UNIÓN
REVISTA IBEROAMERICANA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA

Número 26 – Junio de 2011

Índice

UNIÓN
REVISTA IBEROAMERICANA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA

Junio de 2011, Número 26, páginas 3-4
ISSN: 1815-0640

Unión. Revista Iberoamericana de Educación Matemática es una publicación de la Federación Iberoamericana de Sociedades de Educación Matemática **(FISEM)**. Tiene una periodicidad trimestral, de modo que se publican cuatro números al año, en los meses de marzo, junio, septiembre y diciembre.

.

Es recensionada en ***Mathematics Education Database*** y está incluida en el catálogo ***Latindex*.**

Evaluadores

Pilar Acosta Sosa
María Mercedes Aravena Díaz
Lorenzo J Blanco Nieto
Natael Cabral
María Luz Callejo de la Vega
Matías Camacho Machín
Agustín Carrillo de Albornoz
Silvia Caronia
Eva Cid Castro
Carlos Correia de Sá
Cecilia Rita Crespo Crespo
Miguel Chaquiam
María Mercedes Colombo
Patricia Detzel
Dolores de la Coba
José Ángel Dorta Díaz
Rafael Escolano Vizcarra
Isabel Escudero Pérez
María Candelaria Espinel Febles
Alicia Fort
Carmen Galván Fernández
María Carmen García Gonzalez
María Mercedes García Blanco
José María Gavilán Izquierdo
Margarita González Hernández
María Soledad González
Nelson Hein
Josefa Hernández Domínguez
Rosa Martinez
José Manuel Matos
José Muñoz Santonja
Raimundo Ángel Olfos Ayarza
Luiz Otavio.
Manuel Pazos Crespo
María Carmen Peñalva Martínez
Inés Plasencia
María Encarnación Reyes Iglesias
Natahali Martín Rodríguez
María Elena Ruiz
Victoria Sánchez García
Leonor Santos
Maria de Lurdes Serrazina
Martín M. Socas Robayna
María Dolores Suescun Batista
Ana Tadea Aragón
Mónica Ester Villarreal
Antonino Viviano Di Stefano

Diseño y maquetación

Diseño web: Daniel García Asensio
Textos: Vilma Giudice
Logotipo de Unión: Eudaldo Lorenzo
webmaster: Elda Beatriz Micheli

Colabora

CARLOS SALVADOR Y BEATRIZ FUNDACIÓN CANARIA

REVISTA IBEROAMERICANA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA

Junio de 2011, Número 26, páginas 5-6
ISSN: 1815-0640

Editorial

"Es en la ciencia, y más precozmente en las matemáticas, en donde los alumnos pueden aprender cómo establecer y cómo gestionar la verdad científica en una sociedad democrática. Los medios para realizar este proyecto no son fáciles de inventar ni de poner en marcha, pero aún es más difícil introducir este proyecto y sus consecuencias en la cultura. Sin embargo, únicamente la penetración de la didáctica en la cultura permitirá mejorar la gestión política de la difusión de los saberes y volver más democrático su uso y su creación".
Guy Brousseau, 1999.

Estimados colegas y amigos:

Nuevamente estamos con ustedes, acercando un volumen más de UNION, eso nos da alegría, pero la misma se ve empañada con el enorme dolor por la partida de nuestra querida Nelly Vázquez de Tapia, quién fue, es y será un verdadero ejemplo de vocación docente y de formadora de formadores. Presentamos en este número una breve reseña sobre su fructífera trayectoria, destacando su gran humildad, su indiscutible compromiso y su incuestionable profesionalismo.

En este número presentamos el excelente artículo sobre la formación de docentes de nuestra firma invitada, Vicenç Font Moll, a quien agradecemos especialmente su colaboración con UNION.

Se incluyen interesantes artículos de diversas temáticas, escritos por docentes de diferentes países, todos ellos preocupados pero también ocupados en mejorar la enseñanza en términos generales y en particular la enseñanza de la matemática y de esta manera colaborar con la formación permanente del profesorado de todos los países de la región.

Las secciones fijas nos ofrecen algunas sugerencias para aplicar en el aula que pueden ser adaptadas a los diferentes niveles educativos y a distintos contextos.

Podemos seguir conociendo sobre las obras que realiza la Fundación Canaria Carlos Salvador y Beatriz en distintas líneas, todas ellas apoyando a la educación, sin duda alguna.

Como siempre nuestro agradecimiento a los autores que colaboraron en esta edición y a los evaluadores por su trabajo constante y reiteramos, finalmente, la invitación a todos para publicar en próximos números de UNION.

Un abrazo fraternal.

Norma S. Cotic – Teresa C. Braicovich
Directoras

.

Editorial

"É na ciência, e mais precocemente nas matemáticas, em onde os alunos podem aprender como estabelecer e como gestionar a verdade científica numa sociedade democrática. Os meios para realizar este projecto não são fáceis de inventar nem de pôr em marcha, mas ainda é mais difícil introduzir este projecto e suas consequências na cultura. No entanto, unicamente a penetración da didáctica na cultura permitirá melhorar a gestão política da difusión dos saberes e voltar mais democrático seu uso e sua criação".
Guy Brousseau, 1999.

Estimados colegas e amigos

Novamente estamos com vocês, acercando um volume mais de UNION, isso nos dá alegria, mas a mesma se vê empañada com a enorme dor pela partida de nossa querida Nelly Vázquez de Tapia, quem foi, é e será um verdadeiro exemplo de vocação docente e de formadora de formadores. Apresentamos neste número uma breve reseña sobre sua fructífera trajectória, destacando seu grande humildad, seu indiscutible compromisso e seu incuestionable profesionalismo.

Neste número apresentamos o excelente artigo sobre a formação de docentes de nossa assinatura convidada, Vicenç Font Moll, a quem agradecemos especialmente sua colaboração com UNION.

Incluem-se interessantes artigos de diversas temáticas, escritos por docentes de diferentes países, todos eles preocupados mas também ocupados em melhorar o ensino em termos gerais e em particular o ensino da matemática e desta maneira colaborar com a formação permanente do profesorado de todos os países da região.

As secções fixas oferecem-nos algumas sugestões para aplicar no aula que podem ser adaptadas aos diferentes níveis educativos e a diferentes contextos.

Podemos seguir conhecendo sobre as obras que realiza a Fundação Canaria Carlos Salvador e Beatriz em diferentes linhas, todas elas apoiando à educação, sem dúvida alguma.

Como sempre nosso agradecimiento aos autores que colaboraram nesta edição e aos evaluadores por seu trabalho constante e reiteramos, finalmente, o convite a todos para publicar em próximos números de UNION.

Um abraço fraternal.

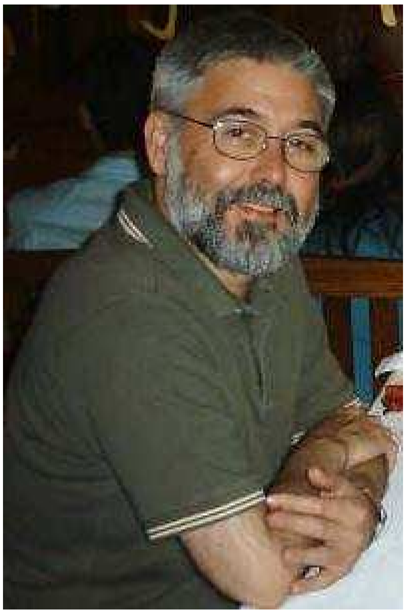
Norma S. Cotic – Teresa C. Braicovich
Directoras

UNIÓN
REVISTA IBEROAMERICANA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA
firma invitada

Junio de 2011, Número 26, página 7-8
ISSN: 1815-0640

Vicenç Font Moll

Breve Reseña



Nació en Palma de Mallorca, Illes Balears, España, en 1955. Estudió Ciencias (Sección Matemáticas) en la Universitat Autònoma de Barcelona y después de una etapa como profesor de secundaria se incorporó, como profesor titular del área de conocimiento de didáctica de la matemática, al Departament de Didàctica de les CCEE i de la Matemàtica de la Universitat de Barcelona, donde también realizó su tesis doctoral.

Ha publicado varios artículos en torno a la educación matemática en las principales revistas de investigación de la área de didáctica de las matemáticas: Educational Studies in Mathematics, Recherches en Didactiques des Mathematiques, For the Learning of Mathematics, ZDM-The International Journal on Mathematics Education, Educación Matemática, RELIME, Enseñanza de las Ciencias, Revista de Educación, Infancia y Aprendizaje, etc. Ha presentado ponencias invitadas y comunicaciones en congresos internacionales (RELME, CIBEM, PME, CERME, ICME, CIEAEM, CAREM, SEIEM, JAEM, etc.). También ha sido revisor de artículos de investigación en diferentes revistas y ha participado o está participando en diferentes proyectos de investigación..

Ha impartido cursos de formación permanente, ha publicado artículos de divulgación (Cuadernos de Pedagogía, Suma, UNO, Unión, Biaix, etc.) y libros de texto de Secundaria y de Bachillerato. Ha sido director de la revista Biaix, editada por la Federació d'Entitats per a l'Ensenyament de les Matemàtiques a Catalunya, España (FEEMCAT), y miembro del Consejo de Redacción de la Revista Suma, editada por la Federación Española de Sociedades de Profesores de Matemáticas.

Actualmente es el coordinador del Máster de Formación de Profesorado de Secundaria de Matemáticas de la Universitat de Barcelona y del grupo GRADEM (Grupo de investigación sobre Análisis Didáctico en Educación Matemática) constituido por investigadores diferentes países, cuya línea de investigación se inscribe dentro el enfoque ontosemiótico de la cognición e instrucción matemática y de las aproximaciones socioculturales. En concreto, pretende desarrollar herramientas para el análisis didáctico que sirvan para el desarrollo profesional del profesorado. Otras líneas de investigación en las que trabaja son la didáctica del análisis matemático y la epistemología de las matemáticas y de la didáctica de las matemáticas.

.

UNIÓN
REVISTA IBEROAMERICANA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA

Junio de 2011, Número 26, páginas 9-25
ISSN: 1815-0640

firma invitada

Competencias profesionales en la formación inicial de profesores de matemáticas de secundaria

Vicenç Font Moll

Resumen

En este artículo, después de explicar cómo era la formación inicial de profesores de matemáticas de secundaria en España en el periodo 1971-2009, se explica cómo es la actual formación inicial y se comentan algunos aspectos problemáticos. A continuación se presenta una propuesta, desarrollada en el marco de tres proyectos de investigación, de competencias profesionales en matemáticas y su didáctica no contradictoria con las directrices curriculares vigentes. Por último, se expone cómo se ha desarrollado, una de dichas competencias, en el máster de Profesor de Secundaria de Matemáticas de la Universitat de Barcelona durante el curso 2010-2011. En concreto se describe un ciclo formativo para el desarrollo de uno de los componentes de la macro competencia en análisis didáctico: identificación de potenciales mejoras de un proceso de instrucción en nuevas implementaciones.

Abstract

In this article, after explaining what it was the initial training of secondary mathematics teachers during the period 1971-2009, it explains how it is the initial current training for high school math teacher in Spain and it discusses some problematic aspects. Below is a proposal developed in the framework of three research projects, professional competencies in mathematics and its didactic, which is consistent with the current curriculum guidelines. Finally, it discusses how one of these competencies has been developed in the Master of Mathematics Teacher at the University of Barcelona during the 2010-2011 academic year. Specifically, it describes a training cycle for the development of one of the components of macro competition in didactic analysis: identification of potential improvements to a process of instruction in new implementations.

Resumo

Neste artigo, após explicar como era a formação inicial de professores de matemáticas de secundária em Espanha no período 1971-2009, se explica como é a actual formação inicial e se comentam alguns aspectos problemáticos. A seguir apresenta-se uma proposta, desenvolvida no marco de três projectos de investigação, de concorrências profissionais em matemáticas e sua didáctica não contradictoria com as directrizes curriculares vigentes. Por último, expõe-se como se desenvolveu, uma de ditas concorrências, no mestrado de Professor de Secundária de Matemáticas da Universitat de Barcelona durante o curso 2010-2011. Em concreto descreve-se um ciclo formativo para o desenvolvimento de um dos componentes da macro concorrência em análise didáctica: identificação de potenciais melhoras de um processo de instrução em novas implementaciones.

1. Introducción

El profesor de secundaria en España debe formarse para enseñar en dos etapas claramente diferenciadas (figura 1): la Enseñanza Secundaria Obligatoria (ESO), etapa de 4 años, obligatoria y de carácter general, y la Educación Secundaria postobligatoria constituida por el Bachillerato, etapa de 2 años, no obligatoria, con varias especialidades y que prepara para el acceso a la universidad, o bien por la Formación Profesional (ciclos formativos de grado medio y superior). Esta estructura, junto con los cambios que se han producido en nuestra sociedad en los últimos años que afectan de manera especial a los adolescentes, hace que sea del todo necesaria una formación específica de carácter profesional para acceder a la docencia en la educación secundaria.

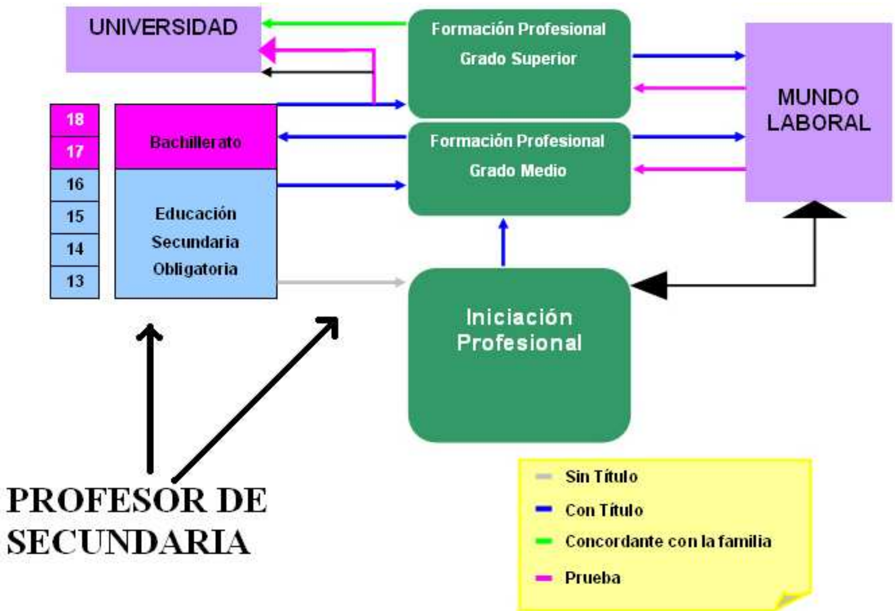


Figura 1. Estructura de la Enseñanza Secundaria Obligatoria, Bachillerato y Formación Profesional

El objetivo de este artículo es presentar cuál es la posición de nuestro grupo de investigación sobre algunos aspectos de la actual formación inicial para ser profesor de matemáticas de secundaria en España. Para ello, hemos estructurado el texto de la siguiente manera, después de esta introducción, en la segunda sección explicamos cómo era la formación inicial de los profesores de matemáticas de secundaria en el periodo 1971-2009. En la tercera sección comentamos algunas conclusiones para la formación inicial que se extraen del desarrollo profesional de los profesores que tuvieron esta formación inicial. En la cuarta sección se explican las características de la formación inicial obligatoria a partir del 2010 (vigente en algunas universidades a partir del curso 2009-2010). En la quinta sección se comentan algunos aspectos problemáticos relacionados con la formación inicial actual. En la sexta sección se presenta una propuesta, desarrollada en el marco de tres proyectos de investigación, de competencias profesionales en matemáticas y su didáctica no contradictoria con las directrices curriculares vigentes. En la séptima sección se expone cómo se ha desarrollado, en el Máster de Formación de Profesor de Secundaria de Matemáticas de la Universitat de Barcelona durante el curso 2009-

2010, una de dichas competencias. En concreto se describe un ciclo formativo para el desarrollo de uno de los componentes de la macro competencia en análisis didáctico: identificación de potenciales mejoras de un proceso de instrucción en nuevas implementaciones. Por último, se hacen algunas consideraciones finales.

2. La formación inicial en el período 1971-2009

Antes de explicar las características de la actual formación para ser profesor de secundaria en España conviene comenzar comentando, brevemente, cuál era la situación anterior a la actual. Durante el periodo 1971-2009, España era uno de los países de Europa que menos formación didáctica exigía a los profesores de secundaria. Para ser profesor de secundaria de matemáticas había que acreditar el grado de matemáticas (física, química, ingeniería, etc.) y después obtener el diploma del Curso de Adaptación Pedagógica (CAP).

En las Facultades de Matemáticas no se contemplaba un itinerario cuya salida profesional fuese ser profesor de matemáticas de secundaria, lo que aquí llamaremos un modelo de formación inicial en paralelo. Lo que funcionaba era un modelo consecutivo. Esto es, primero formación disciplinar y posteriormente una mínima formación profesional (el CAP), la cual además sólo se exigía en la enseñanza pública.

El CAP era un curso teórico-práctico, con una duración de reducida (80 horas de teoría y 40 de prácticas), que estuvo vigente desde 1971 hasta el curso 2008-09. La parte teórica trataba contenidos psicopedagógicos generales, contenidos relacionados con la estructura de la institución escolar, contenidos relacionados con el currículum y contenidos de didáctica de las matemáticas. La formación práctica se desarrollaba en los centros de secundaria bajo la supervisión de profesores-tutores de enseñanza secundaria.

A pesar de la buena voluntad de los organizadores del CAP, la mayoría de los participantes se mostraban insatisfechos con este tipo de formación y lo consideraba básicamente como un requisito burocrático para poder ser profesor.

3. Competencias profesionales desarrolladas a partir de la práctica. Implicaciones para la formación inicial

La formación matemática y didáctica de los futuros profesores ha reclamado la atención por parte de la comunidad de investigadores en Didáctica de las Matemática y de las administraciones educativas. La principal razón es que el desarrollo del pensamiento y de las competencias matemáticas de los alumnos depende de manera esencial de la formación de sus profesores.

Recientemente ha habido un incremento notable de las investigaciones sobre la formación de profesores de matemáticas como se refleja en las revisiones incluidas en los “handbooks” de investigación en educación matemática (Bishop et. al., 2003; English et al., 2002; Llinares y Krainer, 2006; Hill y cols, 2007; Franke y cols, 2007; Sowder, 2007; Jaworski, Giménez et al 2009), y la publicación de revistas específicas como *Journal of Mathematics Teacher Education*. Una de las problemáticas que más ha interesado es la de determinar cuál es el conocimiento didáctico-matemático del profesorado requerido para enseñar matemáticas.

En el caso de España, la investigación realizada sobre la formación de profesores se ha focalizado, sobre todo, en la formación inicial y permanente de maestros y en menor medida sobre la formación inicial de profesores de secundaria. Dichas investigaciones han servido para conocer tanto las limitaciones de la formación inicial en el periodo 1971-2009, como el tipo de competencias que los profesores que recibieron esta formación inicial fueron adquiriendo en su desarrollo profesional. Entre estas competencias hay que resaltar las cuatro que siguen a continuación:

a) Competencia en el domino de los contenidos matemáticos y de su aplicación a diferentes contextos (sobre todo extra matemáticos) correspondientes al currículum de la educación secundaria.

b) Competencia en la planificación y diseño de secuencias didácticas.

c) Competencia en la gestión de las secuencias didácticas en el aula.

d) Competencia en el análisis, interpretación y evaluación de los conocimientos matemáticos de los alumnos a través de sus actuaciones y producciones matemáticas.

Mientras estuvo vigente la formación inicial que hemos comentado se fue generando un amplio consenso sobre los siguientes aspectos: 1) que la formación didáctica que se exigía a los futuros profesores de secundaria de matemáticas era insuficiente y 2) que las competencias profesionales de los profesores en activo, en especial las cuatro que acabamos de comentar, se deberían comenzar a desarrollar en la formación inicial de los futuros profesores. Este segundo aspecto tenía implicaciones significativas para la organización de la formación inicial. Las más importantes eran las siguientes:

- Había que incorporar un itinerario educativo en la formación inicial de profesores de secundaria. Este itinerario se debía articular en torno a la Didáctica de la Matemática.
- Había que asegurar una formación adecuada en matemáticas. Ahora bien, una formación matemática que tuviese en cuenta las aplicaciones de las matemáticas al mundo real, su historia, etc.
- La práctica docente debía formar parte esencial de la formación inicial de los profesores. La reflexión sobre la propia práctica era necesaria para comprender la complejidad del proceso educativo. Ahora bien, era necesario articular el análisis de la propia práctica con las aportaciones de la investigación y la innovación desde la didáctica de la matemática y, en este sentido, era necesaria la coordinación, como mínimo, entre el futuro profesor, el profesor de didáctica de la matemática y el profesor tutor de matemáticas en el centro de secundaria.

4. La situación actual de la formación inicial de profesores de secundaria de matemáticas

En este apartado comentaremos brevemente el contexto curricular en el que se desarrolla la formación inicial de los profesores de enseñanza secundaria de matemáticas a partir del curso 2010-2011. Aunque hay cambios importantes con relación a la formación inicial anterior, en la línea que se ha comentado en la sección tres, el modelo continúa siendo secuencial. Es decir, primero unos estudios de grado disciplinares y después un máster profesional.

El Espacio Europeo de Educación Superior

Según las recomendaciones de la Declaración de Bolonia, los estudios universitarios europeos deben confluir para lograr que estudiantes, docentes e investigadores gocen de una movilidad plena, sin fronteras, y para que en Europa se dé una convergencia real y efectiva de sus titulaciones universitarias. Los nuevos títulos que se han comenzado a impartir obligatoriamente a partir del curso 2010-2011, sustituirán a las diplomaturas y licenciaturas anteriores.

El espíritu que subyace en esta reforma universitaria es el de la integración de contenidos y competencias, donde el trabajo del estudiante pasa a ocupar el centro de atención y se mide por créditos ECTS (cada crédito computará como 25 horas de trabajo del alumno), y donde los resultados no se evaluarán sólo por lo que el estudiante sepa (conocimientos), sino también por lo que sepa hacer (competencias).

Los nuevos títulos se estructuran en tres ciclos: grado (240 créditos ECTS en cuatro años), máster (60, 90 ó 120 créditos en uno o dos años) y doctorado, siendo el primero un título generalista que faculte al estudiante para su inserción en el mercado laboral; el segundo un título más especializado que pueda también iniciarle en la investigación; y el tercero un título plenamente encaminado a la investigación.

Estas son, en síntesis, las líneas maestras que definen el Espacio Europeo de Educación Superior (EEES): la convergencia universitaria con Europa; la movilidad plena de estudiantes, profesores e investigadores universitarios y su adaptación a unos nuevos métodos docentes y discentes.

Competencias profesionales en la formación inicial

Las directrices del máster que habilita para el ejercicio de la profesión de Profesor de Educación Secundaria de Matemáticas[1] (máster de FPSM a partir de ahora) establecen que la duración sea de 60 créditos ECTS (sistema europeo de transferencia y acumulación de ***créditos) y e***stán organizados por competencias. Con carácter general, las enseñanzas han de ser presenciales, al menos, en el 80% de los créditos totales del máster, incluido necesariamente el Prácticum. Las directrices del máster prescriben la realización del Prácticum en colaboración con las instituciones educativas establecidas mediante convenios entre Universidades y Administraciones Educativas.

Los objetivos que se proponen conseguir con este máster son 11 objetivos de tipo competencial, principalmente de carácter profesional. A continuación siguen, a modo de ejemplo, tres de ellos:

- Conocer los contenidos curriculares de las materias relativas a la especialización docente correspondiente, así como el cuerpo de conocimientos didácticos en torno a los procesos de enseñanza y aprendizaje respectivos.

[1] ORDEN ECI/3858/2007, de 27 de diciembre, por la que se establecen los requisitos para la verificación de los títulos universitarios oficiales que habiliten para el ejercicio de las profesiones de Profesor de Educación Secundaria Obligatoria y Bachillerato, Formación Profesional y Enseñanzas de Idiomas. BOE núm. 312 del 29 de diciembre de 2007.

- Concretar el currículo que se vaya a implantar en un centro docente participando en la planificación colectiva del mismo.
- Diseñar y realizar actividades formales y no formales que contribuyan a hacer del centro un lugar de participación y cultura en el entorno donde esté ubicado; desarrollar las funciones de tutoría y de orientación de los estudiantes de manera colaborativa y coordinada; participar en la evaluación, investigación y la innovación de los procesos de enseñanza y aprendizaje.

Las competencias de este máster se estructuran en términos de competencias profesionales genéricas, específicas (matemáticas y su didáctica en nuestro caso) y las que se desarrollan por medio de la práctica. Un ejemplo de competencia genérica es:

- Participar en la definición del proyecto educativo y en las actividades generales del centro atendiendo a criterios de mejora de la calidad, atención a la diversidad, prevención de problemas de aprendizaje y convivencia.

Un ejemplo de competencia específica:

- Identificar los problemas relativos a la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas y plantear alternativas y soluciones.

Un ejemplo de competencia relacionada con la práctica:

- Participar en las propuestas de mejora en los distintos ámbitos de actuación a partir de la reflexión basada en la práctica.

Plan de estudios del máster de FPS de matemáticas que se imparte en la Universitat de Barcelona

Como ejemplo de concreción de estas directrices curriculares comentamos, brevemente, el plan de estudios del máster de FPS de matemáticas que se imparte en la Universitat de Barcelona (UB), que está estructurado en los siguientes módulos, materias y asignaturas que suman un total de 60 créditos ECTS:

Módulo genérico: 15 créditos

- Aprendizaje y desarrollo de la personalidad

    Aprendizaje y desarrollo de la personalidad (5 créditos)

- Procesos y contextos educativos

    Contexto de la Educación Secundaria. Sistemas, modelos y estrategias (2,5 créditos)

    Tutoría y Orientación (2,5 créditos)

- Sociedad, familia y educación

    Sociología de la Educación Secundaria (5 créditos)

Módulo específico: 25 créditos

- Complementos para la formación matemática

    Complementos históricos, metodológicos y de aplicación de los contenidos de Matemáticas (7,5 créditos).

Taller de resolución de problemas y modelización (2,5 créditos)

- Aprendizaje y enseñanza de las matemáticas

  Didáctica de las matemáticas de la ESO y del Bachillerato (5 créditos)

  Recursos y materiales educativos para la actividad matemática (5 créditos)

  Competencias matemáticas y evaluación (2,5 créditos)

- Innovación docente e iniciación a la investigación educativa

  Innovación e investigación sobre la propia práctica (2,5 créditos)

Módulo de Prácticum: 20 créditos

- Prácticum en la especialidad

  Prácticum I (5 créditos)

  Prácticum II (10 créditos)

- Trabajo Final de Máster

  Trabajo Final de Máster (5 créditos)

A continuación a modo de ejemplo siguen las competencias, los resultados de aprendizaje y una breve descripción de los contenidos de la asignatura *Innovación e investigación sobre la propia práctica*:

A) Competencias: 1) Conocer y aplicar propuestas docentes innovadoras en el ámbito de las matemáticas. 2) Analizar críticamente el ejercicio de la docencia de las matemáticas en la ESO y el Bachillerato, utilizando indicadores de calidad. 3) Identificar los problemas relativos a la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas, planteando alternativas y soluciones. 4) Conocer y aplicar metodologías y técnicas básicas de investigación y evaluación educativas y ser capaz de diseñar y desarrollar proyectos de investigación, innovación y evaluación en la enseñanza de las matemáticas.

B) Resultados de aprendizaje: 1) Conocer propuestas docentes innovadoras en el ámbito de las matemáticas. 2) Describir, explicar y analizar la propia práctica docente. 3) Conocer y aplicar indicadores de calidad para valorar procesos de enseñanza-aprendizaje. 4) Generar propuestas innovadoras en la enseñanza de las matemáticas a la secundaria. 5) Conocer las investigaciones actuales más relevantes en educación matemática. 6) Investigar sobre la propia práctica.

C) Breve descripción de los contenidos: 1) Herramientas para analizar y valorar la propia práctica: a) epistemológicas (objetos y procesos matemáticos), b) normativas (normas sociomatemáticas y sociales) y c) axiológicas (criterios de calidad). 2) Análisis (descripción y explicación) y valoración de procesos de enseñanza-aprendizaje. 3) Conocimiento de propuestas innovadoras en la enseñanza de las matemáticas en la secundaria. 4) Formulación, desarrollo y valoración de innovaciones didácticas en la enseñanza de las matemáticas en la secundaria. 5) Investigación en didáctica de las matemáticas. El profesorado como investigador en el aula.

En la propuesta de la Universitat de Barcelona podemos ver que se han tenido en cuenta las tres implicaciones para la formación inicial de futuros profesores que se han señalado en la parte final del apartado tres. La primera y la tercera ya vienen implícitas en las directrices curriculares del máster de FPS de matemáticas, ya que se trata de un itinerario educativo articulado en torno a la Didáctica de la Matemática en el que la práctica docente forma parte esencial del plan de estudios. La segunda también se ha tenido en cuenta, ya que las materias y asignaturas del módulo *Complementos para la formación matemática* tienen por objetivo presentar unos contenidos matemáticos que complementen lo que los futuros profesores aprendieron en sus estudios de grado. El objetivo es que los futuros profesores conozcan cuáles son las aplicaciones de las matemáticas al mundo real, cuáles fueron los problemas que originaron los objetos matemáticos que tendrán que enseñar, que reflexionen sobre los principales procesos matemáticos, como son la resolución de problemas y la modelización, etc. En definitiva, unas matemáticas con historia y relacionadas con sus contextos de aplicación.

<u>Competencias matemáticas en el currículum de Secundaria</u>

En el caso de España, el currículo por competencias en la formación inicial de profesores de secundaria está pensado para desarrollar una competencia profesional que le permita al futuro profesor desarrollar y evaluar la competencia matemática contemplada en el currículo de secundaria.

Actualmente hay una tendencia a considerar que saber matemáticas incluye la competencia para aplicarlas a situaciones no matemáticas de la vida real. Esta tendencia, en algunos países, como es el caso de España, se ha concretado en el diseño de currículos para la educación secundaria basados en competencias. Dichos currículos contemplan la competencia matemática, la cual es entendida, en muchos casos, de manera similar a como se entiende en el informe PISA 2003 (OCDE, 2003). En este informe se entiende la noción de competencia como la habilidad para comprender, juzgar, hacer y usar las matemáticas en las situaciones en las que ellas puedan jugar un rol (Niss, 2003) y se consideran las siguientes competencias matemáticas más específicas:

1) Pensar y razonar. Formular preguntas características de las matemáticas ("¿Hay...?", "En ese caso, ¿cuántos?", "Cómo puedo hallar..."); conocer los tipos de respuestas que dan las matemáticas a esas preguntas; diferenciar entre los diferentes tipos de afirmaciones (definiciones, teoremas, conjeturas, hipótesis, ejemplos, aseveraciones condicionadas); y entender y tratar la amplitud y los límites de los conceptos matemáticos dados.

2) Argumentación. Saber lo que son las demostraciones matemáticas y en qué se diferencian de otros tipos de razonamiento matemático; seguir y valorar el encadenamiento de argumentos matemáticos de diferentes tipos; tener un sentido heurístico ("¿Qué puede o no puede pasar y por qué?"); y crear y plasmar argumentos matemáticos.

3) Comunicación. Esto comporta saber expresarse de diferentes maneras, tanto oralmente como por escrito, sobre temas de contenido matemático y entender las afirmaciones orales y escritas de terceras personas sobre dichos temas.

4) Construcción de modelos. Estructurar el campo o situación que se quiere modelar; traducir la realidad a estructuras matemáticas; interpretar los modelos matemáticos en términos de "realidad"; trabajar con un modelo matemático; validar el modelo; reflexionar, analizar y criticar un modelo y sus resultados; comunicar opiniones sobre el modelo y sus resultados (incluyendo las limitaciones de tales resultados); y supervisar y controlar el proceso de construcción de modelos.

5) Formulación y resolución de problemas. Representar, formular y definir diferentes tipos de problemas matemáticos (por ejemplo, "puro", "aplicado", "abierto" y "cerrado"); y la resolución de diferentes tipos de problemas matemáticos de diversas maneras.

6) Representación. Descodificar y codificar, traducir, interpretar y diferenciar entre las diversas formas de representación de las situaciones y objetos matemáticos y las interrelaciones entre las varias representaciones; seleccionar y cambiar entre diferentes formas de representación dependiendo de la situación y el propósito.

7) Empleo de operaciones y de un lenguaje simbólico, formal y técnico. Descodificar e interpretar el lenguaje formal y simbólico y comprender su relación con el lenguaje natural; traducir del lenguaje natural al lenguaje simbólico/formal; manejar afirmaciones y expresiones con símbolos y fórmulas; utilizar variables, resolver ecuaciones y realizar cálculos.

8) Empleo de soportes y herramientas. Tener conocimientos y ser capaz de utilizar diferentes soportes y herramientas (entre ellas, herramientas de las tecnologías de la información) que pueden ayudar en la actividad matemática; y conocer sus limitaciones.

La actual propuesta de currículos de secundaria de matemáticas por competencias hay que pensarla como una consecuencia más del *giro procesal* en el diseño de currículos de matemáticas (y también de otras materias) que ha tenido lugar a nivel internacional en las últimas décadas. Dicho giro ha significado pasar de concebir los currículos de matemáticas cuyos objetivos eran el aprendizaje, sobre todo, de conceptos a pensar en currículos cuyos objetivos son el aprendizaje, sobre todo, de procesos. Este giro se ha producido, entre otras razones, debido a que las matemáticas actualmente se ven como una ciencia en la cual el método domina claramente sobre el contenido. Por esta razón, recientemente se ha dado una gran importancia al estudio de los procesos matemáticos, en particular los procesos de resolución de problemas y modelización. Podemos observar este giro procesal, entre otros, en los Principios y Estándares del NCTM (2003), donde se propone el aprendizaje de los siguientes procesos: resolución de problemas, razonamiento y prueba, comunicación, conexiones y representación; en el Tercer Estudio Internacional de Matemáticas y Ciencias, conocido con el acrónimo TIMSS (Mullis y otros, 2003), en el estudio PISA (OCDE, 1999) y en las propuestas de los currículos de algunos países como es el caso de los currículos del estado español derivados de la Ley Orgánica General del Sistema Educativo (LOGSE) y de la Ley Orgánica de Educación (LOE).

5. Un aspecto problemático, una pregunta relacionada y una respuesta

Los currículos de secundaria por competencias conllevan el problema de cómo conseguir que los profesores tengan la competencia profesional que les permita el desarrollo y la evaluación de las competencias matemáticas señaladas en el currículo. Dicho problema lleva a la siguiente pregunta: ¿Cuáles son las competencias profesionales que permiten a los profesores desarrollar y evaluar las competencias, generales y específicas de matemáticas, prescritas en el currículum de secundaria? La respuesta a la cual, a su vez, depende de cómo se conteste a la pregunta previa: ¿Cuál es el conocimiento didáctico-matemático que necesita el profesorado para enseñar matemáticas?

En el marco de tres proyectos de investigación (ver agradecimiento), hemos reflexionado sobre las preguntas anteriores y hemos adoptado los siguientes posicionamientos.

Un primer posicionamiento

Una de las problemáticas que más ha interesado en el área de educación matemática es la de determinar cuál es el conocimiento didáctico-matemático del profesorado requerido para enseñar matemáticas (Ball, Lubienski & Mewborn, 2001; Hill, Schilling & Ball, 2004; Sowder, 2007; Hill, Ball & Schilling, 2008; Wood, 2008; Font, Rubio, Giménez y Planas, 2009; Godino, 2009, Rubio, Font, Giménez y Malaspina, 2011, entre otros). En nuestra opinión, estas respuestas coinciden al considerar como una de las competencias profesionales que debe tener un profesor es aquella que le permite describir, explicar, valorar y mejorar procesos de enseñanza-aprendizaje (análisis didáctico), pero difieren, entre otros aspectos, en cuáles son las herramientas necesarias para realizar este tipo de análisis didáctico.

Esta primera conclusión nos ha llevado a que nuestro primer posicionamiento sea que la competencia profesional que permite evaluar y desarrollar la competencia matemática de los alumnos de secundaria se puede considerar compuesta por dos macro competencias: 1) La competencia matemática y 2) La competencia en análisis didáctico de procesos de instrucción matemática. Además, consideramos que el núcleo de la competencia profesional del futuro profesor de secundaria del estado español debería de ser la competencia en el análisis didáctico. De manera secundaria se debería mejorar la competencia matemática, pero se presupone que en los estudios previos que acreditan los alumnos para su ingreso en dicho máster ya se ha desarrollado, aunque no completamente, una competencia matemática de base. La razón para tomar esta opción es que la formación inicial de profesores de secundaria en España es secuencial: primero formación disciplinar y después formación profesional.

Un segundo posicionamiento

Dado que el término competencia es un término controvertido y que el currículum del máster de FPS de matemáticas presenta una cierta ambigüedad en la manera de conceptualizar las competencias, nuestra segunda opción ha sido optar por una manera de entender la competencia que no sea contradictoria con las directrices curriculares vigentes. La opción que se ha tomado es la de considerar como indicador de competencia una acción eficaz realizada en un determinado contexto con una determinada finalidad.

Un tercer posicionamiento

Nuestro tercer posicionamiento ha sido la elaboración de una lista de competencias redactadas de acuerdo al segundo posicionamiento que no sea contradictoria con las directrices curriculares vigentes. En concreto se contemplan 5 competencias genéricas del profesor (aunque se está estudiando la posibilidad de que sean seis) y 10 competencias específicas del profesor de secundaria de matemáticas. Para cada una de dichas competencias se han considerado tres niveles de desarrollo. A continuación, a modo de ejemplo, se detallan dos de estas 15 competencias.

Un ejemplo de competencia genérica es la competencia digital:

Tabla 1: Competencia digital

Utilizar la tecnología digital en los ámbitos profesional y social como herramienta para un desempeño profesional adecuado y un desarrollo permanente.		
Nivel 1:	Nivel 2:	Nivel 3:
Utiliza la tecnología digital para desarrollar materiales didácticos o de referencia para su clase, de gestión educativa.	Utiliza la tecnología digital para ilustrar situaciones o ejemplos en clase.	Utiliza la tecnología digital en clase con actividades que involucren directamente la actividad de los alumnos.
Utiliza la tecnología digital para obtener información útil para su labor profesional.	Utiliza la tecnología digital para establecer contacto e intercambio social eficiente con colegas y alumnos.	Utiliza la tecnología digital para el desarrollo de su labor docente con sus alumnos en un ambiente virtual o semi-presencial. Contribuye a desarrollar la competencia digital en sus alumnos

Un ejemplo de competencia específica es la competencia en el análisis de secuencias didácticas:

Tabla 2: Competencia en análisis de secuencias didácticas

Diseñar, aplicar y valorar secuencias de aprendizaje, mediante técnicas de análisis didáctico y criterios de calidad, para establecer ciclos de planificación, implementación, valoración y plantear propuestas de mejora.		
N1: Muestra conocimiento del currículum de matemáticas como elementos fundamentales para comprender su práctica pedagógica.	N2: Integra teorías, metodologías y currículum, en la planificación de los procesos de enseñanza y reconoce las implicancias en su práctica considerando los contextos institucionales.	N3: Implementa la planificación de los procesos de enseñanza en sus prácticas y emite juicios argumentados y reflexivos acerca de las teorías, metodologías y el currículum.
N1: Aplica herramientas para describir las prácticas, objetos y procesos matemáticos presentes en un proceso de enseñanza aprendizaje. y muy en especial en su propia práctica.	N2: Conoce y aplica herramientas socioculturales para conocer la interacción y las normas que condicionan un proceso de enseñanza aprendizaje y muy en especial en su propia práctica.	N3: Explica los fenómenos didácticos observados en los procesos de enseñanza aprendizaje y muy en especial en su propia práctica
N1: Conoce criterios de calidad y los tiene presentes en la planificación de una secuencia didáctica de matemática	N2: Utiliza criterios de calidad para valorar procesos ya realizados de enseñanza y aprendizaje de la matemática	N3**:** Aplica criterios de calidad para valorar su propia práctica y realizar innovaciones con el objetivo de mejorarla

6. Descripción de un ciclo formativo

El desarrollo de la competencia de análisis de secuencias didácticas (tabla 2) corresponde a todas las asignaturas del máster. A continuación comentamos brevemente la secuencia que se sigue en tres asignaturas del máster de FPS de matemáticas de la Universitat de Barcelona, durante el curso 2010-2011, para contribuir al desarrollo de uno de los componentes de la macro competencia en análisis didáctico: identificación de potenciales mejoras de un proceso de instrucción en nuevas implementaciones.

En la asignatura de innovación e investigación sobre su propia práctica se ha seguido la siguiente secuencia:

- *Análisis de casos (sin teoría)*. Se propuso a los alumnos la lectura y análisis del episodio descrito en Font, Planas y Godino (2010) — en este episodio un grupo de tres alumnos de 15-16 años resuelven un problema contextualizado en una clase de cuarto de Enseñanza Secundaria Obligatoria (ESO) durante diez minutos — dicho análisis se debía realizar a partir de sus conocimientos previos sobre análisis didáctico. El proceso seguido fue el siguiente:
    1. Lectura individual del contexto del problema y de la transcripción.
    2. Formación de grupos de 3-4 personas.
    3. Análisis didáctico del episodio de clase en grupo.
    4. Elaboración de conclusiones.
    5. Presentación a los otros grupos de las conclusiones.
- *Emergencia de los niveles de análisis didáctico propuestos por el Enfoque Ontosemiótico de la Cognición e Instrucción Matemática (EOS).* La puesta en común de los análisis realizada por los diferentes grupos, completada con la técnica de "otras voces" si es necesario, permite observar como el gran grupo ha contemplado los cinco niveles de análisis que siguen, aunque cada grupo sólo ha contemplado alguno de ellos:
    1. Análisis de las prácticas matemáticas.
    2. Análisis de objetos y procesos matemáticos activados y emergentes de las prácticas matemáticas.
    3. Análisis de las trayectorias e interacciones didácticas y de conflictos semióticos.
    4. Identificación del sistema de normas que condicionan y hacen posible el proceso de estudio (dimensión normativa)
    5. Valoración de la idoneidad didáctica del proceso de estudio.

    Los niveles de análisis 1-4 son herramientas para una didáctica descriptiva explicativa (para comprender) que permite responder a la pregunta ¿Qué está pasando (y por qué) aquí? El nivel de análisis 5 pretende ser una herramienta para una didáctica prescriptiva (para evaluar y para indicar el camino a seguir) que permite responder a la pregunta ¿Qué se debería hacer?

- *Teoría (criterios de idoneidad).* De los cinco niveles anteriores en la asignatura de innovación e investigación sobre su propia práctica se focaliza la atención en el quinto, para ello se dan elementos teóricos a los alumnos, en concreto se les explican los criterios de idoneidad propuestos en el EOS mediante la lectura de algunas páginas del capítulo "Inicio a la investigación en la enseñanza de las matemáticas en secundaria y bachillerato", del libro "Matemáticas: Investigación, innovación y buenas prácticas" (Font y Godino, 2010). Dicho enfoque (Godino, Bencomo, Font y Wilhelmi, 2006; Godino, Font, Wilhelmi y De Castro, 2009) propone los siguientes criterios de idoneidad:

  ***Idoneidad epistémica*, se refiere a que las matemáticas enseñadas sean unas "buenas matemáticas". Para ello, además de tomar como referencia el currículo prescrito, se trata de tomar como referencia a las matemáticas institucionales que se han transpuesto en el currículo.**

  Se puede aumentar su grado presentando a los alumnos una muestra representativa y articulada de problemas de diversos tipos (contextualizados, con diferentes niveles de dificultad, etc.); procurando el uso de diferentes modos de expresión (verbal, gráfico, simbólico...), y traducciones y conversiones entre los mismos; procurando que el nivel del lenguaje matemático utilizado sea adecuado y que las definiciones y procedimientos estén clara y correctamente enunciados y adaptados al nivel educativo a que se dirigen; asegurando que se presentan los enunciados y procedimientos básicos del tema y adecuando asimismo las explicaciones, comprobaciones, demostraciones al nivel educativo a que se dirigen; estableciendo relaciones y conexiones significativas entre las definiciones, propiedades, problemas del tema estudiado, etc.

  ***Idoneidad cognitiva*, expresa el grado en que los aprendizajes pretendidos/ implementados están en la zona de desarrollo potencial de los alumnos, así como la proximidad de los aprendizajes logrados a los pretendidos/implementados.**

  Se puede aumentar su grado asegurándonos, por una parte, que los alumnos tienen los conocimientos previos necesarios para el estudio del tema y, por otra parte, que los contenidos que se pretenden enseñar se pueden alcanzar (tienen una dificultad manejable); procurando incluir actividades de ampliación y de refuerzo; realizando una evaluación formativa durante el proceso de enseñanza-aprendizaje que nos asegure que los alumnos se han apropiado de los contenidos enseñados.

  ***Idoneidad interaccional*, grado en que los modos de interacción permiten identificar y resolver conflictos de significado y favorecen la autonomía en el aprendizaje.**

  Se puede aumentar su grado asegurándonos que el profesor hace una presentación adecuada del tema (presentación clara y bien organizada, ¿se le entiende cuando habla?, haciendo un uso correcto de la pizarra, poniendo suficiente énfasis en los conceptos clave del tema, etc.); procurando reconocer y resolver los conflictos de significado de los alumnos (interpretando correctamente los silencios de los alumnos, sus expresiones faciales, sus preguntas, etc.); utilizando diversos recursos retóricos argumentativos para captar, implicar, etc. a los alumnos; procurando facilitar la inclusión de los alumnos en la dinámica de la clase y no la exclusión; favoreciendo el diálogo y comunicación entre los estudiantes; contemplando momentos en los que los estudiantes asumen la responsabilidad del estudio (exploración, formulación y validación) etc.

***Idoneidad mediacional*, grado de disponibilidad y adecuación de los recursos materiales y temporales necesarios para el desarrollo del proceso de enseñanza-aprendizaje.**

Se puede aumentar su grado usando materiales manipulativos e informáticos; procurando que las definiciones y propiedades sean contextualizadas y motivadas usando situaciones y modelos concretos y visualizaciones; procurando invertir el tiempo en los contenidos más importantes o nucleares del tema e invirtiendo el tiempo en los contenidos que presentan más dificultad de comprensión.

***Idoneidad afectiva*, grado de implicación (interés, motivación) del alumnado en el proceso de estudio.**

Se puede aumentar su grado seleccionando tareas de interés para los alumnos, promoviendo la valoración de la utilidad de las matemáticas en la vida cotidiana y profesional; promoviendo la implicación en las actividades, la perseverancia, responsabilidad, etc.; favoreciendo la argumentación en situaciones de igualdad de manera que el argumento se valore en sí mismo y no por quién lo dice; promoviendo la autoestima evitando el rechazo, fobia o miedo a las matemáticas, etc.

***Idoneidad ecológica,* grado de adaptación del proceso de estudio al proyecto educativo del centro, las directrices curriculares, las condiciones del entorno social, etc.**

Se puede aumentar su grado asegurando que los contenidos enseñados se corresponden con las directrices curriculares; asegurando que dichos contenidos contribuyen a la formación socio-profesional de los estudiantes; procurando que los contenidos que se enseñan se relacionan con otros contenidos matemáticos y de otras disciplinas, etc.

- *Análisis de la idoneidad epistémica de diferentes secuencias innovadoras para la enseñanza de la derivada en el bachillerato.* La puesta en común de los análisis realizados por los diferentes grupos, completada con la técnica de “otras voces” si es necesario, permite caracterizar determinadas innovaciones de tipo matemático como un cambio de configuración epistémica. También permite consensuar acuerdos sobre los indicadores que permiten considerar una innovación como idónea, en particular el criterio de representatividad de la configuración epistémica implementada.
- *Análisis de un video de una parte de una clase sobre geometría y de una transcripción de una clase completa sobre ecuaciones utilizando los criterios de idoneidad.* La puesta en común de los análisis realizados por los diferentes grupos, completada con la técnica de “otras voces” si es necesario, permite concluir que conseguir una sola idoneidad parcial es relativamente fácil, pero es difícil conseguir una presencia equilibrada de las seis idoneidades parciales.
- Le*ctura y comentario de partes de algunas memorias de Prácticum II y de algunos trabajos de final de máster de cursos anteriores*, en los que los futuros profesores de cursos anteriores utilizaron los criterios de idoneidad para valorar la unidad didáctica que implementaron en el Prácticum II y para justificar la propuesta de innovación que presentaban en su trabajo final de máster.

- En la asignatura Prácticum II los alumnos han de utilizar los criterios de idoneidad para diseñar y valorar su propia práctica, en concreto la unidad que han diseñado e implementado en el Prácticum II.
- En la asignatura Trabajo Final de Máster los alumnos han de utilizar los criterios de idoneidad para diseñar una propuesta de innovación que mejore la implementación realizada en el Prácticum II.

7. Consideraciones finales

Tal como se ha dicho, los currículos de secundaria por competencias son currículos ambiciosos que conllevan el problema de cómo conseguir que los profesores tengan la competencia profesional que les permita el desarrollo y la evaluación de las competencias matemáticas señaladas en el currículo. Nuestra conclusión es que la competencia profesional que exige este tipo de currículo implica, entre otros aspectos, el desarrollo de la competencia de análisis didáctico de secuencias de actividades. Si el profesorado no consigue ser competente en dicho análisis dará la espalda al currículo por competencias, ignorándolo o bien limitándose a tenerlo en cuenta sólo para los documentos oficiales (programación de departamento, documentos del centro, etc.). Este fenómeno ya se está observando en el caso de España.

Finalizaremos este artículo comentando dos aspectos, uno problemático y otro positivo, que en estos momentos tiene la implementación del máster de FPS de matemáticas en la Universitat de Barcelona. Se trata de dos aspectos que van más allá de la Universitat de Barcelona y que, en mayor o menor medida, también están presentes en la mayoría de los masters de FPS de matemáticas que se imparten en las universidades españolas.

El primero es que el supuesto de que las asignaturas del módulo *Complementos para la formación matemática* sirven para complementar, y no para substituir la necesaria formación anterior que ha de asegurar una competencia matemática de base, no se ajusta con la formación previa que tienen las dos primeras promociones de alumnos en la UB. En la primera sólo había un alumno con grado de matemáticas y en la segunda también sólo hay uno. En el otro extremo tenemos alumnos que han cursado pocos créditos de matemáticas en los estudios de la especialidad que les ha permitido acceder al máster de FPS de matemáticas. Este desfase entre lo que se presupone que los alumnos saben de matemáticas y lo que los alumnos saben realmente es, probablemente, uno de los problemas más importantes del máster de FPS de matemáticas y para el cual se deberá buscar alguna solución en las futuras implementaciones.

El segundo es que el diseño del máster de FPS de matemáticas conlleva que se tenga que formar un equipo docente en el que tiene que participar profesorado de: 1) Pedagogía, Psicología y Sociología. 2) Matemáticas. 3) Didáctica de las Matemáticas y 4) Matemáticas de secundaria en activo. Se trata de un equipo docente que, si llega a funcionar realmente como un equipo, puede producir una sinergia importante que puede asegurar una formación de profesores de matemáticas de secundaria de mucha calidad. Conseguir la integración de este equipo es un reto importante y difícil, pero la experiencia que tenemos en la

Universitat de Barcelona, del primer año de implementación del máster de FPS de matemáticas y de lo que llevamos del segundo, nos hace ser optimistas en este aspecto.

Agradecimientos

Trabajo realizado en el marco de los siguientes proyectos:

1) "Desarrollo de competencias profesionales en la formación de profesores de matemáticas", C/023928/09, Agencia Española de Cooperación Internacional para el Desarrollo.

2) "Evaluación y desarrollo de competencias profesionales en matemáticas y su didáctica en la formación inicial de profesores de secundaria/bachillerato", EDU2009-08120, Ministerio de Ciencia e Innovación, España;.

3) "Una perspectiva competencial sobre el Master de Formación de Profesor de Secundaria de Matemáticas", REDICE-10-1001-13, Institut de Ciències de l'Educació (ICE) de la Universitat de Barcelona.

Referencias bibliográficas

Ball, D.; Lubienski, S. T. y Mewborn, D. S. (2001). Research on teaching mathematics: The unsolved problem of teachers' mathematical knowledge, en V. Richardson (ed.), *Handbook of Research on Teaching*, 433-456. American Educational Research Association, Washington, D.C., USA.

Bishop, A. J.; Clements, K.; Keitel, C.; Kilpatrick, J. y Leung, F. K. S. (eds.) (2003). *Second International handbook of mathematics education*. Kluwer, Dordrecht, The Netherlands

English, L. D.; Bartolini-busi, M., Jones, G. A.; Lesh, R. y Tirosh, D. (2002). *Handbook of International research in mathematics education*. Lawrence Erlbaum Ass, London, England

Font, V. y Godino, J. D. (2010). Inicio a la investigación en la enseñanza de las matemáticas en secundaria y bachillerato, en C. Coll (ed.), *MATEMÁTICAS: Investigación, innovación y buenas prácticas,* 9-55.Graó, Barcelona, España.

Font, V.; Planas, N. y Godino, J. D. (2010). *Modelo para el análisis didáctico en educación matemática*. Infancia y Aprendizaje 33 (1), 89-105.

Font, V.; Rubio, N., Giménez, J. y Planas, N. (2009). *Competencias profesionales en el Máster de Profesorado de Secundaria*, UNO 51, 9-18.

Franke, M. L.; Kazemi, E. y Battey, D. (2007). Understanding teaching and classroom practice in mathematics, en En F. K. Lester (ed.), *Second Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning*, 225-256. NCTM y IAP, Charlotte, ***NC*, *USA.***

Godino, J. D. (2009). *Categorías de Análisis de los conocimientos del Profesor de Matemáticas.* Unión 20,13-31.

Godino, J. D.; Bencomo, D.; Font, V. y Wilhelmi, M. R. (2006). *Análisis y valoración de la idoneidad didáctica de procesos de estudio de las matemáticas*. Paradigma XXVII(2), 221-252.

Godino, J. D.; Font, V.; Wilhelmi, M. R. y Castro, C. de (2009). *Una aproximación a la dimensión normativa en didáctica de las matemáticas*. Enseñanza de las Ciencias 27(1), 59-76.

Hill, H. C.; Ball, D. L. y Schilling, S. G. (2008). Unpacking pedagogical content knowledge: Conceptualizing and measuring teachers' topic-specific knowledge of students. *Journal for Research in Mathematics Education* 39, 372-400.

Hill, H.C.; Schilling, S. G. y Ball, D. L. (2004). *Developing measures of teachers' mathematics knowledge for teaching*. Elementary School Journal 105, 11-30.

Hill, H. C.; Sleep, L.; Lewis, J. M. y Ball, D. L. (2007). Assessing teachers' mathematical knowledge: What knowledge matters, en F. K. Lester (ed.), *Second Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning,* 111-156. NCTM and IAP, Charlotte, NC. USA.

Jaworski, B.; Giménez, J. et al (2009). Development of teaching in and from practice, en R Even y D Ball (eds), *The Professional Education and Development of Teachers of Mathematics*, The 15th ICMI Study, 149-166, Springer, Dordrecht. The Netherlands

Llinares S. y Krainer K. (2006). Mathematics (student) teachers and teacher educators as learners, en A. Gutierrez y P. Boero (Eds), *Handbook of Research on the Psychology of Mathematics Education,* 429 – 459. Sense Publichers, Rotterdam. The Netherlands.

Mullis, I.; Martin, M.; Smith, T.; Garden, R.; Gregory, K.; Gonzalez, E.; Chrostowski, S. y O'connor, K. (2003). *TIMSS assessment frameworks and specifications 2003*. Boston College, Chestnut Hill, MA, EEUU.

National Council of Teachers of Mathematics (2003). *Principios y estándares para la educación matemática*. SAEM Thales y National Council of Teachers of Mathematics, Sevilla, España.

Niss, M. (2003). The Danish KOM Project and possible consequences for teacher education. En R. Strässer, G. Brandell y B. Grevholm (eds.). *Educating for the future. Proceding of an international symposium on matematics teacher education,* 179-192. Royal Swedish Academy of Sciences, Göteborg, Suecia

Organisation for Economic Co-operation and Development. (1999). *Measuring student knowledge and skills. A new framework for assessment*. OECD, París. Francia.

Organisation for Economic Co-operation and Development (2003). *The PISA 2003 Assessment Framework – Mathematics, Reading, Science and Problem Solving Knowledge and Skills*, OCDE, París. Francia.

Rubio, N.; Font, Giménez, J. Y Malaspina, U. (2011). Pre-service teachers learning to assess mathematical competencies. *Proceedings of CERME 7* (en prensa)

Sowder, J. T. (2007). The mathematical education and development of teachers. En F. K. Lester (ed.), *Second Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning,* 157-224, NCTM y IAP, Charlotte, ***NC, USA.***

Wood, T. (Ed.) (2008). *The international handbook of mathematics teacher education*. Sense Publishers, Rotterdam. The Netherlands.

UNIÓN
REVISTA IBEROAMERICANA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA

Junio de 2011, Número 26, páginas 27-40
ISSN: 1815-0640

Análisis de los ítems de las evaluaciones autonómicas de diagnóstico en España: 2008-2009

Rosa Marta Caraballo Caraballo; Luis Rico Romero; José Luis Lupiáñez Gómez

Resumen

Este estudio se centra sobre las características, y su adecuación al modelo de competencias establecido por el estudio PISA de la OECD y por el Ministerio de Educación y Ciencia en España, de los ítems para la evaluación de diagnóstico en competencia matemática de los estudiantes de 2º de Educación Secundaria Obligatoria, elaborados por las Comunidades Autónomas españolas en el curso académico 2008-2009.

Abstract

This study focuses on the characteristics of the items for the diagnostics evaluation of mathematics competency of students in the 2nd course of the Compulsory Secondary Education, and its suitability for the competency model established by the OECD/PISA study and by the Ministry of Education and Science in Spain. These items were designed by the Spanish Autonomous Communities in the academic year 2008-2009.

Resumo

Este estudo centra-se nas características e sua adequação para o modelo de competências estabelecido pelo estudo PISA da OCDE e pelo Ministério da Educação e da Ciência da Espanha dos itens para a avaliação de diagnóstico em competência matemática dos alunos da 2º ano do ensino secundário obrigatório, desenvolvidas pelas comunidades autônomas espanholas no ano lectivo 2008-2009.

1. Introducción

Evaluar es una tarea necesaria e ineludible. Boulmetis y Dutwin (2000) definen la evaluación como "el proceso sistemático de recopilar y analizar datos con el propósito de determinar si, y en qué grado, se han logrado los objetivos propuestos" (p. 4). Un proceso evaluativo con un seguimiento adecuado provee datos para diagnosticar sobre los elementos participantes en una intervención particular y usa este diagnóstico para mejorar las actividades educativas subsiguientes. Evaluar es, de manera sucinta, recoger y sistematizar información para tomar decisiones. Las comunidades educativas que, conscientes de su importancia, han adoptado una cultura de evaluación poseen una herramienta poderosa para identificar y reflexionar respecto de las fortalezas y debilidades de sus prácticas educativas y para tomar decisiones que redunden en el mejoramiento del sistema y, por consiguiente, en el éxito de sus estudiantes.

En España, la Ley Orgánica 2/2006, del 3 de mayo, de Educación (LOE) establece en sus artículos 21 y 29 que las Administraciones Educativas de cada Comunidad Autónoma realizarán una evaluación de diagnóstico de carácter externo, censal y formativo a todos los alumnos que finalicen el segundo ciclo de la

Educación Primaria (9-10 años) y el segundo curso de la Educación Secundaria Obligatoria, ESO, (13-14 años), respectivamente (Ministerio de Educación y Ciencia, 2006). Se espera que estas evaluaciones contribuyan a mejorar la calidad y la equidad de la educación arrojando luz sobre la situación del sistema educativo mediante la valoración de los aprendizajes de los alumnos y el impulso de procesos de innovación y que informen, además, respecto del grado de adquisición y logro de las competencias básicas del currículo tanto a nivel nacional como regional (Artículo 140, LOE 2/2006).

En el estudio que aquí presentamos, analizamos los ítems de las primeras pruebas de diagnóstico en competencia matemática aplicados en España durante el año académico 2008-2009, tomando como referencia el modelo de las evaluaciones para matemáticas del *Programme for International Student Assessment* (PISA) de la *Organization for Economic Co-operation and Development* (OECD). Dicha organización estableció las evaluaciones PISA con el objetivo de determinar, entre otros, el grado de competencia matemática que los jóvenes de 15 años han adquirido para enfrentarse a situaciones de la vida cotidiana; uno de sus objetivos principales es establecer indicadores de calidad para determinar cómo los sistemas educativos logran ese nivel de formación (Rico, 2007). Las evaluaciones autonómicas de diagnóstico usan el modelo de evaluación en matemáticas establecido por el estudio PISA como marco de referencia para diseñar las pruebas (Lupiáñez, 2010).

Por el rol preponderante que desempeñan las competencias en la caracterización de las expectativas de aprendizaje, los resultados obtenidos por los estudiantes españoles en las pruebas PISA de 2003 y de 2006 incidieron en las nuevas orientaciones curriculares. Asimismo, tuvieron el efecto de enfatizar el carácter funcional del aprendizaje de las matemáticas escolares (Lupiáñez, 2009). Este enfoque apoya que los estudiantes en el nivel de Educación Obligatoria, pongan en juego el conocimiento teórico y el dominio técnico que han adquirido para resolver, de una manera eficaz y eficiente, una variedad de situaciones-problemas. Este enfoque ha sido consistentemente avalado por el proyecto PISA de la OECD. Tanto las recientes orientaciones curriculares en España a nivel nacional como el marco teórico de las evaluaciones de PISA, respaldadas ambas por el enfoque funcional del aprendizaje matemático, sirven de marco de referencia para esta investigación. Determinar el grado de ajuste al modelo PISA de los instrumentos elaborados por las comunidades autónomas españolas para atender a la evaluación de diagnóstico en segundo curso de la educación obligatoria, es el objetivo general que guía esta investigación (Caraballo, 2010).

2. La Ley Orgánica de Educación (LOE) y las evaluaciones de diagnóstico

La Ley Orgánica 2/2006, del 3 de mayo, de Educación (LOE) define el currículo como "el conjunto de objetivos, competencias básicas, contenidos, métodos pedagógicos y criterios de evaluación de cada una de las enseñanzas reguladas en la presente Ley" (Artículo 6). De esta manera se incorpora la noción de competencia como parte integral del currículo en todos los niveles educativos. Se considera la introducción del concepto de competencia como un cambio significativo en las normativas curriculares, ampliando así la orientación hacia la noción de objetivos del aprendizaje que había imperado hasta el momento (Rico y Lupiáñez, 2008). Es importante destacar que las competencias y los objetivos difieren entre sí y entrañan expectativas distintas sobre el aprendizaje de las Matemáticas (Lupiáñez, 2009).

Sobre las ideas de aprendizaje permanente y de desarrollo de las competencias básicas la LOE introduce, como una novedad, la realización de dos procesos distintos para las evaluaciones de diagnóstico: las evaluaciones generales de diagnóstico y las evaluaciones autonómicas de diagnóstico. La evaluación autonómica de diagnóstico, cuya responsabilidad recae sobre las Administraciones Educativas, tendrá carácter formativo y orientador, ofrecerá información importante sobre la situación del alumnado, los centros y el sistema educativo como un conjunto y redundará en la adopción de planes de mejora de la calidad del sistema. Estas evaluaciones tendrán como marco de referencia las evaluaciones generales de diagnóstico creadas igualmente por virtud de la LOE. Ambos procesos evaluarán las competencias básicas del currículo, y generarán compromisos de revisión y mejora educativa con base en los resultados obtenidos (Artículo 144, LOE). Lo que intentan valorar las pruebas es el grado en que la escuela moldea al alumno para hacer frente a la vida y cómo lo prepara para desenvolverse como ciudadano, de una manera eficaz, en la sociedad a la cual pertenece. Es decir, que el conjunto de competencias básicas, según definidas en el currículo, se refiere a la capacidad del estudiante para aplicar los conocimientos, habilidades y actitudes adquiridos a la realidad y a la resolución de problemas enmarcados dentro del contexto de la vida cotidiana (Instituto de Evaluación, 2009).

3. El enfoque funcional del aprendizaje matemático

La evaluación PISA concibe las matemáticas como un conjunto de herramientas que sirven para resolver problemas mediante la puesta en funcionamiento de determinadas capacidades, conocimientos y estrategias (Rico, 2006). Tanto las nociones de alfabetización y competencia según se describe en el modelo PISA, como la percepción de las matemáticas como "modo de hacer", se ajustan a un enfoque funcional del aprendizaje de las matemáticas (Rico y Lupiáñez, 2008). Este modelo centra su foco de atención en cómo los alumnos aplican los conocimientos adquiridos para enfrentarse a situaciones de la vida real que le son familiares. Son tres las componentes que conforman el modelo funcional: tareas contextualizadas, herramientas conceptuales y capacidades del sujeto cognitivo que trabaja. ¿Cómo interactúan estas tres componentes? El sujeto cognitivo usa las herramientas que tiene a su disposición para aproximarse a las tareas, manifestando su competencia al movilizar los correspondientes procesos cognitivos.

El modelo funcional requiere que el estudiante conozca las herramientas que tiene disponibles, pero su foco de atención principal reside en las tareas. La analogía que se establece es la siguiente: una vez el sujeto conoce las herramientas básicas de las matemáticas (conceptos y procedimientos), el énfasis se dirige, no a la herramienta misma como objeto de estudio, sino a su aplicación en distintas situaciones, a su empleo en satisfacer las demandas que plantean las tareas. Es decir, al uso de la herramienta en situaciones no convencionales. La orientación de funcionalidad dentro del currículo de Matemáticas no implica el conocimiento de los conceptos básicos, como herramientas, en todas sus manifestaciones sino la extensión de su uso y aplicación a situaciones que así lo demanden (Rico y Lupiáñez, 2008).

4. El modelo matemático de PISA

El Programa PISA se considera un programa internacional completo y riguroso para evaluar el desempeño de los estudiantes y para recopilar información respecto de los factores relacionados con el estudiantado, las familias y las instituciones que permiten explicar las diferencias en tal desempeño (OECD, 2004). El dominio matemático que evalúan las pruebas PISA se conoce como alfabetización matemática (*mathematical literacy*) y, en términos generales, competencia matemática. Se describe este dominio como "las capacidades de los estudiantes para analizar, razonar y comunicar eficazmente cuando resuelven o enuncian problemas matemáticos en una variedad de dominios y situaciones" (Rico, 2006; p. 276). Esta definición gira en torno a usos más amplios de las matemáticas en la vida de las personas y no está limitada a las operaciones mecánicas o algorítmicas.

Inherente al concepto de competencia se halla la necesidad de que el estudiante sea capaz de adaptar y aplicar su comprensión matemática a una amplia gama de contextos dentro y fuera de la sala de clase. Lejos de enfatizar el dominio de conceptos y técnicas, la evaluación de PISA enfatiza la capacidad del estudiante para enfrentarse, mediante el uso de las matemáticas, a una amplia variedad de situaciones cotidianas. Por lo tanto, el foco de atención de PISA no está en lo que el estudiante ha aprendido mediante un currículo escolar específico y convencional sino en las destrezas y los conocimientos necesarios para actuar como un adulto informado, reflexivo y como miembro de una sociedad. La alfabetización matemática se evalúa aplicando a los estudiantes tareas basadas en situaciones que representan el tipo de problemas que enfrentarán en la vida real.

Dentro del marco conceptual del modelo matemático PISA se denomina matematización a la estrategia general que usan los estudiantes para resolver problemas de la vida real. Matematizar es un proceso fundamental e inherente a la alfabetización matemática (OECD, 2009). Cuando un estudiante se mueve entre el contexto real del problema y el mundo matemático necesario para resolverlo, está matematizando. Este proceso cíclico incluye la interpretación y la evaluación del problema así como la reflexión en su solución para verificar que la solución obtenida, en efecto, responde a la situación real que inicialmente lo originó.

4.1. Caracterización de las pruebas PISA

Las pruebas PISA se aplican a estudiantes que hayan cumplido 15 años sin tomar en consideración el nivel escolar que cursen en ese momento. En la caracterización de las evaluaciones matemáticas PISA se distinguen tres tipos de variables: variables de tarea, variables de sujeto y variables de resultado o de desempeño (OECD, 2004). Las variables de tarea delimitan los instrumentos de evaluación de las pruebas PISA para satisfacer el principio de matematización o competencia sobre el cual se fundamentan. Las variables de sujeto caracterizan a la muestra elegida y son las propias de la población española. Para llevar a cabo un análisis detallado de la competencia matemática se han identificado ocho competencias específicas –pensar y razonar, argumentar, comunicar, modelizar, plantear y resolver problemas, representar, usar lenguaje técnico, simbólico y las operaciones y usar ayudas y herramientas– que son relevantes y significativas en todos los niveles escolares y que no responden a áreas o contenidos curriculares específicos. Estas competencias proveen la base para las escalas o niveles de rendimiento que constituyen las variables de desempeño en el proyecto PISA. A los efectos de nuestro estudio, centrado en los instrumentos de evaluación de las pruebas de diagnóstico, son las variables de tarea que delimitan el diseño de los ítems las que tienen mayor relieve. Las variables de sujeto deben atender a respetar las condiciones y requisitos generales del estudio PISA y a satisfacer los criterios de representatividad de las muestras. Las variables de resultado permitirán, en su caso, efectuar un control empírico de idoneidad de los instrumentos de evaluación.

4.2. Las variables de tarea en PISA como criterio para valorar los ítems

Las variables de tarea que consideran las evaluaciones PISA son: el contenido matemático al que se relacionan las tareas, las situaciones o contextos usados como estímulo para enmarcar el problema en el mundo real y la complejidad de las tareas que se proponen, agrupadas éstas según tres niveles de demanda cognitiva. Los problemas propuestos ocurren en una situación real; esta situación provee el contexto para la tarea matemática. A fin de usar las matemáticas para resolver el problema, el estudiante debe poseer un grado de dominio del contenido matemático relevante. Y a fin de resolver el problema debe desarrollarse y seguirse un proceso de resolución. Luego, para ejecutar este proceso exitosamente, el estudiante necesita determinadas competencias que el modelo agrupa al establecer tres niveles hipotéticos de complejidad en la demanda cognitiva que plantea la tarea. De esta manera el estudiante matemáticamente alfabetizado se enfrenta a un proceso de resolución de un problema enmarcado en un contexto, un contenido matemático y mediante una demanda que tiene un determinado nivel de complejidad. Vemos cómo el modelo PISA se ajusta al modelo funcional del conocimiento matemático conformado por unas tareas contextualizadas, unas herramientas conceptuales y el sujeto cognitivo que muestra sus capacidades (OECD, 2009).

En PISA el contenido no se considera como relativo a las áreas matemáticas tradicionales sino como ideas amplias o clave (*overarching ideas*) estructuradas alrededor de diferentes fenómenos que describen conceptos, ideas y estructuras matemáticas. No existe una correspondencia estricta entre estas ideas amplias y las áreas matemáticas tradicionales. Atemperadas a la orientación principal del currículo escolar, PISA considera las siguientes ideas amplias como contenidos matemáticos, a partir de categorías fenomenológicas:

a. Cantidad. Este contenido responde a la Aritmética y abarca todo lo relativo a la cuantificación necesaria para organizar el mundo. En esta categoría se incluye el sentido numérico, la comprensión del significado de las operaciones, el sentido de la magnitud de las cantidades y los números, los cálculos mentales y la estimación.

b. Espacio y forma. Este contenido responde a la Geometría tradicional e implica comprender, describir e interpretar el mundo físico que nos rodea. Se incluyen en esta categoría los siguientes aspectos: reconocer formas y modelos; describir, codificar y decodificar la información visual; comprender los cambios dinámicos de las formas; establecer similitudes y diferencias; posiciones relativas; representaciones bidimensionales y tridimensionales y las relaciones entre ambas y la orientación en el espacio.

c. Cambio y relaciones. Este contenido responde al Cálculo y al Álgebra y cubre las manifestaciones y los procesos de cambio en el mundo que nos rodea acometidos mediante el estudio de las relaciones que, a su vez, se abordan desde el ámbito de las funciones matemáticas. Para representar las relaciones pueden usarse los símbolos, las tablas y las gráficas y los dibujos geométricos.

d. Incertidumbre. Este contenido responde a la Estadística y la Probabilidad y abarca el tratamiento de los datos y el azar. Las ideas principales que se incluyen son la recopilación, análisis y representación de los datos, la probabilidad y la inferencia.

Frecuentemente subestimado o ignorado en las matemáticas escolares, el contexto en el cual se sitúa un problema juega un papel importante en la resolución de problemas de la vida real y en la alfabetización matemática (OECD, 2009). PISA destaca la importancia del contexto y le otorga un papel principal en la evaluación de la alfabetización matemática. Puesto que el ciudadano común se relaciona con contextos de diversa naturaleza, PISA reconoce la necesidad de incluir en sus evaluaciones una amplia gama de contextos. Según su grado de cercanía con la situación particular del estudiante, se distinguen cuatro tipos de contextos:

a. Contextos personales. Se relacionan con las actividades cotidianas que tienen relevancia personal directa e inmediata para el estudiante.

b. Contextos educativos o laborales. Son situaciones a las cuales el estudiante pudiera enfrentarse en el ambiente escolar o en un entorno de trabajo. Incluye tareas que propone el profesor con fines exclusivamente didácticos.

c. Contextos públicos. Son situaciones que surgen en la interacción diaria del individuo con el mundo externo.

d. Contextos científicos. Son situaciones más abstractas con las cuales el estudiante está poco relacionado. Puede incluir un proceso tecnológico, una teoría o un problema eminentemente matemático.

El ciudadano que usa de manera efectiva el conocimiento matemático adquirido en una variedad de contextos necesita dominar ciertas competencias matemáticas específicas. Cuando se enfrenta a una tarea, el estudiante moviliza distintas capacidades y a diferentes niveles de ejecución. Cada una de las competencias que se trabajan en la evaluación PISA plantea distintos niveles de demanda cognitiva o diferentes niveles de profundidad. En el marco PISA (OECD, 2004), esta variable se denomina conjuntos de competencia (*competency clusters*). En este trabajo adoptamos la caracterización realizada por Rico y Lupiáñez (2008) que concretan esta variable en términos de niveles de complejidad de las tareas. En general, estas competencias están asociadas con tareas cuya dificultad va en ascenso; no obstante, existe superposición en la clasificación de las tareas dentro de cada categoría. Así, se distinguen los siguientes conjuntos:

a. Reproducción. Las preguntas en este nivel requieren que el estudiante demuestre que domina el conocimiento aprendido. Son problemas que les resultan familiares y se resuelven aplicando algoritmos o destrezas técnicas. Incluye los procesos de acceder (recordar, reproducir) e identificar.

b. Conexión. Las preguntas en este nivel requieren que el estudiante demuestre que puede establecer relaciones entre distintos dominios matemáticos y que puede integrar información para resolver problemas que no son rutinarios pero que exigen que el estudiante se decida por una de entre varias estrategias de resolución. Incluye los procesos de aplicar, analizar y valorar.

c. Reflexión. Las preguntas en este nivel son situaciones poco estructuradas que requieren que el estudiante comprenda, reflexione y use su creatividad para reconocer las matemáticas involucradas en el problema. Se exige que el estudiante analice, interprete y desarrolle sus propios modelos y estrategias y presente argumentos matemáticos, demostraciones y generalizaciones. Incluye los procesos de sintetizar, crear y juzgar.

5. Búsqueda y recopilación de las pruebas de diagnóstico

El acceso a las pruebas censales de evaluación se logró mediante una búsqueda sistemática en los portales de las Consejerías de Educación de cada comunidad. Limitamos la muestra a los ítems procedentes de las pruebas de cinco comunidades por lo cual, es una muestra por disponibilidad. Pese a varios intentos, dos comunidades no respondieron a la solicitud; tres comunidades sólo permitían acceso a la prueba aplicada en 4º de primaria bien porque no aplicaron prueba de competencia matemática en 2º de la ESO o porque no estaba disponible para divulgación; tres comunidades indicaron que la prueba no estaba disponible para divulgación porque sería usada para futuras aplicaciones; dos comunidades indicaron no haber evaluado competencia matemática en 2º de la ESO; una comunidad publicó sólo una parte de la prueba como ítems liberados; las pruebas de una comunidad serían liberadas en una fecha posterior y una comunidad sólo publicó ejemplos de ítems. En resumen, nuestro banco de información consta de cinco pruebas. Para garantizar la confidencialidad de las comunidades autónomas se asignó aleatoriamente un código a cada una de ellas: en lo sucesivo nos referiremos a ellas como comunidades A, B, C, D y E. En resumen, las pruebas disponibles contienen un total de 173 ítems distribuidos como se muestra en la siguiente tabla:

Tabla 1
Distribución del total de ítems por Comunidad Autónoma

Comunidad Autónoma	Número de ítems	Porcentaje
A	18	10,4
B	84	48,6
C	32	18,5
D	25	14,4
E	14	8,1

Puede observarse que no existe un patrón en lo que a número de ítems se refiere. La comunidad B incluyó la mayor cantidad de ítems con 84, representando esta cantidad cerca de la mitad del total de ítems en la muestra (48,6 %). Por su parte, la comunidad E contenía sólo 14 ítems, el menor número de ellos (8,1 %).

6. Análisis de ítems por Comunidad Autónoma y variable de tarea

De acuerdo con el modelo matemático PISA y el enfoque funcional del conocimiento matemático, se analizaron los 173 ítems disponibles en la muestra de cinco pruebas de diagnóstico. Para cada comunidad se evaluaron los ítems de acuerdo a las variables de tarea consideradas en el estudio: contexto, nivel de complejidad y contenido. Primero se analizaron los ítems de acuerdo al contexto. La siguiente tabla muestra la distribución porcentual de los ítems por comunidad y contexto.

Tabla 2

Porcentaje de los ítems por Comunidad Autónoma y contexto

Contexto	Comunidad Autónoma					Total
	A	B	C	D	E	
Personal	27,8	1,2	9,4	52,0	64,3	17,9
Educativo/Laboral	33,3	19,0	21,9	8,0	0,0	17,9
Público	38,9	69,0	59,4	40,0	35,7	57,2
Científico	0,0	10,7	9,4	0,0	0,0	6,9

En la distribución del total de ítems por el contexto se observa, globalmente, un desequilibrio hacia los ítems de contexto público, cuyos enunciados representan más del 50% del total. Este resultado se mantiene en todas las comunidades excepto la comunidad E, cuyos ítems se inclinan al contexto personal. El 6,9% del total de ítems se clasificó en la categoría de contexto científico destacando que las pruebas de las comunidades A, D y E no incluyeron ítems para este contexto. La comunidad E tiene la mayor proporción de ítems en el contexto personal (64,3%) sin incluir ítems en los contextos educativo/laboral y científico. La comunidad A incluyó el mayor número de ítems en el contexto educativo/laboral (33,3%) y no incluyó ítems en el contexto científico. La comunidad con la mayor proporción de ítems en el contexto público es la comunidad B (69,0%) así como en el contexto científico (10,7%).

Al analizar los ítems respecto del contenido se encontró que la distribución del total de ítems en las categorías de esta variable es equilibrada, con leves diferencias (Tabla 3). La mayor frecuencia se observa en el contenido de incertidumbre (27,7%). Las clasificaciones de cantidad y espacio y forma exhiben igual porcentaje (25,4%). Aunque las diferencias por comunidades son apreciables, globalmente hay equilibrio entre los contenidos utilizados para la totalidad de los ítems.

Tabla 3
Porcentaje de los ítems por Comunidad Autónoma y contenido

Contenido	Comunidad Autónoma					Total
	A	B	C	D	E	
Cantidad	16,7	21,4	28,1	44,0	21,4	25,4
Cambio y relaciones	33,3	29,8	6,3	4,0	21,4	21,4
Espacio y forma	38,9	25,0	25,0	16,0	28,6	25,4
Incertidumbre	11,1	23,8	40,6	36,0	28,6	27,7

Se aprecia en la distribución que la comunidad D incluyó la mayor proporción de ítems en el contenido de cantidad (44,0%). En el contenido de cambio y relaciones destaca la comunidad A con un 33,3%. Esta comunidad también incluyó la mayor proporción de ítems en el contenido de espacio y forma (38,9%). En cuanto al contenido de incertidumbre, fue la comunidad C quien incluyó el mayor número de ítems en este contenido (40,6%). Tanto la comunidad C como la D incluyeron las proporciones más bajas de ítems en el contenido de espacio y forma: 6,3% y 4,0%, respectivamente. En la comunidad B se observa una distribución equilibrada en el contenido de los ítems que, igualmente, se observa en la comunidad E más no así en el resto de las comunidades. La distribución porcentual de los ítems de acuerdo al nivel de complejidad se presenta en la siguiente tabla:

Tabla 4
Porcentaje de los ítems por Comunidad Autónoma y nivel de complejidad

Complejidad	Comunidad Autónoma					Total
	A	B	C	D	E	
Reproducción	27,8	45,2	56,3	60,0	35,7	46,8
Conexión	61,1	46,4	34,4	32,0	64,3	45,1
Reflexión	11,1	8,3	9,4	8,0	0,0	8,1

Las observaciones respecto del nivel de complejidad arrojan que la mayor frecuencia ocurre en el nivel de reproducción con 46,8%, aunque el nivel de conexión es muy cercano (45,1%). Invariablemente, el nivel de reflexión se aleja considerablemente de los niveles de reproducción y conexión: sólo el 8,1% del total de ítems se clasificó en este nivel. Este resultado se observa de la misma manera en la distribución por comunidades. También en este caso se detecta un sesgo global, debido al bajo porcentaje de ítems de reflexión. En la distribución de los ítems por nivel de complejidad en cada Comunidad Autónoma se observa que las comunidades C y D exhiben la proporción más alta de ítems en el nivel de reproducción: 60,0% y 56,3%, respectivamente. La mayor proporción de ítems en el nivel de conexión se registró en las comunidades E (64,3%) y A (61,1%). La comunidad B, por su parte, incluyó la mayor proporción de ítems en el nivel de conexión (46,4%) manteniendo una proporción parecida en el nivel de reproducción (45,2%). La comunidad A incluyó poco más de tres quintas partes (61,1%) de sus ítems en el nivel de conexión. Esta comunidad incluyó mayor proporción de ítems en el nivel de reflexión que las demás comunidades (11,1%). Aunque la proporción más baja de ítems se incluyó en este nivel, sólo la comunidad E no incluyó ítems de reflexión.

7. Fortalezas y deficiencias de los ítems

Los 173 ítems evaluados en este estudio presentan distintas fortalezas y deficiencias. Según Bell, Buckhardt y Swan (1992), se considera que una tarea que moviliza destrezas y habilidades de orden superior, como las enmarcadas en el modelo de PISA y el enfoque funcional del aprendizaje matemático, exhibe fortalezas si cumple una o más de las siguientes condiciones: las situaciones que presenta son relevantes al estudiante; la relevancia del contexto se mantiene durante el proceso de resolución; la tarea no es rutinaria; promueve que el estudiante se desplace del contexto del problema al mundo matemático necesario para resolverlo; moviliza potencialmente distintas competencias; estimula la toma de decisiones; es secuencial. Si no cumple las condiciones mencionadas y si, además, la tarea propuesta atiende estrictamente a los contenidos curriculares y no a las competencias, se considera que el ítem presenta debilidades. La tabla 5 resume las fortalezas identificadas en los ítems evaluados, la Tabla 6 presenta las deficiencias y la Tabla 7, las competencias que potencialmente movilizan las tareas.

Tabla 5
Porcentaje de ítems con fortalezas

Fortalezas	Comunidad Autónoma					Total	Porcentaje (%)
	A	B	C	D	E		
Contexto relevante	9	61	13	19	9	111	64,2
Tarea no rutinaria	11	39	14	14	9	87	50,3
Moviliza distintas capacidades	10	47	7	9	7	80	46,2
Tiene relevancia práctica	4	42	4	18	7	75	43,3
Permite la toma de decisiones	10	23	7	5	5	50	28,9
Tarea secuencial	9	19	2	9	8	47	27,2
Hay desplazamiento del contexto al mundo matemático	4	8	0	0	3	15	8,7

Se destaca en la tabla que cerca de dos terceras partes de los ítems evaluados presentan un contexto relevante y necesario para resolver el problema, mostrando esta fortaleza con la mayor frecuencia (64,2%). La mitad de los ítems presentan una tarea que consideramos no rutinaria. Con proporciones cercanas al 50% encontramos tareas enmarcadas en la vida real con relevancia práctica para el estudiante y tareas que movilizan distintas capacidades. Por el contrario, sólo el 8,7% de los ítems permite que el estudiante se desplace del contexto del problema al mundo matemático necesario para resolverlo. Es decir, que apenas una décima parte de los ítems incluidos en las pruebas estimula al estudiante a iniciar el proceso de matematización.

Tabla 6
Porcentaje de ítems con debilidades

Debilidades	Comunidad Autónoma					Total	Porcentaje (%)
	A	B	C	D	E		
Tarea corta que suprime la toma de decisiones	5	35	19	19	10	88	50,9
Tarea rutinaria	6	30	19	11	11	77	44,5
No moviliza distintas capacidades	5	29	21	14	6	75	43,4
Carece de relevancia práctica	6	27	26	7	7	73	42,2
Atiende contenidos curriculares	8	22	12	14	3	59	34,1
Contexto irrelevante o camuflado	5	15	19	6	2	47	27,2

Respecto de las deficiencias identificadas en las pruebas, se observa que en la mitad de los ítems la tarea es corta y suprime la toma de decisiones. Muy cerca de este porcentaje encontramos tareas rutinarias que, aunque enmarcadas en la vida real, carecen de relevancia práctica para el estudiante y tareas que no movilizan distintas competencias. Se observa, además, que poco más de una cuarta parte de los ítems presentan tareas cuyo contexto está camuflado o es irrelevante e innecesario para resolver el problema. De otro lado, aproximadamente una tercera parte de los ítems presenta tareas que en lugar de movilizar competencias, atienden estrictamente contenidos curriculares.

Además de clasificar cada ítem de acuerdo a las variables de tarea, se estudió qué competencias debía eventualmente poner de manifiesto el estudiante para resolver el problema y se realizaron algunas observaciones generales del ítem. Por ser una variable de desempeño y no de tarea, la identificación de las competencias se realizó como un recurso de apoyo para caracterizar el ítem. Enmarcada en el modelo matemático de PISA, esta caracterización tiene en cuenta los ocho tipos descritos anteriormente.

En cuanto a las competencias potenciales que movilizan las tareas, se observa en la Tabla 7 que representar es la capacidad potencialmente movilizada con mayor frecuencia (41,6%). Se observa, además, que la competencia de comunicar es potencialmente movilizada en el 35,3% de los ítems. La competencia de modelizar pudo haber sido movilizada sólo en el 4,0% de los ítems, representando la competencia con el menor porcentaje.

Tabla 7
Competencias potenciales que movilizan las tareas de los ítems

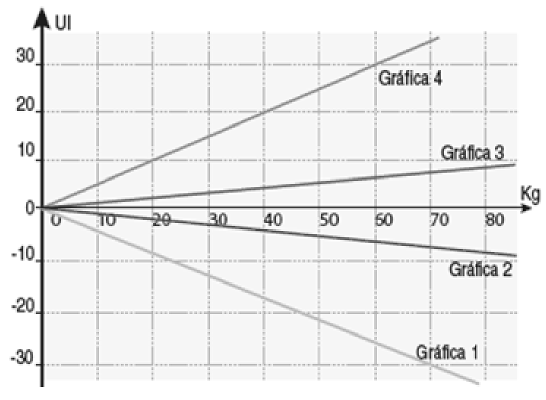
Competencias	Comunidad Autónoma					Total	Porcentaje (%)
	A	B	C	D	E		
Representar	7	38	7	13	7	72	41,6
Comunicar	6	35	5	8	7	61	35,3
Plantear y resolver problemas	7	11	3	0	3	24	13,9
Utilizar lenguaje simbólico, formal y técnico y las operaciones	7	20	2	0	2	31	17,9
Pensar y razonar	3	13	4	1	2	23	13,3
Argumentar	2	14	1	3	3	23	13,3
Modelizar	0	7	0	0	0	7	4,0

8. Ejemplo de ítems analizados

A continuación se presenta uno de los 173 ítems analizados y se identifican los valores de las variables que lo caracterizan.

La diabetes es una enfermedad que está aumentando de forma preocupante entre las personas jóvenes debido a los malos hábitos alimenticios y la obesidad. Consiste en que el cuerpo es incapaz de controlar los niveles de glucosa en sangre. El tratamiento más común es inyectar insulina diariamente en dosis adaptadas a cada persona. El cálculo de la dosis debe ser correcto, de lo contrario puede resultar perjudicial. La dosis diaria de la insulina "Lispro" es de 0,1 Unidades de Insulina (UI) por Kg de peso. ¿Qué gráfica representa la dosis de "Lispro" que hay que administrar por Kg de peso?

A. Gráfica 1
B. Gráfica 2
C. Gráfica 3
D. Gráfica 4



En nuestra investigación este ítem se clasificó en el contexto científico porque el estudiante está poco relacionado con la incidencia y prevalencia de enfermedades como la diabetes; por su contenido corresponde a cambio y relaciones porque el estudiante interpreta datos presentados en la gráfica para establecer la relación entre las variables; por su nivel de complejidad es de conexión porque el estudiante debe reconocer la relación entre el peso y las unidades de insulina mediante la gráfica. Para resolver este problema se requiere que el estudiante: comprenda la información que se presenta, interprete la información para determinar la relación entre las variables, reconozca que existe una constante de proporcionalidad y analice la gráfica para determinar la solución. Esta tarea moviliza potencialmente las competencias: representar, pensar y razonar, comunicar. En este ítem se identificaron las siguientes fortalezas: el contexto es relevante, la tarea es no rutinaria, moviliza distintas competencias y permite la toma de decisiones basadas en información relevante (Caraballo, 2010).

9. Conclusiones

Con base en los objetivos que guiaron esta investigación, el marco de referencia que la sostiene y los resultados obtenidos, enunciamos las siguientes conclusiones.

- Existen claras diferencias entre las Comunidades Autónomas respecto al acceso público a las pruebas aplicadas así como limitaciones en la transparencia del proceso.
- Los valores identificados en los ítems para las variables de tarea según definidas en el modelo matemático de PISA muestran que en la redacción de los ítems existen sesgos que favorecen el contexto público y al nivel de complejidad de reproducción.
- Los ítems redactados por las Comunidades Autónomas incluidas en la muestra mantienen un equilibrio en lo que a contenido se refiere.
- Puesto que en cada ítem se identificó un contexto, un contenido y un nivel de complejidad, variables de tarea definidas por el modelo matemático de PISA, los ítems aplicados se ajustan al modelo matemático de las evaluaciones de PISA.
- No obstante, por los sesgos y las deficiencias identificadas en ellas, las pruebas elaboradas por las Comunidades Autónomas para atender las evaluaciones de diagnóstico presentan limitaciones para satisfacer el propósito para el cual fueron diseñadas.

10. Recomendaciones

A la luz de las conclusiones derivadas de este estudio recomendamos a las Comunidades Autónomas que, para cumplir con el grado de ajuste adecuado a las evaluaciones PISA, revalúen el diseño de las pruebas a la luz de las variables definidas en su caracterización. Se sugiere que esta revaluación sea orientada a subsanar los sesgos y las deficiencias identificados en esta investigación, mediante la inclusión equilibrada de ítems en las categorías de contexto, contenido y nivel de complejidad.

Bibliografía

Bell, A., Burkhardt, H. & Swan, M. (1992). Assessment of extended tasks. En R. Lesh & S. Lamon (Eds.). *Assessment of Authentic Performance in School*

Mathematics. Washington: American Association for the Advancement of Science.

Boulmetis, J. & Dutwin, P. (2000). *The ABCs of Evaluation*. Jossey-Bass Publishers, San Francisco.

Caraballo, R.M. (2010). *Análisis de los ítems de las pruebas de evaluación de diagnóstico en competencia matemática para el segundo curso de la Educación Secundaria Obligatoria en España, 2008-2009: un estudio exploratorio.* Trabajo de fin de máster sin publicar. Universidad de Granada.

Instituto de Evaluación (2009). *Evaluación General de Diagnostico 2009: Marco de la Evaluación.* Ministerio de Educación, Madrid.

Lupiáñez, J. L. (2009). *Expectativas de aprendizaje y planificación curricular en un programa de formación inicial de profesores de Matemáticas de secundaria*. Tesis doctoral. Universidad de Granada.

Lupiáñez, J. L. (2010). *Diseño y selección de tareas para el desarrollo de la competencia matemática.* Trabajo presentado en Matemáticas y Competencias Básicas, Oviedo.

Ministerio de Educación y Ciencia (2006). Ley Orgánica de Educación. Boletín Oficial del Estado, BOE núm. 106. Autores, Madrid.

OECD (2004). Learning for Tomorrow's World: First Results from PISA 2003.

OECD (2009). Learning Mathematics for Life: A Perspective from PISA.

Rico, L. (2006). "Marco teórico de evaluación en PISA sobre matemáticas y resolución de problemas". *Revista de Educación*, (Extraordinario 2006), 275-294.

Rico, L. (2007). "La competencia matemática en PISA". *PNA*, *1*(2), 47-66.

Rico, L. & Lupiáñez, J. L. (2008). *Competencias matemáticas desde una perspectiva curricular*. Alianza Editorial, Madrid.

Rosa Marta Caraballo Caraballo: Profesora de Matemáticas a nivel universitario, editora y escritora de libros de texto de Matemáticas y consultora en el área educativa en Puerto Rico, cursa un doctorado en Didáctica de la Matemática en la Universidad de Granada, España. caraba@correo.ugr.es

Luis Rico Romero: Catedrático en la Universidad de Granada, Director del Departamento de Didáctica de la Matemática. Dirige el *Grupo de Investigación Didáctica de la Matemática. Pensamiento Numérico* del Plan Andaluz de Investigación, Desarrollo e Innovación, entre cuyas líneas se encuentran la formación del profesorado, la evaluación de programas de formación en matemáticas y el modelo de formación por competencias. lrico@ugr.es

José Luis Lupiáñez Gómez: Profesor del Departamento de Didáctica de la Matemática de la Universidad de Granada. Sus principales líneas de investigación son la formación de profesores de matemáticas de educación primaria y secundaria, la noción de competencia y el uso de nuevas tecnologías en el aula de matemáticas. lupi@ugr.es

UNIÓN
REVISTA IBEROAMERICANA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA

Junio de 2011, Número 26, páginas 41-55
ISSN: 1815-0640

Interpretaciones del signo igual. Un estudio de libros de texto.

Mónica Ramírez García; Purificación Rodríguez Marcos

Resumen

El aprendizaje del significado de los símbolos matemáticos y en concreto, el signo igual, es muy importante para poder comprender multitud de expresiones aritméticas y algebraicas. Existen numerosos estudios que ponen de relieve que los estudiantes tienen grandes dificultades a la hora de captar su significado. Este artículo recoge una revisión de algunos de estos estudios que muestran las interpretaciones y usos del signo igual de los estudiantes, así como posibles causas de una comprensión incompleta de este signo y cómo se puede desarrollar una interpretación relacional del signo a través del pensamiento relacional. Además, presenta el estudio de la revisión de algunos libros de texto de matemáticas del primer ciclo de Educación Primaria, para establecer el modo y los contextos en los que se presenta el signo igual a los estudiantes en los primeros cursos.

Abstract

Learning of the meaning of the mathematical symbols and in concrete, the equal sign, it is very important to be able to understand multitude of arithmetical and algebraic expressions. There exist numerous studies that emphasize that the students have big difficulties at the moment of catching his meaning. This article gathers a review from some from these studies that show the interpretations and uses of the equal sign of the students, as well as possible reasons of an incomplete understanding of this sign and how it is possible to develop a relational interpretation of the sign across the relational thinking. Besides, it presents the study of the review of some books of text of mathematics of the first cycle of Primary Education, to establish the way and the contexts in which one presents the equal sign to the students in the first courses.

Resumo

A aprendizagem do significado dos símbolos matemáticos e, em concreto, o signo igual, é muito importante para poder compreender multidão de expressões aritméticas e algebraicas. Existem numerosos estudos que põem de relevo que os estudantes têm grandes dificuldades à hora de captar seu significado. Este artigo recolhe uma revisão de alguns destes estudos que mostram as interpretações e usos do signo igual dos estudantes, bem como possíveis causas de um entendimento incompleta deste signo e como se pode desenvolver uma interpretação relacional do signo através do pensamento relacional. Ademais, apresenta o estudo da revisão de alguns livros de texto de matemáticas do primeiro ciclo de Educação Primaria, para estabelecer o modo e os contextos nos que se apresenta o signo igual aos estudantes nos primeiros cursos.

1. Introducción

En matemáticas los signos y los símbolos tienen una gran importancia, ya que el lenguaje matemático los utiliza continuamente. Un signo es cualquier cosa, acción o suceso que, por una relación natural o convencional, evoca a otra o la representa (Moliner, 2007). Si tomamos como definición de símbolo un tipo de signo en el cual la relación con el objeto al que se refiere es arbitraria y se ha determinado por convenciones, encontraremos que la mayoría de los signos matemáticos son símbolos porque su significado se ha establecido por convenciones.

El aprendizaje de las Matemáticas implica forzosamente el manejo y comprensión de los símbolos matemáticos. Al ser signos con significados convencionales los alumnos encuentran dificultades en su aprendizaje.

Uno de los objetivos del currículum es aprender el significado de los símbolos matemáticos, lo que no quiere decir que los estudiantes adquieran los significados correctos de estos signos, y como consecuencia aparece el fracaso en esta materia. Uno de los signos al que los estudiantes no le dotan de un significado completo y es especialmente importante es el signo igual.

El aprendizaje del significado de los símbolos matemáticos y en concreto el del signo igual, es vital para poder comprender multitud de expresiones aritméticas y algebraicas. Numerosos estudios han puesto de relieve que incluso los estudiantes de secundaria tienen grandes dificultades a la hora de captar su significado. Teniendo en cuenta esto, en este trabajo realizaremos una revisión de algunas investigaciones anteriores para mostrar qué significados y qué usos le dan los escolares, establecer por qué es tan importante adquirir un significado completo del signo igual, cuál es el significado relacional que tiene este signo y cómo se puede desarrollar mediante una pedagogía basada en el pensamiento relacional. A continuación presentaremos el estudio que hemos desarrollado, que constituye la primera parte de un proyecto más amplio que tendrá como objetivo la elaboración de la Tesis Doctoral. En concreto, revisaremos algunos libros de texto, de distintos niveles educativos, para establecer el modo y los contextos en los que se presenta el signo igual a los estudiantes de primer ciclo de primaria.

2. Marco Teórico

2.1. Aritmética y Álgebra

En los últimos años, muchos investigadores han intentado analizar las causas del alto fracaso escolar en Matemáticas, lo que les ha llevado a construir programas de enseñanza para conseguir mejorar el aprendizaje. Una de las áreas más problemáticas de las Matemáticas es el Álgebra. En efecto, muchos estudiantes de secundaria muestran una preparación insuficiente cuando se introduce esta asignatura.

La enseñanza tradicional tiende a separar la Aritmética del Álgebra. El aprendizaje de la Aritmética se basa en la fluidez de cálculo sin preocuparse de que los alumnos capten las propiedades y relaciones de los números y de las operaciones. Se da por hecho que las adquieren de forma inductiva con la práctica masiva de operaciones aritméticas. El Álgebra se introduce posteriormente según el currículum. El NCTM (2000) distingue varias componentes del Álgebra: comprensión de patrones, relaciones entre cantidades y funciones, la representación de relaciones matemáticas, el análisis de situaciones y estructuras matemáticas utilizando símbolos algebraicos, el uso de modelos matemáticos para representar y comprender relaciones cuantitativas, y el análisis del cambio. El Álgebra se introduce cuando se considera que los alumnos han adquirido las habilidades aritméticas necesarias, sin ocuparse de la conexión entre Aritmética y Álgebra.

Muchos estudiantes de secundaria muestran una preparación insuficiente cuando se introduce el Álgebra. Una de las ideas como solución a este problema es la propuesta Early-Algebra (Molina, 2006), que está basada en la integración de modos de pensamiento algebraico en las matemáticas escolares, permitiendo enriquecer la actividad matemática de estos niveles. Trata de desarrollar los aspectos algebraicos que posee el niño y utilizar representaciones que permitan a los alumnos operar a un nivel de generalidad más alto.

En Estados Unidos, el NCTM (2000) ha mostrado apoyo a la propuesta Early-Algebra proponiendo una reforma en la enseñanza de la Aritmética para que los conceptos y las destrezas de Aritmética de la escuela elemental estén mejor coordinadas con la enseñanza del Álgebra. Más concretamente, esta reforma consiste en un cambio curricular, que aboga por la introducción del Álgebra desde los primeros años de la educación primaria. Este cambio curricular favorece el desarrollo conceptual y la coherencia de las Matemáticas desde los primeros cursos escolares. Brevemente, la idea central de este cambio es trabajar con actividades que faciliten la transición entre la Aritmética y el Álgebra, poniendo especial énfasis en las estructuras que subyacen a las operaciones aritméticas y sus propiedades y no tanto, en el aspecto del cálculo (Molina, 2006). El objetivo final es promover el pensamiento algebraico junto con el aritmético, para facilitar el aprendizaje con comprensión. Aprender Aritmética no consiste solo en la memorización de cientos de hechos numéricos y procedimientos para llevar a cabo algoritmos de resolución de operaciones aritméticas, sino en adquirir una serie de conceptos que permitan desarrollar estrategias para hacer cálculos aritméticos. En otras palabras, implica que los alumnos interioricen propiedades y relaciones que se encuentran implícitas en la estructura de la aritmética. Autores como Carpenter et al. (2003) muestran la viabilidad de la propuesta de pensamiento algebraico temprano, su puesta en práctica por los docentes y las distintas concepciones y capacidades del pensamiento algebraico en los niños.

Una de las dificultades que se han encontrado es la comprensión del signo igual. El estudio que aquí presentamos se centra en la comprensión del signo igual que adquieren los niños durante su escolarización. Veremos que si se adquiere un significado correcto del signo igual, se puede alcanzar con más seguridad el objetivo de trabajar el razonamiento algebraico.

2.2. Usos e interpretaciones del signo igual en los niños

En los últimos 20 años, las investigaciones muestran que el significado del signo igual que adquieren los estudiantes desde los primeros cursos de escolarización es incompleto, interpretándolo como una invitación a hacer algo, es decir, operar sobre los números más que un símbolo relacional. Con niños de edades correspondientes a Educación Primaria tenemos algunas investigaciones realizadas como las de Behr, Erlwanger y Nichols (1980), Morris (2003), Carpenter et al. (2003) que ponían de manifiesto que los niños consideran el signo de igualdad como un operador, en vez de un símbolo relacional. Como operador el signo igual se interpreta como una instrucción para realizar una operación aritmética. Esta interpretación operacional está relacionada con el hecho de que el signo se lea únicamente de izquierda a derecha, lo que significa que se ha de operar siempre sobre los dígitos que están a la izquierda y que la respuesta se ha de situar a la derecha del signo. Para adquirir un significado más completo del signo igual, debería interpretarse como un signo bidireccional, que se pueda leer tanto de izquierda a derecha o de derecha a izquierda. El signo igual representa la relación `de equivalencia numérica'. En igualdades numéricas simboliza la equivalencia numérica entre las expresiones que se encuentran en los dos lados del signo igual (Molina, 2006). Esta autora observó cuatro significados del signo igual en niños de tercero de primaria: 'operador', 'indicador de una acción', 'similitud numérica' y 'equivalencia numérica' (p. 436). La autora confirma que a pesar de que el significado de equivalencia numérica es el adecuado para resolver todas las igualdades utilizadas, los niños utilizan en cada situación el significado que da sentido a la igualdad o sentencia numérica que se presenta. De aquí concluye que hay 3 niveles de comprensión del signo igual. El primer y menos completo sería el nivel de comprensión operacional de los niños en los que utilizan el significado de operador y expresión de una acción. Un segundo nivel no estable, en el que en algunas situaciones empieza aparecer el significado de equivalencia numérica. Y por último, el nivel de comprensión avanzado en el que se hace uso del significado de equivalencia numérica, aunque en sentencias con operaciones en el lado izquierdo utilizan el significado operador y en sentencias con operaciones en el lado derecho, utilizan el significado expresión de acción. El significado similitud numérica se mostraba de forma puntual.

Con estudiantes con edades correspondientes a Educación Secundaria que trabajan con expresiones algebraicas tenemos trabajos como los de Knuth (2005, 2006), Essien & Setati (2006) y Hunter (2007), en los que un gran porcentaje de los alumnos mostraban una interpretación operacional del signo igual y además, se comprobó que el éxito en la resolución de ecuaciones algebraicas estaba asociada a la interpretación que tenían dichos alumnos del signo igual.

Una de las causas a las que se atribuye la interpretación inadecuada del signo igual, es la experiencia que tienen los niños en la escuela con los contextos que encuentran en los libros y las explicaciones del maestro. Parece importante buscar contextos que conlleven a los estudiantes una comprensión relacional del signo igual. En esta línea, McNeil & Alibali (2005) comprobaron que el contexto en el que se presentaban operaciones en ambos lados del signo igual activaba la interpretación relacional del signo igual. En un trabajo posterior, McNeil et al. (2006) plantearon contextos no estándares, del tipo 8 = 8, o 7 = 3 + 4, y comprobaron que son también más efectivas que las ecuaciones 'operación igual respuesta' para activar la comprensión relacional del signo igual.

McNeil et al. (2006) examinaron libros de texto de cuatro editoriales distintas para ver en qué contextos de los anteriormente evaluados aparece el signo igual. En concreto, evaluaron libros de texto de 6-8 grado, comúnmente utilizados en Estados Unidos. El contexto 'operaciones en ambos lados del signo igual' aparecía en una proporción muy pequeña en todos los libros. Los contextos no estándares sí aparecían frecuentemente en todas las editoriales, pero el más habitual era 'operación igual resultado'. En resumen, el análisis de los textos mostró que no están bien orientados para despertar una interpretación relacional del signo igual.

La experiencia de los niños en contextos que contienen el signo igual no es únicamente la que observan en los libros de texto. Hay otros factores como es la presentación de los profesores, los contextos que utilizan para plantear actividades e intentar transmitirles los conocimientos. En el trabajo de Seo & Ginsburg (2003) estudiaron los contextos de los libros de textos y los contextos que utilizaba el profesor de un aula con niños de 7 y 8 años para finalmente recoger la interpretación que tenían estos niños del signo igual. Como en el caso anterior, el análisis de texto mostró una mayoría de contextos que implicaban una acción con operaciones aritméticas y por lo tanto implicaban una interpretación operacional del signo igual. El profesor de grupo era consciente del insuficiente significado que le dan los niños al signo igual si sólo se trabaja contextos de resolución de operaciones aritméticas, y planteó distintas situaciones como comparación de números, equivalencia de unidades de medida, y equivalencia de moneda. Se encontró que los niños tenían una interpretación operacional en contextos aritméticos que implicaban realizar una operación, pero en situaciones de medida y equivalencia de monedas, los niños si daban un significado relacional al signo igual. Al intentar relacionar las dos situaciones explicaban que era distinto en cada una de las situaciones. Se concluyó que no basta con plantear distintos contextos para ver los distintos significados del signo igual. Se debería haber trabajado la conexión de esos significados, es decir, las distintas interpretaciones que se tienen en diferentes contextos puede funcionar en un mismo contexto, es decir, la interpretación relacional que indica la misma cantidad funciona también en el contexto 2 + 3 = 5, que habitualmente implica “el resultado”.

2.3. Desarrollo del pensamiento relacional. La igualdad como relación

Una de las ideas como solución a este problema es la propuesta Early-Algebra (Molina, 2006), que está basada en la integración de modos de pensamiento algebraico en las matemáticas escolares, permitiendo enriquecer la actividad matemática de estos niveles. Trata de desarrollar los aspectos algebraicos que posee el niño y utilizar representaciones que permitan a los alumnos operar a un nivel de generalidad más alto. En Estados Unidos, el NCTM (2000) ya mostró apoyo a esta propuesta proponiendo una reforma en la enseñanza de la Aritmética para que los conceptos y las destrezas de Aritmética de la escuela elemental estén mejor coordinadas con la enseñanza del Álgebra. Este cambio curricular favorece el desarrollo conceptual y la coherencia de las Matemáticas desde los primeros cursos escolares. Brevemente, la idea central de este cambio es trabajar con actividades que faciliten la transición entre la Aritmética y el Álgebra, poniendo especial énfasis en las estructuras que subyacen a las operaciones aritméticas y sus propiedades y no tanto, en el aspecto del cálculo (Molina, 2006). El objetivo final es promover el pensamiento algebraico junto con el aritmético, para facilitar el aprendizaje con comprensión. En otras palabras, implica que los alumnos interioricen generalidades (principios, propiedades, relaciones) que se encuentran implícitas en la estructura de la Aritmética. Autores como Carpenter et al. (2003) muestran la viabilidad de basar la instrucción de la Aritmética en el pensamiento relacional, que consiste en examinar las expresiones en su totalidad y utilizar las relaciones entre ellas.

2.4. Objetivos de la investigación

El objetivo principal de este trabajo es realizar una revisión de algunos libros de textos de Matemáticas de Primer Ciclo de Educación Primaria, para ver en qué contextos encuentran nuestros alumnos el signo igual al comienzo de su formación.

3. Marco experimental

3.1. Materiales

La revisión se realizó con los libros de texto de primer ciclo de Educación Primaria de cuatro editoriales utilizadas en los Centros de Educación Primaria de la Comunidad de Madrid (Tabla 1).

Tabla 1: Editoriales y proyectos de los libros de texto analizados.

Editorial	Proyecto	Curso	Año
Vicens Vives	Mundo de Colores	1º y 2º	2008, 2009
Anaya	Salta a la vista	1º y 2º	2007
SM	Trampolín	1º y 2º	2007
Bruño	Lapiceros	1º y 2º	2008

Se utilizarán los libros de texto de cuatro de las editoriales utilizadas en los Centros de Educación Primaria de la Comunidad de Madrid. Para ello, seleccionamos los últimos proyectos o series que se han editado en cada una de las editoriales (ver Tabla 1) y como ya hemos mencionado, el estudio se centrará en Primer Ciclo de Primaria.

3.2. Procedimiento

Realizaremos un estudio descriptivo para ver los contextos en los que aparece el signo igual. Basándonos en los estudios previos (McNeil et al., 2006, Seo & Ginsburg, 2003) hemos elaborado una clasificación de los posibles contextos en los que puede aparecer el signo igual.

Contextos aritméticos

1. Contexto aritmético canónico: ‘Operación igual resultado’ (a + b = c).
2. Contextos aritméticos no canónicos. Incluye varios:
    a. Operaciones en ambos lados del signo igual. a + b = c + d
    b. ‘Resultado igual operación’: a = b + c

Contextos no aritméticos

1. Comparación de números; a = a.
2. Contextos de medida: p.e.: 1 metro = 10 decímetros.
3. Contextos de equivalencia de monedas: 1 euro = 100 céntimos.
4. Contexto del sistema numérica decimal: 400 unidades = 4 centenas.
5. Otros contextos no aritméticos.

Esta clasificación separa los contextos aritméticos de los no aritméticos. El análisis de los contextos no aritméticos permitirá estudiar si existen situaciones en los libros de texto en las que los niños tienen la oportunidad de dar un significado relacional al signo igual (i.e.; el de medida y la equivalencia de monedas como vimos anteriormente en el trabajo de Seo y Ginsburg). Los contextos aritméticos ayudarán a su vez a deducir si los libros de texto favorecen un sentido operacional o relacional al signo igual en situaciones aritméticas. Por ejemplo, como vimos en el trabajo de McNeil (2006), el contexto ‘operaciones a ambos lados del signo igual’ ayuda a dar un sentido relacional.

Teniendo en cuenta que en una misma página de un libro pueden aparecer distintas expresiones y por lo tanto, distintos contextos del signo igual, hemos analizado por separado cada una de esas situaciones. Del mismo modo, si en un ejercicio se repite varias veces, hemos tomado todas y cada una de esas veces porque incluso dentro de cada ejercicio puede variar el contexto.

3.3. Resultados y Análisis

Los resultados muestran que el signo igual se utiliza en contextos aritméticos con más frecuencia que en contextos no aritméticos (ver Tabla 2). Todas las editoriales utilizan el signo igual en más de un 90% de las ocasiones en expresiones aritméticas. Sólo en la editorial Anaya no alcanza este porcentaje en segundo curso, que como veremos más adelante, se debe al gran uso de las relaciones de equivalencia del sistema numérico decimal. En todas las editoriales disminuye levemente la utilización de los contextos aritméticos en segundo curso, excepto en la editorial Bruño, aunque las diferencias entre primero y segundo en todos los casos son pequeñas.

Tabla 2: Porcentaje de contextos aritméticos y no aritméticos.

Curso	*Libro de Texto (Editorial)*	*Contexto Aritmético*	*Contexto no Aritmético*
1	Vicens Vives – Mundo de Colores	97,58	2,42
	Anaya – Salta a la vista	93,03	6,97
	SM – Trampolín	95,85	4,15
	Bruño – Lapiceros	95,63	4,37
2	Vicens Vives – Mundo de Colores	96,84	3,16
	Anaya – Salta a la vista	86,26	13,74
	SM – Trampolín	94,63	5,37
	Bruño - Lapiceros	96,76	3,24

En el Primer ciclo de Primaria se introducen las operaciones aritméticas, la suma y la resta en el primer curso, y la multiplicación y en algunos casos la división en el segundo curso. Por lo tanto, se puede observar en todas las editoriales listados de actividades en las que aparece el contexto canónico ‘operación igual resultado’ con alguna de las cantidades como incógnita.

Comenzaremos nuestro análisis por los contextos aritméticos y a continuación los no aritméticos.

3.3.1. Contextos Aritméticos

En la Tabla 3 se recoge los porcentajes de cada uno de los contextos aritméticos por curso y editorial. El contexto operación igual resultado es con diferencia el más frecuente. La editorial Vicens Vives destaca por la utilización del signo igual en esta forma en los dos cursos, seguida de la editorial SM.

Tabla 3: Porcentajes de los distintos contextos aritméticos.

		SM		*ANAYA*		*BRUÑO*		*VICENS VIVES*	
		1º	*2º*	*1º*	*2º*	*1º*	*2º*	*1º*	*2º*
Operación = resultado		93,43	86,58	84,43	69,53	61,88	85,98	96,54	96,67
Operación ambos lados(*)	misma operación	1,39	0	0	3,43	0	2,88	0	0
	distinta operación	0	6,88	0	8,58	0	0	0	0
	TOTAL	1,38	6,88	0	12,02	0	2,88	0	0
Resultado = Operación		1,04	1,18	8,61	4,72	33,75	7,91	1,04	0,18

(*) En el contexto operación en ambos lados hemos separado las situaciones en las que las operaciones que aparecían a ambos lados eran del mismo tipo (i.e., las dos sumas), o si eran de distintos tipo (i.e., una suma y la otra multiplicación).

En general, parece que dicho contexto disminuye de primer curso a segundo excepto en la Editorial Bruño. El porcentaje del contexto canónico en primer curso es menor debido a la aparición del signo igual en el contexto no canónico resultado igual operación en las últimas páginas que se relaciona con el cálculo mental (ver Figura 1). El ejercicio de la forma 5 = 4 + ? utiliza el signo igual, y sin embargo, los ejercicios del tipo 1 + 2 no lo utilizan, por lo que, aunque aparecía con más frecuencia la expresión a ± b, al no estar presente el signo igual, se dispara el porcentaje del contexto que tiene la operación a la derecha.

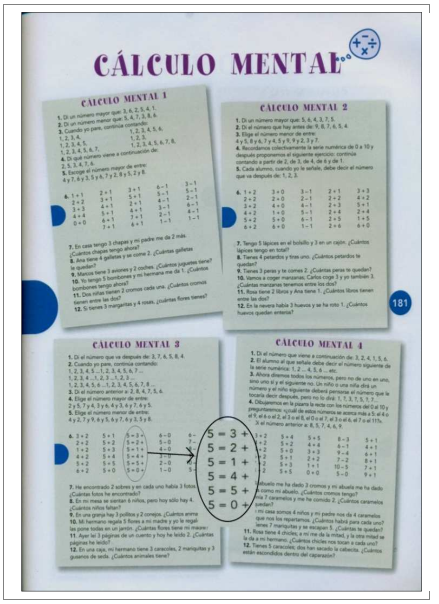


Figura 1: Páginas con ejercicios de cálculo mental del libro de primero de Ed. Bruño.

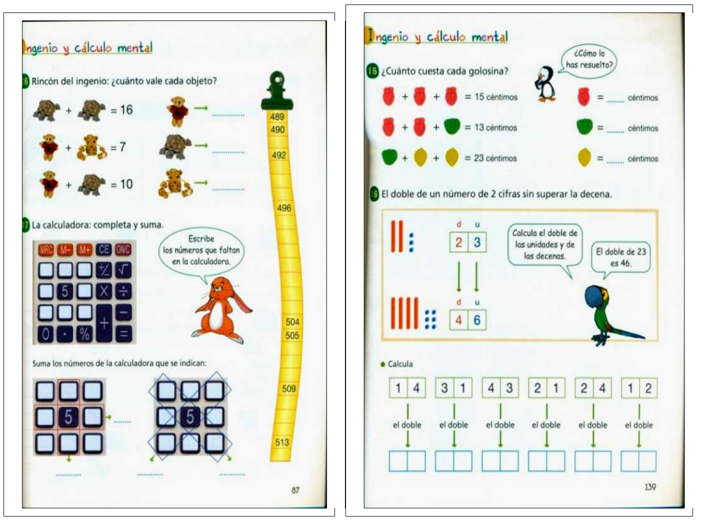


Figura 2: Contextos aritméticos canónicos con imágenes en la editorial Vicens Vives

El uso del signo igual en la calculadora también se ha incluido en este contexto. Cuando realizamos un cálculo marcamos la operación y seguidamente el signo igual como indicador de buscar el resultado, lo que implica un contexto operacional para el signo igual. Este uso se puede encontrar en los dos cursos de la editorial Vicens Vives y en el segundo curso de la editorial Bruño.

En un número mínimo de ocasiones aparecen expresiones de la forma operación igual resultado utilizando objetos como sumandos (ver Figura 2). Por ejemplo, en la editorial de Vicens Vives utilizan un objeto que será una incógnita a la que habrá que darle un valor. O incluso, hay una actividad (ver Figura 2) en la que parece tres igualdades con varias figuras en los sumandos, en las que hay que averiguar el valor de todas las figuras, como en un sistema de ecuaciones algebraicas.

El hecho de que hayamos encontrado un alto porcentaje de páginas en los libros de texto en las que aparece el signo igual en la forma aritmética canónica coincide con lo visto en los trabajos anteriores. McNeil et al. (2006) encontraron que el contexto más frecuente era el contexto operación igual resultado, que coincide con lo aquí obtenido.

Un contexto importante para adquirir una interpretación relacional del signo igual según los estudios previos es el que tiene operaciones en ambos lados del signo igual (p.372) (ver tabla 3). De nuevo encontramos que este contexto aparece un número muy bajo de veces, a pesar de ser el contexto que más favorece la adquisición de un significado relacional del signo según McNeil et al. (2006), entre otros.

Señalar en este punto que en el segundo curso se introducen las tablas de multiplicar, y la gran mayoría de los contextos con operaciones a ambos lados del signo igual eran del tipo ‘a + a + a + a = 4 × a’. Las editoriales Vivens Vives y Bruño explican las tablas de multiplicar exponiendo en una igualdad la suma reiterada con el resultado (p.e., 3 + 3 + 3 = 6) y en otra igualdad el producto (p.e., 3 × 2 = 6) como se puede ver en la siguiente figura, por lo tanto el contexto con operaciones diferentes en ambos lados del signo igual no aparece.

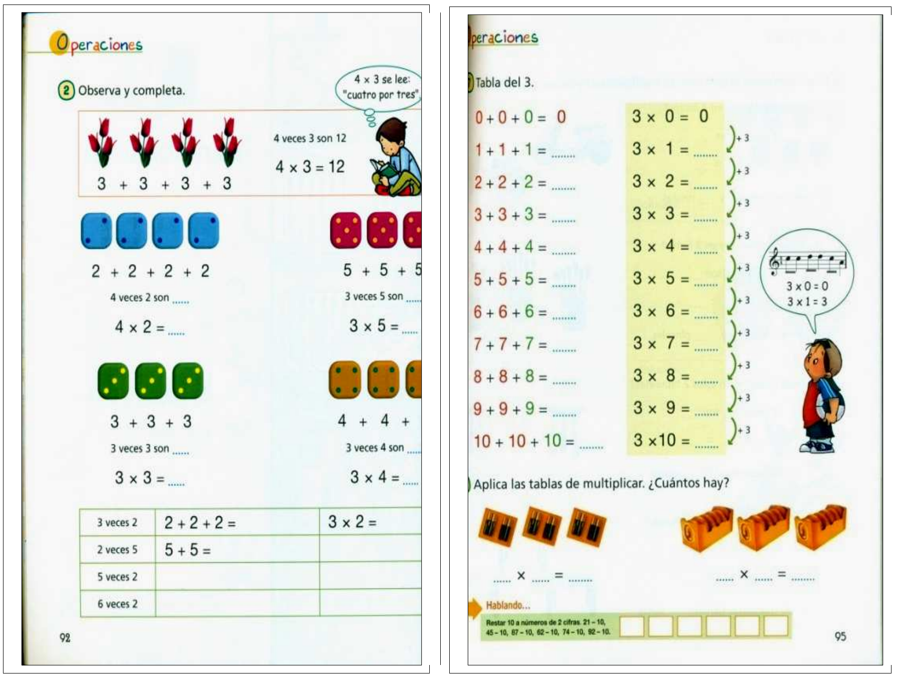


Figura 3: Multiplicación en Vicens Vives.

Sin embargo, las editoriales Anaya y SM utilizan la igualdad entre la suma reiterada y el producto del número de veces que se suma el número (Figura 4). Por esta razón el porcentaje de apariciones de este contexto es mayor.

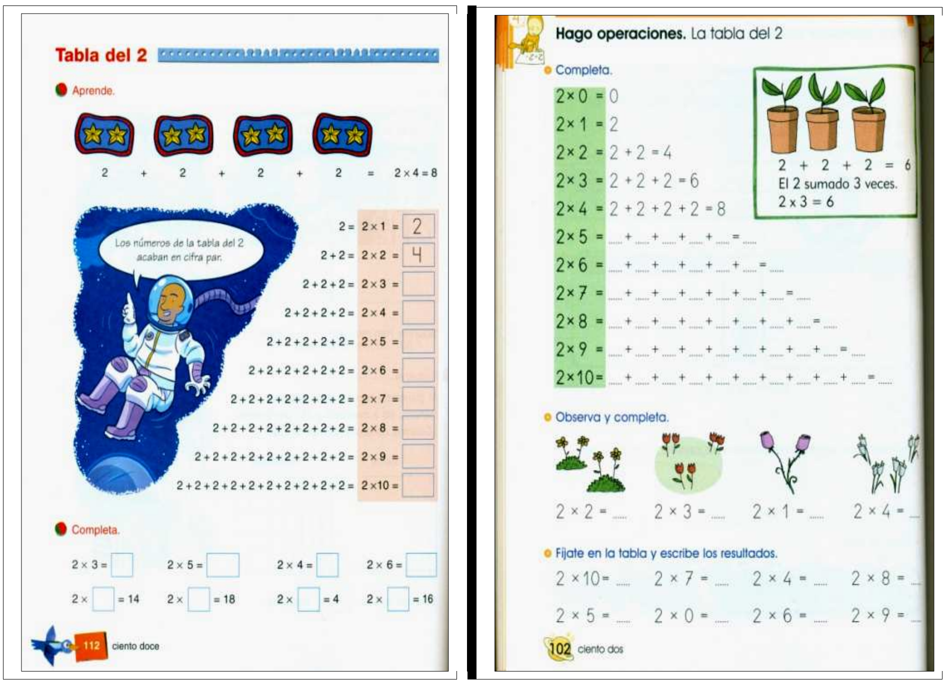
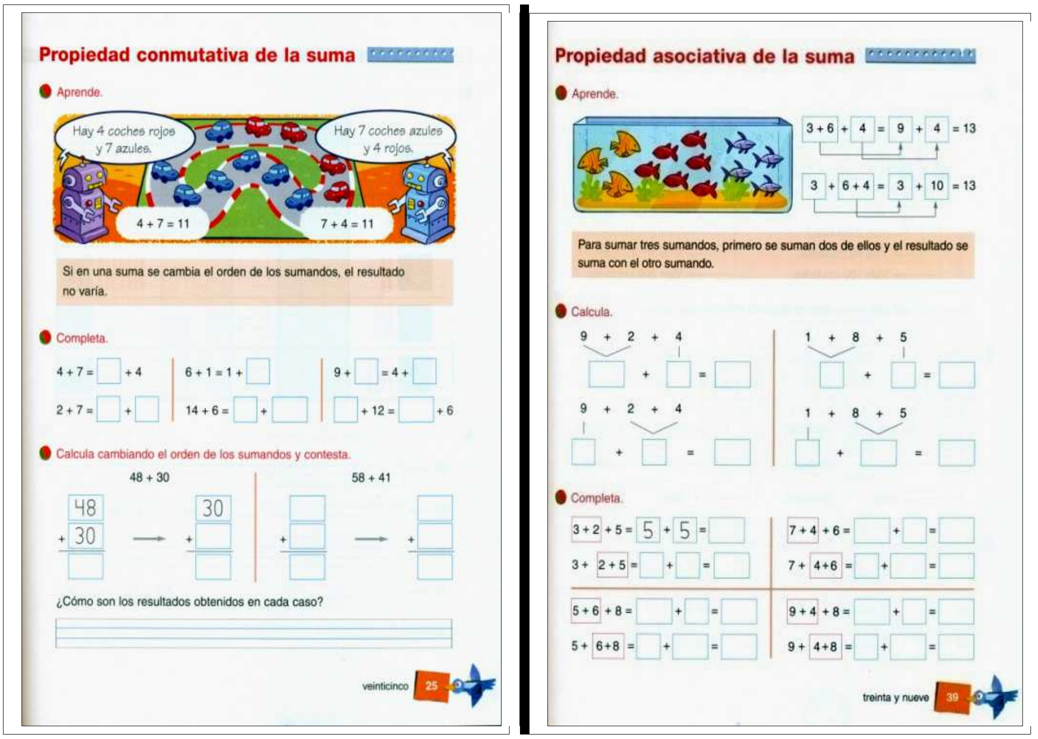


Figura 4: Multiplicación en Anaya y SM


Propiedad conmutativa de la suma

Aprende.

Hay 4 coches rojos y 7 azules.

Hay 7 coches azules y 4 rojos.

4 + 7 = 11

7 + 4 = 11

Si en una suma se cambia el orden de los sumandos, el resultado no varía.

Completa.

4 + 7 = ☐ + 4 | 6 + 1 = 1 + ☐ | 9 + ☐ = 4 + ☐

2 + 7 = ☐ + ☐ | 14 + 6 = ☐ + ☐ | ☐ + 12 = ☐ + 6

Calcula cambiando el orden de los sumandos y contesta.

48 + 30 | 58 + 41

¿Cómo son los resultados obtenidos en cada caso?

veinticinco 25

Propiedad asociativa de la suma

Aprende.

3 + 6 + 4 = 9 + 4 = 13

3 + 6 + 4 = 3 + 10 = 13

Para sumar tres sumandos, primero se suman dos de ellos y el resultado se suma con el otro sumando.

Calcula.

9 + 2 + 4 | 1 + 8 + 5

9 + 2 + 4 | 1 + 8 + 5

Completa.

3 + 2 + 5 = 5 + 5 = ☐ | 7 + 4 + 6 = ☐ + ☐ = ☐

3 + 2 + 5 = ☐ + ☐ = ☐ | 7 + 4 + 6 = ☐ + ☐ = ☐

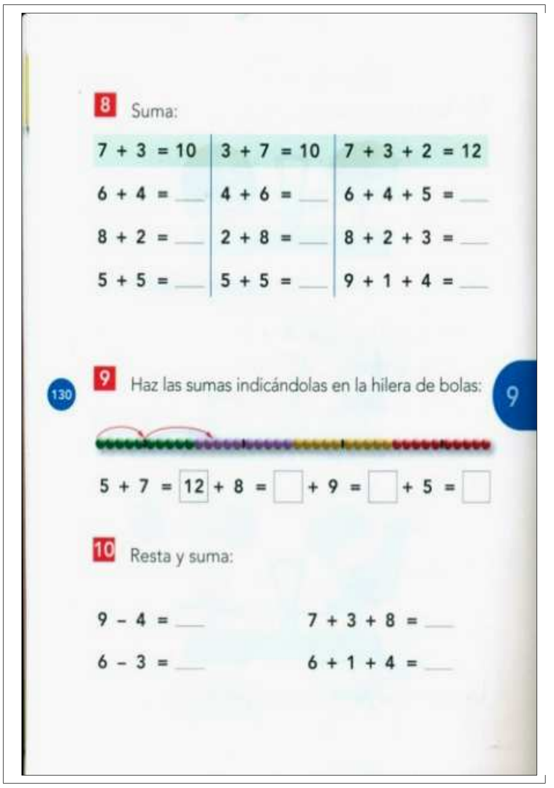
5 + 6 + 8 = ☐ + ☐ = ☐ | 9 + 4 + 8 = ☐ + ☐ = ☐

5 + 6 + 8 = ☐ + ☐ = ☐ | 9 + 4 + 8 = ☐ + ☐ = ☐

treinta y nueve 39

Figura 5: Propiedades conmutativa y asociativa en Ed. Anaya.

La editorial Anaya y SM recurre también al contexto operaciones en ambos lados del signo igual' en la definición de las propiedades conmutativa y asociativa (ver figura 5).


8 Suma:

7 + 3 = 10	3 + 7 = 10	7 + 3 + 2 = 12
6 + 4 = ___	4 + 6 = ___	6 + 4 + 5 = ___
8 + 2 = ___	2 + 8 = ___	8 + 2 + 3 = ___
5 + 5 = ___	5 + 5 = ___	9 + 1 + 4 = ___

130

9 Haz las sumas indicándolas en la hilera de bolas:

5 + 7 = 12 + 8 = ☐ + 9 = ☐ + 5 = ☐

10 Resta y suma:

9 − 4 = ___ | 7 + 3 + 8 = ___

6 − 3 = ___ | 6 + 1 + 4 = ___

9

Figura 6: Concatenación de 'operación igual resultado' en 1º de Ed. Bruño.

En la Editorial Bruño aparece en dos ocasiones una expresión clara de utilización unidireccional del signo igual (figura 6). Este contexto no lo podemos considerar como operación en ambos lados del signo igual ya que en la sentencia 5 + 7 = 12 + 8 = _ + 9 = _ + 5 = _, el signo igual no significa que el valor de la operación de la izquierda sea igual al valor de la operación de la derecha. Lo que realmente se está utilizando es el contexto operación igual resultado concatenado varias veces.

Otro de los contextos que más favorecen interpretación relacional del signo igual es el contexto aritmético resultado igual operación según lo anterior (ver tabla 3). Todas las editoriales no superan un 10% de este tipo de contextos excepto la editorial Bruño. Como hemos comentado, el libro de primero de la editorial Bruño presenta un porcentaje más alto que el resto de las editoriales en el contexto resultado igual operación. Esto es debido a la presentación de unas actividades para ejercitar el cálculo mental en las últimas páginas de libro, aparecen ecuaciones del tipo ‘a = b + _’. (Figura 1).

El resto de editoriales utiliza este contexto para descomponer números en decenas y unidades, es decir, en actividades de descomposición del sistema numérico decimal.

En resumen, en los contextos aritméticos, el que más aparece en todos los libros de texto es la forma ‘operación igual resultado’ (McNeil et al., 2006, p. 372), que lleva a una interpretación operacional según hemos visto en el marco teórico.

3.3.2. Contextos no aritméticos

Por lo que se refiere a los contextos no aritméticos, Seo & Ginsburg (2003) concluyeron que este tipo de contextos ayudaba a los niños a construir un significado de equivalencia numérica del signo igual. En la siguiente tabla se pueden observar los porcentajes en los que aparece el signo igual en ese contexto, respecto al total en cada libro.

Como se puede observar, en ninguno de los libros analizados los porcentajes son altos. El más destacado es el de la editorial Anaya, en segundo curso, en el apartado correspondiente al Sistema Numérico Decimal.

Tabla 4: Porcentaje de los distintos contextos no aritméticos respecto al total.

Curso	*Libro de texto*	*Comparación*	*Medida*	*Monedas*	*Sistema decimal*	*Otros*
1	Vicens Vives – Mundo de Colores	1,04	0	0	1,04	0
	Anaya – Salta a la vista	0	0	0	3,69	3,28
	SM – Trampolín	3,46	0	0	0,69	0
	Bruño – Lapiceros	0,63	0	3,75	0	0
2	Vicens Vives – Mundo de Colores	0	0,35	0,18	1,93	0,70
	Anaya – Salta a la vista	0,29	2,58	0,29	10,44	0,14
	SM – Trampolín	0,17	2,01	0,17	3,02	0
	Bruño - Lapiceros	0,36	0,72	1,44	0,36	0,36

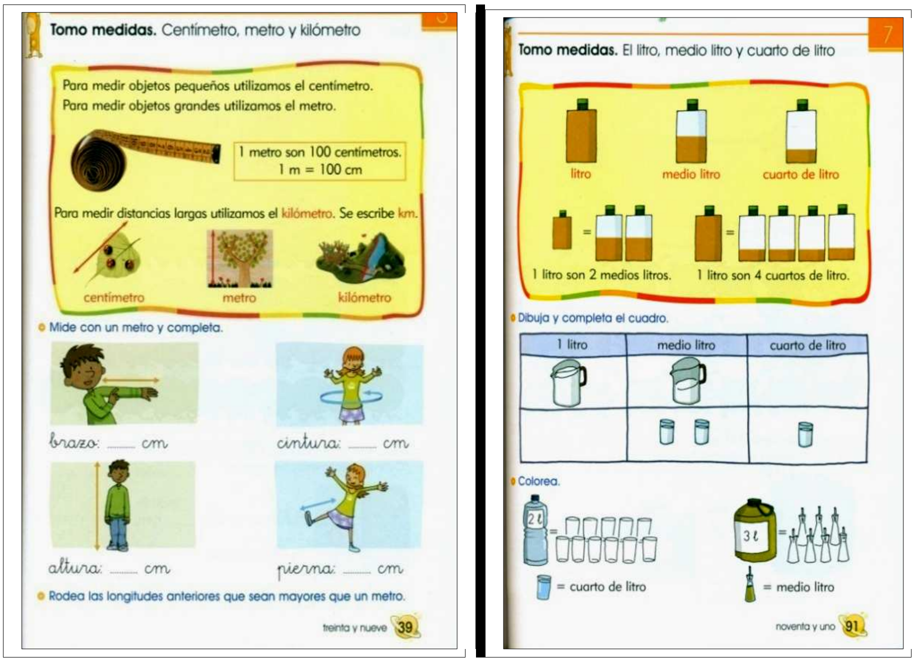


Figura 7: Medida en 2º de SM.

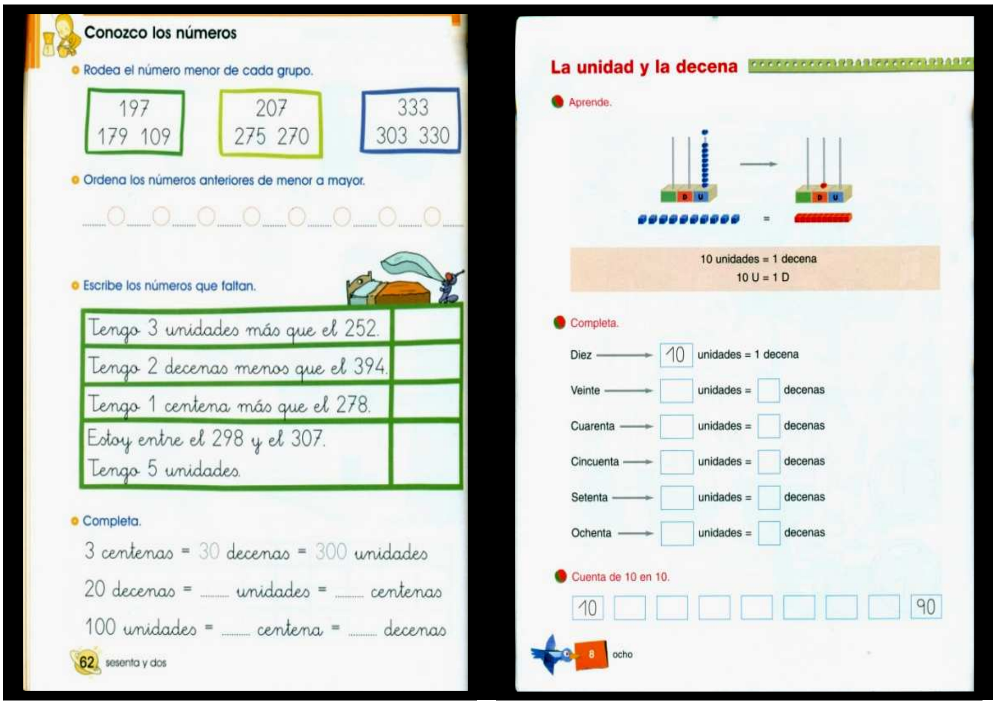


Figura 8: Sistema decimal en 2º de SM y Anaya.

En la Editorial SM, la primera aparición del signo igual se produce en el contexto no aritmético, simplemente define los signos = y ≠ para comparar cantidades sin operaciones aritméticas. En Bruño y Vicens Vives también proponen algunas actividades para diferenciar las relaciones de igualdad, mayor que y menor que. Estas actividades las englobamos en el contexto de comparación y, como podemos observar en la tabla 7, obtienen un porcentaje muy bajo.

Los contextos no aritméticos relacionados con la medida, apenas aparecen y tan solo se muestran algunos ejemplos con gráficos e imágenes que representa estas unidades y sus equivalencias (Figura 7).

La equivalencia de monedas tampoco suele estar presente y la única referencia se produce en la editorial Bruño.

Con respecto al Sistema Numérico Decimal, las equivalencias expresadas en unidades, decenas y centenas resultan escasas (ver, figura nº 8). En el libro de segundo curso de la editorial Anaya aparecen con un porcentaje de poco más del 10% equivalencias de cantidades expresadas en unidades, decenas y centenas. Las demás editoriales no superan ninguna un 3,7% en ninguno de los cursos. Este contexto debe ser habitual en los libros de primer ciclo pues es cuando se introduce el concepto de decena, centena y millar.

Por último, aparecen igualdades del tipo a = 1. Estos los clasificamos en 'otros contextos no aritméticos'.

4. Conclusiones

Los resultados obtenidos reiteran los resultados de los estudios precios, ya que la mayoría de las veces en las que aparece el signo igual en los libros de texto se produce en contextos aritméticos. Profundizando en estos contextos, los estudiantes del primer ciclo de Educación Primaria encuentran el signo igual en el contexto aritmético 'operación igual resultado' mucho más frecuentemente que en los demás. Como hemos visto en la primera parte de nuestro trabajo, este contexto favorece el significado de operador del signo igual lo que les impide alcanzar una comprensión completa de la relación que representa dicho signo. Por el contrario, los contextos en los que aparecen las operaciones en ambos lados del signo igual o la operación al lado derecho apenas están presentes. Sin embargo, en los trabajos de McNeil et al. (2006) hemos tenido ocasión de ver que son estos contextos los que ayudan a los estudiantes a adquirir una interpretación relacional del signo igual. Por lo tanto, los contextos aritméticos presentes en los libros de texto conllevan a un significado operacional del signo igual.

También hemos observado que hay muy pocos contextos no aritméticos como la equivalencia de monedas, medida y comparación de cantidades, que según los trabajos de Seo & Ginsburg (2003) ayudan a percibir ese significado de relación de equivalencia numérica que tiene el signo igual.

Hemos encontrado incluso un uso indebido del signo igual en el que se concatenan varios cálculos aritméticos, lo que como vimos en los trabajos de Berh et al. (1980) conlleva a un uso unidireccional del signo igual y por tanto, una vez más un significado incorrecto del signo igual.

Como conclusión, los contextos que encontramos en los libros del primer ciclo de primaria favorecen una interpretación operacional del signo igual, lo que podría implicar una dificultad a la hora de adquirir un significado equivalencia numérica del signo igual. Esta comprensión como operador que parece provocar los libros de texto en primero de Primaria corre peligro de obstaculizar el aprendizaje de un significado más completo si no se expone a los alumnos a situaciones más variadas de uso del signo igual. Una instrucción basada en contextos que dan una imagen de operador del signo igual puede suponer problemas a la hora de extender su significado.

En los estudios previos hemos visto que basando el aprendizaje de la aritmética en el pensamiento relacional de tal forma que veamos las expresiones como una totalidad y intentemos trabajar las relaciones entre las cantidades que hay a un lado y otro del signo, podríamos alcanzar un aprendizaje más próximo al pensamiento algebraico. Trabajar sobre una variedad de expresiones aritméticas más amplia centrando la atención en las relaciones y propiedades de las cantidades y operaciones podría ayudar a adquirir una comprensión completa del signo igual.

No obstante, la información que llega a los niños no depende sólo de los libros de texto. En la instrucción las actividades planteadas por el profesor y otros materiales complementarios que se utilizan en el aula, pueden mostrar otra imagen diferente del signo.

En trabajos posteriores, comprobaremos si en los cursos sucesivos los contextos que aparecen en los libros de texto siguen reforzando el sentido operacional del signo o por el contrario, se presentan contextos que favorezcan una interpretación relacional. Además, analizaremos los materiales complementarios de aula y las actividades que proponen los profesores. El conjunto de todos estos factores dará una información más completa de la presencia del signo igual en la instrucción de las Matemáticas, y así poder intervenir en la enseñanza de la aritmética.

Bibliografía

Behr, M. J., Erlwanger, S., y Nichols, E. (1980). How Children View the Equals Sign. *Mathematics Teaching*, 92, 13-15.

Carpenter, T.P., Franke, M. L., y Levi, L. (2003). *Thinking Mathematically: Integrating Arithmetic and Algebra in Elementary School*. Portsmouth, England: Heinemann.

Carpenter, T.P., Levi, L., Franke, M. L. y Zeringue, J. K. (2005). Algebra in Elementary School: Developing Relational Thinking. Madison. *ZDM*. 37(1), 53-59.

Essien, A. y Setati, M. (2006). Revisiting the Equal Sign: Some Grade 8 and 9 Learners' Interpretations. University of the Witwatersrand, Johannesburg, South Africa. *African Journal of Research in SMT Education*, 10(1), 47-58.

Hunter J. (2007). Relational or Calculational Thinking: Students Solving Open number Equivalence Problems. En J. Watson & K. Beswick, *Mathematics: Essential Research, Essential Practice 1*, (pp. 421-429). Massey University: MERGA.

Knuth, E.J., Alibali, M.W., McNeil, N.M., Weinberg, A. y Stephens, A.C. (2005). Middle School Students' Understanding of Core Algebraic Concepts: Equivalence & Variable. *ZDM* 37(1), 68-76.

Knuth, E.J., Stephens, A.C., McNeil, N.M., Alibali, M.W. (2006). Does Understanding the Equal Sign Matter? Evidence from Solving Equations. *Journal for research in Mathematics Education* 37(4), 297-312.

McNeil, N.M. y Alibali, M.W. (2005). Why Won't You Change Your Mind? Knowledge of Operational Patterns Hinders Learning and Performance on Equations. *Child Development*, 76(4) 883-899.

McNeil, N.M., Grandau, L., Knuth, E.J., Alibali, M.W., Stephens, A.C., Hattikudur, S. et al. (2006). Middle-School students' understanding of the Equal sign: The Books They Read can't Help. *Cognition and Instruction*, 24(3), 367-385.

Molina, M. (2006). *Desarrollo de pensamiento relacional y comprensión del signo igual por alumnos de tercero de educación primaria.* Tesis doctoral.Granada:

Departamento de Didáctica de la Matemática, Universidad de Granada. Disponible en http://cumbia.ath.cx:591/pna/Archivos/MolinaM072822.PDF.

Molina, M. (2009). Una propuesta de cambio curricular: integración del pensamiento algebraico en educación primaria. PNA, 3(3), 135-156.

Moliner, M. (2007). *Diccionario de uso del Español*. Madrid: Editorial Gredos.

Morris, A. K. (2003, Spring Edition). The Development of Children's Understanding of Equality and Inequality Relationships in Numerical Symbolic Contexts. *Focus on Learning Problems in Mathematics*, 25(2), 18-51.

National Council of Teachers of Mathematics (2000). *Principles and standars for school mathematics*. Reston, VA: Autor.

Seo K.H., Ginsburg, H.P (2003). "You've Got to Carefully Read de Math Sentence…": Classroom Context and Children's Interpretations of the Equal Sign. En A. J. Baroody y A. Dowker (Eds), *The development of arithmetic concepts and skill: constructing adaptive expertise* (pp. 161, 178). Mahwah NJ: Lawrence Erlbaum Associates.

Anexo: Libros de Texto analizados

Fernández, B., Santaolalla, E., Monzó, A., Ferrandíz, B., Salomó, X. (2007). *Matemáticas. 2º Primaria. Proyecto Trampolín*. Madrid: España-Ediciones SM-FSM.

Ferrero, L., Martín, M. G., Jiménez, M. C. (2007). *Matemáticas 1: primaria, primer ciclo. Proyecto Salta a la vista*. Madrid: GRUPO ANAYA.

Ferrero, L., Martín, M. G., Jiménez, M. C. (2007). *Matemáticas 2: primaria, primer ciclo. Proyecto Salta a la vista*. Madrid: GRUPO ANAYA.

Fraile, J. (2008). *Matemáticas 1. Primer ciclo. Primer Curso. Mundo de Colores.* Madrid: Vicens Vives.

Fraile, J. (2009). *Matemáticas 2. Primer ciclo. Segundo Curso. Mundo de Colores*. Madrid: Vicens Vives.

Santaolalla, E., Monzó, A., Ferrandíz, B., Salomó, X. (2007). *Matemáticas. 1 Primaria. Proyecto Trampolín*. Madrid: España-Ediciones SM-FSM.

Torra, M. (2008). *Matemáticas 1. Educación Primaria, Primer Ciclo*. *Lapiceros*. Madrid: Bruño.

Torra, M. (2008). *Matemáticas 2. Educación Primaria, Primer Ciclo*. *Lapiceros*. Madrid: Bruño.

Mónica Ramírez García: Profesora de Didáctica de las Matemáticas en el Centro Superior de Estudios Universitarios La Salle, de la Universidad Autónoma de Madrid. **mramirez@lasallecampus.es**

Purificación Rodríguez Marcos: Profesora en el Departamento de Psicología Evolutiva y de la Educación de la Universidad Complutense de Madrid. **p.marcos@psi.ucm.es**

UNIÓN
REVISTA IBEROAMERICANA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA

Junio de 2011, Número 26, páginas 57-71
ISSN: 1815-0640

A planilha como suporte à compreensão dos conceitos das funções afim e quadrática

Elisabete Rambo Braga; Lorí Viali

Resumo

Esta investigação teve como objetivo a análise das potencialidades da planilha como recurso auxiliar na compreensão dos conceitos das funções afim e quadrática. Como suporte teórico foi utilizado a teoria dos registros de representações semióticas de Raymond Duval. As atividades de coordenação dos registros de representação algébrico, tabular e gráfico das funções tanto afim quanto quadráticas foram analisadas quanto a possibilidade de transferência entre esses registros. Concluiu-se que a utilização da planilha promoveu a compreensão desses conceitos no que diz respeito a mobilização entre as suas várias representações.

Abstract

This study investigated the spreadsheet potential as an auxiliary resource to facilitate the understanding of the concepts of linear and quadratic functions. The theory of semiotic representation registers of Raymond Duval was used as a theoretical framework. The activities of registers coordination involving the algebraic, tabular and graphical representation were analyzed concerning the possibilities of exchange among these registers. It was concluded that the spreadsheet promoted the comprehension of the concepts in regards to the mobilization among its representations.

Resumen

Este estudio tuvo como objetivo analizar el potencial de la hoja de cálculo como ayuda en la comprensión de los conceptos de funciones afín y cuadrática. Fue utilizado como soporte teórico la teoría de las representaciones semióticas de los registros de Raymond Duval. Las actividades de coordinación de los registros de la representación algebraica, de tabla y gráfica, tanto de la función afín cuanto cuadrática fueran analizadas cuanto la posibilidad de transferencias entre estos registros. Se concluyó que el uso de hojas de cálculo ha promovido la comprensión de estos conceptos con respecto a la movilización entre sus distintas representaciones.

1. Introdução

O estudo de funções, nas séries finais do ensino fundamental, tem como finalidade a observação de regularidades, a descrição de generalizações de padrões numéricos ou geométricos e a utilização da linguagem matemática para expressar fatos genéricos.

Os Parâmetros Curriculares Nacionais do Ensino Fundamental (BRASIL, 1998, p.81) reforçam essa idéia, ao destacar que no quarto ciclo (7ª e 8ª séries):

o ensino da Matemática deve visar o desenvolvimento do pensamento numérico, por meio de situações que levem o aluno a [...] observar regularidades e estabelecer leis matemáticas que expressem a relação de dependência entre variáveis.

Na educação básica, verifica-se, atualmente, que é dada ênfase na representação algébrica, ocasionando dificuldades na compreensão da variação entre as grandezas relacionadas entre si por uma lei física ou de formação. De acordo com Borba e Penteado (2005), as representações tabulares e gráficas praticamente não são utilizadas, devido à dificuldade em construí-las, empregando apenas os recursos de lápis e papel.

A Matemática, de forma mais ampla, visa ao desenvolvimento do raciocínio lógico e do pensamento crítico, por meio do estudo das regularidades provenientes da observação do mundo real e das abstrações humanas. Nesse sentido, o aprendizado de funções contribui para o alcance de seus objetivos, à medida que possibilita aos alunos o desenvolvimento de formas de raciocínio e a comunicação, utilizando as representações algébrica, tabular e gráfica.

É com a ideia de discutir essas possibilidades de representações que nos propomos a analisar o uso da planilha, como um facilitador na aprendizagem da noção das funções afim e quadrática, baseando-se na teoria de Raymond Duval[1] dos Registros de Representações Semióticas[2].

2. A compreensão do conceito de função e a teoria de Duval

Por meio da análise histórica do desenvolvimento do conceito de função, percebe-se que essa noção foi reformulada e ampliada a partir de suas representações semióticas: algébrica, tabular e gráfica. De acordo com Duval (2003, p.13): “É suficiente observar a história do desenvolvimento da matemática para ver que o desenvolvimento das representações semióticas foi uma condição essencial para a evolução do pensamento matemático.”

Moura e Moretti (2003, p. 69) destacam que o desenvolvimento do conceito de função foi marcado por etapas:

Na Antiguidade há o estudo de casos particulares de dependência entre duas variáveis não havendo, contudo, a noção geral de quantidade variável e funções. Já na Idade Média estas noções gerais são expressas pela primeira vez sob a forma geométrica e mecânica, mas na qual cada caso concreto de dependência entre duas quantidades é definido por uma descrição verbal ou por um gráfico. E só no Período Moderno, final do século XVI e especialmente durante o século XVII, que expressões analíticas e funções começam a prevalecer. Estes estágios refletem, na realidade, o caminho percorrido pelo homem através da história rumo à generalização e à formalização do conceito de funções. O processo de abstração demonstra uma real e profunda compreensão do conceito ao mesmo tempo em que é fator de construção desta compreensão.

Ao analisar os referidos aspectos históricos verifica-se que as representações tabular, gráfica e algébrica estava presentes. E, portanto, a história da Matemática

[1] Filósofo e psicólogo francês, seus estudos são direcionados à psicologia cognitiva, enfatizando a atividade matemática e os problemas referentes à sua aprendizagem.
[2] Denominação utilizada para a ciência geral do signo; semiologia.

mostra a necessidade de se desenvolver o conceito de função por meio da articulação de suas representações e não como um enfoque isolado.

A atividade matemática consiste na mudança das representações, de forma intrínseca, por meio de dois tipos de transformações: tratamento e conversão (DUVAL, 2003; 2006). Para Duval (2003; 2006), os tratamentos são transformações de representações dentro de um único sistema de registro. As operações realizadas, em um mesmo sistema de notação, podem ser consideradas um exemplo de tratamento; enquanto que a transformação que exige uma mudança de registro, sem a troca do objeto, é denominada conversão. Esse aspecto é mais complexo que o tratamento, pois exige que o sujeito reconheça o objeto nas suas diferentes representações.

No caso das conversões, os estudantes podem não reconhecer o objeto ao articularem os diferentes tipos de registros, o que ocasiona dificuldades na compreensão do conceito envolvido, esse obstáculo na aprendizagem é denominado por Duval (2003, p. 15) de “fenômeno de não-congruência”.

Os objetos de estudos na matemática, diferentemente da física, da química, da biologia, e de outros domínios do conhecimento científico, não são acessíveis por meio da percepção ou de instrumentos. É necessária a utilização de uma linguagem simbólica e de suas representações semióticas para que os conceitos matemáticos sejam compreendidos Duval (1999; 2003; 2006). O mesmo autor afirma que, na Matemática, encontra-se a maior quantidade de representações semióticas, sendo que algumas são específicas desse domínio como a linguagem algébrica e as notações.

Verifica-se que as dificuldades dos alunos, na construção do conceito de função, concentram-se na não articulação entre duas ou mais representações de um mesmo objeto, restringindo-se, apenas, ao tratamento de um único tipo de registro. Em alguns casos, negligencia-se o fato de que o estudo das funções contempla os diferentes tipos de representação de forma intrínseca, optando-se por enfatizar apenas o aspecto algébrico.

O aluno compreende determinado tópico à medida que ele realiza a coordenação entre as representações, realizando as devidas conversões, isto é, modificando a forma como o conhecimento é representado, objetivando a complementaridade entre esses registros. Em consonância com a teoria de Duval, Damm (1999) enfatiza que não há construção de um determinado conhecimento matemático sem que haja mobilização entre seus registros.

É imprescindível a articulação entre duas representações de um mesmo tópico a fim de que haja apreensão do conceito. A mudança de registro não implica apenas a alteração da forma de tratamento de um mesmo objeto, mas, para haver a articulação entre esses aspectos, é necessário explicitar suas propriedades e diferenças, sendo essa uma condição essencial para a compreensão de um conceito (DUVAL, 2003).

O acesso a um determinado objeto matemático ocorre apenas por meio de sua representação, por isso é imprescindível que haja a distinção entre o objeto em questão e as suas representações. Ademais, de acordo com Duval (1999), para que haja o entendimento sobre um determinado tópico, de Matemática, não pode haver confusão entre o objeto e suas respectivas representações. Por exemplo, os números não devem ser identificados como dígitos e as figuras geométricas, mesmo construídas com precisão, representam casos particulares e não podem ser consideradas como provas para uma determinada propriedade.

Enfatiza-se, também, que ao fazer a transposição entre a representação algébrica de uma função e seu respectivo gráfico, diz-se que houve uma conversão da representação, conservando o objeto. Normalmente os gráficos são construídos no plano cartesiano a partir da localização de cada par ordenado, sendo que o valor da função f em um ponto (x, f(x)) é calculado por meio da expressão algébrica da função f. E, para a construção de uma nova representação gráfica, semelhante à anterior, todo o processo é repetido. No entanto, se forem consideradas todas as funções pertencentes a uma mesma "família", os demais gráficos podem ser construídos mediante movimentos geométricos, como, por exemplo, translação e simetria axial, possibilitando, dessa forma, a análise das alterações ocorridas na representação gráfica a partir da modificação dos parâmetros da expressão algébrica da função.

Moretti (2003, p.159) corrobora essa idéia ao afirmar que:

> [...] na translação de uma curva cuja forma já é conhecida, esse tipo de transformação pode contribuir para que o aluno perceba o traçado/eixo como uma imagem que representa um objeto descrito por uma expressão algébrica muito próxima de uma perspectiva preconizada nos trabalhos de Duval.

A tabela, o gráfico e a expressão algébrica de uma função propiciam uma representação parcial, com especificações próprias e, quando articuladas, permitem a complementaridade entre os registros, possibilitando a compreensão de novos aspectos sobre esse objeto de estudo.

3. A Planilha e a compreensão do conceito de função

Encontram-se disponíveis no mercado diversos programas que podem ser utilizados no processo de ensino e aprendizagem de Matemática. Muitos deles, apesar de apresentarem, em sua interface, bons recursos de hipermídia, reproduzem modelos tradicionais de ensino, nos quais os alunos testam seus conhecimentos, respondendo a exercícios repetitivos ou do tipo tutorias, lêem definições e propriedades, para, então, responder a questões relacionadas ao assunto tratado. Dentro da perspectiva de que o aluno é o construtor do próprio conhecimento matemático, existem programas em que é possível elaborar conjecturas, testar hipóteses, estabelecer relações e generalizar.

Em consonância com essa concepção, Morgado (2003) subdivide esses programas em dois subgrupos. Na primeira categoria, encontram-se os softwares projetados para fins educacionais e que podem ser utilizados como recursos pedagógicas. Dentre eles, destacam-se: Cabri-Géomètre, Modellus, Graphmatica, Logo e o Winplot. No segundo subgrupo, têm-se os aplicativos produzidos com finalidades mais amplas e que podem ser explorados com fins educativos. São os construtores e transformadores gráficos, calculadores numéricos, programas que viabilizam a criação e manipulação de banco de dados e as planilhas.

A planilha possui uma gama extensa de funções e fórmulas pré-programadas. As categoriais são divididas em: financeira, data e hora, matemática e trigonométrica, estatística, procura e referência, banco de dados, texto, lógica e engenharia. Isto facilita a utilização desse software no ensino fundamental e médio, pois praticamente não existe a necessidade de programação ou da utilização de comandos complexos. Nesse aspecto o aplicativo possui ainda a virtude de ter uma sintaxe simples e de fácil compreensão.

Morgado (2003, p 26) enfatiza a perspectiva de interação, ao fazer uso da planilha em atividades educacionais:

> É importante ressaltar que as construções por meio de planilhas eletrônicas possibilitam interatividade, ou seja, uma relação dinâmica entre as ações do aluno e as reações do ambiente, resultado de suas operações mentais. Os objetos matemáticos que podem ser representados na tela do computador (fórmulas, tabelas, gráficos, etc.) constituem-se na materialização de ações mentais dos alunos, utilizando os comandos disponíveis pelo aplicativo.

Devido à possibilidade de escrever equações em sintaxe própria e simples, executar cálculos com rapidez e propagar as atualizações e alterações de forma automática, é possível que o usuário se concentre no assunto principal sem perder o foco em outras tarefas auxiliares e paralelas. O software permite a construção gráfica, viabilizando a coordenação das múltiplas representações de uma função e, conseqüentemente, possibilitando a compreensão desse conceito. Além disso, alguns aspectos como, por exemplo, a translação e simetria de funções, podem ser facilmente construídas, com base nas vantagens mencionadas acima. Essas características, aliadas ao recurso de criação de gráficos, são aliados que facilitam o aprendizado.

4. Metodologia

Esta pesquisa foi desenvolvida de acordo com o paradigma pós-positivista, uma vez que, nessa concepção, a realidade é construída a partir da relação pesquisador/co-pesquisadores. Nesse modelo, o pesquisador participa do processo de forma gradual, pois está inserido no contexto em que se realiza a investigação.

A investigação utilizou-se da abordagem naturalística – construtiva. Nessa concepção, os sujeitos envolvidos - pesquisador e demais participantes - são considerados construtores da realidade, sendo valorizados seus conhecimentos prévios e suas percepções. Há, portanto, a superação da neutralidade: aspecto que permite ao pesquisador ser o principal responsável pela coleta de dados. Tais informações são, então, reunidas a partir do envolvimento com os fenômenos e são organizadas em categorias emergentes, objetivando a descrição, a interpretação e a teorização de forma a compreendê-las gradualmente.

A investigação foi desenvolvida com alunos da 8ª série (a grande maioria com idade de 14 anos) do ensino fundamental de uma escola particular de Porto Alegre. Esse estabelecimento apresenta cinco turmas desse nível, com cerca de trinta alunos cada uma. Há quatro Laboratórios de Informática, todo com dezoito computadores, todos com acesso à Internet. Os educandos utilizam os recursos computacionais de forma sistemática sob a orientação dos professores com atividades específicas em cada disciplina.

Inicialmente, foi aplicado um questionário composto por perguntas fechadas e algumas abertas com o objetivo de coletar informações dos participantes. O instrumento de coleta foi dividido em cinco partes. A primeira tendo como objetivo conhecer o perfil dos alunos participantes em relação às atividades mais freqüentes realizadas no computador e a média de horas diárias dedicadas à realização dessas tarefas. Já na segunda parte o propósito foi verificar a freqüência com que eram utilizados o processador de texto, a planilha, o software de apresentação, o correio eletrônico e o navegador, bem como a de levantar outras tecnologias que os estudantes poderiam estar utilizando. O terceiro bloco de perguntas destinou-se a apreciar a constância com que eram usados softwares específicos para a Matemática. A quarta parte destinou-se a verificar os conhecimentos dos respondentes em relação a planilha. O último bloco teve como propósito a identificação de algumas variáveis intervenientes no processo como a idade e o sexo dos respondentes, o ano de ingresso na escola e a escolaridade dos pais.

Ao se realizar a análise do questionário aplicado, constatou-se que os estudantes apresentam características semelhantes, tanto no que se referia ao uso do computador em suas atividades diárias e ao domínio de aplicativos, como também no que diz respeito ao conhecimento de recursos computacionais específicos para a aprendizagem da Matemática. Em função dessa homogeneidade das turmas, foram selecionados trinta alunos, de acordo com seus conhecimentos sobre a planilha. O grupo foi formado por quinze meninos e quinze meninas, sendo que doze deles nunca haviam trabalhado com a planilha, onze, algumas vezes, dois, com freqüência e cinco não tinham tido sequer conhecimento a respeito de tal recurso.

Assim a análise de toda as atividades realizadas foi feita a partir dos protocolos escritos desses trinta alunos. Nesse grupo, há discentes que apresentam características diferenciadas quanto ao conhecimento da planilha e à utilização desse recurso, objetivando-se, com isso, a investigação da apreensão do conhecimento de função numa classe heterogênea em relação a tais aspectos.

Embora a presente pesquisa seja de cunho qualitativo, a opção pela aplicação do primeiro questionário foi motivada pela necessidade de caracterizar inicialmente o grupo, quanto ao uso da tecnologia de informação e comunicação, para, então, selecionar um grupo menor de alunos, considerando a variável interveniente: familiaridade com o recursos computacionais, em especial com a planilha.

De acordo com Fiorentini e Lorenzato (2006, p. 117):

> [...] os questionários podem servir como uma fonte complementar de informações, sobretudo na fase inicial e exploratória da pesquisa. Além disso, eles podem ajudar a caracterizar e a descrever os sujeitos do estudo, destacando algumas variáveis [...].

Conforme Minayo (1998, p. 22): “O conjunto de dados quantitativos e qualitativos, porém, não se opõem. Ao contrário, se complementam, pois a realidade abrangida por eles interage dinamicamente, excluindo qualquer dicotomia”.

5. Apresentação e análise de atividades referentes às funções de primeiro e segundo graus

Estas atividades tiveram como objetivo proporcionar situações de aprendizagem que privilegiassem a complementaridade entre os registros algébrico, tabular e gráfico das funções afim e quadrática, conforme preconiza a teoria de Duval. Essa proposta foi efetivada mediante a utilização de um aplicativo, construído pela pesquisadora, que permite ao usuário visualizar as alterações tabulares e gráficas ocorridas, de forma simultânea, por meio da modificação dos parâmetros dessas funções. Damm (2008, p. 185) reforça a importância de se propiciar aos estudantes o trabalho com as diversas representações de um mesmo objeto, exemplificando essa posição por meio do desenvolvimento do conceito de função.

Por exemplo, quando trabalhamos com as funções, os gráficos, as tabelas e as equações são todos registros parciais desse objeto. Cada um desses registros é parcial e possui uma especificação própria. Perceber essas especificidades a cada registro e reforçá-las é um caminho para o entendimento do objeto como um todo.

Para a aplicação das tarefas, foram disponibilizados dois períodos de 50 minutos: um no turno da manhã e outro no da tarde. Ressalta-se, ainda, que um dos participantes não compareceu à aula nesse dia e que dois estiveram presentes apenas pela manhã, desse modo, seus roteiros ficaram incompletos.

A seguir, apresenta-se a descrição do aplicativo, abordando aspectos da sua construção e da sua utilização.

5.1. Descrição do aplicativo

O aplicativo para o estudo da função afim e quadrática foi desenvolvido sobre a a planilha Excel. Ele pode ser caracterizado por uma interface visível ao usuário, denominada de *front-end* e comandos ocultos denominados de *back-end*. O *front-end* é constituído por uma interface, em que se visualiza as representações das funções e por um formulário destinado a reunir e configurar as informações a serem usadas em cálculos e análises). O *back-end* consiste de vários procedimentos envolvendo algoritmos responsáveis pelo cálculo dos pontos utilizados na representação gráfica, pelo cálculo das raízes das funções (y = 0) e pela análise dos resultados. Para isto foram utilizadas funções do tipo SE ... ENTÃO ... encadeadas.

A planilha é um programa que fornece um ambiente (framework) computacional muito favorável para aplicativos dessa natureza, visto que a interação entre o front-end (formulário de interface) e o *back-end* (comandos ocultos) dá-se de modo simples e direto, bastando algumas vinculações entre células. No formulário (*front-end*), também foram utilizados controles (pequenos aplicativos que podem ser customizados), disponíveis na planilha, para variar os coeficientes das funções.

A interface do aplicativo é composta por três barras de rolagem (que determinam os valores dos coeficientes tanto da função afim quanto da quadrática), por uma tabela com valores pré-definidos para a variável independente e com os respectivos valores da variável dependente, calculados automaticamente e, finalmente, por um plano cartesiano, no qual são construídos os gráficos vinculados à referida tabela. Destaca-se, ainda que os usuários têm acesso aos zeros das funções, ao valor do discriminante (com a sua análise) juntamente com as coordenadas do vértice da função quadrática.

O conjunto de valores assumidos pelos parâmetros de cada função é formado por números inteiros entre -50 e 50. Eles podem ser modificados mediante cliques nas setas das barras de rolagem, ou então, arrastando-se o cursor à direita ou à esquerda. As modificações tabulares e gráficas são realizadas automaticamente pelo aplicativo, na medida, em que os parâmetros (coeficientes) são manipulados.

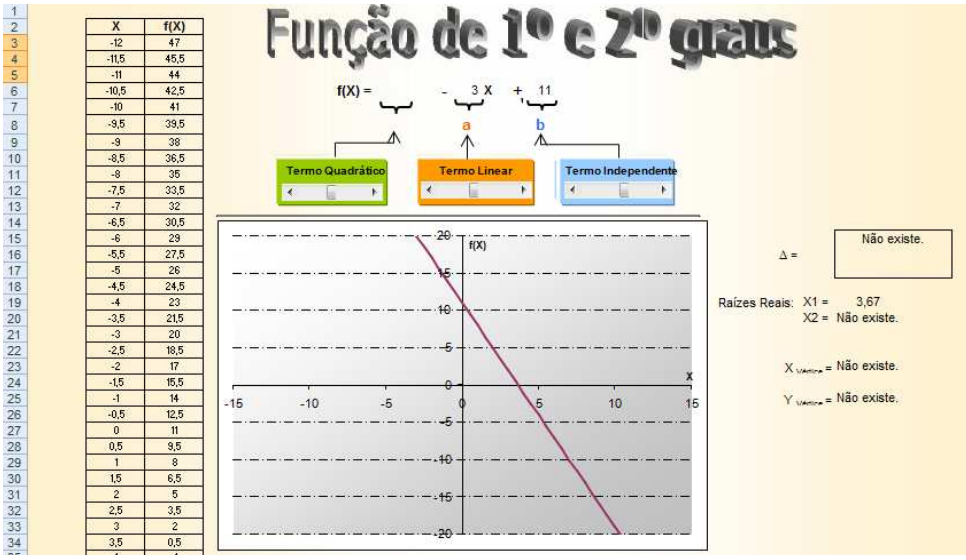


Figura 1 – Interface do aplicativo, exemplificando uma função afim

A Figura 1 exemplifica as representações algébrica, tabular e gráfica da função afim, enquanto que a

Figura **2** mostra um exemplo de uma função quadrática construídas com o recurso do aplicativo. Convém ressaltar que o aplicativo foi disponibilizado na intranet da escola e utilizado de maneira compartilhada por todos os alunos participantes ou não do experimento.

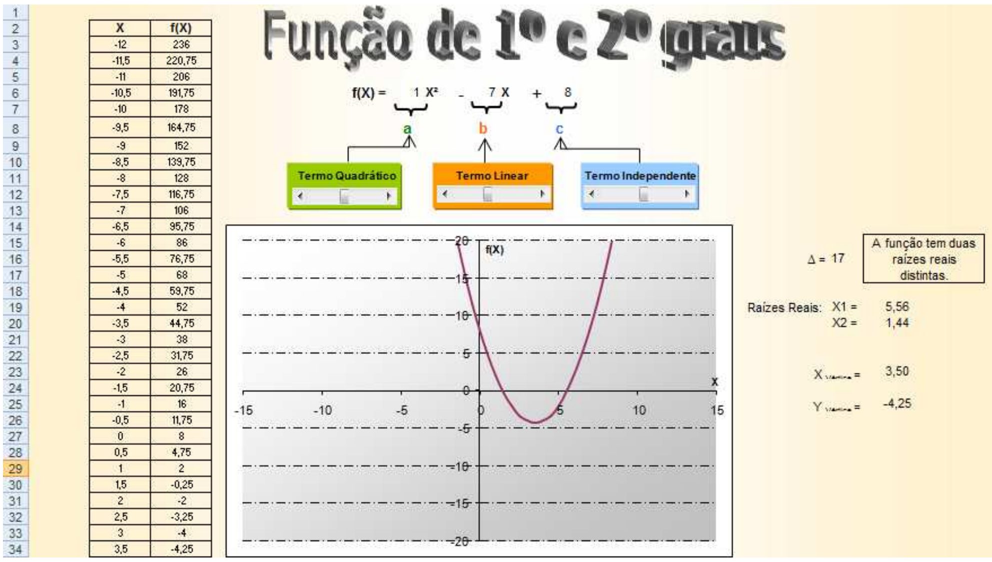


Figura 2 – Interface do aplicativo, exemplificando uma função quadrática

5.2 Apresentação e análise das atividades

As atividades foram introduzidas por meio de uma explicação sobre a utilização do aplicativo. *O aplicativo a ser utilizado nesta atividade visa à construção gráfica de funções de 1º e 2º graus, a partir da modificação dos parâmetros das respectivas funções. Para tanto, basta clicar nas setas de cada um dos termos: a da direita faz com que o coeficiente aumente o seu valor, e a da esquerda, diminua. Ou, então, podes movimentar a barra de rolagem para a direita ou para a esquerda.*

Num primeiro momento, os estudantes foram orientados a alterar os parâmetros das funções e a observar as modificações na tabela e no gráfico, a fim de se familiarizarem com os recursos disponibilizados pelo aplicativo. Nessa ocasião, os alunos foram incentivados a comparar as funções afim e quadrática, por meio da análise dos pontos de intersecção com os eixos das ordenadas e abscissas e do crescimento e/ou do decrescimento nas suas diferentes representações.

a) Utiliza o aplicativo para construir os gráficos das funções de 1º grau, determinadas nas atividades a_1, a_2 e a_3, e completa-as a seguir.

Atividade a_1 Função	O gráfico intercepta o eixo-y? Em qual(is) ponto(s)?	O gráfico intercepta o eixo- x ? Em qual(is) ponto(s)?	Para que valores de x a função é crescente?	Para que valores de x a função é decrescente?
f(x) = -10x				
f(x) = -5x				
f(x) = x				
f(x) =5 x				
f(x) = 10x				

Após essa exploração inicial, os discentes foram orientados a responder o roteiro, a seguir, composto por seis tabelas (três sobre função de 1º grau e três sobre de 2º grau) e por seis questões, que visavam à apreciação das regularidades apresentadas em cada uma das funções analisadas.

Dos vinte e nove respondentes, 58,6% responderam corretamente todos os itens da tabela acima; 17,2% escreveram, de forma incorreta, as coordenadas do ponto de intersecção do gráfico com os eixos, colocando apenas “0”. Houve, ainda, 10,3% que analisaram a função f(x) = 0 e não f(x) = x, conforme solicitado.

Destaca-se que 3,4% completaram a tabela conforme descrição feita nos dois itens anteriores e que outros 3,4% consideraram, erroneamente, f(x) = x e f(x) = 10x decrescente.

***a_{11})** Tu deves ter verificado que, quanto maior é o coeficiente **a** (coeficiente angular), maior é a inclinação da reta. Além disso, essas funções são sempre crescentes ou decrescentes. Qual a relação existente entre o coeficiente **angular** das funções de 1º grau e oseu crescimento ou o decrescimento?*

Dentre os participantes, 76% afirmaram que, quando o coeficiente angular é positivo, a função é crescente e, quando é negativo, é decrescente. Enquanto que 10,3% alunos analisaram o ângulo de inclinação das retas, descrevendo que, quanto maior fosse o coeficiente a, maior seria o ângulo de inclinação com o eixo das abscissas e menor será o ângulo em relação às ordenadas. Já, 10,3% dos estudantes, fizeram a apreciação de forma incorreta e 3,4% não responderam à questão.

Atividade a_2 Função	O gráfico intercepta o eixo y ? Em qual(is) ponto(s)?	O gráfico intercepta a o eixo x ? Em qual(is) ponto(s)?	Para que valores de x a função é crescente?	Para que valores de x a função é decrescente?
f(x) = x - 15				
f(x) = x - 10				
f(x) = x				
f(x) = x + 10				
f(x) = x + 15				

Inicialmente, foram analisadas e categorizadas as respostas dadas às duas primeiras colunas da tabela a_2, conforme mostra a Tabela 1:

Fazem parte da Categoria A as respostas que determinam as coordenadas do ponto de interseção com o eixo das ordenadas do tipo (0, y) e com o eixo das abscissas (x, 0). Foram reunidas, na Categoria B, as respostas que escreveram, de forma incorreta, as coordenadas do ponto de intersecção do gráfico com os eixos, colocando apenas o valor de x para a interseção com a abscissa e o valor y para a ordenada.

Na Categoria C, os alunos responderam incorretamente sobre o ponto de intersecção dos gráficos das funções f(x) = x -14 e f(x) = x + 15 com o eixo-x, visto que, no aplicativo, esses pontos não são obtidos por meio de inspeção visual. Para Duval (1999), não há entendimento de um determinado objeto sem sua visualização. Para esse autor, a visão permite o acesso direto ao objeto, enquanto a visualização é baseada “na produção de uma representação semiótica” (DUVAL, 199, p. 13) e torna visível tudo aquilo que não é acessível pela visão. Na Categoria D, fazem parte as respostas que apresentam, simultaneamente, as características das Categorias B e C. Enquanto que na Categoria E, foram reunidas as respostas que apresentam todas as coordenadas invertidas, do tipo (y, x). E, por fim, na Categoria F, tem-se essa mesma inversão apenas para as duas últimas funções.

Tabela 1 – Distribuição das respostas do item a_2

Categorias	Alunos	Percentual
A – Responderam corretamente todos os itens	14	48,4
B – Responderam, de forma incompleta, sobre as coordenadas dos pontos de intersecção com os eixos, omitindo a coordenada “0” em ambos os casos	3	10,3
C – Consideraram que as funções f(x) = x – 15 e ef(x) = x + 15 não interceptam o eixo das abscisas	6	20,7
D – Responderam, de forma incompleta, sobre as coordenadas dos pontos de intersecção com os eixos, omitindo a coordenada “0” em ambos os casos e consideraram que as funções f(x) = x – 15 e f(x) = x + 15 *e* não interceptam o eixo das abscisas	1	3,4
E – Inverteram as coordenadas dos pontos em todos os itens	1	3,4
F – Inverteram as coordenadas dos pontos nos dois últimos itens	2	6,9
G – Responderam, corretamente, apenas para a função f(x) = x	2	6,9
Total	29	100,0

Nas respostas dadas às duas últimas colunas, observou-se que 72,5% dos estudantes responderam corretamente todos os itens; 17,3% consideraram, de maneira incorreta, as duas últimas funções decrescentes; 3,4% avaliaram incorretamente as duas primeiras; e outros 3,4%, as três primeiras, também considerando-as decrescentes. Os demais responderam incorretamente todos os itens.

***a_{21})** Qual a relação existente entre o coeficiente **b** (coeficiente linear) das funções afins e seus respectivos gráficos?*

Apenas um aluno identificou que o coeficiente linear determina o ponto de intersecção do gráfico com o eixo das ordenadas e define quantas unidades o gráfico translada para cima (b > 0) ou para baixo (b < 0) no referido eixo. Enquanto que 31% dos integrantes fizeram referência que o coeficiente "b" determina o ponto de intersecção com o eixo das ordenadas e 38,1% mencionaram a translação ocorrida no gráfico no eixo das ordenadas, mediante a alteração do coeficiente "b".

Já 6,9% dos alunos destacam que os gráficos são paralelos entre si, sem mencionar a função do coeficiente "b". Observou-se, também, que 10,3% identificaram que as funções afins da tabela a_2 são estritamente crescentes, sem determinar a relação existente entre seus coeficientes lineares e os respectivos gráficos. Outros 10,3% responderam de forma incorreta ou não responderam à questão.

Atividade a_3 Função	O gráfico intercepta o eixo-y? Em qual(is) ponto(s)?	O gráfico intercepta o eixo-x? Em qual(is) ponto(s)?	Para que valores de x a função é crescente?	Para que valores de x a função é decrescente?
f(x) = -15				
f(x) = -10				
f(x) = 0				
f(x) = 10				
f(x) = 15				

Em relação às respostas dadas na tabela a_3, verificou-se que todos os alunos reconheceram que as funções não são crescentes, nem decrescentes. Consequentemente, serão apreciadas as respostas dos itens que analisam os pontos de interseção dos gráficos com os eixos.

Nas respostas dadas às duas primeiras colunas, observou-se que 31% dos discentes responderam de forma precisa, identificando os pontos de intersecção por meio de pares ordenados. Verificou-se que 6,9% dos participantes reconhecem o ponto de intersecção, embora esses não tenham sido identificados mediante um par ordenado. Já 38,1% identificam apenas um ponto de intersecção do gráfico da função f(x) = 0 com o eixo-x, não havendo a percepção de que o respectivo gráfico coincide com o eixo das abscissas em todo o conjunto dos números reais.

Responderam, de forma incompleta, sobre as coordenadas dos pontos de intersecção com o eixo das ordenadas, omitindo a coordenada “0” e, para f(x) = 0, identificaram que o ponto de intersecção com o eixo das abscissas é apenas (0, 0) 13,7% dos participantes. E, 6,9% dos alunos, não identificaram nenhum ponto de intersecção da função f(x) = 0 com o eixo das abscissas. Não responderam 3,4% dos estudantes.

a_{31}) *Além do fato de serem retas, o que os gráficos construídos na atividade a_3 têm em comum?*

As respostas à questão a_{31} foram organizadas e categorizadas e são apresentadas na.

Tabela 2 – Distribuição das respostas do item a_{31}

Categorias	Alunos	Percentual
A – Reconheceram que os gráficos são paralelos ao eixo das abscissas	8	27,7
B – Reconheceram que os gráficos são paralelos ao eixo das abscissas e perpendiculares ao eixo das ordenadas	2	6,9
C – Identificaram que os gráficos cruzam o eixo das ordenadas	2	6,9
D – Identificaram que apenas a função f(x) = 0 intercepta o eixo das abscissas	2	6,9
E – Identificaram o movimento de translação ocorrido nos gráficos a partir da modificação do coeficiente "b"	4	13,8
F – Identificaram que os gráficos não são decrescentes nem crescentes	7	24,1
G – Responderam de forma incorreta	3	10,3
H – Não responderam	1	3,4
Total	29	100,0

Encontram-se, na Categoria A, as respostas que identificaram que os gráficos são paralelos ao eixo-x. Na Categoria B é ressaltado que os gráficos são paralelos ao eixo das abscissas e, também, perpendiculares às ordenadas. Na Categoria C, têm-se as respostas que mencionam que os gráficos interceptam o eixo-y em um único ponto. Na E, as respostas reconhecem que, na função f(x) = 0, o gráfico coincide com a abscissa. Na Categoria F, as respostas identificam que as funções são constantes, sem que seja feito uso dessa nomenclatura.

As funções do tipo y = b são denominadas funções constantes.

A partir da questão b, a seguir, serão analisados vinte e sete protocolos de registros dos alunos, visto que dois deles não compareceram à segunda aula destinada à realização da presente atividade.

***b)** Utiliza o aplicativo para construir os gráficos das funções de segundo grau, determinadas nas tabelas b_1, b_2 e b_3, e completa-as a seguir.*

Atividade b_1 Função	O gráfico intercepta o eixo y ? Em qual(is) ponto(s)?	O gráfico intercepta o eixo x ? Em qual(is) ponto(s)?	Para que valores de x a função é crescente?	Para que valores de x a função é decrescente?	Coordenadas do vértice
$f(x) = x^2$					
$f(x) = 5x^2$					
$f(x) = 10x^2$					
$f(x) = 20x^2$					

De maneira geral, os estudantes não apresentaram dificuldades em completar a tabela acima, todos responderam corretamente todos os itens. Desses, 48,1% utilizaram-se da linguagem algébrica para responder para quais valores de x as funções são crescentes e decrescentes, enquanto que 29,6% usaram a linguagem natural.

Ainda não escreveram os pontos de intersecção com os eixos de maneira adequada 22,2% dos respondentes: sendo que, dentre esses, 50%, utilizaram a linguagem algébrica nas duas últimas colunas, e outros 50% fizeram uso da linguagem natural.

***b_{11})** Compara os gráficos construídos na **tabela b_1**. O que acontece com o gráfico da função $f(x) = x^2$ à medida que aumentamos o valor de seu coeficiente?*

A Tabela 3, a seguir, mostra a categorização feita a partir da apreciação das respostas a questão b_{11}.

Tabela 3 – Distribuição das respostas do item b_{11}

Categorias	Alunos	Percentual
A – Reconheceram que a abertura da parábola diminui à medida que o coeficiente a aumenta	20	74,1
B – Identificaram que o gráfico se aproxima do eixo das ordenadas	4	14,8
C – Responderam de forma incorreta	3	11,1
Total	27	100,0

A Figura 3 exemplifica as respostas da Categoria A:

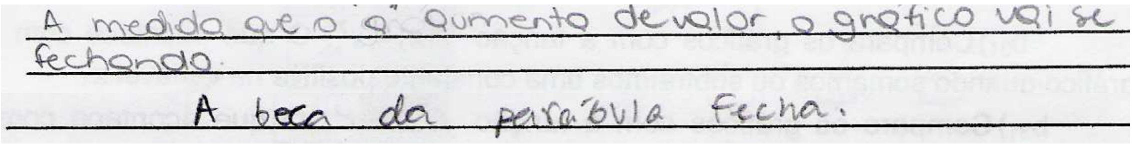

A medida que o a aumento de valor, o grafico vai se fechando.
A boca da parábola fecha.

Figura 3 – Protocolo de registro de aluno – item b_{11} – Categoria A

Enquanto, na Figura 4, tem-se um exemplo de resposta da Categoria B:

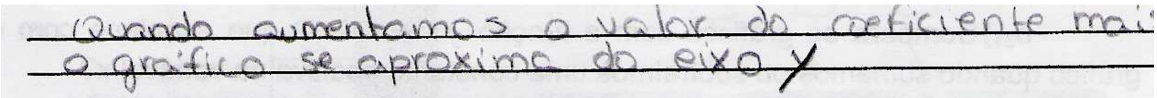

Quando aumentamos o valor do coeficiente mai
o gráfico se aproxima do eixo y

Figura 4 – Protocolo de registro de aluno – item b_{11} – Categoria B

Atividade b_2 Função	O gráfico intercepta o eixo y? Em qual(is) ponto(s)?	O gráfico intercepta o eixo x? Em qual(is) ponto(s)?	Para que valores de x a função é crescente?	Para que valores de x a função é decrescente?	Coordenadas do vértice
$f(x) = x^2 - 15$					
$f(x) = x^2 - 10$					
$f(x) = x^2$					
$f(x) = x^2 + 10$					
$f(x) = x^2 + 15$					

Verificou-se que 55,6% dos participantes responderam a todos os itens corretamente, fazendo uso da linguagem algébrica para completar a terceira e quarta colunas e 18,5% também responderam de forma correta, utilizando a linguagem natural para responder a terceira e quarta colunas. Responderam de forma incompleta as coordenadas dos pontos de intersecção do gráfico com o eixo das ordenadas e utilizaram a linguagem algébrica para completar a terceira e quarta colunas 11,1% dos estudantes. Enquanto que 11,1% dos discentes responderam de forma incorreta e 3,7% não responderam.

***b_{21})** Compara os gráficos construídos na **tabela b_2** com a função $f(x) = x^2$. O que acontece com os gráficos quando somamos ou subtraímos uma constante positiva para obter uma nova função?*

A análise dos protocolos revelou que 55,6% dos alunos reconheceram que o gráfico translada conforme é somada ou subtraída uma constante positiva; 7,4% identificaram que a coordenada y do vértice é positiva, quando é somada uma constante positiva, e negativa, quando é subtraída uma constante positiva; 3,7% perceberam que a coordenada y do vértice é negativa, quando é subtraída uma constante positiva; outros 3,7% perceberam que, quando é somada uma constante positiva, o gráfico não intercepta o eixo das abscissas e, quando é subtraída uma constante positiva, o gráfico intercepta o eixo. Enquanto que 7,4% fizeram referência ao movimento de translação ocorrido e 22,2% responderam de forma incorreta ou não responderam.

***Dica:** Para utilizar o aplicativo, deves, primeiramente, desenvolver os produtos notáveis das funções.*

Atividade b_3 Função	O gráfico intercepta o eixo y ? Em qual(is) ponto(s)?	O gráfico intercepta o eixo x ? Em qual(is) ponto(s)?	Para que valores de x a função é crescente?	Para que valores de x a função é decrescente?	Coordenadas do vértice
$f(x) = (x - 7)^2$					
$f(x) = (x - 5)^2$					
$f(x) = x^2$					
$f(x) = (x + 5)^2$					
$f(x) = (x + 7)^2$					

Em relação à primeira questão da tabela acima, dentre os vinte e sete protocolos analisados 33,3% responderam corretamente, identificando o ponto de intersecção com o eixo das ordenadas como sendo (0, c), em que "c" é o termo independente da função $f(x) = ax^2 + bx + c$, com $a \neq 0$. Entretanto, 51,8% dos alunos afirmaram que não há ponto de interseção das funções, com exceção de $f(x) = x^2$, uma vez que não é possível observar esses pontos na construção gráfica disponibilizada pelo aplicativo. Destaca-se, ainda, que 14,8% não responderam essa questão. Os demais itens da tabela foram respondidos de maneira correta, por 77,8% dos participantes; de forma incorreta, por 7,4%; e não responderam 14,8%.

***b_{31})** Compara os gráficos com a função $f(x) = x^2$. O que acontece com o gráfico quando somamos ou subtraímos uma constante positiva na variável x?*

A respeito dessa questão, 55,5% dos alunos fizeram referência ao movimento de translação sobre o eixo das abscissas, enquanto que 44,4% responderam de forma incorreta ou não responderam. A Figura 5, abaixo, exemplifica as respostas corretas.

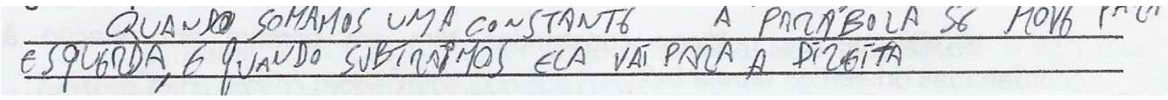


Figura 5 – Protocolos de registros de alunos – item b_{31}

6. Considerações finais

Ao fazer uso da planilha, a conversão entre os diferentes tipos de registros de uma função é facilitada, possibilitando, assim, a experimentação, a visualização e a transposição de suas representações algébricas, tabulares e gráficas de forma dinâmica. Na construção gráfica em mesmo plano cartesiano, os estudantes, às vezes, digitavam de forma incorreta alguma das fórmulas que definiam a família de uma determinada função. Ao analisarem a referida construção, esses alunos percebiam que havia algum erro, pois a representação gráfica não mantinha as características dessa família de curvas. Ao fazerem essa apreciação, os alunos selecionavam o intervalo de células onde fora escrita a expressão algébrica e podiam corrigir algum erro cometido nessa fórmula através de reedição do conteúdo da primeira célula e da propagação da correção para as demais e, dessa forma, o software atualizava o gráfico automaticamente. Esse recurso permitiu, então, que os usuários observassem, instantaneamente, o efeito das alterações.

Constatou-se que as atividades, baseadas na transposição entre as diversas representações de uma função, aliadas à utilização da planilha, possibilitaram uma interpretação global das variáveis. Isto permitiu que os alunos se detivessem no entendimento das alterações gráficas ocorridas a cada modificação paramétrica e não na construção gráfica por intermédio de várias substituições na expressão algébrica, como ocorre no trabalho feito com o uso de lápis e de papel.

A utilização desse aplicativo permitiu um estudo global e qualitativo das funções de 1º e 2º graus, explorando a conversão entre suas representações e, desse modo, manipulando variáveis cognitivas específicas do funcionamento de cada um dos registros algébrico, tabular e gráfico.

Bibliografia

Borba M. de C., Penteado M. (2005): *Informática e Educação Matemática.* Autêntica, Belo Horizonte, Brasil.

BRASIL (1998): Ministério da Educação. Secretaria de Educação Fundamental. *Parâmetros Curriculares Nacionais:* Matemática - 3º e 4º Ciclos. Brasília, Brasil.

Damm R. (1999). Registros de representação.In: S. D. A. Machado (org.). *Educação Matemática: uma introdução*. 135-153. EDUC, São Paulo, Brasil.

Duval Raymond (1999).Representation, vision and visualization: cognitive functions in mathematical thinking. Basic issues for learning. *The Psycology of Mathematics Education* v.1, n. 1, 2-26.

Duval, R (2003). Registros de Representações Semióticas e Funcionamento Cognitivo da Compreensão em Matemática. In: S. D. A. Machado (org.). *Aprendizagem em Matemática: registros de representação semiótica*. Papirus, Campinas, Brasil.

Duval, R. (2006).A cognitive analysis of problems of comprehension in a learning of mathematics.*Educational Studies in Mathematics*, v. 61, n. 1, 103-131.

Fiorentini Dario; Lorenzato Sergio (2006): *Investigação em educação matemática: percursos teóricos e metodológicos*. Autores Associados, Campinas, Brasil.

Minayo M. C. de Souza (1998).Ciência, Técnica e Arte: O Desafio da Pesquisa Social. In: M. C. de Souza Minayo (Org.). *Pesquisa Social: teoria método e criatividade.* 9-29. Vozes, Petrópolis, Brasil.

Morgado M. J. L. (2003). Formação de professores de matemática para o uso pedagógico de planilhas eletrônicas de cálculo de análise de um curso a distância via Internet. 2003. 284 f. Tese (Doutorado em Educação) - UFSC, Florianópolis.

Moura M. O. de, Dias Moretti V. (2003). Investigando a aprendizagem do conceito de função a partir dos conhecimentos prévios e das interações sociais. Ciência & Educação, v. 9, n. 1, 67-82.

Moretti M. T. (2003).A translação como recurso no esboço de curvas por meio da interpretação global de propriedades figurais. In:, S. Dias A. Machado (org.). *Aprendizagem em Matemática: registros de representação semiótica.* 149-160. Papirus, Campinas, Brasil.

Elisabete Rambo Braga. Mestre em Educação em Ciências e Matemática pela PUCRS. Professora do colégio Farroupilha. erambo@ibest.com.br

Lorí Viali. Doutor em Engenharia de Produção pela Universidade Federal de Santa Catarina, com doutorado sanduíche na University of South Florida, Tampa, FL. Professor permanente do EDUCEM (Mestrado em Educaçào em Ciências e Matemática da PUCRS). Professor Titular da Faculdade de Matemática da PUCRS. Professor Adjunto do Instituto de Matemática da Universidade Federal do Rio Grande do Sul. viali@pucrs.br, viali@mat.ufrgs.br

UNIÓN
REVISTA IBEROAMERICANA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA

Junio de 2011, Número 26, páginas 73-87
ISSN: 1815-0640

La articulación de Saberes Matemáticos en el tema de los sistemas de ecuaciones lineales

Isaías Pérez Pérez; Silvia Soledad Moreno Gutiérrez

Resumen

La presente investigación de corte sistémico-lógico, aporta resultados experimentales sobre el denominado "proceso de articular saberes matemáticos", concerniente a lo que se ha denominado como Articulación de Saberes Matemáticos. Para ello, se desarrolló un instrumento basado en los modelos conceptuales, que intenta estimar el nivel de articulación de saberes matemáticos que adquieren los estudiantes sobre el tema de Sistemas de Ecuaciones Lineales.

Abstract

The present investigation of cuts systemic-logical, contributes experimental results on the denominated "process to articulate knowledge mathematical", concerning which it has been denominated like Articulation of Knowledge Mathematical. For it, an instrument based on the conceptual models was developed, that try to consider the mathematical level of joint of knowledge which they acquire the students on the subject of Systems of Linear Equations.

Resumo

A presente investigação de corte sistémico-lógico, contribui resultados experimentales sobre o denominado "processo de articular saberes matemáticos", concerniente ao que se denominou como Articulación de Saberes Matemáticos. Para isso, se desenvolveu um instrumento baseado nos modelos conceptuais, que tenta estimar o nível de articulación de saberes matemáticos que adquirem os estudantes sobre o tema de Sistemas de Equações Lineales.

1. Introducción

La Educación Matemática plantea entre sus objetivos, el que los estudiantes cuando se adentren al estudio de los diversos temas matemáticos, logren articularlos de manera que puedan formar conceptos más complejos y sofisticados. Uno de los beneficios de adquirir esta cualidad de articular saberes, es que permite al estudiante resolver diversos problemas matemáticos presentados por el profesor o inclusive problemas de la vida cotidiana, obteniendo con ello la solución requerida, además de la ganancia intelectual que se alcanza, debido a que lo incentiva para ir aprendiendo ideas matemáticas cada vez más complejas a medida que avanza en sus estudios (NCTM, 2000, p.15).

A la anterior actividad, dentro de la Educación Matemática se le conoce como Articulación de los Saberes Matemáticos, que es análoga a la idea de que si se tienen las partes de un todo, lo único que resta por hacer es saber como ensamblar éstas, para lograr armar el enorme rompecabezas que conforma el todo. Por tanto, la Articulación de los Saberes Matemáticos se entiende como la conexión conceptual entre los diversos saberes matemáticos, conllevando con ello, la comprensión de las Matemáticas como un conjunto de saberes interconectados, que buscan propósitos específicos, como un gran cuerpo unificado de conocimientos.

La Articulación de Saberes Matemáticos de manera inicial, se encuentra presente en la estructuración de los programas y planes de estudio de las matemáticas escolares y en el diseño y estructuración de los libros de texto de matemáticas. Por todas estas razones, el estudio de su definición, el cómo y en quiénes se presenta la Articulación de los Saberes Matemáticos, se convierte en un objeto de investigación en la Educación Matemática.

2. Antecedentes

En la era moderna, a finales del siglo XX (principios de los años 90's), los investigadores de la NCTM plasmaron en los Principios y Estándares para la Educación Matemática, el concepto de articulación, debido a que el currículo matemático no solamente debe ser un cúmulo de conocimientos, sino que además debe mostrar las interconexiones existentes y evidentes en el saber matemático escolar.

Pero las ideas sobre articulación, como muchas otras, no son nuevas. Es posible observar su surgimiento y existencia en campos del conocimiento diferentes a la enseñanza actual de las matemáticas. Las primeras referencias que se tienen, es en el terreno de las ideas filosóficas. Se ha identificado la existencia de nociones sobre articulación en:

a) El pensamiento filosófico del atomismo de Leucipo y Demócrito
b) La monadología de Leibnitz

El atomismo es un sistema filosófico que surgió en Grecia en el siglo IV a.d.C.; según el cual el universo está constituido por combinaciones de pequeñas partículas denominadas átomos. Según esta corriente filosófica, todo se reduce a la unión y separación de los átomos, partículas primitivas e indestructibles. El atomismo presenta una explicación materialista de lo real: todo es el resultado de la agregación y variada combinación de los átomos (Barrio Gutiérrez y Campos, 1991).

Por otra parte, la corriente filosófica de la Monadología, desarrollada por Leibnitz, con respecto al concepto de átomo, sostenía que hablar de partículas indivisibles no tiene sentido, ya que todo lo extenso es divisible *in infinitud*, siendo la realidad una ***realidad anímica***. La realidad es metafísica y la extensión y el movimiento no son sino manifestaciones suyas (fenómenos). Llama "mónadas" a estos infinitos centros de energía: "*Las mónadas o substancias simples son las únicas substancias verdaderas y las cosas materiales no son más que fenómenos, aunque bien fundados y coordinados.*" (Academia de Ciencias Luventicus, 2006).

La complejidad que presentan las ideas sobre articulación de saberes, se ve reflejada en la diversidad de estudios que abordan algunas aproximaciones sobre ella. El estudio de algunos aspectos de la articulación de los saberes, tiene dos vertientes principales:

a) *Con un enfoque psicológico*, en donde la idea de la articulación de saberes se aborda como un proceso mental. Algunos ejemplos son:

- Los estudios de Greeno (1978), sobre las relaciones existentes entre las operaciones aritméticas de multiplicación y división (Resnick y Ford, 1990, p. 233 a 280).
- La investigación de Raymond Duval (1999), sobre demostraciones geométricas formales utilizando *grafos proposicionales,* emanados de los textos de demostración de ciertos teoremas formales.
- El trabajo de Francisco José Anillo Ramos con mapas conceptuales (2004), basados en el concepto de los triángulos (Ontoria et al., 2004, pp. 131 a 133).

b) *Con un enfoque sistémico*, en donde se concibe al conocimiento como un conjunto sistematizado y articulado de saberes:

- La Organización lógica de las experiencias de aprendizaje de la ANUIES; ésta persigue los propósitos de articular y estructurar los componentes del contenido de las asignaturas (Huerta Ibarra, 2003, p.16).
- La técnica de Morgannov-Heredia. Esta técnica permite determinar la estructura de un contenido. Consiste en elaborar una tabla de doble entrada y una gráfica, en las cuales se representa, de diversa manera, la dependencia entre los elementos conceptuales (Huerta Ibarra, 2003, pp. 27,28).

Se puede concluir, que la noción de la articulación se encuentra en cierta medida, presente en distintos estudios, en donde por lo regular se abordan algunos aspectos sobre la articulación como la identificación de conceptos, la búsqueda de su estructuración, por mencionar los más relevantes; a pesar de ello, no se explicitan en muchos casos, aspectos también relevantes como el proceso de articular. Se habla muy poco de los beneficios en ganancia de conocimiento que se alcanza con llevar a cabo el acto de articular, la multitud de formas de articular los mismos componentes, la especificación de un objetivo especifico para articular las partes, etc. Al parecer, la línea de investigación sobre articulación de saberes empieza su desarrollo.

3. Marco teórico referencial

En la presente investigación, hasta el momento se han identificado dos pilares conceptuales que dan cimentación a las ideas sobre articulación: el enfoque de los sistemas conceptuales y las aportaciones conceptuales de la Lógica formal. Ambas corrientes científicas encuentran cabida en el contexto de las investigaciones actuales en Educación Matemática, según Higginson, 1980; Brousseau, 1989 y Godino, 2004.

En la Educación Matemática, el enfoque sistémico es claramente necesario, pues éste se aplica en tres tipos distintos de contexto: a) en el sistema de enseñanza de las matemáticas en su conjunto; b) en el conocimiento como un conjunto de sistemas conceptuales; y c) en los sistemas didácticos materializados en una clase, cuyos subsistemas principales son: el profesor, los alumnos y el saber enseñado (Godino, 2004). En el presente estudio sólo es de interés abordar el segundo enfoque presentado: el conocimiento como un conjunto de sistemas conceptuales matemático, concepto desarrollado dentro de la Teoría General de los Sistemas.

Si el currículo, según el Principio Curricular de la NCTM, pretende tener características de ser articulado, para evitar verlo como un aglomeramiento de temas sin ninguna relación entre sí, la Teoría General de Sistemas se convierte en una "metodología" (Bertoglio, 1986) para interconectar las partes que componen al currículo. Por tanto, se puede catalogar al currículo escolar como un sistema conceptual. Sus elementos están relacionados para lograr objetivos concretos, como los que cita el Principio Curricular, y que básicamente son características básicas de todo sistema.

Se puede advertir que los diversos bloques temáticos que constituyen al currículo, entendiéndose este como un sistema conceptual, se pueden considerar también como subsistemas del mismo tipo, debido a que están formados por conceptos; cada uno de estos bloques tienen identidad y características propias, además de que los vínculos entre ellos, conforman al currículo articulado total.

Se puede concluir en este punto que, basándose en la argumentación antes expuesta, el currículo oficial como lo presenta el Principio Curricular de la NCTM, muestra claras evidencias para ser considerado un sistema de tipo conceptual; el Principio Curricular así lo deja entrever: *"Al planificar las lecciones, los profesores deberían esforzarse en organizar los contenidos para que las ideas fundamentales formen un todo integrado."* (NCTM, 2000, p.15). Por tal razón, los temas se pueden considerar como partes del currículo matemático (subsistemas), que presentan por ende, características propias de sistemas conceptuales.

Por otro lado, otra de las disciplinas científicas que convergen en la Educación Matemática (Higginson, 1980; Brousseau, 1989; Godino, 2004), se encuentra el caso particular de la Lógica, ya que es bien conocido que ésta es una ciencia perteneciente al terreno de la Filosofía (Ibarra Barrón, 1998, pp. 30 a 34). La Lógica es la ciencia que estudia las leyes del pensamiento, su estructura, sus formas y relaciones, así como la estructura de la ciencia y su metodología. También se le conoce como *"la ciencia que estudia las estructuras del pensamiento"* (Ibarra Barrón, 1998, p. 71 y 72).

Es posible que en el ámbito de estudio de la Lógica, se pueda observar coincidencias o aspectos que al parecer, pertenecen a otros campos de estudio, como podría ser el caso de la Psicología. Para distinguir las diferencias sustanciales entre estas dos disciplinas, Lógica y Psicología, se podría mencionar, para comenzar que la Lógica pone en lugar de representaciones, juicios normativos invariantes y pensados e investiga el pensamiento en lo que concierne a su corrección o falsedad; en cambio, la Psicología no se interesa por esta referencia, aunque esté en su campo de investigación en general; la Lógica hace una referencia de valor entre corrección y falsedad, lo que para la Psicología no es trascendente; la Lógica ofrece normas y leyes para explicar y fundamentar el pensamiento, la Psicología deja esta labor a otras ciencias. Los problemas que la Psicología busca resolver, como son el inconsciente, los procesos psico-neurológicos, la conducta, etc., no son los mismos que preocupan a la Lógica ni tampoco sus métodos de estudio son iguales, aunque en última instancia recurran a la razón. A pesar de estas diferencias, la Lógica y la Psicología mantienen estrechas relaciones entre una y otra, y utilizan sus resultados para avanzar en sus respectivos campos, lo que permite ver que su autonomía es relativa, ya que no son ciencias aisladas (Ibarra Barrón, 1998, p. 64).

El estudio de la Lógica permite pasar del conocimiento empírico de las cosas al conocimiento científico, del conocimiento vulgar, fenoménico, de la mera opinión, al conocimiento fundado, estructurado, a la razón primera, al concepto del todo ricamente articulado y comprendido, a la rica totalidad de las múltiples determinaciones y relaciones. El estudio de la Lógica obliga a pensar de un modo más preciso, logrando que los argumentos sean más exactos y ponderados; se cometen menos errores. Se aprende además el arte de la concentración, de la abstracción, de penetrar en la esencia de las cosas. Enseña la vía del pensamiento correcto y verdadero, el pensamiento de sí mismo, del potencial intelectual, reflexivo, de análisis, de síntesis, así como el de los procesos físicos, químicos, históricos, económicos, matemáticos, etc. (Ibarra Barrón, 1998, p. 72 y 73); de ahí la enorme importancia de la Lógica como guía rectora en la definición del acto de pensar, que se produce cuando los sujetos llevan a cabo el acto de articular saberes matemáticos.

Actualmente, la Lógica y la Matemática tienen un campo de acción, objeto de estudio y problemas diferentes, pero aún así no son antagónicas y se interrelacionan recíprocamente. Una aprovecha los resultados de la otra y viceversa (Ibarra Barrón, 1998, p. 66). Es de notarse que al verse los vínculos que existen entre estas dos disciplinas científicas y los aspectos conceptuales que tienen en común, la presente investigación aprovecha la riqueza conceptual de la Lógica, para definir y enriquecer un concepto con un fuerte contenido matemático, que es la Articulación de Saberes Matemáticos.

Por tal razón, y en base a todo lo antes dicho, de ahí que la Lógica pueda utilizarse en el contexto del presente trabajo, como el otro gran pilar conceptual que conforma el marco teórico presentado. Tanto el Enfoque de Sistemas, como las aportaciones de la Lógica, permitieron dar como resultado las consideraciones teóricas presentadas en la actual investigación sobre la definición y caracterización de lo que se podría entender como Articulación de Saberes Matemáticos.

La articulación, desde el punto de vista de las ciencias de la educación, presenta las siguientes características generales:

- Debe existir la relación y seriación de conocimientos a enseñar
- Los individuos, por si mismos, deben tener la capacidad de relacionar los conocimientos aprendidos
- Es la forma en que se puedan alcanzar objetivos educativos fijados anteriormente, permitiendo el avance gradual de los estudiantes por los diversos niveles de sofisticación del conocimiento

Se puede decir de manera inicial, que los componentes identificados de la articulación, son: a) los elementos o partes implicadas; b) las relaciones o vínculos entre ellas; c) el propósito u objetivo a alcanzar, previamente especificado; y d) los individuos que realizan las actividades articuladoras.

Cabe aclarar que la NCTM (2000) indica de manera precisa que el currículo escolar debería ser desarrollado de forma articulada, para que el aprendizaje del alumno sea edificado con esa concepción: *“En un currículo coherente, las ideas matemáticas están ligadas y se construyen unas sobre otras, para que así profundice la comprensión y el conocimiento del alumnado y aumente su habilidad para aplicarlas. Su buena articulación incentiva a los estudiantes para ir aprendiendo* *ideas matemáticas cada vez más complejas a medida que avanzan en sus estudios"* (NCTM, 2000, p.15).

Continuando con el análisis del Principio Curricular, se puede citar lo siguiente sobre la estructura que debe poseer el currículo matemático: *"El currículo consta de diferentes bloques temáticos pero todos están notablemente interconectados. Las conexiones deberían destacarse, tanto en el currículo realmente como en las lecciones y en el material de enseñanza. Secuenciar coherentemente las lecciones a lo largo de las unidades y los niveles de enseñanza, supone un desafío"* (NCTM, 2000, p.15, 16).

Específicamente, en el Principio Curricular (NCTM, 2000), un currículum matemático en los diversos niveles educativos (básico, medio y medio superior) se propone que deba poseer las siguientes características: ser coherente, articulado y con un fin práctico definido. Esto mismo se debe extender a cada uno de los bloques temáticos que lo integran; éste debe ser estructurado como un conjunto de ideas coherentes entre sí, permitiendo con esto que los estudiantes tengan un mejor entendimiento y comprensión de los conocimientos matemáticos presentados.

Un posible camino para proponer una definición de articulación, la aporta el Estándar de Conexiones de la misma NCTM: *"Las matemáticas no son una colección de apartados o niveles separados, aunque con frecuencia se dividen y presentan así; constituyen más bien un campo integrado de estudio. Viendo las matemáticas como un todo, resalta la necesidad de estudiar sus conexiones internas y pensar sobre ellas, tanto en las existentes en el currículo de un determinado nivel como en las que se dan entre niveles"* (NCTM, 2000, p.68).

Esto permite decir en este punto, que la Articulación de Saberes Matemáticos *"se puede entender como la acción de escoger o seleccionar de una multitud de posibilidades, la mejor, la más apta o viable manera de estructurar ideas o conocimientos matemáticos específicos que permitan su estandarización; es decir, el articular es el lograr un proceso de selección y vinculación de conceptos de forma óptima. La articulación es un proceso intelectual, producido por un sujeto que tiene clara concepción sobre el como articular. En el proceso de adquisición de conocimiento por parte de los sujetos, éstos llevan a cabo, entre otras cosas, el proceso de articular"* (Pérez Pérez, 2007).

La acción de realizar el proceso de articular, el cual se entiende *"como la secuencia de fases conceptuales por las que el sujeto evoluciona intelectualmente* (Pérez Pérez, 2007), y que le permite llegar a la consolidación del Conocimiento Matemático Articulado, el cual se puede definir como: *"el producto de un proceso de pensamiento matemático, fundamentado en el razonamiento lógico matemático (inductivo, deductivo y análogo); éste parte de la identificación de conjuntos de conceptos matemáticos que forman redes o estructuras conceptuales, a las que se les asigna un propósito específico, y que le permiten al sujeto realizar actividades intelectuales complejas de alto nivel de abstracción, como son los procesos de toma de decisiones, de adquisición de conocimiento, y de discernimiento de tipo matemático"* (Pérez Pérez, 2007).

La importancia y beneficios de la adquisición, del denominado Conocimiento Matemático Articulado, son los siguientes: *"Cuando los estudiantes pueden conectar ideas matemáticas, su comprensión es más profunda y duradera. Pueden ver* *conexiones matemáticas en la rica interacción entre los temas matemáticos, en contextos que relacionan las matemáticas con otras disciplinas y en sus propios intereses y experiencias. A través de una enseñanza que resalte la interrelación de las ideas matemáticas, no sólo aprenden la asignatura sino que también se dan cuenta de su utilidad."* (NCTM, 2000, p.68).

Se ha mencionado que el acto de articular se concibe como un proceso. De forma general, se dice que la trayectoria de la sucesión de estados por los que pasa un sistema se llama proceso (Sonntag y Van Wilen, 1991, pp.41). Una definición más robusta la ofrece Wark (1986), al abordar la idea de estados, que también pueden ser entendidos como etapas o niveles, entre los cuales se transiciona de una forma específica: *"Un proceso es cualquier transformación de un sistema de uno a otro estado de equilibrio. La descripción completa de un proceso suele incluir la especificación de los estados inicial y final de equilibrio, la trayectoria (si es distinguible) y las interacciones que tienen lugar a través de las fronteras durante el proceso. La trayectoria se refiere a la especificación de una serie de estados por los cuales pasa el sistema."* (Wark, 1986, pp.10)

De las anteriores definiciones, se pueden extraer tres consideraciones importantes para definir el proceso de articular:

- Se llama proceso a la sucesión de estados por los que pasa un sistema
- Existe un estado inicial y un final (hay partes que se distinguen unas de otras)
- Se presenta una trayectoria definida, basada en una sucesión de pasos por los cuales pasa el sistema (en el cual esta contenido una estructura)

Es de notarse la evidente relación del concepto de sistema y proceso, ya que éste último especifica los pasos que se siguen para que se de la evolución de los sistemas, los cuales son: a) seleccionar un conjunto de partes o elementos; b) buscar interrelacionar los elementos para que formen una estructura; y, finalmente c) definir un elemento como el inicio y otro como el final, que permita trazar una trayectoria o ruta, para ser recorrida sobre la estructura existente del sistema. Además, se ha mencionado que el proceso de articular se lleva a cabo con la adquisición y comprensión por parte del sujeto que realiza el proceso de articular, de cada una de las partes o elementos conceptuales que se encuentran plasmados en el sistema conceptual matemático.

De tal forma, se propone definir el proceso de articular como *"el paso gradual de un nivel de articulación a otro, permitiendo alcanzar un Conocimiento Matemático Articulado al sujeto cognoscente que lo lleva a cabo"* (Pérez Pérez, 2007).

A los mencionados niveles se les ha denominado aglomerado, estructura y sistema conceptual (niveles 1, 2, 3, respectivamente) (ver figura 1). En el Nivel 1, el aglomerado conceptual, se compone, como su nombre lo dice de conceptos. Cuando estos conceptos establecen vínculos entre ellos, se pasa al Nivel 2, el de la estructura conceptual. Finalmente, cuando esta estructura se define a un concepto como un punto de inicio, y a otro u otros, como fin o propósitos a alcanzar, y se recorre la ruta o camino que se forma desde el que se establece como inicio, a los marcados como finales posibles, se dice que se ha alcanzado el Nivel 3, el del sistema conceptual. Hay que aclarar que no necesariamente existe solo una ruta o camino; pueden existir varios de ellos: se puede partir de un inicio y recorrer diversas rutas, llegando al mismo término o fin.

Se cree que el proceso de articular busca lograr la interconexión de conceptos matemáticos diversos, con el fin de que le permita al estudiante, lograr adquirir un Conocimiento Matemático Articulado, el cual consiste en un conjunto sistematizado de conocimientos, en forma análoga a como lo hace un matemático profesional y, en donde el proceso de articular ideas forme parte de su pensamiento cotidiano. Por otra parte, el acto de articular es un proceso que llega a definirse y perfeccionarse con el tiempo, debido a que las estructuras cognitivas de las personas tardan en alcanzar la necesaria lucidez o madurez intelectual sobre las ideas adquiridas; éste último aspecto varia en los individuos y en las acciones cognitivas realizadas por éstos (Lachman, Lachman y Butterfield, 1979; Chevallard, 1998; NCTM, 2000).

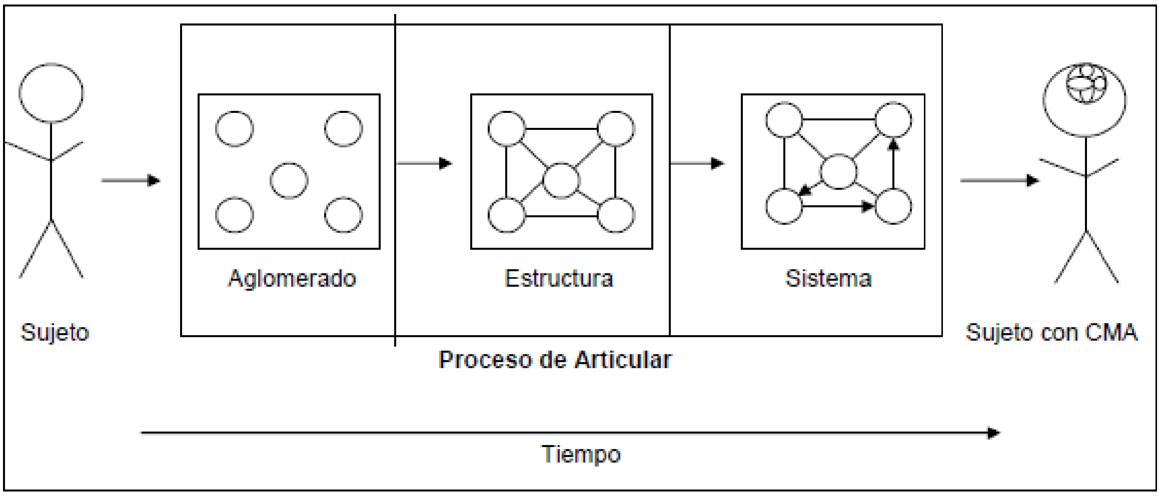


Figura 1. Los niveles del proceso de articular

Por lo dicho anteriormente, el proceso de articular, también concebido como una Jerarquía de Niveles de Articulación, pretende convertirse en un método para elaborar instrumentos documentales que le permitan al docente guiar la construcción de instrumentos articulados para la enseñanza del estudiante, permitiéndole lograr a éste último, el aprender articuladamente.

Por último, se puede decir que el contexto de donde surgió esta llamada jerarquía de niveles, así como se encuentran constituidos y de la forma en como se evoluciona de uno a otro, ha sido producto de la contribución de las ideas de diversas disciplinas, entre las que se pueden mencionar la teoría general de sistemas, algunos elementos conceptuales de la teoría axiomática de sistemas, utilizada con fines de definición; la teoría de la información, la teoría de conjuntos, la teoría de funciones discretas, la teoría de grafos, la lingüística estructural, la lógica y la teoría de la computación, entre las más relevantes.

4. Problema de investigación

El concepto de articulación es mencionado cuando se intenta identificar algunas características del aprendizaje de los estudiantes. La ausencia o falta de articulación, se menciona en toda reunión de profesores, en busca de una respuesta a las problemáticas del aprendizaje. Sin embargo, es poco lo que se ha escrito al respecto; las conceptualizaciones existentes tienen mucho de intuitivo y son escasos los trabajos de investigación indagando en esta cuestión. Por su parte, el presente estudio, busca ofrecer un panorama general del estado en que se encuentran estas ideas entre los estudiantes, con el fin de aportar más elementos para su adecuada caracterización.

Un elemento para lograr lo anterior, es el de resolver el problema de cómo identificar y medir el grado de articulación en un currículo matemático escolar, pero por razones prácticas, es necesario acotar el estudio de la “medida de articulación”, de un currículo entero a un bloque temático particular de éste. El tema matemático, parte del currículo matemático, seleccionado para el presente estudio que representa aspectos relevantes sobre la articulación, es el de los sistemas de ecuaciones lineales, debido a la importancia que tiene dentro del currículo matemático escolar (Herstein y Winter,1989).

De tal manera, el problema de investigación del presente estudio es el de estimar o medir el grado o nivel de articulación de saberes matemáticos, en el tema de la definición de los sistemas de ecuaciones lineales, en un grupo de estudiantes universitarios homogéneo (que tenga un solo profesor), de un curso de Álgebra Lineal, con el fin de conocer en que estado se encuentran las ideas sobre Articulación de Saberes Matemáticos entre los estudiantes.

5. Preguntas de investigación

En el problema de “medir el grado” de la Articulación de los Saberes Matemáticos, intervienen elementos de diversa naturaleza. En el presente trabajo de investigación, sólo se interesa abordar los aspectos sobre el conocimiento en si mismo. Por esta razón, las preguntas formuladas para el presente estudio, y que se pretende responder son:

¿Qué elementos conceptuales intervienen en la articulación de los saberes que integran los sistemas de ecuaciones lineales?

¿Cómo se puede “medir” o estimar el grado de articulación en el tema de los sistemas lineales?

6. Hipótesis y metodologia del estudio

Las ideas sobre cómo se enseñan los contenidos, son ignoradas a menudo o se considera que están al margen del espectro de indagación en la mayoría de las investigaciones sobre la enseñanza. Romberg, Small y Carnaham (1979), localizaron cientos de estudios que valoraban la efectividad de casi todos los aspectos concebibles de la conducta docente, pero encontraron pocos modelos de instrucción que incluyeran la componente del contenido. Esto hace reconocer la necesidad de acometer investigaciones que tengan en cuenta el contenido específico y las técnicas didácticas apropiadas para tal contenido (Godino, 2004, p. 27). Sobre este aspecto, se encuentra cimentado el presente trabajo.

En definitiva, se propone responder a las preguntas de investigación presentadas con anterioridad, con una investigación de tipo sistémico-lógico. Las actividades específicas a realizar en el presente estudio, son:

a) Hacer una exploración documental, para identificar los elementos conceptuales relacionados con la definición de los sistemas de ecuaciones lineales.

b) Diseñar un test que permita estimar el grado de articulación de los estudiantes, sobre el tema de los sistemas de ecuaciones lineales, utilizando la técnica de los modelos conceptuales (también conocidos como mapas conceptuales), propia de los sistemas del mismo tipo.

c) Aplicar el test previamente diseñado, con el fin de "medir el grado de articulación", en una población homogénea de estudiantes que tomen un curso de Algebra Lineal.

d) Realizar el análisis cualitativo y cuantitativo de los resultados obtenidos del test aplicado.

e) Generar las conclusiones y reflexiones respectivas.

7. Diseño del test

En primer lugar y para fines de representación y experimentación del presente estudio, los sistemas conceptuales matemáticos se representaran como los llamados modelos conceptuales, también conocidos como mapas conceptuales (López Frías e Hinojosa Kleen, 2001, Hernández Forte, 2006).

Los mapas conceptuales son representaciones diagramáticas que evidencian relaciones significativas entre conceptos bajo la forma de proposiciones. Las proposiciones son llamadas también "unidades semánticas" o "unidades significativas". Una proposición es la afirmación representada por una relación que conecta dos conceptos. Tratándose de una red de conexiones, el mapa conceptual puede ser también entendido como una red de relaciones entre las relaciones, o como una red de proposiciones, es decir como una organización asociativa dinámica. Los mapas conceptuales o redes semánticas (representación visual del conocimiento) han demostrado ser mucho más cercanos al modo humano de pensar que el texto, las listas o las tablas de datos. Permiten una mejor comprensión del argumento representado (Hernández Forte, 2006).

Además de esto, el mapa conceptual se puede utilizar como instrumento de evaluación, con las siguientes cualidades: a) mide la comprensión y permite diagnosticar la no-comprensión de un tema específico, y b) permite apreciar el bagaje cultural del evaluado, así como el nivel conceptual que alcanza, entre otras cosas. Por lo tanto, las citadas características se consideran adecuadas para desarrollar el test de medida de articulación en los estudiantes de Algebra Lineal.

Los dos aspectos que se abordan dentro del test, para aplicar a los estudiantes, es la definición del concepto de ecuación lineal (Swokowski, 1975, p. 72 y 73; Baldor, 1992, pp. 5, 6 y Thompson, 1975, p.12) y la definición del concepto de sistema de ecuaciones lineales (Antón, 2002, pp. 23, 24). La estructura básica que sigue el test ésta diseñada en base a la evolución conceptual de las etapas del proceso de articular y las recomendaciones para diseñar instrumentos de evaluación utilizando mapas conceptuales (López Frías e Hinojosa Kleen, 2001).

Como ya se ha mencionado, el test tiene como objetivo el medir el grado de articulación existente en los temas de ecuación lineal y sistema de ecuaciones lineales, en un grupo homogéneo de 26 estudiantes universitarios, que hayan tomado recientemente un curso sobre Álgebra Lineal.

8. Resultados obtenidos

Una vez que el test fue aplicado a los estudiantes, se procedió al análisis del mismo, a través del método de evaluación propuesto por Sambrano y Steiner (2000), en cual se basa en observar lo desarrollado por los estudiantes en el test, para después ponderar numéricamente los aspectos cualitativos, en una tabla especialmente diseñada para tal efecto. La tabla especifica, utilizada para el presente estudio, se muestra en la tabla 1. Hay que aclarar que dicha tabla, trata de diferenciar claramente el posible progreso entre los tres niveles de articulación mencionados dentro del proceso de articular. Los resultados se obtuvieron a través de llevar a cabo un conteo de las respuestas recabadas en los 26 test aplicados, expresados en porcentaje.

Como lo muestran las graficas de las figuras 2 y 3 respectivamente, los resultados obtenidos sobre la articulación de los preconceptos o términos que conforman el concepto de ecuación lineal y la articulación de los conceptos que conforman el concepto de sistema de ecuaciones lineales, son similares por nivel de articulación en ambos casos. Para el primer nivel de articulación, se presenta un desempeño de intermedio a bajo, ya que en este se trata de identificar los términos y conceptos que se encuentran implicados en la definición del concepto (ecuación lineal y sistema de ecuaciones lineales, respectivamente).

La situación se hace más crítica, cuando se les pide a los estudiantes que avancen a los niveles 2 y 3 de articulación, en donde se trata de buscar la interrelación entre los preconceptos seleccionados, y en el tercer nivel no sólo se busca relacionar los preconceptos seleccionados, sino además, buscar una jerarquización entre estos. Es notorio el bajo índice de rendimiento en estos niveles (ver figuras 2 y 3). En definitiva, se puede observar que el dominio de la actividad de articulación va disminuyendo de manera sustancial cuando se avanza del nivel 1 al nivel 2 y 3 de articulación.

Tabla 1. Tabla evaluadora para los modelos conceptuales presentados en el test

INSTRUMENTO PARA EVALUAR MODELOS CONCEPTUALES EVALUACIÓN CUANTITATIVA			
ASPECTOS	DESEMPEÑO ALTO (4 puntos)	DESEMPEÑO MEDIO (2 puntos)	DESEMPEÑO BAJO (1 punto)
CANTIDAD MÍNIMA DE TÉRMINOS O CONCEPTOS			
RELACIONES CORRECTAS ENTRE LOS CONCEPTOS			
SUFICIENTES RELACIONES ENTRE LOS CONCEPTOS			
JERARQUÍA VÁLIDA DE LOS CONCEPTOS			
SUMA INTEGRAL			

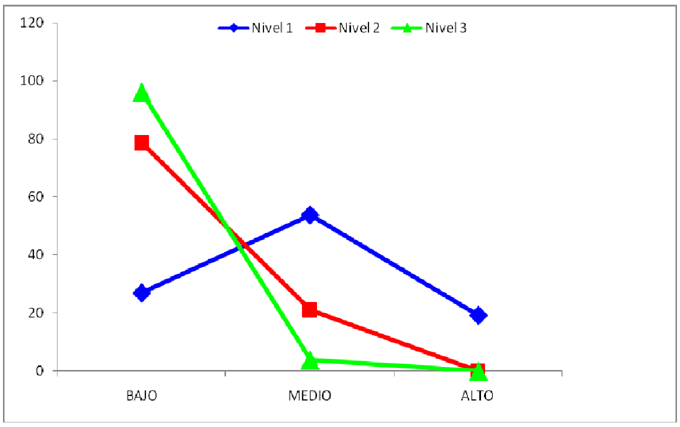


Figura 2. Resultados obtenidos en el test aplicado, referentes al concepto de ecuación lineal

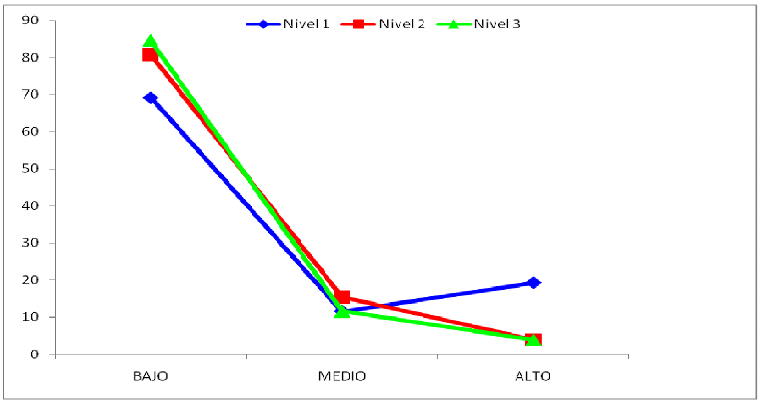


Figura 3. Resultados obtenidos en el test aplicado, referentes al concepto de sistema de ecuaciones lineales

La siguiente tabla, muestra los porcentajes generales encontrados para los dos conceptos estudiados, en cuanto a la capacidad que poseen los estudiantes de lograr llevar a cabo la actividad de articular elementos conceptuales.

Tabla 2. Resultados generales obtenidos en el test

Concepto	**Desempeño Bajo (%)**	**Desempeño Medio(%)**	**Desempeño Alto (%)**
Ecuación lineal	70.2	25	4.8
Sistema de ecuaciones lineales	78.8	13.5	7.7

Al parecer, la mayoría de los estudiantes no son capaces de estructurar y jerarquizar adecuadamente los conceptos matemáticos que ellos mismos pudieron identificar en un principio.

Otro hecho es que, durante más preconceptos o conceptos estén implicados para definir un concepto más grande, mucho más notoria es la desarticulación de sus partes. Finalmente, los resultados muestran que el desempeño en cuanto a la actividad de articular que presentan los estudiantes encuestados, es bajo.

9. Conclusiones y trabajos futuros

Se puede observar que de los 26 estudiantes encuestados en esta investigación, los cuales podrían ser considerados como una muestra representativa de estudiantes que pretenden llevar a cabo actividades de articulación y que fueron evaluados de manera objetiva y efectiva, por medio de este test, se podría decir que en promedio, de cada 10 estudiantes:

- 7 estudiantes presentan un bajo nivel en la actividad de articular conceptos matemáticos
- 2 estudiantes presentan un nivel intermedio de articular, el cual consiste en definir estructuras conceptuales (interrelacionar los conceptos seleccionados previamente)
- Sólo 1 estudiante, alcanza un alto nivel de articulación, logrando jerarquizar adecuadamente las estructuras conceptuales construidas

En base a los resultados obtenidos, se puede observar de manera general, que los estudiantes tienen conocimiento de los términos y conceptos que se relacionan con la ecuación lineal y los sistemas de ecuaciones simultáneas. Sin embargo, pareciera que las relaciones y jerarquías existentes entre los conceptos que intervienen en una ecuación lineal y en un sistema de ecuaciones lineales no es suficientemente comprendida, así lo demuestran los resultados obtenidos por el test, lo cual demuestra entre las muchas cosas, que los estudiantes no poseen un conocimiento articulado.

Con el objetivo de mejorar significativamente el avance de los estudiantes, en los niveles 2 y 3 de articulación (estructuración y jerarquización), en la articulación de saberes en temas matemáticos, y al observar la utilidad que ofrece la aplicación de los modelos o mapas conceptuales en este estudio, se propone diseñar y aplicar una serie de secuencias didácticas, basadas en la técnica de los modelos conceptuales, ya que estos, entre sus ventajas, permiten el análisis profundo del tema en cuestión, así como demuestran la organización de las ideas, lo cual es esencial cuando se estructuran y jerarquizan éstas, actividad propia de la articulación de saberes, además de que ayuda a representar visualmente ideas abstractas, cualidad muy común de los conceptos matemáticos (López Frías e Hinojosa Kleen, 2001). Se espera que los estudiantes que utilicen ésta serie de instrumentos didácticos, puedan después de un tiempo de entrenamiento con ellos, lograr organizar sus conocimientos matemáticos de manera articulada.

Bibliografía

Academia de Ciencias Luventicus. (2006). *Gottfried Wilhelm Freiherr von LEIBNITZ* (URL: http://www.luventicus.org/articulos/02A036/leibnitz.html). Argentina. Fecha de consulta: Octubre del 2006.

Antón, H. (2002). *Introducción al álgebra lineal*. Editorial Limusa Wiley. Segunda edición. México.

Baldor, A. (1992).*Álgebra*. Publicaciones Cultural S.A. Novena reimpresión. U.S.A.

Barrio Gutiérrez, J. (1991). *Demócrito*. www.mercaba.org/Rialp/D/democrito.htm. Gran Enciclopedia Rialp. Editorial Rialp. Fecha de consulta: Octubre de 2006.

Bertoglio, O. J. (1986). *Introducción a la teoría general de sistemas.* Segunda reimpresión. Editorial Limusa. México.

Brousseau, G. (1989). La tour de Babel. Etudes en Didactique des Mathématiques. *Article occasionnel n. 2. IREM de Bordeaux*.

Campos, R. *Demócrito: la multiplicidad necesaria.* http://www.cibernous.com/autores/astrobiologia/teoria/historia/democrito.htm). Fecha de consulta: Octubre de 2006.

Chevallard, Y. (1998). *La transposición didáctica: del saber sabio al saber enseñado.*. Editorial Aique. Tercera edición. Argentina.

Duval, R. (1999).*Semiósis y pensamiento humano. Registros semióticos y aprendizajes intelectuales*. Universidad del Valle. Buenos Aires, Argentina.

Godino, J. D., (2004).*Perspectiva de la Didáctica de las Matemáticas como Disciplina Científica*. (URL: http://www.ugr.es/~jgodino/fundamentos-teoricos/01_PerspectivaDM.pdf). Departamento de Didáctica de las Matemáticas. Universidad de Granada. España. Fecha de consulta: 15 de octubre de 2004.

Hernández Forte, V. (2006).*Mapas conceptuales. La gestión del conocimiento en la didáctica*. Editorial Alfaomega. Primera reimpresión. México.

Herstein, I. N.; Winter, D. J. (1989). *Álgebra lineal y teoría de matrices*. Grupo Editorial Iberoamérica. Primera edición. México.

Higginson, W. (1980). On the foundations of mathematics education. *For the Learning of Mathematics*, Vol. 1, n.2 pp. 3-7.

Huerta Ibarra, J. (2003). *Organización lógica de las experiencias de aprendizaje*. Editorial Trillas. Cuarta reimpresión. México.

Ibarra Barrón, C. (1998). *Lógica.* Editorial Pearson Educación. Primera Edición. México.

Lachman, R., J. L. Lachman y E. C. Butterfield. (1979). *Cognitive Psychology and Information Processing: An introduction,* Erlbaum, Hillsdale, Nueva Jersey, U.S.A.

López Frías, B. S.; Hinojosa Kleen, E. M. (2001). *Evaluación del aprendizaje. Alternativas y nuevos desarrollos*. Editorial Trillas. Primera edición. México. pp:106 a 113.

NCTM (The Nacional Council of Teachers of Mathematics). (2000). *Principios y estándares de la educación matemática.* Sociedad Andaluza de Educación Matemática Thales. Sevilla, España.

Ontoria, A.; Ballesteros, A.; Cuevas, M. C.; Giraldo, L.; Martín, I.; Molina, A.; Rodríguez, A.; Vélez, U. (2004). *Cómo ordenar el conocimiento usando mapas conceptuales*. Primera edición. Editorial Alfaomega. México.

Pérez Pérez, I. (2007). *Articulación de saberes matemáticos y modelos conceptuales*. UAEH. Tesis de maestría. México.

Resnick, L. B.; Ford, W. W. (1990). *La Enseñanza de las Matemáticas y sus fundamentos psicológicos*. Primera Edición. Editorial Paidós. España.

Romberg, T. (1988). Necessary ingredients for a Theory of Mathematics Education. En: H.G. Steiner y A. Vermandel (Eds), *Fondations and Methodology of the discipline Mathematics Education. Procceding 2nd TME*- Conference. Bielefeld - Antwerp: Dept of Didactics and Criticism Antwerp Univ. & IDM.

Romberg, T. y Carpenter, T. P. (1986). Research on teaching and learning mathematics: two disciplines of scientific inquiry. En M.C. Wittock (Ed.) *Handbook of research on teaching*. London: Macmillan.

Sambrano, J.; Steiner, A. (2000).*Mapas mentales. Agenda para el éxito*. Editorial Alfaomega. Primera edición. México. pp: 112 a 115.

Sonntag, R. E.; Van Wilen, G. J. *Introducción a la Termodinámica clásica y estadística*. Editorial Noriega Limusa. Sexta Reimpresión. México.

Swokowski, E. (1975). *Álgebra universitaria*. Editorial C.E.C.S.A. México.
Thompson, J. E. (1975). *Álgebra*. Editorial UTEHA. Segunda edición. México.
Wark, K. (1986). *Termodinámica*. Editorial Mc Graw-Hill. Cuarta Edición. México.

Isaías Pérez Pérez: Licenciado en Computación y Maestro en Ciencias con Orientación a la Enseñanza de las Matemáticas, por la Universidad del Estado de Hidalgo. Profesor asignado a la Licenciatura en Sistemas Computacionales, del Instituto de Ciencias Básicas e Ingeniería. **isaiasp@uaeh.edu.mx**

Silvia Soledad Moreno Gutiérrez: Profesor investigador asignado a la Licenciatura en Sistemas Computacionales, en la Escuela Superior Tlahuelilpan. Licenciado en Computación y Maestro en Ciencias Computacionales, por la Universidad del Estado de Hidalgo. Ha participado en diversos congresos actividades académicas. **silviam@uaeh.edu.mx**

UNIÓN
REVISTA IBEROAMERICANA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA

Junio de 2011, Número 26, páginas 89-102
ISSN: 1815-0640

Análisis sobre los tipos de inteligencias en estudiantes de educación secundaria y universidad

Perla Nancy Sosa, **Tomás Ortega**

Resumen

En el presente estudio se ha analizado el modelo de las Inteligencias Múltiples, utilizando una metodología descriptiva en alumnos que cursaban estudios de Educación Secundaria Obligatoria, Bachillerato y Universidad. Se pudo evidenciar los tipos de inteligencia más desarrollados en estudiantes de Educación Secundaria, así como en alumnos de arquitectura e ingeniería informática de la Universidad de Valladolid.

Abstract

In the present study has analized the model of Multiple Intelligences, using a descriptive approach in students who were studying Secondary Education, High School and University. We could demonstrate the types of intelligence developed in high school students, as well as students of architecture and computer engineering at the University of Valladolid.

Resumo

No presente estudo analisou-se o modelo das Inteligências Múltiplas, utilizando uma metodología descritiva em alunos que cursaban estudos de Educação Secundária Obrigatória, Bachillerato e Universidade. Pôde-se evidenciar os tipos de inteligência mais desenvolvidos em estudantes de Educação Secundária, bem como em alunos de arquitectura e engenharia informática da Universidade de Valladolid.

Introducción

En el presente trabajo se realizó un estudio sobre los fundamentos teóricos de los tipos de inteligencia, así como la evaluación del desarrollo de las mismas en estudiantes de la Educación Secundaria Obligatoria (ESO), Bachillerato y de la Universidad de Valladolid (UVa), para comprender el procedimiento general y los instrumentos utilizados por Gardner, se llevó a cabo un estudio empírico utilizando la metodología de las Inteligencias Múltiples (IM) con el fin de demostrar la bondad de la teoría. Está centrada en el estudio y análisis de los fundamentos teóricos del modelo de las IM y su utilidad para entender las diferencias individuales de los estudiantes. Se ha realizado un análisis histórico sobre el tema de la inteligencia, comentando desde los modelos unitarios hasta los estructurales, haciendo hincapié en los diversos modelos jerárquicos, porque permite entender la organización de las diferentes habilidades que ayudan a pronosticar el rendimiento académico.

Además, se pudo diseñar y aplicar una encuesta para evaluar las inteligencias más desarrolladas por alumnos de la ESO, Bachillerato y de la UVa, con el fin valorar las diferentes inteligencias establecidas por Gardner. Dado que el modelo de las IM sirve para entender las diferencias entre los alumnos y, por tanto, se ha destacado algunos puntos que indican pautas para diseñar perfiles de acuerdo al desarrollo de las inteligencias de los alumnos de la ESO y de la UVa.

La utilización de datos cualitativos permite realizar valoraciones más significativas y establecer paralelismos pertinentes de las IM, de manera que se pudo demostrar el tipo de inteligencia más desarrollada en los estudiantes y la correspondencia del perfil del alumno en base a la carrera universitaria que estudian los mismos.

Esta investigación permitió comprender algunos procedimientos de evaluación de las IM, considerando que Gardner entiende que la valoración de la competencia cognitiva de los alumnos de los primeros niveles instruccionales exige la retroalimentación continua para determinar su perfil, plantea que la comprensión precisa del perfil de las inteligencias del alumno, requiere identificar desde los primeros niveles educativos las capacidades que pueden ser de gran ayuda a la hora de descubrir de qué tipo de experiencias los alumnos pueden beneficiarse; pero además, si un punto débil se identifica pronto, cabe la oportunidad de atenderlo antes de que sea demasiado tarde.

Los factores de interés de ésta investigación giran alrededor de las características que el modelo del Inteligencias Múltiples que intervienen en el perfil del estudiante (en el estudio no se contempla la inteligencia emocional) que conllevan a determinar los objetivos siguientes:

1. Analizar los fundamentos de las teorías de las inteligencias múltiples.
2. Determinar el tipo de inteligencia más desarrollada en estudiantes de Educación Secundaria y de la UVa.
3. Indagar si la inteligencia más desarrollada de los alumnos tiene correspondencia con lo que estudian.
4. Generar propuestas a fin de atender la diversidad de los alumnos según el perfil derivado de las inteligencias múltiples.

Con el fin de concretarlos se realizó un minucioso análisis bibliográfico y se aplicó encuestas a estudiantes de Educación Secundaria Obligatoria (ESO), Bachillerato y de la Universidad de Valladolid (UVa).

Antecedentes de la teoría de las Inteligencias Múltiples

El tema de las Inteligencias Múltiples se ha venido estudiando y desarrollando desde el siglo XVIII: Rousseau (1712-1778), opina que el alumno debe aprender a través de la experiencia, allí se ponen en juego las relaciones inter e intra personal y las inclinaciones naturales; asimismo, Froebel (1782-1852), habla del aprendizaje a través de experiencias con objetos para manipular, juegos, canciones, trabajos; Pestalozzi (1746-1827) apuesta a un currículo de integración intelectual basado también en las experiencias; Dewey (1859-1952) ve al aula como un microcosmos de la sociedad donde el aprendizaje se da a través de las relaciones y experiencias de sus integrantes.

Gardner cree que el concepto de inteligencia inunda la cultura occidental, especialmente la norteamericana, y esto provoca que tengamos unas preconcepciones que intentó evitar en el planteamiento de su libro *Frames of mind* (1983). Su aproximación al problema de la estructura de la inteligencia es sobre todo racional y comprensiva, referida a los conocimientos empíricos, pero no fundamentada en una investigación cuantitativa. Su propuesta estaba motivada por el fracaso relativo que, en el campo de la educación, han tenido las aplicaciones de los modelos conductistas del aprendizaje, y también los psicométricos de la inteligencia, que él atribuye a las insuficiencias de ambas aproximaciones. Este fracaso, al menos de forma parcial, se debe a que estas teorías consideran al individuo como un organismo pasivo, que simplemente recibe estímulos a los que responde de acuerdo con su historia anterior de aprendizajes (visión conductista), y que la inteligencia es una capacidad que se encuentra en el "interior de la cabeza" en una cierta cantidad y que, además, es fija (visión psicométrica clásica).

Gardner (1983) encuentra en la *Ciencia Cognitiva* el marco adecuado para cambiar estas limitaciones y se basa en ella para sustentar su modelo de IM. Los cognitivistas consideran a los individuos organismos activos en su actuación, ya que poseen mentes capaces de tener actividad autónoma y no sólo reactiva. La mente dispone de representaciones variadas de la realidad; estas representaciones internas se pueden entender como "módulos mentales". Así, aunque todos los individuos poseen todos los lenguajes y representaciones mentales posibles, entre ellos se distinguen por la forma de estas representaciones y por sus relativas "cantidades" de disposición de las inteligencias mencionadas y, sobre todo, por la forma en las que las utilizan.

Gardner inició sus estudios a partir de observaciones realizadas sobre poblaciones de sujetos bastante singulares y especiales: niños talentosos en dominios artísticos y adultos que habían sufrido algún tipo de accidente cerebral (vascular o traumático), y que, por este motivo, habían perdido alguna capacidad cognitiva, pero no todo el repertorio de aptitudes intelectuales. Observó que ciertos individuos después de los accidentes cerebrales mostraban perfiles de aptitudes muy deterioradas y otras intactas. Además, se dio cuenta que estas capacidades podían variar de un sujeto a otro. Este hecho fue uno de los motivos que le llevaron a buscar un modelo de inteligencia compatible con estas evidencias, ya que los modelos unitarios no parecían adecuados para justificar estas diferencias intraindividuales en las aptitudes cognitivas.

La diversidad desde las Inteligencias Múltiples

Gardner en su libro *Multiple Intelligences: The Theory in Practice* (1993), establece algunas precisiones conceptuales referidas al campo de la excepcionalidad con el fin de demostrar que el modelo de las IM puede y debe ser considerado como un procedimiento idóneo para atender a la diversidad del alumno excepcional. Dice Gardner que la inteligencia, como potencial biopsicológico, producto de la herencia genética y de sus características psicológicas, es un rasgo imprescindible para definir los términos de *talento* y *superdotación*. El rasgo principal del talento es su *especificidad,* es la señal del potencial biopsicológico que se manifiesta en cualquier especialidad existente.

De acuerdo con Genovard y Castelló (1998), la *excepcionalidad* es un concepto utilizado tanto para describir las características de los individuos que manifiestan una capacidad intelectual elevada, como las de aquellos que presentan una baja capacidad. La excepcionalidad, concretada en la superioridad intelectual (talento, superdotación, prodigiosidad, experiencia, pericia, precocidad, creatividad y genio) y en las deficiencias y dificultades, precisa de medidas educativas adaptadas al ritmo de aprendizaje y a la estructura cognitiva de los niños.

Desde esta perspectiva, el modelo de las IM es idóneo para atender a estos alumnos porque ofrece un procedimiento dinámico y adecuado a sus características excepcionales. De hecho, ya ha sido considerado por García (2008), quien utiliza las IM para desarrollar una *metodología de educación matemática atendiendo a la diversidad* fundamentada en grupos de trabajo colaborativos, respeto de los ritmos de aprendizaje de los alumnos, en un test de autocontrol del trabajo realizado por los mismos y en la propuesta de múltiples tareas, que se presentan en orden creciente de dificultad, y que se han elaborado teniendo en cuenta la presencia de los diferentes tipos de inteligencias presentes en los grupos de trabajo. Asimismo, nos encontramos con alumnos cuyas deficiencias y problemas en determinadas áreas o inteligencias pueden reconducirse utilizando los puntos fuertes para paliar las deficiencias o lagunas. En este sentido, Armstrong (1994) hace un estudio sobre las vidas de algunos individuos eminentes que han tenido dificultades de diferentes tipos y las han superado.

Descripción de las inteligencias

Al definir la inteligencia como una capacidad, Gardner la convierte en una destreza que se puede desarrollar y, aunque no niega el componente genético, afirma que esas potencialidades se van a desarrollar de una u otra forma dependiendo del ambiente, de las experiencias, de la educación recibida, entre otros elementos. Este autor va más allá y propone que la inteligencia humana no es una entidad sólida, única y general, sino que es posible hablar de varios tipos de inteligencias humanas, cada una con procesos cognitivos particulares y con historias de desarrollos diferentes, esto hace que cada individuo tenga un perfil intelectual según su fortaleza y debilidades en cada una de ellas. En suma, aparte de la inteligencia emocional, actualmente se considera que la inteligencia se diversifica en ocho tipos diferentes:

1. **Inteligencia Lingüística**: Es considerada una de las más importantes. En general se utilizan ambos hemisferios del cerebro. El uso amplio del lenguaje ha sido parte esencial para el desarrollo de este tipo de inteligencia. Abarca la capacidad de usar las palabras de modo efectivo. Incluye la habilidad de manipular la sintaxis o estructura del lenguaje, la fonética o sonidos del lenguaje, la semántica o significados del lenguaje y la división pragmática o sus usos prácticos.

2. **Inteligencia Lógica Matemática (ILM)**: La capacidad de usar los números de manera efectiva y de razonar adecuadamente. Quienes pertenecen a este grupo, hacen uso del hemisferio lógico del cerebro y pueden dedicarse a las ciencias exactas. De los diversos tipos de inteligencia, éste es el más cercano al concepto tradicional de inteligencia. En las culturas antiguas la ILM se utilizaba para formular calendarios, medir el tiempo y estimar con exactitud cantidades y distancias.

3. **Inteligencia Espacial (IE)**: La habilidad para percibir de manera exacta el mundo visual-espacial y de ejecutar transformaciones sobre esas percepciones (decorador, artistas, entre otros). La IE está más desarrollada en personas que pueden hacer un modelo mental en tres dimensiones del mundo o en su defecto extraer un fragmento de él. La emplean profesiones tan diversas como la ingeniería, la cirugía, escultura, la marina, arquitectura, diseño y decoración.

4. **Inteligencia Corporal-Kinestésica**: La capacidad para usar el cuerpo para expresar ideas y sentimientos y facilidad en el uso de las propias manos para producir o transformar cosas. Los kinestésicos tienen la capacidad de utilizar su cuerpo para resolver problemas o realizar actividades. Dentro de este tipo de inteligencia están los deportistas, cirujanos y bailarines. Una aptitud natural de este tipo de inteligencia se manifiesta a menudo desde niño.
5. **Inteligencia Musical**: La capacidad de percibir, discriminar, transformar y expresar las formas musicales. También conocida como buen oído, es el talento que tienen lo grandes músicos, cantantes y bailarines. La fuerza de esta inteligencia radica desde el mismo nacimiento y varía de igual manera de una persona a otra. Un punto importante en este tipo de inteligencia es que por fuerte que sea, necesita ser estimulada para desarrollar todo su potencial, ya sea para tocar un instrumento o para escuchar una melodía con sensibilidad.
6. **Inteligencia Interpersonal**: La capacidad de percibir y establecer distinciones entre los estados de ánimo, las intenciones, motivaciones y sentimientos de otras personas. Este tipo de inteligencia permite entender a los demás. Está basada en la capacidad de manejar las relaciones humanas, la empatía con las personas y reconocer sus motivaciones, razones y emociones que los mueven. Esta inteligencia por sí sola es un complemento fundamental de las anteriores, porque tampoco sirve de nada si se obtienen las mejores calificaciones, pero se elige mal a los amigos o a la pareja. La mayoría de las actividades que a diario se realizan dependen de este tipo de inteligencia. Por eso es indispensable que un líder tenga este tipo de inteligencia y además haga uso de ella.
7. **Inteligencia Intrapersonal (IIntra)**: El conocimiento de sí mismo y la habilidad para adaptar las propias maneras de actuar a partir de ese conocimiento. Este tipo de inteligencia permite formar una imagen precisa de sí mismo; permite poder entender las necesidades y características, así como las cualidades y defectos. Y aunque se dijo que los sentimientos si deben ayudar a guiar la toma de decisiones, debe existir un límite en la expresión de estos. La IIntra es funcional en cualquier área de la vida.
8. **Inteligencia Naturalista**: Este tipo de inteligencia es utilizado al observar y estudiar la naturaleza. Los biólogos son quienes más la han desarrollado. La capacidad de poder estudiar el ambiente circundante es una forma de estimular este tipo de inteligencia, al fijarse en los aspectos naturales con los que se vive.

Metodología

Se tomó como muestra aleatoria de alumnos para analizar cualitativa y cuantitativamente el modelo de Inteligencias Múltiples (IM) de Gardner, utilizando una metodología descriptiva con el fin de evaluar del desarrollo de las mismas en alumnos que cursaban estudios de Educación Secundaria Obligatoria (ESO) y Bachillerato, de las provincias de Palencia y Zamora, y de la Universidad de Valladolid (UVa) (España).

No se pretende realizar un estudio exhaustivo con una muestra que sea estadísticamente representativa, aunque los grupos de estudiantes universitarios sí que lo son dentro de la propia universidad, y por esta razón no se han calculado errores de muestreo. Como ya se ha señalado anteriormente, se pretende determinar el tipo de inteligencia más desarrollada en estudiantes de la muestra y comprobar si la inteligencia más desarrollada de los alumnos de la Uva tiene correspondencia con lo que estudian.

Análisis de Datos y Resultados

Los objetivos propuestos, así como el procedimiento seguido, han requerido el empleo de una metodología descriptiva. El procesamiento de datos incluye un análisis sobre las puntuaciones totales de cada inteligencia, así como también el porcentaje de alumnos que se destacan en cada tipo de inteligencia, con objeto de diseñar el perfil intelectual de la muestra de participantes en el estudio y a concretar los objetivos propuestos. Para la obtención de datos, se ha utilizado un test de determinación de los tipos de inteligencia, que entre otros ya ha sido utilizado por Samot (2001) y García (2008) y fue cumplimentado por alumnos de: ESO, Bachillerato y de la Universidad.

A continuación se describe el resumen de estos datos y el análisis correspondiente por niveles:

Primeramente se pudo evidenciar que ni la inteligencia interpersonal ni la intrapersonal marcan tendencias profesionales, aunque la primera influye en liderazgos en el ejercicio de la profesión; por otra parte, la musical, además de tener orientaciones profesionales, también contempla aspectos orientados a la cultura, a la moda, a la diversión, etc. y, por tanto, las puntuaciones obtenidas por este tipo de inteligencia no deben ser tenidos en cuenta para el análisis en su totalidad.

En ESO, el tipo de inteligencia más desarrollado es el corporal y le siguen, en orden decreciente, musical, interpersonal, lógico-matemática, intrapersonal, espacial, lingüística, intrapersonal y naturalista. Con las especificaciones anteriores y considerando porcentajes redondeados a números enteros, el tipo de inteligencia tanto el corporal, como el musical, obtienen el 21% cada uno de la suma total de puntuaciones, le siguen la lógico-matemática con el 17%, la espacial con el 16%, y la lingüística con el 14%. Sin embargo, estos tipos de inteligencias alcanzan el mayor desarrollo en pocos alumnos, llama la atención que la naturalista sea la menos desarrollada en estos alumnos, 11%, que habitan en un territorio rural. Finalmente, el resumen estadístico de las frecuencias se presenta en la siguiente tabla.

Tabla 1. Frecuencias porcentuales de los tipos de inteligencia en alumnos de ESO

Tipos de inteligencia	Corp	Esp	Ling	Lo-Mat	Mus	Nat
% enteros	21	16	14	17	21	11

En Bachillerato, el tipo de inteligencia más desarrollado es el musical 20% y le siguen, en orden decreciente, corporal 18%, lingüística 17%, espacial 16%, naturalista 16%, y por último la lógica–matemática 14%. Es llamativo que los alumnos de bachillerato tengan menos desarrollado la inteligencia lógica–matemática, comparando éstos resultados con los de ESO, llama la atención el avance en el desarrollo de la lingüística–verbal y el retroceso en la lógica matemática. El resumen estadístico se presenta en la siguiente tabla.

Tabla 2. Frecuencias porcentuales de los tipos de inteligencia en alumnos de Bachillerato

Tipos de inteligencia	Corp.	Esp.	Ling.	Lo-Mat.	Mus.	Nat.
% enteros	18	16	17	14	20	16

En estudiantes de Arquitectura de la Uva, el tipo de inteligencia más desarrollado es el espacial 21%, le siguen, en orden decreciente: musical 21%, lógico-matemática 17%, corporal 16%, lingüística 14%, naturalista 11%. En éste análisis se visualiza una correspondencia leve del los tipos de inteligencia que tienen desarrollado los alumnos con relación a la carrera que están cursando, la espacial y la lógica – matemática, pero aparecen puntajes importantes de alumnos cuyos tipos de inteligencia más desarrollado, poco tienen que ver con los estudios de arquitectura, hecho que sin duda puede inferir en la cantidad de fracasos académicos que se producen en éstos estudios. El resumen estadístico se presenta en la siguiente tabla.

Tabla 3. Frecuencias porcentuales de los tipos de inteligencia en alumnos de Arquitectura

Tipos de inteligencia	Corp	Esp	Ling	Lo-Mat	Mus	Nat
% enteros	16	21	14	17	21	11

En estudiantes de Ingeniería Informática de la Uva, el tipo de inteligencia más desarrollado es el de tipo lingüística 19%, tanto como el musical 19%, le siguen, en orden decreciente:, espacial 17%, corporal 16%, naturalista 15%, lógico-matemática 14%. Es llamativo que alumnos de informática tengan menos desarrollado la inteligencia lógica – matemática, que la corporal y la naturalista, hecho que influye en los rendimientos tan bajos que obtienen en las asignaturas de matemáticas de comparación con otras disciplinas. El resumen estadístico se presenta en la siguiente tabla.

Tabla 4. Frecuencias porcentuales de los tipos de inteligencia en alumnos de Informática

Tipos de inteligencia	Corp	Esp	Ling	Lo-Mat	Mus	Nat
% enteros	16	17	19	14	19	15

Teniendo en cuenta las variables que intervienen en la investigación es importante destacar la diversidad de tipos de inteligencia desarrollados por los estudiantes, pero por sobre todo que no siempre existe correspondencia con la carrera que estudian.

Hasta aquí, se ha realizado una descripción de los datos recogidos, pero para analizar la posible dependencia entre los diferentes tipos de inteligencia se hace un estudio estadístico utilizando el programa *statgraphics* y se lo aplicamos a los ocho tipos. Aunque este programa aporta multitud de informaciones, sólo consideramos aquellas que están más relacionadas con el análisis de las posibles dependencias. En estudiantes de la ESO se han obtenido los datos estadísticos de la tabla 5. En adelante, para mantener la notación de Statgraphics, se considera: Col_1=Ling; Col_2=Log-Mat; Col_3=Esp; Col_4=Corp; Col_5=Mus; Col_6=Inter; Col_7=Intra; Col_8=Nat.

TABLA 5	Col_1	Col_2	Col_3	Col_4	Col_5	Col_6	Col_7	Col_8
Recuento	22	22	22	22	22	22	22	22
Promedio	16,95	20,05	19,59	25,14	24,86	21,95	16,86	13,14
Desviación Estándar	8,24	6,07	4,90	6,00	3,92	5,08	8,36	5,95
Coeficiente de Variación	48,59%	30,30%	24,99%	23,88%	15,76%	23,16%	49,56%	45,33%
Mínimo	3,0	7,0	8,0	15,0	20,0	13,0	3,0	2,0
Máximo	33,0	29,0	29,0	36,0	34,0	35,0	33,0	23,0
Rango	30,0	22,0	21,0	21,0	14,0	22,0	30,0	21,0
Sesgo Estandarizado	0,08	-0,67	-0,81	0,26	1,64	1,20	0,08	0,048
Curtosis Estandarizada	-0,58	-0,52	0,25	-0,48	0,09	0,67	-0,71	-0,89

Esta tabla muestra el resumen estadístico para cada una de las variables seleccionadas. Incluye medidas de tendencia central, de variabilidad, y de forma. De particular interés aquí es el sesgo estandarizado y la curtosis estandarizada, las cuales pueden usarse para determinar si la muestra proviene de una distribución normal. Valores de estos estadísticos fuera del rango de -2 a +2 indican desviaciones significativas de la normalidad, las cuales tenderían a invalidar muchos de los procedimientos estadísticos que se aplican habitualmente a estos datos; en este caso, todos estos valores están dentro del rango y, por tanto, la muestra se ajusta a una distribución normal.

Tabla 6: Correlaciones de los 22 alumnos

	Col_1	Col_2	Col_3	Col_4	Col_5	Col_6	Col_7	Col_8
Col_1		0,2094	0,1259	-0,2744	-0,2155	0,1796	0,0732	0,2254
		0,3497	0,5768	0,2166	0,3354	0,4239	0,7460	0,3133
Col_2			**0,6219**	0,3093	0,1143	**0,4841**	0,3444	0,3421
			<u>0,0020</u>	0,1613	0,6126	<u>0,0224</u>	0,1165	0,1191
Col_3				0,1770	-0,1941	0,3168	**0,4560**	0,3728
				0,4307	0,3866	0,1509	<u>0,0329</u>	0,0875
Col_4					0,3692	0,1718	0,3649	0,2046
					0,0908	0,4445	0,0949	0,3610
Col_5						-0,0625	0,0285	0,2742
						0,7825	0,8999	0,2168
Col_6							**0,4335**	0,1889
							<u>0,0438</u>	0,3997
Col_7								0,3458
								0,1149

Esta tabla muestra las correlaciones momento producto de Pearson, entre cada par de variables. El rango de estos coeficientes de correlación va de -1 a +1, y miden la fuerza de la relación lineal entre las variables. El segundo número en cada bloque de la tabla es un valor-P que prueba la significancia estadística de las correlaciones estimadas. Valores-P abajo de 0,05 indican correlaciones significativamente diferentes de cero, con un nivel de confianza del 95,0%. Los siguientes pares de variables tienen valores-P por debajo de 0,05 y en la tabla aparecen subrayados. Las correlaciones aparecen en negrita y corresponden a: lógico-matemática y espacial, lógico-matemática y interpersonal, espacial e intrapersonal, interpersonal e intrapersonal.

Gráfico 1: Cajas y bigotes

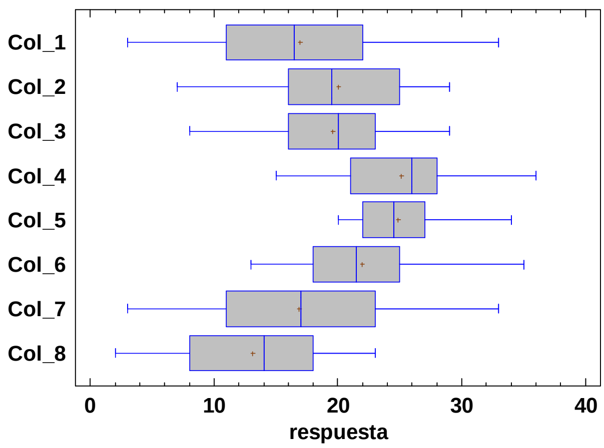


Tabla 7: ANOVA

Fuente	Suma de Cuadrados	Gl	Cuadrado Medio	Razón-F	Valor-P
Entre grupos	2639,64	7	377,091	9,69	0,0000
Intra grupos	6536,55	168	38,908		
Total (Corr.)	9176,18	175			

La tabla ANOVA descompone la varianza de los datos en dos componentes: un componente entre-grupos y un componente dentro-de-grupos. La razón-F, que en este caso es igual a 9,69186, es el cociente entre el estimado entre-grupos y el estimado dentro de grupos. Puesto que el valor-P de la prueba-F es menor que 0,05, existe una diferencia estadísticamente significativa entre las medias de las 8 variables con un nivel del 95,0% de confianza. En estudiantes de Bachillerato se han obtenido los datos estadísticos que se dan en la tabla siguiente tabla:

Tabla 8	Col_1	Col_2	Col_3	Col_4	Col_5	Col_6	Col_7	Col_8
Recuento	15	15	15	15	15	15	15	15
Promedio	23,13	17,86	20,53	21,67	26,13	26,27	22,13	20,07
Desviación Estándar	4,82	4,67	6,85	6,76	7,72	4,80	4,32	6,92
Coeficiente de Variación	20,85%	26,15%	33,38%	31,19%	29,53%	18,28%	19,53%	34,50%
Mínimo	16,0	9,0	7,0	8,0	11,0	16,0	15,0	6,0
Máximo	32,0	24,0	29,0	31,0	36,0	33,0	30,0	32,0
Rango	16,0	15,0	22,0	23,0	25,0	17,0	15,0	26,0
Sesgo Estandarizado	0,64	-0,41	-1,00	-1,29	-1,06	-0,40	-0,26	-0,26
Curtosis Estandarizada	-0,56	-0,54	-0,40	0,10	-0,56	0,037	-0,61	-0,12

Esta tabla es similar a la 5, se ha elaborado con el mismo procedimiento y, en este caso, todos estos valores están dentro del rango establecido y, por tanto, la muestra se ajusta a una distribución normal.

Tabla 9: Correlaciones de los 15 alumnos

	Col_1	Col_2	Col_3	Col_4	Col_5	Col_6	Col_7	Col_8
Col_1		**0,6441**	**0,5702**	**0,5865**	0,4984	**0,5348**	**0,5402**	**0,6521**
		0,0096	0,0265	0,0215	0,0586	0,0399	0,0376	0,0084
Col_2			0,3123	**0,5594**	0,0560	0,2754	**0,5842**	0,1504
			0,2570	0,0301	0,8429	0,3205	0,0222	0,5925
Col_3				0,3249	0,3942	0,1017	0,0746	0,4613
				0,2374	0,1459	0,7184	0,7917	0,0835
Col_4					0,0776	0,4673	0,2803	0,3792
					0,7834	0,0790	0,3116	0,1634
Col_5						0,0356	-0,1654	**0,5868**
						0,8998	0,5558	0,0215
Col_6							0,4763	**0,6053**
							0,0727	0,0168
Col_7								0,2837
								0,3056

Esta tabla se ha elaborado con el mismo programa y es similar a la tabla 6. Las correlaciones significativas aparecen en negrita y corresponden a: lingüística y lógico-matemática, lingüística y espacial, lingüística y corporal, lingüística e interpersonal, lingüística e intrapersonal, lingüística e naturalista, lógico-matemática y corporal, lógico-matemática e intrapersonal, musical y naturalista, interpersonal y naturalista.

Gráfico 2

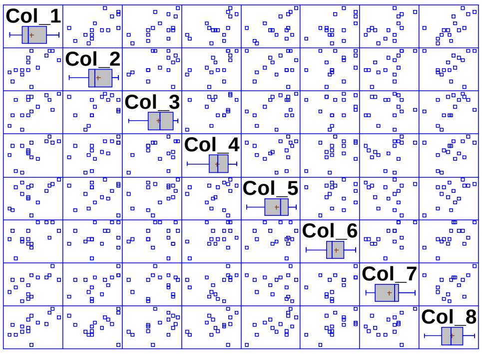


Tabla 10: ANOVA

Fuente	*Suma de Cuadrados*	*Gl*	*Cuadrado Medio*	*Razón-F*	*Valor-P*
Entre grupos	889,058	7	127,008	3,54	0,0018
Intra grupos	4017,87	112	35,8738		
Total (Corr.)	4906,93	119			

En esta tabla ANOVA aparece la razón-F, 3,54, que es el cociente entre el estimado entre-grupos y el estimado dentro-de-grupos. Puesto que el valor-P de la prueba-F es menor que 0,05, existe una diferencia estadísticamente significativa entre las medias de las 8 variables con un nivel de confianza del 95,0%. En estudiantes de Arquitectura se ha obtenido los datos estadísticos de la siguiente tabla:

Tabla No.11	*Col_1*	*Col_2*	*Col_3*	*Col_4*	*Col_5*	*Col_6*	*Col_7*	*Col_8*
Recuento	32	32	32	32	32	32	32	32
Promedio	22,0	14,06	19,31	19,09	24,34	25,34	21,66	17,69
Desviación Estándar	4,44	5,66	6,42	5,384	6,67	3,738	5,37	7,51
Coeficiente de Variación	20,20%	40,22%	33,23%	28,20%	27,38%	14,75%	24,81%	42,47%
Mínimo	13,0	2,0	5,0	8,0	13,0	19,0	11,0	3,0
Máximo	28,0	24,0	29,0	32,0	36,0	34,0	35,0	33,0
Rango	15,0	22,0	24,0	24,0	23,0	15,0	24,0	30,0
Sesgo Estandarizado	-0,54	-0,17	-1,12	0,39	-0,09	0,76	0,54	-0,22
Curtosis Estandarizada	-0,99	-0,76	-0,49	-0,05	-1,08	-0,49	0,08	-0,49

Los valores del sesgo y curtosis están dentro del rango y, por tanto, la muestra se ajusta a una distribución normal.

Tabla 12: Correlaciones de los 32 alumnos

	Col_1	Col_2	Col_3	Col_4	Col_5	Col_6	Col_7	Col_8
Col_1		**0,3825**	0,3077	**0,4584**	0,3420	**0,4545**	0,3067	0,2175
		0,0307	0,0867	0,0083	0,0554	0,0090	0,0878	0,2318
Col_2			0,1167	0,2529	0,1004	0,1866	0,2321	0,3057
			0,5246	0,1625	0,5847	0,3065	0,2012	0,0889
Col_3				**0,5611**	**0,4159**	0,1715	0,2043	0,2985
				0,0008	0,0179	0,3479	0,2620	0,0970
Col_4					0,3038	-0,0658	0,2197	0,3094
					0,0910	0,7207	0,2271	0,0848
Col_5						0,2722	-0,0903	0,2503
						0,1318	0,6232	0,1671
Col_6							-0,0036	0,0855
							0,9846	0,6417
Col_7								**0,3697**
								0,0373

Las correlaciones significativas aparecen en negrita y corresponden a: lingüística y lógico-matemática, lingüística y corporal, lingüística e interpersonal, corporal y espacial, corporal y musical, intrapersonal y naturalista.

Gráfico 3: ANOVA Gráfico para Col_1

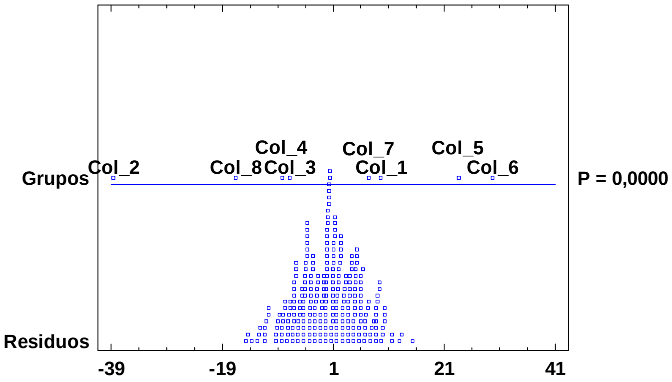


Tabla 13: ANOVA

Fuente	*Suma de Cuadrados*	*Gl*	*Cuadrado Medio*	*Razón-F*	*Valor-P*
Entre grupos	3025,0	7	432,143	13,02	0,0000
Intra grupos	8234,0	248	33,2016		
Total (Corr.)	11259,0	255			

Puesto que el valor-P de la prueba-F es menor que 0,05, existe una diferencia estadísticamente significativa entre las medias de las 8 variables con un nivel del 95,0% de confianza. En estudiantes de Ingeniería Informática se ha obtenido el siguiente resumen estadístico se presenta en la siguiente tabla:

Tabla No.14	*Col_1*	*Col_2*	*Col_3*	*Col_4*	*Col_5*	*Col_6*	*Col_7*	*Col_8*
Recuento	38	38	38	38	38	38	38	38
Promedio	22,45	14,95	20,37	20,5	24,84	25,5	22,08	17,34
Desviación Estándar	4,67	5,57	6,79	5,90	6,82	4,19	4,82	7,98
Coeficiente de Variación	20,78%	37,26%	33,35%	28,80%	27,47%	16,43%	21,87%	46,03%
Mínimo	14,0	2,0	5,0	8,0	11,0	16,0	11,0	3,0
Máximo	32,0	24,0	29,0	32,0	36,0	34,0	35,0	33,0
Rango	18,0	22,0	24,0	24,0	25,0	18,0	24,0	30,0
Sesgo Estandarizado	0,23	-0,35	-1,76	-0,87	-0,44	0,83	0,66	0,12
Curtosis Estandarizada	-1,11	-0,76	-0,57	-0,16	-1,20	-0,27	0,65	-0,76

En este caso, todos los valores del sesgo y curtosis están dentro del rango y, por tanto, la muestra se ajusta a una distribución normal.

Tabla 15: Correlaciones de los 38 alumnos

	Col_1	Col_2	Col_3	Col_4	Col_5	Col_6	Col_7	Col_8
Col_1		**0,5969**	**0,3665**	**0,4686**	**0,4276**	**0,5344**	**0,4039**	**0,4210**
		0,0001	0,0236	0,0030	0,0074	0,0005	0,0119	0,0085
Col_2			0,2920	**0,5252**	0,1583	**0,3254**	**0,4825**	**0,4502**
			0,0753	0,0007	0,3424	0,0462	0,0022	0,0046
Col_3				**0,3761**	**0,4532**	0,1539	0,1631	**0,4193**
				0,0199	0,0043	0,3564	0,3279	0,0088
Col_4					0,2569	0,2180	0,2640	**0,3850**
					0,1194	0,1886	0,1092	0,0170
Col_5						0,1730	-0,0833	**0,5665**
						0,2990	0,6192	0,0002
Col_6							0,1596	**0,3801**
							0,3384	0,0186
Col_7								**0,3750**
								0,0203

Las correlaciones aparecen en negrita y corresponden a: lingüística y lógico-matemática, lingüística y espacial, lingüística y corporal, lingüística y musical, lingüística e interpersonal, lingüística e intrapersonal, lingüística y naturalista, lógico-matemática y corporal, lógico-matemática y interpersonal, lógico-matemática e intrapersonal, lógico-matemática y naturalista, espacial y corporal, espacial y musical, espacial y naturalista, corporal y naturalista, musical y naturalista, interpersonal y naturalista, intrapersonal y naturalista.

Gráfico 4. Medias y 95,0 % de Fisher LSD

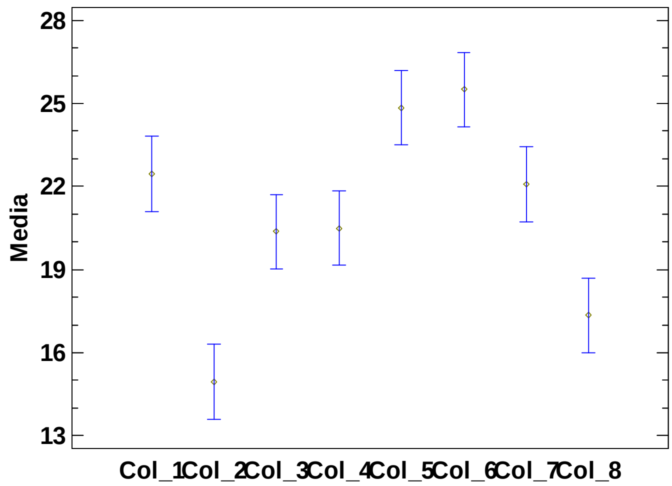


Tabla 16: ANOVA

Fuente	*Suma de Cuadrados*	*Gl*	*Cuadrado Medio*	*Razón-F*	*Valor-P*
Entre grupos	3379,5	7	482,785	13,55	0,0000
Intra grupos	10543,5	296	35,6199		
Total (Corr.)	13923,0	303			

Puesto que el valor-P de la prueba-F es menor que 0,05, existe una diferencia estadísticamente significativa entre las medias de las 8 variables con un nivel del 95,0% de confianza.

Conclusión

En el presente estudio se ha analizado el modelo de las Inteligencias Múltiples de Gardner, utilizando una metodología descriptiva y evaluando el desarrollo de las mismas en alumnos que cursaban estudios de Educación Secundaria Obligatoria, Bachillerato y Universidad.

El análisis de los resultados se realizó en función a los objetivos establecidos. En primer lugar, conforme a los fundamentos de la teoría de las Inteligencias Múltiples, se puede afirmar que los análisis realizado entre las diferentes inteligencias, ponen de relieve la presencia de validez discriminante de las escalas de evaluación de las inteligencias en algunos casos, sobre todo para las inteligencias: lingüística, lógico-matemática, corporal espacial, musical y naturalista, existiendo relación poco relevante entre las inteligencias interpersonal e intrapersonal. Asimismo, se pudo evidenciar los tipos de inteligencia más desarrollados en estudiantes de Educación Secundaria así como también en los de la Universidad de Valladolid, los alumnos de Educación Secundaria obtienen puntuaciones superiores en las inteligencias musical y corporal; sin embargo, los estudiantes universitarios de la UVa tienen más desarrollados los tipos de inteligencias lógico-matemática y lingüística y, por tanto, se puede afirmar que a mayor nivel educativo, mayores capacidades intelectuales. Además, cabe resaltar que la gran mayoría de los estudiantes tienen más desarrollada la inteligencia interpersonal que la intrapersonal, y que las mismas no marcan tendencias profesionales, pero, sin embargo, es muy importante en liderazgos para el ejercicio de la profesión, también se destaca la diversidad de tipos de inteligencia desarrollados por los estudiantes de la Uva y, sobre todo, que no siempre existe correspondencia con la carrera que estudian. Esta conjetura debiera ser confirmada mediante un estudio longitudinal en el que se estableciera hasta qué punto un perfil válido a cierta edad sigue siendo válido con el paso del tiempo.

Por otra parte, el tipo de inteligencia musical, además de tener orientaciones profesionales, también podemos entender como parte de la cultura como un elemento primordial en los diversos sistemas de educación que cada sociedad desarrolla, como la principal forma de transmisión del conocimiento y portadora de los valores, normas y significados para el individuo.

Se pudo establecer de forma significativa que los alumnos de Educación Secundaria obtienen puntuaciones superiores a las de los alumnos de la UVa en las inteligencias, musical y corporal. Sin embargo, la superioridad de los estudiantes de la UVa se manifiesta en los tipos de inteligencia espacial, musical, lógico-matemática y lingüística, aunque las diferencias no son estadísticamente significativas. Este resultado podría ser debido a factores culturales y contextuales.

Es importante mencionar lo que sustenta la teoría de las inteligencias múltiples y que constituye una gran aportación de Gardner para el entendimiento de la inteligencia humana y sus implicaciones en la educación, puesto que revela la capacidad del ser humano para involucrarse con todo tipo de sistemas simbólicos, es decir, la capacidad de hacer abstracciones y códigos que dan significados, la capacidad humana de resolver problemas, de percibir, crear y participar de los sistemas simbólicos de su entorno cultural. Así, podemos percibir que el lenguaje matemático es finalmente un sistema simbólico, el lenguaje oral y escrito, la música, el arte, y cualquier actividad o producción se basa en ese potencial humano darle un significado simbólico a todo lo que lo rodea.

Para concluir, vistas las diferencias significativas entre los alumnos de todos los grupos desde la perspectiva de las inteligencias múltiples, corroboradas estadísticamente, se señalan algunas propuestas para atender a la diversidad de los alumnos según el perfil derivado del modelo de evaluación de las inteligencias múltiples: Convendría observar las manifestaciones de los alumnos, bajo condiciones aún más complejas como las que resultan de las diversas interacciones grupales, ya que estos presuponen la combinación de diversos factores, tales como el respeto a reglas de juego, las diversas formas de comunicación entre los compañeros de equipo y con respecto al equipo contrario, en donde es factible observar la iniciativa, audacia, liderazgo de los alumnos, así como las actitudes de solidaridad, compañerismo, honradez, respeto, agresividad, ansiedad, inseguridad, etcétera; se debería valorar la inteligencia con pruebas contextualizadas, utilizar materiales ricos en contenido, proponer actividades que atiendan a la diversidad de inteligencias, los educadores deberían reconocer en sus alumnos esta diversidad que conlleva distintos estilos de aprendizaje y, por tanto, requieren distintos estilos de enseñanza; este modelo permitiría establecer conexiones o puentes entre el aula y la comunidad en general. Llevar a cabo este modelo de enseñanza implica mucho tiempo, esfuerzo y prudencia para planificar y desarrollar el proceso por parte del profesorado; Además, exige muchas interacciones entre los alumnos y con el profesor.

Bibliografía

Armstrong, Th. (1994). *Multiple Intelligences in the classroom*. Association for Supervision and Curriculum Develompment.

Antunes, C. (1998). *Estimular las inteligencia múltiples.* Madrid: Narcea.

Ballester, P. (2004). *Evaluar y Atender la Diversidad de los alumnos desde las Inteligencias Múltiples*. Tesis Doctoral Universidad de Murcia.

Ferrandiz, C. (2000) *Inteligencias Múltiples y currículum escolar*. Tesis de Licenciatura Universidad de Murcia.

García, A. (2008). *Educación matemática atendiendo a la diversidad. Análisis de una metodología específica.* Tesis doctoral. Universidad de Valladolid.

Gardner, H. (1983). *Frames of mind*. New York: Basic Books.(Traducción castellano, *Estructuras de la mente. La teoría de las Inteligencias Múltiples.* México: Fondo de Cultura Económica, 1987.Última Edición 2001).

Gardner Howard, (1987), Estructuras de la mente. La teoría de las múltiples inteligencias, F.C.E., México

Gardner Howard, (1998), Inteligencias Múltiples. La teoría en la práctica. Paidós, Barcelona.

Gardner Howard, (1995), Mentes creativas, Paidós, Barcelona

Gardner, H. (1991b). *The unschooled mind. How children think and how schools should teach.* New York: Basic Books. (Traducción castellano, *La mente no escolarizada. Cómo piensan los niños y cómo deberían enseñar las escuelas.* Barcelona: Paidós, 1993).

Gardner, H. (1993). *Multiple Intelligences. The theory in practice*. New York: Basic Books. (Traducción Castellano. *Inteligencias Múltiples: la teoría en la práctica.* Barcelona: Paidós, 1995. Última Edición 1998).

Gardner, H. (1993). *Creating minds: An anatomy of creativity*. New York: Basic Books. (Traducción Castellano, *Mentes creativas.* Barcelona: Paidós, 1997).

Maslow, A. H. (1954). *Motivation and Personality*. New York: Harper y Row.

M.E.C. (2002). *Ley Orgánica de la Calidad de la Educación (LOCE)*. Madrid: Ministerio de Educación y Ciencia.

Piaget, J. (1947). *La Psicologie de l`intelligence*. París : Colin. (Traducción castellano, *La psicología de la inteligencia*. Buenos Aires: Psiqué, 1995)

Sternberg, R.J. (1997). *Inteligencia Exitosa*. Barcelona: Paidós.

Sternberg, R.J. y Detterman, D.K. (Ed.) (1988). *¿Qué es la inteligencia?* Madrid: Pirámide.

Perla Nancy Sosa: Doctora en Gestión Educativa y Profesora Titular de la Universidad Nacional de Itapúa.Paraguay. perlawood@gmail.com

Tomás Ortega. Catedrático de Didáctica de la Matemática de la Universidad de Valladolid (España). Autor y coautor de más de 100 trabajos de investigación publicados, director de ocho tesis doctorales I+D. ortega@am.uva.es.

UNIÓN
REVISTA IBEROAMERICANA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA

Junio de 2011, Número 26, páginas 103-116
ISSN: 1815-0640

La implementación del seminario integrador en la asignatura Modelos y Simulación

Sonia Itatí Mariño; María Victoria López; Romina Alderete

Resumen

Este trabajo describe una instancia de evaluación representada por un seminario integrador, y los resultados obtenidos en su implementación en la cohorte 2009, en una asignatura de matemática aplicada. Su propósito es la formación de los estudiantes en la aplicación de la técnica de simulación en la resolución de problemas basados en casos reales.

Abstract

This paper describes an evaluation instance represented by an integrative seminar, and the results of its implementation in the cohort 2009, in a subject of applied mathematics. Its purpose is to train students in the application of simulation techniques in solving problems based on real cases. Its purpose is to train students in the application of simulation techniques in solving problems based on real cases.

Resumo

Este trabalho descreve uma instância de avaliação representada por um seminário integrador, e os resultados obtidos em seu implementación na cohorte 2009, numa matéria de matemática aplicada. Seu propósito é a formação dos estudantes na aplicação da técnica de simulación na resolução de problemas baseados em caso reais.

Introducción

La asignatura **Modelos y Simulación**, pertenece al plan de estudios de la carrera de Licenciatura en Sistemas de Información de la Facultad de Ciencias Exactas y Naturales y Agrimensura de la Universidad Nacional del Nordeste (FACENA-UNNE). Nació con la puesta en marcha de la Carrera de Licenciatura en Sistemas, Plan 1988, y tuvo siempre el carácter de optativa, entre otras asignaturas. Los contenidos del programa de la asignatura pertenecen al campo de la Matemática Aplicada. Siguiendo a Gil Chaveznava (2007), es posible afirmar que Modelos y Simulación es una asignatura de formación complementaria. Es decir, brinda los conocimientos, habilidades y valores que otorgan al estudiante una visión más amplia de su profesión y del mundo. El plan de estudios de la carrera describe un conjunto de conocimientos, habilidades y actitudes que definen el perfil profesional de los graduados. Entre éstas se encuentra la habilidad para el manejo sistemas de simulación computarizados, que junto a la capacidad para modelizar, constituyen el objeto de estudio de la asignatura.

Por otra parte, con el objeto de lograr la conexión con el campo profesional y disciplinar, se buscan introducir en el desarrollo de las clases, ejemplos basados en situaciones reales de dominio técnico o académico/científico, para ilustrar a los futuros egresados cómo estos problemas pueden resolverse empleando los temas abordados en la asignatura.

En la siguiente figura se ilustra el número de alumnos inscriptos, regulares y promocionales en las cohortes 2005, 2007, 2008 y 2009 de la asignatura.

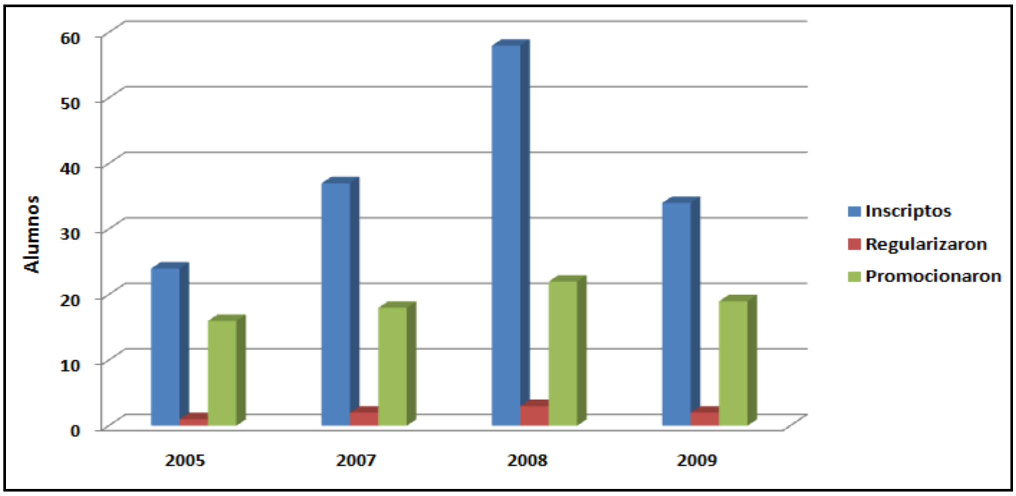


Fig. 1. Alumnos inscriptos, regulares y promocionales en las cohortes 2005-2009 de la asignatura "Modelos y Simulación"

Esta asignatura proporciona a los alumnos conocimientos sobre el desarrollo de modelos de tipo matemático, los cuales son utilizados para simular una amplia gama de sistemas reales. Estos conocimientos deben necesariamente ser complementados con los adquiridos en otras asignaturas (lenguajes de programación, paradigmas de desarrollo, técnicas de análisis de sistemas, cálculo de probabilidades y estadística) para resolver los Trabajos Prácticos propuestos. Se requiere un razonamiento inteligente por parte de los alumnos para seleccionar aquellos lenguajes y modelos que mejor se adapten a la resolución del problema que se les presenta. Se pretende generar un trabajo original y creativo que propicie en los alumnos la utilización de las distintas herramientas tecnológicas y los conocimientos con los que dispone, a partir de un proceso de aprendizaje que se inició al comenzar la Carrera.

De este modo, se lleva a cabo una integración con otras asignaturas del plan de estudios, logrando así la interconexión entre los contenidos de diversas ciencias, mezclando de manera inteligente los elementos de unas asignaturas con los de otra para el análisis del objeto de estudio, en este caso los modelos de simulación.

La integración vertical de los contenidos se da mediante la aplicación de conceptos estudiados y tratados profundamente en asignaturas previas del plan de estudios: Programación I a IV, Probabilidad y Estadística, Investigación Operativa (Optativa I), Laboratorio de Programación. Para establecer el nexo vertical se aborda el estudio de un objeto (modelos de simulación) basado en conocimientos previos, pero con una hondura y extensión mayor, relacionada con el desarrollo del estudiante en el tiempo. Por otra parte, se intenta llevar a cabo una vinculación de algunos de los temas del programa con los temas desarrollados en la asignatura Métodos Numéricos, la cual se dicta en el mismo cuatrimestre para los alumnos del mismo año, completando así la integración horizontal de conocimientos. Resulta de importancia establecer un contacto fluido con otras áreas que integran el currículo, para saber qué necesidades hay que cubrir, y adecuar los procedimientos didácticos que mejor resultado brinden para lograr el fin común.

El establecimiento de nexos horizontales y verticales en la carrera permite guardar cierta secuencia temporal, lógica y pedagógica en la presentación de temas interrelacionados o que se complementen, aunque pertenezcan a disciplinas distintas (Matemática, Informática). Asimismo, permite evitar la presentación de puntos de vista diferentes o reiteraciones, que no se sustenten en la adquisición de un nuevo aprendizaje o la transferencia a otro objeto de estudio.

Se considera que esta asignatura se basa en el modelo constructivista y la modalidad de aprendizaje mixto o b-learning. Como lo expresan Sosa Sánchez-Cortés et al. (2005) "La teoría del aprendizaje constructivista es una de las principales teorías a desarrollar e implantar en los entornos de enseñanza aprendizaje basados en los modelos b-learning, estos modelos se centran en la hibridación de estrategias pedagógicas, propias y específicas, de los modelos presenciales y estrategias de los modelos formativos sustentados en las tecnologías Web".

Es decir, que al hablar de "b-learning o blended learning" se está significando la combinación de enseñanza presencial con tecnologías para la enseñanza a distancia, o aquellos procesos de aprendizaje realizados a través de los sistemas y redes digitales, pero en los que se establecen una serie de sesiones presenciales o situaciones que propician el contacto cara a cara (García Arieto, 2007).

En la cátedra Modelos y Simulación, desde el año 2005, se aplica la modalidad de **aprendizaje combinado o blended learning** caracterizada en trabajos descriptos por López et al. (2007), Mariño et al. (2007a), Mariño et al. (2007b). Este trabajo, enmarcado en las acciones de docencia, extensión e investigación impulsadas desde la cátedra Modelos y Simulación sintetizadas en Mariño et al. (2008), describe la experiencia áulica de un seminario integrador como estrategia de evaluación en el año 2009. Su propósito fue propiciar situaciones en las cuales los estudiantes no se limiten a la mera adquisición y acumulación del conocimiento accesible, mediante el material seleccionado y/o elaborado desde la cátedra. Se enfatiza la adquisición de destrezas para saber dónde, cómo y cuándo deben aplicar los aprendizajes en la resolución de problemas basados en casos reales.

El seminario constituye un modo de implementar "la enseñanza, por medio de la resolución de problemas". Esta última se centra en la transferencia de habilidades que permitan al estudiante, enfrentar situaciones problemáticas superando la descontextualización de la clase. En efecto, el "problema", a diferencia del "ejercicio", no tiene como componente esencial la repetición o aplicación de una solución estandarizada, las soluciones abiertas, caracterizan a la mayor parte de las situaciones problemáticas en el mundo real. Un problema supone una situación que carece de modelos automatizados para imitar, es decir, no hay un plan a copiar, Es decir, se reflejan =situaciones que acontecen en la realidad.

El trabajo se compone de cuatro secciones. En esta primera sección se caracterizó la asignatura objeto de estudio y la modalidad de dictado; y .la instancia de evaluación plasmada en un seminario integrador orientado a integrar vertical y horizontalmente los contenidos. La segunda sección aborda la metodología aplicada en la sistematización de los datos. En la tercera sección se sintetizan los resultados obtenidos con la implementación de esta estrategia en la cohorte 2009. Finalmente, se comentan algunas conclusiones y futuros trabajos.

En la asignatura se enfatiza la búsqueda y solución de problemas científicos y profesionales aplicando técnicas específicas. Es decir, esta nueva forma de evaluar persigue, como otros objetivos, que los estudiantes observen de las situaciones reales problemas que puedan ser formalizados, abstraídos y abordados mediante la aplicación de técnicas de modelización y simulación de sistemas. Se adhiere a lo expuesto por González Arias et al. (2009) en que “La última fase del proceso de enseñanza-aprendizaje debe ser la evaluación, y en ésta tenemos que hacernos eco de todo el proceso anterior”. El propósito de la puesta en escena de esta modalidad de valoración de los conocimientos adquiridos, es rescatar el valor de la evaluación como recurso de aprendizaje y medio de formación. Es decir, siguiendo a Álvarez Méndez (2003), se intenta hacer de la evaluación un procedimiento de aprendizaje, un recurso de investigación y formación.

Como se expresó en trabajos previos (Mariño et al., 2009), la cátedra adhiere a la denominada ***evaluación formativa y la evaluación alternativa.***

En referencia a la **evaluación formativa,** se concuerda con Álvarez Méndez (2003), en que los alumnos deben aprender con ella y a través de ella. El planteamiento de esta modalidad de evaluación, tal como se aborda en la asignatura, coincide con la propuesta de Litwin (1998), en el sentido de que permite analizar lo consolidado; posibilita procesos reflexivos novedosos; dispone al buen pensar; fomenta la reflexión y el pensamiento critico; permite reconocer maneras de comprender de los estudiantes y constituye una instancia en donde se “rompe” la mera reproducción de los conocimientos, de manera que, el almacenamiento de la información juega un lugar de privilegio. Además, dice que “desde una perspectiva cognitiva, se plantean actividades que cambian el lugar de la evaluación como reproducción de conocimientos por el de la evaluación como producción, pero a lo largo de diferentes momentos del proceso educativo y no como etapa final”.

Se coincide con lo mencionado por Camilloni (1998).en que esta instancia de evaluación, realizada sobre las producciones de los alumnos, permite analizar los logros, errores y dificultades a lo largo del proceso de enseñanza-aprendizaje.

Asimismo, se acordó con los alumnos los criterios de evaluación según lo expuesto por Bélair (2000) en Álvarez Méndez (2003). Se explicitaron con claridad y transparencia los criterios y normas de convivencia, de trabajo y de evaluación, siendo las claves para establecer cauces de entendimiento y de colaboración en la tarea compartida de aprender.

Tal como expresa Álvarez Méndez (2003) “la evaluación no es ni puede ser un apéndice de la enseñanza. Es parte de la enseñanza y del aprendizaje. Si la evaluación no es fuente de aprendizaje queda reducida a la aplicación elemental de técnicas inhibiendo u ocultando procesos complejos que se dan en la enseñanza y en el aprendizaje. En estos casos, la evaluación se confunde con el instrumento que es el examen".

Mateo (2000) menciona que la **evaluación alternativa** es el enfoque que enfatiza el uso de métodos que faciliten la observación directa del trabajo de los alumnos y de sus habilidades. La evaluación objeto de análisis de este trabajo se encuadra en las técnicas de evaluación alternativas de resolución de problemas o análisis de casos. Por otra parte, según la taxonomía de Sanders (Zabalza, 1989), podría clasificarse como "cuestiones de aplicación a situaciones prácticas de principios generales". Es decir, el alumno integra los conocimientos adquiridos previamente sobre series de números aleatorios, muestras artificiales, la metodología propuesta desde la cátedra y los casos de modelización y simulación de problemas, para plantear una posible solución a un caso de estudio de su elección abstraído de la realidad.

Uno de los objetivos de esta instancia de evaluación, plasmada en el seminario, es integrar los contenidos teórico-prácticos abordados en esta asignatura y en otras del plan de estudios como son los tratados en cinco asignaturas de Programación, Investigación Operativa, Probabilidad y Estadística y Laboratorio de Programación. Específicamente el alumno debe elaborar un problema, diseñar un modelo y resolverlo mediante la aplicación de la técnica de la simulación como una alternativa de tratar representaciones de casos reales. Considerando que la cátedra brinda una serie de paquetes de software de prácticas, los alumnos pueden optar por reutilizarlos o generar los propios programas.

Por otra parte, a fin de afianzar las condiciones discursivas de los estudiantes se solicita la redacción de un informe. Este material constituye una síntesis explicativa de la modelización y simulación en computadoras abordada. Asimismo, las instancias de exposición, permiten la construcción social del conocimiento, ya que al compartir las producciones, no sólo adquieren habilidad en la elaboración de informes, manuscritos y papers, sino que se estimula la expresión, la justificación, la argumentación, el intercambio de ideas, la defensa de puntos de vistas individuales o grupales y la elaboración de propuestas ante sus pares. Se considera que esta modalidad es una alternativa de promoción del pensamiento crítico y el uso de determinadas estrategias cognitivas como análisis, evaluación y síntesis.

A continuación se sintetizan algunas fundamentaciones que promueven el seminario como una instancia de evaluación integral:

- La incorporación del seminario constituye un espacio formativo: los alumnos deben aprender con ellos y mediante el desarrollo de las tareas asignadas. El ejercicio de la evaluación debe ser, ante todo, un apoyo y un refuerzo en el proceso de aprendizaje, del que sólo se espera el beneficio para quien aprende, que será simultáneamente beneficioso para quien enseña. La tarea del profesor persigue de este modo asegurar un aprendizaje reflexivo, en cuya base está la comprensión de contenidos de conocimiento, tal como los sostiene Álvarez Méndez (2003).

- Puesta en práctica de estrategias que favorecen el aprendizaje constructivo, con sustento en significaciones personales basadas en relaciones conceptuales pertinentes, que incentivan y favorecen ese proceso. Esta instancia permite al alumno poner en juego estos aspectos teóricos transfiriéndolos a situaciones empíricas. Es decir, se propicia la articulación teoría–empiria. Estos procesos facilitan el meta-conocimiento y el meta-aprendizaje a los que alude Celman (1998), favoreciendo un aprendizaje autónomo.
- Instancia formativa que permite conocer los caminos recorridos por los alumnos en la construcción y organización del conocimiento, las dificultades que pueden encontrar, los obstáculos que tienen que superar coincidiendo con Álvarez Méndez (2003).
- Eliminación de las instancias de evaluaciones parcializadas, aisladas y descontextualizadas (Wolf et al., 1996), focalizándose en el desarrollo de una instancia integral.
- Rescate del valor de la evaluación como recurso de aprendizaje y medio de formación. Es decir, convertir a la evaluación en un procedimiento de aprendizaje, un recurso de investigación y formación Álvarez Méndez (2003).
- Empleo de la corrección pormenorizada o por clave descripta por Zabalza (1989), en el que aparecen delimitadas las características a constatar en el producto a evaluar. No se toma éste como un todo, sino que se descompone en categorías o aspectos. Los docentes determinan con anterioridad qué es lo importante o deseable que cada ítem tenga como mínimo, y asignan un valor proporcional a cada categoría, en función de las dimensiones consideradas más relevantes según los propósitos de enseñanza, totalizando 10 puntos. Por ejemplo: i) *Breve análisis del problema y metodología que se ha de aplicar para resolverlo (1 punto). ii) Descripción de variables y parámetros intervinientes (1 punto). iii) Diagrama de flujo correspondiente (3 puntos). iv) Programación del modelo en un lenguaje a elección (5 puntos).*
- Empleo del sistema de calificación simbólica, mediante un número del 1 al 10, similar a los descriptos por Zabalza (1989) y Camilloni (1998).

En referencia a las "estrategias de aprendizaje", las habilidades de "aprender a aprender", se aborda la formación de individuos capaces de un mayor manejo autónomo de herramientas cognitivas (Celman, 1998). En la asignatura, el desarrollo de modelos de simulación aplicados a casos particulares, constituye un ejemplo de la formación que desde la cátedra se intenta incentivar. La programación de los modelos y la generación de las simulaciones, así como el CD interactivo elaborado ad-hoc, constituyen estrategias alternativas. Asimismo, la elaboración y exposición del informe en el seminario, constituyen distintos momentos en que los estudiantes construyen las estrategias de aprendizaje en referencia a los distintos objetos de conocimiento.

La modalidad del seminario integrador brinda al cuerpo docente elementos que permiten apreciar o juzgar el trabajo de los alumnos de una manera integral y no fragmentada, evidenciando el grado de comprensión de los contenidos y su aplicación en la resolución de situaciones reales o cotidianas. Asimismo, permite a los estudiantes integrar instancias de seguimiento y evaluación que lo anteceden.

Se puede afirmar que este tipo de evaluación es “diagnóstica”, debido a que los resultados obtenidos son considerados como un instrumento de retroalimentación en el proceso de enseñanza.

Altamirano (2006) sostiene que el empleo de estrategias cognitivas permite que el alumno pueda recordar y utilizar, sin mayor problema, un conocimiento en el proceso de adquisición de otro nuevo, es decir, la fabricación de andamiajes en el proceso. Siguiendo esta línea de pensamiento, en el desarrollo de esta modalidad de evaluación se contemplaron los siguientes aspectos:

- Considerar lo que el alumno es capaz de hacer y aprender en un momento determinado.
- Tener en cuenta los conocimientos previos.
- Situar la zona de desarrollo próximo.
- Fomentar el aprendizaje significativo.
- Priorizar la funcionalidad de lo que se aprende.
- Enfatizar la actividad del alumno.

Metodología

A fin de evaluar los aprendizajes de los estudiantes, que optan por esta asignatura, se realizó un análisis de las producciones del seminario integrador. Finalizadas las exposiciones y la devolución de las mismas, éstas se sistematizaron.

El estudio fue exploratorio. Se siguió el criterio de la representatividad exhaustiva, debido a que “se selecciona a toda la población indicada en la problemática a estudiar y no a una muestra” (Sagastizábal et al, 1999 en Díaz y del Lago, 2008).

Se aplicó la técnica de observación documental considerando el “estudio de los documentos, hoy día de muy diversos tipos y de soportes muy variados, con la peculiaridad de que siempre nos darían una observación mediata de la realidad” (Aróstegui, 2001 en Díaz y del Lago, 2008). En este trabajo, la observación documental se centró en el análisis del problema y su tratamiento, aplicación de conceptos abordados en la asignatura y en el informe o memoria técnica elaborada por los estudiantes.

En relación con el análisis de datos, se trabajó con análisis de contenido, es decir, el “conjunto de operaciones, transformaciones, reflexiones, comprobaciones que se realizan para extraer significados relevantes en relación con los objetivos de la investigación. El fin de este análisis es agrupar los datos en categorías significativas para el problema investigado” (Sagastizábal et al, 1999 en Díaz y del Lago, 2008).

Resultados y discusión

La asignatura “Modelos y Simulación” se compone de cuatro grandes ejes temáticos o disciplinares. El primero comprende las unidades donde se introducen los temas de sistemas, modelos, simulación y metodología de un estudio de simulación. El segundo eje aborda la generación de series de números pseudoaleatorios. El tercer eje temático trata la construcción de muestras artificiales representativas de distintas distribuciones de probabilidades, discretas y continuas. El cuarto eje integra los contenidos teóricos y prácticos abordados en la asignatura, mediante la modelización y construcción de simulaciones representativas de casos reales.

La producción presentada por el alumno incluye:

- **Breve análisis del problema y metodología a aplicar para resolverlo.** Descripción de las técnicas a utilizar para generar las series de números aleatorios y las muestras artificiales, y explicación detallada del modelo de simulación a desarrollar.
- **Diagrama de flujo.** Elaboración de un diagrama de flujo del procedimiento de simulación, empleando la simbología adecuada. Aquí se realiza una integración vertical con contenidos abordados en otras asignaturas.
- **Descripción de variables y parámetros intervinientes**. Confección de un listado con las variables y parámetros (constantes) que intervienen en el algoritmo, explicando el significado de cada uno.
- **Programación del modelo en un lenguaje a elección**. El software de simulación incluye los procedimientos de generación de series de números pseudoaleatorios, muestras artificiales y el modelo. El alumno debe codificar en un lenguaje de programación los procedimientos planteados previamente en formato de diagrama de flujo, para ejecutarlos en computadora.
- **Prueba de escritorio**. Generación de pruebas de escritorios del procedimiento de generación de series de números pseudoaleatorios y la muestra artificial. El alumno debe realizar al menos 5 iteraciones, dando valores a las variables y parámetros. Se considera que esta actividad permite determinar si realmente el alumno comprende los pasos aplicados para la generación de la muestra artificial, o si aplica los procedimientos por mera repetición de contenidos.

Asimismo, las consignas del seminario especifican las pautas de evaluación. Entre ellas se mencionan:

- Originalidad. El modelo propuesto es original o introduce alguna modificación a los problemas planteados en la clase.
- Aplicabilidad en la resolución de problemas reales
- Claridad en la expresión verbal y escrita
- Integración de los contenidos abordados en la asignatura
- Empleo de generadores de números pseudoaleatorios. Se utiliza uno o varios generadores.
- Empleo de pruebas estadísticas. Se utiliza alguna prueba de validación estadística de los resultados.
- Ejecución de varias corridas, exposición de resultados y explicación de los mismos.
- Propuestas de mejoras y/o modificación como líneas futuras de trabajo

En la Tabla 1 y la Figura 2 se sintetizan las modelizaciones abordadas y expuestas por los estudiantes.

La mayoría de los grupos simuló sistemas de inventario de diferentes articulos (medicamentos, productos al por mayor, cigarrillos, bebidas, autos, pizzas). Otros grupos desarrollaron modelos para simular un juego de tragamonedas, una central hidroeléctrica y un sistema de transporte de maderas. La sistematización de éstas producciones permitió, parafraseando a Jorba y Sanmartí (2000) detectar"... las representaciones mentales del alumno y las estrategias que utiliza para llegar a un resultado determinado".

En las figuras 3 a 5 se ilustran en procentajes las decisiones tomadas por los alumnos en la realización del trabajo integrador de seminario.

Tabla 1. Síntesis de las modelizaciones abordadas por los alumnos de la asignatura en el trabajo de seminario del ciclo lectivo 2009

Número de integrantes por grupo	(G1) 4	(G2) 3	(G3) 2	(G4) 1	(G5) 1	(G6) 2	(G7) 2	(G8) 3	(G9) 3
Tipo de problema [1]	A	A	C	D	A	B	D	A	A
Generador números pseudoaleatorios[2]	MU	MX	MX	MU	MU	MU	AD	MU	MX
Distribución teórica de la muestra artificial [3]	EM	EM	BI	NO	NO	EM	EM	EM	NO
Lenguaje de Programación [4]	JA	C++	ML	JA	ML	JA	ML	ML	JA
Tipo de Software [5]	SL	SP	SP	SL	SP	SL	SP	SP	SL
Valores de parámetros a ingresar	SI	SI	NO	SI	SI	SI	SI	NO	SI
Ejecución de varias corridas de la simulación	SI	NO	SI	SI	SI	SI	NO	SI	SI
Desarrollo de gráficos	NO	NO	NO	NO	SI	NO	NO	NO	NO
Pruebas de hipótesis: CHI Cuadrado	NO	NO	NO	NO	SI	NO	NO	NO	NO

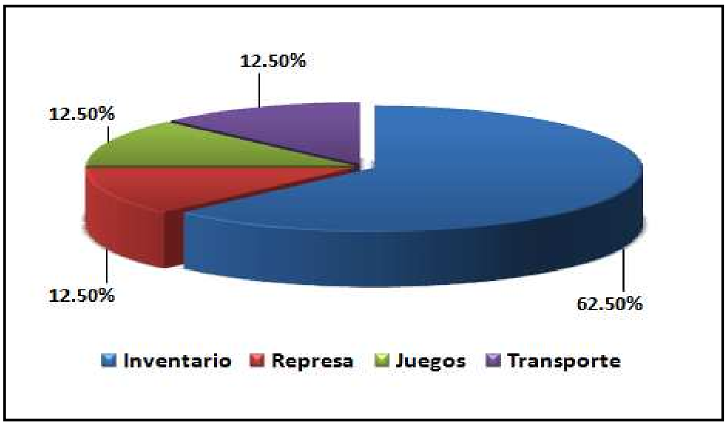


Fig. 2. Tipos de problemas seleccionados por los alumnos

[1] A: Inventarios; B: Represa; C: Juegos; D: Transporte.
[2] AD: Método Aditivo de Congruencias; MU: Método Multiplicativo de Congruencias; MI: Método Mixto de Congruencias.
[3] NO: Ninguna; PO: Poisson; NO: Normal; BI: Binomial., EM: empírica
[4] JA: Java; ML: MatLab; C++: lenguaje C++.
[5] SL: Software libre; SP: Software propietario.

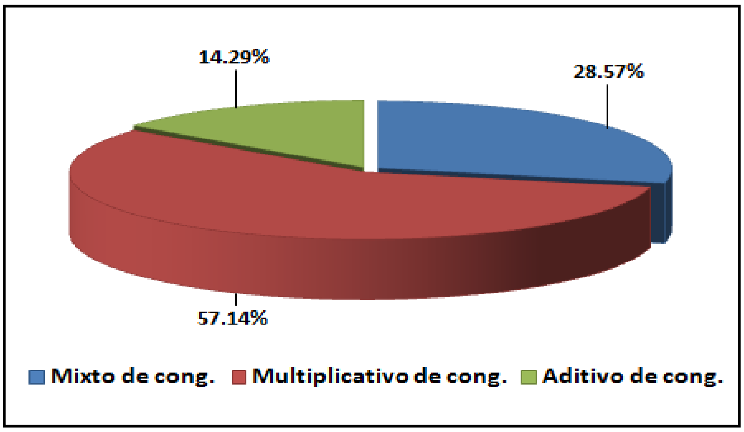


Fig. 3. Generadores de números pseudoaleatorios seleccionados elegidos por los alumnos

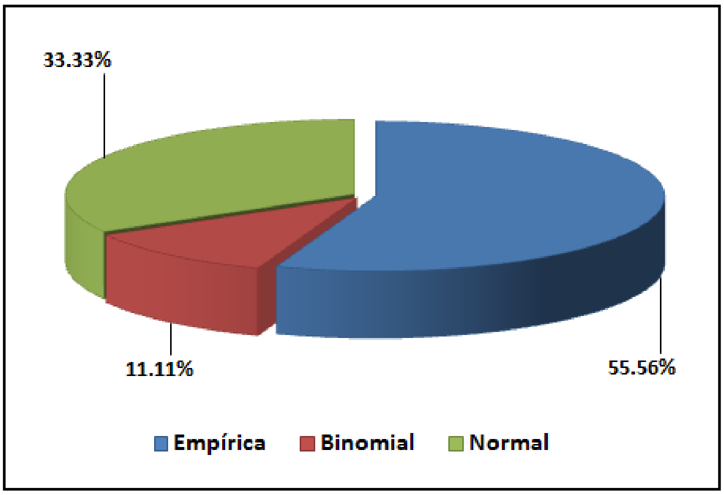


Fig. 4. Distribuciones teóricas y empíricas seleccionadas por los alumnos para la construcción de la muestra artificial

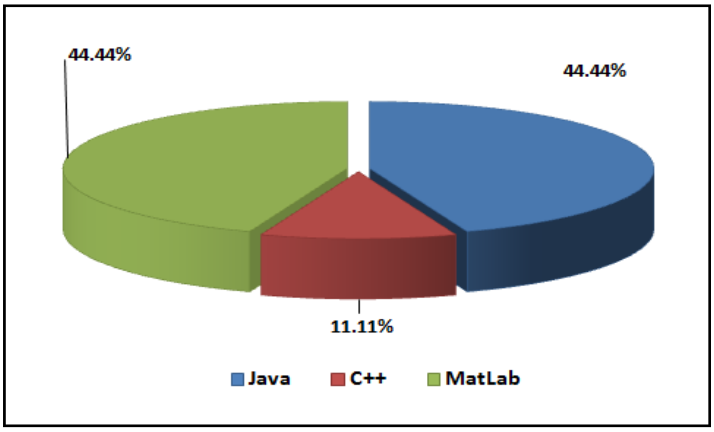


Fig. 5. Lenguajes de programación elegidos por los alumnos para la programación del modelo de simulación

Las observaciones se pueden resumir en las siguientes líneas:

- El 100% de los grupos empleó los métodos de las congruencias para obtener números pseudoaleatorios. Al respecto, se observa que, aún cuando el usuario puede ingresar los parámetros, no permiten la elección del método generador, flexibilidad que resultaría de utilidad con fines de evaluación del comportamiento del modelo.
- Con respecto a la construcción de muestras artificiales, el 33.33% de los alumnos generó una muestra de elementos que sigue la distribución Normal, el 11.11% de los alumnos eligió simular la distribución binomial, y el resto eligió distribuciones empíricas.
- Se detectó un mínimo grado de innovación en el planteamiento de nuevos modelos. La mayoría de los estudiantes no plantearon nuevas ideas, es decir, se basaron en los modelos tratados en las clases de teoría-práctica y en las clases de prácticas y laboratorio, adecuándolos a otras situaciones.
- Determinadas cuestiones referentes a situaciones regionales que pueden ser elementos contextuales de influencia - como por ejemplo, el continuo corte del puente interprovincial, que en este caso une dos ciudades que comunican Argentina con otros paises del Mercosur, cortes de energia eléctríca, entre otros- comentados en clases presenciales fueron plasmados en los ejercicios.
- En el 77,77% de los grupos se realizaron experimentaciones del comportamiento del modelo, empleando en un mismo porcentaje diferentes parámetros en el proceso de generación de números pseudoaleatorios.
- Sólo un grupo incluyó en su presentación la metodología propuesta desde la cátedra y la adecuaron al problema tratado.
- Los alumnos seleccionaron como lenguaje de programación los tratados en asignaturas del plan de estudios de la carrera, como son Java (software libre), C++ (software propietario) y MatLab (software propietario). El primero y el último son requeridos para la elaboración de trabajos prácticos de otras asignaturas que cursan simultáneamente los alumnos en este nivel de la carrera. Asimismo, ninguno de los alumnos optó por Mathematica, aún cuando la cátedra proporciona numerosas librerías o paquetes que implementan los generadores de números pseudoaleatorios, el método de los números ínidces, y numerosos ejemplos referentes a la construcción de muestras artificiales que responden a una diversidad de distribuciones teóricas de probabilidad y empíricas.
- El empleo de representaciones gráficas y elaboración de estadísticas fue mínimo. Sólo un trabajo incluyó la generación automática de gráficos desde la aplicación desarrollada por los mismos alumnos. Asimismo, se detectó que tres grupos realizaron gráficas empleando una planilla de cálculos.

Esta experiencia áulica evidenció que las dificultades en diversos aspectos de la formación de los alumnos, se arrastran desde los años anteriores de la Carrera. Las falencias se presentan generalmente en el manejo de lenguajes de programación y conceptos de diseño y desarrollo de sistemas.

Las críticas y observaciones de los docentes a los trabajos de los alumnos siempre se hacen de un modo constructivo y argumentando el porqué de las mismas. De este modo, como enuncia Álvarez Méndez (2003), “los docentes están ahí para orientar y ayudar a superar cuanta barrera se presente, con ánimo de superación e intención de aprendizaje. Esta es la función real de la educación formativa, porque al ejercerla debe formar, explicar, educar, estimular, fortalecer, capacitar, perfeccionar. Su fuerza está en las explicaciones y en los argumentos que siguen a las correcciones. La evaluación entonces es un recurso al servicio de la práctica docente que asegura el éxito de quien aprende." La postura sostenida desde la cátedra coincide con Ehuletche et al. (2009), quienes consideran que la "actividad tutorial está claramente definida por el nivel, la modalidad y el encuadre institucional".

Conclusiones

La modalidad de evaluación descripta permitió sistematizar y observar las producciones grupales y/o individuales de los alumnos de la asignatura "Modelos y Simulación" de la carrera de Licenciatura en Sistemas de Información de la FACENA-UNNE, contemplando la diversidad de las expresiones del saber. El desarrollo de la misma requirió la realización de procesos interpretativos, reflexivos y expresivos por parte de los estudiantes, plasmados en la selección, formalización y construcción de un modelo de simulación integrando los cuatro ejes temáticos que componen la asignatura.

La propuesta de integración-evaluación de conocimientos adquiridos estimula la justificación, la argumentación, el intercambio de ideas y la elaboración de propuestas ante sus pares y los docentes. La búsqueda y resolución de un problema, basado en la realidad, tuvo como propósito el desarrollo de habilidades individuales y grupales. Al solicitar a los estudiantes que expliciten su pensamiento, ellos deben organizar sus conocimientos e interpretaciones de los contenidos abordados en la asignatura y verter sus opiniones formalizadas ante sus pares y ante el cuerpo docente.

El seminario integrador es un valioso instrumento para el cuerpo docente, ya que a través de las producciones, se puede apreciar o juzgar el trabajo de los alumnos de una manera integral y no fragmentada. Asimismo, permite analizar el grado de progreso del alumno en cada etapa de la elaboración del producto final, obteniendo evidencias del trabajo realizado a lo largo del curso. Es decir, que se lleva a cabo una evaluación "diagnóstica", la cual se convierte en un instrumento de retroalimentación del proceso de enseñanza.

Como propuesta para el futuro, y a los efectos de profundizar y mejorar la calidad de los informes escritos, se continuará promoviendo la lectura y el análisis crítico de publicaciones que aborden temas tratados en la asignatura, sobre aplicaciones de la metodología de simulación a situaciones reales o avances teóricos en la temática.

Bibliografía

Altamirano R. (2006). Estrategias cognitivas con Enciclomedia. *Revista Electrónica Teoría de la Educación. Educación y Cultura en la Sociedad de la Información.* Vol. 7. Nº 2.

Álvarez Méndez J. M. (2003). *La evaluación a examen. Ensayos críticos*. Buenos Aires: Miño y Dávila.

Aróstegui J. (2001).La Investigación Histórica: Teoría y método. En M. Díaz, S. del Dago, (2008). Educación a Distancia en el Nivel Superior: Un análisis sobre las prácticas de evaluación de los aprendizajes. *Anales del III Encuentro*

Internacional Educación, Formación, Nuevas tecnologías. ISBN: 978-9974-8031-1-4.

Bélair (2000). En J. M. Álvarez Méndez (2003): *La evaluación a examen. Ensayos críticos*. Buenos Aires: Miño y Dávila.

Camilloni A. (1998).Sistemas de calificación y regímenes de promoción. En: Camilloni et al. *La evaluación de los aprendizajes en el debate didáctico contemporáneo*. Buenos Aires: Ed. Paidós.

Celman S. (1998).¿Es posible mejorar la educación y transformarla en herramienta de conocimiento?. En: Camilloni et al. *La evaluación de los aprendizajes en el debate didáctico contemporáneo*. Buenos Aires: Piados. pgs. 40, 54-55.

García Aretio, L.; Ruiz Corbella, M; Domínguez Figaredo, D. (2007). *De la educación a distancia a la educación virtual*. Edit. Ariel.

Gil Chaveznava, P. (2007). *Diseño curricular y los diversos modelos educativos*. Universidad Autónoma Metropolitana. Unidad Iztapalapa. México D. F. En: http://cbi.izt.uam.mx/content/eventos_divisionales/Seminarios/Seminario_Diseno_Curricular/Modelo_educativo_y_Plan_estudio.pdf, Consulta: 04/01/2010

Jorba, J.; Sanmartí, N. (2000). *La función pedagógica de la Evaluación*.

González Arias, J.; de Pablo Redondo, R.; Arguedas Sanz, R.; Martín García, R. (2009). Aplicaciones TIC en el marco de la enseñanza superior en Europa: un modelo virtual. *Anales del 7mo Simposio sobre la Sociedad de la Información. 38 Jornadas Argentinas de Informática 2009*. SSI 2009 – 38 JAIIO. pp. 208-225.

Ehuletche, A.; De Stefano, A. (2009). Competencias y capacidades en las tutorías virtuales. *Anales IV Congreso de Tecnología en Educación y Educación en Tecnología*. pp. 53-58.

Litwin E. (1998).La evaluación: campos de controversia y paradojas o un nuevo lugar para la buena enseñanza. En Camilloni et al. *La evaluación de los aprendizajes en el debate didáctico contemporáneo*. Buenos Aires: Ed. Paidós. pgs. 14-15, 17, 23-25, 31.

López, M. V., Mariño, S. I. (2007).Desarrollo y evaluación de un modelo b-learning de enseñanza-aprendizaje en una asignatura de la carrera de sistemas. *Anales del Congreso Edutec 2007*. Buenos Aires, Argentina.

Mariño, S. I.; López, M. V. (2007a).La simulación de sistemas en un entorno integrado de *b-learning*. *Anales del Encuentro Internacional BTM 2007 Educación, formación y nuevas tecnologías*. Utemvirtual. Universidad Tecnológica Metropolitana. Punta del Este, Uruguay.

Mariño, S. I.; López, M. V. (2007b).Aplicación del modelo b-learning en la asignatura ‘modelos y simulación de las carreras de sistemas de la FACENA-UNNE. *Edutec: Revista Electrónica de Tecnología Educativa*. España. Núm. 23. (2007). http://edutec.rediris.es/Revelec2/revelec23/revelec23.html

Mariño, S. I.; López, M. V. (2008).Un proyecto de docencia, extensión e investigación en la asignatura Modelos y Simulación. *Anales del X Workshop de Investigadores en Ciencias de la Computación*. X WICC. ISBN 978-950-863-863-101-5.

Mariño, S. I.; López, M. V.; Vanderland, M. A. (2009). Construcción de simuladores como una instancia de evaluación formativa en la asignatura modelos y simulación de la carrera de sistemas. *COGNICION Revista Científica* de FLEAD.

Mateo, J. A. (2000): *La evaluación educativa, su práctica y otras metáforas*. Barcelona: ICE- HORSORI.

Sagastizábal, M. A.; Perlo, C. L. (2002): "La investigación acción como estrategia de cambio en las organizaciones". En: M. Díaz, S. del Dago (2008). Educación a Distancia en el Nivel Superior: Un análisis sobre las prácticas de evaluación de los aprendizajes. *Anales del III Encuentro Internacional Educación, Formación, Nuevas tecnologías*. ISBN: 978-9974-8031-1-4

Sosa Sánchez-Cortés, R.; García Manso, A.; Sánchez Allende, J.; Moreno Díaz, P.; Reinoso Peinado, A. (2005): B-Learning y teoría del aprendizaje constructivista en las disciplinas Informáticas: un esquema de ejemplo a aplicar. *Recent Research Developments in Learning Technologies*. Consulta: 10/02/2009, http://www.formatex.org/micte2005/AprendizajeConstructivista.pdf.

Wol D. P., Reardon S. F. (1996).Access to excellence through news forms of student assessment. En: Mateo. *La evaluación educativa, su práctica y otras metáforas*. Barcelona: ICE- HORSORI.

Zabalza M. A. (1989).*Diseño y desarrollo curricular*. 8a. Edic. Narcea. Madrid.

Sonia Itatí Mariño, María Victoria López, Romina Alderete, Departamento de Informática. Fac. de Ciencias Exactas y Naturales y Agrimensura. Universidad Nacional del Nordeste. Corrientes. Argentina. **msonia@exa.unne.edu.ar; mvlopez@exa.unne.edu.ar; ary_59@hotmail.com**

UNIÓN
REVISTA IBEROAMERICANA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA

Junio de 2011, Número 26, páginas 117-125
ISSN: 1815-0640

Revisión del constructo actitud en Educación Matemática: 1959-1979

María S. García González, José A. Juárez López

Resumen

La actitud es uno de los aspectos psicológicos que ha alcanzado mayor difusión en Educación Matemática (EM); sin embargo, una de las críticas más fuertes que se han hecho a las investigaciones realizadas sobre el tema en ésta área, es la falta de consenso en la definición del constructo actitud por parte de los investigadores. Por esta razón, nos hemos propuesto realizar un análisis histórico del desarrollo del constructo actitud en EM, con la finalidad de generar una serie de reflexiones respecto de su definición que ayude en la realización de futuras investigaciones al momento de definirlo. Debido a que nuestra investigación está comenzando, en este escrito presentamos el análisis hecho en los primeros 20 años de investigación.

Abstract

Attitude is a psychological aspect that has achieved the highest circulation in Mathematics Education (ME), but one of the strongest criticisms that have been made to existing research on the subject in this area is the lack of consensus in the definition of construct attitude in researchers. For this reason, we intend to conduct a historical analysis of the construct attitude in ME, in order to generate a series of reflections about its definition to assist in carrying out later research. Because our research is beginning, in this paper we present the analysis of the first 20 years of research.

Resumo

Atitude é um aspecto psicológico que tenha alcançado a maior circulação em Educação Matemática (EM), mas uma das mais fortes críticas que foram feitas para a investigação existente sobre o assunto nesta área é a falta de consenso na definição de atitude em pesquisadores. Por este motivo, pretendemos realizar uma análise histórica da atitude em EM, a fim de gerar uma série de reflexões sobre a sua definição para auxiliar na realização de pesquisas posteriores. Como nossa pesquisa está começando, nesse artigo, apresentamos a análise dos primeiros 20 anos de pesquisa.

1. Introducción

Una razón para considerar que es necesario conocer las actitudes de personas, grupos, pueblos, es que es posible establecer aunque sólo a corto plazo, algunas predicciones de conducta que pueden expresar dichas personas, grupos o pueblos frente a eventos considerados socialmente importantes (Quiroz, 2004).

En Educación Matemática, las investigaciones realizadas en torno a las actitudes hacia las matemáticas han adquirido un alto grado de importancia, debido a que con los resultados de éstas, se ha mostrado cómo ellas influyen en el aprendizaje matemático. Así por ejemplo, un estudiante con sentimientos positivos hacia la materia puede obtener un mayor logro académico que otro que haya desarrollado actitudes negativas hacia ella. (Auzmendi, 1992, pp. 20-21).

Sin embargo, a pesar de la importancia que tienen las investigaciones sobre actitudes en Educación Matemática, éstas han sido criticadas en diversos aspectos, los principales son los referentes a la forma de definir actitud y la otra respecto de los instrumentos usados para medirlas. En un artículo donde se discuten cuestiones teóricas de las actitudes hacia las matemáticas (Di Martino y Zan 2001, pp. 351-352), hemos encontrado que no existe unanimidad por parte de quienes han realizado investigaciones sobre actitudes hacia las matemáticas, en la forma de definir el constructo actitud, situación que ha sido también corroborada con especialistas en el tema de actitudes en Educación Matemática.

En la presente investigación la falta de este consenso, ha sido tomada como problema de investigación, debido a que tal desacuerdo obliga a que cada investigador use definiciones de acuerdo a intereses propios en sus indagaciones. Por ello nos hemos propuesto como objetivo, la realización de un análisis histórico del desarrollo del constructo actitud en Educación Matemática, desde el primer trabajo realizado hasta los más recientes. Creemos que mediante este análisis podemos identificar aquello que genera el desacuerdo en la forma de definir el constructo, aclaramos que no pretendemos elaborar una nueva definición, sino que por el contrario, queremos generar una serie de reflexiones que puedan orientar en futuras investigaciones al momento de definir *actitud hacia las matemáticas*.

Con la finalidad de encontrar el primer trabajo realizado sobre el tema en cuestión, comenzamos con la búsqueda en revistas, libros, tesis, y artículos en internet, todos ellos de la disciplina Educación Matemática, de esta forma encontramos en Hart (1989, p. 39), que durante los años 60´s y cerca de los 70´s, el interés de los educadores matemáticos en el dominio afectivo se restringió a lo que fue llamado: *actitud hacia las matemáticas*. Este artículo nos dio una pista sobre los años en los que debíamos de buscar el primer artículo.

Tras la búsqueda exhaustiva, hallamos en Aiken, L. (1970), que Feierabend (1960), dedicó en su revisión de investigaciones sobre problemas psicológicos en Educación Matemática diez páginas para hablar acerca del estado que guardaba el estudio de las actitudes hacia las matemáticas. Leyendo a Feierabend (1960), pudimos encontrar el primer artículo en donde se usa el constructo actitud en Educación Matemática, este fue un trabajo que data de 1959 y fue realizado en California. Por tal razón ha sido dicho artículo del que partiremos nuestra investigación.

Por cuestiones de organización en la investigación, el análisis se hará en tres etapas: 1959-1979, 1980-1999 y 2000-2010; en este escrito, presentamos los resultados de la primera etapa.

2. Actitud y Actitud hacia las matemáticas

2.1. Actitud, desde el punto de vista de la Psicología Social

El concepto de actitud ha jugado un papel central en la psicología social de las últimas décadas; sin su ayuda no hubieran podido desarrollarse varios campos de la investigación empírica. Sin embargo, a pesar de ello, los psicólogos no han podido ponerse de acuerdo en su definición, y por tanto, por no formar parte de una teoría elaborada sistemáticamente adolece de vaguedad e imprecisión. Al respecto, Strauss (1945, citado en Villoro, ¿?), afirmaba que pese a que la actitud no es un concepto psicológico, técnico, sino un conocimiento del sentido común, resulta tan conveniente para la investigación que, lejos de abandonarlo, hay que intentar precisarlo, en espera de poderlo remplazar por términos técnicos mejor definidos en una teoría que aún carecemos.

Ante tal inconveniente, a través del tiempo han venido formulándose diversas definiciones de actitud bajo perspectivas distintas, a continuación mostraremos a grandes rasgos un listado de algunas definiciones que hemos tomado de Quiroz (2004):

Thurstone (1928), afirma que la actitud es "es la intensidad de afecto a favor o en contra de un objeto psicológico".

Allport (1935), sostiene que la actitud "es un estado mental y neurológico de atención, organizado a través de la experiencia y capaz de ejercer una influencia directiva o dinámica sobre la respuesta del individuo a todos los objetos y situaciones con las que está relacionado".

Krech y Crutchfield (1962), aseguran que la actitud "es un sistema duradero de evaluaciones positivas y negativas, sentimientos emocionales y tendencias en favor o en contra, en relación con un objeto social".

Aroldo Rodrigues (1977), la aprecia como "una organización duradera de creencias y cogniciones en general, dotada de una carga afectiva a favor o en contra de un objeto social definido, que predispone a una acción coherente con las cogniciones y afectos relativos a dicho objeto". Se compone de tres elementos, a saber: el cognitivo, el afectivo y el conductual.

Worchel et al. (2002), plantean que la actitud "es un juicio evaluativo (bueno o malo) de un objeto, de tal manera que una actitud representa la propensión favorable o negativa del individuo hacia el objeto".

En estas definiciones percibimos que las actitudes, unen procesos centrales del individuo con procesos del mismo tipo de sociedad, y cómo lo afirman los personajes citados anteriormente, éstas se dirigen siempre a objetos. Por ello, la relación actitudinal que mantenemos con esos objetos de actitud dependen fundamentalmente de la información y de las creencias que tenemos acerca de sus propiedades; esto es, una actitud no pude existir si falta el objeto.

La actitud, pues tiene siempre un foco hacía el que se dirige (objeto), el cual puede ser una persona, una comunidad, cualquier cosa que sea considerada relevante por un grupo social determinado (Brown, 1974, citado en Quiroz, 2004). Cuando este foco es conocido por muchos individuos, la actitud correspondiente puede utilizarse para la caracterización comparativa entre las diversas personas, según la edad, el nivel de escolaridad, la ocupación, el género, el lugar donde viven, o cualquier otra variable que el investigador considere importante para su propósito.

Sin embargo, debido a que las actitudes no se presentan directamente a los sentidos, ni se pueden observar de esa manera, sino que por su carácter subjetivo se les tiene que considerar como construcciones fundadas en los datos que proporcionan los propios sentidos y consecuentemente, inferirse a partir de la conducta que expresan las personas.

Con base en lo descrito en párrafos anteriores, señalamos que no tiene sentido hablar de actitudes acerca de la educación, a menos de que sepamos que significa esa categoría, de la misma forma, tampoco puede manifestarse cambio de actitud, si no hay cambio de creencias o en el conocimiento que los individuos tienen del objeto. Por esto, puede afirmarse que el fundamento cognoscitivo es necesario e indispensable en cualquier teoría actitudinal.

Por otro lado, entre las cualidades que poseen las actitudes encontramos las siguientes:

- ***Dirección***: Se manifiesta en el hecho de que todas las personas se pronuncian en pro o en contra del objeto actitud. Ejemplo, me agrada, me desagrada, es bueno, malo.
- ***Intensidad***: India la fuerza con que sentimos (intensamente, moderadamente, ligeramente) el objeto de actitud, pudiendo expresar también esta posición a través de una escala adecuadamente graduada.
- ***Grado***: Es un indicativo del punto hasta el cual estamos dispuestos a movilizarnos o a observar conductas consecuentes, esto es, el grado hasta donde llega nuestro compromiso con el objeto actitud.
- ***Consistencia***: Indica la coherencia con que las personas se comportan ante objetos actitudinales similares, según los valores, ideología o actitudes que profesen.
- ***Coherencia***: Se manifiesta también según el grado en que varias actitudes o sistemas de actitudes (estilo perceptivo para captar la realidad, para interpretar y evaluar los acontecimientos y ocurren en nuestro alrededor y en nosotros mismos) se compaginan y relacionan.
- ***Prominencia***: Grado en que un individuo destaca una actitud determinada, dado que no todas ellas, siendo de tipo central, tienen la misma notoriedad.

2.2 Actitud hacia las matemáticas

El estudio de las actitudes hacia las matemáticas, de acuerdo con Gairín (1990, citado en Juárez, 2010), se justifica por diversas razones, de las cuales podemos mencionar:

- El interés por estudiar las posibles causas del fracaso escolar cuando éste se relaciona con la matemática.
- El hecho de que las actitudes hacia las matemáticas, (así como hacia otras materias del currículum) no han sido estudiadas con profundidad suficiente en educación matemática, a pesar de existir un reconocimiento unánime de su importancia en el proceso enseñanza-aprendizaje.

Al igual, que ocurre en la psicología, en Educación Matemática, no existe consenso entre investigadores en cuanto a la forma de concebir a las actitudes, entre las diversas posturas encontramos dos contrastantes, la primera, argumenta que éstas son parte del dominio afectivo, podemos mencionar aquí a McLeod (1992), quien afirma que las actitudes hacia las matemáticas son una categoría del dominio afectivo, que es más amplio e incluye otras categorías como las creencias acerca de las matemáticas, así como también las emociones. La segunda postura, en la que podemos nombrar a Gómez (2000), sostiene que es la componente afectiva una parte de las actitudes, esto es, se consideran las componentes cognitiva, afectiva y conductual, como las fundamentales de las actitudes. Nosotros entendemos la *actitud* como un juicio evaluativo, algo bueno o malo, hacia un objeto (situación, personas, problemas, etc.) que determina las intenciones personales e influye en el comportamiento. En atención a la definición adoptada de actitud en el presente trabajo, para realizar el análisis, hemos adoptado el modelo *tripartita*, en el que se expone, que la actitud tiene 3 componentes que interactúan entre sí para formar la base constitutiva de cada actitud, estas son:

- **Cognitivo**: Se integra de las percepciones, creencias, estereotipos, informaciones e ideas que posee la persona acerca del objeto de actitud.
- **Afectivo**: se refiere a los sentimientos que el objeto suscita en la persona o en el grupo.
- **Conductual**: Compuesto por las tendencias, las disposiciones, las intenciones y las acciones que se dirigen hacía el propio objeto.

Entendemos así, las actitudes hacia las matemáticas, como aquellas referidas a la valoración y el aprecio de esta disciplina y al interés por esta materia y por su aprendizaje.

2.3. Metodología

Para llevar a cabo el análisis se ha adoptado en el presente trabajo, el método histórico, cuyas principales directrices de uso común son:

- *La heurística*, referida a la localización y recopilación de las fuentes documentales, que son la materia prima del trabajo del investigador.
- *La crítica de las fuentes*, distinguiendo dos formas de crítica, que se refieren al trabajo con las fuentes documentales: crítica externa y crítica interna.
- *La síntesis historiográfica*, que es el producto final de la historiografía. Terminado ese proceso, queda la publicación, paso ineludible para que la comunidad historiográfica comparta y someta a debate científico y falsacionismo su labor, y se divulgue entre el público para que su conocimiento pueda servir a los fines de la historia.

Basados en este método, el análisis comenzará en 1959 (año en el que ha sido localizado el primer trabajo) hasta la época actual (2010), dicho periodo por cuestiones de organización en la investigación, será dividido en tres etapas: 1959-1979, 1980-1999 y 2000-2010; serán realizadas las siguientes actividades.

1. Búsqueda de investigaciones del tema en cuestión, mismos que serán indagados en revistas, libros, tesis, y artículos en internet, todos de la disciplina: Educación Matemática.
2. Análisis de los artículos hallados, centrando la atención en la forma de definir actitud y de los instrumentos (en los casos es que sean utilizados) usados para medirla.
3. Elaboración de un reporte del análisis realizado, así como una serie de reflexiones subjetivas del investigador como consecuencia del análisis.

Cómo mencionamos en la introducción, en este artículo sólo se mostrarán los resultados obtenidos en la primera etapa.

3. Resultados y discusión

Hasta el momento hemos trabajado sobre la primera etapa, por ello en este apartado mostraremos sólo los resultados obtenidos en dicha etapa. Cabe mencionar que en la búsqueda que hemos realizado, hallamos artículos sólo hasta 1970, de esta fecha a 1979, no encontramos artículo alguno.

Etapa 1: 1959-1979

Actividad 1: para llevar a cabo esta primera actividad, nos dimos a la tarea de buscar investigaciones del tema en cuestión publicadas entre los años 1959 y 1979, dicha investigación la hicimos en internet en revistas electrónicas de Educación Matemática. La siguiente tabla, muestra las investigaciones encontradas.

Tabla 1. Investigaciones encontradas: 1959-1979.

Investigaciones encontradas: 1959-1979			
Año	**Título**	**Autor/Autores**	**Fuente**
1959	Factores en la formación de las actitudes hacia las matemáticas	Thomas Poffenberger y Donal Norton	Journal of Educational Research
1960	Revisión de investigaciones sobre problemas psicológicos en Educación Matemática	Rosalind L. Feierabend	Research problems in mathematics education
1968	Las actitudes de los futuros maestros de escuelas primarias hacia la aritmética	Robert E. Reys y Floyd G. Delon	The Arithmetic Teacher
1969	El papel de las actitudes en el aprendizaje de las matemáticas	Daniel C. Neale	The Arithmetic Teacher
1970	Actitudes hacia las matemáticas	Lewis R. Aiken, Jr.	Review of Educational Research

Actividad 2: para realizar el Análisis de los artículos hallados, centramos la atención en la forma en que los autores de las investigaciones, definen el constructo actitud y de los instrumentos usados para medirla. La siguiente tabla, concentra los resultados obtenidos.

Tabla 2. Formas de definir la actitud e instrumentos utilizados

Formas de definir la actitud e instrumentos utilizados			
Año	**Investigación**	**Definición**	**Instrumento**
1959	Factores en la formación de las actitudes hacia las matemáticas	Medida de Agrado	Cuestionarios
1960	Revisión de investigaciones sobre problemas psicológicos en Educación Matemática	Predisposición aprendida por parte de un individuo a responder positivamente o negativamente a algún objeto, situación, concepto u otra persona	No hace mención
1968	Las actitudes de los futuros maestros de escuelas primarias hacia la aritmética	Medida de agrado	Escala de actitudes de Dutton
1969	El papel de las actitudes en el aprendizaje de las matemáticas	Medida de agrado o desagrado hacia las matemáticas	Diferencial Semántico
1970	Actitudes hacia las matemáticas	Medida de agrado	Son mencionadas varias*
* La investigación trata de una revisión de otras indagaciones respecto de la actitud, por lo que muestra un apartado de las diferentes formas de medirla.			

Como puede observarse en las tablas, en el primer artículo analizado, Poffenberger y Norton (1959), atribuyen las actitudes hacia las matemáticas a las actitudes expresadas por los padres.

Ellos presentaron un cuestionario a 390 estudiantes de primer año de universidad. El número de hombres y mujeres participantes era casi igual, las respuestas de los estudiantes se cree que estuvieron influenciadas por sus actitudes hacia la escuela en general. Como resultado de esta investigación, se encontró que hubo una tendencia por el disgusto de las matemáticas. A pesar de que estos autores no dan una definición precisa de actitud, dejan ver a lo largo de su investigación a la actitud como una medida de agrado.

De igual forma, Feierabend (1960), en su revisión de investigaciones sobre problemas psicológicos en Educación Matemática dedicó diez páginas para hablar acerca del estado que guardaba el estudio de las actitudes hacia las matemáticas. Feierabend argumenta que a pesar de que no existe una definición estándar del término *actitud*, en general ésta se refiere a una predisposición aprendida o tendencia por parte de un individuo a responder positivamente o negativamente a algún objeto, situación, concepto u otra persona.

Reys (1968), en su investigación realizada con profesores de primaria en formación, aunque no da una definición precisa del término actitud, implícitamente define a ésta como una medida de agrado, y para medirla utiliza la escala de Dutton.

Por su parte Neale (1969), define la actitud como una medida de agrado o desagrado hacia las matemáticas, la tendencia a realizar o evitar actividades matemáticas, una creencia de que se es bueno o malo para las matemáticas y la creencia de que la matemática es útil o inútil. Para medir la actitud utiliza el diferencial Semántico.

Finalmente, en Aiken (1970), que es una investigación centrada en la revisión de trabajos previos realizados en torno a la actitud hacia las matemáticas, define a estas como una medida de agrado, en su investigación dedica un apartado para hablar de los métodos empleados (existentes en esa época) para medir las actitudes, nos habla por ejemplo de los cuestionarios, la observación y la entrevista, y las escalas de actitud, entre ellas, la escala de actitud tipo Likert, la escala tipo Thurstone y el escalograma de Guttman.

Con los resultados obtenidos de esta primera etapa, concluimos que, en esta época las definiciones dadas implícita o explícitamente por los autores de los diversos artículos, se enfocan en los sentimientos que las matemáticas suscitan en el sujeto. Esto indica, basados en el modelo tripartita, que en dicha época, la componente que era manejada era sólo la afectiva.

4. Conclusiones

Pretender justificar la importancia de las matemáticas, no se torna absurdo, cuando al parecer investigadores, profesores, alumnos, padres de familia, ciudadanos comunes, etc., coinciden en que tienen una importancia primordial en el origen y desarrollo de la ciencia.

Ahora bien, ésta situación que pudiera ser tomada como motivación para el estudio de las matemáticas, no lo es, y esto lo afirmamos por las investigaciones en las que se ha constado el fracaso escolar que producen éstas y las manifestaciones de rechazo que sobre ella realizan los alumnos (Gairín, 1987).

Ha sido ésta situación la que ha motivado a los investigadores estudiar las actitudes hacía las matemáticas, así por ejemplo, Poffenberger en su estudio, llega a la conclusión de que las actitudes del hogar, el éxito en la materia y el maestro desempeñan papeles importantes en la determinación de las actitudes hacia la matemática.

Por otro lado, centrados en nuestro objetivo, en esta primera revisión, nos hemos dado cuenta que para los investigadores en ésta época las actitudes estaban relacionadas a cuestiones de afecto, desde nuestro modelo, podemos decir que sólo exploraban la componente afectiva, también notamos que aunque no había una definición precisa de actitud en cada una de las investigaciones realizadas, los autores coincidían en tratarla como una medida de afecto. Esta es, la unanimidad que hemos percibido en los artículos revisados. Ahora, respecto de los instrumentos usados para medirla, estos van desde sencillos cuestionarios con preguntas relacionadas al gusto por las matemáticas, hasta escalas de actitudes usadas en psicología como la Dutton.

Bibliografía

Aiken L. (1970). Attitudes toward mathematics. *Review of Educational Research* 40(4), 551-596.

Auzmendi E. (1992). *Las actitudes hacia la matemática/estadística en las enseñanzas medias y universitaria*. Editorial Mensajero, España.

Di Martino P., R. Zan (2001). Attitude toward mathematics: some theoretical issues. Proceedings of PME 25, 3, 351-358.Quiroz A. (2004). *Actitudes y representaciones*. Editorial Benemérita. Universidad Autónoma de Puebla, México.

Feierabend L. (1960). Review of research on psychological problems in mathematics education. Research problems in mathematics education. 3-46.

Gairín J. (1987). *Las actitudes en Educación, un estudio sobre Educación Matemática.* Editorial Limpergraf, Barcelona.

Gómez I. (2002). *Matemática Emocional.* Editorial Narcea, Madrid.

Hart L. (1989). Describing the Affective Domain: Saying What We Mean. En: D. McLeod y V. Adams (ed.) *Affect and Mathematical Problem Solving* ,37-45. Springer Verlag, New York.

Juárez J. (2010). *Actitudes y rendimiento en matemáticas, el caso de telesecundaria*. Editorial Díaz de Santos, México

McLeod D. (1992). Research on affect and mathematics education. A re-conceptualization. En D. Grouws (ed.) *Handbook of research on mathematics teaching and learning*, 575-596. Macmillan, New York.

Neale D. (1969). The role of attitudes in learning mathematics. Arithmetic teacher 16, 631-640.

Poffenberger T., Norton D. (1959). Factors in the formation of attitudes towards mathematics. *Journal of educational research* 52(5), 171-176.

Reys R., Delon F. (1968).Attitudes of prospective elementary school teachers toward arithmetic. *Arithmetic teacher* 15, 363-366.

Villoro L. (2004). *Créer, saber, conocer*. Editorial Siglo XXI, México.

María del Socorro García González. Licenciada en Matemática Educativa, por la Universidad Autónoma de Guerrero, actualmente es estudiante de la Maestría en Ciencias, Área Matemática Educativa, en dicha universidad.
mgargonza@gmail.com.mx

José Antonio Juárez López. Doctor en Ciencias en la especialidad de Matemática Educativa en el CINVESTAV-IPN. Trabaja en la línea de investigación relativa a las actitudes hacia las matemáticas y su relación con el rendimiento. Profesor en la Facultad de Matemáticas de la Universidad Autónoma de Guerrero.
loupemy04@yahoo.com.mx

UNIÓN
REVISTA IBEROAMERICANA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA

Junio de 2011, Número 26, páginas 127- 136
ISSN: 1815-0640

Introducción de objetos de aprendizaje en el proceso de enseñanza y aprendizaje de la matemática discreta en la UCI

Danilo Amaya Chávez

Resumen

Las nuevas exigencias y necesidades de formación de profesionales han propiciado un conjunto de transformaciones para la formación en la Educación Superior actual; inmersa en estos cambios se encuentra la Universidad de las Ciencias Informáticas (UCI), ubicada en la Habana. Por su elevada aplicabilidad e importancia en la formación matemática que requiere un profesional de perfil Informático, la Matemática Discreta no puede estar ausente en el plan de formación de los profesionales que aquí se preparan. Dicha materia ha sido objeto de numerosos cambios estructurales y metodológicos en pos de potenciar la autogestión del conocimiento, característica fundamental del modelo que se implementa. Con el fin de coadyuvar al logro de los objetivos que presupone el proceso docente en esta modalidad, se propone en este trabajo una alternativa para el diseño e introducción de objetos de aprendizaje como apoyo al trabajo del profesor, que a su vez, propicien al estudiante una mayor apropiación de los contenidos que abarca la materia en cuestión.

Abstract

New requirements and training needs of professionals, have led to a set of transformations of new pedagogical models for training in higher education today, immersed in these changes is the University of Information Sciences (UCI), located in the Havana. Because of its high applicability and importance in mathematics education requires a professional computer profile, discrete mathematics can not be absent in the training plan for professionals. This matter has been the subject of numerous structural and methodological changes towards enhancing self-knowledge, a fundamental feature of the model that is implemented that emphasizes learning from them. To help achieve the objectives which presupposes the teaching process in this mode, this paper proposes an alternative to the design and introduction of learning objects to support the work of teachers, which in turn leads to greater student ownership of content that encompasses the subject matter.

Resumo

As novas exigências e necessidades de formação de profissionais propiciaram um conjunto de transformações para a formação na Educação Superior actual; inmersa nestas mudanças encontra-se a Universidade das Ciências Informáticas (UCI), localizada na Habana. Por sua elevada aplicabilidad e importância na formação matemática que requer um profissional de perfil Informático, a Matemática Discreta não pode estar ausente no plano de formação dos profissionais que aqui se preparam. Dita matéria foi objecto de numerosas mudanças estruturais e metodológicos em pos de potenciar a autogestión do conhecimento, característica fundamental do modelo que se implementa.. Com o fim de coadyuvar ao lucro dos objectivos que presupone o processo docente nesta modalidade, se propõe neste trabalho uma alternativa para o desenho e introdução de objectos de aprendizagem como apoio ao trabalho do professor, que a sua vez, propiciem ao estudante uma maior apropiación dos conteúdos que abarca a matéria em cuestiÀ.

Desarrollo

La Universidad de las Ciencias Informáticas (UCI), concebida con el propósito de llevar a cabo la Informatización del país y de impulsar el desarrollo de la industria cubana del software, ha marcado pautas incuestionables en lo que respecta a la aplicación de un modelo de formación que en esencia vincula la formación-producción e investigación.

El autor concuerda con el criterio de E Castañeda (2006) al pronunciarse respecto a la decadencia del modelo de enseñanza tradicional, que aún se manifiesta mundialmente, y que se considera incapaz de satisfacer las exigencias actuales en el plano material y espiritual de la sociedad, por lo que se deberá ir transformando paulatinamente a través de las TIC por otros modelos en concordancia con los cambios que ocurran en la sociedad.

La aplicación de las TIC en la Educación Superior, ha propiciado un conjunto de transformaciones que incluyen, fundamentalmente, la adopción y desarrollo de nuevos modelos pedagógicos para la formación pre y posgraduada, inmersa en estos cambios se encuentra la UCI.

Las Universidades deberán apuntar hacia un aprendizaje colaborativo y desarrollador, donde los estudiantes tomen la responsabilidad de su propio aprendizaje, característica fundamental del modelo que se introduce a partir del presente curso en la institución antes citada; sin embargo, para lograr tal efecto, se deberán crear ambientes idóneos, sustentados en metodologías específicas para cada disciplina, que propicien este aprendizaje. Para ello se considera el uso de las TIC, dadas sus potencialidades en el proceso de autogestión del conocimiento que requiere la enseñanza aprendizaje en dichas condiciones.

La implementación de un modelo de formación centrado en el aprendizaje demanda de los implicados en el proceso docente, desde profesores y alumnos hasta de la propia Institución que lo asume, un grupo de cambios en los roles y transformaciones curriculares, de los cuales depende el éxito en dicho proceso. A groso modo en estos casos se observa:

- Cambio del papel del profesor (de transmisor de conocimientos a guía, tutor, facilitador y dinamizador del proceso de aprendizaje)
- Cambio del papel del estudiante (de receptor pasivo a protagonista activo y absoluto de su proceso formativo, responsable de su propio aprendizaje)
- Transformaciones y adecuaciones de los Planes de Estudio, Programas disciplinares y de asignaturas.

La producción y empleo de Objetos de Aprendizaje (OA) por parte de una comunidad educativa permite mejorar su oferta, tanto en la modalidad presencial, como en la de a distancia, ya que los OA son el medio que permite adquirir ciertas competencias, y esto a su vez permitirá ofrecer currículos más flexibles, donde se responda a necesidades específicas de aprendizaje, siendo el alumno el responsable del mismo. Tanto docentes como alumnos adquirirán ciertas habilidades y competencias con el desarrollo y uso de los OA.

La introducción de Objetos de Aprendizaje como las herramientas multimedia, ofrece como ventajas la interactividad que se logra, la formación de competencias y habilidades específicas en la rama que se empleen, además de que presentan un potencial importante para la formación, ya que favorece el uso de la información en un contexto apropiado y de forma personalizada y propicia la creación de un entorno virtual en el que los alumnos pueden valorar instantáneamente el impacto de sus acciones.

En la disciplina Matemática dichos OA pueden resultar de gran ayuda en el desarrollo de habilidades específicas y en la apropiación teórica y conceptual de elementos que definen determinados procesos. Por la elevada visualización que logra de fenómenos matemáticos de difícil comprensión desde el punto de vista teórico, resultan de gran utilidad para el aprendizaje en estudiantes con estilo de aprendizaje visual y otros.

Por tal motivo se deben diseñar OA, según las metodologías indicadas para su elaboración, que garanticen la disponibilidad necesaria de fuentes de información al alcance de los estudiantes, debido a que en dicho modelo gran parte de los contenidos de aprendizaje debe gestionarlos por sí mismo y para ello es necesario proveerlos de una amplia variedad de recursos de información, medios electrónicos, bibliografía en diversos formatos, etc., fomentándose de esta forma el desarrollo de la capacidad para aprender por cuenta propia.

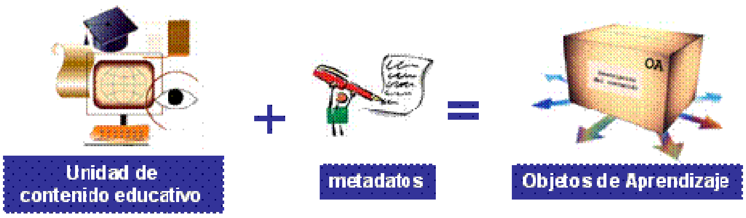
En efecto resulta vital que la formación matemática sea lo más integral posible y propicie que el alumno "aprenda a aprender", mantenga una actitud abierta y adquiera una cierta confianza en su propio pensamiento.

Por lo antes expuesto se considera una necesidad incuestionable para la UCI el diseño, la elaboración e implementación de objetos de este tipo en las diferentes Disciplinas y asignaturas, al asumir la formación teniendo como eje central el aprendizaje de los alumnos bajo esta perspectiva.

Acerca de los Objetos de Aprendizaje (OA)

Formalmente no hay una única definición del concepto de objeto de aprendizaje y las definiciones son muy amplias. Según Wiley (2000) son "cualquier recurso digital que puede ser reutilizado para apoyar el aprendizaje", el Comité de Estandarización de Tecnología Educativa (IEEE, 2001), dice que los objetos de aprendizaje son "una entidad, digital o no digital, que puede ser utilizada, reutilizada y referenciada durante el aprendizaje apoyado con tecnología"; Mason, Weller y Pegler (2003) los definen como "una pieza digital de material de aprendizaje que direcciona a un tema claramente identificable o salida de aprendizaje y que tiene el potencial de ser reutilizado en diferentes contextos". JORUM+ Project (2004) dice que "un OA es cualquier recurso que puede ser utilizado para facilitar la enseñanza y el aprendizaje. Morales & García (2005) definen a los OA como una unidad de aprendizaje independiente y autónomo que está predispuesto a su reutilización en diversos contextos instruccionales.

Todas estas definiciones son muy amplias y en la práctica pueden resultar inoperables ya que no hay un elemento claro que distinga a los OA de otros recursos. Por otra parte, dada la amplitud y variedad de las definiciones, así como la diversidad de recursos que pueden considerarse como OA, es difícil llegar a un término estricto, pero para fines de este trabajo, se considerará que un Objeto de Aprendizaje *"es un conjunto de recursos digitales, autocontenible y reutilizable, con* *un propósito educativo y constituido por al menos tres componentes internos: contenidos, actividades de aprendizaje y elementos de contextualización. El objeto de aprendizaje debe tener una estructura de información externa (metadatos) que facilite su almacenamiento, identificación y recuperación"*



Las ideas en torno a unidades autónomas e independientes y de vincular los recursos con los metadatos, dan una definición más actual y apegada al uso práctico de los OA, ya que estas características son componentes intrínsecos para que el objeto en cuestión pueda identificarse y logre determinados atributos funcionales como son:

- *Reutilizables:* El recurso debe ser modular para servir como base o componente de otro recurso. También debe tener una tecnología, una estructura y los componentes necesarios para ser incluido en diversas aplicaciones.
- *Accesibles:* Pueden ser indexados para una localización y recuperación más eficiente, utilizando esquemas estándares de metadatos.
- *Interoperables:* Pueden operar entre diferentes plataformas de hardware y software.
- *Portables:* Pueden moverse y albergarse en diferentes plataformas de manera transparente, sin cambio alguno en estructura o contenido.
- *Durables:* Deben permanecer intactos a las actualizaciones (*upgrades*) de software y hardware.

Se dan como ejemplos de objetos de aprendizaje los **contenidos multimedia**, el contenido instruccional, los objetivos de aprendizaje, software instruccional, personas, organizaciones o eventos referenciados durante el aprendizaje basado en tecnología (IEEE, 2001). Otros autores son menos específicos en cuanto a recursos del campo educativo, como González (2005) que considera como OA a archivos de texto, ilustraciones, vídeos, fotografías, animaciones y otros tipos de recursos digitales. Por su parte, el JORUM+ Project (2004) dice que como ejemplos se puede incluir una imagen, un mapa, una pieza de texto, una pieza de audio, una evaluación o más de uno de estos recursos, cabe resaltar que se mencionan extractos o sólo parte de los recursos y es posible no considerar el recurso completo, como asimismo hace hincapié en que un OA también puede ser el conjunto de dos o más recursos.

El acento en los algoritmos discretos, usados en las ciencias de la computación, en la informática, así como en la modelación de diversos fenómenos mediante el ordenador, ha dado lugar a un traslado de énfasis en la matemática actual hacia la Matemática Discreta (MD) cuya particularidad principal es la ausencia del paso al límite y la continuidad, lo que es característico de la matemática clásica.

El autor considera que dicho énfasis radica en que la estructura interna del funcionamiento de los ordenadores y los procesos que en estos se realizan, en gran medida presentan su base teórica en conceptos tratados por esta rama de la matemática. Ejemplo de ello se aprecia en la manera de almacenar la información empleando una representación binaria, y en la lógica empleada en la búsqueda de información y en los algoritmos de solución.

La importancia que se le confiere a lo antes planteado se observa en cómo a partir del presente año académico se decidió efectuar una reestructuración del Programa de la asignatura en la UCI, incrementándose el número de horas clases, e incluso se determinó impartir la asignatura en los dos primeros semestres del primer año de la carrera, surgiendo así la MD1 y la MD2.

Nuevos temas fueron introducidos a partir de investigaciones que reflejan estas necesidades (Amaya, 2008); sin embargo, el reto de llevar a cabo el proceso docente educativo en un modelo de formación centrado en el aprendizaje implica nuevos desafíos y cambios en los roles a desempeñar por todos los factores implicados en el mismo como se mencionó anteriormente.

De lo hasta aquí mencionado, se deduce la necesidad e importancia de llevar a cabo la producción e implementación de OA, con el fin de apoyar el trabajo en la asignatura antes mencionada.

Metodología empleada

La propuesta se fundamenta en el diseño, elaboración e implementación de objetos de aprendizaje en el proceso de enseñanza y aprendizaje. Las valoraciones emitidas tienen como referencia la experiencia en el empleo de estos en la Facultad No. 5 de la Universidad de las Ciencias Informáticas (UCI), Ciudad de la Habana, Cuba. Se tomó como muestra un grupo de 175 estudiantes de primer año de la carrera Ingeniería en Ciencias Informáticas, cuya edad oscila entre los 18 y 19 años, como objeto el trabajo en la disciplina Matemáticas Discretas.

Seguidamente se exponen determinados activadores que se tuvieron en consideración:

1. <u>Actitud ante los materiales:</u>
   - Lograr que los materiales que se le presentan al estudiante tengan sentido para él y un objetivo fácilmente identificable;
   - Motivar a los estudiantes a que empleen su potencial creativo y habilidades lógicas matemáticas en la solución de los ejercicios;
   - Estimular el análisis y replanteamiento de los ejercicios desde otra perspectiva.
2. <u>Modo de utilización de la información:</u>
   - Estimular la participación de los alumnos a descubrir nuevas relaciones entre los contenidos de enseñanza y las situaciones planteadas, conllevando a la elaboración de mapas conceptuales afines con los contenidos tratados;
   - Evaluar la participación en la solución de los ejercicios, valorando los errores cometidos y las alternativas posibles de solución, el aporte y valoración a las ideas de otros, así como presentar una actitud abierta en relación con dichas ideas y propiciar la búsqueda y detección de los factores clave de un problema.

3. Empleo de materiales:

- Introducir materiales novedosos, con el fin de estimular el interés de los estudiantes en la participación activa y creadora en las actividades de aprendizaje que se den por mediación de los objetos de aprendizaje elaborados.

4. Ambiente de trabajo:

- Generar un ambiente de trabajo flexible, colaborativo y solidario a partir de los diferentes roles que deben asumir los implicados en el proceso, tanto estudiantes como profesores. Tener en cuenta que los materiales son accesibles incluso si no se cuenta con servicio de red local, precisamente por la propiedad de portabilidad que presentan, lo que aporta mayor ventaja y flexibilidad al proceso de enseñanza mediado por dichos objetos de aprendizaje.

A continuación se presenta un OA elaborado con el propósito de apoyar el desarrollo del PEA de la asignatura MD en la UCI, enfocado fundamentalmente al reforzamiento de los conocimientos teóricos en cada uno de los temas que trata la misma.

Este consiste en una multimedia desarrollada con el programa Mediator 8.0, cuya interfaz principal muestra las opciones del usuario al acceder a la misma.

Figura 1

Los usuarios a partir de la pestaña Menú pueden acceder a los diferentes tipos de ejercicios o materiales que deseen visualizar, o bien les hayan sido orientados de estudio individual por el profesor.

Figura 2

Una vez decidida la actividad a desarrollar se visualizan en el panel derecho los ejercicios a realizar. Los mismos fueron realizados con el programa HotPotatoes 6.0 y permiten interactuar con estos ofreciendo al estudiante la posibilidad de autoevaluarse y regular su ritmo de aprendizaje.

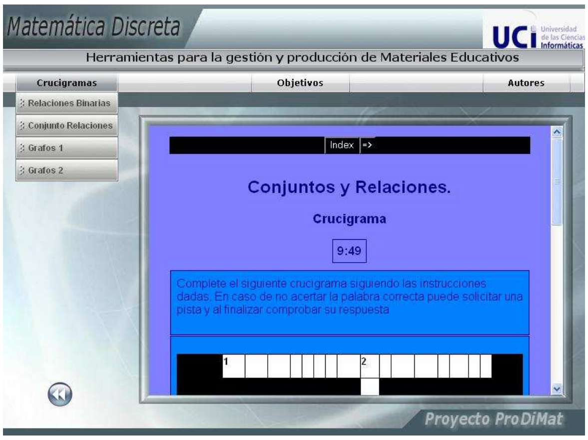


Figura 3

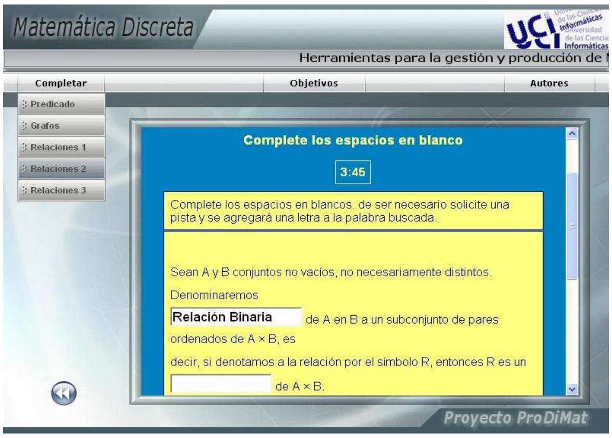


Figura 4

También se pueden observar mapas conceptuales que resumen los aspectos teóricos fundamentales de algunos temas, estructurados de una forma lógica, lo que propicia la aprehensión de los mismos de una manera más cómoda, sin ignorar los diferentes estilos de aprendizaje que pueden coexistir dentro del mismo grupo docente formal o informal.(**Fig. 5**)

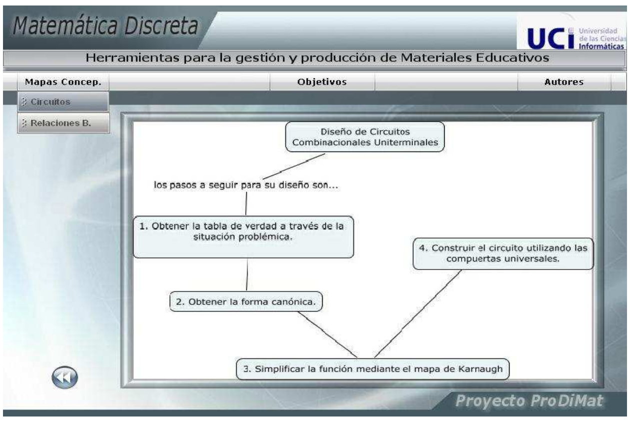


Figura 5

Los Mapas Conceptuales se desarrollaron con el programa CMaps, una potente herramienta para este propósito.

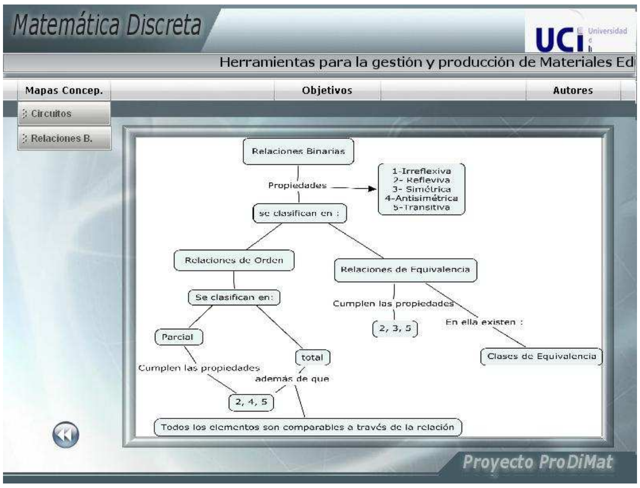


Figura 6

Resultados preliminares

Una vez implementada la utilización de la multimedia descrita en el proceso docente, se pudo apreciar en un estudio realizado con la intención de verificar su efectividad en la consolidación y reforzamiento de los contenidos referentes a determinadas unidades temáticas, objeto de estudio de la disciplina en cuestión, cómo un 72% (124) de los estudiantes incrementaron los niveles de asimilación y conocimiento de los contenidos, detectándose esto a través de la aplicación de instrumentos evaluativos con fines específicos; los restantes estudiantes no manifestaron ningún cambio.

La mejoría se hizo palpable debido a que desde el punto de vista cualitativo 83 estudiantes (47.4%) fueron evaluados de B y 41(23.4%) de R, quedando los restantes 51 evaluados de M. Las cifras, si se tiene en cuenta que los porcientos antes de la aplicación de la propuesta oscilaban entre el 21%, 28% y 51% evaluados de B, R y M respectivamente, con un mismo nivel de dificultad en los instrumentos evaluativos aplicados para diagnosticar la situación real existente, indican que los objetivos generales para los cuales se diseñó el instrumento fueron potencialmente vencidos, no de manera óptima pero sí lo necesario para reafirmar la teoría en cuanto a las potencialidades y ventajas que aporta el empleo de objetos de aprendizaje, como los recursos multimedia, al desarrollo del proceso docente educativo en determinadas disciplinas, dentro de estas la disciplina Matemática que tantas dificultades arroja en sondeos realizados en cuanto a su comprensión y aprehensión por los estudiantes a escala mundial.

Conclusiones

A través de la presente herramienta se puede reforzar el trabajo independiente de los estudiantes, a la vez que se potencia la motivación por su auto aprendizaje. Se refuerzan los contenidos referentes a los temas que se imparten en la asignatura MD, muchos de los cuales presentan elementos teóricos indispensables para su posterior comprensión, como es el caso de la teoría de grafos con más de 20 conceptos y definiciones incluidas y que se recorren de forma amena en varios de los crucigramas y otros tipos de ejercicios propuestos.

Este trabajo sólo representa el comienzo de una etapa en la que muchas otras herramientas deberán surgir para el trabajo en el nuevo modelo de enseñanza centrado en el aprendizaje, ya sean objetos de aprendizaje, recursos didácticos, materiales complementarios o actividades para el entorno virtual de aprendizaje (EVA) que tendrán en su totalidad, como factor común, el propósito de coadyuvar al logro de los objetivos de la enseñanza en las diferentes Disciplinas y materias en concordancia con lo establecido en el MFCA.

Bibliografía

Amaya, D. (2008). *Propuesta metodológica para el perfeccionamiento del proceso de enseñanza y aprendizaje de la Matemática Discreta en la UCI*. Tesis en opción al Título Académico de Máster en Las Tecnologías de los Procesos Educativos. CUJAE, CREA.

Osorio, B. (2006) *Metodología para el desarrollo de Objetos de Aprendizaje*, Universidad Autónoma de Aguascalientes, Centro de Ciencias Básicas, Departamento de Sistemas de Información. Tesis para obtener el grado de maestro en Tecnologías de Información y Computación.

Castañeda, E. (2006-a). Conferencia *Las nuevas Tecnologías de la Información y las Comunicaciones como proceso cultural y las bases de su impacto en la actividad educativa. Un acercamiento desde lo tecnológico. Aplicaciones de las Nuevas Tecnologías de la Información y las Comunicaciones en el proceso de enseñanza aprendizaje*. Bajado del sitio: http://teleformacion.cujae.edu.cu/cvr/. Capturado el 12-9-06.

Horruitiner Silva, P. (2006). *La Universidad cubana: el modelo de formación.* Editorial Félix Varela. La Habana, Cuba.

Lom (2002). Draft Standard for Learning Object Metadata. IEEE 1484.12.1-2002, 15 July 2002. URL:http://ltsc.ieee.org/wg12/files/LOM_1484_12_1_v1_Fin Retrieved Sept 30, 2003.

López, M. E. (2002). Diseño de materiales didácticos para cursos on line. Teleduc 02. www.asenmac.com/teleduc02/ consulta: Jun-2007

Noa, L. (2000). *Guía de Estudio. Aplicaciones de Multimedia y EAD*. FED. UH. La Habana. Cuba.

Torres Fernández, Paul. (2006).Hacia dónde va la educación. Construcción de un modelo de educación abierta: Las TIC en la educación, ¿para qué? III Congreso Online – Observatorio para la CiberSociedad. Conocimiento Abierto. Sociedad Libre .Bajado del sitio: www.cibersociedad.net. Fecha: 28- 04- 08.

UCI. (2006). Sistema de Teleformación de la UCI. Dirección de Teleformación. Fecha: 9-9-06. Sitio: http://teleformacion.UCI.cu/mod/resource/view.php?id=8849

UCI. (2006-a). La formación del profesional en la UCI. Documento sobre la situación actual y Perspectivas de trabajo en el área docente. Principales ideas presentadas en el claustro de inicio de curso 2006-2007. Octubre 2006. Fecha 7-11-06. Material bajado del sitio. http://intranet.uci.cu/CGI_BIN/docs_docencia/LA%20FORMACION%20DEL%2

UNESCO, (1998). Declaración mundial sobre la Educación Superior en el Siglo XXI: visión y acción. Marco de acción prioritaria para el cambio y el desarrollo de la Educación Superior. Aprobados por la Conferencia Mundial sobre la Educación Superior. http://www.unesco.org/education/educprog/wche/declaration_spa.htm; consulta: Febrero de 2007.

Universidad Virtual del Instituto Tecnológico de Estudios Superiores de Monterrey (ITESM). http://www.ruv.itesm.mx/; consulta: Jun-2007

Villanueva, Yanet. (2005). Los medios de enseñanza y aprendizaje sustentados en las TIC. Una propuesta para la Matemática Básica. Tesis en opción al Título Académico de Máster en Ciencias de la Educación Superior en la Mención de Docencia Universitaria e Investigación Educativa. CUJAE, CREA.

Wiley, D. A. (2000). Connecting learning objects to instructional design theory: A definition, a metaphor, and a taxonomy. In D. A. Wiley (Ed.), The Instructional Use of Learning Objects: Online Version.URL. http://reusability.org/read/chapters/wiley.doc

Danilo Amaya Chávez. Nacido en 1978 en Cuba. Licenciado en Educación (Instituto Superior Pedagógico “Rubén Martínez Villena”, 2002). Máster en Tecnologías de los Procesos Educativos (Instituto Superior Politécnico “José Antonio Echavarría”, 2008). Profesor Matemáticas Discretas y Álgebra Lineal, Universidad de las Ciencias Informáticas, desde 2004 hasta la fecha. Colaborador del Departamento Docente Central de Matemáticas. Jefe de la Línea Temática “Herramientas para la Producción y Gestión de Materiales educativos en la disciplina Matemática”, del Proyecto ProDiMat, adscrito al Centro de Innovación y Calidad de la Educación (CICE) de la propia institución docente. Los principales temas de investigación son: Aplicación de las TIC en el proceso de enseñanza aprendizaje de la matemática superior. Diseño curricular de la disciplina Matemática. Enseñanza y aprendizaje de la Matemática Discreta con apoyo de Objetos de Aprendizaje y diseño y elaboración de materiales educativos. **dach@uci.cu, damayach@gmail.com**

UNIÓN
REVISTA IBEROAMERICANA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA

Junio de 2011, Número 26, páginas 137-151
ISSN: 1815-0640

Dinamización matemática

Relações entre o "visto" e o "sabido": as representações de formas tridimensionales feitas por alunos cegos

Solange Hassan Ahmad Ali Fernandes

Resumo

O objetivo deste artigo é analisar de que modo aprendizes cegos gerenciam os polos "visto" e "sabido" nas representações de dois sólidos geométricos (cubo e pirâmide de base quadrangular) feitas em papel. Dada a particularidade dos sujeitos de pesquisa, busca-se nas interações elementos que possam indicar o que faz parte do repertório "sabido" para esses alunos. No decorrer do artigo algumas questões buscam auxiliar na compreensão do processo de interação como atos de percepção que se inicia no corpo, instrumento de intercâmbio entre ambiente, cultura e cérebro.

Abstract

The aim of this paper is to analyze how blind learners manage the conflicts between "seeing" and "knowing" in relation to representations of two geometric solids (cube and square-based pyramid) made in paper. Given the particularity of the students who participated in this study, we seek to identify elements in their interactions that indicate what constitutes their repertoires of "knowing". Throughout the article, we present an analysis based on understanding the process of interaction as acts of perception that begin in the body, which assumes the role of an instrument of exchange between the environment, culture and brain.

Resumen

El objetivo de este trabajo es analizar cómo los alumnos ciegos gestión de los polos "visto" y "conocido" en las representaciones de dos sólidos geométricos (cubo y la pirámide de base cuadrada) realizados en papel. Dada la particularidad de los sujetos del estudio, buscamos a los elementos de las interacciones que pueden indicar qué parte del repertorio de "conocido" para estos estudiantes. A lo largo de este artículo algunas cuestiones buscar ayuda para entender el proceso de interacción como los actos de la percepción que comienza en el cuerpo, instrumento de intercambio entre el medio ambiente, la cultura y el cerebro.

1. Considerações iniciais

Em 7 de julho de 1688, William Molyneaux (1656 -1698) enviou uma carta a John Locke propondo um problema que despertou o interesse de vários filósofos iluministas. O problema indagava se um homem nascido cego e que aprendeu a distinguir entre uma esfera e um cubo através do tato seria capaz de distingui-los e nomeá-los usando somente a visão, caso fosse possível torná-lo capaz de ver (RISKIN, 2002, p.19). Para Locke o problema tornou-se fundamental e permeia todo seu trabalho nos *Ensaios Sobre o Entendimento Humano*. Ele o respondeu negativamente, afirmando que o tato descobre a extensão os corpos sensíveis que estão ao seu alcance, enquanto os olhos aprendem nos corpos e nas cores o que está ao alcance de sua vista (Locke, 1991, p. 55). Ou seja, já que nossos conhecimentos dependem de nossos sentidos, as qualidades predominantes num objeto são reconhecidas se percebidas pelos órgãos adequados a percebê-las (Ibid., pp. 130-131).

Naturalmente, respostas distintas foram oferecidas a este problema, e podemos perceber nelas diferentes valores atribuídos as experiências originadas pela sensação e pela percepção e, principalmente, ao que se refere à influência do corpo na cognição. Leibniz nos *Novos Ensaios*, revisitando a questão de Molyneux a responde de forma afirmativa, distinguindo *imagens* (produto dos sentidos) de *ideias exatas* (constituídas por imagens e constituintes de definições). Para ele, o tato poderia oferecer ao cego, *imagens táteis* coincidentes ou não com as *ideias exatas*, no entanto essas seriam suficientes para que ele percebesse, ao poder ver, que a esfera não tem pontos distintos e que no cubo podem-se perceber oito pontos distintos (Riskin, 2002, p.24).

Em agosto de 1749 o problema de Molyneaux chega às mãos de Diderot (1713–1784). Nesse mesmo ano ele publica a *Carta sobre os Cegos para o Uso Daqueles que Vêem* assumindo uma concepção materialista agregando a essa conceitos das ciências biológicas. Na *Carta* a resposta para a questão de Molyneaux é que o cego que passa a usufruir da visão não distinguiria entre o cubo e a esfera, pois ele não seria capaz de reconhecer através dos olhos as características que aprendeu pelo tato (Ibid., p. 21). No decorrer da *Carta,* Diderot remete-se a Saunderson[1] por quem demonstra profunda admiração, e diz que se o cego que passa a ver fosse Saunderson, inicialmente reconheceria um quadrado e um círculo graças às propriedades que aprendeu pelo tato dessas formas, mas substituir o círculo pela esfera e o quadrado pelo cubo necessitaria de um período de experiência. A visão desses e de outros filósofos conduziram ao encaminhamento apresentado neste artigo.

Desde que iniciamos estudos com aprendizes cegos temos buscado referências em pesquisas realizadas com aprendizes com acuidade visual dentro dos padrões normais. Tem sido nossa intenção levantar semelhanças e distinções entre o trabalho produzido por aprendizes cegos e por videntes. Um dos pontos a ser ressaltado dos resultados de nossas pesquisas, é que estar privado de um ou mais canais perceptivos nem sempre tem um efeito negativo, principalmente quando o assunto é sensação e percepção. Seguindo os passos de Diderot podemos dizer que respeitar o ritmo do aprendiz, permitindo-lhe maior período de experiência, pode desencadear fatos reveladores e surpreendentes a respeito das práticas matemáticas dos cegos.

Ao nos debruçarmos sobre os textos de Parzysz (1988) percebemos que os conceitos *polo visto* e *polo sabido,* no caso de aprendizes cegos, poderiam conduzir a uma aproximação das ideias de Leibniz nos *Novos Ensaios,* ou seja, distinguir *imagens táteis* de *ideias exatas* sendo essas constituídas por propriedades dos

[1]Nicholas Saunderson (1682-1739) matemático inglês, professor da Universidade de Cambridge e membro da Royal Society que perdeu a visão no seu primeiro ano de vida ao contrair varíola. Desenvolveu um método que ele chamou de "Aritmética palpável" para o estudo da aritmética e do cálculo algébrico (Fernandes, 2004, p.83).

objetos. Para testarmos nossas hipóteses nos inspiramos na questão de Molyneaux solicitando a aprendizes cegos que reproduzissem através de um desenho em papel um cubo e uma pirâmide de base quadrada, ambos “vistos” com suas mãos[2].

2. O visto e o sabido de Parzysz

Segundo Parzysz (1988, 1991), ao tentar representar um objeto tridimensional, o aprendiz depara-se com um dilema entre representar o que vê – *polo visto* - ou o que conhece – *polo sabido*. O *polo visto* consiste em representar um objeto tal qual ele se apresenta aos olhos, ou seja, segundo seus aspectos perceptivos. Já o *polo sabido* consiste em representar as propriedades e as relações do objeto que o aprendiz julga relevante, ou seja, baseia-se em aspectos cognitivos. O *polo sabido* não precisa de adequação, já que partimos do princípio que não ter acuidade visual dentro dos padrões normais não implica em déficit cognitivo. Quanto ao *polo visto*, cabe salientar que consideraremos “ver”, no caso dos sujeitos deste estudo, o esquema imagético[3] resultante da exploração tátil feita com as mãos.

Os resultados das pesquisas de Parzysz (1988, 1991) apontaram que nas representações de objetos geométricos tridimensionais de alunos videntes o “sabido” predomina sobre o “visto”, e distinguiu, durante a trajetória escolar, três atitudes que ocorrem sucessivamente de acordo com o nível escolar do aprendiz, mas que coexistem em alguns níveis de ensino. Inicialmente não há nas representações conflito entre “visto” e “sabido” ou elas são ignoradas (principalmente nas séries iniciais). Nessa fase os alunos desenham o que veem. Nas duas fases posteriores as representações passam a ter a influência do “sabido” sobre o “visto”, ou seja, o aluno procura representar, sem adaptações, as propriedades do objeto que julgue importante em detrimento da representação do objeto tal qual como ele o imagina ou experimenta.

Uma pesquisa realizada por Argyropoulos (2002) explora o pensamento geométrico de aprendizes sem acuidade visual, e examina como os parâmetros da percepção tátil de formas (toque, postura, movimento, forma e linguagem) implicam num resultado cognitivo. O objetivo da pesquisa de Argyropoulos é relatar como aprendizes que não podem ver reconhecem formas geométricas e suas propriedades, para isso ele utiliza o modelo proposto por Van Hiele a fim de explorar individualmente como esses aprendizes “pensam geometria”. Ele considera ainda as implicações do método de ensino relacionado às necessidades educacionais especiais desses aprendizes e examina a interferência dos parâmetros de percepção tátil da forma com os resultados cognitivos. Alguns resultados e observações oriundos da pesquisa de Argyropoulos (2002) são relevantes para este estudo e auxiliaram nas discussões que serão conduzidas, entre esses destacamos:

[2] As reflexões apresentadas neste artigo fazem parte do trabalho desenvolvido no Projeto Rumo à Educação Matemática Inclusiva financiado pela CAPES, processo no. 23038.019444/2009-33 e os dados analisados foram coletados durante o desenvolvimento do Projeto A Inclusão de Aprendizes com Deficiências Visuais nas Aulas de Matemática: O Caso de Geometria, financiado pela FAPESP, Processo No. 2004/15109-9.

[3] De acordo com as premissas da Linguística Cognitiva, são padrões abstratos resultantes de uma série de experiências perceptivas, não sendo específicos de um único sistema sensorial. Em outras palavras, são esquemas nos quais se integram as experiências sensório-motoras com as diversas modalidades perceptivas, como as do sistema auditivo e tátil (Evans e Chilton, 2009).

- Através do tato os deficientes visuais formam imagens mentais e a partir dessas imagens fazem ligações com seus conhecimentos. Em outra experiência esse novo conhecimento adquirido de forma tátil estará disponível.
- Memória, hipóteses e decisões são construídas com base em estímulos hápticos.
- Um aluno que pode ver tem a oportunidade de reconhecer uma mesma forma geométrica, várias vezes em posições e tamanhos distintos, o que é mais limitado para os que não podem ver. Assim o primeiro estímulo háptico adquire grande importância e predominará no desenvolvimento de conceitos desses sujeitos.
- A maior parte das informações sobre formas geométricas por esses aprendizes é adquirida com base em experiências concretas e muito pouco do seu conhecimento é abstrato.

O objetivo neste artigo é analisar de que modo aprendizes cegos gerenciam "visto" e "sabido" nas representações de dois sólidos geométricos (cubo e pirâmide de base quadrangular) por meio de um desenho feito com materiais didáticos adequados a sua limitação perceptiva.

Dada a particularidade dos sujeitos de pesquisa, busca-se nas interações com as ferramentas materiais e com as pesquisadoras elementos que possam indicar o que faz parte do repertório "sabido" para esses alunos, ou seja, se há, para esses alunos uma imagem[4], na perspectiva de Damásio, que os levem a reconhecer de forma tátil e representar um cubo e uma pirâmide de base quadrangular, objetos matemáticos que fazem parte deste estudo.

Pensar em termos de *polo visto* e/ou *polo sabido* pareceu-nos pouco adequado a princípio, no caso de aprendizes cegos, mas a relação entre o *polo visto* e a percepção nos levou a atribuir a essas concepções o caráter de fenômeno[5], ou seja, associar aos parâmetros determinados por Parzysz a perspectiva Fenomenológica segundo a qual "não somos nós que interferimos nas coisas: são elas que se mostram a nós, ou melhor, que se deixam revelar" (Carmo, 2000, p.22). De fato, a forma particular como os objetos mostram-se aos sujeitos fizeram-nos recorrer a outros estudos, mais precisamente a Fenomenologia merleau-pontyana e alguns princípios da Neurociência discutida por António Damásio. Naturalmente, não temos a ambição de esgotar ou oferecer um estudo de grande profundidade na área da Neurociência ou da Fenomenologia, recorremos a elas como recurso para compreender relações entre mente, corpo e cognição, que para nós mostraram-se intrinsecamente ligados aos polos visto e sabido.

No decorrer deste artigo conduziremos algumas questões com intuito de auxiliar na compreensão do processo de interação como atos de percepção que se inicia no corpo, instrumento de intercâmbio entre ambiente, cultura e cérebro (Belarmino, 2010).

---

[4] Segundo Damásio (2005) imagem designa um padrão mental em qualquer modalidade sensorial, como uma imagem sonora ou imagem tátil, por exemplo.
[5] Na Filosofia, objeto de experimentação, fato, o que se manifesta a consciência, tudo que é objeto de experiência possível, isto é, que se pode manifestar no tempo e no espaço segundo as leis do entendimento (Novo dicionário Aurélio da língua portuguesa, p. 769). O fenômeno é tudo aquilo (material ou ideal) de que podemos ter consciência, de qualquer modo que seja.

3. Da corrente fenomenológica

De acordo com a perspectiva fenomenológica merleau-pontyana quando nos deparamos com um objeto, nossa consciência perceptiva nos permite notá-lo e percebê-lo em total harmonia com sua forma. Uma vez percebido esse objeto passa a fazer parte de nossa memória, ou seja, passa a compor um repertório que Barsalou (2008) denomina representação multimodal[6] que uma vez constituída durante a experiência fica disponível para ser reativada em situações de simulação. Para ele, a simulação é a (re)criação dos estados perceptivo, sensório-motor e introspectivo adquiridos durante a experiência respectivamente com o mundo, corpo e mente.

Esse ponto de vista nos remete ao princípio da atividade percepto-motora nos padrões mencionados por Nemirovsky (2003), ou seja, no caso dos aprendizes sem acuidade visual dentro dos padrões normais, os sistemas de mediação devem estimular além do tato outros canais perceptivos (por exemplo, auditivo, linguístico e espacial) que possam enriquecer a interpretação dos dados adquiridos através dos sistemas perceptivos.

A consciência tátil sugere a presença de um campo perceptivo conectado ao campo motor do aprendiz, nas palavras de Merleau-Ponty (2006):

> ... para que um objeto possa desencadear um movimento, é preciso que ele esteja compreendido no campo motor do doente [do cego], e o distúrbio consiste em um estreitamento do campo motor, doravante limitado aos objetos efetivamente tangíveis, excluindo este horizonte do tocar possível que no normal [no vidente] o circunda. A deficiência referir-se-ia, no final de contas, a uma função mais profunda do que a visão, mais profunda também do que o tocar enquanto soma de qualidades dadas, ela estaria relacionada à área vital do sujeito, a essa abertura ao mundo que faz com que objetos atualmente fora do alcance [...] existam tatilmente para ele e façam parte do seu universo motor (p 167).

Essa citação conduz a uma reflexão a respeito do corpo e sua relação com o mundo que o circunda. A estreita relação entre corpo e cognição tem sido objeto de estudos de muitos pesquisadores contemporâneos, e no caso de indivíduos cegos essa relação merece maior atenção, já que é o corpo - especialmente a percepção tátil - que proporciona acesso ao mundo que os circunda ao mesmo tempo em que limita o campo perceptivo. Só faz parte do campo perceptivo do cego o que é tangível ao seu corpo. Esta perspectiva faz emergir um novo paradigma no que se refere à relação ação, experiência e cognição. Esse novo paradigma propõe que a ação estimulada pela percepção é desencadeadora do processo cognitivo.

Para Damásio (2007, p.256) ter percepção não é apenas uma questão de fazer com que o cérebro receba sinais diretos de um determinado estímulo. O corpo não é passivo e interage com o meio ambiente. "A percepção é tanto atuar sobre o meio ambiente como dele receber sinais".

[6] É a representação mental de um objeto formulada através de vários elementos perceptivos durante uma experiência. Por exemplo, quando pensamos numa poltrona confortável, recorremos a nossa memória para integrar informações de sua aparência, maciez e textura (elementos perceptivos), da ação de sentar e da introspecção de conforto e relaxamento.

4. Da Neurociência

Damásio (2005, 2007), desafiando o dualismo corpo-cérebro, apresentou um modelo para a mente[7] humana, usando uma explicação neurobiológica. Para ele corpo e cérebro formam um organismo indissociável e dinâmico já que corpo e cérebro interagem intensamente, e o organismo que eles formam interage profundamente com o meio ambiente físico e social, sendo essas relações mediadas pelos movimentos do organismo e pelos aparelhos sensoriais. Desse modo, nossas percepções são fenômenos mentais que só podem ser compreendidas no contexto de um organismo em interação com o ambiente que o cerca e que, de acordo com Damásio (2005, p. 254), tais percepções estão intrinsecamente ligadas à história biográfica do organismo.

Discutir o modo que objetos e mundo são percebidos quando há privação de órgãos sensoriais nos faz cuidar do que é percepção. O indivíduo não é um alvo passivo dos ataques sensoriais provenientes do meio, ele interage com o meio e estrutura o produto dessas interações impondo uma ordem própria às suas percepções. Ao interagir com um objeto, o cego (assim como o vidente) o mapeia, e esse mapeamento mobiliza seu organismo que constrói um padrão mental (ou imagem) para o objeto. Estando atada a biografia do individuo, o padrão mental constituído para determinado objeto não coincide necessariamente com o de outros indivíduos, e mais, aproximando-se da perspectiva fenomenológica, Damásio (2005, p. 405) declara que “não conhecemos a aparência das coisas”, a imagem que vemos baseia-se nas mudanças que ocorrem em nosso organismo. Ou seja, as imagens de objetos matemáticos, no nosso caso, estão intrinsecamente ligadas à forma que os aprendizes têm acesso aos objetos ao interagir com os vários sistemas – biológico, social e cultural – que compõem o mundo que experimentam; e ainda, com a forma que constroem seus próprios significados para a matemática com a qual se deparam. Esse foi um dos pontos que nos levou a discutir os polos visto e sabido de Parzysz, conduzindo-nos a seguinte questão: Os objetos vistos com as mãos ou com os olhos produzem imagens que permitam que eles possam ser representados do mesmo modo?

5. O estudo

Os objetos matemáticos que propomos investigar neste estudo estão ligados a representação de objetos tridimensionais que, no trabalho com alunos videntes, são usualmente associadas à percepção visual. As investigações concentram-se em compreender como ocorre o desenvolvimento do pensamento geométrico para aprendizes que não podem recorrer a experiências visuais, sejam essas anteriores a situação instrucional ou durante a realização da mesma estabelecendo comparações ou relações com objetos que fazem parte do cenário. Pretendemos investigar a influencia da percepção tátil, proporcionada pelas ferramentas materiais, na concepção do que é “visto” e “sabido” por aprendizes sem acuidade visual dentro dos padrões normais.

[7] Abrange operações conscientes e inconscientes, referindo-se a um processo. É um fluxo contínuo de padrões mentais (imagens) que se revelam logicamente inter-relacionados (Damásio, 2005, p. 426). É um fenômeno mental, o que equivale dizer cognição ou processo cognitivo (Ibid, 2007, p. 116).

Doze alunos cegos matriculados no Ensino Médio (de 15 a 18 anos) de uma escola regular do Estado de São Paulo participaram do procedimento empírico descrito neste artigo. O material para desenho colocado a disposição desses alunos é adequado para cegos ou com visão subnormal (Figura 1), e todo trabalho foi desenvolvido em grupo, podendo haver interações entre os participantes e desses com as pesquisadoras.

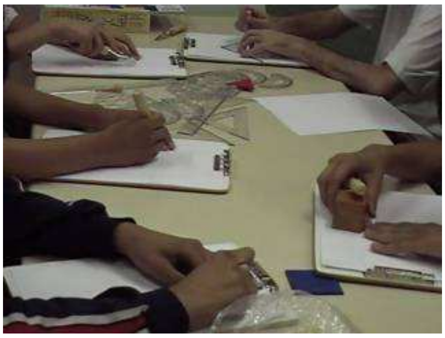


Figura 1: Material de desenho adaptado

O trabalho empírico aconteceu em duas etapas. Numa primeira etapa os aprendizes deveriam desenhar um quadrado e um triângulo isósceles como os de madeira que lhes foram oferecidos pelas pesquisadoras. Neste artigo não nos detemos a essa etapa, mas o seu objetivo era o reconhecimento dessas formas que compunham as formas tridimensionais. As formas tridimensionais oferecidas na segunda etapa foram um cubo e uma pirâmide de base quadrangular, ambas também de madeira (Figura 2). Pelas características do sistema háptico, evitamos os elementos esqueléticos (onde somente as arestas são representadas) como os usados por Parzysz em sua pesquisa. Ao explorar um objeto, a mão do cego move-se de forma intencional captando particularidades da forma a fim de obter uma imagem deste objeto. Resultados de nossos estudos mostram que formas com muitos elementos dificultam a análise do material que está sendo explorado.

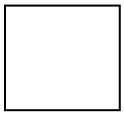
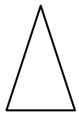
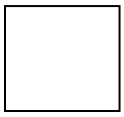
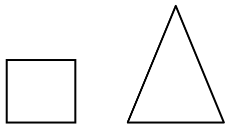
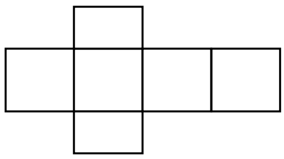
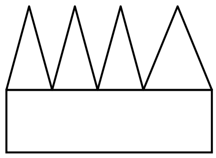
Figura 2: Cubo e pirâmide de madeira

Foram realizadas três sessões de aproximadamente 50 minutos, uma com cada grupo de sujeitos, um grupo com seis alunos, outro de quatro alunos e um terceiro com dois. Os dados foram videogravados e todo o material produzido pelos alunos arquivado para posterior análise. Neste artigo discuto o trabalho empírico de três dos doze sujeitos que realizaram a atividade, já que esses representam as diferentes respostas oferecidas pelos aprendizes. Para esses sujeitos uso pseudônimos.

6. Realização das atividades e análise

Os sujeitos receberam oralmente a orientação para representar no papel a forma geométrica que estavam recebendo para a exploração tátil – cubo e pirâmide nessa ordem. Para tanto poderiam usar quaisquer dos recursos disponíveis (réguas, esquadros, punção, carretilha, transferidor) e poderiam manifestar-se não satisfeitos refazendo o desenho quantas vezes quisessem. A cada forma recebida seguia-se um período dedicado a exploração tátil que por sua vez era seguido pelo desenho no papel. Os desenhos produzidos pelos três alunos estão representados na tabela abaixo (Tabela 1). Destacamos que o material usado pelos alunos produz um desenho tátil, assim o relevo deixado no papel não é visível em fotos, optamos então por reproduzi-los.

Tabela 1: A representação dos aprendizes

	CUBO	PIRÂMIDE
DANI		
ANDRÉ		
LEANDRO		

Tanto André como Dani fizeram suas representações colocando uma das faces do sólido sobre o papel contornando-o a seguir com a punção. Na verdade esse procedimento foi utilizado por onze dos doze participantes da atividade (Figura 3). Cabe destacar que a cegueira dos aprendizes impede a repetição do procedimento por imitação, assim a escolha dessa estratégia é vista como uma decisão individual embora o trabalho esteja sendo feito em grupo.

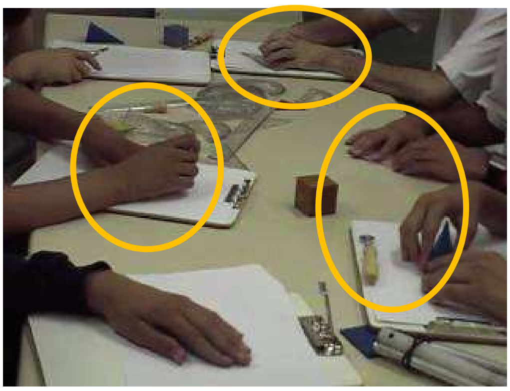


Figura 3: Contornando uma das faces

6.1. O desenho de Dani

Para desenhar o quadrado e o triângulo da primeira etapa Dani posicionou um dos lados da figura paralelamente ao seu corpo sobre o papel e a "copiou" com a punção. Ao receber a primeira forma tridimensional o reconheceu como um cubo após a exploração tátil. Posicionou uma das faces sobre o papel, mantendo um dos lados da face paralelo ao seu corpo, e a contornou. Depois de concluir o desenho fez a exploração tátil e declarou: *Então o cubo fica assim! Parece um quadrado!* Não estando satisfeita com a qualidade do desenho decidiu refazê-lo. Iniciou exatamente da mesma forma e seguiu o mesmo procedimento, mas dessa vez afirmou estar satisfeita com o resultado.

A forma seguinte era a pirâmide. Depois da exploração tátil posicionou a base quadrada sobre o papel. Parou um instante, tateou a forma e declarou: *Mas essa parte não vai sair não!,* indicando à pesquisadora, com as pontas dos dedos, o vértice da forma. Posiciona seguidamente a pirâmide sobre o papel, ora a base ora uma de suas faces, a explora atentamente e a reconhece – *Ah! Isso daqui é uma pirâmide.* Depois de algum tempo estabelece-se o seguinte diálogo:

Dani*: Isso daqui não vai sair! Essa parte aqui oh!* (com os dedos sobre o vértice)

Pesquisadora*: Claro que vai.*

Dani*: Vai sair como se tá de pé aqui?* (apontando o vértice)

Pesquisadora*: O que eu quero de você agora é o desenho desta figura.*

Dani*: Mas não vai sair! E essa parte aqui?* (mostrando o vértice) (Figura 4a).

Pesquisadora*: Claro que vai.*

Dani*: A não ser que eu fizesse assim ... olha ... deitasse* (posicionando uma das faces triangulares sobre o papel) (Figura 4b)*, mas e isso aqui depois?* (mostrando a base da pirâmide).

Figura 4a y 4b: O trabalho de Dani

Sem mostrar-se satisfeita decide representar uma das faces triangulares. Completa o desenho e não manifesta o desejo de refazê-lo.

O reconhecimento de cada uma das formas tridimensionais por parte de Dani, ao iniciar a tarefa, só foi possível porque ela tinha um padrão mental (uma imagem) constituída para esses objetos. Tal fato sugere que para nomear cada uma das formas, ela recorreu a, pelo menos, uma de suas propriedades. De acordo com o que se pode observar, durante a exploração tátil, ela reconheceu faces congruentes no caso do cubo, base e vértice para a pirâmide, ou seja, de algum modo Dani pode recorrer a uma imagem, que dada a sua cegueira congênita, foi evocada a partir dos seus conhecimentos sobre as propriedades táteis e espaciais desses objetos. Essas considerações, feitas a partir dos estudos de Damásio, nos faz considerar que o “polo sabido” existia para Dani. Sua dificuldade era representar esses objetos tridimensionais em duas dimensões. O que ela não conseguia fazer era representar o que estava vendo com as mãos - “polo visto”.

Foi uma surpresa para ela perceber que o desenho que fez do cubo “parecia-se” com um quadrado. Parecemos que para ela bastava uma cópia como a que ela fez da figura bidimensional, para que o cubo surgisse. Era como se ela imagina-se estar fazendo uma fotografia da forma que por ter todas as faces iguais não poderia ter outra representação. A tentativa do mesmo procedimento para o desenho da pirâmide não lhe pareceu viável, já que essa forma apresenta elementos distintos dos que caracterizam um cubo – suas faces não são congruentes. Entre desenhar a base (quadrada) ou uma das faces triangulares escolheu a face triangular, possivelmente na tentativa de evitar que o desenho de sua pirâmide fosse igual ao desenho do seu cubo.

6.2. O desenho de André

Num primeiro momento André copiou com a carretilha o quadrado, não gostando do resultado pediu a punção e repetiu o desenho. Tanto para o quadrado quanto para o triângulo ele usou o mesmo procedimento que Dani. Posicionou um dos lados paralelamente ao seu corpo e o contornou. Ao receber cada uma das formas tridimensionais para exploração tátil, André não teve nenhuma dificuldade para reconhecê-las como cubo e pirâmide respectivamente. Quanto à representação, o trabalho com o cubo não foi diferente do trabalho de Dani (Figura 5), ele posiciona uma das faces o cubo sobre o papel, mantendo uma das arestas paralela ao seu corpo e o contorna.

Figura 5: O trabalho de André

No entanto, o desenho da pirâmide também pareceu ser difícil para ele. A natureza introspectiva de André não permite que ele manifeste com naturalidade suas dificuldades como fez Dani, mas observando suas ações ao explorar a forma e as sucessivas vezes que ele a posiciona sobre o papel, pode-se sugerir que o conflito girava em torno das duas formas geométricas presentes na figura (quadrado e triângulo). Para contornar essa situação André resolve representar a base da pirâmide e uma de suas faces triangulares, exatamente na posição apresentada na Tabela1.

Como apontado no caso de Dani, André recorreu a uma imagem que fazia parte do seu repertório para identificar o cubo e a pirâmide - “polo sabido”, mas ao representar essas formas não conseguiu associar o "polo sabido" ao que estava vendo - "polo visto". Ao explorar com as mãos tanto o cubo como a pirâmide André recebeu informações fragmentas: várias faces, vértices e arestas e não conseguiu integrá-las quando as representou no papel. Possivelmente, para ele, não parecia ter sentido representar tantas formas iguais, bastando desenhar as que eram distintas.

6.3. O desenho de Leandro

Leandro tinha familiaridade com o material de desenho e facilidade para trabalhar com a carretilha. Seu procedimento foi diferente do usado por todos os outros sujeitos envolvidos na atividade. Antes de desenhar o quadrado e o triângulo usou a régua para medir os seus lados, era como se medir os lados das figuras fizesse parte do seu reconhecimento tátil. Os desenhos foram feitos a mão livre, e por várias vezes na mesma folha até que ele se considerasse satisfeito.

Os desenhos feitos por Leandro para as formas tridimensionais nos surpreenderam. Ao receber o cubo o explorou atentamente, mediu algumas de suas arestas com a régua, contou o número de faces, reconheceu a forma e começou a desenhar. O desenho que ele produziu está representado na Tabela 1 e causa surpresa especialmente quando comparado aos desenhos de seus colegas, mas talvez seja mais interessante saber como ele chegou a esse produto final. Para o cubo, Leandro começa o seu desenho fazendo um quadrado e segue construindo os outros quadrados um a um, mantendo um lado comum entre eles. Para comparar e manter a congruência entre as medidas dos lados desses quadrados usa os dedos como instrumento de medição (Figura 6).

Figura 6: Desenhando o cubo

O trabalho com a pirâmide começa exatamente como o descrito para o cubo, o modo que ele a desenha é que apresenta algumas mudanças. Ele começa o desenho fazendo um grande retângulo que vai de um lado a outro da largura da folha, coloca uma das faces da pirâmide sobre um dos lados do retângulo (Figura 7) e a copia com a ajuda da carretilha. As faces seguintes são desenhadas a mão livre, sempre usando os dedos para manter a congruência entre as medidas, com exceção da quarta e última face que foi desenhada para preencher todo o comprimento do lado do retângulo. Para certificar-se que seu desenho estava ficando compatível com a forma que tenta representar faz, por diversas vezes, a comparação com o sólido de madeira (Figura 8), detendo-se com frequência a base da pirâmide.

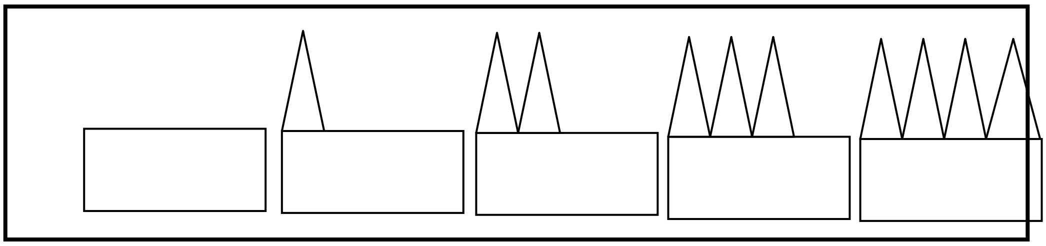


Figura 7: A pirâmide de Leandro passo a passo

Figura 8: Desenhando a pirâmide

Os dois desenhos feitos por Leandro tinham fortes traços dos sólidos geométricos planificados representados nos livros didáticos. Vendo a coerência entre os dois desenhos a pesquisadora pergunta:

Pesquisadora*: Você já tinha trabalhado com esse tipo de figura?*

Leandro*: Não. Desenhado eu já tinha, mas nada desse tipo.*

Pesquisadora*: Você já tinha trabalhado com figuras planificadas?*

Leandro*: Não. Foi assim que eu imaginei.*

Assim com Dani e André, Leandro também foi capaz de nomear cada uma das formas tridimensionais, o que, como dito anteriormente, indica que havia um "polo sabido" ao qual ele pudesse recorrer. O que de fato distingui o trabalho de Leandro dos demais é a forma pela qual ele passou para o papel o produto de sua percepção tátil, de sua interação com a forma. A exploração tátil de cada das faces lhe ofereceu um quadro fragmentado, e para integrá-lo Leandro desenhou cada uma das formas sugerindo sua planificação. No desenho do cubo a congruência das faces o levou a desenhá-lo de acordo com a planificação usada regularmente nos livros didáticos. Quanto à pirâmide, a necessidade de manter a relação entre faces e base o fez representar a base quadrangular como um "grande retângulo" que mantivesse o desenho como um conjunto perfeitamente integrado. No caso de Leandro pode-se reconhecer, especialmente na sua representação da pirâmide, grande influência do polo visto.

7. Considerações finais

Corroborando com os resultados apontados por Argyropoulos (2002) os sujeitos deste estudo, através do tato formularam esquemas imagéticos das formas que foram conectadas a conhecimentos que eles tinham, já que todos as classificaram corretamente. No entanto, a limitação sensorial desses aprendizes faz com que o primeiro estímulo háptico predomine no desenvolvimento das tarefas. As informações adquiridas com base em experiências concretas acabam sendo um impedimento para representações que indiquem um conhecimento abstrato.

De acordo com Damásio (2005, 2007) uma representação é uma imagem mental que surge durante o processamento perceptivo-motor. Ele denomina as imagens formadas, a partir das diversas modalidades sensoriais, de *imagens perceptivas* - formadas no presente que passam a fazer parte de nossa memória. Essas mesmas imagens, que agora fazem parte do que chamamos repertório multimodal, estão prontas para serem evocadas a partir do passado real ou de planos futuros, a essas imagens Damásio dá o nome de *imagens evocadas*. O cubo e a pirâmide faziam parte do repertório multimodal dos aprendizes, ou seja, em algum momento, no passado, esses aprendizes tiveram contato com essas formas, no contexto escolar ou cotidiano, e a partir desse contato formularam uma *imagem perceptiva* de acordo com a perspectiva da Neurociência, ou esquema imagético sob a lente da Linguistica Cognitiva, que foi reativada durante o processo de percepção tátil proporcionado pela situação experimental. Por esse ponto de vista, as imagens evocadas do cubo e da pirâmide pelos aprendizes cegos constituem o "polo sabido", pois para associar essas imagens à percepção tátil eles precisaram reconhecer algumas características ou propriedades dessas formas.

Voltando a idéia de fenômeno, a consciência perceptiva do cego o permite notar e perceber as formas tridimensionais do modo que elas são, ou seja, como revelam-se aos sujeitos: com faces, arestas e vértices, mas não há harmonia dessas formas com seus corpos. Eles não conseguem representar em duas dimensões o que as mãos vêem em três, e acabam por representar somente o que se mostra distinto aos seus "olhos", ou seja, as diferentes formas geométricas que aparecem numa única peça.

Retomando a questão: *Os objetos vistos com as mãos ou com os olhos podem ser representados do mesmo modo?* A melhor resposta que podemos oferecer agora é: *Depende*. Num estudo posterior ao apresentado neste artigo, pudemos nos certificar que os alunos cegos têm êxito nas representações de formas tridimensionais usando materiais que os permitam fazê-las tridimensionalmente (Figura 9). Desse modo, o conflito não gira em torno de "visto" ou "sabido", mas é sim de natureza material. Pode-se ainda conjecturar que o uso de material adequado favorece aos aprendizes a representação do *visto*, ao contrário do que ocorre com os aprendizes videntes.

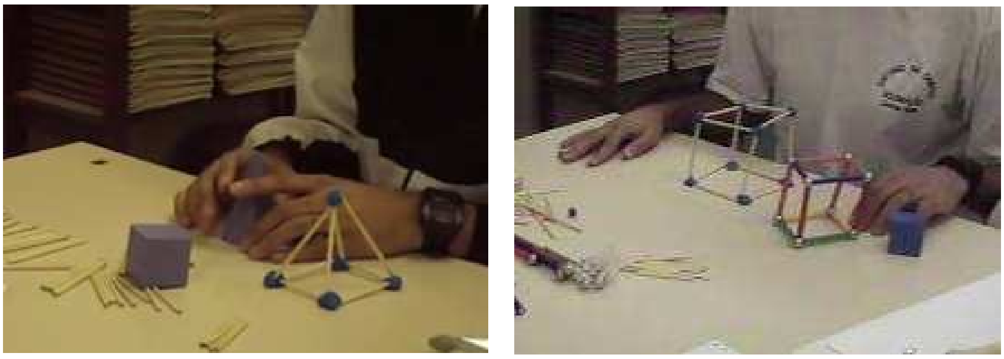


Figura 9: Representações tridimensionais para o cubo e para pirâmide

Há indícios que permitem ainda afirmar que nas representações feitas no papel, existe influência do "sabido" sobre o "visto", mas ao contrário do apontado por Parzysz (1988, 1991) nos estudos com videntes, o "sabido" não predomina sobre o "visto". Na representação feita no papel ou no espaço, nossos sujeitos procuram representar, sem adaptações, o objeto tal qual como ele o imagina ou experimenta, mesmo Leandro desenhou o que via. As análises das representações produzidas pelos sujeitos aproximam-se das idéias defendidas por Diderot, ou seja, os sujeitos reconheceram quadrados e triângulos graças às propriedades percebidas pelo tato, mas substituí-las por representações de cubo e pirâmide necessitaria de um período de experiência e material adequado. Mesmo quando trabalhamos com alunos videntes a capacidade de "ver" um objeto tridimensional não parece ser inata. De modo geral, a habilidade de visualização no espaço precisa ser desenvolvida no decorrer das atividades.

Temos dados indicando que os estudos de conceitos geométricos são, muitas vezes, negligenciados nas escolas quando o aprendiz é cego, mas essa negligência não ocorre pelas limitações dos aprendizes. Na verdade ela é de natureza humana e material. O professor não se considera seguro ou preparado para ensinar Geometria para os cegos, ou seja, não se sente seguro para escolher o tipo de abordagem que fará ou o material que deverá adotar ou adaptar. Esse é um dos objetivos de nossas pesquisas, encorajar professores, diretores e educadores em geral a planejar ações que possam promover a desejada Educação Matemática Inclusiva.

Bibliografia

Argyropoulos, V. S. (2002). Tactual shape perception in relation tothe understanding of geometrical concepts by blind students. *The British Journal of Visual Impairment*, pp. 7-16.

Barsalou, L. W. (2008). Grounded Cognition. *Annual Review of Psychology*, January, Vol. 59, Pages 617-645. DOI: 10.1146/annurev.psych.59.103006.093639.

Belarmino, J. (2010). *Representação e Interação: O Problema da Percepção da Cegueira como um Ato de Cognição*. Acesso em nov. de 2010. Disponível em: http://intervox.ufrj.br/~joana/textos/tecni04.html#inicio..

Carmo, P. S. (2000). *Merleau-Ponty: uma introdução*. São Paulo: EDUC. Série Trilhas.

Colmez, F.; Parzysz, B. (1993). Seeing and knowing in the evolution of the representation of a pyramid (from 8 to 17 years old). (Le vu et le su dans l'´evolution de dessins de pyramides du CE2 `a la seconde.) Bessot, A. et al., *Espaces graphiques et graphismes d'espaces (Contribution de psychologues et de didacticiens `a l'´etude de la construction de savoirs spatiaux)*. Pens´ee Sauvage, Editions, Grenoble (ISBN 2-85919-086-4). 35-55.

Damásio, A. (2005). *O mistério da consciência: do corpo e das emoções ao conhecimento de si*. Tradução Laura Teixeira Motta. 7ª ed. São Paulo: Companhia Das Letras.

Evans. V.; Chilton. P. (2009). *The perceptual basis of spatial representation*. Disponível em http://www.vyvevans.net. Acesso em 13 out. 2009.

Fernandes, S. H. A. A. (2004). *Uma análise vygotskiana da apropriação do conceito de simetria por aprendizes sem acuidade visual*. São Paulo. 300 f. Dissertação

(Mestrado em Educação Matemática), Pontifícia Universidade Católica de São Paulo.

Locke, J. (1991) *Ensaio Acerca do Entendimento Humano. Segundo Tratado sobre o Governo*. Tradução: Primeira parte Anoar Aiex; segunda parte E. Jacy Monteiro. 5ª ed. São Paulo: Nova Cultura. Os Pensadores; v.9. (publicado originalmente em 1690).

Merleau-Ponty, M. (2006). *Fenomenologia da percepção.* Tradução de Carlos Alberto Ribeiro de Moura. 3ª ed. São Paulo: Martins Fontes. (Texto original publicado em 1945).

Nemirovsky, R. (2003). *Three conjectures concerning the relationship between body activity and understanding mathematics*. In: Pateman, N.A.; Dougherty, B.J.; Zilliox, J.T. (eds.), Proceedings of PME 27, 1, 103-135.

Parzysz, B. (1988). “Knowing” vs “seeing”. Problems of the plane representation of space geometry figures. *Educational Studies in Mathematics*, 19(1), 79-92.

Parzysz, B. (1991). Representation of space and student’s conceptions at high school level. *Educational Studies in Mathematics*, 22(6), 575-593.

Riskin, J. (2002). *Science in the Age of Sensibility: the Sentimental Empiricists of the French Enlightenment*. Chicago: University of Chicago Press.

Solange Hassan Ahmad Ali Fernandes. Professora do Programa de Pós Graduação da Universidade Bandeirante de São Paulo (UNIBAN). Doutora em Educação Matemática pela Pontifícia Universidade Católica de São Paulo (PUC-SP) tem se dedicado a pesquisas centradas nos processos de ensino e aprendizagem de conceitos matemáticos de alunos com necessidades educacionais especiais inseridos em salas regulares desde 2002. **solangehf@gmail.com**

UNIÓN
REVISTA IBEROAMERICANA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA

Junio de 2011, Número 26, páginas 153-158
ISSN: 1815-0640

El rincón de los problemas

Uldarico Malaspina Jurado

Pontificia Universidad Católica del Perú
umalasp@pucp.edu.pe

Regiones con cónicas

Problema

Una semielipse con su eje mayor forman una región convexa R_1, y un arco simétrico de parábola con una cuerda perpendicular a su eje de simetría, forman una región convexa R_2. Si la cuerda de la parábola coincide con el eje mayor de la semielipse, que mide 100 cm, y el arco de parábola es tangente a la semielipse en un extremo de su semieje menor, que mide 30 cm, ¿cuál de las regiones tiene mayor área?

Es probable que este problema nos haga pensar inmediatamente en el cálculo integral o en buscar fórmulas para calcular el área de la región que encierra una elipse y la región que encierra un arco de parábola con una cuerda perpendicular a su eje de simetría. Sin embargo, con esos recursos sería un problema rutinario de aplicación, donde la mayor atención está en la integración, en lo operativo. Resulta más interesante proponerlo de una manera menos formal, en un contexto arquitectónico, y a estudiantes que no conozcan aún el cálculo integral. A continuación una propuesta experimentada con alumnos:

> *En el espacio que queda entre la parte superior del marco de una puerta y el techo, hay un rectángulo de 30 cm de altura y 1 metro de largo. Para este espacio se quiere diseñar una ventana ornamental cuyo borde superior sea un arco simétrico tangente al lado superior del rectángulo y cuyos extremos coincidan con los extremos del lado mayor del rectángulo. Carlos propone que el arco sea una semielipse y María propone que sea un arco de parábola. ¿Con cuál de las propuestas ingresará más luz por la ventana?*

Con este enunciado, el problema fue propuesto en un curso de matemática básica a alumnos del primer ciclo de estudios universitarios de ingeniería, con conocimientos de geometría analítica, pero sin conocimientos de cálculo integral. Un 87% respondió correctamente, aunque no todos justificaron adecuadamente. El problema resulta interesante en este nivel de conocimientos, pues lleva a usar con creatividad los recursos propios de la geometría analítica para resolverlo. Los comentarios y reflexiones que hacemos, examinando fundamentalmente argumentaciones y procedimientos en las soluciones de los alumnos, dan elementos para pensar en cambios en nuestra manera de enseñar y para hacer un estudio y análisis más profundo sobre la enseñanza y aprendizaje de la geometría analítica; en particular de las cónicas.

Evidentemente, hay que graficar las curvas y un primer paso importante es elegir convenientemente la ubicación de los ejes coordenados para facilitar las ecuaciones correspondientes y los cálculos a que haya lugar, lo cual no suele ser frecuente en los problemas, pues generalmente se dan las ecuaciones ya establecidas, aunque no es así como se encuentran los problemas en la realidad.

Ubicando los ejes de coordenadas cartesianas de modo que el origen coincida con el punto medio del eje mayor de la semielipse – que es el centro de la elipse correspondiente – tenemos que la ecuación cartesiana de la elipse es

$$\frac{x^2}{50^2}+\frac{y^2}{30^2}=1$$

y en consecuencia la ecuación de la semielipse del problema es

$$y=\frac{3}{5}\sqrt{2500-x^2} \qquad (1)$$

Por otra parte, la ecuación de la parábola es fácilmente obtenible, pues es de la forma

$$y=ax^2+30$$

para algún valor negativo de *a* (se abre hacia abajo) y tal valor se determina considerando que pasa por el punto (50; 0). Así,

$$0 = a.(2500) + 30,$$

de donde $a=-\frac{3}{250}$ y en consecuencia

$$y=-\frac{3}{250}x^2+30 \qquad (2)$$

Las gráficas de (1) y (2) deben hacerse para $x\in[-50;50]$ y en un mismo sistema de coordenadas. Nos preguntamos

¿La semielipse está más arriba que el arco de parábola?

¿El arco de parábola está más arriba que la semielipse?

¿Cabe otra posibilidad?

Al esbozar las gráficas usando un software como el Derive, se obtiene lo que se muestra en la figura 1, en la cual el trazo azul corresponde a la semielipse y el trazo rojo al arco de parábola:

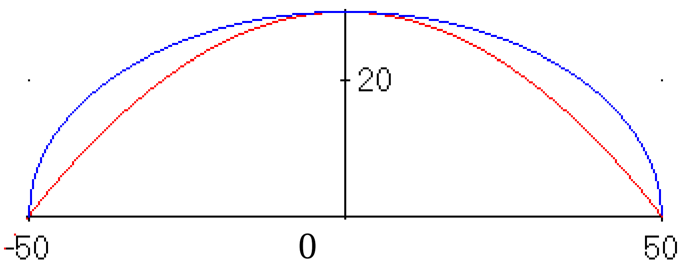


Figura 1

Observando la figura queda claro que ingresará más luz por la ventana con arco de semielipse; sin embargo, al no disponer del recurso informático, queda la duda si la gráfica es así o si la parábola está más arriba que la semielipse. Cabe mencionar que en la prueba aplicada, un 87% de los alumnos intuyó esta ubicación de las gráficas, pero solo un 58% de ellos dio una argumentación correctamente encaminada para justificarla. Encontramos tres tipos de argumentación:

a) Comparación de ordenadas de puntos con la misma abscisa

Los alumnos que calcularon los valores de y_P y de y_E de los puntos (30; y_P) y (30; y_E) correspondientes a la parábola y a la semielipse, obtuvieron

$$y_P = 19{,}2$$
$$y_E = 24$$

La siguiente figura ilustra la situación.

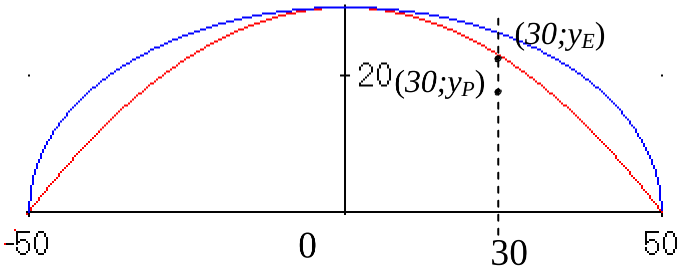


Figura 2

Siendo $y_E > y_P$, concluyeron que los puntos de la semielipse están más arriba que los puntos de la parábola.

b) *Comparación de abscisa y ordenada de puntos de la parábola y de la semielipse que también están en la recta de pendiente* 1 *que pasa por el origen.*

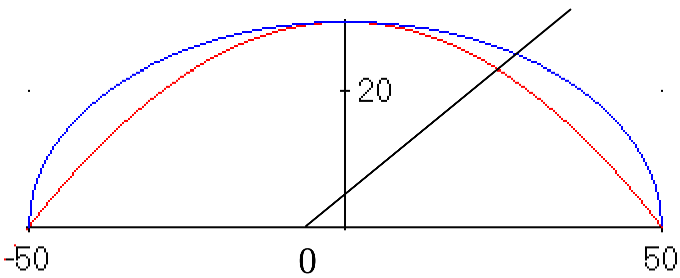


Figura 3

El punto de intersección de la recta con la parábola es (23,42; 23,42) y el punto de intersección de la recta con la semielipse es (25,72; 25,72). Comparando los valores de las respectivas abscisas y ordenadas, concluyeron que el punto de intersección con la semielipse está más alejado del origen que el punto de intersección con la parábola (Figura 3) y en consecuencia que la gráfica de la semielipse está por encima de la gráfica de la parábola.

c) *Verificación de que puntos de la semielipse no se encuentran en la región determinada por la parábola*

Especificaron que los puntos (*x; y*) de la región determinada por la parábola cumplen con la condición

$$y \leq -\frac{3}{250}x^2 + 30$$

Al escoger el punto de la semielipse, con abscisa 40; es decir, el punto (40; 18), verificaron que tal punto no cumple la desigualdad anterior, pues para $x = 40$ el segundo miembro es 10,8, que evidentemente no es mayor o igual que 18. Con esta información, concluyeron que los puntos de la semielipse no pueden estar en la región determinada por la parábola y en consecuencia el arco de parábola debe estar debajo de la semielipse.

En verdad, este tipo de justificación es una variación formal de la justificación del tipo (*a*).

Comentarios y reflexiones

1. Examinar las soluciones que los alumnos dan a este problema nos permite ver cómo interrelacionan sus registros verbales, geométricos y algebraicos. Es tarea nuestra, como docentes, estimular que el tránsito entre estos registros se produzca fluida y adecuadamente. Por otra parte, brinda la oportunidad de reflexionar sobre la enseñaza y el aprendizaje de temas de geometría analítica al examinar en las soluciones de los alumnos las diversas expresiones verbales, gráficas y simbólicas; definiciones y conceptos; procedimientos; proposiciones y argumentos. En el marco teórico del enfoque ontosemiótico del conocimiento y la enseñanza de las matemáticas, diríamos que se prevé gran riqueza de información en el análisis de las configuraciones cognitivas de las soluciones de los alumnos. En este artículo estamos poniendo énfasis en el análisis de las argumentaciones y procedimientos.
2. La experiencia realizada muestra deficiencias en las argumentaciones expuestas en las soluciones dadas al problema. En todos los casos se pasa del análisis de un caso particular a una afirmación general, sin hacer mención a que el caso que analizan es representativo de un caso general por el comportamiento de las curvas en el intervalo considerado. Para las argumentaciones (*a*) y (*c*) habría que aclarar que la situación será similar para puntos de abscisa $x \in]-50; 0[\cup]0; 50[$ y para la justificación (*b*) que la situación será similar si se consideran rectas de ecuación $y = mx$, con $m \in]0; +\infty[$
3. Ningún alumno resolvió simultáneamente las ecuaciones de la parábola y de la semielipse para mostrar que solamente tienen tres puntos comunes: el de tangencia (en el vértice de la parábola) y los extremos del eje mayor de la semielipse. Este procedimiento complementaría bien las argumentaciones del tipo (*a*) y (*b*), pues la existencia de puntos en los que la relación de desigualdad de las ordenadas, o de las abscisas y ordenadas, no fuera la misma que la encontrada en (*a*) y (*b*), obligaría a la existencia de un nuevo punto de intersección de las gráficas, lo cual es imposible.

4. Ningún alumno consideró para su argumentación de que el arco de parábola está por debajo del arco de elipse, que esto se puede ver intuitivamente como una consecuencia del hecho que la semielipse es tangente a las rectas verticales que pasan por cada extremo de su eje mayor, pero la parábola es secante a tales rectas en esos puntos. Esto se percibe al tratar de dibujar adecuadamente estos arcos en el contexto descrito. Ciertamente, al estudiar cónicas se tratan también casos de rectas tangentes a ellas, pero usualmente se quedan en ejercicios con más énfasis en enfoques operativos. En general, el estímulo de la intuición matemática no suele estar entre las prioridades en la mayoría de clases de matemáticas, en los diversos niveles educativos; en particular al tratar las cónicas.

5. Es importante que en cursos de precálculo se enfatice el estudio de regiones en el plano limitadas por arcos de cónicas y segmentos de rectas, por la relevancia que esto tiene en el cálculo integral. Además, es una manera de mostrar aplicaciones y utilidad de los procedimientos de resolución de inecuaciones de segundo grado. Una muestra de que este es un aspecto al que no se le brinda mucha atención es que al resolver el problema propuesto, ningún estudiante intentó mostrar que la gráfica de la parábola está por debajo de la semielipse examinando la inecuación $-\frac{3}{250}x^2+30\leq\frac{3}{5}\sqrt{2500-x^2}$. Haciendo las operaciones correspondientes, se encuentra que esta inecuación se cumple para $-50\leq x\leq 50$.

6. Ningún alumno obtuvo la ecuación de la parábola considerando una traslación de 30 unidades hacia arriba del gráfico de una función cuadrática de la forma $y = ax^2$, con $a < 0$, que, como lo hemos visto, lleva muy fácilmente a la función especifica para el problema, dada en (2). Todos usaron la forma típica para parábolas $(x-h)^2=4p(y-k)$ y muchos calcularon – innecesariamente – el valor de *p*. Esto nos hace pensar en la importancia de vincular las parábolas que tienen eje focal vertical, con las funciones cuadráticas.

7. El análisis de las argumentaciones dadas por los alumnos al resolver este problema, nos hace reflexionar una vez más sobre la importancia de enfatizar el paso de lo particular a lo general o de encontrar lo general en lo particular, considerando aspectos usualmente poco explicitados al estudiar las cónicas: la continuidad de las curvas; su carácter estrictamente creciente o estrictamente decreciente en determinados intervalos; y en general su vinculación con las funciones. Si bien es cierto que estos temas se tratan formalmente en los cursos de cálculo diferencial, es importante mencionarlos y tenerlos en cuenta a nivel intuitivo. Muchas veces los temas de geometría analítica resultan muy tomados por lo operativo, contribuyendo poco a aspectos formativos de un pensamiento matemático más profundo.

8. Para terminar, menciono tres hechos llamativos encontrados en las soluciones dadas por los alumnos:

   a. El uso de fórmulas para el cálculo del área de la región encerrada por la semielipse $(\frac{1}{2}\pi ab)$, donde *a* y *b* son las longitudes de los semiejes de la elipse; y del área de la región encerrada por un arco de parábola y una cuerda perpendicular a su eje de simetría $(\frac{2}{3}cd)$, donde *c* es la longitud de la cuerda y *d* es la distancia del vértice a la cuerda. (El alumno decía "2/3 del área del rectángulo", refiriéndose al rectángulo de lados *c* y *d*, que podríamos decir que circunscribe al arco de parábola). Reconozco que no conocía la segunda fórmula y para verificarla tuve que calcular la integral definida correspondiente. Me llamó la atención que alumnos de primer ciclo universitario conozcan estas fórmulas y considero que este hecho confirma el énfasis que se da a lo operativo y memorístico en muchos centros de estudios preuniversitarios.

b. La confusión de varios alumnos al considerar que la cuerda de longitud 100 cm perpendicular al eje focal de la parábola (o sea el eje mayor de la semielipse) es el lado recto de la parábola. Considero que esto es una llamada de atención al cuidado que debemos tener al definir el lado recto de la parábola y a la importancia que debemos dar a su distinción explícita de otras cuerdas paralelas a él.

c. Un alumno, luego de hallar las ecuaciones de la elipse y de la parábola, respondiendo a la pregunta de cuál de las ventanas – con arco parabólico o con arco elíptico – dejará pasar más luz, afirmó "*con la elipse, pues tiene 2 focos sobre la ventana, con lo cual se concentrará más luz*". Este hecho nos recuerda el cuidado que debemos tener en la enseñanza cuando en los constructos matemáticos usamos palabras del lenguaje cotidiano.

Junio de 2011, Número 26, páginas 159- 164
ISSN: 1815-0640
Coordinado por
Agustín Carrillo de Albornoz

Algunas novedades que ofrece la versión 4 de GeoGebra

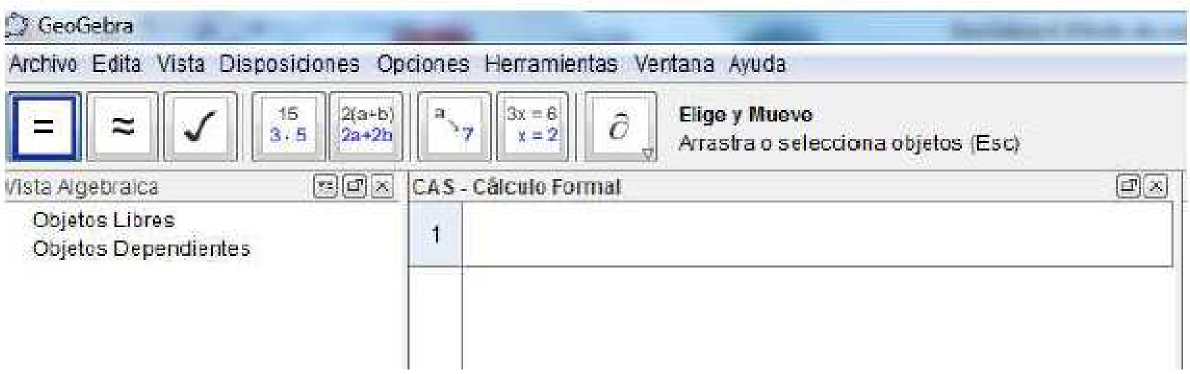
Agustín Carrillo de Albornoz Torres

Aunque la presentación de la versión definitiva de GeoGebra 4 se realizará a finales de agosto, con motivo de la celebración en Austria de la II Conferencia Internacional de GeoGebra (29 al 30 de agosto - Linz), podemos adelantar y sobre todo probar algunas de las novedades que ofrece esta versión a la que se puede acceder a través de la dirección:

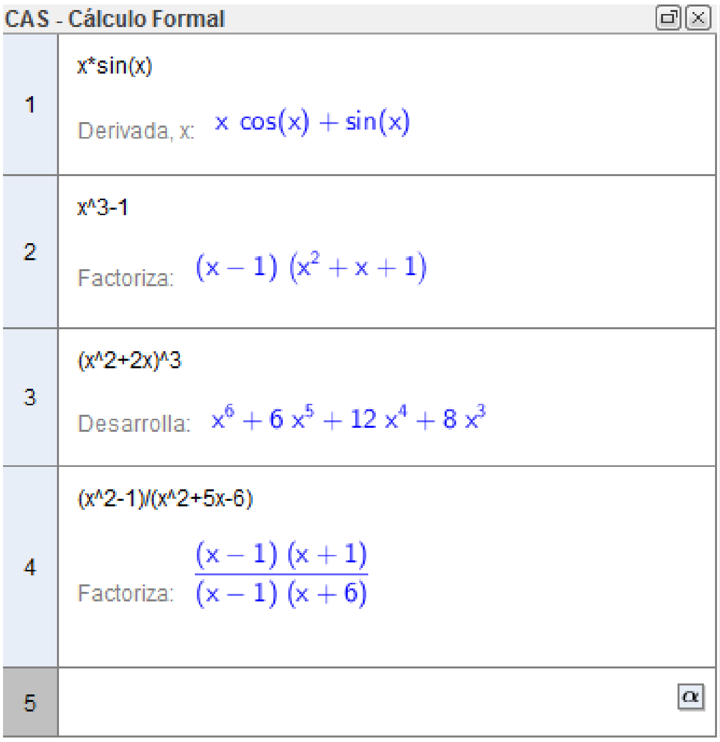
http://www.geogebra.org/webstart/4.0/geogebra-40.jnlp

Una vez instalada la versión webstart dispondremos de una imagen similar a la ya conocida de GeoGebra que incorpora algunas opciones importantes como se podrá comprobar a través del menú **Vista**, en el que podemos observar que aparece cálculo simbólico (CAS) y una nueva ventana para la representación gráfica de funciones.

La selección de CAS – Cálculo Formal abrirá una nueva ventana similar a la que mostramos a continuación.

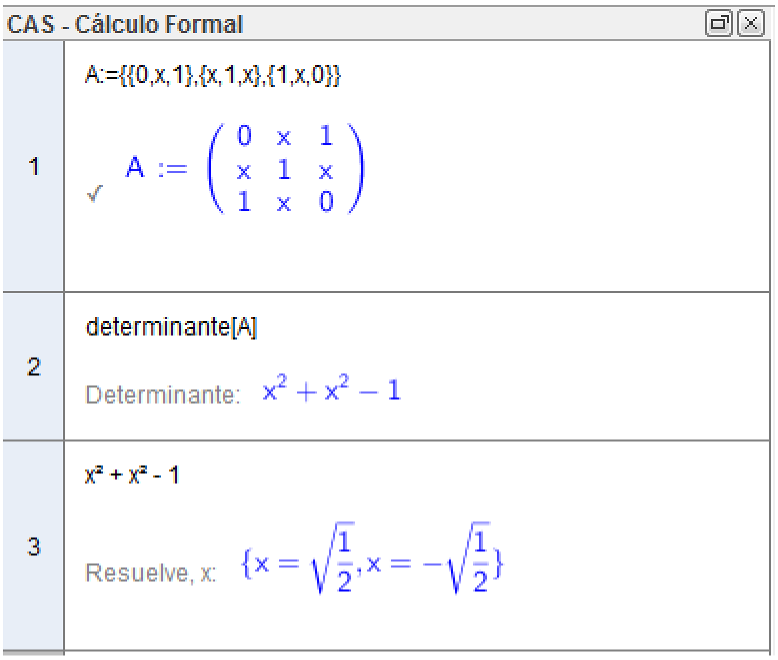


Esta ventana de cálculo ofrece algunos botones con los que será posible evaluar expresiones, descomponer en factores, desarrollar expresiones, resolver ecuaciones así como derivar o integrar.

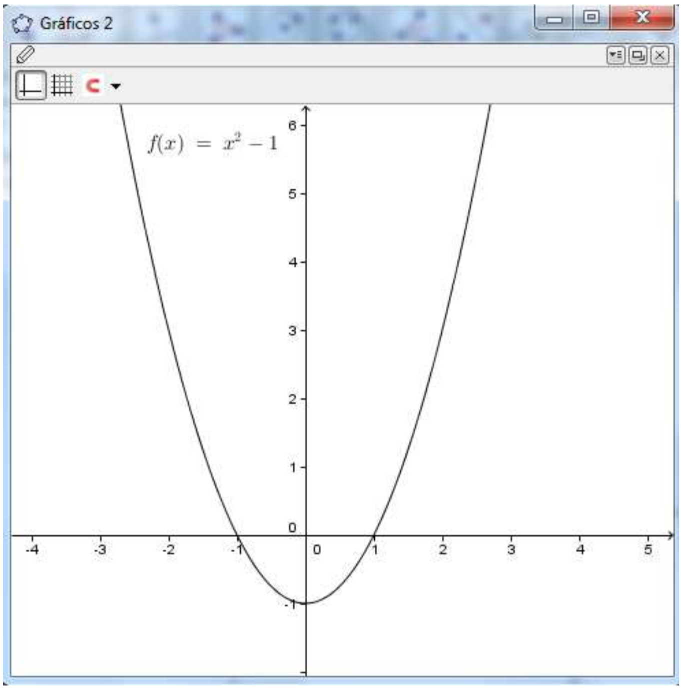


Además, se podrán utilizar las funciones disponibles que hasta ahora siempre se han empleado a través de la línea de comandos.

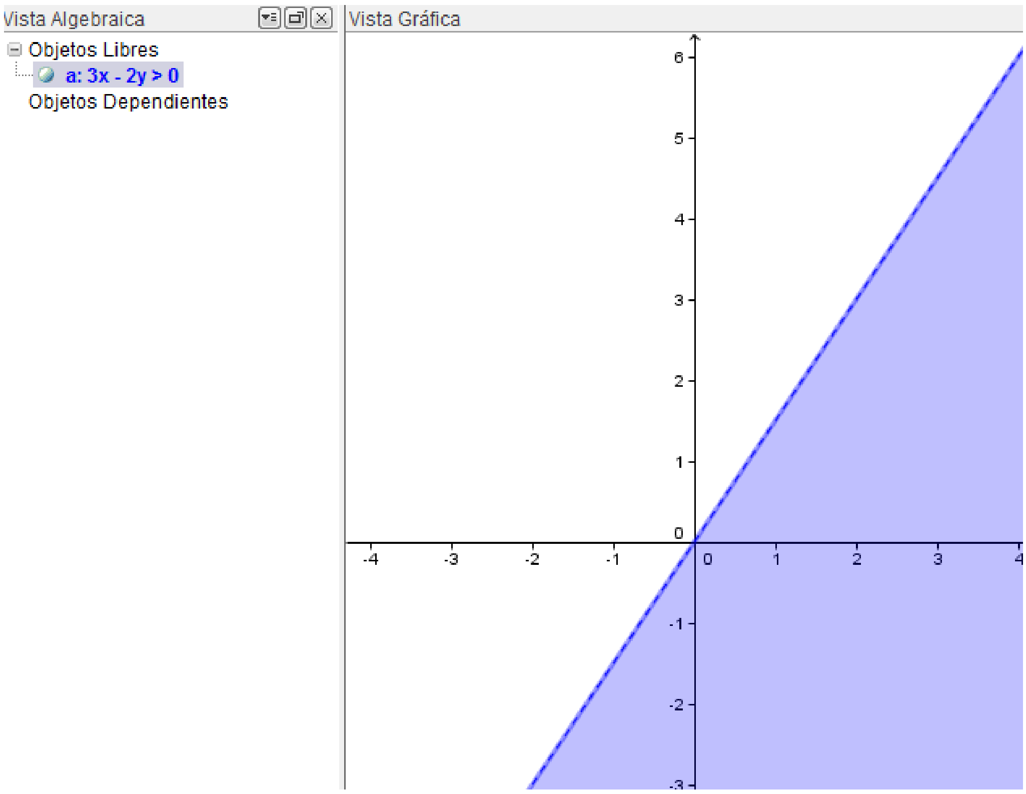
Por ejemplo, a través de esta ventana de cálculo se podrán realizar operaciones con matrices como apareen en la imagen siguiente:



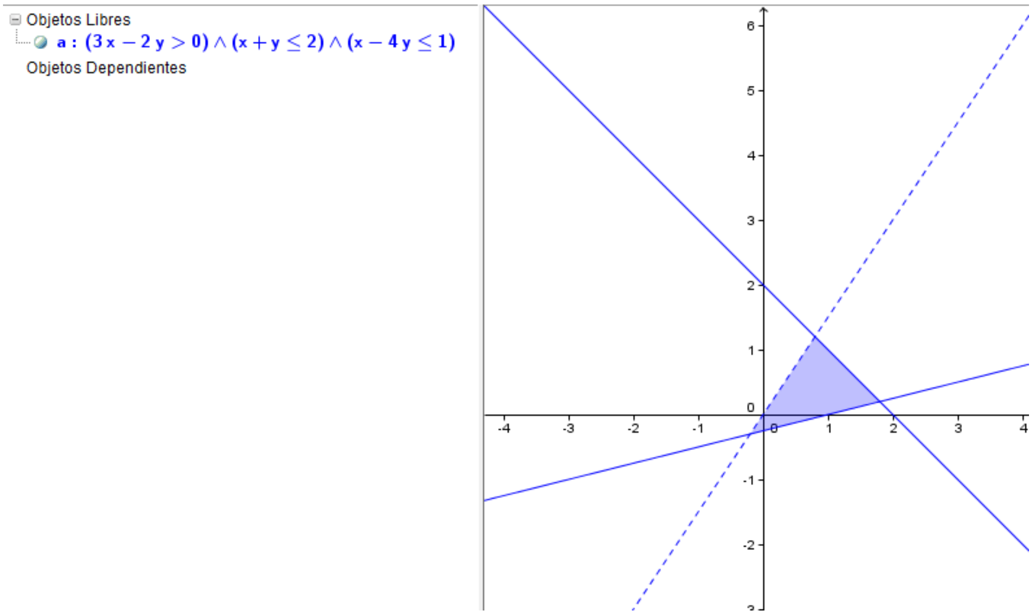
Como he indicado anteriormente, la nueva versión también ofrece una nueva ventana para la representación gráfica de funciones cuyo aspecto es el siguiente:



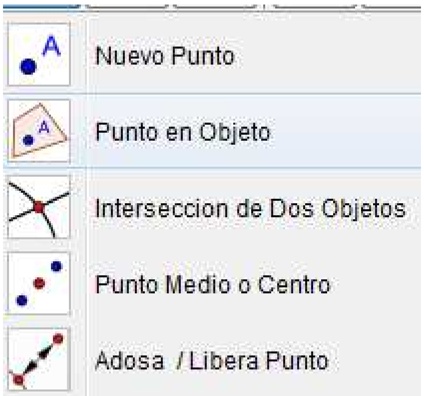
Además de los gráficos ya conocidos, la nueva versión ofrece la posibilidad de representar inecuaciones como muestra la imagen siguiente:

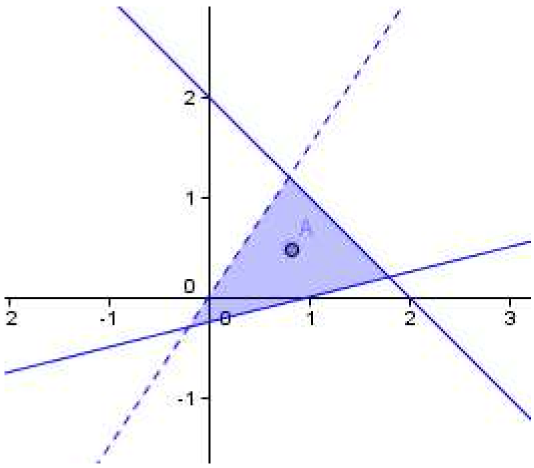


Aprovechando los operadores lógicos será posible determinar y representar el recinto limitado por un conjunto de desigualdades.

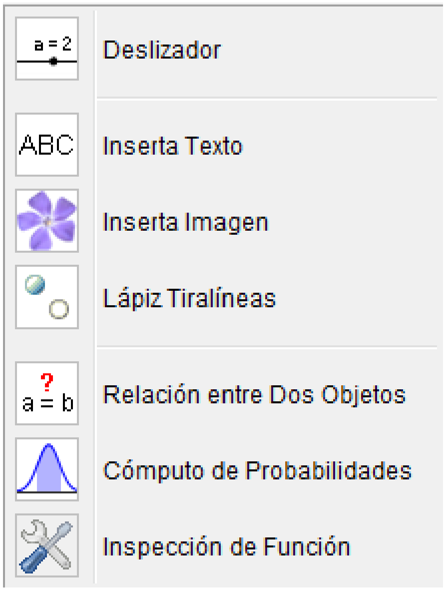


Además, con ayuda de la nueva herramienta Punto en Objeto será posible definir un punto dentro del recinto obtenido, de manera que al moverlo el punto siempre permanecerá dentro de los límites establecidos, en este caso por las desigualdades.

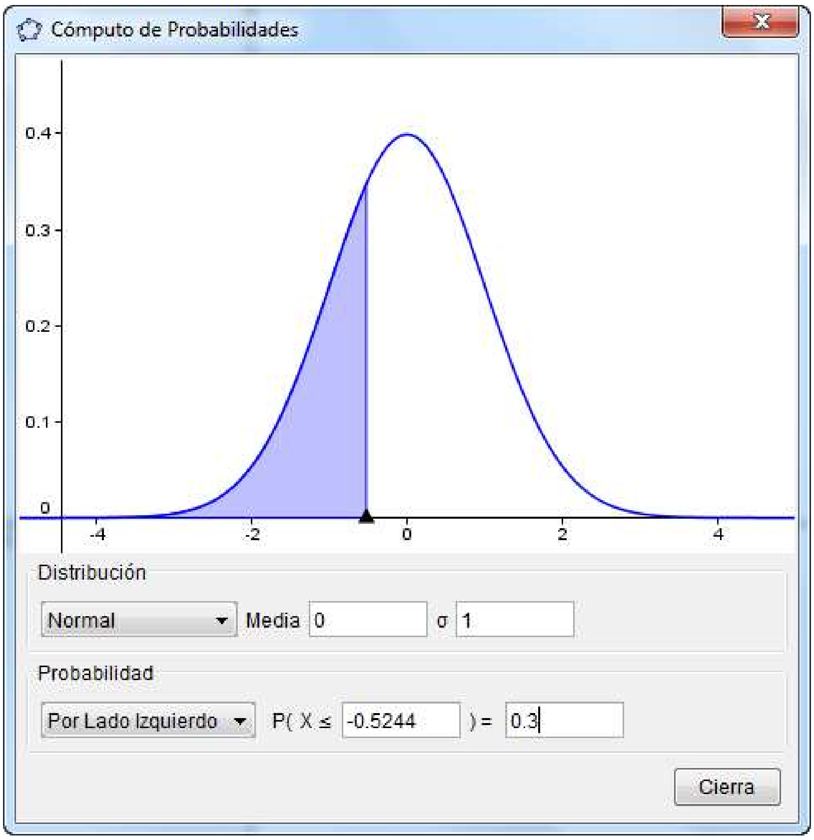




Si entrar en mayores detalles sobre todas las novedades que ofrece esta versión 4 en la que espero que el lector se adentre animado por las ideas aportadas anteriormente, solo quiero comentar una opción más que incluye esta versión; como es la ventana para el cálculo de probabilidades a la que se puede acceder a través de la barra de herramientas.



Al seleccionar Cómputo de Probabilidades aparecerá una nueva ventana en la que será necesario establecer el tipo de distribución y sus parámetros para proceder a calcular la probabilidad deseada.



Es evidente que esta nueva versión ofrece más novedades de las descritas en este breve artículo que solo pretende destacar la continua evolución y desarrollo de GeoGebra para animar a los usuarios a descubrir las nuevas funciones y aplicaciones de la versión 4 que en breve será definitiva, que además estará apoyada por otros hechos destacados como serán la versión en 3D y la versión para utilizar en los teléfonos móviles o celulares.

Solo queda esperar un par de meses aunque mientras nadie nos quita el placer de disfrutar con la versión beta.

UNIÓN
REVISTA IBEROAMERICANA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA

Junio de 2011, Número 26, páginas 165-182
ISSN: 1815-0640

Ideas para Enseñar

Mosaicos modulares

José María Muñoz Escolano; Antonio M. Oller Marcén

Resumen

En este trabajo presentamos un procedimiento algorítmico para construir conjuntos de baldosas y, dado un entero *n*, asignar una baldosa a cada clase módulo *n*. Con esta asignación es posible construir mosaicos que, además de su valor estético, reflejan en su geometría algunas propiedades aritméticas del producto de enteros módulo *n*. La idea ha sido llevada a la práctica exitosamente con alumnos de bachillerato (16-18 años).

Abstract

In this work we present an algorithmic method to construct sets of tiles and, for every integer *n*, assign a tile to each class modulo *n*. With this assignment it is possible to construct tilings which, in addition to their esthetical value, reproduce in their geometrical structure some arithmetical properties of the multiplication modulo *n*. This idea has been successfully put into practice with high-school students (16-18 years old).

Resumo

Neste travalho apresentamos um método algorítmico para a construção de conjuntos de lajotas e, para cada inteiro *n*, atribuir uma lajota a cada classe módulo *n*. Com esta atribução, é possível construir mosaicos que, além de seu valor estético, refletem em sua estrutura geométrica algumas propriedades da multiplicação módulo *n*. A idéia foi posta em prática com sucesso com alunos do ensino médio (16-18 anos).

Dedicado a José María Gairín con motivo de su 60 cumpleaños

1. Introducción

La actividad desarrollada en este artículo se basa parcialmente en una sesión de trabajo con alumnos de 1º y 2º de Bachillerato (16-18 años) dirigida por los autores en el *Taller de Talento Matemático* (ver De la Cueva y Gil, (2007) o http://www.unizar.es/ttm), organizado por el Departamento de Matemáticas de la Universidad de Zaragoza; así como en una sesión de la *Semana de Inmersión en la Investigación* (http://ciencias.unizar.es/web/inmersionInvestigacion.do), actividad organizada por la Facultad de Ciencias de la Universidad de Zaragoza para alumnos de 1º y 2º de Bachillerato (16-18 años) interesados en cursar estudios universitarios de Matemáticas. Según los Reales Decretos 1513/2006, 1631/2006 y 1467/2007, documentos legislativos vigentes por los que se establecen las enseñanzas mínimas de la Educación Primaria (entre 6 y 12 años) y Secundaria (entre 12 y 18 años) en todo el Estado español, los contenidos propios del área de Matemáticas se organizan en distintos Bloques de contenidos. Tres de estos bloques presentes en casi todas las etapas educativas son el bloque de *Geometría*, el bloque de *Aritmética y números* y el bloque de *Álgebra*. No obstante, esta separación no es (o al menos no debería ser) sinónimo de aislamiento entre los distintos contenidos, conocimientos y destrezas que se deben desarrollar en las programaciones didácticas de forma interrelacionada. Por esto consideramos muy importante la existencia de actividades que relacionen contenidos provenientes de distintos bloques.

Por otro lado, la existencia de estas relaciones tampoco debería llevar a la absorción de uno de estos bloques por parte de otro. En este sentido, la enseñanza de la Geometría en la educación secundaria suele adolecer desde sus primeros cursos de un proceso de *aritmetización* que se traduce en una fuerte presencia de contenidos de *Geometría métrica*; mientras que en cursos posteriores con la introducción de la *Geometría analítica*, se produce un proceso de *algebrización*. De esta forma, gran parte de los problemas y actividades vinculadas al saber geométrico que aparecen en los textos escolares en la Educación Secundaria se resuelven realizando operaciones aritméticas para determinar la cantidad de magnitud de un determinado elemento geométrico como la longitud, el área, el volumen o la amplitud; o mediante la manipulación de expresiones algebraicas.

Es interesante, pues, diseñar actividades que vayan en el sentido contrario; esto es, que permitan interpretar desde un punto de vista geométrico distintas cuestiones y problemas de índole aritmética o algebraica. En concreto, la actividad que presentamos, pretende estudiar propiedades de operaciones aritméticas en términos de propiedades de ciertos objetos geométricos. Esto supone la profundización en los contenidos aritméticos y geométricos involucrados, la construcción y el estudio de un modelo geométrico apropiado y la traducción entre ambos contextos. El objeto fundamental de esta actividad es elaborar y estudiar desde un enfoque lúdico y ameno distintos mosaicos modulares; esto es, mosaicos creados empleando las tablas (o partes de ellas) de la suma y de la multiplicación de los residuos módulo n, un entero cualquiera.

La aritmética modular (a veces llamada aritmética del reloj) no está incluida como un contenido en el currículo oficial de la Educación Secundaria española. Sin embargo, este tipo de contenidos al nivel que se plantean no presenta una elevada dificultad conceptual para los alumnos participantes en estas sesiones y poseen un alto factor de motivación, puesto que estos perciben que están trabajando con contenidos “nuevos” y “diferentes” a los planteados en sus respectivos institutos. Además, la introducción de los conjuntos de números finitos y de su aritmética en el aula de educación secundaria es el primer paso que permite el posterior desarrollo de unidades didácticas y actividades de un tópico matemático de amplia repercusión social como es la Criptografía (Caballero y Bruno, 2004, 2007).

Al margen del interés didáctico de introducir estos contenidos de aritmética modular y de plantear actividades que permitan de algún modo *geometrizar* la aritmética, también la actividad permite relacionar dos áreas tan aparentemente alejadas como son las matemáticas y el arte (Kalajdzievski, 2008). Las conexiones entre estas dos áreas suponen una importante herramienta de trabajo en el aula de matemáticas. La relación entre ambas disciplinas se puede plantear desde dos vías distintas: mediante el análisis matemático de distintos elementos presentes en obras artísticas como cuadros, esculturas o producciones musicales; o mediante la creación de “obras artísticas” aprovechando algún motivo geométrico o topológico o siguiendo algún patrón, pauta o regularidad de naturaleza matemática. Esta primera vía, la de relacionar con finalidades didácticas la matemáticas con el arte analizando matemáticamente distintas obras artísticas, se ha sido explorada muy profusamente en multitud de trabajos, publicaciones y actividades de aula disponibles (ver por ejemplo en esta misma revista, los artículos de Pérez (2008), Meavilla (2006) o Mora (2007)). La actividad que aquí proponemos va en la otra dirección; esto es, aprovechar unos objetos matemáticos, en este caso, unos patrones numéricos particulares, para generar una producción artística como distintos mosaicos.

Este tipo de actividades no son ajenas al alumnado; por ejemplo, el coloreado de dibujos siguiendo patrones numéricos se observa en muchos pasatiempos infantiles tradicionales. Son ampliamente conocidas una gran cantidad de maneras en que objetos matemáticos se utilizan para la creación de obras artísticas: quizás unas de las más celebradas sean las composiciones y teselaciones del plano de M.C. Escher. Otro ejemplo algo más sofisticado del interés matemático que posee la creación mosaicos mediante el diseño de teselas y la aplicación de unos determinados patrones numéricos son las teselaciones de Truchet (Smith y Boucher (1987) o Pickover (1989)).

El uso de la aritmética modular como origen de patrones numéricos para la creación de mosaicos con fines educativos ha sido abordado con anterioridad por Forseth y Troutman (1974) y, más recientemente, por Burton (2002), dirigido a alumnado de Educación Secundaria y por Ruiz (2004), para maestros en formación. Nuestra propuesta, enfocada a alumnos de Bachillerato y futuros estudiantes del Grado de Matemáticas guarda muchas similitudes con éstas, pero también algunas especificidades y diferencias que se abordan en secciones posteriores.

1.1. El contexto

El contexto general en que se desarrolla esta actividad es el siguiente:

- En primer lugar, se señala que los alumnos participantes lo hacen de manera voluntaria, por lo que es un alumnado con un alto grado de implicación y participación en cada una de las sesiones lo que posibilitó que la tarea se realizara satisfactoriamente.
- En una sesión anterior se habían presentado a los alumnos algunos aspectos geométricos “clásicos” de los mosaicos y teselaciones del plano con polígonos regulares; sobre los movimientos del plano como las simetrías y la obra de M.C. Escher.
- En otra sesión se introdujeron los contenidos básicos y la notación típica de la aritmética modular, en esa ocasión enfocado al uso de estos cuerpos finitos en criptografía.

En este contexto surge la idea de conectar ambas sesiones mediante una actividad que relacione números y mosaicos.

1.2. Objetivos de la actividad

- Profundizar de una manera lúdica en el estudio de diferentes aspectos básicos de la aritmética modular, como son: Operaciones: multiplicación, suma, opuesto de…, propiedades de las operaciones (conmutatividad de la suma y del producto) y unidades y divisores de cero.

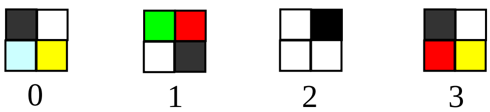
- Profundizar de una manera lúdica en el estudio de diferentes aspectos básicos de la geometría, como son: mosaicos y teselaciones, simetrías, figuras simétricas.
- Relacionar aspectos propios de la aritmética con otros propios de geometría.
- Elaborar mosaicos como aplicación de la aritmética modular.
- Analizar las simetrías presentes en los mosaicos modulares y relacionarlas con ciertas propiedades del producto de residuos.
- Aplicar conocimientos de combinatoria para la realización de recuentos.
- Realizar operaciones no conmutativas de entes no numéricos.
- Plantear un sistema de notación adecuado para comunicar resultados de manera eficiente y valorar su importancia.
- Apreciar que existen relaciones entre materias de naturaleza aparentemente distinta como son las matemáticas y el arte.
- Trabajar en equipo. Aportar ideas y criticar constructivamente las de los demás.

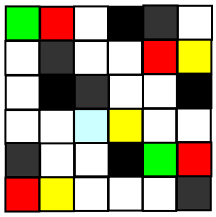
2. Planteamiento del problema

En los primeros minutos de la sesión se revisan rápidamente los contenidos de aritmética modular necesarios para realizar la actividad. Se recuerda el concepto de residuo módulo *n*, la suma y la multiplicación módulo *n*.

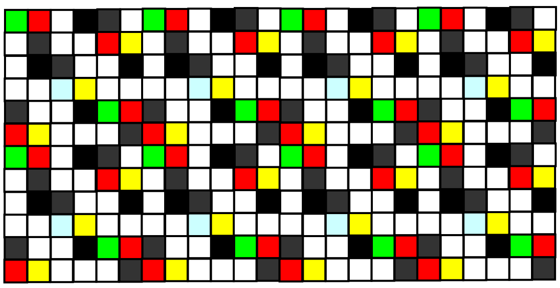
Posteriormente se presenta la noción de mosaico modular: Un *mosaico modular* es el mosaico formado cuando en una tabla o parte de una tabla de sumar o de multiplicar (suprimiendo en este caso la primera fila y la primera columna de ceros) se sustituyen cada uno de los números presentes por una baldosa diferente. Por ejemplo, en el caso de las congruencias módulo 4 y con unas baldosas como éstas:

×	0	1	2	3
0	~~0~~	~~0~~	~~0~~	~~0~~
1	~~0~~	1	2	3
2	~~0~~	2	0	2
3	~~0~~	3	2	1





Al repetir el mosaico modular elemental varias veces, obtenemos mosaicos modulares mucho más “atractivos” (ver figura siguiente):



Evidentemente, al margen de la distribución de los números en la tabla de multiplicar, el mosaico tendrá un mayor o menor valor estético y poseerá más o menos simetrías dependiendo del tipo de baldosas que se utilicen y de la forma en que las asignemos a los números.

El problema que se plantea es el siguiente:

> *¿Se puede encontrar una forma de diseñar y asignar baldosas que sea general para todas las tablas de multiplicar y que los mosaicos que aparezcan sean lo suficientemente "artísticos"?*

2.1. Criterios para las baldosas elementales

Es necesario fijar unos criterios tanto para diseñar baldosas adecuadas para la construcción de mosaicos modulares como para la asignación de las mismas a los distintos residuos. La elección de estos criterios puede ser consensuada en clase, aunque en este caso fueron indicados directamente por el profesor en el aula.

Se plantean 10 reglas que se deben seguir a la hora de diseñar y asignar las baldosas: las 5 primeras hacen referencia al proceso de diseño mientras que las 5 restantes se centran en las tareas de asignación de cada baldosa con su correspondiente residuo:

Reglas para diseñar

1. Las baldosas son cuadradas divididas a su vez en celdas cuadradas más pequeñas de dimensiones 2x2, 4x4, 8x8…
2. Las baldosas se colorearán pintando las celdas de blanco o de negro.
3. Las baldosas serán simétricas respecto las dos diagonales del cuadrado.
4. Siempre existirá una baldosa negra y una baldosa blanca.
5. Para el resto de baldosas, siempre ocurre que la mitad de las casillas de cada baldosa serán blancas y la otra mitad, negras.

Reglas para asignar

6. Cada número tendrá asignada una baldosa distinta a la de los demás.
7. Al número cero se le asignará siempre una baldosa completamente negra.
8. Si un mismo número es a la vez su opuesto (por ejemplo, 2 módulo 4 ó 4 módulo 8) se le asigna la baldosa blanca.
9. Las baldosas asignadas a dos números opuestos; esto es, aquellos en los que su suma sea cero (por ejemplo, 3 y 1 módulo 4), serán *baldosas complementarias*. Por baldosas complementarias entendemos que las casillas blancas de una son las casillas negras de la otra y viceversa.
10. Las baldosas asignadas a los divisores de cero serán además simétricas horizontal y verticalmente.

Las razones que motivan la elección de estos criterios, muchos de ellos ya presentes en el trabajo de Forseth y Troutman (1974), son variadas:

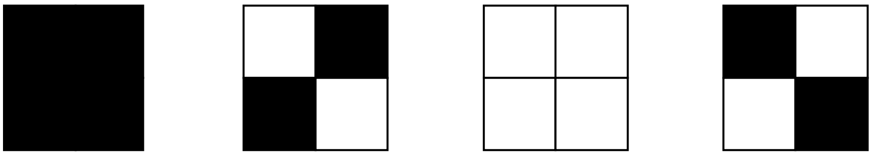
- Las condiciones 1 y 2 vienen motivadas para facilitar la implementación de la actividad en clase;
- Las condiciones 3, 4 y 5 están justificadas para que los mosaicos modulares resultantes sean lo suficientemente interesantes y se conserven las simetrías presentes en las tablas de multiplicar.

- Las condiciones 7, 8 y 9 de “complementación” indican de una manera gráfica que la suma de los dos números opuestos es cero mediante la superposición de las baldosas;
- La condición 10 obedece al hecho de enriquecer el trabajo introduciendo el concepto de divisor de cero; esto es, aquel número cuyo producto por otro número no nulo sea cero. Destacamos que la existencia de divisores de cero en conjuntos numéricos es novedosa para la mayoría de los alumnos y en este caso tendrán un especial protagonismo puesto que se identificarán visualmente al contemplar las baldosas.

3. Búsqueda de casos particulares

En primer lugar se plantea encontrar las baldosas de tamaño 2×2 que cumplan los criterios indicados anteriormente.

Para ello, un primer paso es la búsqueda de todas las baldosas posibles de tamaño 2×2 y acordar entre todo el grupo una manera sistemática para ir obteniendo cada una de ellas. Resulta relativamente sencillo hallar las 16 baldosas 2×2, de las cuales sólo 4 de ellas satisfacen lo requerido:

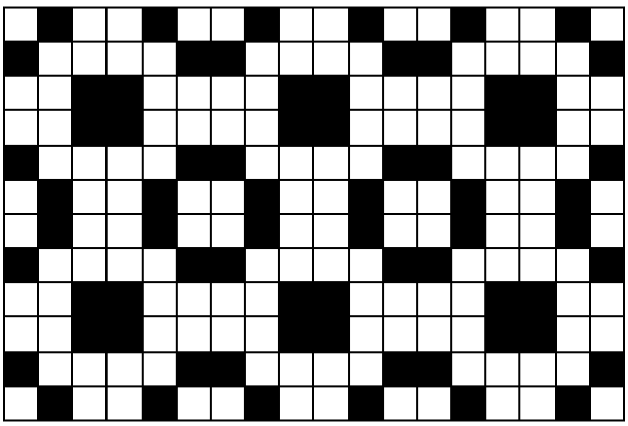


3.1. Mosaicos modulares módulo 4

Con estas cuatro baldosas básicas podemos realizar una asignación con cada uno de los residuos módulo 4 de manera obvia, tal y como están ordenadas en el gráfico anterior:

- 0, baldosa negra
- 2, baldosa blanca
- 1 y 3, con las otras dos baldosas.

De esta manera, el mosaico modular (módulo 4) quedaría como en la figura adjunta:

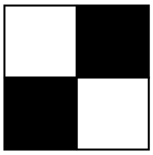


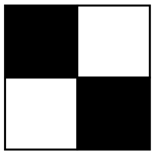
Notemos que la asignación de baldosas con el 1 y el 3 no es única, puesto que podríamos haberlas asignado de manera contraria, de forma que el mosaico modular resultante sería distinto.

3.2. Mosaicos modulares módulo 3

También podemos aprovechar las baldosas elementales construidas para realizar el mosaico modular módulo 3, con la siguiente asignación de baldosas:

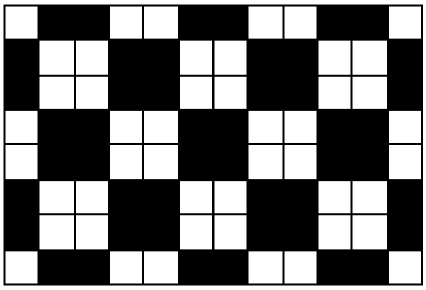

0 (mód 3)


1 (mód 3)


2 (mód 3)

Cuyo mosaico modular módulo 3 es el siguiente:

×	0	1	2
0	0	0	0
1	0	1	2
2	0	2	1



4. Generalizando

Después de haber trabajado los dos casos particulares anteriores parece natural tratar de extender la idea a módulos mayores que 4. La primera dificultad que se observa es obvia, no tenemos suficientes baldosas de tamaño 2x2 que cumplan las condiciones con las que trabajar por lo que debemos aumentar el tamaño de las mismas para que aparezca una mayor variedad de diseños. Por lo tanto, hemos de construir baldosas de tamaño 4x4 (y posteriormente 8x8, etc…) que satisfagan las condiciones de la Sección 2.1. Esta necesidad conlleva tres problemas principalmente:

1. El primer problema surge respecto a cómo se construyen estas baldosas. En este caso no podemos pintarlas todas y posteriormente seleccionar las que cumplen las condiciones exigidas puesto que un rápido cálculo nos muestra que existen 216 baldosas diferentes de tamaño 4x4, lo que hace inviable esta tarea. Este primer problema se solucionará definiendo una manera de "multiplicar" baldosas, esto nos permitirá obtener nuevos conjuntos de baldosas a partir de los ya construidos.
2. El segundo problema es el de la ordenación y la notación. Al tener un mayor número de baldosas a nuestra disposición parece conveniente fijar un sistema de representación adecuado que nos permita referirnos a una baldosa concreta sin necesidad de dibujarla y, a ser posible, que permitan dotar al conjunto considerado de un orden.
3. Finalmente, el tercer problema al que nos enfrentamos es el de la asignación de una baldosa a cada residuo módulo *n*. En los ejemplos anteriores ha habido siempre un ligero grado de arbitrariedad, pero al aumentar el número de baldosas los grados de libertad a la hora de efectuar la asignación aumentan

mucho. Sería pues deseable fijar un método para asignar a cada baldosa un residuo de forma mecánica.

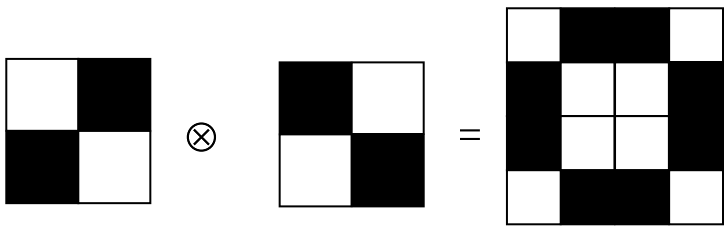
Las siguientes secciones mostrarán una posible manera de afrontar y, en gran medida, superar estas dificultades.

4.1. Operando con baldosas

Aunque en un principio sólo aplicaremos esta operación a las baldosas de tamaño 2×2 que tenemos ya construidas, es útil para el desarrollo posterior presentarla en la forma más general posible. Denotamos esta operación mediante el signo ⊗ y se define de la manera siguiente:

Supongamos que se tienen dos baldosas *A* y *B* de tamaños cualesquiera (por ejemplo $n \times n$ y $m \times m$ respectivamente), entonces se obtiene una nueva baldosa $A \otimes B$ de tamaño $mn \times mn$ mediante el siguiente procedimiento:
- Cada celda negra de *A* se sustituye por una copia de *B*, y
- Cada celda blanca de *A* se sustituye por una copia de la complementaria de *B*.

Por ejemplo, se tiene que:

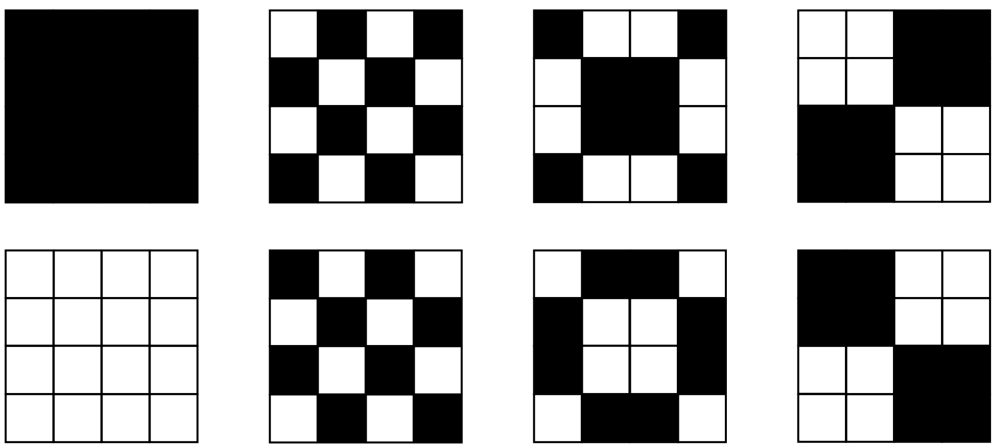


4.2. Las baldosas de tamaño 4×4. Necesidad de ordenación y notación

Empleando la operación que acabamos de presentar buscamos las distintas baldosas de tamaño 4×4 que se obtienen al multiplicar de todas las formas posibles dos de las baldosas de tamaño 2×2 que hemos construido antes.
Algunas observaciones interesantes sobre este proceso y las baldosas que aparecen:

1. Aparecen 8 baldosas distintas, cada una de ellas repetida 2 veces.
2. Las baldosas que se obtienen cumplen los requisitos que hemos fijado en el planteamiento.
3. Se observa que el producto no es conmutativo.

Las baldosas obtenidas en el proceso son las siguientes:

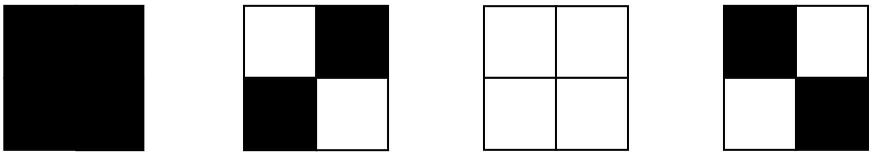


Puesto que son 8 las baldosas obtenidas (y que exactamente 4 de ellas deben corresponder a divisores de 0) surge de manera natural la idea de utilizarlas para trabajar módulo 8, pero para hacer esto es necesario asignar a cada una de las baldosas la clase de un entero módulo 8. Sabemos que a la baldosa negra le corresponde la clase del 0 y a la blanca la clase del 4. A la hora de asignar las otras seis baldosas y pese a los criterios que hemos fijado antes, existe una cierta arbitrariedad a la hora de llevar a cabo dicha asignación. Para solucionar esta dificultad hemos de fijar un procedimiento para la construcción de las baldosas que nos las proporcione ya ordenadas de forma adecuada. Además, junto con esto surge también la necesidad de encontrar una notación adecuada para referirnos a ellas.

4.3. Fijando la notación

Denotaremos cada baldosa mediante un par ordenado. La primera componente indicará el tamaño de la baldosa, en concreto el número de casillas que tiene en cada lado. La segunda componente corresponderá con el orden en que dicha baldosa aparece en el proceso de construcción (comenzando en el 0).

Con estas indicaciones las baldosas básicas (las de tamaño 2×2) se denotan del siguiente modo:



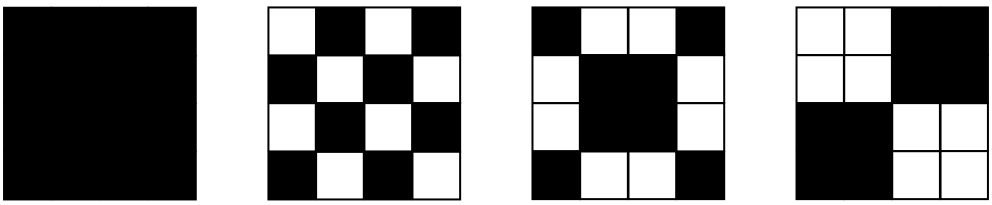
(2,0) (2,1) (2,2) (2,3)

4.4. El algoritmo de construcción y ordenación de las baldosas

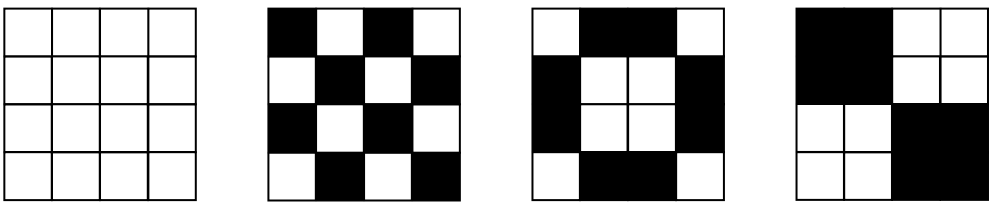
Comenzaremos describiendo explícitamente el primer paso del algoritmo. En este paso se construyen las 8 baldosas de tamaño 4×4. Se tiene que:

(4,0)=(2,0)⊗(2,0)	(4,4)=complementaria de (4,0)
(4,1)=(2,0)⊗(2,1)	(4,5)=complementaria de (4,3)
(4,2)=(2,1)⊗(2,1)	(4,6)=complementaria de (4,2)
(4,3)=(2,1)⊗(2,0)	(4,7)=complementaria de (4,1)

En concreto, y recordando cuáles eran las baldosas de tamaño 4×4, la asignación es esta:



(4,0) (4,1) (4,2) (4,3)

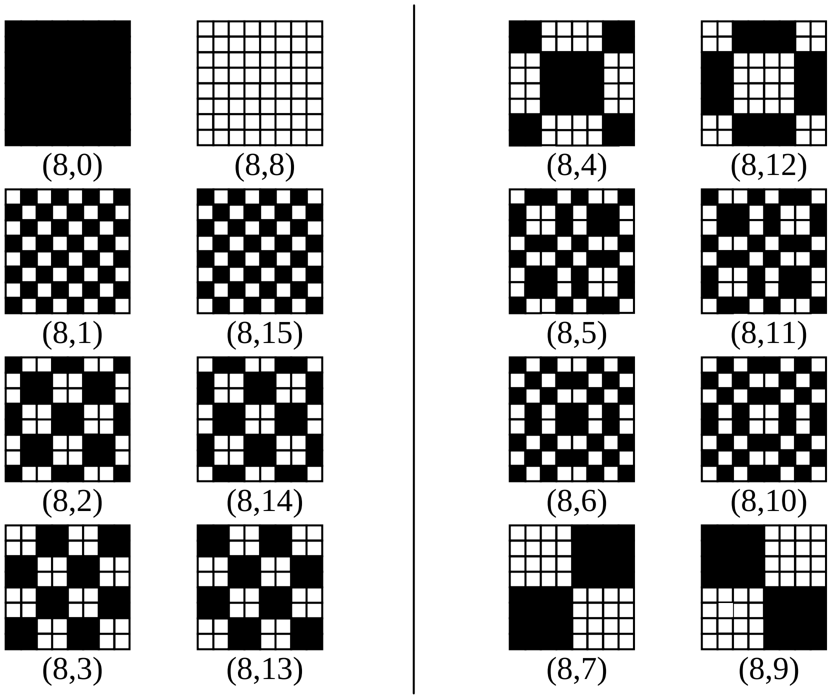


(4,4) (4,7) (4,6) (4,5)

En general, supongamos que hemos construido y ordenado las baldosas de tamaño $k \times k$. Entonces para construir las de tamaño $2k \times 2k$ se procede del siguiente modo:

1. Tomamos la primera mitad de las baldosas de tamaño $k \times k$ en orden creciente y las multiplicamos por la izquierda con la baldosa (2,0). Esto nos proporciona la primera cuarta parte de las baldosas de tamaño $2k \times 2k$.
2. A continuación tomamos de nuevo la primera mitad de las baldosas de tamaño $k \times k$, esta vez en orden decreciente, y las multiplicamos por la izquierda con la baldosa (2,1). De esta manera habremos obtenido la segunda cuarta parte de las baldosas de tamaño $2k \times 2k$.
3. Finalmente se construyen las baldosas complementarias de las que acabamos de obtener. Para ordenarlas se tiene en cuenta que a la baldosa blanca debe corresponderle la clase de $2k$ módulo $4k$ y que a baldosas complementarias les corresponden clases opuestas módulo $4k$.

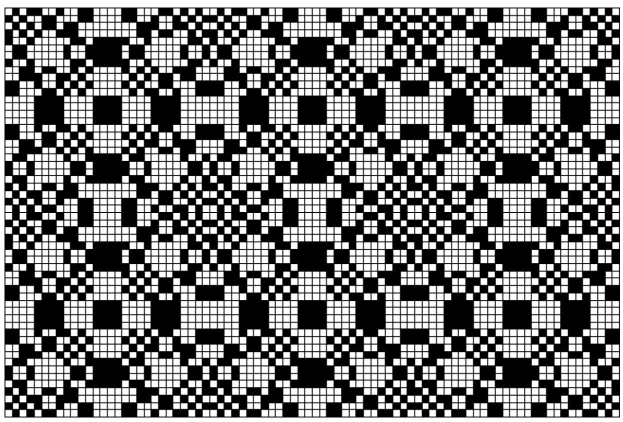
Siguiendo el procedimiento anterior, las baldosas de tamaño 8×8 son las siguientes:



4.5. Mosaicos modulares módulo 8.

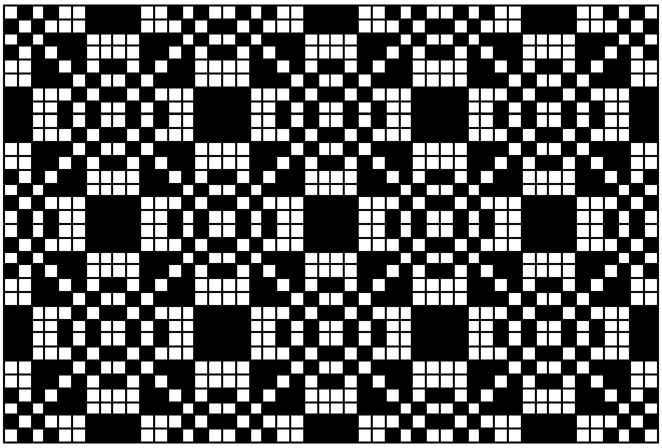
Una vez que hemos construido las baldosas de tamaño 4×4 podemos emplearlas para construir el mosaico modular módulo 8. Queda así:

×	0	1	2	3	4	5	6	7
0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	0	1	2	3	4	5	6	7
2	0	2	4	6	0	2	4	6
3	0	3	6	1	4	7	2	5
4	0	4	0	4	0	4	0	4
5	0	5	2	7	4	1	6	3
6	0	6	4	2	0	6	4	2
7	0	7	6	5	4	3	2	1



También podemos plantearnos estudiar el mosaico resultante al considerar únicamente el conjunto de las unidades módulo 8:

×	1	3	5	7
1	1	3	5	7
3	3	1	7	5
5	5	7	1	3
7	7	5	3	1



4.6. Trabajando con módulos cualesquiera

Una vez que tenemos un procedimiento para construir conjuntos de baldosas arbitrariamente grandes estamos en disposición de poder construir los mosaicos modulares correspondientes a módulos que no sean una potencia de 2. Como queremos utilizar baldosas provenientes de nuestro proceso de fabricación, tendremos que determinar en función del módulo n el tamaño que tendrán las baldosas a utilizar. Fijado n, denotaremos mediante $\varphi(n)$ el número de unidades módulo n (esta conocida función recibe el nombre de *phi de Euler*), en consecuencia, el número de divisores de cero será $n-\varphi(n)$.

Una primera condición, fruto del hecho de que en cada paso del algoritmo obtenemos $2k$ baldosas, es que deberá cumplirse la desigualdad $n\leq 2k$. Ahora bien, de esas $2k$ baldosas, k corresponden por su forma a divisores de cero; por lo que deberá verificarse que $n-\varphi(n)\leq k$. Como además las k restantes deben corresponder a unidades, también se tendrá que cumplir la condición $\varphi(n)\leq k$.

Si juntamos todo lo anterior concluimos que el k buscado será la menor potencia de 2 que cumpla:

$$\boxed{n-k\leq\varphi(n)\leq k}$$

y entonces las baldosas necesarias para construir el mosaico modular módulo n serán las de tamaño $k\times k$.

La siguiente cuestión a solventar es la de cómo asignar ahora las clases módulo n con las baldosas. Para ello seguimos el siguiente proceso:

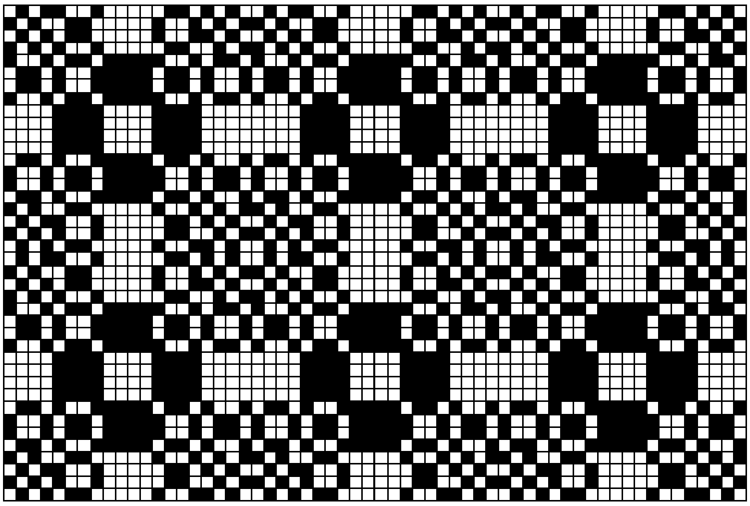
1. A la clase del 0 le corresponderá la baldosa negra y, si n es par, a la clase de $n/2$ le corresponderá la baldosa blanca.
2. Tomamos las unidades menores que $n/2$ y les asignamos las baldosas “admisibles” en orden de aparición.
3. Tomamos los divisores de cero menores que $n/2$ y les asignamos las baldosas que puedan corresponder a divisores de cero también en orden de aparición.
4. A las clases mayores que $n/2$ se les asigna la baldosa complementaria de la correspondiente a la clase opuesta.

Veamos un ejemplo. Queremos construir el mosaico modular módulo 6, si determinamos k con la fórmula anterior se obtiene que k=4 y, por lo tanto, hemos de trabajar con las baldosas de tamaño 4×4. Además, siguiendo las instrucciones anteriores la asignación de baldosas es la siguiente:

(4,0) ↔ 0 (mód 6)	(4,4) ↔ 3 (mód 6)
(4,1) ↔ 1 (mód 6)	(4,6) ↔ 4 (mód 6)
(4,2) ↔ 2 (mód 6)	(4,7) ↔ 5 (mód 6)

Una vez realizada la asignación entre baldosas y clases módulo 6 estamos ya en disposición de elaborar el mosaico modular correspondiente a la tabla de multiplicar módulo 6:

×	0	1	2	3	4	5
0	0	0	0	0	0	0
1	0	1	2	3	4	5
2	0	2	4	0	2	4
3	0	3	0	3	0	3
4	0	4	2	0	4	2
5	0	5	4	3	2	1



5. Estudiando las simetrías de los mosaicos

Una vez obtenido el mosaico modular correspondiente a la tabla de multiplicar modulo un entero *n*, puede ser interesante estudiar su geometría algo más detenidamente. En particular nos vamos a concentrar en la búsqueda de ejes de simetría y de centros de giro. Además trataremos de descubrir el origen de dichas simetrías; algunas tendrán su origen en las simetrías existentes en la tabla de multiplicar módulo *n* y otras en la elección que hemos hecho de las baldosas.

5.1. Simetrías provenientes de la tabla de multiplicar

A simple vista es fácil observar que la tabla de multiplicar módulo *n* es siempre simétrica respecto de sus dos diagonales. La simetría con respecto a la diagonal principal es debida a la conmutatividad del producto, mientras que la simetría respecto a la otra diagonal se debe al hecho de que el producto de dos enteros coincide con el de sus opuestos.

Como todas nuestras baldosas son, por construcción, simétricas respecto a ambas diagonales; estas simetrías se conservarán en nuestro mosaico. De este modo nuestros mosaicos tendrán siempre dos redes perpendiculares de ejes de simetría, correspondientes a las diagonales del mosaico modular fundamental.

Además, como siempre que se cortan dos ejes de simetría se obtiene un centro de giro de 180º, nuestros mosaicos poseerán también dichos centros de giro en todos los puntos en los que se corten los ejes de simetría antes mencionados.

5.2. Simetrías provenientes de la elección de las baldosas

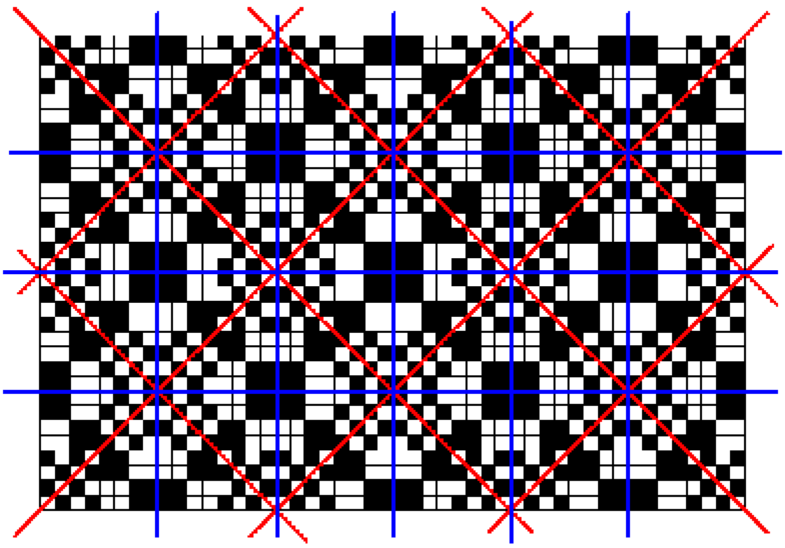
Recordemos que a clases opuestas les corresponden baldosas complementarias. Es fácil observar además que en el caso de nuestras baldosas (si no corresponden a divisores de cero) el hecho de ser complementarias implica el ser simétricas horizontal y verticalmente la una de la otra. Esto hace que, si en nuestra tabla de multiplicar no aparecen divisores de cero (o si sólo hay un divisor de cero no nulo, lo que sólo sucede módulo 4), tengamos también simetría horizontal y vertical en el mosaico modular fundamental. Esta simetría hace que, en nuestro mosaico, aparezcan otras dos redes perpendiculares de ejes de simetría; en este caso horizontales y verticales. Nuevamente en los puntos de intersección de estos ejes surgen centros de giro de 180º; sin embargo existen puntos en los que confluyen 4 ejes de simetría: las dos diagonales, el vertical y el horizontal. En esos puntos el centro de giro será de 90º.

Si en la tabla de multiplicar aparecen divisores de 0, como los opuestos no son simétricos entre sí (basta ver las baldosas correspondientes) perdemos los ejes horizontales y verticales. Sin embargo los centros de giro de 180º que aparecerían si existieran dichos ejes sí que aparecen.

5.3. Grupos de simetría de los mosaicos

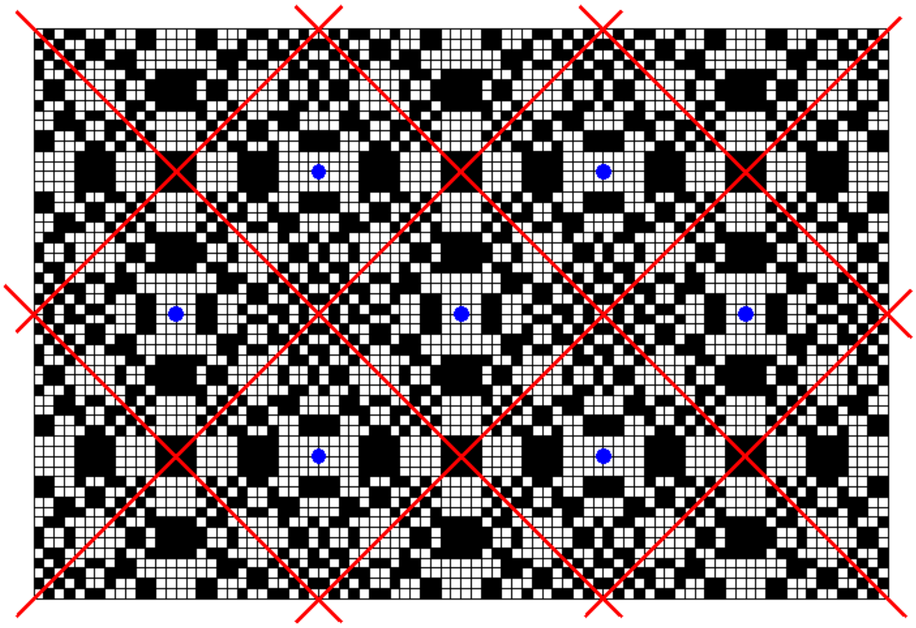
Recapitulando la información presentada en los párrafos anteriores, y siguiendo la nomenclatura estándar para denotar los distintos grupos cristalográficos planos, podemos indicar cuáles son los obtenidos en los mosaicos que hemos construido en esta actividad. En concreto son dos (de los 17 posibles):

- p4m: Obtenemos este grupo en los mosaicos construidos cuando no hay divisores de cero (por ejemplo, si n es primo o si sólo se consideran las unidades módulo n) o bien cuando n=4.
  En la siguiente figura, por ejemplo, se muestran los ejes de simetría del mosaico modular módulo 5. En este caso no existen divisores de cero no nulos. En rojo aparecen los ejes de simetría provenientes de la tabla de multiplicar y en azul los provenientes de la elección de las baldosas. Los centros de giro son los puntos de intersección de dos (giro de 180º) o cuatro (giro de 90º) de dichos ejes.



- cmm: Obtenemos este grupo siempre que existan al menos dos divisores de cero no nulos.
  Por ejemplo, en el caso del mosaico modular módulo 8 que aparece en la figura siguiente, en el que sí que aparecen divisores de cero, siguen observándose los

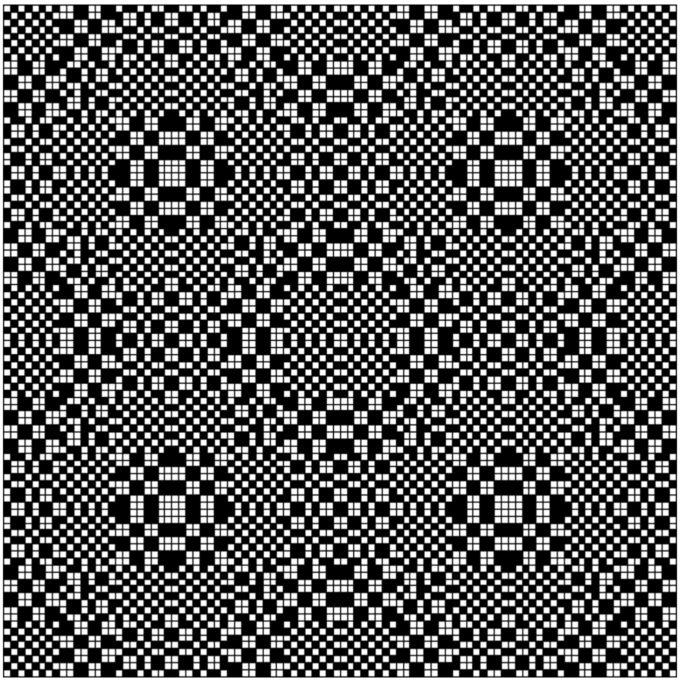
ejes de simetría (en color rojo) provenientes de la tabla de multiplicar junto con los centros de giro de 180º que aparecen en los puntos de intersección de dichos ejes. Además, y aunque los ejes horizontales y verticales han desaparecido, se mantienen centros de giro de 180º marcados en color azul.



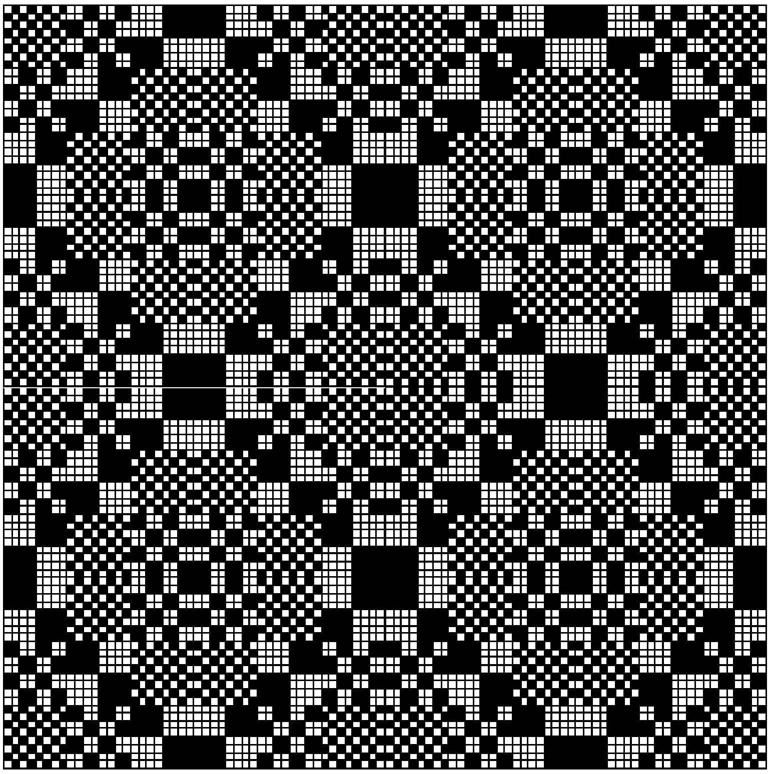
6. Ejemplos

En secciones anteriores hemos mostrado los mosaicos modulares asociados a las tablas de multiplicar módulo 3, módulo 4, módulo 5, módulo 6 y módulo 8; así como el correspondiente a la tabla de multiplicar de las unidades módulo 8. En esta sección vamos a presentar algunos ejemplos más.

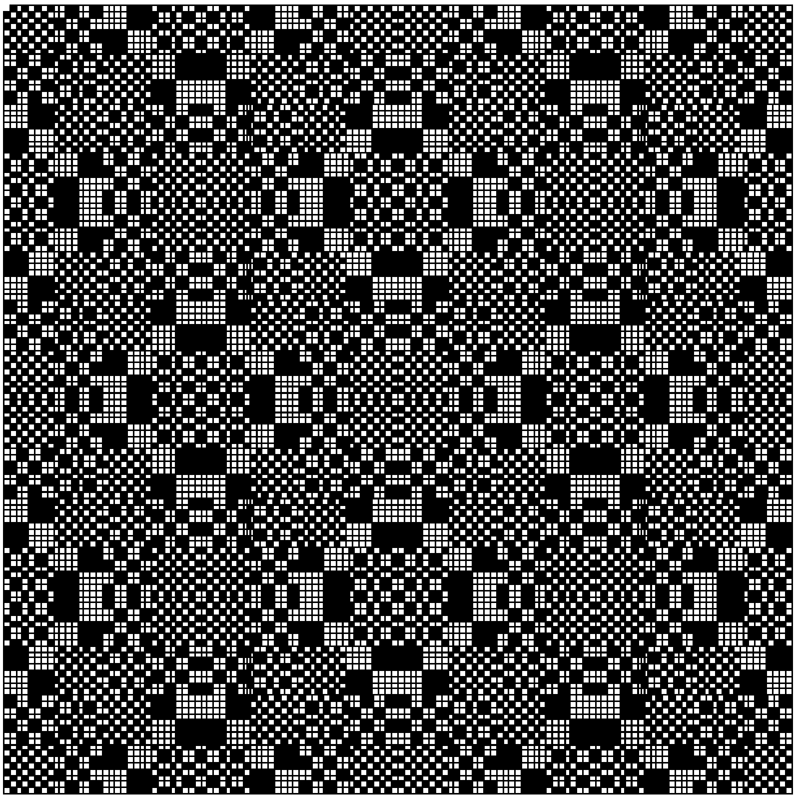
6.1. Módulo 7



6.2. Unidades módulo 9



6.3. Unidades módulo 16



7. Metodología y recursos

En este apartado se comentan brevemente aspectos acerca de la metodología seguida durante la implementación de la actividad así como los recursos y materiales empleados en la misma.

El propósito de la actividad es obtener la máxima participación posible y que todos los alumnos puedan intervenir y actuar independientemente del nivel de conocimientos que posean. En este sentido, se distinguen diversos niveles de dificultad en las tareas planteadas que permiten diversos tipos de implicación en las mismas:

- Existen tareas elementales de índole procedimental, como la búsqueda de las baldosas 2x2 y la construcción en papel de baldosas y mosaicos.
- Tareas de grado medio, como la elaboración de las tablas de multiplicar, la obtención de nuevas baldosas mediante el producto de dos de ellas o el estudio de las simetrías que aparecen en los mosaicos.
- Tareas de un nivel más elevado, como la discusión acerca de las razones de la existencia de esas simetrías, de la no conmutatividad del producto de baldosas, de los divisores de cero o la búsqueda de una notación adecuada para una generalización formal.

El aula se organizó en grupos de 3 y 4 alumnos. Las tareas se trabajaron en cada grupo y los profesores dirigieron la actividad mediante paulatinas puestas en común con el resto de la clase. Reseñar que los criterios de baldosas y la operación producto de las mismas son presentados por el profesor, mientras que la notación aplicada surge de forma natural al comunicar los resultados en las puestas en común. Los medios empleados para llevar a cabo esta actividad son, en primer lugar, hojas cuadriculadas para la elaboración por parte de los alumnos de las baldosas y mosaicos más sencillos, mientras que posteriormente se entrega a cada grupo una bolsa con diversas baldosas ya construidas en cartulina para facilitar el trabajo de realizar el producto de baldosas de mayor tamaño y la elaboración de mosaicos más complejos mediante pegado de las mismas sobre cartulinas pautadas de tamaño DINA3.

Por motivos organizativos no se emplearon medios informáticos o programas que permitieran la creación de baldosas y mosaicos en el aula. La opción *Autoforma* del procesador de textos *Microsoft Word* y el programa *Micrografx Draw* son los recursos que hemos empleado en la elaboración de las fichas ofrecidas a los alumnos y los gráficos que se adjuntan en este artículo.

También cabe destacar que existen en la red algunas aplicaciones Flash que permiten la creación de distintos mosaicos modulares como *Cayley Quilt Maker* (Lopez, 2010). Sin embargo, este applet no es eficiente en el diseño de nuestras baldosas, y además no se adecúa a la elaboración de los mosaicos generales a partir de una tabla de multiplicación que se proponen en nuestra actividad. Invitamos al lector a sugerir algún otro tipo de programa o software informático que permita la automatización de este proceso de diseño de mosaicos.

8. Conclusiones finales

Como se mencionó en la introducción, la creación de mosaicos modulares es un tópico que ha sido abordado con anterioridad en otras propuestas de aula. Sin embargo, en este trabajo hemos presentado un nuevo procedimiento para construir mosaicos a partir de las tablas de multiplicar módulo *n* que, a nuestro entender, posee ventajas frente a los antecedentes estudiados y se ajustan mejor al tipo de alumnado al que iba dirigido. En concreto:

- En esta actividad se llega a construir mosaicos para todo módulo y no solo para unos casos particulares, como en las anteriores.
- La construcción de mosaicos es simple y manipulable puesto que las baldosas básicas son muy elementales.
- Se emplean métodos o criterios fijos para la construcción de baldosas; esto es, se busca que el diseño de las baldosas no dependa únicamente del gusto estético del autor.
- Existe una sistematización; esto es, se muestra una forma de asignación generalizada entre baldosa y residuo.
- En los mosaicos resultantes aparecen distintas simetrías de manera natural, sin necesidad de girar el mosaico elemental cuando se aplica la repetición. Además muchas de las actividades de otras propuestas (principalmente la de Burton (2002)) están basadas en la tabla de sumar, con lo cual todos los mosaicos generados son esencialmente iguales. Todo esto supone una ventaja debido a que: el mosaico posee un mayor valor estético a mayor número de simetrías y que las simetrías del mosaico son claramente interpretables en términos de las propiedades del producto de residuos y de la elección de las baldosas.
- En la actividad, no solo se resuelven tareas directas de elaboración de mosaicos, sino que surgen otro tipo de problemas que el alumno debe abordar y decisiones que debe tomar. Por lo tanto, el alumno no adopta un papel de sujeto pasivo que simplemente contempla los mosaicos realizados o a lo sumo reproduce las baldosas indicadas en cartulina para formar el mosaico en el aula.

Finalmente y a modo de conclusión, indicamos que se alcanzaron en gran medida los objetivos planteados en el diseño de la actividad durante la implementación de esta sesión en el aula. Las distintas tareas fueron muy bien recibidas por parte de todos los alumnos, que se sintieron implicados en la creación de mosaicos mediante unos objetos matemáticos así como el debate suscitado en cuanto a la necesidad de generalizar los casos particulares, asignar baldosas a diferentes residuos y a la construcción de baldosas de mayor tamaño a partir de baldosas más pequeñas, explorando las propiedades del producto de baldosas.

Bibliografía

Burton, Laurie (2002): Math Art Posters. *The Oregon Mathematics Teacher*. September 2002, 31 – 36.

Caballero Gil, Pino; Bruno Castañeda, Carlos (2004): Educación Matemática a través de la Criptografía. *Revista UNO*, 36, 39 – 54 .

Caballero Gil, Pino; Bruno Castañeda, Carlos (2007): A cryptologic way of teaching mathematics. *Teaching Mathematics and its Applications*, 26, 2 – 16.

De la Cueva, Fernando; Gil, Elena (2007): Workshop of Mathematical Talent, a Wonderful Educational Experience. En Pugalee, Rogerson & Schinck (edts.) *Proceedings of the Ninth International Conference Mathematics Education in a Global Community,* The Mathematics Education into the 21st Century Project and The University of North Carolina Charlotte. 149 – 154.

Forseth, S; Troutman, A. (1974): Designs Exhibiting Mathematical Structure. *School Science and Mathematics*, 74.

Kalajdzievski, S. (2008): *Math and Art. An introduction to Visual Mathematics*. CRC Press. New York.

Lopez, Scott (2010): *Cayley Quilt Maker*. Aplicación Java-Scrip de creación de mosaicos modulares. Disponible en: http://www.wou.edu/~burtonl/flash/ca.html

Meavilla Seguí, Vicente (2006): Las Matemáticas como fuente de inspiración artística. *Revista UNIÓN*, 8, 51 – 61.

Mora Sánchez, José Antonio (2007): Geometría Dinámica para el análisis de obras de arte. *Revista UNIÓN*, 9, 83 – 99.

Pérez Gómez, Rafael (2008): Matemáticas para compartir la belleza. *Revista UNIÓN*, 16, 7 – 27.

Pickover, Clifford (1989): Picturing Randomness with Truchet Tiles. *J. Recr. Math.* 21, 256-259.

Ruiz, F (2004): Usos de nuevas tecnologías para enseñar Matemáticas con Arte. En Peñas, Moreno y Lupiáñez (edts.) *Investigación en el aula de matemáticas. Tecnologías de la información y la comunicación*. SAEM "THALES" y Dpto. de Didáctica de la Matemática de la Universidad de Granada.

Smith, C. S.; Boucher, P. (1987): The Tiling Patterns of Sebastien Truchet and the Topology of Structural Hierarchy. *Leonardo* 20, 373-385.

José María Muñoz Escolano. Licenciado en Matemáticas y Doctor por la Universidad de Zaragoza. Área de investigación es el Álgebra (más concretamente, la *Teoría de grupos*). Ha publicado distintos trabajos en Educación Matemática y ha participado en distintos congresos. En este campo, sus líneas de investigación son *Juegos educativos matemáticos* y *Didáctica del número racional*. Participa en el Proyecto de cooperación en materia de investigación *Taller de talento matemático*, financiado por el Gobierno de Aragón. En la actualidad, es Profesor Ayudante Doctor en la Facultad de Ciencias Humanas y de la Educación de Huesca, donde imparte clase en las titulaciones de Maestro. **jmescola@unizar.es**

Antonio M. Oller Marcén. Licenciado en Ciencias Matemáticas por la Universidad de Zaragoza.Área de investigación es la Didáctica de las Matemáticas, está realizando su Tesis Doctoral sobre la enseñanza de la Proporcionalidad y ha publicado artículos sobre Juegos educativos matemáticos y sobre enseñanza de la Geometría. Participa en el Proyecto de cooperación en materia de investigación *Taller de talento matemático*, financiado por el Gobierno de Aragón. En la actualidad, es Profesor Ayudante en la Facultad de Ciencias Sociales y Humanas de Teruel, donde imparte clase en las titulaciones de Maestro. **oller@unizar.es**

UNIÓN
REVISTA IBEROAMERICANA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA

Junio de 2011, Número 26, páginas 183-184
ISSN: 1815-0640

Mates de cerca

Autor:
Fernando Corbalán.
Serie:
Didáctica de las matemáticas.
Colección:
Biblioteca de Aula, 287.
Año de edición: 2011.
ISBN: 978-84-9980-067-7
Editorial: Graó.

Fernando Corbalán es Licenciado en Ciencias (Matemáticas) y Doctor en Filosofía y Letras, con una tesis sobre juegos de estrategia. Creador y coordinador hasta hace unos meses del Programa *'Matemática Vital'* del Departamento de Educación del Gobierno de Aragón. Es autor de la sección semanal *'Mates de cerca'* en el Heraldo de Aragón, así como de libros de texto para Secundaria y Bachillerato y de más de una docena de libros de divulgación matemática

En esta última obra suya a partir de 100 casos concretos se muestra que las matemáticas juegan un importante papel en el sistema educativo pues también lo juegan en la organización de la sociedad. El planteo de estos casos ayuda a responder a la pregunta que comúnmente se hacen los estudiantes: "¿para qué me servirá esto?".

Es importante destacar que de los muchos problemas que se presentan la mayoría son accesibles, sencillos de comprender y no hace falta una base matemática importante para comprenderlos. El haber elegido este tipo de situaciones hace que puedan descubrir toda la matemática que existe a nuestro alrededor.

Hay una gran variedad de temas, mencionaremos a continuación algunos de ellos: Los números y sus funciones, caminos y distancias, arte y matemáticas: figuras elementales, el número de oro, magias numéricas, catenarias, la regla de D'Hondt, cine matemático, las encuestas electorales, las apuestas, torre virtual, espirales, números, conejos y plantas, torres de Hanoi, las potencias, probabilidad, números a nuestro alrededor, cálculos rápidos, colecciones de cromos, poseía matemática, problemas de dinero, matemáticas y publicidad, relojes de sol y la belleza de las matemáticas

Este tipo de problemas debemos llevar a nuestros alumnos para que encuentren la relación entre la matemática y la vida cotidiana, podemos recordar al Dr. Luis Santaló, quién decía: "…*la educación matemática debe estar en continua evolución y que los educadores deben ir ajustando sin pausa la forma y el fondo de sus enseñanzas, para mantener a la escuela acorde a la calle de manera que el alumno no encuentre demasiada discontinuidad entre lo que oye en el aula y l oque encuentra y ve en su casa y en la calle*…"

Equipo editorial.

UNIÓN
REVISTA IBEROAMERICANA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA

Junio de 2011, Número 26, páginas 185-188
ISSN: 1815-0640

Matemátic@s en l@ red

Olimpíada Matemática Argentina

Dirección: http://oma.org.ar/

En esta sección y como se ha dado a lo largo de las ediciones anteriores, daremos una breve reseña sobre el portal perteneciente a la Olimpiada Matemática Argentina. El mismo es un nexo entre todos los miembros de la comunidad, desde los organizadores locales, regionales, nacionales e internacionales, hasta alumnos, instituciones educativas (escuelas, instituciones terciarias y universidades) y público en general y lo podemos hallar a través del URL http://oma.org.ar/ .

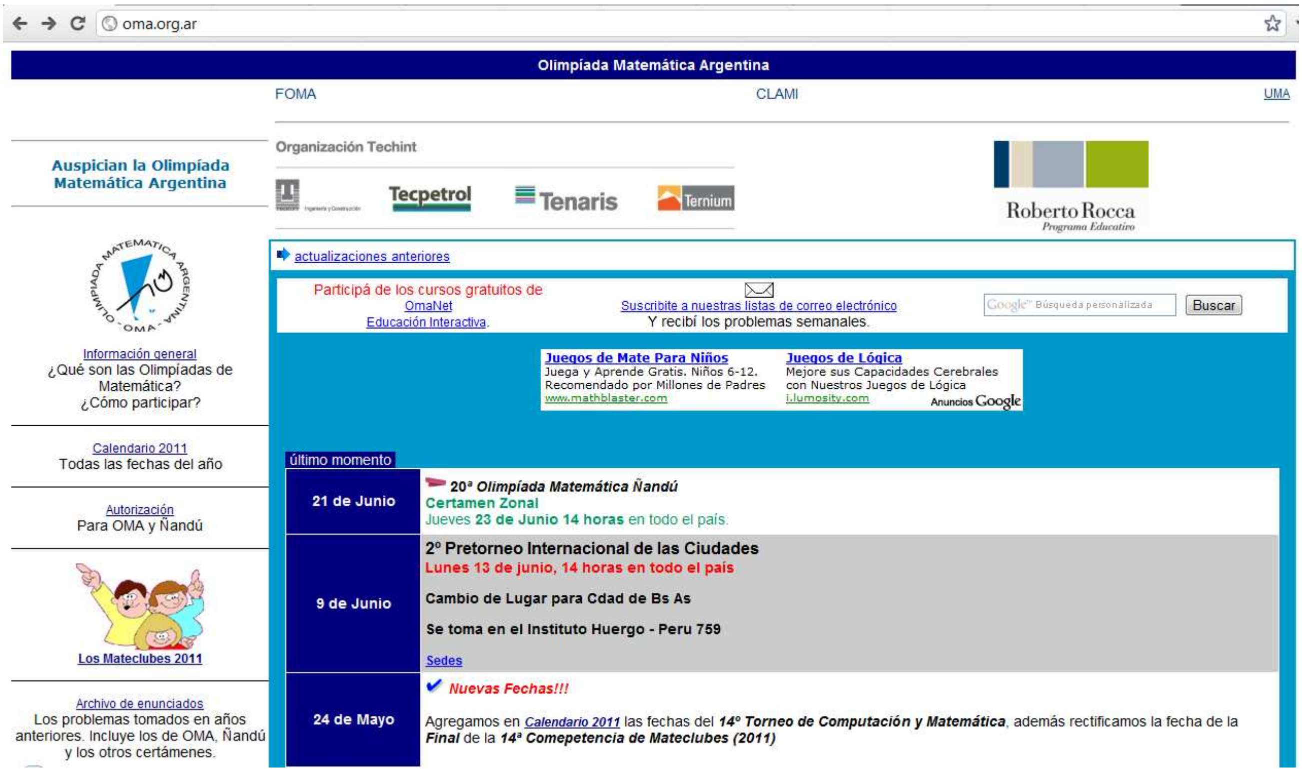
A modo informativo, en la carta de presentación de la OMA, podemos leer:

Que el objetivo principal de las competencias matemáticas en la Argentina es que los alumnos de enseñanza media y desde la primaria, descubran sus aptitudes teniendo un contacto real con el quehacer matemático. En estos concursos participan anualmente varios cientos de miles de personas durante gran parte del año calendario. A través de estas acciones se espera alentar a todos los que portan aptitudes matemáticas a desarrollarlas, manteniéndose en contacto para construir el espacio académico que favorece su formación. A partir de este contacto lograr descubrir sus preferencias ya sea en relación con la ciencia, la tecnología o con el resto del mundo intelectual que va desde la filosofía, la historia, la economía hasta la música, la pintura y la literatura.

La OMA participa en múltiples olimpiadas internacionales. Cada una de ellas tiene un método de selección específico y restricciones para los participantes que podrán conocer visitando su sitio. En varias de ellas (IMO, OIM y Cono Sur) el equipo argentino se elige a través de una Prueba de Selección independiente para cada una de ellas. En estas pruebas sólo están habilitados para participar los alumnos seleccionados en el Certamen Nacional de OMA del año anterior. En cada una de ellas hay restricciones adicionales que dependen de cada prueba, por ejemplo el límite de edad.

Las Olimpíadas Internacionales en las que participa la OMA son: Olimpíada Matemática del Cono Sur, Olimpíada Iberoamericana de Matemática - OIM, Olimpíada Internacional de Matemática - IMO, Olimpíada de la Cuenca del Pacífico, Olimpíada Iberoamericana de Mayo, Olimpíada Matemática Rioplatense, Torneo Internacional de las Ciudades y Olimpíada Iberoamérica Universitaria de Matemática.

A continuación se presenta la página de inicio:



En ella se observa una columna principal y, en el lateral derecho, una secundaria con diferentes enlaces relacionados a la red matemática. Como parte de la columna principal se presentan las categorías:

- "OmaNet Educación Interactiva", que es un servicio gratuito para toda la comunidad educativa, se ofrecen cursos y actividades gratuitas. Las mismas son: EduCabri (Geometría con el soft Cabri Geometre), Miscelánea Matemática, Taller de Resolución de Problemas, Computación y Matemática, Caos, Fractales y Algoritmos iterativos.

- "Novedades de último momento", "competencia nacionales" y "competencias internacionales", donde se publican las fechas, los lugares, los resultados y la información en general de los distintos torneos, olimpíadas, certámenes, clubes y concursos. Cabe destacar que en competencias nacionales se puede encontrar además de las olimpíadas para los distintos niveles educativos un Torneo de Computación y Matemática, un concurso de Literatura y Matemática y un Torneo de Fotografía y Matemática.
- "Material de entrenamiento" con enlaces a archivos de enunciados de todos los certámenes, problemas semanales, investigaciones y docencia. Este espacio de aportes de diferentes experiencias es coordinado, entre otros, por el profesor Néstor Aguilera.
- "Varios" con información y actividades de la OMA, preguntas frecuentes sobre qué son y en qué consisten las olimpíadas, y todos aquellos interrogantes que el visitante desea conocer, con sus respectivas respuestas. Se puede acceder al enlace con Red Olímpica, la misma nos brinda un servicio de compra on line de libros de destacados autores, los mismos se encuentran agrupados de acuerdo al nivel de educación. En este apartado los enlaces son diversos, tanto hacia secciones de la misma página como hacia otras páginas involucradas con el circuito internacional. También se aprecia un enlace directo a la página oficial de la Unión Matemática Argentina (UMA) y al Ministerio de Educación. En este mismo apartado existen links a páginas sugeridas por los propios usuarios.

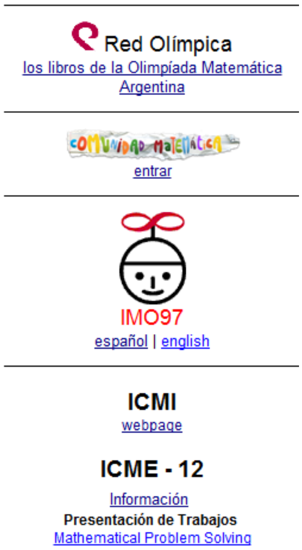
En la columna lateral existen ingresos directos a diferentes secciones del sitio como son: información general, calendarios, archivos de enunciados, formularios de inscripción y autorizaciones para los certámenes de la OMA y Ñandú.

La organización ofrece además la posibilidad de integrar y conectarse con los Mateclubes a través del enlace "Mateclubes 2011". El objetivo de los MateClubes es alentar la resolución de problemas a través del trabajo en equipo como entrenamiento para las rondas del certamen; en esta sección se detallan las reglas de funcionamiento y las condiciones de inscripción para los participantes.

Se encuentra un link desde el que se puede acceder a un archivo que contiene los enunciados de problemas de las distintas instancias de las competencias de los últimos años, a partir del año 1995.

También se puede entrar en forma directa a páginas regionales, donde se puede encontrar la información correspondiente a dicha zona. En particular se puede ingresar a las páginas de: Pilar, San Isidro, Lanús, Secretaría Regional Centro de

Córdoba, Formosa, La Pampa, Misiones, Zonal Partido de la Costa, Ciudad Autónoma de Buenos Aires



Se puede acceder a páginas de certámenes anteriores como IMO 97, a páginas internacionales, como ICMI (Comisión Internacional de Instrucción Matemática), ó "páginas de eventos futuros" como ICME 12 (Congreso Internacional en Educación Matemática) a desarrollarse en Julio del 2012 en Korea.

Concluyendo esta visita mencionaremos el enlace de la página "Comunidad Matemática" cuyo fin es crear una comunidad, que sirva de complemento al libro "Resolviendo Problemas de Matemáticas", en tal sección se pretende poder discutir estrategias y soluciones, intercambiar material y cualquier otro aspecto relacionado con esta maravillosa cienciaY para finalizar invitamos al lector a visitar el sitio para interiorizarse personalmente de los contenidos que nos brinda, conocer un poco más de las particularidades del certamen y ayudar a su divulgación en pos de la educación matemática, para que ella sea una herramienta valorizada por la sociedad argentina y por los jóvenes.

Lorena Alfonso.
Dpto. de Matemática.
Facultad de Economía y Administración.
Universidad Nacional del Comahue. Argentina.

UNIÓN
REVISTA IBEROAMERICANA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA

Junio de 2011, Número 26, páginas 189-197
ISSN: 1815-0640

Información

Plan de ayudas al estudio en Paraguay
Línea editorial
Material escolar
Beca de la Revista UNIÓN

1. Plan de ayudas al estudio en Paraguay

La Fundación Canaria *Carlos Salvador y Beatriz* inauguró su primera escuela completa el 10 de septiembre del año 2010, en Paraguay. Fue el final de un proyecto largamente acariciado: la construcción de una escuela, la primera escuela de la Fundación. Se trata de la “Escuela Básica Nº 5934 en Cerro Poty”.

Se financió el proyecto arquitectónico, los materiales de construcción, el levantamiento y construcción y el equipamiento de material escolar, todo con un coste de 12.300 € (cerca de 83 millones de guaraníes). Debemos añadir el material escolar llevado desde Canarias por un montante de 400 €.

El asentamiento de Cerro Poty se halla ubicado en la zona de Bañado Sur de Asunción desde hace 12 años, colindante con el Cerro Lambaré y a poca distancia de la ribera del río Paraguay y del vertedero de residuos de la capital. La comunidad es la de la Escuela Indígena Nº 5934 de la parcialidad Mbyá y Avá guaraní y cuenta con instalaciones precarias de agua y luz y a 700 metros de la Avenida Perón El acceso, que era de tierra, ya se ha hecho de cemento y esperamos que continúen las mejoras en la calidad de vida de los habitantes de esta zona.

Pero ahora llega la segunda fase de ese proyecto en forma de un “Plan de Ayudas al Estudio Posobligatorio en la Comunidad Indígena de Cerro Poty”. Todo ello porque el Patronato de la Fundación “desea ir más allá. Tenemos que lograr incentivar la permanencia de estudiantes en las fases siguientes del Sistema Educativo con el fin de aumentar la tasa de incorporación a estudios secundarios y ¿por qué no? llegar a estudios universitarios. Es necesario, por tanto, aportar unos fondos destinados a cubrir las necesarias ayudas al estudio y establecer un conjunto de pautas y de medidas que nos permitan garantizar la eficacia del plan que deseamos poner en marcha”.

A tal fin se ha creado un órgano de gestión y de seguimiento formado por representantes de los Ministerios de Educación y Cultura y de la Secretaría de la Niñez y de la Adolescencia de Paraguay, de la OEI, del propio centro educativo, de la Comunidad y de la Fundación. Este Comité ha mantenido sus primeras reuniones y los frutos no tardarán en caer en forma de ayudas a estudiantes necesitados. O como dice, el vicepresidente de la Fundación, Luis Balbuena, “no dejar secar el árbol cuyo primer riego se dio en septiembre del pasado año”. O seguir, con humildad, arrimando el hombro. Por la educación…

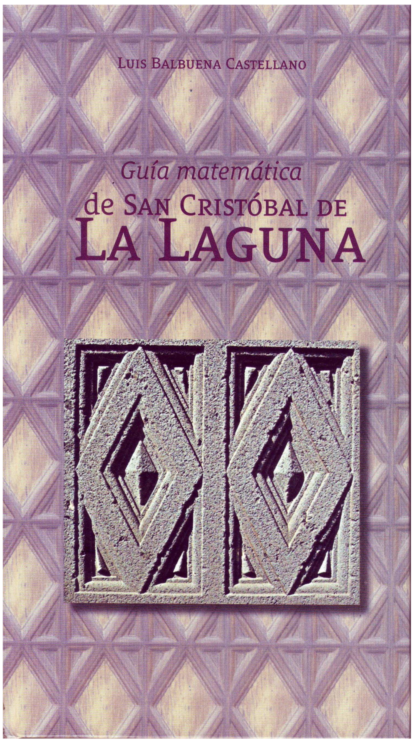
El Presidente de la Fundación, Salvador Pérez, se dirige a la Comunidad Educativa de Cerro Poty: *"No queremos que este acto de inauguración sea flor de un día y por eso pondremos en marcha un plan de ayudas al estudio".*

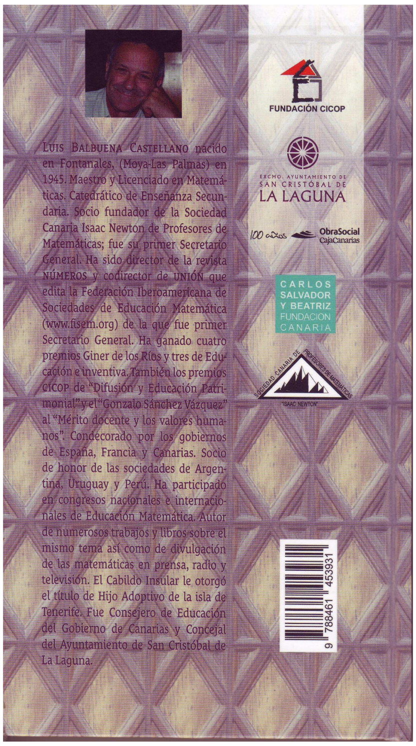
2. Línea Editorial

La Fundación Canaria *Carlos Salvador y Beatriz* continúa con el afán de trabajar por la cultura y la educación. Por eso tiene un plan de ediciones. Los libros hasta ahora publicados son:

- Los póstumos de Carlos Salvador (que escribía desde niño). Se titulan *Dioses para cinco minutos,* prólogo del escritor y periodista, Eduardo Haro Tecglen; *Retrato de un viejo prematuro,* prólogo del periodista y escritor, Alfonso González Jerez y *Duelos del extranjero ilimitable,* prólogo del periodista y escritor, Juan Cruz Ruiz. Las portadas son tres cuadros de Munch, entre ellos "*El grito*". Van por la segunda edición.
- "*El ñandutí y las matemáticas*", de Luis Balbuena. Además de relacionar una de las más famosas artesanías del Paraguay, *el ñandutí* con otra popular artesanía de Canarias: *las rosetas* del pueblo de Vilaflor, en la isla de Tenerife, Canarias, España hace un estudio de las matemáticas que se encuentran en los diseños que utilizan las artesanas. En las 90 páginas se presentan numerosas fotografías de ambas artesanías, muchos dibujos, declaraciones de algunos artesanos, referencias históricas y explotación didáctica. El libro se vende al precio de 10 euros. Y hay que precisar que sus derechos de autor han sido donados a la Fundación, de forma altruista, sin nada a cambio, para apoyar los proyectos y realizaciones.

- Nos complace informar por primera vez sobre la edición de otro libro del mismo autor en el que la Fundación también está presente como patrocinadora. Se trata de la "*Guía Matemática de San Cristóbal de La Laguna*". La presentación oficial tendrá lugar en esa ciudad el día 24 de Junio de 2011 en la sede del Centro Internacional de Conservación del Patrimonio (CICOP). El libro presenta una excelente edición y contiene con gran cantidad de datos, fotografías del propio autor y un texto en el que se explican las matemáticas que se encuentra el visitante de esta ciudad que, por otra parte, fue declarada Patrimonio de la Humanidad por la UNESCO en 1999.





Portada y contraportada de la *Guía matemática de San Cristóbal de La Laguna*

3. Material escolar

La Fundación continúa su acción de envío de material escolar para escuelas carenciadas. Debemos resaltar que esta acción no sería posible si no contásemos con la colaboración de docentes que se comprometen a llevar `personalmente esos materiales con una responsabilidad, seriedad, esfuerzo, honestidad y alteza de miras que agradecemos.

En nuestra página web www.carlossalvadorybeatrizfundacion.com hay constancia de ello con numerosas fotografías y textos que acreditan el trabajo bien hecho.

Esta acción se inició en el año 2001 y, hasta este momento, se ha llegado a la cifra de **59** entregas. Las últimas entregas han sido a Salta (Argentina) el 22 de noviembre de 2010, a Potosí (Bolivia) en la misma fecha, a Horqueta, Departamento de Concepción (Paraguay) el 31 de enero del presente y la última un Laboratorio Matemático el 20 de mayo de 2011, en Perú.

Se da la circunstancia de que este Laboratorio Matemático lleva el nombre del Vicepresidente de la Fundación, Luis Balbuena Castellano, destacado profesor que ha dedicado esfuerzos a trabajar en pro de la Educación Matemática en toda el área iberoamericana. El Laboratorio fue inaugurado precisamente en el Día de las Matemáticas el día 12 de mayo de 2011, efeméride que fue propuesta por él en el 2000 que fue el AÑO MUNDIAL DE LAS MATEMÁTICAS. Se encuentra en la Institución Educativa "José María Arguedas Altamirano" y se halla en el Distrito Acraquia, provincia de Tayacaja, Región de Huancavelica, en Huancayo, Perú.

La Fundación, con la colaboración personal del propio Luis Balbuena, envió un paquete postal con diversos juegos y objetos matemáticos que servirán para conseguir estimular la curiosidad matemática y mejorar la enseñanza y el aprendizaje de dicha materia.

4. Beca de la Revista UNIÓN

En reciente Junta General del Patronato de la Fundación el presidente, Salvador Pérez, informó de diversas cartas de la Revista Digital Unión de la Federación Ibero Americana de Educación Matemática (FISEM) donde muestran el agradecimiento a la Fundación por la colaboración ofrecida y nos informan de que han seleccionado a la docente, María Andrea Cañas, para realizar un curso a distancia. Precisan que la seleccionada es una docente en formación de maestros y de una zona rural alejada 350 kilómetros de Buenos Aires, capital de Argentina.

Es intención de la Fundación mantener e incluso ampliar esta línea de colaboración con la revista UNIÓN.

Profesora María Andrea Cañas, Rca. Argentina

Hay mucha más información de la Fundación en la página web:

www.carlossalvadorybeatrizfundacion.com

¡¡Aquí les esperamos!!

Plano de ajudas ao estudo em Paraguai
Linha editorial
Material escolar
Beca de revista UNION

1. Plano de ajudas ao estudo em Paraguay

A Fundação Canaria Carlos Salvador e Beatriz inaugurou sua primeira escola completa o 10 de setembro do ano 2010, em Paraguai. Foi o final de um projecto longamente acariciado: a construção de uma escola, a primeira escola da Fundação. Trata-se da “Escola Básica Nº 5934 en Cerro Poty”.

Financiou-se o projecto arquitectónico, os materiais de construção, o levantamento e construção e o equipamento de material escolar, tudo com um custo de 12.300 € (cerca de 83 milhões de guaraníes). Devemos acrescentar o material escolar levado desde Canárias por um montante de 400 €.

O assentamento de Cerro Poty acha-se localizado na zona de Bañado Sur de Assunção desde faz 12 anos, colindante com o Cerro Lambaré e a pouca distância da ribera do rio Paraguai e do vertedero de residuos da capital. A comunidade é a da Escola Indígena Nº 5934 da parcialidad Mbyá e Avá guaraní e conta com instalações precárias de água e luz e a 700 metros da Avenida Perón O acesso, que era de terra, já se fez de cemento e esperamos que continuem as melhoras na qualidade de vida dos habitantes desta zona.

Mas agora chega a segunda fase desse projecto em forma de um “Plano de Ajudas ao Estudo Posobligatorio na Comunidade Indígena de Cerro Poty”. Todo isso porque o Patronato da Fundação “deseja ir para além.. Temos que conseguir incentivar a permanência de estudantes nas fases seguintes do Sistema Educativo com o fim de aumentar a taxa de incorporação a estudos secundários e ¿por que não? chegar a estudos universitários É necessário, por tanto, contribuir uns fundos destinados a cobrir as necessárias ajudas ao estudo e estabelecer um conjunto de pautas e de medidas que nos permitam garantir a eficácia do plano que desejamos pôr em marcha".

A tal fim criou-se um órgão de gestão e de seguimiento formado por representantes dos Ministérios de Educação e Cultura e da Secretaria da Niñez e da Adolescencia de Paraguai, da OEI, do próprio centro educativo, da Comunidade e da Fundação. Este Comité manteve suas primeiras reuniões e os frutos não demorarão em cair em forma de ajudas a estudantes precisados. Ou como diz, o vice-presidente da Fundação, Luis Balbuena, "não deixar secar a árvore cujo primeiro riego se deu em setembro do passado ano". Ou seguir, com humildad, arrimando o ombro. Pela educação…

O Presidente da Fundação, Salvador Pérez, dirige-se à Comunidade Educativa de Cerro Poty: "Não queremos que este acto de inauguração seja flor de um dia e por isso poremos em marcha um plano de ajudas ao estudo".

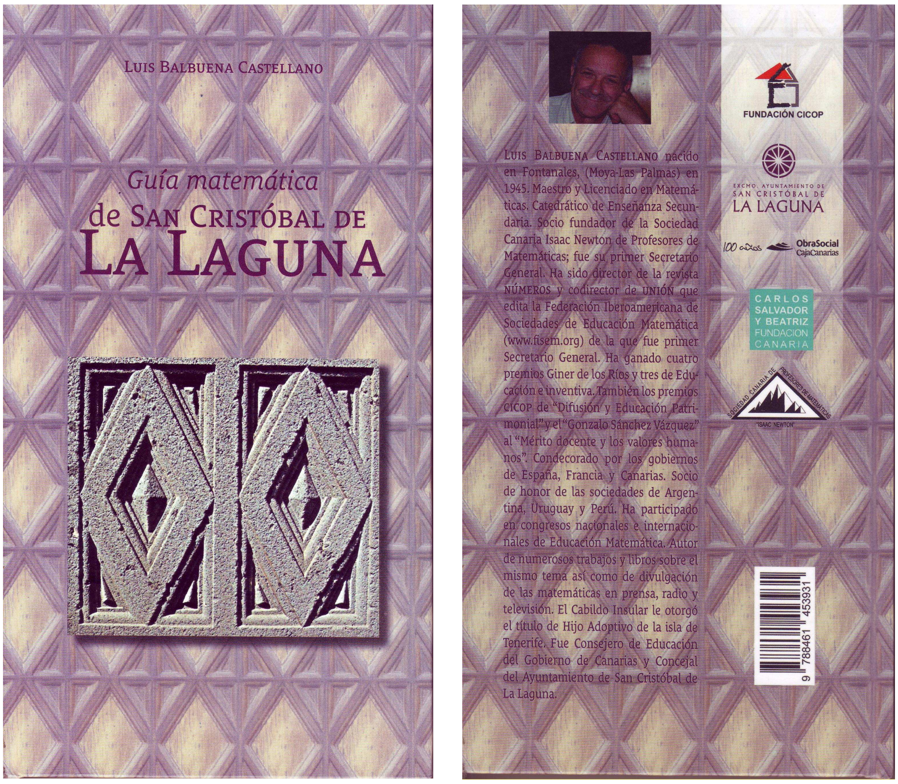
2. Linha Editorial

A Fundação Canaria Carlos Salvador e Beatriz continua com o afán de trabalhar pela cultura e a educação. Por isso tem um plano de edições. Os livros até agora publicados são:

- Os póstumos de Carlos Salvador (que escrevia desde menino). Titulam-se Deuses para cinco minutos, prólogo do escritor e jornalista, Eduardo Haro TecglenRetrato de um velho prematuro, prólogo do jornalista e escritor, Alfonso

González e Duelos do estrangeiro ilimitable, prólogo do jornalista e escritor, Juan Cruz Ruiz. As portadas são três quadros de Munch, entre eles “O grito”. Vão pela segunda edição.

- “O ñandutí e as matemáticas”, de Luis Balbuena. Além de relacionar uma das mais famosas artesanatos do Paraguai, o ñandutí com outro popular artesanato de Canárias: as rosetas do povo de Vilaflor, na ilha de Tenerife, Canárias, Espanha faz um estudo das matemáticas que se encontram nos desenhos que utilizam as artesanas. Nas 90 páginas apresentam-se numerosas fotografias de ambas artesanatos, muitos desenhos, declarações de alguns artesãos, referências históricas e exploração didáctica. O livro vende-se ao preço de 10 euros. E há que precisar que seus direitos de autor foram doados à Fundação, de forma altruísta, sem nada a mudança, para apoiar os projectos e realizações.
- Compraze-nos informar pela primeira vez sobre a edição de outro livro do mesmo autor no que a Fundação também está presente como patrocinadora. Trata-se da "Guia Matemática de San Cristóbal da Laguna". A apresentação oficial terá lugar nessa cidade no dia 24 de Junho de 2011 na sede do Centro Internacional de Conservação do Património (CICOP). O livro apresenta uma excelente edição e contém com grande quantidade de dados, fotografias do próprio autor e um texto no que se explicam as matemáticas que se encontra o visitante desta cidade que, por outra parte, foi declarada Património da Humanidade pela UNESCO em 1999.



Portada e contraportada da Guia matemática de San Cristóbal da Laguna

3. Material escolar

A Fundação continua sua acção de envio de material escolar para escolas carenciadas. Devemos ressaltar que esta acção não seria possível se não contássemos com a colaboração de docentes que se comprometem a levar `pessoalmente esses materiais com uma responsabilidade, seriedade, esforço, honestidade e alteza de olhas que agradecemos.

Em nossa página site www.carlossalvadorybeatrizfundacion.com há constancia disso com numerosas fotografias e textos que acreditan o trabalho bem feito.

Esta acção iniciou-se no ano 2001 e, até este momento, chegou-se à cifra de 59 entregas. As últimas entregas foram a Salta (Argentina) o 22 de novembro de 2010, a Potosí (Bolívia) na mesma data, a Horqueta, Departamento de Concepção (Paraguai) o 31 de janeiro do presente e a última um Laboratório Matemático o 20 de maio de 2011, em Peru.

Dá-se a circunstância de que este Laboratório Matemático leva o nome do Vice-presidente da Fundação, Luis Balbuena Castelhano, destacado professor que dedicou esforços a trabalhar em pró da Educação Matemática em toda o área iberoamericana. O Laboratório foi inaugurado precisamente no Dia das Matemáticas no dia 12 de maio de 2011, efeméride que foi proposta por ele no 2000 que foi o ANO MUNDIAL DAS MATEMÁTICAS. Encontra-se na Instituição Educativa "José María Arguedas Altamirano" e acha-se no Distrito Acraquia, província de Tayacaja, Região de Huancavelica, em Huancayo, Peru.

A Fundação, com a colaboração pessoal do próprio Luis Balbuena, enviou um pacote postal com diversos jogos e objectos matemáticos que servirão para conseguir estimular a curiosidade matemática e melhorar o ensino e a aprendizagem de dita matéria.

4. Bolsa da Revista UNIÓN

Em recente Junta Geral do Patronato da Fundação o presidente, Salvador Pérez, informou de diversas cartas da Revista Digital União da Federação Ibero Americana de Educação Matemática (FISEM) onde mostram o agradecimiento à Fundação pela colaboração oferecida e nos informam de que seleccionaram à docente, María Andrea Cañas, para realizar um curso a distância. Precisam que a seleccionada é uma docente em formação de maestros e de uma zona rural afastada 350 quilómetros de Buenos Aires, capital de Argentina.

É intenção da Fundação manter e inclusive ampliar esta linha de colaboração com a revista UNIÓN.

Professora María Andrea Cañas, Rca. Argentina

Há muita mais informação da Fundação na página site:

www.carlossalvadorybeatrizfundacion.com

¡¡ Aqui esperamos-lhes!!

UNIÓN
REVISTA IBEROAMERICANA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA

Junio de 2011, Número 26, páginas 199-206
ISSN: 1815-0640

Nelly Esther Vázquez de Tapia

10/04/1919-19/06/2011

In Memoriam

Fundadora de la Sociedad Argentina de Educación Matemática (SOAREM)

Presidente de SOAREM (1998-2005)

Presidente Honoraria de SOAREM

Integrante de la Comisión de creación de la FISEM.

La noticia aunque esperada ha producido gran consternación entre sus familiares, amigos y colegas. Los integrantes del Comité Editor de UNIÓN, trasmitimos nuestras condolencias y queremos efectuar una breve reseña de su fructífera obra. Su figura permanecerá siempre en nuestro recuerdo.

Fundadora y Presidente de la Fundación TAPIA desde 1994. En recuerdo de su hijo, esta institución otorga el Premio “Carlos Alberto Tapia. La Rosa de Oro” a maestros de zonas inhóspitas o funcionarios que hayan sido ejemplo de ética y moral. Entre los premiados figuran: el Dr. Luis A. Santaló y el Dr. René Favaloro.

Nelly Tapia y su hija Alicia en la entrega al prestigioso médico argentino René Favaloro, de la “Rosa de oro” de la Fundación Carlos Tapia.

Además de colega, fue una gran amiga del Dr. Luis Santaló, con él compartió proyectos y realizó publicaciones. Luego de su muerte, Nelly siguió manteniendo una relación afectiva con su esposa e hijas.

Nelly Tapia disertando en el Homenaje a su gran amigo Luis Santaló (en primera fila junto a su esposa)

Además de la entrega del premio de la Fundación Tapia, en julio de 2002 con motivo de la VI Reunión del Cono Sur, se rindió un emotivo homenaje al Dr. Luis A. Santaló, fallecido el 22 de noviembre de 2001. Las palabras alusivas estuvieron a cargo de Nelly.

Participó activamente en la organización de numerosos congresos nacionales, realizadas en Ciudad de Buenos Aires y en distintas provincias del país. También conformó Comisiones en Congresos Internacionales, su espíritu inquieto la llevó a viajar y estar presente en todas las reuniones que se relacionaran con la educación matemática para luego trasmitirla a sus alumnos.

Fue miembro del Consejo Académico del Instituto Argentino de Informática (desde 1986) y colaboradora contratada por el Instituto de Investigaciones Educativas para la investigación: “Fundamentos psicopedagógicos de la formación científica de matemática”. También integró equipos en el Ministerio de Cultura y Educación de la Nación Argentina, el Consejo Nacional de Investigaciones Científicas y Técnicas, el Consejo Provincial de Educación de la provincia de Neuquén, la Universidad Nacional de San Juan, etc.

Nelly Tapia con invitados especiales, miembros de la Comisión Directiva de SOAREM, colegas y participantes.

Impartió numerosos cursos de perfeccionamiento docente destinados a nivel primario, secundario y terciario, tanto en el país como en el exterior. Su frondosa producción bibliográfica, realizada en su mayoría en conjunto con sus hijos Alicia y Carlos, que siguieron sus pasos, son apoyo permanente de docentes de matemática, por su claridad de conceptos y la metodología utilizada. Entres sus publicaciones se encuentran varios libros de textos, de enseñanza primaria, secundaria y varios tomos de “Jugando con matemática”, guías metodológicas y de actividades, folletos temáticos y el libro “Geometría intuitiva” (1966).

A continuación presentamos algunas imágenes de las portadas de esos libros que fueron una enorme ayuda para tantos docentes:

Portadas de los textos de Enseñanza Secundaria

Algunas de las portadas de los libros de primaria

Trabajó incansablemente para que la Sociedad Argentina de Educación Matemática lograra los ambiciosos objetivos que se propusieron en la Asamblea Constitutiva del 31 de octubre de 1998 en la Ciudad de Buenos Aires y para obtener la Personería Jurídica por Resolución N° 000530 de fec ha 31 de mayo de 1999.

Nelly con su gran amigo Luis Balbuena, quién siempre colaboró y apoyo a SOAREM, en ocasión de entrega de materiales a escuelas del norte argentino

Siempre incentivó la participación de los miembros de la Comisión y de los delegados de las provincias a los que enviaba información permanente sobre las actividades y proyectos de la SOAREM. Durante su presidencia se realizaron talleres, conferencias con especialistas, boletines de divulgación, certámenes de fotografía y cursos a distancia por Internet.

Asamblea de SOAREM durante su Presidencia

Integró la Comisión constitutiva de la FISEM, con los Presidentes de las Sociedades que la conforman, asistió en Tenerife – España al inicio de actividades y elección de autoridades.

Tenerife – España. Reunión de la FISEM convocada por su Fundador y primer Secretario General. Luis Balbuena Castellano

Nelly Tapia, Norma Cotic, Teresa Braicovich

Agradecemos todos los mensajes de condolencia recibidos, de los que hemos seleccionado algunos que sin duda representan el dolor de todos.

Con gran tristeza recibo la noticia del fallecimiento de Dª Nelly. Transmito mi pesar a su familia. Tuve el privilegio de poder conocer a una gran mujer que se entregó con generosidad a su vocación. Su vida y su obra son un legado para la Educación Matemática de Iberoamérica. Creo que la SOAREM debería llevar su nombre. Descansa en paz, amiga, y gracias por tu ejemplo que no olvidaremos".
Un abrazo
Luis Balbuena

Sinto muitíssimo. Que ela esteja bem, tendo cumprido sua missão na Terra.
Um abraço
Celia Carolino Pires
Primera Presidente de FISEM

Lamento mucho la desaparición de Nelly, a la que tuve la posibilidad de conocer en Islas Canarias durante unas Jornadas de la Federación Española en la participó de manera activa en la constitución de la FISEM y posteriormente, volví a coincidir con ella en uno de los congresos CAREM en Buenos Aires organizados por su sociedad del que aún recuerdo las conversaciones con ella y los detalles y alegría con las que hablaba de su trabajo como docente y de las actividades que realizaba a través de la fundación que había creado para recordar a e de su hijo.Es una pérdida muy importante para la Educación Matemática no solo en Argentina sino en Iberoamérica, por lo que considero que tanto desde la FISEM como desde UNIÓN

se merece que realicemos todos los esfuerzos posibles para que su ejemplo permanezca en nuestra memoria.Un saludo afectuoso
Agustín Carrillo de Albornoz
Secretario General de la FISEM

La Sociedad Argentina de Educación Matemática (SOAREM) comparte con toda los educadores, con hondo pesar la triste noticia del fallecimiento de la Profesora Nelly Vazquez de Tapia el 19 de junio de 2011, a la edad de 92 años. Fue la fundadora de nuestra sociedad que presidió desde su creación hasta 2005 y desde ese año fue nombrada Presidenta Honoraria de la misma.
Lamentamos no tenerla ya entre nosotros, aunque sabemos que siempre nos acompañará el recuerdo de esta defensora de la educación matemática que propició la creación de nuestra sociedad. Forjó la idea de la creación de una sociedad que reuniera a los docentes de matemática y los representara en eventos nacionales e internacionales. Luchó durante tiempo hasta lograr cristalizarla en 1998 con la creación de SOAREM para que nucleara a los profesores de matemática e investigadores argentinos, en la que todos los que nos preocupamos por enseñar matemática en los distintos niveles, pudiéramos tener un ámbito institucional para compartir experiencias e ideas. Fue una pionera en el acercamiento de la reflexión sobre el aula de matemática en nuestro país, compartiendo sus publicaciones, tanto libros como artículos, y exposiciones, tanto talleres como conferencias, en los que plasmó sus reflexiones y propuestas.
Quedará por siempre su recuerdo imborrable en todos aquellos que tuvimos la oportunidad de tratarla y compartir sus ideas.
Cecilia Crespo Crespo
Presidente de SOAREM

Es con sentido dolor que la SEMUR recibe esta tan triste noticia. La comunidad de docentes de Matemática uruguayos recordamos con muchísimo cariño y agradecimiento los valiosos aportes que la profesora Nelly Vázquez de Tapia generosamente nos brindó en sus numerosas visitas a nuestro país.
Un afectuoso saludo a todos y en particular a los colegas argentinos.
Prof. Etda Rodríguez
Presidente de la SEMUR

Que lamentable, creo que todos aprendimos de la fortaleza de Nelly, ojalá podamos llegar a trabajar con tanto entusiasmo cuando seamos mayores. Nuestras condolencias a su familia y a la SOAREM.
Begoña Grigoriú.
Presidente de SOBOEDMA.

Estimados colegas:
A nombre de la Sociedad Ecuatoriana de Matemática, hago llegar nuestras más sentidas condolencias a la SOAREM y a la comunidad matemática argentina ante tan sensible pérdida. Saludos cordiales,
Luis Miguel Torres
Presidente SEdeM

Desde la FESPM queremos manifestar nuestro mas sentido pésame a la SOAREM y a toda la comunidad matemática argentina por tan triste pérdida. Nelly permanecerá siempre en el recuerdo de aquéllos que tuvimos la oportunidad de conocerla. Un abrazo y transmitan nuestro pesar a todos sus familiares, amigos y colegas.
Serapio García Cuesta
Presidente de FESPM

Para las personas que tuvimos la gran oportunidad de conocer, utilizar y valorar la inigualable obra de Nelly, es realmente una pérdida que no es fácil de superar. Su afán por generar en las personas el gran gusto por las matemáticas y hacerlas sencillas para ponerlas al alcance de todos será una tarea muy difícil de alcanzar por el resto de sus seguidores. Dios brinde a sus seres queridos la paz y resignación para aceptar tan dolorosa partida.
Prof. María Inés Ciancio.

Es una gran pérdida para el mundo de la educación argentina y en especial la matemática. Me uno al dolor de su familia y de todos quienes tuvimos el HONOR de conocerla. Fue y será una GRANDE CON MAYUSCULAS por todo lo que nos transmitió, su generosidad, humildad, fuerza para luchar por la fundación de SOAREM y permitir que todos aquellos que residimos tan lejos de los grandes centros Urbanos podamos participar en eventos, congresos, conferencias y mostrar humildemente lo que hacemos en nuestras escuelas, localidades, ciudades, provincias.
Fue mi gran maestra de matemática y mi segunda madre por sus consejos, sus charlas tan llenas de sabiduría, sus conocimientos...
Un Gran Cariño a todos desde el Chaco!!
Miriam Capdevila
(Socia fundadora de SOAREM)

Querida Nelly

Vivirás en nuestros corazones para siempre, tenemos de tí los mejores recuerdos, los que seguirán latentes en nuestras mentes.

Teresa y Norma.

Equipo Editor

FEDERACIÓN IBEROAMERICANA DE SOCIEDADES DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA

Junio de 2011, Número 26, páginas 207-208
ISSN: 1815-0640

UNIÓN
REVISTA IBEROAMERICANA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA

Convocatoria para la Dirección de Unión

La dirección de la revista UNION, que avala y nombra la Junta de Gobierno de la Federación Iberoamericana de Sociedades de Educación Matemática (FISEM), ha de convocarse cada tres años.

La actual dirección cumple su mandato en diciembre de 2011, por lo que se realiza la convocatoria de candidaturas para la dirección de la revista UNIÓN editada por la Federación Iberoamericana de Sociedades de Profesores de Matemáticas para el periodo 2012-2014.

Los profesores o profesoras interesados en participar en esta convocatoria deberán enviar una solicitud a la Secretaría General de la FISEM antes del 30 de septiembre de 2011.

El procedimiento y los documentos que deben presentarse son los siguientes:

• Solicitud dirigida al Presidente de la FISEM en la que consten al menos estos datos: nombre completo, domicilio, Sociedad federada a la que pertenece, e-mail, situación profesional y lugar de trabajo.

• Certificado del Secretario de su Sociedad en el que conste su condición de socio activo así como su antigüedad como tal que debe ser superior o igual a cinco años.

• Una memoria de un máximo de tres folios en la que exponga la orientación que desea dar a la revista así como las secciones fijas que va a crear y otros datos que aclaren la línea que tiene previsto aplicar.

• Currículum vítae.

Las solicitudes y la documentación se enviarán por correo postal al Presidente de la FISEM a la siguiente dirección:

> Arturo Mena
> Secretario General
> Pontificia Universidad Católica de Valparaíso
> Casilla 4059. Valparaíso.
> Chile.

El solicitante comunicará al siguiente e-mail el envío de la documentación: sg@fisem.org

Todas las solicitudes recibidas serán posteriormente enviadas a la Junta de Gobierno de la FISEM para que decida cuál es la candidatura que presenta el programa más adecuado a los fines de la Federación.

UNIÓN
REVISTA IBEROAMERICANA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA

Junio de 2011, Número 26, páginas 209-212
ISSN: 1815-0640

Convocatorias y eventos

AÑO 2011

15 JORNADAS PARA EL APRENDIZAJE Y ENSEÑANZA DE LA MATEMÁTICA.
Convoca: Federación Española de Sociedades de Profesores de Matemática.
Lugar: Gijón. España.
Fecha: 3 al 6 de julio de 2011.
Información: **http://www.15jaem.org**

Convoca: Comité Latinoamericano de Matemática Educativa y la Universidad "Ignacio Agramonte y Loynaz"
Fecha: 11 al 15 de julio
Lugar: Camagüey, Cuba.
Información: **www.clame.org.mx**
www.relme25.reduc.edu.cu

Convoca: Sociedad Colombiana de Matemática.
Lugar: Bucaramanga, Colombia.
Fecha: 11 al 15 de julio de 2011.
Información: **http://matematicas.uis.edu.co/ccm2011**

Convoca: Universidad de Antofagasta, Chile.
Lugar: Antofagasta, Chile.
Fecha: 3 al 5 de agosto de 2011.
Información: **www.uantof.cl/comca2011**

FHUC | UNL FACULTAD DE HUMANIDADES Y CIENCIAS UNIVERSIDAD NACIONAL DEL LITORAL

IV JORNADAS DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA
I JORNADAS EN INVESTIGACIÓN EN EDUCACIÓN MATEMÁTICA

Organiza: Facultad de Humanidades y Ciencias. Universidad Nacional del Litoral.
Lugar: Ciudad Universitaria. Santa Fe. Argentina.
Fecha: 11 y 12 de agosto de 2011
Información: **www.fhuc.unl.edu.ar/extension/Jornadas/circulares2011**

11th International Conference of The Mathematics Education into the 21st Century Project

Grahamstown, Sudáfrica, 10 al 16 de setiembre.

Organiza: Sociedad de Educación Matemática Uruguaya.
Lugar: Montevideo, Uruguay.
Fecha: 19 y 20 de septiembre de 2011
Información: **www.semur.edu.uy**

REUNION ANUAL DE LA UNION MATEMATICA ARGENTINA
Lugar**:** Tucumán. Argentina.
Convoca**:** Unión Matemática Argentina (UMA) y Universidad Nacional de Tucumán.
Fecha: 20 al 23 de septiembre de 2011.
Información: **www.union-matematica.org.ar**

XV Simposio de la Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática

Convoca: Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática
Organiza: Universidad Castilla la Mancha.
Lugar: Ciudad Real Castilla la Mancha, España.
Fecha: 7 al 11 de octubre de 2011
Información: **www.seiem.es**

Convoca: Sociedad de Matemática de Chile
Lugar: Termas El Corazón.
Fecha: 3 al 5 de noviembre de 2011
Información: **http://encuentro2011.somachi.cl/descripcion.html**

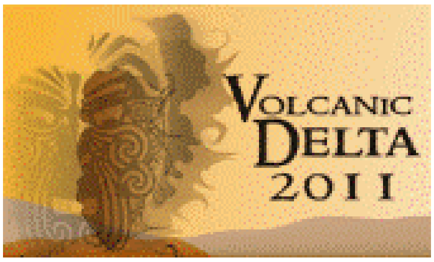
II Encuentro Nacional de Enseñanza de la Matemática. (II ENEM)

I Congreso Internacional de Enseñanza de las Ciencias y la Matemática. (I CIECyM)

Lugar: Tandil. Provincia de Buenos Aires. Argentina.
Organizan: Departamento de Formación Docente. Facultad de Ciencias Exactas. Universidad Nacional del Centro de la Provincia de Buenos Aires.
Fecha: 8 al 11 de noviembre de 2011.
Información: **iienem@exa.unicen.edu.ar**

Conferencia de GeoGebra-Latin America 2010. Brasil

Lugar: San Pablo. Brasil
Fecha: 12 al 15 de noviembre de 2011.
Información: **http://www.geogebra.org/cms/en/events**



Lugar: Rotorua, Nueva Zelanda.
Fecha: 27 de noviembre al 2 de diciembre de 2011.
Información: **www.delta2011.co.nz**

AÑO 2013

En septiembre en Uruguay

VII CIBEM
VII CONGRESO IBEROAMERICANO
DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA

www.cibem7.semur.edu.uy

UNIÓN
REVISTA IBEROAMERICANA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA

Junio de 2011, Número 26, página 213-214
ISSN: 1815-0640

Normas para publicar en Unión

1. Los trabajos para publicar se deben enviar a **union.fisem@sinewton.org** con copia a **revistaunion@gmail.com**. Deben ser originales y no estar en proceso de publicación en ninguna otra revista. Los artículos recibidos serán sometidos a un proceso de evaluación, en función de los resultados de la misma el Comité Editorial decidirá que el trabajo se publique, con modificaciones o sin ellas, o que no se publique.
2. Los artículos remitidos para publicación deben ser escritos en Word, preferentemente usando la plantilla establecida al efecto (descargar plantilla) y, en todo caso, cumpliendo las siguientes normas: letra tipo **arial**, tamaño **12 puntos**, interlineado simple, los cuatro márgenes de 2,5 cm., tamaño DIN A-4. La extensión no debe ser superior a las 25 páginas, incluyendo figuras, que deben estar situadas en el lugar del texto donde deben ser publicadas. La simbología matemática necesaria deberá ser escrita con el editor de ecuaciones de Word, se insertará como una imagen o se realizarán utilizando los símbolos disponibles en el juego de caracteres “Arial”. Es importante no cambiar el juego de caracteres, especialmente **evitar el uso del tipo “Symbol”** u otros similares.
3. Las **ilustraciones y fotografías** deben estar situadas en el lugar del texto donde deben ser publicadas. Si es posible, los “pie de foto” se escribirán dentro de un “cuadro de texto” de Word (con o sin bordes) que estará “agrupado” con la imagen de referencia. Se deben numerar usando: **Fig. 1, Fig. 2,… Tabla 1, Tabla 2,…(Arial, negrita, tamaño 10)**
4. El artículo debe tener un **resumen en español, en portugués y en inglés**, cada uno de los cuales tendrá una longitud máxima de 10 líneas.
5. Teniendo en cuenta el carácter internacional de la revista, se hace indispensable que cuando los autores se refieran a un determinado sistema educativo nacional lo hagan constar expresamente y que siempre que se trate de un nivel educativo se indique la edad normal de los alumnos, lo que permitirá la comparación con el sistema educativo nacional del lector.
6. Los datos de identificación de los autores deben figurar solamente en la última página con el fin de garantizar el anonimato en el proceso de evaluación, deben constar los siguientes datos:
   - **De contacto**: nombre, dirección electrónica, dirección postal, teléfono.
   - **Para la publicación**: título o títulos, institución o instituciones a las que pertenece, lugar de residencia, títulos, publicaciones, así como una breve reseña biográfica de no más de ocho líneas.
7. Las referencias bibliográficas se incluirán al final del trabajo (y antes de la hoja de datos de autor) y deben seguir los formatos que se indican a continuación:

Para libro:
Bourbaki, N. (1972). *Elementos de historia de las matemáticas*. Madrid: Alianza.

Para capítulo de libro, actas de congreso o similar:

Fuson, K. (1992). Research on whole number addition and subtraction. En Grouws, D. (ed.) *Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning*, 243-275. MacMillan Publishing Company: New York.

Para artículo de revista:

Otte, M. (2003). Complementarity, sets and numbers. *Educational Studies in Mathematics*, 53, 203–228.

Para artículo de revista electrónica o información en Internet:

Guzmán Retamal, I. (2009). *Actividades Geométricas en la enseñanza. Análisis desde el punto de vista cognitivo.* UNIÓN [en línea], 19. Recuperado el 15 de octubre de 2009, de http://www.fisem.org/paginas/union/revista.php

Las referencias bibliográficas dentro del texto deben señalarse indicando, entre paréntesis, el autor, año de la publicación y página o páginas, por ejemplo (Godino, 1991, p. 14-18)

NOTA: Las normas que se indican en los puntos 2, 3 y 7 pretenden dar uniformidad en la redacción a los trabajos recibidos y simplificar así el trabajo de composición y maquetación de la revista. Si alguien tiene dudas sobre su aplicación, puede dirigir sus preguntas (lo más concretas posible) a revistaunion@gmail.com