNIÓN
REVISTA IBEROAMERICANA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA

Junio de 2010, Número 22, páginas 133-145
ISSN: 1815-0640

A modelagem matemática como recurso didático em projetos interdisciplinares.

Roberto Fecchio

Resumo

Este estudo examina o envolvimento e acompanhamento de um grupo de alunos de Cálculo na realização de um projeto interdisciplinar, que utiliza a Modelagem Matemática como recurso didático. O relato da experiência e a avaliação dos resultados mostrou ganhos no processo de ensino e aprendizagem da disciplina, oportunidades de aplicação e reflexão sobre situações reais e proporcionou novos questionamentos e redirecionamentos ao professor-orientador.

Abstract

This study examines the involvement and attendance of a graduation student group of Calculus accomplished an interdisciplinary project based on the Mathematical Modeling as a didactic resource. The report of the experience and the evaluation of the results showed improvement in the teaching-learning process of the discipline, opportunities of application and reflection about real situations besides providing new questionings and redirections of the advisor-teacher.

Resumen

En este trabajo analiza la participación y asistencia de un grupo de estudiantes de Cálculo en un proyecto interdisciplinario basado en la Modelación Matemática como recurso didáctico. En el informe de la experiencia y la evaluación de los resultados se muestra la mejora del proceso del aprendizaje de enseñanza de la disciplina, las oportunidades de uso y reflexión sobre diversas situaciones, nuevos interrogantes y cambios en el profesor-guía.

1. Introdução

O ensino do Cálculo Diferencial e Integral na graduação, principalmente no ciclo básico dos cursos de engenharia tem sido alvo de críticas que apontam para a necessidade de adequá-lo às novas tendências educacionais, como por exemplo a interdisciplinaridade, o trabalho em grupo e a utilização das novas tecnologias.

Uma análise dos anais do Encontro Nacional de Educação Matemática, dos Seminários Internacionais de Pesquisa em Educação Matemática, do Congresso Brasileiro de Ensino de Engenharia, confirma alguns dados preocupantes sobre as deficiências apresentadas pelos alunos ingressantes, frequentemente apontada como fator determinante de altos índices de reprovação, de acordo com BARUFI (apud Rezende, 2004).

Segundo Figueiredo (2007), no primeiro semestre dos cursos de Engenharia, tem sido usual a realização de cursos "preparatórios" para a disciplina de Cálculo.

Tais cursos têm como meta minimizar o problema da “falta de base” através de uma revisão do conteúdo do Ensino Médio, incluindo, por vezes, um viés interdisciplinar.

Com o objetivo de enriquecer a formação dos alunos de Ciências Exatas e Engenharias adotamos nos cursos introdutórios de Cálculo, uma abordagem interdisciplinar. Com o avanço da tecnologia, os conhecimentos básicos passam a adquirir uma maior importância quando comparados aos das disciplinas técnicas, algumas vezes superadas pela velocidade crescente de processamento de novas informações. Além disso, os altos índices de reprovação e evasão nestes cursos e o cuidado que devemos ter com a transição do 2º para o 3º grau nos levam a intervir de maneira inovadora, nos cursos básicos de Matemática (Figueiredo, 2007).

Inúmeros trabalhos, desenvolvidos com o objetivo de superar tais problemas, têm apresentado uma profunda conexão com diversas temáticas na área de Educação Matemática, como por exemplo, Modelagem, Novas Tecnologias no Ensino, Linguagem, Formação de Professores entre outras.

De acordo com REZENDE (2004), no I SIPEM (realizado em Serra Negra, em novembro de 2000) oito dos onze trabalhos apresentados estavam diretamente relacionados ao ensino de Cálculo; no VII ENEM (realizado na UFRJ, em julho de 2001) mais especificamente no grupo de trabalho “Educação Matemática no Ensino Superior”, cinco dos onze trabalhos apresentados estavam relacionados a este tema; e, mais recentemente, no II SIPEM (realizado em Santos em novembro de 2003) nove, dos quinze trabalhos apresentados, estavam relacionados ao tema em destaque”.

Em geral, o ciclo básico dos cursos de engenharia apresenta disciplinas estanques, fragmentadas, originando assim dificuldades que se contrapõem à formação profissional do engenheiro, que exige versatilidade, visão integrada, trabalho em equipe, ambiente globalizado. De acordo com Biembemgut & Hien (2000), o conhecimento matemático deve ir além das simples resoluções de questões matemáticas, muitas vezes sem significado algum para o aluno e levá-lo a adquirir uma melhor compreensão tanto da teoria quanto da natureza do problema a ser modelado.

Autores como Abrantes (1995), Villers (1998) Chevallard (2001) e Bassanezi (2002) chamaram a atenção para a utilização da modelagem e de projetos interdisciplinares como fator motivador para a aprendizagem de conceitos matemáticos. Para Chevallard (2001), um aspecto essencial da atividade matemática consiste em construir um modelo (matemático) da realidade que queremos estudar, trabalhar com tal modelo e interpretar os resultados obtidos para responder as questões inicialmente apresentadas. Grande parte da atividade matemática pode ser identificada, portanto, com uma atividade de Modelagem Matemática.

Segundo Bassanezi (2002), o objetivo fundamental do ‘uso’ de matemática é de fato extrair a parte essencial da situação-problema e formaliza-la em um contexto abstrato onde o pensamento possa ser absorvido com uma extraordinária economia de linguagem. Desta forma a matemática pode ser vista como um instrumento intelectual capaz de sintetizar idéias concebidas em situações empíricas que estão quase sempre camufladas num emaranhado de variáveis de menor importância”.

Investigando sobre as abstrações matemáticas de uma equipe de engenheiros na prática da Engenharia Civil, Noss & Kent (2000) revelaram que a engenharia pode ser vista como uma plataforma de testes e um importante exemplo de aplicação da Matemática, onde os significados e entendimentos são moldados epistemológica e psicologicamente por atividades da prática profissional. Os autores também relatam um certo relacionamento "esotérico" entre o engenheiro e o computador, onde muitos afirmaram que não compreendiam o que o computador fazia, mas sabiam informar os dados de entrada e acreditavam nas respostas obtidas na saída. (tipo caixa-preta) Outra característica observada na prática foram os códigos: regras ou formulários do tipo "se – então" onde valores eram atribuídos a um conjunto de parâmetros (matemáticos ou não) para produzir resultados esperados pela equipe. As abordagens para a análise de estruturas variam ao longo de um espectro qualitativo-quantitativo, desde o uso explícito e exato da Matemática ou de métodos computacionais até aproximações grosseiras baseadas na sensibilidade. As decisões são tomadas a partir da comparação das duas abordagens (Noss & Kent, 2000).

Diversos argumentos têm sido utilizados para enfatizar a importância do trabalho em grupo. O desenvolvimento de aspectos sociais, tais como, interação, responsabilidade, cooperação, capacidade de negociar e comunicar-se na linguagem de um grupo é um destes argumentos (Ferruzzi et al, 2003). De acordo com Fernandes (2000), através das interações com os outros, o indivíduo passa a dominar novos conhecimentos. O conflito gerado na interação dos indivíduos pode beneficiar mutuamente as pessoas que se encontram num mesmo nível de desenvolvimento cognitivo, mas que, entretanto, analisam uma determinada situação com perspectivas diferentes.

Acreditamos que o trabalho em grupo proporciona também condições favoráveis ao cumprimento de diversos tópicos previstos pelas Diretrizes Curriculares, MEC (2002), tais como:

- planejar, supervisionar, elaborar e coordenar projetos e serviços de engenharia;
- comunicar-se eficientemente nas formas escrita, oral e gráfica;
- atuar em equipes multidisciplinares;
- compreender e aplicar a ética e a responsabilidade profissionais.

Neste contexto, argumentamos que: a) a "falta de base" não é um problema específico do ensino de Cálculo, mas que também afeta com a mesma gravidade, outras disciplinas do curso superior, cujos índices de reprovação nem sempre são tão alarmantes quanto os do Cálculo; b) que o uso das novas tecnologias como recurso auxiliar puro e simples, como por exemplo, os *softwares* Scilab, Winplot, Derive, Mathlab e outros, há quase uma década em diversas Instituições de Ensino Superior – I.E.S. vinculadas ao ensino do Cálculo, além de apresentarem algumas limitações técnicas e pedagógicas, (como por exemplo, erros na determinação do domínio de funções que envolvem quociente de raízes de índice par encontrados nos *softwares* Derive e Mathcad) não contribuíram decisivamente para a diminuição dos citados índices de retenção ; c) que existem situações de aprendizagem construídas na prática, no ambiente de trabalho, através da interação entre os indivíduos e que dependem de uma linguagem própria.

Atualmente, com os recursos do EaD podemos criar e explorar situações de aprendizagem que dificilmente seriam obtidas em sala de aula como por exemplo, a oportunidade de formação de grupos de trabalho, pesquisas com profissionais que atuam na área, utilização da internet, fórum de discussões e outros.

2. Modelagem & EaD

Com este trabalho, pretendemos dar uma pequena contribuição para a solução de alguns questionamentos, ao relatar e analisar o envolvimento de um grupo de alunos do 9º semestre do curso de Engenharia de Computação do CUFSA, dependentes da disciplina Cálculo Diferencial e Integral, com um projeto interdisciplinar, aplicado a uma situação real, que utiliza a Modelagem Matemática como recurso didático e acompanhado a distância por um professor-orientador.

Trata-se de uma pesquisa participativa, realizada fora da sala de aula, monitorada por reuniões presenciais e com material de apoio teórico postado na plataforma Moodle, disponível pelo CUFSA. As ações dos componentes do grupo foram registradas por meio de três instrumentos: observações do professor-orientador, relatório postado pelo grupo e avaliação presencial. No final, foram interpretadas com o objetivo de buscar indícios característicos de envolvimento e aprendizagem. Optamos por uma atividade semi-presencial de nível 2, segundo TORI (2003), ou seja uma integração harmoniosa entre as ações presenciais e virtuais, tendo em vista que a instituição contava com infra-estrutura computacional e de monitoria e que os alunos do grupo já estavam familiarizados com o uso de novas tecnologias.

A análise dos resultados revelou que, apesar do interesse demonstrado pelos alunos, o ambiente proporcionado pelas reuniões presenciais e pelo material de apoio, exigiu por parte do professor-orientador, alterações significativas, para garantir a conclusão do trabalho de modo satisfatório.

O trabalho, inicialmente dirigido aos alunos dependentes da disciplina Cálculo Diferencial e Integral, poderá contribuir para a reestruturação do Projeto Pedagógico da instituição, de acordo com a Portaria 2.253 do Ministério da Educação, Brasil (2001), que permite utilizar 20% da carga horária da disciplina com atividades não-presenciais.

Segue o relato de alguns momentos escolhidos das participações dos alunos nas diversas fases da modelagem, adaptadas a partir do esquema simplificado de Bassanezzi (2002). Partes do Relatório do Projeto, entregue pelo grupo de alunos foram copiados (em itálico) e complementadas com as observações do professor-orientador.

3. Aplicação da modelagem num projeto interdisciplinar

Reunião nº 1

Neste encontro, foram apresentados os três componentes do grupo: Artur, Bia e Cezar (os nomes são fictícios); foram colocadas as senhas de acesso ao material de apoio postado no Moodle, onde estão descritas as tarefas das próximas fases e sanadas as primeiras dúvidas.

Segue uma cópia dos dados e tarefas do projeto, disponibilizado para os componentes do grupo: *Verificação da Lei de Torricelli*

Objetivo:

A Lei de Torricelli trata da taxa do escoamento de fluidos de um reservatório. Neste projeto vamos verificá-la experimentalmente utilizando um reservatório cilíndrico com diâmetro constante. Neste caso, ela pode ser simplificada de modo que a taxa de variação da altura h do nível de água em relação ao tempo t é proporcional à raiz quadrada da altura h da água, ou seja, ela pode ser escrita da seguinte forma:

$$\frac{dh}{dt} = k.\sqrt{h}\text{, onde } k \text{ é uma constante.} \qquad (1)$$

Ignorando-se a Lei de Torricelli, é razoável supor que a taxa de variação da altura h do nível de água em relação ao tempo t é constante, ou seja a equação matemática correspondente é:

$$\frac{dh}{dt} = k\text{, onde } k \text{ é uma constante} \qquad (2)$$

Nosso objetivo neste projeto é decidir, com auxílio de recursos do Cálculo, qual das duas hipóteses é a mais adequada e em seguida utilizá-la numa aplicação simples.

Roteiro:

Este projeto começa com um experimento físico realizado por três pessoas e o equipamento abaixo discriminado:

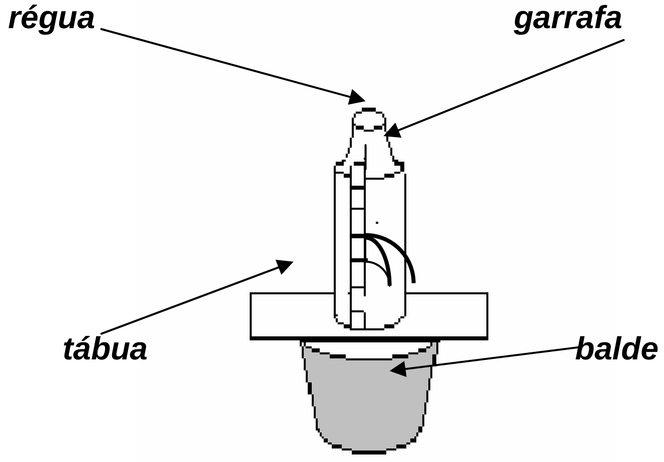
1. uma garrafa plástica de refrigerante de dois litros, vazia;
2. um pedaço de fita adesiva;
3. um lápis e uma régua;
4. um balde ou pia para escoar a água e
5. um relógio digital

Tarefa:

1. Experimentação: Realize o experimento abaixo discriminado:

1.1. Fixe a régua na garrafa com a fita adesiva, de modo que o número zero da régua coincida com a altura do furo e de modo que a graduação da régua aumente em direção ao topo da garrafa, a fim de que ela possa ser usada para medir as alturas dos níveis da água acima do furo.

1.2. Coloque o balde no chão (ou numa outra superfície horizontal), a tábua na parte superior do balde e a garrafa sobre a tábua, de modo que a água que sai do furo da garrafa vá para dentro do balde.(veja o esquema seguinte).



1.3. Uma pessoa tapa o furo com um dedo, enche a garrafa de água e assinala o nível da água na régua. Uma segunda pessoa com o relógio fica designada como cronometrista e uma terceira pessoa fica responsável por anotar os dados. Ao sinal do cronometrista, a primeira pessoa retira o dedo do furo e deixa a água escorrer para o balde. O cronometrista contará em voz alta os segundos de dez em dez, por exemplo´´1,2,3,...,10;1,2,...,10...``

Cada vez que ouvir o número 10 a primeira pessoa fará a leitura da altura da água e a terceira pessoa anotará numa tabela os valores do tempo e da altura.Faça uma tabela com duas colunas, uma para a variável t e outra para h

1.4. Utilize o software cedido pelo professor para desenhar o gráfico e para obter a função h(t) a partir da tabela.

2. Abstração: Faça uma pesquisa (bibliográfica,entrevista etc.) justifique teoricamente a Lei de Torricelli a partir da Equação de Bernoulli.

***3. Resolução*:** Agregue as condições iniciais tiradas da tabela às hipóteses (1) e (2): Em t = 0 a água começa a fluir da garrafa para o balde. Vamos designar por h_0 a altura inicial da água (indica-se por $h(0) = h_0$).

Sendo $t = t_1$ o tempo correspondente à medição da última altura e sendo h_1 a última altura, temos $h(t_1) = h_1$. Então o modelo matemático para a altura do nível da água na garrafa segundo a nossa hipótese é dado por:

$$\frac{dh}{dt} = k \text{ , } \textit{onde} \quad h(0) = h_0 \quad \textit{e} \quad h(t_1) = h_1 \qquad (3)$$

Por outro lado, pela Lei de Torricelli, ele é dado por:

$$\frac{dh}{dt} = k.\sqrt{h} \text{ , } \textit{onde} \quad h(0) = h_0 \quad \textit{e} \quad h(t_1) = h_1 \qquad (4)$$

3.1. Resolva as equações (3) e (4) e determine a função correspondente $h(t)$

4. Validação: Utilize o software cedido pelo professor (ou uma calculadora gráfica), esboce os gráficos das funções encontradas e compare-os com os resultados obtidos experimentalmente.

4.1. Qual o modelo matemático que melhor se adapta ao fenômeno físico?

4.2. Dê pelo menos três motivos que justifiquem as eventuais diferenças encontradas em 4.1.

***5. Aplicação*:** A partir da solução encontrada em 3.1., faça uma estimativa de cálculo para o diâmetro do furo por onde saiu a água.Na sua opinião, o resultado obtido é razoável ?

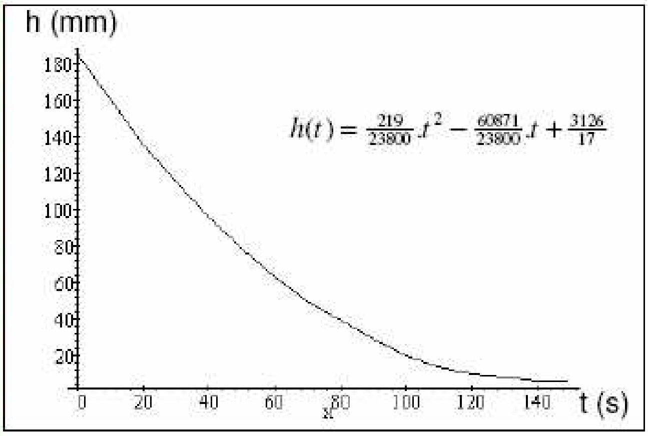
Comentário 1: Nesta primeira reunião os alunos demonstraram grande interesse em participar do projeto. Perguntaram sobre a nota que seria atribuída e se poderiam contar com a ajuda os monitores. Ficou esclarecido que a nota, caso os resultados fossem satisfatórios, seria a nota de atividade **A** da disciplina Cálculo Diferencial e Integral, correspondente a 20% da média **M** final, a ser atribuída após a postagem do Relatório do Projeto. Os demais 80% seriam obtidos da nota **P** de uma prova presencial, sobre Equações Diferenciais (**M** = 0,2.**A**+0,8.**P**).

O conteúdo para a prova presencial é o mesmo do curso presencial de Cálculo, itens 1, 2, 3 e 4, sobre Integrais e Equações Diferenciais, disponível em http://www.moodle.fsa.br/course/view.php?id=112 Durante todo o tempo (período letivo) estariam disponíveis monitores de Cálculo e Física. Além disso, as dúvidas poderiam ser esclarecidas através do fórum do Moodle.
Em seguida, estão as respostas das questões da tarefa, tiradas do Relatório do Projeto

1. Experimentação. É uma etapa essencialmente laboratorial, onde se processa a obtenção dos dados e o gráfico correspondente.
Os dados abaixo foram obtidos no Laboratório de Química da FAENG, pelos componentes do grupo e o gráfico foi obtido do *software* Scientific Workplace ®, cedido pelo professor-orientador.

Alturas h (em milímetros) em função do tempo t (em segundos)

0	185
10	160
20	135
30	115
40	96
50	78
60	63
70	50
80	39
90	29
100	20
110	14
120	10
130	8
140	6
150	6



Comentário 2: O grupo manifestou dúvidas relacionadas ao conceito de Modelo Matemático e quanto ao grau da função h(t) obtida no *software*, uma vez que diversas opções, (exceto a linear) mostravam gráficos muito parecidos. Verificamos que esta decisão deveria ser tomada após a segunda etapa, quando então a dedução teórica nos mostra que a função h(t) é do 2º grau.

2. Abstração. É o momento em que o grupo realiza pesquisas bibliográficas, estabelece hipóteses simplificadoras. Trata-se de uma fase complexa e desafiadora, pois é nela que deverá ocorrer a representação dos fenômenos físicos na linguagem matemática.

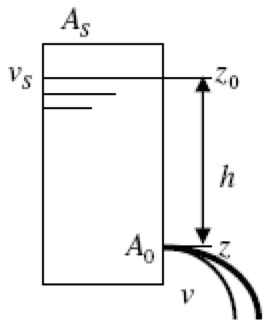
O texto abaixo foi retirado do Relatório do Projeto (p.3) postado pelos alunos, após várias intervenções do professor orientador.

Lei de Torricelli

Dado um fluido perfeito, incompressível, de densidade ρ, num tubo de altura h, com $h = z_0 - z$. A velocidade de saída v, pelo orifício de área A_0, pode ser obtida a partir de algumas simplificações a partir da Equação de Bernoulli:

$$\tfrac{1}{2}.(v_S)^2+\frac{P_S}{\rho}+g.z_0=\tfrac{1}{2}.(v)^2+\frac{P_0}{\rho}+g.z \qquad \text{(I)},$$

onde P_S *é a pressão exercida sobre a área* A_s *da superfície do fluido na altura* z_0*;* P_0 *é a pressão sobre a área* A_0 *do orifício situado na altura* z*;* ρ *é a densidade do líquido e* g *é a aceleração da gravidade.*



Supondo que a área A_0 *do orifício é muito menor do que a área* A_S *da superfície do líquido, de tal forma que a velocidade* v_S *do fluido na superfície é desprezível, a pressão* P_S *na superfície é igual à pressão* P_0 *do líquido que sai do orifício, ou seja fazendo* $v_S=0$ *na equação (I) obtemos:*

$$\tfrac{1}{2}.\rho.(v)^2=\rho.g.(z_0-z) \;\Rightarrow\; \tfrac{1}{2}.(v)^2=g.h$$

$$\text{Logo,} \quad v=\sqrt{2.g.h} \qquad \text{(II)}$$

Considerando-se que um diferencial de volume deslocado na superfície $A_S.dh$ *é igual a um diferencial de volume de líquido que sai pelo orifício* $A_0.v.dt$*, onde* $v=\sqrt{2.g.h}$*, temos:*

$$A_S.dh=A_0.\sqrt{2.g.h} \;\Rightarrow\; \frac{dh}{dt}=\frac{A_0}{A_S}.\sqrt{2.g.h}, \text{ ou seja,}$$

$$\frac{dh}{dt}=k.\sqrt{h}, \text{ onde } k=\frac{A_0}{A_S}.\sqrt{2.g} \qquad \text{(III)}$$

Comentário 3: Nesta etapa verificamos que o grupo apresentou uma grande dificldade para redigir um texto conciso e coerente e numa seqüência lógica. Inicialmente foi incluída a equação da conservação da energia, para justificar a equação de Bernoulli. Partes do texto foram copiados da bibliografia e apresentaram incoerências na notação, (como por exemplo, utilizaram A_1 e A_0 no mesmo texto para indicar a área do orifício; A_2 e A_S para a área da superfície). Nas trocas de informação ocorridas no fórum, verificou-se que o grupo não percebeu espontaneamente que a equação (III) poderia ser utilizada para eliminar a hipótese indicada pela equação (2).

3. Resolução. É o momento em que se obtém o modelo matemático que será utilizado para responder a questão do projeto. A cópia abaixo foi selecionada da versão final do projeto (p.4-5)

3a) $\int_{h(t)}^{h(0)} dh = \int_0^t k\,dt \Rightarrow [h]_{h(t)}^{h(0)} = kt \Rightarrow$

$\boxed{h(t) = 185 - kt} \longrightarrow 6 = 185 - K.140$

$K \cong 1,27$

$\boxed{h(t) = 185 - 1,27\,t}$

3b) $\int_{h(t)}^{h(0)} \frac{dh}{\sqrt{h}} = k\int_0^t dt \Rightarrow \left[2\sqrt{h}\right]_{h(t)}^{h(0)} = kt \Rightarrow$

$2(\sqrt{h(0)} - \sqrt{h(t)}) = kt \Rightarrow \sqrt{h(0)} - \sqrt{h(t)} = \frac{k}{2}t \Rightarrow$

$\boxed{\sqrt{h(0)} - \frac{k}{2}.t = \sqrt{h(t)}} \longrightarrow \sqrt{185} - \frac{k}{2}.140 = \sqrt{6}$

$K \cong 0,1593$

$h(t) = h(0) - \cancel{2}\sqrt{h(0)}\,\frac{K}{\cancel{2}}t + \frac{k^2}{4}t^2$

$h(t) = 185 - \sqrt{185}\,.\,0,1593t + \frac{0,1593^2}{4}t^2$

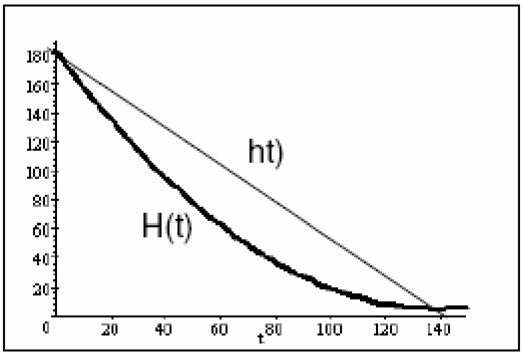
$\boxed{h(t) = 0,0064t^2 - 2,17t + 185}$

Comentário 4: Neste caso a grande dificuldade, (solucionada com o auxílio dos monitores e do professor-orientador) estava relacionada com a orientação do eixo y (no caso, para cima), o que nos obriga a considerar a velocidade com o sinal negativo nas equações dos itens 3a) e 3b) ou, conforme foi adotado na solução apresentada acima, considerar a integração de h(t) a h(0).

Também houve erro no desenvolvimento do trinômio em 3b), o que mostra uma grave deficiência no conteúdo de grau médio, mesmo para alunos do 5º semestre. Os três componentes do grupo ficaram surpresos com a interpretação (prática) das condições iniciais, uma vez que nas aulas teóricas "...elas são usadas apenas para calcular a constante C".

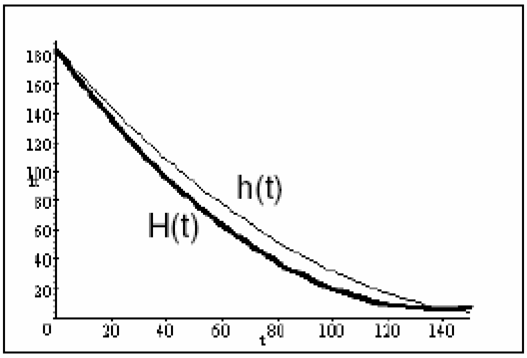
3. Validação. É o processo de aceitação ou rejeição do modelo matemático obtido. Os modelos matemáticos com as hipóteses que lhes são atribuídas são confrontados com os dados empíricos, comparando suas soluções e previsões com os valores obtidos no laboratório. Foram apresentados no mesmo sistema de eixos os gráficos das funções obtidas em 3a) e 3b) acima com a função obtida na primeira etapa. As respostas foram dadas nos itens 4a) e 4b) do relatório (p.6)

4a)



$h(t) = 185 - 1{,}27.t$

Figura 1



$h(t) = 0{,}0064.t^2 - 2{,}17.t + 185$

Figura 2

Dos gráficos acima concluímos que o modelo mais adaptado ao fenômeno físico Lei de Torricelli é a função da Figura 2.

4b) *De acordo com Zemansky a equação de Torricelli descarta uma série de variáveis para se tornar mais simples que os estudos atribuídos a Bernoulli. A ausência dessas variáveis resulta na diferença entre uma função e outra. Podemos citar algumas dessas variáveis como:*

- *pressão atmosférica;*
- *foi considerado um "fluido ideal", o que está fora da nossa realidade;*
- *velocidade zero na altura de escoamento;*
- *densidade do fluido.*

Comentário 5: Não houve dificuldade para identificar e validar o modelo matemático a partir da comparação com os dados empíricos representados no gráfico. No fórum, dois dos componentes do grupo concordaram que "...numa prova, por exemplo" atribuiriam as diferenças encontradas entre o modelo teórico e o empírico apenas aos erros de arredondamento. Já no item 4b) verifica-se um desconhecimento do conceito de variável e alguns erros na maneira de expressar conceitos relacionados à Física.

5. Aplicação. Nesta secção vamos verificar se o grupo transfere os conhecimentos adquiridos ao resolver um exemplo de aplicação simples. No Relatório do Projeto (p.7), temos:

5) Perímetro da garrafa: p=32cm=320mm.

$$320 = 2.\pi.r_S \quad \Rightarrow \quad r_S = \frac{320}{2.\pi} \quad \Rightarrow \quad r_S = 50{,}93 \qquad \textit{(IV)}$$

Em 3b) temos $k \cong 0{,}16$. *Substituindo em (III),*

Temos: $$0{,}16 = \frac{A_0}{A_S}\sqrt{2.g} = \frac{\pi.(r_0)^2}{\pi.(r_S)^2}\sqrt{2.9800}\,. \qquad \textit{(V)}$$

Substituindo (IV) em (V), obtemos $r_0 \cong 1{,}72mm$.

Medida obtida na garrafa $r \cong 4mm$

Devido aos arredondamentos e constantes desprezadas o valor calculado é diferente do real.

Comentário 6: A resposta aceitável desta questão (simples), já no final do projeto, obtida sem a ajuda dos monitores mostrou que o grupo estava mais familiarizado com o projeto.

4. Questionário

As três perguntas abaixo numeradas foram colocadas no fórum para serem respondidas individualmente. Grifamos alguns trechos relevantes nas respostas dos alunos.

a) Como você avalia a idéia de se utilizar projetos interdisciplinares para motivar o aluno em suas aulas teóricas ?

Artur: *É uma ótima idéia, pois possibilita uma noção melhor do conceito, além de exemplificar o uso da teoria.*

Bia: *Esta atividade ajudou-me bastante a entender a questão da interdisciplinaridade, já que as matérias como Cálculo e Física não são tão comuns no meu dia-a-dia e a maneira como o projeto foi conduzido contribuiu para uma percepção melhor nessas áreas de conhecimento.*

Cezar: *Com base neste projeto percebi uma maneira de mesclar as disciplinas Cálculo e Física, incentivar as pesquisas e leituras e visualizar aplicações da teoria, pois o experimento mostrou uma teoria em funcionamento.*

b) Explique de que forma este projeto contribuiu (ou não) para ajuda-lo a compreender as Equações Diferenciais.

Artur: *Quando você está trabalhando num projeto prático, você tem uma visão mais detalhada do que está ocorrendo na teoria Na aula não se consegue uma atenção 100%, pois às vezes o assunto é cansativo e desinteressante. Já na prática você vê situações novas e se descontrai.*

Bia: *A contribuição exercida pelo projeto no meu conhecimento sobre Equações Diferenciais foi muito importante, dado o fato de que os experimentos laboratoriais se mostraram incentivadores do aprendizado. A liberdade no calendário fez com que o conteúdo fosse absorvido no meu melhor momento.*

Cezar: *O projeto contribuiu para o aprendizado das Equações Diferenciais, pois pude estudar em casa, na faculdade e até no trabalho, já que tínhamos um prazo bom para a entrega. Também despertou minha curiosidade para pesquisar em livros, freqüentar a monitoria e perguntar aos professores.*

c) Faça sugestões para alterar este projeto e/ou para propor novos projetos.

Artur: *Acho que precisamos de projetos práticos de todos os assuntos tratados, não só de um ou outro. Também precisamos de laboratórios para realizar nossos projetos com segurança e conforto. Acredito que podemos aprender mais com projetos práticos.*

Bia: *Acredito que poderemos obter um melhor aproveitamento do projeto se o professor nos der mais referências bibliográficas. Também seria proveitoso se o professor já tivesse a sua resposta pronta do projeto. Isso facilitaria a orientação. Com essas pequenas correções acredito no potencial que esta nova forma de ensino pode ter na formação do aluno.*

Cezar: *Seria interessante se tivéssemos no fórum mais informações sobre arredondamentos e sobre modelos. Acredito nesta forma de avaliação, pois* *incentiva o aluno a buscar conhecimento durante o tempo que ele tem disponível, usando os vários recursos que ele tem hoje.*

5. Prova presencial

A última etapa do trabalho foi a realização de uma prova presencial, individual e sem consulta, onde foi cobrado o conteúdo, referente a Integrais e Equações diferenciais, idêntico ao conteúdo exigido para os alunos de graduação que não participaram do projeto. Foi feita uma comparação entre a média das notas de reprovação dos três componentes do grupo antes da realização do projeto, indicada na tabela abaixo como Ma (média anterior) e a média obtida pelos três componentes do grupo após a realização do projeto, indicada por Mp (média após o projeto).

Nome	Ma	Mp	%
Artur	4,3	5,5	28
Bia	3,8	5,0	32
Cezar	3,2	4,0	15,5

Verificamos que nos três casos tivemos um aumento das médias anteriores e em dois casos isto representou uma aprovação na disciplina. Há que se levar em conta que o projeto aqui apresentado é uma primeira versão e poderá ser melhorado a partir das críticas dos componentes do grupo, de uma readequação da infra-estrutura e das reflexões do professor orientador.

6. Considerações finais

Acreditamos que a Educação a Distância é um caminho a ser trilhado e que poderá trazer bons resultados quando associada às novas tecnologias e às aulas presenciais. Graças à autorização do MEC que permite a utilização de 20% da carga horária da disciplina com atividades não presenciais, podemos implementar o ensino semi-presencial já no início dos cursos de engenharia incluindo projetos interdisciplinares, com uma boa chance de melhorar os índices de aprovação em disciplinas como o Cálculo Diferencial e Integral.

A análise do trabalho mostrou que há um grande interesse dos alunos da engenharia por questões e projetos interdisciplinares. A modelagem permite interligá-los facilmente com as novas tecnologias e os recursos do EaD oferecem ao aluno a oportunidade de executá-lo “em seu melhor momento”. Quanto a nós professores, não podemos desperdiçar a oportunidade de nos prepararmos para uma nova era da educação, combinando os recursos de que dispomos e refletindo sobre os seus efeitos.

Referências bibliográficas

Abrantes, P. (1995). Avaliação e Educação Matemática. Série Reflexões em Educação Matemática, v1. Rio de Janeiro: MEM/USU-GEPEM.

Bassanezi, R. C. (2002). Ensino-Aprendizagem com Modelagem Matemática. São Paulo: Contexto.

Biembengut, M.S. & Hein, N. (2000). Modelagem matemática no ensino. São Paulo. Contexto.

Brasil. Ministério da Educação e Cultura. Portaria nº 2.353 de 18 de outubro de 2001. Diário Oficial da União de 18/10/2001, seção 1, p.18. Brasília, 2001.

Chevallard, Y. (2001). Estudar Matemáticas: O elo perdido entre o ensino e a aprendizagem. Porto Alegre: Artmed, 2001.
Fernandes, E. (2000). Fazer matemáticas compreendendo e compreender matemática fazendo. A apropriação do artefacto da matemática escolar. Quadrante. Vol. 6, Nº 1.
Ferruzzi, E. et al. (2003). Energia armazenada em um capacitor: Modelagem Matemática no Ensino Tecnológico. In: Cobenge, 2003, Rio de Janeiro. Anais, Rio de Janeiro.
Figueiredo, V. et al. Cálculo com Aplicações, Quem Somos. 2007. Disponível em http://www.ime.unicamp.br/~calculo/quemsomos/index.html. Último acesso 17/11/07.
Ministério da Educação e Cultura. (2000). Indicadores de qualidade para cursos de graduação a distância. Brasília.
Noss, R. & Kent, P. The Mathematical Components of Engineering Expertise Project proposal. Institute of Education, London WCIH0AL. 2000. Disponível em http://www.ioe.ac.uk/rnoss/MCEE . Último acesso em 15/12/07.
Rezende, W. O (2004). Ensino de Cálculo: Um problema do ensino superior de Matemática?. In: Mesa Redonda: “Educação Matemática no Ensino Superior” do VII ENEM, Rio de Janeiro: UFRJ.
Tori, R. (2003). Estratégias para inclusão de Educação a Distância em cursos presenciais In: Cobenge, 2003, Rio de Janeiro. Anais. R.J.
Villers, M. (1994). The role of tecnology in mathematical modeling. University of Durban. Durban, 1994.

Roberto Fecchio. graduado em Engenharia Elétrica pelo UNIFEI em Licenciatura em Matemática pela UNIFRAN, possui Mestrado em Matemática pela PUCSP e cursa Doutorado na mesma instituição. Atualmente exerce o cargo de professor de Cálculo Diferencial e Integral do Centro Universitário UNIFEI de São Bernardo do Campo e do Centro Universitário Fundação Santo André de Santo André. S.P. Brasil. rfecchio@terra.cim.br.

UNIÓN
REVISTA IBEROAMERICANA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA

Junio de 2010, Número 22, páginas 147-150
ISSN: 1815-0640

Dinamización matemática

Los postes y los gorriones.
Un problema de divisibilidad de números enteros.

Patricia Detzel.

El tema Divisibilidad de enteros representa una excelente opción para mejorar la enseñanza de la Matemática. Su fuerza radica en la facilidad de plantear problemas de distinta complejidad. El resolverlos es un ejercicio específico de aprendizaje.

La idea de este trabajo es compartir un problema que fue propuesto en un curso de maestría por un docente que cursaba un Seminario de Didáctica de la Matemática. El objetivo era presentar situaciones o actividades que provocaran un desafío y en los que la resolución exigiera una verdadera actividad matemática. Sin lugar a dudas el problema de los postes y gorriones cumplía con esos requisitos.

Problema de los gorriones y los postes:

"*Varios gorriones se posan en ciertos postes. Si sobre cada poste hay un gorrión quedan n gorriones volando. Si en algunos postes se posan n gorriones por postes, quedan n postes libres. Hallar el número de gorriones y de postes*"*.* (Se pide solución numérica).

Como se puede observar, éste aparenta ser un problema simple, de fácil comprensión que invita ingenuamente buscar rápidamente alguna posible solución. Digo ingenuamente porque veremos que cuando uno se involucra en su resolución se encuentra con una inagotable fuente de relaciones aritméticas.

En primer lugar es necesario elegir las variables: con g se indica el número de gorriones y con p se indica el número de postes.

Además tenemos: (1) $g_p + g_v = g$ (gorriones posados y gorriones volando)

(2) $p_l + p_o = p$ (postes libres y postes ocupados)

"Si sobre cada poste hay un gorrión quedan n gorriones volando", esto se puede traducir en $g_p = p$ y $g_v = n$, luego queda (1) $g = p + n$.

"Si en algunos postes se posan n gorriones por postes, quedan n postes libres", es decir, $p_o = \frac{g}{n}$ y $p_l = n$, luego queda (2) $p = \frac{g}{n} + n$.

Usando (1) y (2) se pueden hallar diferentes expresiones con dos variables. A continuación se muestran algunas de ellas.

Si se busca la relación entre *g* y *n*

$$\frac{g}{n} + n = g - n \quad \Rightarrow \frac{g}{n} + 2n - g = 0 \Rightarrow \quad \frac{g + 2n^2 - ng}{n} = 0 \Rightarrow g + 2n^2 - gn = 0$$

Se obtienen la siguiente ecuación entera:

(I) $g + 2n^2 - gn = 0$.

Si se busca la relación entre *p* y *n*:

$$p = \frac{n+p}{n} + n \Rightarrow \frac{n + p + n^2}{n} = p \Rightarrow n + p + n^2 = np \Rightarrow n^2 - np + p + n = 0$$

Se obtiene la siguiente ecuación entera:

(II) $n^2 - np + p + n = 0$

Y por último, si se busca la relación entre *p* y *g,* queda la siguiente ecuación entera:

(III) $2p^2 - 3pg + g^2 + g = 0$

Depende de las elecciones nos encontraremos con cualquiera de estas tres ecuaciones enteras para resolver. Las dos primeras tienen características similares en cuanto que tienen una incógnita al cuadrado y la otra lineal, en cambio la tercera tiene ambas incógnitas al cuadrado.

Se analizaran las resoluciones considerando las dos primeras.

Buscando soluciones enteras…

Luego de obtener cualquiera de las dos ecuaciones:

(I) $g + 2n^2 - gn = 0$.

(II) $n^2 - np + p + n = 0$

La cuestión es ahora encontrar la solución, pero interesa que *g* y *n* sean números naturales, pues están representando a la cantidad de postes y a la cantidad de gorriones.

A medida que se avanza en la búsqueda va cambiando la cuestión inmediata a resolver.

Es necesario comenzar a transformar las ecuaciones en expresiones equivalentes, en ambos casos podemos dejar una variable en función de la otra:

(I) $g + 2n^2 - gn = 0 \Rightarrow 2n^2 = gn - g \quad \Rightarrow 2n^2 = g(n-1) \quad \Rightarrow \frac{2n^2}{n-1} = g$

(II) $n^2 - np + p + n = 0 \Rightarrow \; n^2 + n = np - p \Rightarrow n^2 + n = (n-1)p \;\Rightarrow \frac{n^2+n}{n-1} = p$

En la resolución del problema es importante considerar la equivalencia de los siguientes conceptos:

Si la fracción $\frac{a}{b} \in \mathbb{Z} \quad \Leftrightarrow \quad \exists k \epsilon \mathbb{Z} \;/\; a = kb \quad \Leftrightarrow \quad b|a$

Entonces siguiendo con la resolución, ahora la cuestión a disipar es:

> "*¿Cuándo la expresión* $\frac{2n^2}{n-1}$ *resultará ser un número natural? , ó lo que es equivalente, hallar los* $n \epsilon \mathbb{N}$ *que hacen que* $\frac{2n^2}{n-1} \in \mathbb{N}$ *ó ¿Qué valores de n verifican que* $(n-1)|2n^2$*?*"

Aquí es donde diferentes nociones de divisibilidad serán de utilidad. Es importante recordar las siguientes propiedades:

<u>Propiedad 1</u>: Si $d|a \ y \ d|(a+b) \Rightarrow d|b$

Si $d|a \Rightarrow a = td \quad con \ t \in \mathbb{Z}$ (1)

Si $d|(a+b) \Rightarrow a+b = hd \quad h \in \mathbb{Z}$ (2)

Por (2) y (1) $b = hd - td = (h-t)d \Rightarrow b = kd \Rightarrow \quad d|b \quad cqd$.

<u>Propiedad 2</u>: $(a, a+1) = 1$. Es decir, dos números consecutivos son coprimos. Pues $si \ d = (a, a+1) \ \text{entonces} \ d|a \ y \ d|a+1 \ (\text{Prop1}) \Rightarrow d|1 \Rightarrow d = 1$

<u>Propiedad 3</u>: Si $a|bc \wedge (a,b) = 1 \Rightarrow a|c$

Si $(a,b) = 1, \ \exists x, y \in \mathbb{Z} / \ ax + by = 1$ (1)

Si $a|bc \Rightarrow bc = ka$ (2)

Multiplicando por c en (1) $c = cax + cby$

por (2) tenemos $c = cax + kay \Rightarrow c = a(cx + ky) \Rightarrow a|c$ cqd.

Avanzando en la resolución, se trata de hallar los $n \epsilon \mathbb{N} / \ (n-1)|2n^2$.

$\text{Si} \ (n-1)|2n^2 \Rightarrow (n-1)|2nn$

Como $n - 1 \ \text{y} \ n \ \text{son dos números consecutivos} \ (n-1, n) = 1$ [por Prop. 2].

$\text{Si} \ (n-1)|2nn \quad \text{y} \ (n-1, n) = 1 \Rightarrow (n-1)|2n$ [por Prop. 3]

$\text{Si} \ (n-1)|2n \ \text{y} \ (n-1, n) = 1 \Rightarrow (n-1)|2$ [por Prop. 3]

$\text{Si} \ (n-1)|2 \Rightarrow \quad n-1 = 1 \quad ó \ n-1 = 2$ [los divisores de 2 son $\pm 1, \pm 2$]

Luego $n = 2 \quad ó \quad n = 3$

Ahora conociendo los valores posibles de *n*, podemos hallar la cantidad de postes y gorriones:

Si $n = 2 \quad \Rightarrow \quad g = 8 \ \ y \ \ p = 6$

Si $n = 3 \quad \Rightarrow \quad g = 9 \ \ y \ \ p = 6$

De modo similar se puede plantear:

> *Hallar los n naturales tales que la expresión* $\frac{(1+n).n}{n-1} \in \mathbb{N}$ *ó*
> *preguntar por los n naturales tales que* $(n-1)|n.(n+1)$

Se parte de $(n-1)|n.(n+1)$ y además vale $(n-1,n)=1$ por ser consecutivos,

Si $(n-1)|n.(n+1)$ y $(n-1,n)=1 \Rightarrow \ (n-1)|(n+1)$.

Si $(n-1)|(n+1)$ esto es equivalente a pensar que $\frac{n+1}{n-1}$ es un número natural

$$\frac{n+1}{n-1}=\frac{n-1+2}{n-1}=1+\frac{2}{n-1}$$

La cuestión entonces ahora es plantear para que $n\epsilon\mathbb{N}$ $\frac{2}{n-1}$ es un natural.

Si se piensa en las condiciones del denominador, quedan las siguientes posibilidades:

$n-1=2 \ \Rightarrow n=3$

$n-1=1 \ \ \Rightarrow n=2$

Si $n=2 \ \Rightarrow p=6 \ \ y \ \ g=8$

Si $n=3 \Rightarrow p=6 \ \ y \ \ g=9$

Es decir la cantidad de postes es 6 y la cantidad de gorriones puede ser 8 ó 9.

A modo de cierre

La resolución de este problema implica un trabajo matemático en el que es necesario introducirse en la teoría de números de un modo simple pero profundo. La meta no es específicamente es estudio de esta teoría, sino compartir la *actividad matemática* involucrada, ejercitar la imaginación, buscar relaciones, evaluar hipótesis, generalizar, etc.

Patricia Detzel. Magíster en Educación en Ciencias, Orientación Matemática, Universidad Nacional del Comahue (U.N.Co). Docente del Área Álgebra del Dpto. de Matemática, Facultad de Economía y Administración. U.N.Co. Argentina. pdetzel@gmail.com

UNIÓN
REVISTA IBEROAMERICANA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA

Junio de 2010, Número 22, páginas 151-156
ISSN: 1815-0640

El rincón de los problemas

Uldarico Malaspina Jurado

Pontificia Universidad Católica del Perú
umalasp@pucp.edu.pe

Estimación y generalización

Problema

En la tabla siguiente, como parte de un estudio ecológico en una zona de la sierra, se daba información sobre la cantidad de integrantes de la población de cierta especie animal, en miles, durante seis años consecutivos. La información sobre el 2005, por un error, se borró:

2000	2001	2002	2003	2004	2005
4	4,8	5,76	6,91	8,29	

Asumiendo que se mantuvo la forma en que creció esta población, dar una estimación de los miles de integrantes que hubo en el 2005.

En esta ocasión, quiero compartir con los lectores una experiencia tenida en una clase de 90 minutos, con 65 alumnos y luego unos comentarios al respecto. Este problema lo propuse a mis alumnos del primer ciclo de estudios superiores, en un curso de matemáticas dirigido a estudiantes que optaron por estudiar especialidades en las que el uso de las matemáticas no es muy intensivo. Cabe mencionar que ya habíamos estudiado la función lineal y la función cuadrática.

La primera reacción de ellos ante el problema, fue usar una función lineal, pero pronto verificaron que el crecimiento de un año al siguiente no era siempre el mismo; así, por ejemplo, del 2000 al 2001 la población aumentó en 0,8 miles de habitantes, pero del 2001 al 2002 la población aumentó en 0,96 miles de habitantes.

Con cierto escepticismo, algunos alumnos pensaron en usar una función cuadrática, considerando el año 2000 como el "año cero" y así el punto (0; 4) como el vértice de una parábola y los otros datos como puntos de su rama creciente. Luego de unos cálculos, se convencieron de que esta situación no se podía modelizar con una función cuadrática[1].

De pronto uno de los alumnos dijo:

> *"El dato que se borró fue 9,95".*

Mi pregunta natural fue

> *"¿Y cómo sabes?",*

[1] Los cálculos correspondientes los considero al final, como un apéndice, para no distraer la atención del lector sobre el aspecto que ahora me propongo destacar.

a lo cual respondió con un gráfico como el siguiente:

4 4,8 5,76 6,91 8,29
0,8 0,96 1,15 1,38
0,16 0,19 0,23
0,03 0,04

Con estos resultados, el número correspondiente al 2005 lo estimó con la siguiente suma:

$$0{,}05 + 0{,}23 + 1{,}38 + 8{,}29 = 9{,}95$$

El esquema que hizo, le sirvió para conjeturar que la siguiente diferencia sería 0,05 y a partir de ese número, fue reconstruyendo los que faltaban, que en verdad son las sumas parciales de dos, tres y cuatro sumandos (en el orden en el que están escritos).

Admitimos el procedimiento como una forma de hacer la estimación, pero pedí a los alumnos que piensen en alguna otra forma de hacerla, de modo que nos facilite hacer estimaciones con menos cálculos y también para otros años, no necesariamente próximos al 2004.

Luego de unos segundos, una alumna dijo:

"*Tengo otra forma más sencilla*"

Al pedirle que la explique, mostró las siguientes divisiones:

$$\frac{4{,}8}{4} = 1{,}2; \qquad \frac{5{,}76}{4{,}8} = 1{,}2; \qquad \frac{6{,}91}{5{,}76} = 1{,}199652778; \qquad \frac{8{,}29}{6{,}91} = 1{,}199710564$$

Luego afirmó que puede considerarse que los cocientes son todos iguales a 1,2 y que en consecuencia, para el año 2005 la población de tal especie animal se obtendría multiplicando la población en el 2004 por 1,2.

Así, se tiene:

$$8{,}29 \times 1{,}2 = 9{,}948$$

Fue gratamente sorprendente para todos que esta forma de hacer la estimación esté tan próxima a la estimación anterior (9,95) ¡Solo 2 milésimas de diferencia! (o sea 2 integrantes de la población, recordando que la información está en miles de habitantes).

Hice notar que este modelo para estimar la población en el 2005 es fácilmente usable para estimar la población en otros años, pues observamos que considerando el 2000 como el "año cero" y en consecuencia los otros como los años 1, 2 , 3, etc., podemos llamar f a la función que asigna a cada año el número de integrantes de esa población; y usando la notación funcional, escribimos del siguiente modo la información dada:

$$f(0) = 4; \quad f(1) = 4{,}8; \quad f(2) = 5{,}76; \quad f(3) = 6{,}91; \quad f(4) = 8{,}29$$

Teniendo en cuenta las divisiones hechas y asumiendo que se mantendrá el cociente 1,2 al dividir la población de un año entre la población del año anterior, tenemos que:

$f(0) = 4$
$f(1) = 4{,}8 = 4(1{,}2)$
$f(2) = 5{,}76 = 4{,}8\,(1{,}2) = 4\,(1{,}2)\,(1{,}2)$; o sea $\quad f(2) = 4\,(1{,}2)^2$
$f(3) = 6{,}91 \approx 5{,}76\,(1{,}2) = 4\,(1{,}2)^2\,(1{,}2)$; o sea $\quad f(3) = 4\,(1{,}2)^3$
$f(4) = 8{,}29 \approx 6{,}91\,(1{,}2) = 4\,(1{,}2)^3\,(1{,}2)$; o sea $\quad f(4) = 4\,(1{,}2)^4$

En consecuencia, para el año 2005:

$f(5) = 8{,}29\,(1{,}2) = 4\,(1{,}2)^4\,(1{,}2) = 4\,(1{,}2)^5$; o sea $\quad f(5) = 4\,(1{,}2)^5$.

Recordando que $(1{,}2)^0 = 1$ y que $(1{,}2)^1 = 1{,}2$ también podemos escribir

$$f(0) = 4\,(1{,}2)^0 \qquad \text{y} \qquad f(1) = 4\,(1{,}2)^1$$

y, generalizando, asumimos que

$$f(x) = 4\,(1{,}2)^x, \quad x \in \{0; 1; 2; 3; 4; 5; \ldots\}$$

Así podemos estimar, por ejemplo, que el número miles de habitantes de tal población en el 2010 será

$$f(10) = 4\,(1{,}2)^{10} = 4\,(6{,}191736422) = 24{,}76694569 \approx 24{,}77.$$

Ciertamente, el problema fue propuesto pensando en llegar a una función exponencial y ya habíamos llegado. Con la experiencia desarrollada, se allanó el camino para explicitar y comentar otras propiedades de esta función, relacionadas con la variación porcentual (incremento o decremento relativo en porcentaje) y la transformación de progresiones aritméticas en progresiones geométricas. Específicamente:

a) La variación porcentual de la población, considerando dos años cualesquiera, se obtiene con la conocida fórmula $\dfrac{Valor\ final - Valor\ inicial}{Valor\ inicial} \times 100\%$. Si consideramos como valor inicial la población de un año cualquiera x y como valor final la población h años después, tal fórmula se puede escribir como

$$\frac{4(1{,}2)^{x+h} - 4(1{,}2)^x}{4(1{,}2)^x} \times 100\%$$

Y es fácil ver que esta expresión es igual a

$$[(1{,}2)^h - 1]\text{x}100\%,$$

lo cual nos dice que no depende de x. Vemos que solo depende de h, que es la diferencia entre los años considerados. Es claro que si tomamos años consecutivos, el valor de h es 1 y entonces la variación porcentual es

$$[(1,2)^1 - 1]\text{x}100\% \; ;$$

es decir, del 20%. Esto nos permite decir que, según el modelo asumido, la variación porcentual de la población de un año al siguiente es del 20%.

Si consideramos otro valor de h, por ejemplo 3, tendremos que la variación porcentual de la población cada tres años es

$$[(1,2)^3 - 1]\text{x}100\% \; .$$

O sea 72,8%.

b) En la modelización hecha, la secuencia de años considerados es

$$\{0;\ 1;\ 2;\ 3;\ 4;\ 5\},$$

que es una progresión aritmética de razón 1; y la secuencia de valores correspondientes, según la función encontrada es

$$\{4;\ \ 4(1,2);\ \ 4(1,2)^2;\ \ 4(1,2)^3;\ \ 4(1,2)^4;\ \ 4(1,2)^5\}$$

que evidentemente es una progresión geométrica de razón $1{,}2$.

Luego se pasó a definir la función exponencial de manera más general, a graficarla, considerar los casos decrecientes y enunciar las propiedades características de la función exponencial, a partir de las observaciones hechas a la función encontrada. Se destacó la propiedad característica de la función exponencial

$$g(x) = b\,a^x$$

de tener variaciones porcentuales constantes, correspondientes a variaciones iguales en la variable independiente (fijado el cambio de la variable independiente en h unidades) y de hacer corresponder a toda progresión aritmética de razón h una progresión geométrica de razón a^h. [2]

Comentarios

1. La experiencia con este problema nos lleva a reflexionar sobre la estimación, la conjetura, la generalización. La primera está relacionada con aspectos prácticos de la matemática en la vida cotidiana, pues es natural que con frecuencia estemos haciendo estimaciones y no necesariamente con recursos formales de la matemática; por ejemplo, al estimar el tiempo que nos tomará hacer determinado trabajo, el monto que tendremos que pagar por ciertas compras en un mercado, el tiempo que tardaremos en llegar a determinado lugar, etc. En todos los casos, para estimar se busca algún referente y hay diversas técnicas de estimación, como hacer comparaciones, simulaciones, muestreos, modelizaciones, interpolaciones o extrapolaciones. Ciertamente, es un aspecto

[2] Un tratamiento formal y riguroso y orientado a profesores de la enseñanza media, se encuentra en el libro de Elon Lages Lima y colaboradores (2008). *La Matemática de la Enseñanza Media*, Vol.1. Lima: IMCA.
En la tesis de Maestría en Enseñanza de las Matemáticas de Elizabeth Advíncula (2010), defendida en la Pontificia Universidad Católica del Perú, hay una investigación interesante para la enseñanza de la función exponencial, en el marco de las situaciones didácticas.

muy importante de la matemática, de la cual debemos ser muy conscientes los profesores y brindar experiencias de estimación a nuestros estudiantes.

2. El problema de estimación propuesto se resolvió mediante comparaciones y una modelización con una función exponencial. Para ello se observó la información recibida, se hicieron unos cálculos (las diferencias sucesivas en la primera forma de obtener la estimación y las divisiones entre valores para años consecutivos en la segunda), se asumió cierto comportamiento aproximativo (observando las diferencias en la primera forma, se asume que la siguiente diferencia será 0,05; y en la segunda, observando que los cocientes son 1,2 o muy cercanos a este valor, se asume que todos los cocientes serán 1,2) y con estos supuestos se encontró un valor estimado del dato buscado. Luego se pasó a generalizar (se asumió como modelo la función exponencial $f(x) = 4\,(1{,}2)^x$). Así se posibilitó otras estimaciones y se aprovechó la notación funcional para encontrar propiedades del comportamiento de la población.

   Al optar por un modelo, juega papel importante la intuición y la conjetura, interactuando con la formalización. Cuando unos alumnos pensaron usar un modelo lineal o un modelo cuadrático, algunos cálculos relacionados con estos modelos, hicieron que se abandone tales intentos.

3. La generalización es uno de los procesos importantes del pensamiento matemático. Ciertamente, pasar de lo particular a lo general es un proceso que va más allá de las matemáticas y es materia de estudio en la epistemología y en las diversas ciencias. El enfoque ontosemiótico de la cognición e instrucción matemática, conocido como EOS, lo considera en las facetas duales extensivo/intensivo y ostensivo/no ostensivo y un trabajo interesante en esta línea es el artículo de V. Font y A. Contreras "*The problem of the particular and its relation to the general in mathematics education*" publicado en Educational Studies in Mathematics, 2008, 69:33-52.

   Ciertamente, la intuición y las conjeturas están vinculadas con el paso de lo particular a lo general; y las afirmaciones generales están vinculadas con la formalización y la demostración

   Es importante que los docentes, cualquiera que sea el nivel educativo en el que ejerzamos la docencia, tengamos claridad sobre estas perspectivas.

4. Un breve comentario final es el relacionado con la continuidad de la función exponencial (que se refleja al hacer las gráficas) y el carácter discreto que tiene el problema y el tratamiento que se ha hecho. La vinculación entre lo discreto y lo continuo es otro aspecto importante en la matemática y en la educación matemática, en el que se ha investigado y todavía hay mucho que investigar. Nuestras clases y las reacciones de nuestros alumnos nos brindan elementos para ello.

Apéndice

Si la situación se pudiera modelizar con una función cuadrática, considerando el punto (0; 4) como el vértice de una parábola y los otros datos como puntos de su rama creciente, tal función sería de la forma

$$f(x) = a\,(x - 0)^2 + 4$$

o sea $$f(x) = a\,x^2 + 4$$

Se determina el coeficiente a usando un punto de paso, por ejemplo el punto (1; 4,8); así:

$$f(1) = 4{,}8 = a\,1^2 + 4$$

de donde $a = 0{,}8$ y la forma concreta de la función sería

$$f(x) = 0{,}8x^2 + 4$$

Es fácil verificar que este modelo cuadrático no corresponde a la situación descrita, pues

$$f(2) = 0{,}8(2)^2 + 4 = 7{,}2$$

que es diferente al valor 5,76 que se da en el cuadro para el año 2002.

UNIÓN
REVISTA IBEROAMERICANA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA

Junio de 2010, Número 22, páginas 157-167
ISSN: 1815-0640
Coordinado por
Agustín Carrillo de Albornoz

Un escenarios dinámico de exploración matemática

Liliana M. Saidón; Julio Bertúa; Jorge O. Morel

Resumen

Integrar geometría, álgebra y análisis dinámicamente en actividades mediadas por un software libre como GeoGebra, involucra un reto disciplinar y didáctico para docentes y estudiantes y una recíproca alternativa exploratoria conceptual para la enseñanza y aprendizaje de matemática. Pone en juego, desde ciencias básicas, competencias metamatemáticas propias de abordajes técnicos y matemáticas de sus aplicaciones, «proyectuales» en sentido amplio.

Abstract

Integrating geometry, algebra and calculus in computer-mediated activities by means of a free software such as GeoGebra is a challenge for all participants involved, and a reciprocal exploratory conceptual alternative for the teaching and learning of mathematics at pre-university level. Such approach allows development of meta-mathematical competences in technical fields at introductory levels in sciences and enhances "projecting competences.

Resumo

Integrar geometria, álgebra e análise dinamicamente em atividades mediadas por um software livre como GeoGebra, envolve um desafio disciplinar e didático para docentes e estudantes e uma recíproca alternativa exploratória conceitual para o ensino e aprendizagem de matemática. Põe em jogo, desde ciências básicas, competências metamatemáticas próprias de abordagens técnicas e matemáticas de suas aplicações, «projetais» em sentido amplo.

1. Introducción

Diseñamos situaciones didácticas de matemática dinámica empleando un programa libre en cuyo desarrollo participamos. GeoGebra da pie a un tratamiento algebraico, analítico y geométrico, dinámicamente integrado. Su proyecto promueve el diseño colaborativo, en ambientes *wiki* de aplicaciones organizadas. Admite un abordaje tanto experimental cuanto conceptual respaldando el planteo, modelización y resolución en procesos que serán también objeto de indagación.

Consideramos que tal integración, en proyectos adecuados, pone en juego, competencias «metamatemáticas» de orden técnico y matemáticas de sus aplicaciones. Secuenciamos esta comunicación, desarrollando uno de los problemas, que dará contexto a un recorrido, desde el análisis a las conclusiones.

1.1 La función del caso-ejemplo

Consideraremos un ejemplo, articulando a través de interrogantes lo descriptivo a lo explicativo, en un encuadre característico de la ingeniería didáctica[1]:

[1] Se sintetizan, en fichas de cátedra referidas, explicaciones sobre el marco teórico y la metodología de la ingeniera didáctica. Según [Artigue2005] "*Para realizar un proyecto determinado, la ingeniera se basa en los conocimientos científicos de su dominio y acepta someterse a un control de tipo científico*.".

- El caso de estudio operará como hilo conductor para:
- Partir de una propuesta sobre un triángulo.

  Esta propuesta permite...

  - propiciar cuestionamientos que metodologías cuyo alcance supera el contextual, deviniendo modelo de un tipo de problemas
  - plantear más de un problema, por variaciones sobre los del mismo tipo
  - adoptar distintas –e incluso inesperadas– perspectivas.
- Analizar la actividad emergente

Respecto de lo desencadenado, destacaremos que el docente, además de desenvolver una actividad frente a los alumnos, o con ellos, proyecta y comparte, un modelo de prácticas. Lo meta-comunica en el contexto del desarrollo del que es guía y responsable: enfrentar el planteo, discutir su interpretación, contrastar posibles representaciones que supeditan diversos grados de dificultad de resolución.

Organiza prácticas competentes a tareas, técnicas, tecnologías y teorías propias de lo «proyectual», en el sentido que al término le da ampliamente [Simon1973] al proponer dotar a la ingeniería de un sustrato distinto del de ciencias que, como la matemática, le sirven de base: incluir lo contingente. Plantear problemas y resoluciones que superen lo necesario, al formular modelos para estudiar, más que cómo son las cosas, cómo podrían ser. En resumen, que articulen diseño y proyecto. Iremos describiendo el tenor de las competencias situadas cuya emergencia se procura.

2. Desarrollo

2.1. El planteo de un caso con inusitado tenor de consigna

El desafío puede presentarse en los siguientes términos: «¿Cómo dar con los triángulos de perímetro dado que tengan un área *k* veces la máxima?»

Frente a un planteo a sabiendas ambiguo, aparece una notoria ruptura de contrato pedagógico[2]. Se transgrede la cláusula global que fija toda consigna como acabadamente clara, accesible, consabida y cerrada; contigua aplicación de lo enseñado/explicado para poner a prueba, sin perder tiempo, lo aprendido. Esta, por el contrario, desencadena una serie de consultas, incluso airadas.

Abre posibilidades de negociar significados[3]: exigen explicaciones alumnos que suelen obviarlas hasta cuando las ofrece el docente –al presentar un tema–. Como sus demandas no exponen a descalificación, por adjudicarse al tenor de la consigna,

[2] Para ampliar consideraciones sobre el concepto de contrato didáctico, contrato pedagógico, costumbre y habitualidad en ámbitos institucionales, referimos a los autores correspondientes: [Brousseau1988]; y [Filloux1974]. Desde perspectivas más genéricas, es decir, no vinculadas a la especificidad de los saberes motivo de la interacción, se proponen conceptos como el de contrato pedagógico. Incluso más amplios, como la de costumbre y hasta el de campo configurado por el *habitus* [Bourdieu1972].

[3] En sucesivos documento [Godino2004], estudia conceptualmente esta cuestión,.

hacen oír sus voces[4]. El diálogo reemplaza al habitual silencio con que se aceptan indicaciones[5].

2.2. Sin Datos Numéricos rumbo a la Figura de Análisis

Este problema no presenta datos, al menos numéricos, y en lugar de «lo dado» aparece lo supuesto: asumir ***k*** sin precisar su valor y aceptar la responsabilidad de averiguar cuál es tal «área máxima» y en qué condiciones se registra.

La negociación dará razón de ser a un recurso «para» y/o «metamatemático» crucial: la dinámica *figura de análisis* cobra entidad como medio para ir interpretando un planteo, en tarea mancomunada y acaso debate supervisado por el docente[6].

El planteo se bosqueja y se va pasando del boceto dinámico al modelo, perfilado como tal en tanto acata la demanda, metamatemática, de resultar representativo con el mayor grado de generalidad posible[7].

2.3. Planteo dinámico de triángulo vía inecuaciones en acción geométrica

Con el utilitario, se traza un esbozo del planteo, específico y suficientemente general como para ampliar su alcance[8].

- trazamos frente a los alumnos, un segmento de longitud asimilable al perímetro, se le adjudica una longitud dinámica, concreta pero ajustable.
- El extremo izquierdo del segmento, será el vértice A del triángulo y, aparentemente, sólo resta establecer la posición de los otros dos.

Aparece una primera cuestión de debate matemático –irán apareciendo más sorpresas– que no se evidenciaba a nivel de la consigna: sin valores «dados», ¿cómo empezar el trazado?, ¿a qué medidas se recurre? Esta cuestión, que no siempre se explicita, exige remontar una acendrada costumbre escolar: los dibujos representativos de figuras o construcciones descansan en el conocimiento de alguna medida concreta. Así, se relaciona, por un lado con lo sensible y por otro con lo aritmético –por no algebraico–.

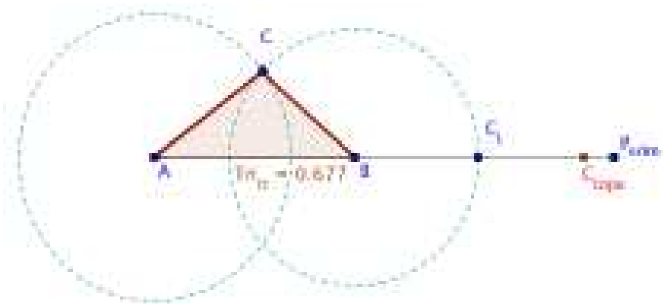


Fig. 1: Trazamos los triángulos posibles

[4] El diseño de consignas propiciadoras de diálogo, se desarrolla en Fichas y notas de [Brousseau2004].
[5] [Young1993] describe críticamente fenómenos de comunicación en situaciones de enseñanza relacionados con roles distribuidos entre los actores, docente y alumnos, sus voces y silencios. [Chevallard1997] analiza sus tácitas atribuciones. Algunas se anotan en Fichas de referidas.
[6] [Legrand1993] analiza las condiciones para un genuino debate en clase y esta, así como otras situaciones de intercambio se resumen en las fichas de cátedra recomendadas [Saidon2001].
[7] Lo metamatemático circula en general de modo implícito. Puede involucrar métodos, estructuras, organización o principios.
[8] Sobre consideraciones sobre el modo de representar con GeoGebra, conviene consultar el manual recomendado [Saidon2001-2009].

En contraste, esta propuesta parte de lo algebraico. Porque exige modelización hasta para el planteo. Más aún, da lugar a condiciones que cumplen infinitos pero simultáneamente, no arbitrarios triángulos. Suelen ubicarse en cualquier posición el vértice B y luego, el C y se traza el triángulo resultante de la intersección de sendas circunferencias (Figura 1).

Regularidades de comportamiento teóricamente conocidas, harán su aparición a lo largo de las prácticas de tanteo sobre la figura de ensayo. Irrupción sorpresiva pese a que propiedades matemáticas básicas dan cuenta de su inteligibilidad[9].

2.4. Tanteo Dinámico

El tanteo dinámico del boceto de ensayo tiene un propósito explícito: dar con el –o los– triángulos de mayor área.

La exploración desencadena una experiencia reveladora: el triángulo ocasionalmente, deja de existir. Esto suele desatenderse y es obviado aún por estudiantes de sólida formación matemática. Acaso la denegación evita la inesperada perturbación a la prosecución tenaz de un logro –como el del área máxima–.

Tal falta de reacción –ante lo que debiera «saltar a la vista» según espontáneas expectativas empiristas–, deja al docente oscilando entre la prescindencia, el sondeo discreto y la procura de intervenciones adecuadas[10].

2.5. Inconmensurabilidad inicial de las teorías de apreciación

Verificamos en repetidas ocasiones que la desaparición del triángulo es obviada por los estudiantes, y aún nos desconcierta. Según registramos e inferimos: sólo al reiterarse y ganar cierta previsibilidad en acción, este fenómeno se integra consistentemente a la apreciación y, recién entonces, se asume plenamente este nuevo problema, como tal.

Procuramos sucesivas explicaciones sobre la omisión. Máxime cuando la expectativa –de optimismo didáctico–, hubiera podido ser que frente a lo observado, surgiera la espontánea elaboración de conjeturas explicativas.

Por el contrario, lo que se verifica, es que el fenómeno siquiera resulta observable inicialmente y sólo se lo integra cuando ya no se lo puede evadir –acaso cuando es dable una pre-conjetura–.

Convenimos en que, si bien las conjeturas pueden aparecer en diversas formas, no es habitual que surjan de la observación y no toda vinculación entre elementos resulta observable a priori.

Por evidente que aparezca a los ojos del docente, es poco probable que se elaboren conjeturas por registro visual. Es más factible que se despierten sospechas metódicas a partir de un patrón de resultados proveniente de acciones propositivas. Es decir, que pretenden alcanzar un objetivo, en desafíos que interpelan, por

[9] [Doaudy1986] analiza la dialécticas herramienta objeto involucrada en esta cuestión. La inversa resignificación y actualización de un saber supuestamente dominando ya como objeto que, sin embargo, debe re-conocerse en este contexto, se estudia en el texto de [Piaget1989].
[10] Las relaciones entre los resultados de la investigación en didáctica y el desempeño docente en clase, aparecen vívidamente en tales situaciones. Referimos a [Brousseau2002] al respecto.

ejemplo: con este estilo: «¿cómo harías para…?». En este caso, registrar el rango de variaciones respecto del área máxima.

Cabe cuestionar en qué condiciones, entonces, el registro en relación con el propósito, lleva a incluir como observable la desaparición del triángulo.

2.6. De la geometría sensible a los modelos algebraicos

No bastará, –para explicar la desaparición–, con «aplicar» las condiciones de existencia del triángulo que –estudiadas en el ámbito de la geometría sensible– no parecen re-conocerse en este contexto.

Incluso cuando se distinguen tales “condiciones”; cruzarlas al marco algebraico como inecuaciones para fijar los límites de la posición de cada vértice, no es banal.

Se ha desencadenado otro conflicto contractual: una transgresión de la convencional estructura estanca de administración de «aplicaciones». Se extraña el prototipo que ofrece la materia pre-organizada, con conceptos, definiciones, deducciones y aplicaciones preconcebidas; la sucesión de problemas que ilustran respuestas delimitadas (e inconexas, desde la perspectiva de muchos estudiantes). El clásico abordaje y tratamiento estático de los objetos parece haber cedido su lugar al relacional, proyectado y transitado en el medio dinámico.

3. Crisis y Simulación

Se hace palpable la crisis que, cuando se supera, deja como saldo la conquista de una competencia disciplinar y meta-cognitiva decisiva. Crucial, porque forma parte del repertorio básico requerido a vierto nivel: la síntesis situada y oportuna de técnicas, tecnologías y/o teorías, como herramienta funcional.

Esto lleva a cuestionarse: «¿Cómo puede el resultado de estos ensayos dinámicos informarnos de relaciones que debiéramos haber previsto dado que corresponden a propiedades geométricas elementales?».La respuesta no es trivial y presenta cierto paralelismo con aportes de [Simon1973] sobre la simulación.

Así como “l*a simulación no es mejor que los supuestos que entraña*”, un utilitario dinámico no puede hacer más que lo que la construcción planteada fija en cuanto a relaciones entre sus elementos. En otras palabras, la simulación puede decirnos lo que no sabemos o lo que no tuvimos en cuenta. Ya que puede resultar difícil descubrir lo que se desata. Puede patentizar qué es lo que suponen y desencadenan las vinculaciones que fijamos en términos de renovadas relaciones entre elementos resultantes, al implementar la construcción.

Una construcción dinámica constituye un sistema de relaciones entre elementos, pero no es sencillo hacer un empleo directo y anticipado de todas las derivaciones resultantes: debe recorrerse el sistema con un propósito, para distinguir consecuencias de las definiciones, propiedades y vinculaciones establecidas.

La exploración, guiada por propósito/s específico/s, lleva a indagar en los mecanismos derivados de cada construcción dinámica y puede procurarnos medios de distinción y hasta de (re)descubrimiento. Aún conociendo las relaciones establecidas, sólo al explorarlas notamos las implicaciones de las reacciones cruzadas derivadas de las condiciones iniciales fijadas. Esto no es sino una puesta en acción dinámica de lo que habitualmente ofrecen las manipulaciones en álgebra, que analizamos con los recursos del cálculo.

La integración de marcos matemáticos en torno a un problema cuyo modelo se va definiendo en el devenir de la resolución, actualiza competencias que el docente proyecta en esta instancia formativa, que la situación propicia.

3.1. Problemas de Diseño / Diseño de Problemas

Es propio de ciertos tipos de problemas que el sistema comporte elementos cuyas relaciones y pautas de actuación se conocen: la dificultad la entraña predecir cómo se comportará el conjunto dinámico y relacionado de sus componentes[11].

Sin agotar sus derivaciones, pasamos a estudiar el problema como ejemplo de un tipo de situación didáctica y organización disciplinar, de matemática «proyectual».

4. Rasgos del Caso: Matemática Proyectual

Un utilitario que habilita la modelización dinámica desde el planteo, la representación y el análisis, abre varias puertas simultáneamente. Tanto para la resolución cuanto para el diseño de problemas. Establece un replanteo disciplinar por el alcance de lo que nos podemos cuestionar, antes que por el modo de resolver lo planteado.

En un recorrido habitual, los primeros planteos con tal herramienta, suelen dinamizar explicaciones para que los estudiantes las exploren, corroborando lo que se estudia. Es representación usual que una capacitación procure un modo de enseñar, con nuevos medios, lo mismo. Sin desmedro del valor involucrado, las tecnologías integradas a la práctica profesional, docente y disciplinar, las TICs en particular, pueden aspirar a ser más que un recurso didáctico privilegiado.

Al avanzar en producciones colaborativas, prospera el empleo del banco de pruebas conceptual dinámico. Se perfilan problemas que, como el ilustrado en el caso desplegado, ponen en juego, desde ciencias básicas, competencias «metamatemáticas».

Son propuestas que llevan, por ejemplo, a indagar cómo funciona una construcción. Pasando de:

1. **experiencias simples** para ver lo que sucede. «Mover y ver qué pasa» Se registra simultáneamente, comprensión de lo que habría que hacer e incomprensión de las relaciones que permitirían hacerlo.
2. **nivel de exploración intermedio**. En que están más claros los fines a alcanzar pero el empleo de los medios permanece vinculado a ensayos con logros parciales o fracasos no siempre comprendidos. En este nivel, pueden contestarse algunas preguntas del orden del: ¿Cómo…? y empiezan a formularse otras: “Si lo desbaratara a propósito, ¿podría volver a conseguirlo?”; “¿Sólo de este modo?”; “¿Siempre así?”; “Puedo explicarle a un compañero cómo lograrlo sin operar el ratón (o *mouse*) directamente?” Interrogantes de este

[11] Los presupuestos de [García1996], complementan en debate a los de [Simon1973].

tipo pueden jalonarse en intervenciones docentes. Las del orden de “¿Cómo saber si se está cerca o no, de cada logro?”, abren el siguiente nivel.

3. **nivel de experimentación**

-*instrumental*, en que aparecen anticipaciones y programas de acción.

-*de modelización*, es preciso concebir y fijar indicadores para el control.

Los rasgos «proyectuales» se distinguen en este proceso que se recorre operando y analizando el resultado de cada intento. Inicialmente es frecuente el ensayo y error. Paulatinamente, se gana en responsabilidad sobre el resultado de cada intento, a medida que se distinguen relaciones causales entre lo que se hace y lo que sucede.

En la actividad «proyectual» se integran también tareas y técnicas que permiten delimitar lo que no resulta y devienen observables las relaciones funcionales en juego.

4. 1. Metodologías en el Recorrido

En cada uno de los momentos del recorrido, pueden distinguirse tareas que ponen en juego ciertas conjeturas –las preliminares pueden circular en acción–. Descartar una, habilita el surgimiento de otra, enriquecida por el rescate constructivo de lo que no resulta. Constructivo, sobre todo, cuando en lugar de obnubilar, el “fracaso” abre paso a una explicación, al menos tentativa, de las condiciones de alcance y límites de lo involucrado. Cuestionar, buscar indicios para elaborar una respuesta acorde y decidir en consecuencia, es una actividad que permite tanto poner en juego propiedades, condiciones y correlaciones presentes cuanto distinguir propiedades excluidas, requerimientos que no se cumplen, condiciones que no se verifican. Se institucionaliza el control y registro de lo que no corresponde o tiene relación con lo intentado, dando entidad a este modo de extender resoluciones, más allá de este contexto[12]. Tanto en tareas propias de este problema, como en las que, eventualmente, encontremos en otros contextos y/o resulten del mismo tipo.

Tal evaluación positiva, no ya del «error del que se aprende» sino de las tareas, técnicas y metodologías para delimitar alcances y descartar conjeturas, tiene poca tradición escolar pese a su implícito reconocimiento en prácticas académicas, profesionales y disciplinares.

4.2. Cambios en la índole de las tareas

Alcanzamos un nivel de avance sustancial en la representación del planteo. A expensas de la figura de análisis y tanteo, nos hemos deslizado a la resolución, sin saltos notorios entre una actividad y otra. Destaquemos el establecimiento de los extremos límites de la posición de cada vértice, por ejemplo. Puede haber requerido manipulación algebraica para re-formular las conocidas condiciones de existencia del triángulo en términos de comparación con el perímetro –o, mejor, del semi-perímetro–. En esta instancia, la experimentación involucra el estudio de una obra u objeto matemático como tal.

[12] [Brousseau1994] define la «institucionalización» en el texto de referencia.

Las inecuaciones correspondientes instrumentaron la mejor preparación del banco de pruebas en que va deviniendo la construcción, al modelizar el planteo. Si no se conocían o recordaban las condiciones de existencia del triángulo, emergen re-significadas desde el contexto que las requirió como herramientas. Contexto que en el mismo movimiento, da razón de ser a su estudio como objeto. Esta tensión dialéctica propia de la dualidad herramienta-objeto[13], va a reiterarse al avanzar sobre el modelo, hacia la resolución.

4.3. Entre modelos y simulaciones

Para averiguar cómo *funciona* la construcción, se identifican indicadores diagnósticos.

Precisos, de buen grado de generalidad, que lleven a establecer mejores procedimientos y guíen los ensayos. Como medir y controlar el área del triángulo construido, en un registro que mantendrá su índole causal, integrando otras representaciones.

Cuando se evidencia que es preciso indagar los cambios –incrementos, decrementos, anulación, registro de valores máximos, etc.–, se asume otro tenor de tareas Evaluar el régimen de cambios de una medida, es el tipo de tarea por excelencia, del análisis.

Los estudiantes pueden encontrar sorpresiva esta demanda: el proceso hacia dar con el resultado del problema, no involucra un valor –correcto, preciso–, ni siquiera una operación algebraica, sino la indagación del modo en que se registran modificaciones. Es, inicialmente una tarea de índole cualitativa, comparada con las de otro tipo de problemas. Es más, en la medida en que estamos considerando cómo funciona el modelo producido, estamos recurriendo a una simulación «intramatemática».

4.4 La experiencia del lugar geométrico y su exploración

Con el utilitario, puede trazarse el lugar geométrico del vértice C de cada triángulo de igual base, al modificar la proporción entre los otros dos lados. Este paso suele requerir una intervención docente, para explicar, además de la operatoria, sencilla, qué se entiende por lugar geométrico.

El trazo resultante parece familiar. Se ve como una elipse y es probable que lo sea. Incluso, los valores de altura y área, varían de un modo afín. Se juzga necesario corroborar lo aparente y con el utilitario, arriesgamos la primera comparación. Se contrastará el lugar geométrico con la cónica que atraviesa cinco de sus puntos.

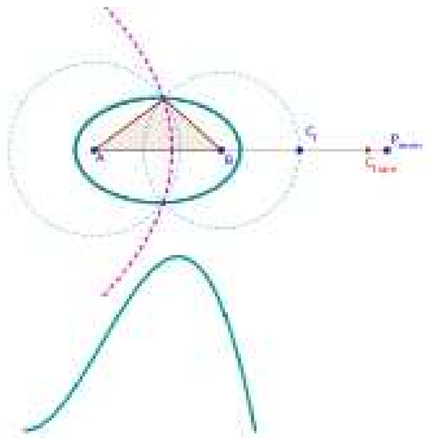


Figura 1: Esbozo del modelo

[13] [Douady 1986] desarrolla es tablecer la potencialidad del interjuego de marcos diversos en matemátic

El docente da explicaciones y la operatoria se salda con facilidad. El alcance de la comparación no resulta inteligible para los alumnos. Máxime que el ajuste es preciso, sin diferencia entre trazos que coinciden y se superponen, Incluso se desencadena confusión cuando la comparación booleanas con el signo de interrogación, no puede llevarse adelante porque operaría sobre dos objetos de diferente orden.

Es necesario estudiar ambos como objetos específicos: el lugar geométrico y la ecuación y representación de la cónica, para darle a cada uno, la entidad correspondiente. Las técnicas, así, aparecen explicadas tecnológicamente y estudiadas a nivel teórico.

4.5. Experimentando hacia la formulación

Para resolver el problema, es preciso relacionar las proporciones entre los lados y la consecución del área máxima.

Hay una, casi observable, para cada base. Pero es preciso encontrar qué ejemplar de la familia de bases-elipses nos ofrece la mayor de las mayores áreas. Entre lo que habilita el gráfico de estas correlaciones –que se aprecia en la Figura 2–, el registro de datos y el rescate de fórmulas –como la de Herón–, nos acercamos desde distintos frentes a cierta convicción, que se puede terminar de corroborar recurriendo al cálculo.

La variedad de ejemplares de distintas familias de triángulos que cumplen la consigna, pueden contemplarse aún sin contar con una formulación precisa. Esta respuesta abierta se dirige a nuevos interrogantes de orden cualitativa y matemáticamente más avanzados. Los dejamos a su cargo en la continuidad de colaboraciones que, confiamos, abra este intercambio.

5. Conclusiones

Recapitulamos, lo que acorde con nuestra experiencia resulta singular:

- Esclarecer un planteo, simple en apariencia, requirió una tarea cooperativa
- Interpretarlo, intercambios de debate en clase, guiado por el docente
- Trazar un boceto representativo, llevó a explicitar relaciones
- Explorar el comportamiento de la construcción, abrió un registro inicial, causal
- Considerar dinámicamente la formulación algebraica y la representación gráfica, llevó a renovar las tareas del análisis matemático.
- Examinar el boceto como soporte de inferencias y ensayos, lo elevó a modelo en términos de simulación dinámica.
- Estudiar el modelo, llevó a cruzar aportes de diversos marcos matemáticos
- Reformular la generalidad del modelo, a validar sus limites y alcance
- Establecer sucesivas conjeturas, escalonó etapas de progresiva inteligibilidad
- Distinguir respuestas del conjunto de diversas pero no arbitrarias resoluciones posibles, dejó abierta la necesidad de recabarlas sistemáticamente.

En este recorrido, se actualizaron competencias situadas de aplicación matemática a un problema en que, a nivel estrictamente disciplinar:

- operamos con inecuaciones para establecer extremos correspondientes a las condiciones de existencia del triángulo

- reencontramos las cónicas en el camino de exploración geométrica.

- las formulamos en la experimentación que corrobora ese «pálpito elíptico».
- al re-estudiar ecuaciones y gráficas, los modelos ganaron precisión y versatilidad.

La última etapa podría concebirse como un caso de control que lleve a la búsqueda del lugar geométrico de los puntos que verifican la condición k veces el área máxima.

Desde la perspectiva del diseño, consideramos central la organización disciplinar y didáctica de cuestiones a ser tratadas en banco de pruebas que el utilitario habilita para su estudio dinámico concreto y, de forma paradójica: conceptualmente matemático.

Conceptual en tanto lleva a relacionar y condicionar lo que se pretende hacer con lo que se logra.

En cuanto a la actividad desencadenada, distinguimos el modelo de prácticas que proyecta el docente frente a sus alumnos y la índole «proyectual» de la resolución, Al contrastar lo proyectado con los resultados obtenidos, se apela al utilitario para resolver problemas con una metodología que permite plantear la reflexión sobre lo que se está creando –en la interacción entre sujeto y objeto– y controlando simultáneamente.

El objeto se perfila, al establecerse como ente susceptible de exploración-control y al extenderse el campo de análisis, práctico antes que formal, se escala hacia conjeturas (causales) desde la acción resolutiva.

Nos encontramos simulando sobre el modelo y sobre el modelo de su comportamiento, desplegando, instrumental y conceptualmente, competencias propias de aplicaciones de alto nivel, ya desde ciencias básicas.

Bibliografía

Artigue, M. (1995), *Ingeniería didáctica en Educación Matemática*, Grupo Editorial Iberoamericano.

Bourdieu, Pierre (1972), *Estructuras, habitus y prácticas*, en Esquisse d 'une theorie de la practique, L. Droz- París.

Brousseau, G. (1988). *Le contrat didactique: le milieu*. RDM

Brousseau, G (1994) *Perspectives pour didactique des mathématiques. Vingt ans de Didactique des Mathématiques*. Hommage a Brousseau et Vergnaud. Pensée Sauvage

Brousseau, G (1994) *Los diferentes roles del maestro.* en Didáctica de Matemáticas. Aportes y reflexiones Paidós Buenos Aires.

Brousseau, G. (2002), *Cobayes et microbes*. Traducción tomada de textos de un Proyecto de Investigación (2003-2007) del Centro de Investigación Babbage.

Brousseau, G. (2004).*Introducción al estudio de enseñanza del razonamiento y prueba: paradojas* en “Proof./Preuve Int. Newsletter”

Chevallard, Y, Bosch, M. et Gascon, J. (1997): *Estudiar matemáticas. El eslabón perdido entre la enseñanza y el aprendizaje*. Barcelona: ICE/Horsori.

Douady, R. (1986). *Jeux de cadres et dialectique outil-obje*” RDM.. París

Filloux, Janine (1974). *Du contrat pédagogique*. Dunod. París.

García, Rolando (1996) “Sistemas Complejos” Editorial Gedisa.

Godino, J. (2004) *Implicaciones Metodológicas de un Enfoque. Semiotico-Antropológico para la Investigación* en “Didáctica de las Matemáticas” Granada.
Herbert Simon (1973), *Ciencias de lo Artificial*, Barcelona: A.T.E.
Legrand M. (1993).*Débat scientifique en cours* , Repères IREM. Paris.
Piaget, J; García R. (1989), “Hacia una lógica de significaciones” Barcel
Saidón, L (2001) *Enseñanza con Utilitarios* – Ficha de Cátedra de Centro Babbage del curso Resolución de Problemas con Utilitarios.
Saidon. L. (2001-2009) “Manual Oficial del GeoGebra” – www.geogebra.at
Young, Robert (1993*),Teoría crítica de la educación*, Editorial Paidós

Liliana M. Saidon. Profesora e Ingeniera Especializada en Recursos Informáticos para la Enseñanza y Aprendizaje de Matemáticas. Directora del Centro Babbage y del Instituto GeoGebra de Argentina. Miembro del Comité Consultor y Desarrolladora en el Proyecto GeoGebra del programa, su página, documentación y manual oficial en castellano. Moderadora del Foro GeoGebra Hispanoparlantes y el de los Institutos y Comunidad GeoGebra. Autora de diversos textos de referencia de su especialidad y de numerosos programas. Asesora en Proyectos de Mejoramiento de Enseñanza de las Ingenierías en diversas Facultades. Conferencista invitada en congresos de su área. Centro de Investigación Babbage –Instituto GeoGebra Argentino-IG-Argentina
liliana.saidon@centrobabbage.com www.centrobabbage.com
centrobabbage@geogebra.at www.geogebra.org.

Julio Bertúa. Departamento de Ingeniería, (UNLaM Universidad Nacional de La Matanza. San Justo. Provincia de Buenos Aires.Argentina. jcbertua@unlam.edu.ar

Jorge O. Morel. Facultad de Ingeniería, Universidad Nacional de Misiones (UNaM) Oberá. Misiones. Argentina. morel@fio.unam.edu.ar

UNIÓN
REVISTA IBEROAMERICANA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA

Junio de 2010, Número 22, páginas 169-182
ISSN: 1815-0640

Enseñanza de fracciones. Una experiencia didáctica en quinto año de enseñanza primaria.

Raúl Fuentes Fuentes

Resumen

En el presente trabajo se informa sobre la experiencia didáctica llevada a cabo en la Escuela Duao, ubicada en la provincia de Talca (Chile). En la primera parte se da a conocer la problemática, y se esbozan los lineamientos temáticos respecto de la elaboración de la unidad didáctica referida a las fracciones para los alumnos del Quinto Año Básico de la escuela. Luego, en la segunda se da cuenta de los resultados de la experiencia, aplicación de unidad didáctica de base constructivista sobre fracciones, y se sugieren algunas estrategias para el mejoramiento del aprendizaje escolar en estas materias.

Abstract

In the present study reports on the learning experience conducted in Duao School, located in the province of Talca (Chile). The first part is given to problem areas, and outlines the thematic guidelines on the development of the teaching unit refers to the fractions to students in the fifth year of primary school. Then in the second reports the results of the experiment, application of constructivist-based teaching unit on fractions, and suggests some strategies for improving student learning in these areas.

Resumo

No presente trabalho informa-se sobre a experiência didática levada a cabo na Escola Duao, localizada na província de Talca (Chile). Na primeira parte dá-se a conhecer a problemática, e esboçam-se os lineamentos temáticos a respeito da elaboração da unidade didática referida às frações para os alunos do Quinto Ano Básico da escola. Logo, na segunda presta-se conta dos resultados da experiência, aplicação de unidade didática de base construtivista sobre frações, e sugerem-se algumas estratégias para o melhoramento da aprendizagem escolar nestas disciplinas.

1. Introducción

Los resultados de la aplicación de la Prueba SIMCE a los alumnos y alumnas de los cuartos años de Educación General Básica a nivel de la Región del Maule en la ciudad de Talca (Chile), muestran una clara deficiencia en el logro de los contenidos matemáticos a alcanzar en este nivel. Los promedios a nivel regional en el subsector de Educación Matemática son del orden de los 245 puntos. En el caso particular de la Escuela de Duao, los resultados obtenidos por los estudiantes se ubican cinco puntos bajo de dicho promedio y superando en 17 puntos al SIMCE del año 2002. Igual situación se aprecia también en los resultados alcanzados en la escuela de Chequén de la Peña (216 puntos), la que siendo superior a lo logrado en el SIMCE 2002, aún los resultados se mantienen por debajo de los promedios comunal, regional y nacional, particularmente en lo que dice relación con el contenido de fracciones.

Al momento de explicar este hecho, no se encuentran evidencias científicas, por lo menos al nivel de los establecimientos en estudio que permitan aproximarnos con rapidez a alguna solución. Lo que si esta claro que en Matemáticas los saberes son un continuo, es decir, cada contenido es pre-requisito natural para otros; como por ejemplo, las fracciones para el aprendizaje de los números decimales.

Lo anterior pone en evidencia la necesidad de intervenir pedagógicamente en el aula, probando estrategias didáctico - metodológicas que permitan mejorar los aprendizajes de los estudiantes al momento de abordar el contenido de las fracciones. Ello posibilitará que los profesores de ambas escuelas, y de otras, puedan disponer de antecedentes que los permitan replantear el proceso de enseñanza de las fracciones, reflexionando sobre las metodologías, estrategias, recursos y evaluaciones aplicadas al momento de tratar este contenido temático como construcción mental básica para temas más relevante tales como: números decimales, porcentajes, proporciones, etc.

En razón de lo señalado, el propósito central de la investigación es validar una propuesta metodológica basado en procesos de formación de significados, en toda su variedad de formas, ya que constituyen la base del aprendizaje y el verdadero corazón del ser humano, en el contenido de fracciones, para facilitar y mejorar los aprendizajes de los alumnos y alumnas de Quinto Año Básico. Se estima que aplicando estrategias metodológicas apropiadas en procesos de enseñanza de fracciones, el aprendizaje escolar se facilita cuando el estudiante construye activamente nuevas ideas o conceptos basados en conocimientos presentes y pasados. Así mejoran significativamente el nivel de logro en los alumnos y alumnas de Quinto Año Básico de las escuelas consideradas en la experiencia. Esto, por cuánto, se tiene evidencias que el uso de metodologías tradicionales ha llevado a los alumnos y alumnas a un conocimiento memorístico de los saberes matemáticos. Esto explica que los alumnos, cuando se ven enfrentado a situaciones matemáticas que desafían su aplicación, tienden a fracasar sin lograr aprendizajes. Los docentes no han desarrollado en los educandos todas sus capacidades posibles, por eso se pensó que una metodología constructivista en primer lugar lo llevará a descubrir el conocimiento; adquiriendo este saber, podrá aplicarlo, y empleará creativamente su inteligencia en la resolución de problemas, construyendo de esta manera una base sólida para la adquisición de otros conocimientos más avanzados.

El constructivismo está basado en la premisa de la formación del significado; ser humano, supone realizar esfuerzos activos para interpretar la experiencia, buscando propósito y significado a los acontecimientos que nos rodean, incluido el proceso educativo. Por otra parte, si el constructivismo se preocupa de entender los procesos de formación de significado, se converge irremediablemente en los procesos del lenguaje y la narración, ya que en ellos, el lenguaje y la narración, se crean los significados. La capacidad de abstracción y cognición están en cierta medida condicionadas por las construcciones del mundo que surgen de las interacciones con él. Al principio, cuando el sujeto se encuentra ante una nueva experiencia para la cual no tiene ninguna clase o categoría de comprensión disponible, el acontecimiento permanece sin clasificar y sin asimilar. Por ello, basado en procesos de formación de significados, en toda su variedad de formas, constituyen la base del aprendizaje y el verdadero corazón del ser humano.

1.1. La Unidad didáctica.

La Unidad Didáctica es la forma de planificar el proceso de Enseñanza – Aprendizaje alrededor de un elemento de contenido que se convierte en eje integrador del proceso, aportándole consistencia y significatividad. Se percibe como una forma de organizar conocimientos y experiencias que debe considerar la diversidad de elementos que contextualizan el proceso, para regular la práctica de contenidos, seleccionar los objetivos básicos que pretende conseguir, las pautas metodológicas con las que trabajará y las experiencias necesarias para perfeccionar dicho proceso. En definitiva la Unidad Didáctica es toda unidad de trabajo de duración variable, que organiza un conjunto de actividades de enseñanza - aprendizaje y que responde, en su máximo nivel de concreción, a todos los elementos del Currículo.

1.2. Elementos para una propuesta didáctica.

Los profesores que ven su tarea como la transmisión de un conocimiento acabado y abstracto tienden a adoptar un estilo expositivo. Su enseñanza está plagada de definiciones, en abstracto, y de procedimientos algorítmicos. Solo al final, en contados casos, aparece un problema contextualizado como aplicación de lo que supuestamente se ha aprendido en clase. La resolución de problemas se queda para el Taller de Matemáticas, en clase hacemos cosas más serias, las auténticas matemáticas (García, J.A., 2005).

Esta forma de entender la enseñanza tiene nombre, se conoce como mecanicismo. De acuerdo con la filosofía mecanicista el hombre es un instrumento parecido al ordenador, cuya actuación al más bajo nivel puede ser programada por medio de la práctica repetitiva, sobre todo en aritmética y en álgebra, incluso en geometría, para resolver problemas distinguibles por medio de patrones reconocibles que son procesados por la continua repetición. Es en este nivel más bajo dentro de la jerarquía de los más hábiles ordenadores, señala Freudenthal (1991), donde se sitúa al hombre.

Si por el contrario, consideramos que el conocimiento matemático no es algo totalmente acabado sino en plena creación, que más que conceptos que se aprenden existen estructuras conceptuales que se amplían y enriquecen a lo largo de toda la vida, entonces ya no bastará con la exposición. Habrá que hacer partícipe a los alumnos de su propio aprendizaje. Y sólo hay una forma de hacer partícipe a los alumnos: dar significado a todo lo que se enseña (Resnick, L.B. y Ford, W.W. ; 1990).

Para desarrollar los hábitos de pensar sólo hay un camino, pensar uno mismo. Permitir que los alumnos participen en la construcción del conocimiento es tan importante a más que exponerlo. Hay que máximos esfuerzos para convencer a los estudiantes que la matemática es interesante y no sólo un juego para los más aventajados. Por lo tanto, los problemas y la teoría deben mostrarse a los estudiantes como relevante y llena de significado (Gutiérrez, A.,1991).

George Polya (1945), en el prefacio de la primera edición en inglés de How to solve it, señala que un profesor de matemáticas tiene una gran oportunidad. Si dedica su tiempo a ejercitar a los alumnos en operaciones rutinarias, matará en ellos el interés, impedirá su desarrollo intelectual y acabará desaprovechando su oportunidad. Pero si, por el contrario, pone a prueba la curiosidad de sus alumnos planteándoles problemas adecuados a sus conocimientos, y les ayuda a resolverlos por medio de preguntas estimulantes, podrá despertarles el gusto por el pensamiento independiente y proporcionarles ciertos recursos para ello.

1.3. Descripción de la Unidad Didáctica sobre fracciones.

A partir de la definición de los organizadores se obtienen informaciones concretas para establecer las diferentes categorías didácticas, tales como: objetivos, contenido, métodos, medios, formas de organización y evaluación, de las cuales los métodos, medios y formas de organización se agrupan en un solo componente que se ha denominado metodología, para facilitar la estructuración de la unidad didáctica y su dinámica, de forma tal que quedan sólo cuatro componentes del curriculum: objetivos, contenidos, metodología y evaluación de cada unidad, que son los cuatro componentes que caracterizan el curriculum como esquema de trabajo para los profesores (Fonseca P., J.J.;1999).

a. Presentación del tema.

Esta unidad trata de ampliar y profundizar el uso y el conocimiento sistemático de las fracciones como signos que permiten dar cuenta de acciones de fraccionamiento, como razones y con un status de números; es decir, que se pueden ordenar y se puede operar con ellas, avanzando progresivamente a la asociación, en términos generales, de un entero a la unidad (uno). La importancia del contenido temático radica en los aspectos de las fracciones que se derivan de manera directa de las acciones de fraccionamiento, con el lenguaje asociado a ellas –que está, en parte, incorporado al lenguaje familiar– y a que puedan resolver problemas en los que intervienen las fracciones.

En lo que se refiere a la ampliación de NB2, se propone la incorporación de fracciones como séptimos, octavos, novenos y otras de uso corriente, y de las fracciones impropias. Se insiste en un trabajo contextualizado, en el que las regularidades, el lenguaje, las equivalencias se visualizan en la resolución de problemas numéricos y geométricos, con apoyo de materiales concretos y de representaciones gráficas.

Para establecer criterios de orden y equivalencia entre fracciones es recomendable usar como apoyo representaciones concretas de una recta numérica, que posteriormente es representada gráficamente. Es en ese contexto en que se asocia la idea de entero a la noción de unidad, es necesario, apoyarse en las unidades del sistema de medidas (de longitudes, pesos, capacidades y tiempo), en los múltiplos y submúltiplos de ellas, las cuales, por su uso habitual, constituyen una base sólida para establecer y comprender equivalencias entre fracciones (2/4 de hora y 1/2 hora, por ejemplo) y entre las expresiones fraccionarias y enteras (1/2 kilo y 500 gr, por ejemplo). Para esto será importante que los alumnos y alumnas realicen actividades variadas que les den ocasión de observar, sistematizar, discutir sobre los diferentes aspectos de las fracciones.

La tarea de sistematización de las observaciones de los niños y las niñas, de sus procedimientos y resultados, tanto por parte de ellos mismos como del profesor o profesora constituyen las bases para ir estableciendo síntesis sobre regularidades, propiedades y procedimientos estándares como, por ejemplo, para determinar fracciones equivalentes por simplificación o amplificación.

En cuanto a las operaciones con fracciones (adición y sustracción) se trata de que sean realizadas con y sin apoyo de materiales concretos y representaciones gráficas, poniendo el acento en el uso de fracciones equivalentes, en la estimación de resultados y su evaluación y comprobación.

Como hemos propuesto en esta unidad , se trata de dar oportunidades a los niños y niñas de descubrir, reflexionar y discutir sobre regularidades de las fracciones y procedimientos para resolver problemas y operaciones, de manera contextualizada; es decir, en situaciones en las cuales puedan percibir el sentido de lo que hacen: por qué y para qué.

b. Criterios para la selección de contenidos y dificultades del alumnado.

- El grado de dificultad, de lo simple a lo complejo.
- Secuencia lógica, primero trabajo con material concreto para luego llegar a la abstracción
- Contextualización, situaciones que ellos vivan diariamente.
- Conducta de entrada, aprendizajes previos
- Marco Curricular Nacional, planes y programas

c. Selección de contenidos.

- Encontrar familias de fracciones equivalentes, a través de:
  - material concreto;
  - utilizando unidades del sistema métrico decimal (longitud, peso, capacidad);
  - amplificando y simplificando.
- Calcular numéricamente el valor de fracciones en colecciones:
  - Adición y sustracción.
- Realizar cálculos, sustituyendo fracciones por otras equivalentes, cuando sea necesario.

d. Aprendizajes esperados.

- Justifican procedimientos de fraccionamientos concretos y comprueban equivalencia entre las partes.
- En situaciones problema resuelven adiciones y sustracciones de fracciones, hacen estimaciones y evalúan resultados.

e. Matriz de capacidades o competencias.

Cognitivo		Metacognitivo	Transversal
Conceptual Fracciones Equivalencias Comparación Amplificación Simplificación	Procedimental Trabajo en la Recta numérica Manipulación de material concreto. Resolución de problemas	Creatividad Análisis crítico.	Trabajo colaborativo Autonomía y responsabilidad individual y colectiva frente a trabajos. Razonamiento metódico y reflexivo, y resolución de problemas.

f. Secuenciación y organización de las actividades del aula.

- Realizan fraccionamientos sucesivos, concretos y gráficos, para:
  - reconocer fracciones equivalentes;
  - determinar procedimientos para encontrar fracciones equivalentes: amplificación y simplificación.
- Representan y comparan fracciones con material concreto y gráfico para establecer orden y reconocer fracciones menores que 1/2; que están entre 1/2 y 1; entre 1 y 2; entre 2 y 3.
- Resuelven situaciones problemáticas que impliquen para su solución adiciones y/o sustracciones de fracciones, considerando:
  - la utilización de diferentes procedimientos (gráficos y numéricos);
  - la estimación de resultados antes de calcular y evaluar la razonabilidad de los resultados.

g. Algunas actividades.

- Con papel lustre forman fracciones haciendo dobleces en el papel las escriben y hacen la representación gráfica de la fracción formada.
- Con lana y huinchas de papel de una misma medida reconocen fracciones equivalentes.
- Buscan la familia de una fracción amplificando.
- Buscan la equivalencia utilizando la simplificación.
- Con huinchas de papel y lana comparan fracciones.
- Desarrollan guía de problemas referentes a comparar fracciones, adición y sustracción de fracciones y utilización de gráficos.

2. Resultados y su análisis.

2.1. El diseño de la investigación.

El estudio se adscribe al modelo de tipo cuantitativo, ya que tiene como objetivo describir el fenómeno en su estado natural, transformando sus resultados a números claramente cuantificables. EL diseño específico del estudio es cuasi - experimental ya que los grupos sometidos a estudio ya han sido conformados con anterioridad al experimento y se mantienen intactos.

El paradigma de la investigación se representa en el siguiente esquema:

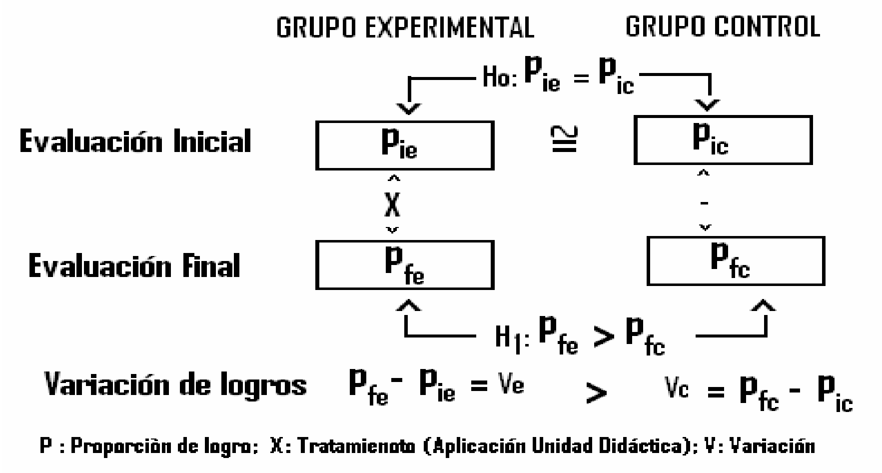


Figura Nº 1: Diseño cuasi-experimental

Donde **X**: representa el tratamiento que en este caso lo constituye la aplicación de la unidad didáctica, **p**: representa la proporción de alumnos que logran el objetivo de aprendizaje o aprendizaje esperado y, los subíndices indican el momento en que son sometidos a la evaluación (**i**: Inicial o, **f**: Final), y el otro sub índice es un indicador del grupo al cual pertenecen los alumnos (**c**: Control ó, **e**: Experimental).

Dado el contexto de la Investigación, se ha llegado a definir que la forma más idónea de recopilar Información por medio de la aplicación de una Prueba Inicial, anterior a la aplicación de la unidad didáctica con los alumnos de las escuelas de Chequén de la Peña (grupo control) y Duao (Grupo experimental) .

Posterior a la aplicación de la Unidad Didáctica se aplicará una Prueba Final de los contenidos tratados con la cual se obtendrán las observaciones y mediciones que son de interés para nuestro estudio; para finalmente codificar correctamente estos datos mediante su análisis.

Con el propósito de comparar las proporciones de estudiantes que logran los aprendizajes esperados en la unidad didáctica aplicada, a partir de las evaluaciones realizadas antes y después de la experiencia, se utiliza la técnica estadística de comparación de proporciones para la comparación de de resultados en dos eventos distintos, como en este caso, pero aplicados sobre la misma población objetivo. Técnicamente se trata de la prueba de comparación de poblaciones para muestras relacionadas y que consiste en establecer inferencia acerca de la diferencia p_1 - p_2.

2.2. La validez de los instrumentos.

Las pruebas inicial y final fueron evaluadas por especialistas con el objeto de conocer su adecuación y pertinencia al momento de evaluar los niveles de logro alcanzados por niñas y niños que trabajaron con la Unidad Didáctica relativa a las Fracciones. El equipo evaluador o jueces estuvo formado por ocho personas; cuatro profesores de aula, dos profesores universitarios con grado de magíster y doctor y, dos jefes de unidad Técnico Pedagógica en ejercicio.

Las opiniones de los jueces fueron muy favorables, por lo que no hubo que hacer mayores correcciones a estos instrumentos y, al aplicar el test estadístico correspondiente (Serafine, D.; 1981), resultaron de ser de una congruencia de 0,84 para la Prueba Inicial y 0,88 para la Prueba final. Aplicando la tabla interpretativa de Pereira (1965), ambos valores se ubican en el rango que específica que respecto de las pruebas, los jueces expresan una alta congruencia, sin necesidad de hacer modificaciones de fondo. Por tanto, las pruebas son aplicadas en sus versiones originales.

2.3. Análisis e interpretación de resultados de la aplicación de la experiencia.

De acuerdo a lo señalado en el diseño del modelo cuasi-experimental, participan dos grupos, uno experimental y otro de control. En ambos existe instancias de evaluación inicial y final, y sólo el grupo experimental recibe le tratamiento. Para concluir que la experiencia ha rendido sus frutos, es decir, ha sido efectiva se debe constatar que las variaciones de logros de aprendizajes experimentados por los alumnos del grupo experimental deben ser superiores a las variaciones que experimente el grupo control.

La tabla que se presenta a continuación permite visualizar los resultados porcentuales, las diferencias porcentuales y el valor que asume la prueba estadística en cada caso y que entrega información sobre el Nivel de significación de la respectiva diferencia. Estas diferencias serán observadas a partir del indicador de la prueba z al 95% de confianza (*) y al 99% de confianza (**). En caso de no ser significativo, no se utilizará ninguna de las simbologías anteriores "*" y, "**", para indicar significación al 5% y al 1%, respectivamente. Además, da cuenta de los resultados de la evaluación inicial tanto en el grupo control como experimental.

Tabla 1. significación de las proporciones de logro en lectura, escritura, interpretación y representación de fracciones, a nivel de evaluación final.

CONCEPTOS	Evaluación Inicial grupo experimental		Evaluación Inicial grupo control		Prueba z	
	x		x		Dif.	N. Sig.
Lectura y escritura	12	0,631	10	0,501	0,131	0,83
Interpretación	10	0,526	9	0,45	0,076	0,48
Representación	12	0,631	11	0,55	0,081	0,52
TOTAL	11	0,596	10	0,50	0,096	0,61

Los resultados obtenidos con la aplicación de la prueba de contrastación de la significación de proporciones de dos grupos (z), deja en evidencia que no hay diferencia significativas, en el nivel inicial, en los grupos experimental y control. Esto, de acuerdo al modelo indica que los dos grupos son equivalentes, es decir, no difieren significativamente en las variables escolares que tradicionalmente se consideran al momento de construirlos como tal. La siguiente tabla muestra lo ocurrido a nivel de evaluación final.

Tabla 2. significación de las proporciones de logro en lectura, escritura, interpretación y representación de fracciones, a nivel de evaluación final.

CONCEPTOS	Evaluación final grupo experimental		Evaluación final grupo control		Prueba z	
	x		x		Dif.	N.S.
Lectura y escritura	15	0,789	12	0,51	0,28	1,91; *
Interpretación	14	0,736	11	0,45	0,29	1,90: *
Representación	17	0,894	13	0,58	0,31	2,40; *
TOTAL	15	0,806	12	0,513	0,29	2,04; *

Al comparar los resultados obtenidos con la aplicación de la prueba de contrastación de diferencia de proporciones para dos grupos, se observan diferencias, a lo menos significativas, a favor del grupo experimental. Se destaca el ítem relacionado con representaciones de fracciones que se aproxima al nivel de lata significación.

Estos resultados, bajo el supuesto de equivalencia inicial y de la no existencia de ningún factor modificatorio durante el desarrollo de la experiencia en ambos grupos, que estas ganancias de aprendizaje, expresadas por porcentajes que superan el 18%, se producen gracias á la intervención realizada por el grupo de seminario con el apoyo del material didáctico elaborado.

Tabla 3. significación de las proporciones de logro en comparación y ordenación de fracciones, a nivel de evaluación inicial y final.

Evaluación	Grupo experimental		Grupo control		Prueba z	
	x	%	x	%	Dif.	N.S.
Inicial	10	0,526	9	0,45	0,08	0,48
final	12	0,83	10	0,47	0,36	2,55: **

En el tema de la comparación y ordenación de fracciones, los alumnos de quinto año básico que conforman los grupos control y experimental, no presentan diferencias significativas en los niveles de logro que se detectan con la correspondiente evaluación inicial. Sin embargo, a nivel de evaluación final las diferencias expresadas en favor del grupo experimental son altamente significativas. Esto es un indicador de la efectividad de la unidad didáctica aplicada en el curso experimental. Ahora bien, la próxima y última tabla muestra los resultados correspondientes a la aplicación de los conceptos sobre fracciones a la resolución de problemas matemáticos.

Tabla 4. Significación de las proporciones de logro en la resolución de problemas aplicando contenidos de fracciones, a nivel de evaluación inicial y final.

Evaluación	Grupo experimental		Grupo control		Prueba z	
	x	%	x	%	Dif.	N.S.
Inicial	8	0,421	8	0,4	0,02	0,13
final	12	0,731	11	0,45	0,28	1,86; *

En la tabla anterior se observan resultados similares al caso anterior; es decir, no existen diferencias significativas entre los alumnos de los grupos de control y experimental cuando aplican los conceptos básicos sobre fracciones a la resolución de problemas. Sin embargo, al realizar la evaluación al concluir la experiencia, los resultados que se logran en el grupo experimental son muy superiores (28%). Este porcentaje está explicado por cuatro alumnos respecto del estado inicial que lograron mejorar sus aprendizajes en el grupo experimental.

Tabla 5. Significación de las proporciones de logro en la en los grupos experimental y control.

	GRUPO EXPERIMENTAL		GRUPO CONTROL		Prueba z	
					Dif.	N. Sig.
EVALUACION INICIAL	10	0,51	9	0,45	0,06	0,41
EVALUACION FINAL	13	0,79	11	0,48	0,31	2,15
VARIACION DE LOGRO		0,27		0,03	0,25	1,78

En la tabla Nº 5 final se pueden observar las variaciones de proporciones de logro en los grupos experimental y control; mientras en el primero esta variación es del 27% (0,27), en el grupo control sólo alcanza al 35. Este margen hace que la diferencial sea significativa y valida la realización de la experiencia de fracciones con los niños de quinto año básico de la Escuela de Duao de la comuna de Talca.

2.4. Conclusiones y discusión.

En primer lugar, respecto del objetivo específico relacionado con el diseño de una unidad didáctica con base constructivista que facilite y mejore el aprendizaje de las fracciones NB3l, se puede concluir que la base constructivista posibilita el desarrollo de competencias de orden superior en los estudiantes. Gracias a esta unidad los estudiantes lograron un nivel de aprendizaje más profundo el cual se refleja en que los estudiantes lograron aplicar estos conocimientos de fracciones a las operaciones con números naturales como por ejemplo la multiplicación por 1.

En relación al objetivo de establecer diferencias y semejanzas entre las distintas estrategias metodológicas, se concluye que la principal diferencia entre las estrategias utilizadas está dado en cuanto a que la de base constructivista el estudiante es el principal actor de su aprendizaje; en cambio el aprendizaje logrado con la estrategia tradicional era del momento sin poder utilizar este conocimiento en conocimientos o temas matemáticos posteriores, es decir, los aprendizajes no lograron niveles de significación.

Luego, del razonamiento de los resultados plasmados en esta investigación podemos decir que, a modo de reflexiones del estudio, y analizados todos los resultados arrojados por éste, podemos concluir que:

- Realizado el estudio, y apoyados en la revisión de bibliografía especializada, podemos decir que la hipótesis que nos planteamos en un principio donde señalábamos que las estrategias metodológicas utilizadas por los profesores de Matemáticas de 5º año básico influirán para el logro de los objetivos en relación con el contenido de fracciones, se ha comprobado, siendo apoyados por las siguientes afirmaciones que se desprenden en base a los resultados del estudio realizado.
- Es ya sabido que el uso de las metodologías tradicionales han llevado a los alumnos y alumnas a un conocimiento algorítmico (memorístico) de los saberes matemáticos, razón por la cual, cuando se ven enfrentado a situaciones matemáticas que desafían su aplicación tienden a fracasar, ya que no comprenden los conceptos más avanzados y complejos esto se justifica con los resultados hasta ahora logrados por los docentes en los alumnos y alumnas utilizando las teorías conductistas, que no han permitido desarrollar en los educandos todas sus capacidades posibles.
- Aplicando estrategias metodológicas constructivistas en fracciones, hemos comprobado que se facilita el aprendizaje y se mejora el nivel de logro en los alumnos y alumnas, por eso es que una metodología de este tipo, en primer lugar, lo lleva a descubrir el conocimiento; una vez adquiriendo este saber, el alumno o alumna puede aplicarlo, y emplear creativamente su inteligencia en la resolución de problemas, construyendo de esta manera una base sólida para la adquisición de otros conocimientos más avanzados.
- En el aprendizaje significativo se pretende buscar que el alumno construya su propio aprendizaje, de modo tal que desarrolle su inteligencia relacionando lo que tiene y conoce respecto a lo que se quiere aprender. Esto es gran importancia en el aprendizaje de las matemáticas, ya que la educación matemática es un continuo, es decir, cada contenido o conocimiento tiene pre – requisitos y cada nuevo aprendizaje necesita de los aprendizajes previos.
- El docente de matemáticas debe promover que el alumno trabaje y construya sus propios saberes, que caminen a ser autónomos, que integren sus experiencias a otras ya conocidas, que elijan lo que desean aprender y no privilegiar el desarrollo de la memoria y la repetición como alternativa.
- El conocimiento matemático no es algo totalmente acabado, sino es constante creación. Por ello, más que conceptos que se aprendan, se deben potenciar las estructuras conceptuales que se amplían y enriquecen. Desde este punto de vista, es imperativo el hacer que los alumnos sean participe de su propio aprendizaje, adquiriendo éste sentido y significación.
- Por otra parte, para desarrollar hábitos del pensar habrá que posibilitar que los alumnos participen en la construcción de su propio conocimiento, más que exponerlo; intentando que adquieran el convencimiento de que la matemática es interesante y no sólo un juego para los más aventajados.

- Ya señalaba George Polya, (1945) que si un profesor de matemáticas dedica su tiempo a ejercitar y poner a prueba la curiosidad de sus alumnos, planteándoles problemas adecuados a sus conocimientos, y les ayuda a resolverlos, por medio de preguntas estimulantes, podrá despertarles el gusto por el pensamiento independiente y proporcionarles ciertos recursos para ello.
- Es aquí, en donde adquiere real importancia la creación de Unidades Didácticas. La Unidad Didáctica es la forma de planificar el proceso de Enseñanza – Aprendizaje alrededor de un elemento de contenido que se convierte en eje integrador del proceso; aportándole consistencia y significatividad, percibiéndose así, como una forma de organizar conocimientos y experiencias que debe considerar la diversidad de elementos que contextualizan el proceso, para regular la práctica de contenidos, selección de los objetivos básicos a conseguir, pautas metodológicas con las que se trabajará y experiencias necesarias para perfeccionar dicho proceso. Con estas ideas se está en condiciones de elaborar o diseñar sistemas de clases mejor preparadas, condicionando los contenidos, la metodología y la forma de evaluación a la consecución de los objetivos trazados y a las características de la comunidad, escuela, grupo y estudiantes que están implicados en el proceso; sistemas de clases más productivos y que tengan un impacto mayor.
- Se debe prestar un especial interés a lo que piensa un profesor de matemáticas sobre su propia actuación, ya que en cierta medida la manera de actuar, determina cómo se transforma la información teórica en recursos prácticos y didácticos.
- La unidad desarrollada dió oportunidades a los niños y niñas de descubrir, reflexionar y discutir sobre regularidades de las fracciones y procedimientos para resolver problemas y operaciones, de manera contextualizada; es decir, en situaciones en las cuales puedan percibir el sentido de lo que hacen, el por qué y para qué; tratando de ampliar y profundizar el uso y el conocimiento sistemático de las fracciones como signos que permiten dar cuenta de acciones de fraccionamiento, como razones y con un status de números; es decir, que se pueden ordenar y se puede operar con ellas, avanzando progresivamente a la asociación, en términos generales, de un entero a la unidad.

En cuanto a la enseñanza de las fracciones podemos decir que:

- Lo importante es la "construcción" de las operaciones con las fracciones por los propios alumnos. Construcción que se basa en la propia actividad del alumno.
- Valorar las actividades de los estudiantes así como los métodos y procedimientos que utilizan para resolver problemas.
- Que el alumno sea capaz de formular sus propias reglas y generalizaciones para adquirir su conocimiento.
- Se deben utilizar los conocimientos previos del escolar, como base para empezar la secuencia de la enseñanza de fracciones

En concreto, la experiencia realizada permitió desarrollar el concepto de fracción con todas sus relaciones e interpretaciones en el ámbito escolar, lo que a su vez, permite afirmar que:

- Se demuestra la real importancia del trabajo contextualizado, en el que las regularidades, el lenguaje, las equivalencias se visualizan en la resolución de problemas numéricos y geométricos, con apoyo de materiales concretos y de representaciones gráficas.
- Hay que tener presente las muchas interpretaciones, y el proceso de aprendizaje a largo plazo cuando se tenga en mente desarrollar en los alumnos secuencias de enseñanza-aprendizaje de las nociones de fracciones y sus interpretaciones.
- Es fundamental tener en cuenta que las habilidades que se pretenden desarrollar en los niños y niñas para el manejo de los símbolos y las operaciones referentes a las fracciones, no serán de fácil retención si no se les crea un esquema conceptual a partir de situaciones concretas.
- Es necesario que como profesores determinemos nuestras propias concepciones para maximizar los resultados entre la teoría y la práctica educativas.
- Lo que se aconseja es la manipulación de diferentes objetos y formas circunstanciales para que, al problematizar en diferentes contextos, se pueda estructurar paulatinamente el concepto de fracción.
- La reflexión sobre lo qué es lo que estábamos evaluando nos fue muy útil, ya en la medida en que el proceso de evaluación era desarrollado, la información que se obtenía era más fiable y permitió la continuación o modificación de nuestra intervención y de la actuación de los alumnos. Midiéndose finalmente, de manera cercana, la capacidad real y el potencial de los alumnos, al momento de vivir la experiencia didáctica sobre el contenido de las Fracciones. Del mismo modo, pudimos conocer el nivel de Logros de los distintos conceptos específicos que se proponía que los alumnos adquieran con la Unidad didáctica en referencia.

Bibliografía

Beth, E.W. y Piaget, J. (1980): Epistemología Matemática y Psicología: relaciones entre la lógica formal y el pensamiento real. Editorial Crítica. Grijalbo. Barcelona.

Bressan, Ana María y Beatriz Bogisic (1990): "Las Fracciones y los Números Racionales". Revista Hacer Escuela. Año XII. No. 10. Septiembre. Pag. 28 a 31.

Dickson, L., Brown, M, Gibson, O. (1991): El Aprendizaje de las Matemáticas. Ed.Labor.

Fonseca Pérez, Juan José (1999): Un modelo para la concepción, organización y evaluación del diseño curricular en la transformación de la secundaria básica. Las Tunas 1999.

Freudenthal, H.(1991): Revisiting Mathematics Education. Kluwer Academic Publishers.

Freudenthal, Hans. (1994): Fenomenología didáctica de las estructuras matemáticas. Traducción de Luis Puing. cinvestav-ipn.

García Juárez Marco Antonio (1997): Introducción a la teoría de resolución de problemas. Editorial Esfinge S.A. de C. V..

Gaulin, C. (1986): “Tendencias actuales en la enseñanza de las matemáticas a nivel internacional”. Número, 14, pp. 11-18.

Gutiérrez, A (Editor) (1991): Área de Conocimiento. Didáctica de la Matemática. Colección Cultura y Aprendizaje. Editorial Síntesis.

Hernández, R.; Fernández, C. y Baptista, P. (1994). Metodologia de la Investigación. Mc Graw- Hill. México D.F., México..

Kilpatrick, J. Rico, L y Sierra, M (Editores). (1994): Educación Matemática e Investigación. Colección Educación Matemática en Secundaria. Ed. Síntesis.

Linares Ciscard, Salvador. Las fracciones, la relación parte-todo. Editorial Síntesis.

Mancera Martínez Eduardo (1992): "Significado y significantes relativos a las fracciones". Educación matemática Vol. 4 No. 2. Pág. 30-54

Pereira, A. (1965): Nociones de Estadística Aplicada a la Orientación Profesional. En E. Mira y López, Manual de Orientación Profesional. Bs As, Kapelusz.

Resnick, L.B. y Ford, W.W. (1990): La enseñanza de las matemáticas y sus fundamentos psicológicos. Paidos. Ministerio de Educación y Ciencia.

Rico R., Luis (1998): "Complejidad del currículo de matemáticas como herramienta profesional". En Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa. No. 1. México. Pág. 32 -39

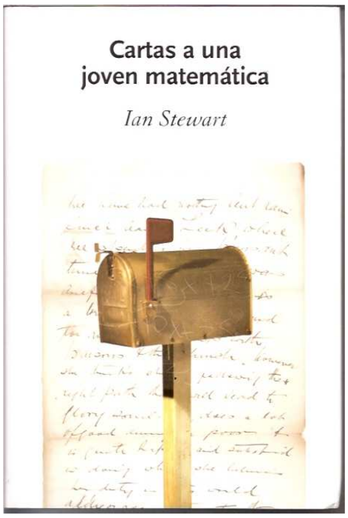
Serafine, D. (1981): Coeficiente de Congruencia Simple. Organización de los Estados Americanos (O.E.A.) Santiago. Chile.

Valdemoros Álvarez Martha Elena (1997): "Recursos intuitivos que favorecen la adición de fracciones: Estudio de un caso". Educación Matemática Vol. 9 No. 3. pág. 5-17

Zilberstein Toruncha, José (1999): ¿Cómo hacer más eficiente el aprendizaje? Margarita Silvestre Oramas. México: CEIDE.

Raúl Fuentes Fuentes, es profesor del área de Innovación e Investigación en Educación Matemática de la Universidad Católica del Maule (Chile) e imparte docencia en la Facultad de Ciencias de la Educación de la Universidad Católica del Maule. Es miembro del equipo de investigación del Departamento de Fundamentos de la Educación de la Facultad de Ciencias de la Educación de la Universidad e investiga en el área de la gestión curricular y evaluación educativa en establecimientos educacionales y en la formación profesional.

UNIÓN
REVISTA IBEROAMERICANA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA
Junio de 2010, Número 22, páginas 183-184
ISSN: 1815-0640



Cartas a una joven matemática

Ian Stewart

Editorial Crítica.
Barcelona. 2007
ISBN - 10: 84-8432-847-3
ISBN - 13: 978-84-8432-847-6

Buscando material con el que entusiasmar a mis alumnos del profesorado de matemática topé con este interesante libro escrito por un prestigioso matemático que desde hace algún tiempo se dedica a la divulgación científica, Ian Stewart.

Ian Stewart nació en Inglaterra en el año 1945, estudió matemática en la Universidad de Cambridge y se doctoró en la Universidad de Warwick, en la que ahora es catedrático. En 1995 recibió la Medalla Michael Faraday y desde 2001 es miembro de la Royal Society. Es autor de cerca de dos centenares de artículos profesionales científicos, también de un buen número de celebrados libros de divulgación matemática, entre los que se encuentran "*¿Es Dios un geómetra?",* "*¿Juega Dios a los dados?*", "*Belleza y Verdad, una historia de la simetría*", "*Historia de las Matemáticas en los últimos 10.000 años", "La cuadratura del cuadrado y otras curiosidades matemáticas del gabinete del profesor Stewart*", "*Cómo cortar un pastel y otros rompecabezas matemáticos", "Locos por las matemáticas, juegos y diversiones matemáticos", "El laberinto mágico, el mundo a través de los ojos matemáticos*", "*Ingeniosos encuentros entre juegos y matemática" y "Cartas a una joven matemática".*

El conocimiento profundo y la pasión indudable que el autor tiene por la ciencia que estudia y desarrolla hacen que la lectura de este último libro citado sea un placer, "*Cartas a una joven matemática*" es un libro escrito con un estilo sencillo y al leerlo no pude menos que sentirme identificada con Meg, la destinataria de las cartas.

En él se trata de aclarar las dudas que puedan surgir en quién inicia una carrera de matemática, las dificultades del ingreso, por qué hacer matemáticas, cómo piensan los matemáticos, qué se necesita para convertirse en uno y cuál será su actividad al egresar. Desarrolla en forma accesible discusiones tales como ¿pura o aplicada?, filosofía matemática y el miedo a las demostraciones. Trata también temas sensibles a los docentes, cómo se aprende y cómo se enseña matemática.

Incluye además innumerables citas de autores, libros y problemas que han marcado el trabajo de los matemáticos.

Dice el autor "… las matemáticas, que si se entienden, son realmente uno de los temas más fascinantes que haya conocido la humanidad. Su historia se remonta a al menos hace cinco mil años, su impacto en la cultura moderna ha sido enorme, y prácticamente todo lo que experimentamos en nuestra vida diaria está basado en matemáticas que ocurren entre bastidores. Las matemáticas son una de las actividades humanas más vitales, pero también una de las menos apreciadas, y la menos comprendida. Es una lástima. El mundo necesita desesperadamente de las matemáticas y de la contribución de los matemáticos. …. Sobre todo necesitamos formar a muchos matemáticos jóvenes para que lleven la antorcha de la ilustración matemática en el futuro. …. A medida que se despliegan las *Cartas a una joven matemática* somos testigos de cómo la ciencia se convierte también en la vida de Meg. Compartimos sus preocupaciones y sus éxitos. Si no somos matemáticos profesionales, incluso si no tenemos ningún título, aún así podemos llegar a compartir sus puntos de vista y a entender de qué se tratan en realidad las matemáticas. Y por qué son tan vitales para todos en este planeta".

Cristina Cano.
Dpto. de Matemática.
Universidad Nacional del Comahue.
Argentina.

Junio de 2010, Número 22, páginas 185-191
ISSN: 1815-0640

Matemátic@s en l@ red

Cesire - CREAMat.

Centre de recursos per ensenyar i aprendre matemàtiques

Generalitat de Catalunya. Departament d'Educació.

En un recorrido por el maravilloso mundo de Internet y en búsqueda de los sitios matemáticos que en ella coexisten podemos encontrarnos con el portal:

http://phobos.xtec.cat/creamat/joomla/

Aunque el portal está en catalán, dicha situación deja de ser un impedimento gracias a los traductores de idiomas; permitiendo el intercambio de conocimientos del mundo matemático.

En la portada de presentación del sitio, se señala:

"La finalidad del CREAMat, es la de facilitar recursos a los centros educativos y al profesorado de las diferentes etapas educativas no universitarias para conseguir un mejor logro y desarrollo de las competencias de los alumnos en el ámbito matemático."

En este marco se entiende por recursos no sólo los objetos de carácter material, bibliográfico o virtual, sino también la generación, coordinación, imbricación y difusión de ideas y conocimientos relacionados con la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas.

Este propósito global se formula a través de los siguientes objetivos:

- Ser punto de encuentro y de reflexión para el profesorado de matemáticas, estimulando el conocimiento y la coordinación entre los diferentes niveles educativos.
- Promover y difundir actividades que estimulen el interés del alumnado por las matemáticas.
- Promover y difundir iniciativas en torno a la elaboración de recursos para la educación matemática.
- Constituir bancos de ideas y materiales que contribuyan a la mejora de la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas.
- Colaborar en la formación permanente del profesorado de matemáticas.

- Aportar impulsos de mejora en la enseñanza de las matemáticas a partir de conferencias, talleres y otras actividades destinadas a los docentes.
- Identificar y difundir experiencias didácticas de interés especial que se hacen en la clase de matemáticas.
- Conectar la investigación con la escuela promoviendo la transferencia de conocimiento y la innovación en educación matemática.
- Explorar y promover oportunidades para poner en contacto la educación matemática con todos los ámbitos de la sociedad.

El CREAMat pertenece a la red CESI (Centros Específicos de apoyo a la innovación e investigación educativa) que tienen como funciones:

- Conocer la investigación que se hace en didáctica y educación del área respectiva: promover y difundir los resultados y adecuarlos a las necesidades del profesorado.
- Diseñar y difundir actividades y recursos que ayuden al profesorado en su labor innovadora.
- Promover y difundir actividades que tienen como finalidad el estímulo entre el alumnado del interés y gusto por el aprendizaje de las áreas y materias respectivas.
- Detectar, impulsar y hacer el seguimiento de buenas prácticas y experiencias didácticas de interés especial en el ámbito de actuación específico de cada CESI.
- Dar coherencia y difundir, de manera coordinada con los servicios educativos y los ICE, la formación permanente relacionada con el área específica del CESI, y colaborar en la detección de necesidades en el ámbito formativo.
- Promover y difundir iniciativas en la elaboración de recursos y materiales de calidad e innovación en el área específica.
- Constituir bancos de recursos (bibliográficos, materiales, informáticos, de investigaciones teóricas y otros) para la enseñanza y el aprendizaje del área específica.
- Difundir servicios y actividades, relacionados con la educación del área respectiva, que ofrecen instituciones, asociaciones y centros implantados en todo el territorio.
- Explorar y promover oportunidades para poner en contacto la educación del área correspondiente con diversos ámbitos de la sociedad: la empresa, la industria, el mundo rural, el arte en sus diversas expresiones, los medios de comunicación.
- Ser punto de encuentro y de reflexión para el profesorado de las áreas y materias respectivas, estimulando el conocimiento y la coordinación entre los diferentes niveles educativos y también con la universidad.

En relación a estos objetivos de creación, el diseño y contenido del portal deja satisfecho al visitante esporádico como al habitual. Esta mención no trata de vender al lector una felicitación banal e ingenua. Desde que el internauta accede a la dirección se encontrará con una intro en que se despliegan diversos accesos internos y externos al dominio. A continuación mostramos la página de inicio la cual supera la dimensión de resolución de cualquier pantalla, pero presenta en forma conjunta todos los elementos de los cuales dispone.

De esta manera podemos encontrarnos con tres columnas de base: dos laterales secundarias y una matriz principal.

Ahondando un poco en las secciones, según los títulos de las mismas podemos darnos una idea de cuales son sus contenidos, sin embargo podemos resaltar dentro de Recursos la intención de sus creadores de facilitar múltiples y diferentes materiales para poder llevar a cabo la enseñanza de la matemática; la información varía desde diversos artículos elaborados por integrantes y colaboradores, información sobre los diversos cursos y talleres que brindan a sus integrantes, conferencias virtuales, etc.

Cabe también destacar la subsección Mediateca, en ella podemos encontrar diferentes atractivos con enfoque matemático, dentro del abanico de posibilidades tenemos una sub-subsección dedicada a la enseñanza de la matemática en familia con juegos, apuntes y sugerencias de libros para que padres guien a sus hijos.

Otro aspecto a destacar es la recopilación de cuentos, música, videos, películas que involucran en su contenido aspectos matemáticos (incluyen una especie de itinerario recomendado que enlaza los diferentes módulos y contienen recursos o referencias a recursos en Internet como material complementario).

Con respecto a la sección Portales: se puede acceder a 4 sitios dentro del estado de Cataluña que se relacionan con el ámbito educativo y matemático. Ellos son:

- Asociación para promover y crear un Museo de Matemáticas en Cataluña (MMACA) formado por un grupo de personas que trabaja para que en los hogares haya un espacio museístico dedicado a las matemáticas, la razón explicado como base de formación del mismo es divulgar y estimular una imagen social positiva de las matemáticas: poner de manifiesto su presencia y el papel que juegan en la cultura y progreso, y apoyar la labor de todos los centros educativos, desde primaria hasta la universidad, aunque complementándola con propuestas que rebasan sus posibilidades.
- Los órganos que colaboran en su formación son la FEEMCAT (Federación de Entidades para la Enseñanza de las Matemáticas en Cataluña), del ICE de la UPC de Sociedad Catalana de Matemáticas y Departamento de Educación a través del CREAMA y las facultades de matemáticas de las universidades catalanas.
- Los portales educativos del Departamento de Educación : xtec.cat , edu365.cat y edu3.cat , quienes a través del buscador Merlín reúne un gran número de recursos y materiales que permite a todos los usuarios la posibilidad de encontrarlos a partir de una búsqueda avanzada en función del contenido , formato , área , ciclo , etapa.
- En el portal de la XTEC se puede encontrar una relación de webquests y proyectos en red de ámbito local o internacional, catalogados por niveles educativos y áreas. También hay un enlace a Chispa, red educativa de aulas abiertas con un gran número de recursos y materiales susceptibles de ser utilizados con estos u otros entornos.

Josep Rey, miembro de la Asociación MMAC
Museo de Matemática de Cataluña

La sección CESI nos brinda un enlace directo a los portales de la organización:

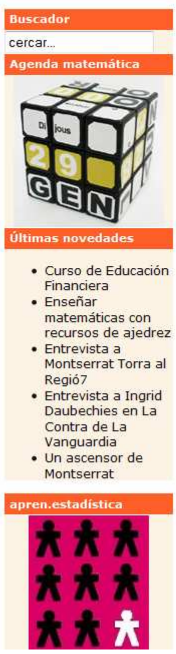
- El AULATEC (Aula de Recursos de Tecnología) es un centro específico de apoyo a la investigación y la innovación (CESI), que pone a disposición del profesorado todos aquellos recursos y acciones formativas que promueven la innovación y la mejora de la enseñanza y aprendizaje de la tecnología en el aula y al mismo tiempo da soporte didáctico y técnico al profesorado de Tecnología de la Educación Secundaria Obligatoria y del Bachillerato.
- El CDEC es un centro específico de apoyo a la investigación y la innovación que pone a disposición del profesorado todos aquellos recursos y acciones formativas que promueven la innovación y la mejora de la enseñanza y aprendizaje de las **ciencias** en el aula
- El CIREL (Centro de apoyo a la Innovación e Investigación Educativa en Lenguas) nace de la sólida experiencia del CRLE (Centro de Recursos de Lenguas Extranjeras) e incorpora el catalán y el español en su ámbito de actuación que se concreta en los objetivos siguientes :

  - Promover la investigación educativa en lenguas, a partir de la detección de necesidades compartidas por los agentes implicados en el diálogo profesional, para fundamentar y dar rigor a la innovación.
  - Establecer estrategias para la implementación de la práctica docente eficiente, significativa y creativa en la enseñanza de lenguas.
  - Recoger, publicar en la página web y difundir recursos que nutren la innovación y que se nutren de las buenas prácticas y de la investigación educativa en lenguas.

- CERES (Centro de apoyo e innovación e investigación educativas de Humanidades, Ciencias Sociales y Filosofía)

En la columna lateral izquierda se detalla:

- Buscador
- Agenda matemática
- Últimas novedades
- ApreEstadística.
- Imágenes al azar
- Año Cerdá
- Semana de la ciencia
- Widgets del Edu3
- Imagina.



Dentro de estas secciones podemos destacar la destinada al aprendizaje, comprensión y trabajo de la **Estadística**, el link despliega una variada gama de actividades para quienes la necesiten(tanto alumos del profesorado, estudiantes del Eso y público en general).

La sección Año Cerdà es un programa llevado a cabo por el ayuntamiento de Barcelona quien decidió declarar en el año 2009 y hasta junio del año 2010 el *Año Cerdá* en conmemoración del aniversario de la aprobación del Plan de Reforma y Ensanche de Barcelona (7 de junio de 1859) dentro del cual fue precursor Ildefons Cerdà; con el Plan Cerdà, Barcelona dio un salto histórico hacia la Barcelona moderna.

Uno de los rasgos distintivos de la programación general del Año Cerdà y también una de sus razones de ser, es su vertiente divulgativa. Por este motivo es que buena parte de los esfuerzos y de las ambiciones de tal proyecto se han destinado al aspecto educativo, el mismo se ha articulado en base a tres líneas de actuación, las que se mencionan a continuación:

- La recopilación y presentación ordenada de las actividades sobre Cerdà y su obra actualmente en curso en los centros educativos o realizadas en los últimos años .
- La elaboración de una serie de propuestas en relación al programa general del Año Cerdà desde el punto de vista educativo .
- Asegurar la disponibilidad de los materiales educativos recopilados y generados con motivo del Año Cerdà más allá de los límites de la celebración.

Equipo de profesionales que integran CREAMat con su Director Anton Aubanell en ocasión de la visita de Norma Cotic.

Otro link interesante es el perteneciente al portal **Imagina** dedicado al uso y difusión de los recursos informáticos, tantos referidos a software y hardwares disponibles en la red, aquí el visitante o usuario frecuente podrá hacer uso, o saciar dudas diversas.

En la columna matriz, el sitio nos ofrece desde artículos o ensayos desarrollados por didactas, investigadores, hasta publicaciones de clases virtuales o ejercicios de alumnos en edad escolar, libros y dictado de cursos o seminarios varios.

También cabe destacar que se ofrece como enlaces complementarios el acceso a diferentes artículos que circulan en la red, tanto de revistas digitales, diarios, informativos, y otros, que tratan de matemática, o educación matemática para quienes trabajan en el área, están en formación o solo lo incita la curiosidad misma.

Llegando al final de esta visita, dejamos abierto al lector la posibilidad de visitar el portal y experimentar por el mismo las diferentes secciones mencionadas que se actualiza continuamente. Esperamos que su vista sea grata....Hasta pronto!

Lorena Alfonso.
Dpto. de Matemática.
Facultad de Economía y Administración.
Universidad Nacional del Comahue.
Argentina.

UNIÓN
REVISTA IBEROAMERICANA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA

Junio de 2010, Número 22, páginas 193-197
ISSN: 1815-0640

Información

La Fundación Canaria Carlos Salvador y Beatriz construye una escuela en Paraguay

La ***Fundación Canaria Carlos Salvador y Beatriz*** continúa su labor de apoyo a la Educación y a las personas comprometidas con ella.

Desde el día 20 de abril y a un buen ritmo, se construye una escuela en Asunción, capital de la República de Paraguay. Ello está siendo posible gracias a la firma de un convenio de colaboración con otras instituciones del país.

Cerro Poty, Asunción, Paraguay

El presupuesto ha sido aportado por la Fundación. La obra se ubica en Cerro Poty, en la comunidad educativa de la Escuela Indígena Nº 5934, de la parcialidad Mbyá y Avá guaraní, al pie del Cerro Lambaré, a poca distancia de la ribera del río Paraguay y del vertedero de residuos de la capital.

Construcción de la escuela

Es un hecho más del trabajo realizado por esta Fundación Canaria de corta vida (constituida el 24 de febrero de 2006 como entidad sin fines lucrativas) y que partiendo de la tragedia (la muerte, en accidente de tráfico, de los dos únicos hijos de 27 y 25 años de los profesores canarios Salvador Pérez y Aurora Estévez) lleva un amplio camino de solidaridad y de ayuda a los demás con una innumerable relación de colaboraciones en América y en las islas Canarias.

Información

La Fundación procura hacer las gestiones y contactos de forma personal aprovechando especialmente los desplazamientos que realiza el Vicepresidente de la Fundación, Luis Balbuena Castellano, quién participa en congresos, seminarios cursos, etc. en diversos lugares. Precisamente ha sido también la vía para conectar y colaborar con la OEI (Organización de Estados Iberoamericanos para la Educación, la Ciencia y la Cultura), una entidad de carácter gubernamental para la cooperación entre los países iberoamericanos. Su Director en Paraguay, Luis María Scasso ha conseguido aunar voluntades y gestionar las bases de la colaboración de la Fundación y el Ministerio de Educación y Cultura que dirige Luis Alberto Riart a través de Liz Cristina Torres Herrera, Ministra- Secretaria Ejecutiva de la Secretaría Nacional de la Niñez y de la Adolescencia y así poder construir la citada escuela dotada de aula, cocina-comedor y servicios higiénicos. En la realización de este proyecto es destacable, igualmente, la aportación solidaria del Colegio Público *Princesa Tejina* del municipio de La Laguna (Islas Canarias) que con su directora al frente, Isabel Teresa Gómez Gutiérrez que ha contado con la colaboración de profesores, alumnos y padres para trabajar en la organización de actos con la finalidad de conseguir los fondos económicos para la construcción de los servicios higiénicos. Además de esa acción, sin duda importante, la Fundación Canaria *Carlos Salvador y Beatriz* ha realizados otras en la misma línea de apoyo a la Educación. Entre ellas podemos destacar:

- Entrega, en enero de 2010 de 500 euros en Perú para compra y posterior entrega de materiales didácticos con la colaboración de la profesora Martha Villavicencio Presidenta de la Sociedad Peruana de Educación Matemática (SOPEMAT).
- Entrega en Paraguay de material escolar con destino a escuela carenciadas con la colaboración de la profesora Gladys Zárate.
- Ayuda de 400 euros a la Asociación Cultural de “Canarios en Cuba” en el mes de marzo de 2010 destinados al acondicionamiento y mejora del local social de Jaruco, a 60 Km. Al oeste de La Habana.
- La colaboración económica que la Fundación presta a la revista UNIÓN se ha extendido y creado una línea de ayuda a la formación del profesorado. Recientemente se han acogido a las becas convocadas la profesora Sandra Elizabeth Brown y el profesor Néstor Gabriel Romero, ambos argentinos.

- También con ese objetivo de contribuir a la formación del profesorado, se hizo entrega, en enero de 2010, a la Sociedad Boliviana de Educación Matemática (SOBOEDMA) de un "cañón de diapositivas", para mejorar la calidad de los cursos que esta sociedad imparte en Bolivia.

La Fundación ha convocado un Premio Literario, ahora en su segunda edición dedicado a la poesía, dotado con 2000 euros y la publicación de la obra. En la misma idea de fomentar el estudio y la investigación ha convocado el I Premio de Investigación en el Ámbito Psicosocial, a través de un convenio con la Universidad de La Laguna (Islas Canarias, España) para profesionales e investigadores vinculados a la Psicología que trabajen en Canarias. Se valorarán especialmente las investigaciones y aplicaciones en el ámbito psicosocial como familia, drogadicción, educación, intervenciones en situaciones excepcionales, etc. y que tengan repercusión sobre las personas o grupos a los que van dirigidos.

Destacar que la Universidad de La Laguna, en diciembre de 2009, concedió a nuestra Fundación una Mención Honorífica en el Premio de Creatividad Social que convoca dicha institución.

Es una Fundación canaria que parte de la desgracia a la esperanza y está dispuesta a "hacer cosas por los demás". Si no eres socio y deseas serlo es fácil: con 5 o 10 euros al año podemos hacer mucho por la educación, la cultura y la solidaridad.
Estamos orgullosos pero no satisfechos: podemos hacer más.
Para tener más información, les invitamos a que visiten nuestra página web:

www.carlossalvadorybeatrizfundación.com

Hay muchas fotos pues, en ocasiones, una imagen vale más que mil palabras…

¡¡Les esperamos!!

A Fundação Carlos Salvador e Beatriz constrói uma escola em Paraguai

A Fundação Canaria Carlos Salvador e Beatriz continua seu labor de apoio à Educação e às pessoas comprometidas com ela.

Desde o dia 20 de abril e a um bom ritmo, constrói-se uma escola em Assunção, capital da República de Paraguai. Isso está a ser possível graças à assinatura de um convênio de colaboração com outras instituições do país.

Cerro Poty, Assunção, Paraguai

O orçamento foi contribuído pela Fundação. A obra localiza-se em Cerro Poty, na comunidade educativa da Escola Indígena Nº 5934, da parcialidad Mbyá e Avá guaraní, ao pé do Cerro Lambaré, a pouca distância da ribera do rio Paraguai e do vertedero de residuos da capital.

Construção da escola

É um facto mais do trabalho realizado por esta Fundação Canaria de curta vida (constituída o 24 de fevereiro de 2006 como entidade sem fins lucrativas) e que partindo da tragédia (a morte, em acidente de tráfico, dos dois únicos filhos de 27 e 25 anos dos professores canarios Salvador Pérez e Aurora Estévez) leva um amplo caminho de solidariedade e de ajuda aos demais com uma inumerável relação de colaborações em América e nas ilhas Canárias.

A Fundação tenta fazer as gestões e contactos de forma pessoal aproveitando especialmente os deslocamentos que realiza o Vice-presidente da Fundação, Luis Balbuena Castellano, quem participa em congressos, seminários cursos, etc. em diversos lugares. Precisamente foi também a via para conectar e colaborar com a OEI (Organização de Estados Iberoamericanos para a Educação, a Ciência e a Cultura), uma entidade de carácter governamental para a cooperação entre os países iberoamericanos. Seu Director em Paraguai, Luis María Scasso conseguiu aunar vontades e gestionar as bases da colaboração da Fundação e o Ministério de Educação e Cultura que dirige Luis Alberto Riart através de Liz Cristina Torres Herrera, Ministra- Secretária Executiva da Secretaria Nacional da Niñez e da Adolescencia e assim poder construir a citada escola dotada de aula, cocina-comedor e serviços higiénicos. Na realização deste projecto é destacable, igualmente, a contribuição solidaria do Colégio Público Princesa Tejina do município da Laguna (Ilhas Canárias) que com sua directora à frente, Isabel Teresa Gómez Gutiérrez que contou com a colaboração de professores, alunos e pais para trabalhar na organização de actos com a finalidade de conseguir os fundos económicos para a construção dos serviços higiénicos. Além dessa acção, sem dúvida importante, a Fundação Canaria Carlos Salvador e Beatriz realizou outras na mesma linha de apoio à Educação. Entre elas podemos destacar:

- Entrega, em janeiro de 2010 de 500 euros em Peru para compra e posterior entrega de materiais didácticos com a colaboração da professora Martha Villavicencio Presidenta da Sociedade Peruana de Educação Matemática (SOPEMAT).
- Entrega em Paraguai de material escolar com destino a escolas carenciadas com a colaboração da professora Gladys Zárate.

- Ajuda de 400 euros à Associação Cultural de #8220;Canarios &em Cuba” no mês de março de 2010 destinados ao acondicionamiento e melhora do local social de Jaruco, a 60 Km. Ao oeste de Havana.

- A colaboração económica que a Fundação presta à revista UNIÃO se estendeu e criado uma linha de ajuda à formação do profesorado.
  Recentemente acolheram-se às bolsas convocadas a professora Sandra Elizabeth Brown e o professor Néstor Gabriel Romero, ambos argentinos.

- Também com esse objectivo de contribuir à formação do profesorado, se fez entrega, em janeiro de 2010, à Sociedade Boliviana de Educação Matemática (SOBOEDMA) de um "canhão de diapositivas", para melhorar a qualidade dos cursos que esta sociedade dá em Bolívia.

A Fundação convocou um Prêmio Literário, agora em sua segunda edição dedicado à poesia, dotado com 2000 euros e a publicação da obra. Na mesma ideia de fomentar o estudo e a investigação convocou o I Prêmio de Investigação no Âmbito Psicosocial, através de um convênio com a Universidade da Laguna (Ilhas Canárias, Espanha) para profissionais e pesquisadores vinculados à Psicologia que trabalhem em Canárias. Valorizar-se-ão especialmente as investigações e aplicações no âmbito psicosocial como família, drogadicción, educação, intervenções em situações excepcionais, etc. e que tenham repercussão sobre as pessoas ou grupos aos que vão dirigidos.

Destacar que a Universidade da Laguna, em dezembro de 2009, concedeu a nossa Fundação uma Menção Honorífica no Prêmio de Criatividade Social que convoca dita instituição.

É uma Fundação canaria que parte da desgraça à esperança e está disposta a "fazer coisas pelos demais". Se não és sócio e desejas o ser é fácil: com 5 ou 10 euros ao ano podemos fazer muito pela educação, a cultura e a solidariedade.
Estamos orgulhosos mas não satisfeitos: podemos fazer mais.
Para ter mais informação, convidamos-lhes a que visitem nossa página site:

www.carlossalvadorybeatrizfundación.com

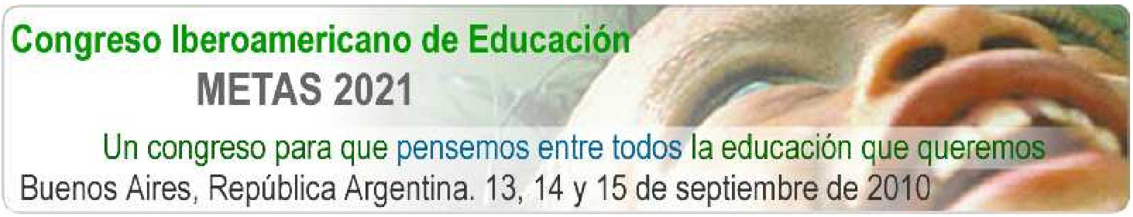
Hay muchas fotos pues, en ocasiones, una imagen vale más que mil palabras…

¡¡Esperamos-lhes!!

Junio de 2010, Número 22, página 199
ISSN: 1815-0640

Información

Congreso Iberoamericano de Educación. METAS 2021.



La propuesta Metas 2021: la educación que queremos para la generación de los Bicentenarios es un ambicioso proyecto que, propuesto por la Organización de Estados Iberoamericanos para la Educación, la Ciencia y la Cultura (OEI), ha contado con la adhesión de los estados iberoamericanos que trabajan ya en la puesta en marcha de las medidas y acciones.

Para más información, visitar la web: **www.oei.es/metas2021/indice.htm**

Esa organización, junto con el Ministerio de Educación de la Nación Argentina y la Secretaría General Iberoamericana (SEGIB) con el apoyo de la Agencia Española de Cooperación Internacional para el Desarrollo (AECID) convocan el Congreso reseñado en el marco del cual se presentarán:

a) El **Curso Ñandutí** para la formación permanente del profesorado de enseñanza secundaria de Iberoamérica.
b) La revista **UNIÓN** que edita la Federación Iberoamericana de Sociedades de Educación Matemática (FISEM)

Este Congreso tiene como objetivo principal discutir y concretar los objetivos, metas indicadores, programas de acción compartidos y mecanismos de seguimiento y evaluación de la propuesta.

Participarán en este evento las autoridades educativas de la región. expertos internacionales, maestros y profesores, está abierto a la participación y se podrán presentar ante el Comité Científico comunicaciones y pósters.

Para más información del Congreso visitar: **www.metas2021.org/congreso/**

UNIÓN
REVISTA IBEROAMERICANA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA

Junio de 2010, Número 22, páginas 201-203
ISSN: 1815-0640

Convocatorias y eventos

AÑO 2010

24 Reunión Latinoamericana de Matemática Educativa (RELME 24)
Ciudad de Guatemala- Guatemala
Convoca: Comité Latinoamericano de Matemática Educativa.
Fecha: 5 al 9 de Julio de 2010
Información: **www.clame.org.mx**
clame@clame.org.mx

X Encuentro Nacional de Educación Matemática. Educación Matemática, Cultura y Diversidad.

Organiza: SBEM (Sociedad Brasileña de Educación Matemática).
Fecha: 7 al 9 de julio de 2010.
Lugar: Salvador, Brasil.
Información: **www.sbem.com.br/xenem/xenem.html**

8º International Conference on Teaching Statistics (ICOTS 8)

Lugar: Ljubljan, Eslovenia
Fecha: 11 al 16 de Julio, 2010
Información: **http://icots8.org/**

III Reunión Pampeana de Educación Matemática

Facultad de Ciencias Exactas y Naturales. Universidad Nacional de La Pampa.
Lugar: Santa Rosa, La Pampa. Argentina.
Fecha: 18 al 20 de agosto de 2010.
Información: **http://online2.exactas.unlpam.edu.ar/repem/index.htm**

XXI Seminario de Investigación en Educación Matemática

Convoca: Asociación de Profesores de Matemática, Portugal.
Lugar: Universidade de Aveiro. Portugal.
Fecha: 4 y 5 de septiembre de 2010
Información: **www.apm.pt**

XIV Simposio de la Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática

Convoca: Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática
Lugar: Facultad de Ciencias de la Educación. Universidad de Lleida, España.
Fecha: 8 al 10 de septiembre de 2010
Información: **www.seiem.es**

V Congreso Iberoamericano de Cabri

Lugar: Universidad de Querétaro. México.
Fecha: Del 14 al 17 de Setiembre de 2010.
Información: **www.iberocabri.org**

REUNION ANUAL DE LA UNION MATEMATICA ARGENTINA

Lugar**:** Tandil, Pcia. de Buenos Aires. (Argentina)
Convoca**:** Unión Matemática Argentina (UMA)
Fecha: 27 de septiembre al 2 de octubre de 2010
Información: **www.union-matematica.org.ar**

VII Congreso Venezolano de Educación Matemática
Organiza: Asovemat, Asociación Venezolana
Lugar: Caracas. Venezuela.
Fecha: 5 al 8 de octubre 2010
Información: **asovematrc@cantv.net**

11°Encuentro Colombiano de Matemática Educativa.

Convoca: Asociación Colombiana de Matemática Educativa -ASOCOLME
Lugar: Colegio Champagnat, Bogotá. Colombia.
Fecha: 7 al 9 de octubre.
Información: **www.asocolme.com**

Lugar: Villa María. Córdoba. Argentina.
Convoca: Sociedad Argentina de Educación Matemática (SOAREM)
Fecha: 7 al 9 de octubre de 2010.
Información: **www.soarem.org.ar**

AÑO 2011

XIII CIAEM: XIII Conferencia Iberoamericana de Educación Matemática
Lugar: Recife. Brasil
Convoca: Comité Interamericano de Educación Matemática.
Fecha: 26 al 29 de junio de 2011
Información: http://www.ce.ufpe.br/ciaem2011

UNIÓN
REVISTA IBEROAMERICANA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA

Junio de 2010, Número 22, página 205-206
ISSN: 1815-0640

Normas para publicar en Unión

1. Los trabajos para publicar se deben enviar a union.fisem@sinewton.org con copia a revistaunion@gmail.com. Deben ser originales y no estar en proceso de publicación en ninguna otra revista. Serán remitidos a varios evaluadores y el Comité editorial de la Revista decidirá finalmente sobre su publicación.
2. Los artículos remitidos para publicación deben ser escritos en Word, preferentemente usando la plantilla establecida al efecto (descargar plantilla) y, en todo caso, cumpliendo las siguientes normas: letra tipo **arial**, tamaño **12 puntos**, interlineado simple, márgenes de 2,5 cm. como mínimo en los 4 bordes del papel, tamaño DIN A-4. La extensión no debe ser superior a las 20 páginas, incluyendo figuras, que deben estar situadas en el lugar del texto donde deben ser publicadas. La simbología matemática necesaria se escribirá con el editor de ecuaciones de Word, se insertará como una imagen o se realizarán utilizando los símbolos disponibles en el juego de caracteres "Arial". Es importante no cambiar el juego de caracteres, especialmente **evitar el uso del tipo "Symbol"** u otros similares.
3. Las **ilustraciones y fotografías** deben estar situadas en el lugar del texto donde deben ser publicadas. Si es posible, los "pie de foto" se escribirán dentro de un "cuadro de texto" de Word (con o sin bordes) que estará "agrupado" con la imagen de referencia. Se deben numerar usando: Fig. 1, Fig. 2,… Tabla 1, Tabla 2,…
4. El artículo deberá comenzar con un **resumen(español) o resumo(portugués) y abstract (inglés)**, que tendrá una longitud máxima de 6 líneas.
5. Teniendo en cuenta el carácter internacional de la revista, se hace indispensable que cuando los autores se refieran a un determinado sistema educativo nacional lo hagan constar expresamente y que siempre que se trate de un nivel educativo se indique la edad normal de los alumnos, lo que permitirá la comparación con el sistema educativo nacional del lector.
6. Los datos de identificación de los autores deben figurar en la última página del mismo documento word que contiene el artículo. Con el fin de garantizar el anonimato en el proceso de evaluación, solamente estarán los **datos personales** en esta **última página**. En ella se hará constar los siguientes datos:
   - **De contacto**: nombre, dirección electrónica, dirección postal, teléfono.
   - **Para la publicación**: centro de trabajo, lugar de residencia y/o del centro de trabajo, así como una breve reseña biográfica de unas cinco líneas
   - Las referencias bibliográficas se incluirán al final del trabajo (y antes de la hoja de datos identificativos) y deben seguir los formatos que se indican a continuación.

Para un libro:

Bourbaki, N. (1972). *Elementos de historia de las matemáticas.* Editorial Alianza, Madrid. España.

Bermejo, A. (1998). *La enseñanza de la geometría en la educación primaria.* Editorial Pico Alto, Buenos Aires. Argentina.

Para un artículo:

Ibáñez, M. y Ortega, T. (1997). *La demostración en matemáticas. Clasificación y ejemplos en el marco de la educación secundaria*. Educación Matemática 9, 65-104.

Díaz, C. y Fernández, E. (2002). *Actividades con ordenador para la enseñanza de la suma*. Revista de didáctica de las matemáticas 19, 77-87.

Para un capítulo de libro:

Albert, D. y Thomas, M. (1991).Research on mathematical proof. En: Tall, D. (ed.), Advanced Mathematical Thinking, 215-230. Kluwer, Dordrecht.

Para artículo de revista electrónica o información en Internet:

García Cruz, J. (2008*). Génesis histórica y enseñanza de las matemáticas*. UNIÓN Nº14 [en línea]. Recuperado el 20 de marzo de 2009, de http://www.fisem.org/paginas/union/info.php?id=320

NOTA: Las normas que se indican en los puntos 2, 3 y 6 pretenden dar uniformidad a los trabajos que se reciban en la redacción y simplificar así el trabajo de composición y maquetación de la revista. Si alguien tiene dudas sobre su aplicación, puede dirigir sus preguntas (lo más concretas posible) a revistaunion@gmail.com