UNIÓN
REVISTA IBEROAMERICANA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA
NÚMERO 35 – SEPTIEMBRE DE 2013

ÍNDICE

CRÉDITOS — Pág. 3
EDITORIAL — Pág. 5

FIRMA INVITADA: CLAUDIA LISETE OLIVEIRA GROENWALD

BREVE RESEÑA — Pág. 7
PLATAFORMA DE ENSINO SIENA: REFLETINDO SOBRE A UTILIZAÇÃO DAS TIC NO PROCESSO DE ENSINO E APRENDIZAGEM — Pág. 9

ARTÍCULOS

CONTRIBUIÇÕES DE UMA SEQUÊNCIA DE ENSINO PARA O PROCESSO DE ENSINO E APRENDIZAGEM DE GRÁFICOS E TABELAS SEGUNDO PRESSUPOSTOS DA CONTEXTUALIZAÇÃO
DANIELI WALICHINSKI; GUATAÇARA DOS SANTOS JUNIOR — Pág. 19

GENERALIZACIONES DEL CONCEPTO DE MÉTRICA
OTILIO B. MEDEROS ANOCETO, RITA A. ROLDÁN INGUANZO — Pág. 43

DESARROLLO DE COMPETENCIA MATEMÁTICA EN LA EDUCACIÓN SECUNDARIA DESDE LA PERCEPCIÓN DE ESTUDIANTES Y PROFESORES DEL CURSO MATEMÁTICA ELEMENTAL DE LA UNIVERSIDAD DE COSTA RICA
FLORIA ARIAS TENCIO, KATTIA RODRÍGUEZ RAMÍREZ — Pág. 59

EL LENGUAJE DE PROBABILIDAD EN LOS LIBROS DE TEXTO DE EDUCACIÓN PRIMARIA
EMILSE GÓMEZ TORRES, JUAN JESÚS ORTIZ DE HARO, CARMEN BATANERO, JOSÉ MIGUEL CONTRERAS — Pág. 75

ATRIBUCIONES DE AFECTIVIDAD HACIA LAS MATEMÁTICAS
SANTIAGO HIDALGO; ANA MAROTO; TOMÁS ORTEGA; ANDRÉS PALACIOS — Pág. 93

SECCIONES FIJAS

DINAMIZACIÓN MATEMÁTICA: ACTIVIDADES DE APRENDIZAJE USANDO ELIPSÓGRAFOS PARA APOYAR EL PROCESO DE DEMOSTRACIÓN EN GEOMETRÍA ANALÍTICA
JOSÉ CARLOS CORTÉS ZAVALA, GRACIELA E. NÚÑEZ PALENIUS, CHRISTIAN MORALES ONTIVEROS — Pág. 115

EL RINCÓN DE LOS PROBLEMAS: NUEVOS HORIZONTES MATEMÁTICOS MEDIANTE VARIACIONES DE UN PROBLEMA
ULDARICO MALASPINA JURADO — Pág. 135

TIC: UM ESTUDO SOBRE A INFLUÊNCIA DO SOFTWARE GEOGEBRA NA ELABORAÇÃO DAS DEMONSTRAÇÕES GEOMÉTRICAS
CELINE MARIA PAULEK, MICHELE REGIANE DIAS VERONEZ — Pág. 145

IDEAS PARA ENSEÑAR: EL CONTRAEJEMPLO COMO RECURSO DIDÁCTICO EN LA ENSEÑANZA DEL CÁLCULO
ORLANDO GARCÍA MARIMÓN, LUISA MORALES — PÁG. 161

HISTORIA SOCIAL DE LA EDUCACIÓN MATEMÁTICA EN IBEROAMÉRICA: LAS ECUACIONES LINEALES EN LOS LIBROS DE TEXTO DE MATEMÁTICA PARA EDUCACIÓN BÁSICA EN VENEZUELA 1987-2007
EVELYN PINTO, FREDY GONZÁLEZ — Pág. 177

LIBROS: GENTE EN OBRA. HISTORIA INTERACTIVA DE LOS ORÍGENES DE LA MATEMÁTICA
MARIO DALCÍN, MÓNICA OLAVE — Pág. 203

EDUCACIÓN EN LA RED: VIRTUAL REPOSITORY CONTAINING INTERACTIVE EXPERIMENTS FOR STATISTICS EDUCATION — Pág. 205

INFORMACIÓN

FUNDACIÓN CANARIA CARLOS SALVADOR Y BEATRIZ — Pág. 207
VII CIBEM: RESEÑA — Pág. 215
CONVOCATORIAS Y EVENTOS — Pág. 217
INSTRUCCIONES PARA PUBLICAR EN UNION — Pág. 221

REVISTA IBEROAMERICANA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA

www.fisem.org/web/union

ISSN: 1815-0640
Número 35. Septiembre de 2013
páginas 3-4

Unión. Revista Iberoamericana de Educación Matemática es una publicación de la Federación Iberoamericana de Sociedades de Educación Matemática **(FISEM)**. Tiene una periodicidad trimestral, de modo que se publican cuatro números al año, en los meses de marzo, junio, septiembre y diciembre. Es recensionada en ***Mathematics Education Database*** y está incluida en el catálogo ***Latindex***.

Evaluadores

Pilar Acosta Sosa
María Mercedes Aravena Díaz
Lorenzo J Blanco Nieto
Alicia Bruno
Natael Cabral
María Luz Callejo de la Vega
Matías Camacho Machín
Agustín Carrillo de Albornoz
Silvia Caronia
Eva Cid Castro
Carlos Correia de Sá
Cecilia Rita Crespo Crespo
Miguel Chaquiam
María Mercedes Colombo
Patricia Detzel
Dolores de la Coba
José Ángel Dorta Díaz
Rafael Escolano Vizcarra
Isabel Escudero Pérez
María Candelaria Espinel Febles
Alicia Fort
Carmen Galván Fernández
María Carmen García González
María Mercedes García Blanco
José María Gavilán Izquierdo
Margarita González Hernández
María Soledad González
Nelson Hein
Josefa Hernández Domínguez
Rosa Martinez
José Manuel Matos
José Muñoz Santonja
Raimundo Ángel Olfos Ayarza
Luiz Otavio.
Manuel Pazos Crespo
María Carmen Peñalva Martínez
Inés del Carmen Plasencia
María Encarnación Reyes Iglesias
Natahali Martín Rodríguez
María Elena Ruiz
Victoria Sánchez García
Leonor Santos
Maria de Lurdes Serrazina
Martín M. Socas Robayna
María Dolores Suescun Batista
Ana Tadea Aragón
Mónica Ester Villarreal
Antonino Viviano Di Stefano

Diseño y maquetación

Diseño web: Daniel García Asensio

Logotipo de Unión: Eudaldo Lorenzo

Colaboran

CARLOS SALVADOR Y BEATRIZ FUNDACIÓN CANARIA

OEI

UNIÓN
REVISTA IBEROAMERICANA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA
www.fisem.org/web/union

ISSN: 1815-0640
Número 35. Septiembre de 2013
páginas 5-6

Editorial

"Saber no es suficiente, debemos aplicar.
Desear no es suficiente, debemos hacer"
Johann W. Von Goethe (1749-1832)

Estimados colegas y amigos*:*

Nuevamente nos encontramos con ustedes, otra edición de UNION para compartir con los colegas de muchos países, porque además de los docentes de los 15 que integran la Federación Iberoamericana de Sociedades de Educación Matemática (FISEM) contamos con varios autores de artículos y lectores de otros países en las distintas ocasiones.

En este número, la firma invitada es la Dra. Claudia Lisete Oliveiro Groenwald, catedrática de la Universidad Luterana de Brasil, quién aceptó que publicáramos la conferencia que presentó en el VII Congreso Iberoamericano de Educación Matemática (VII CIBEM), que es el evento más importante que organiza la FISEM y en esta oportunidad fue realizado en la ciudad de Montevideo hace apenas unos días. Debemos agradecer a los anfitriones, los integrantes de la Sociedad Uruguaya de Educación Matemática, que hicieron que disfrutemos de este acontecimiento, que nos permitió compartir las actividades que cada uno de nosotros realiza en sus espacios laborales.

En los restantes artículos se presentan diversas temáticas, entre otras, competencias, probabilidades, afectividad hacia la matemática. Además se presentan interesantes trabajos en las secciones fijas, entre ellas, actividades de aprendizaje utilizando elipsógrafo, el contraejemplo como recurso didáctico, uso del software GeoGebra para las demostraciones

En la sección de información se pueden encontrar algunas de las obras que hace la Fundación Canaria Carlos Salvador y Beatriz para colaborar con la educación de niños carenciados de distintos lugares.

Por último, nos despedimos agradeciendo a todos aquellos que colaboran para que UNION sea posible, sabemos que sin el aporte de ellos este proyecto no sería viable.

Un abrazo fraternal.

Norma S. Cotic – Teresa C. Braicovich.
Directoras

Editorial

"Saber não é suficiente, devemos aplicar.
Desejar não é suficiente, devemos fazer"
Johann W. Von Goethe (1749-1832)

Estimados colegas e amigos:

Novamente encontramos-nos com vocês, outra edição de UNION para compartilhar com os colegas de muitos países, porque além dos docentes dos 15 que integram a Federação Iberoamericana de Sociedades de Educação Matemática (FISEM) contamos com vários autores de artigos e leitores de outros países nas diferentes ocasiões.

Neste número, a assinatura convidada é a Dra. Claudia Lisete Oliveiro Groenwald, catedrática da Universidade Luterana de Brasil, quem aceitou que publicássemos a conferência que apresentou em VII Congresso Iberoamericano de Educação Matemática (VII CIBEM), que é o evento mais importante que organiza a FISEM e nesta oportunidade foi realizado na cidade de Montevideo faz mal uns dias. Devemos agradecer aos anfitriões, os integrantes da Sociedade Uruguaia de Educação Matemática, que fizeram que desfrutemos deste acontecimento, que nos permitiu compartilhar as actividades que a cada um de nós realiza em seus espaços trabalhistas.

Nos restantes artigos apresentam-se diversas temáticas, entre outras, concorrências, probabilidades, afectividade para a matemática. Ademais apresentam-se interessantes trabalhos nas secções fixas, entre elas, actividades de aprendizagem utilizando elipsógrafo, o contraejemplo como recurso didáctico, uso do software GeoGebra para as demonstrações.

Na secção de informação podem-se encontrar algumas das obras que faz a Fundação Canaria Carlos Salvador e Beatriz para colaborar com a educação de meninos carenciados de diferentes lugares.

Por último, despedimos-nos agradecendo a todos aqueles que colaboram para que UNION seja possível, sabemos que sem o contribua deles este projecto não seria viável.

Um abraço fraternal.

Norma S. Cotic – Teresa C. Braicovich.
Directoras

ISSN: 1815-0640
Número 35. Septiembre de 2013
página 7

Firma Invitada: Claudia Lisete Oliveira Groenwald

Breve Reseña

Possui graduação em Matemática pela Universidade do Vale do Rio dos Sinos, Especialização em Matemática pela Universidade do Vale do Rio do Sinos (UNISINOS), doutorado em Ciências da Educação pela Universidade Pontifícia de Salamanca, Espanha, título reconhecido pela Universidade de São Paulo (USP). Pós-doutorado pela Universidade de La Laguna na Espanha.

Atualmente é professora titular da Universidade Luterana do Brasil (ULBRA).

Atua no curso de Matemática Licenciatura e como coordenadora do Programa de Pós Graduação em Ensino de Ciências e Matemática da Universidade Luterana o Brasil (ULBRA), em mestrado e doutorado também.

Foi diretora da Sociedade Brasileira de Educação Matemática do Rio Grande do Sul (SBEMRS) por duas gestões.

Atualmente é Secretária do Comité Interamericano de Educação Matemática (CIAEM).

Tem experiência na área de Matemática, com ênfase na formação de professores, atuando principalmente nos seguintes temas: Educação Matemática, Currículo de Matemática, Tecnologias da Informação e Comunicação, Formação Continuada e Ensino e Aprendizagem.

E-mail: claudiag@ulbra.br ou claudiag1959@yahoo.com.br

UNIÓN
REVISTA IBEROAMERICANA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA
www.fisem.org/web/union

ISSN: 1815-0640
Número 35. Septiembre de 2013
páginas 9-18

Plataforma de Ensino Siena: refletindo sobre a utilização das TIC no processo de ensino e aprendizagem

Firma Invitada: Claudia Lisete Oliveiro Groenwald

Conferencia dictada en el VII Congreso Iberoamericano de Educación Matemática. Septiembre 2013. Montevideo, Uruguay

Resumo	Apresenta-se um recorte da pesquisa Inovando o Currículo de Matemática através da Incorporação das Tecnologias, do Grupo de Estudos Curriculares de Educação Matemática, da Universidade Luterana do Brasil, em convênio com o Grupo de Tecnologias Educativas, da Universidade de La Laguna, Espanha. O convênio apresenta como um dos resultados o desenvolvimento do Sistema Integrado de Ensino e Aprendizagem (SIENA), que é um sistema inteligente para apoio ao desenvolvimento do processo de ensino e aprendizagem de um conteúdo qualquer. O SIENA foi desenvolvido através de uma variação dos tradicionais mapas conceituais permitindo a planificação do ensino e da aprendizagem de um tema específico. **Palabras clave**: Educação Matemática. SIENA. Tecnologias da Informação e Comunicação.
Abstract	We present a larger survey of Mathematics Curriculum Innovating through the Incorporation of Technology, Group Mathematics Education Curriculum Studies of the Lutheran University of Brazil, in partnership with the Educational Technologies Group, University of La Laguna, Spain. The agreement comes as one of the results of the Integrated Development of Teaching and Learning (SIENA), which is an intelligent system to support the development of teaching and learning process of different content. SIENA was developed through a variation on traditional planning concept maps allowing the teaching and learning of a specific subject. **Keywords**: Mathematics Education, SIENA, Information and Communication Technologies
Resumen	Se presenta un recorte de la investigación Innovando el Currículo de Matemática a través de la Incorporación de las Tecnologías, del Grupo de Estudios Curriculares de Educación Matemática, de la Universidad Luterana de Brasil, en convenio con el Grupo de Tecnologías Educativas, de la Universidad de La Laguna, España. El convenio presenta como uno de los resultados el desarrollo del Sistema Integrado de Enseñanza y Aprendizaje (SIENA), que es un sistema inteligente para apoyar el desarrollo del proceso de enseñanza y aprendizaje de distintos contenidos. SIENA fue desarrollado a través de una variación de los tradicionales mapas conceptuales permitiendo la planificación de la enseñanza y del aprendizaje de un tema específico. **Palavras-chave** Educación matemática, SIENA, Teconologías de información y comunicación.

1. Introducción

Esta conferência apresentará um recorte da pesquisa *Inovando o Currículo de Matemática através da Incorporação das Novas Tecnologias,* do Grupo de Estudos Curriculares de Educação Matemática (GECEM), da Universidade Luterana do Brasil (ULBRA), em Canoas, Brasil, em convênio com o Grupo de Tecnologias Educativas, da Universidade de La Laguna (ULL), em Tenerife, Espanha. O referido convênio de colaboração científica apresenta como um dos resultados o desenvolvimento do Sistema Integrado de Ensino e Aprendizagem (SIENA), que é um sistema inteligente para apoio ao desenvolvimento do processo de ensino e aprendizagem de um conteúdo qualquer.

Segundo Grossi (2008 apud Groenwald et al, 2009) os educadores têm como desafio, descobrir maneiras diferentes de ensinar a mesma coisa, pois os estudantes têm ritmos e históricos variados, além disso, o sistema educacional, historicamente, é projetado igualmente para todos os estudantes, de forma que o aluno deve adaptar-se em um contexto educacional definido. Para este autor, o professor além de questionar a abordagem do conteúdo, deve despertar a curiosidade do educando e demonstrar sua utilização em diferentes situações da vida real. Assim um dos desafios que os professores encontram, em sala de aula, é a identificação das dificuldades individuais dos alunos.

Nesse sentido, o uso de recursos informáticos pode influenciar beneficamente quando utilizados como suporte ao trabalho docente, contribuindo na agilização das tarefas dos mesmos, como fonte de informação do conhecimento real dos alunos, ou na utilização de sistemas inteligentes que auxiliem o professor na sua docência (Groenwald e Moreno, 2006).

Kampff et al. (2004), afirmam que em uma sociedade de bases tecnológicas, com mudanças contínuas, não é mais possível desprezar o potencial pedagógico que as Tecnologias de Informação e Comunicação (TIC) apresentam quando incorporadas à educação. Assim, o computador é um instrumento pertinente no processo de ensino e aprendizagem, cabendo à escola utilizá-lo de forma coerente com uma proposta pedagógica atual e comprometida com uma aprendizagem significativa.

Nesta perspectiva, o Sistema Integrado de Ensino e Aprendizagem (SIENA) organizado pelo grupo de Tecnologias Educativas da ULL juntamente com o GECEM, da ULBRA, é um sistema inteligente que conforme Groenwald e Moreno (2006, p.26) é:

> capaz de comunicar informações sobre o conhecimento dos alunos em determinado tema, tem o objetivo de auxiliar no processo de recuperação de conteúdos matemáticos, utilizando a combinação de mapas conceituais e testes adaptativos.

Ainda segundo Groenwald e Moreno (2006), este sistema irá permitir ao professor uma análise do nível de conhecimentos prévios de cada aluno, e possibilitará um planejamento de ensino de acordo com a realidade dos alunos podendo proporcionar uma aprendizagem significativa.

O processo informático permite gerar um mapa individualizado das dificuldades dos alunos, o qual estará ligado a um hipertexto, que servirá para recuperar as dificuldades que cada aluno apresenta no conteúdo desenvolvido, auxiliando no processo de avaliação.

2. SIENA. Sistema Integrado de Ensino e Aprendizagem

O SIENA foi desenvolvido através de uma variação dos tradicionais mapas conceituais, sendo denominado de Grafo Instrucional Conceitual Pedagógico - PCIG (*Pedagogical Concept Instructional Graph*), que permite a planificação do ensino e da aprendizagem de um tema específico. O PCIG não ordena os conceitos segundo relações arbitrárias, os conceitos são colocados de acordo com a ordem lógica em que devem ser apresentados ao aluno. Portanto, o PCIG deve ser desenvolvido segundo relações do tipo "o conceito A deve ser ensinado antes do conceito B", começando pelos nodos dos conceitos prévios, seguindo para os conceitos fundamentais, até atingir os nodos objetivos.

O grafo está ligado a um teste adaptativo que gera o mapa individualizado das dificuldades do estudante. Cada nodo do grafo contém uma sequência didática para conceito avaliado no teste, conforme a figura 1.

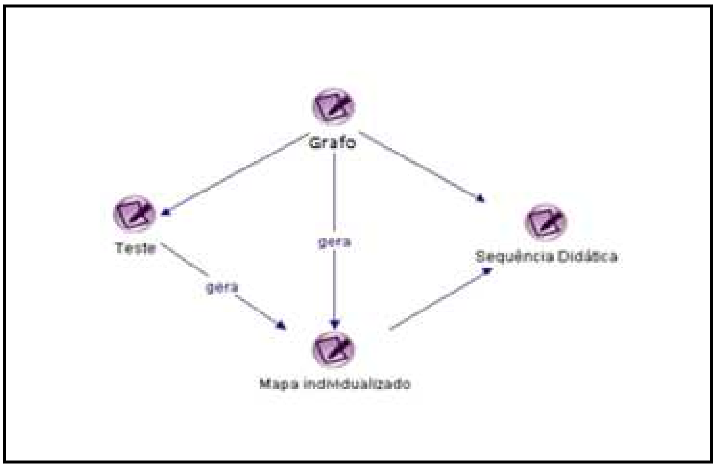


Figura 1. Esquema do Sistema SIENA
Fonte: SIENA

Um Teste Adaptativo Informatizado (TAI) é administrado pelo computador, que procura ajustar as questões do teste ao nível de habilidade do aluno. Segundo Costa (2009) um TAI procura encontrar um teste ótimo para cada estudante, para isso, a proficiência do indivíduo é estimada interativamente durante a administração do teste e, assim, só são selecionados os itens que mensurem eficientemente a proficiência do examinado. O teste adaptativo tem por finalidade administrar questões de um banco de questões previamente calibradas, que correspondam ao nível de capacidade do examinando. Como cada questão apresentada a um indivíduo é adequada à sua habilidade, nenhuma questão do teste é irrelevante (Sands & Waters, 1997).

Ao contrário dos testes de papel e caneta, cada estudante recebe um teste com questões diferentes e tamanhos variados, produzindo uma medição mais precisa da proficiência e com uma redução, do tamanho do teste, em torno de 50% (Wainer, 2000).

No SIENA o teste adaptativo é realizado em cada nodo do grafo o qual está baseado nas Redes Bayesianas (Bayes) devendo ser cadastradas perguntas que irão compor o banco de questões dos mesmos, com o objetivo de avaliar o grau de conhecimento que o aluno possui de cada conceito. As perguntas são de múltiplas escolhas, classificadas em três ou mais níveis de dificuldades (fáceis, médias e difíceis), sendo necessário definir, para cada pergunta: o grau de sua relação com o conceito; o grau de sua dificuldade; a resposta verdadeira; a possibilidade de responder a pergunta considerando exclusivamente sorte ou azar; a estimativa do conhecimento prévio do aluno sobre esse conceito; tempo de resposta (em segundos) para o aluno responder à pergunta. O teste adaptativo estima o grau de conhecimento do aluno para cada conceito, de acordo com as respostas do estudante. Para isso o teste adaptativo vai lançando perguntas aleatórias ao aluno, com um nível de dificuldade de acordo com as respostas do estudante, se o aluno vai respondendo corretamente, o sistema vai aumentando o grau de dificuldade das perguntas, e ao contrário, se a partir de determinado momento o aluno não responde corretamente, o sistema diminui o nível de dificuldade da pergunta seguinte. A próxima pergunta é escolhida entre as questões restantes, cadastradas no nodo, é aquela que maximiza uma função objetivo (f):

$$A = \frac{[\text{M x (dificuldade} - \text{dificuldade da pergunta já respondida) x valor que já possui)}}{[\text{dificuldade x valor} + (1 - \text{valor) x adivinhança}]}$$

Onde:

M = 1 se a questão é correta e -1 se a questão foi respondida incorretamente.

A = 1- A, se A > 0

f = 0,5 x A + 0,5 x relação com o nodo.

A ferramenta informática parte dos conceitos prévios, definidos no grafo, e começa a avaliá-los, progredindo sempre que o aluno consegue uma nota superior ao estipulado, pelo professor, no teste. Quando um conceito não é superado o sistema não prossegue avaliando por esse ramo de conceitos do grafo, pois se entende que esse é necessário para a compreensão do seguinte, abrindo para o estudante a possibilidade de realizar a sua recuperação. É importante dizer que o sistema poderá prosseguir por outras ramificações do grafo.

O desempenho do aluno é calculado a partir da fórmula de Bayes:

$$\frac{D \times P}{D \times P + (1\text{-}P) \times L},$$

que liga o conhecimento a posteriori depois de responder uma pergunta) com o conhecimento a priori (antes de responder a pergunta) e os parâmetros já mencionados de dificuldade e adivinhança, onde: D é a dificuldade da pergunta; L é o nível de adivinhação da pergunta; P é a nota da pergunta anterior. O sistema dispõe de um mecanismo de parada, quando já não pode obter uma maior estimativa sobre ao grau de conhecimento de um conceito, ou quando não existam mais perguntas no banco de questões.

O sistema mostrará, através do seu banco de dados, quais foram as perguntas realizadas, quais foram respondidas corretamente e qual a estimativa sobre o grau de conhecimento de cada conceito, conforme o exemplo apresentado na figura seguinte:

Acabado: true

Nota: 0.281

Respuesta	Respuesta correcta	Tiempo(antes de que se acabo)	Pregunta	Puntos antes
1	true	49	Qual é o número que está representado no ábaco?	0.200
1	true	49	Qual é o número que está representado no ábaco?	0.238
4	false	231	Se agruparmos sessenta e cinco unidades em grupos de dez, teremos ao todo?	0.281
2	false	128	Que número está representado no QVL?	0.281
2	false	128	Que número está representado no QVL?	0.281
4	false	130	Qual o número representado no ábaco?	0.281

Atrás

Figura 2. Exemplo do banco de dados de um teste adaptativo de um nodo
Fonte: SIENA.

O sistema possui duas opções de uso: a primeira serve para o aluno estudar os conteúdos dos nodos do PCIG e realizar o teste, para verificar quais são seus conhecimentos sobre determinados conteúdos; a segunda opção oportuniza, ao aluno, realizar o teste e estudar os conceitos nos quais apresentou dificuldades, sendo possível uma recuperação individualizada dos conteúdos nos quais não conseguiu superar a média estipulada como necessária para avançar. Todos os nodos do PCIG estão ligados a uma sequência didática que possibilita ao aluno estudar os conceitos ou realizar a recuperação dos nodos em que apresenta dificuldades.

3. Experimento de Ensino

Relata-se um experimento com a aplicação das atividades desenvolvidas em uma escola municipal de Sapucaia do Sul/RS, com 10 alunos do 9º ano do Ensino Fundamental, com média de idade de 14 anos. Com 5 encontros de 2 horas aulas, totalizando 10 horas aula, em horário extraclasse. O tema escolhido foi "Estatística e Meio Ambiente", conforme recomendação dos PCN (BRASIL, 1997) e que não estava sendo trabalhado com os alunos dessa escola.

O objetivo foi o de desenvolver uma sequência didática com os conceitos iniciais de Estatística, com atividades ligadas ao tema transversal Meio Ambiente, utilizando o laboratório de informática da escola.

O cenário de investigação do experimento, na plataforma SIENA, foi desenvolvido com as seguintes ações:

- grafo dos conceitos a ser trabalhado com Estatística, composto por 5 nodos onde estão incluídos os conceitos de introdução à Estatística, Tabelas, Gráficos, Medidas de Tendência Central e Resolução de problemas, conforme a figura 3;
- teste adaptativo para cada nodo do grafo, no qual foram desenvolvidas 30 questões para cada nodo do grafo, sendo 10 fáceis, 10 médias e 10 difíceis;
- sequência didática para cada nodo do grafo, utilizando como base as orientações estabelecidas nos Parâmetros Curriculares Nacionais (BRASIL, 1997), referentes ao tema.

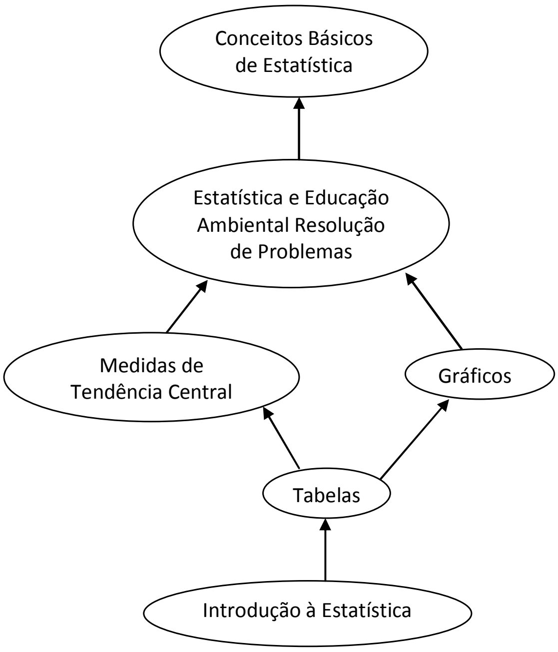


Figura 3. Grafo com os conceitos de Estatística
Fonte: SIENA

A seguir, na figura 4, apresenta-se três questões dos testes, uma questão fácil, uma média e uma difícil do nodo de "Introdução a Estatística".

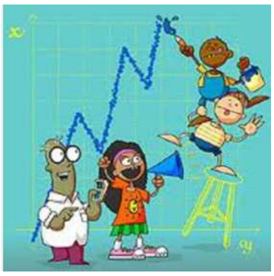
Questão de nível fácil	Questão de nivel medio	Questão de nível difícil
 Assinale a alternativa que contém os objetivos da Estatística: a) Resumir dados para realizar pesquisas. b) Apenas interpretar dados. c) Obter, organizar e analisar dados, determinar as correlações que apresentam. d) Apenas coletar dados. e) Criar tabelas e gráficos.	 Ficha de Estudo Nome do animal: Sexo: Idade: Altura: Peso: Mês da Observação:  Pesquisadores do Instituto Amigos do Urso têm estudado o desenvolvimento de ursos marrons selvagens que vivem em uma certa floresta do Canadá. O objetivo do projeto é estudar algumas características dos ursos. A ficha de coleta de dados representada na figura mostra as características estudadas. De acordo com os dados da ficha de estudos, podemos classificar como variáveis qualitativas: a) Idade e altura b) Sexo e peso c) Altura e peso d) Sexo e mês de observação e) Mês da observação e peso	 A Usina Termoelétrica de Candiota II despeja na atmosfera, diariamente, cerca de 45 toneladas de enxofre. Cada 100 toneladas de carvão que são queimadas para a geração de energia elétrica, produzem uma tonelada de enxofre. Assinale a alternativa que contém o tipo de Estatística utilizado nesta informação: a) Estatística da População b) Estatística da Amostra c) Estatística Descritiva d) Estatística Inferencial e) Estatística Grupal

Figura 4. Exemplos de questões do teste Introdução aos conceitos de Estatística
Fonte: SIENA

Nas sequências didáticas foram utilizados os seguintes recursos informáticos:

- Editor de apresentação gráfica (o editor utilizado nas sequências didáticas foi o Power Point da Microsoft, salvo em HTML);
- Atividades lúdicas desenvolvidas no aplicativo JClic[1];
- Jogos online;
- Sites informativos.

Em cada nodo do grafo há uma porta de entrada, com os *links* de cada atividade, que permite aos alunos estudarem conforme suas preferências, ou seguirem a ordem indicada, conforme se apresenta na figura 5, com os conceitos de Gráficos.

Figura 5. Porta de entrada de gráficos
Fonte: SIENA

A figura 6 mostra a apresentação, em HTML, do conceito de Tabelas.

[1] JClic é um programa para a criação, realização e avaliação de atividades educativas multimídia, desenvolvido na plataforma Java, estas atividades podem ser textuais ou utilizar recursos gráficos, podendo incorporar também sons, animações ou sequências de vídeos digitais, esse *software* permite criar projetos que são formados por um conjunto de atividades com uma determinada sequência, que indica a ordem em que irão ser mostradas.

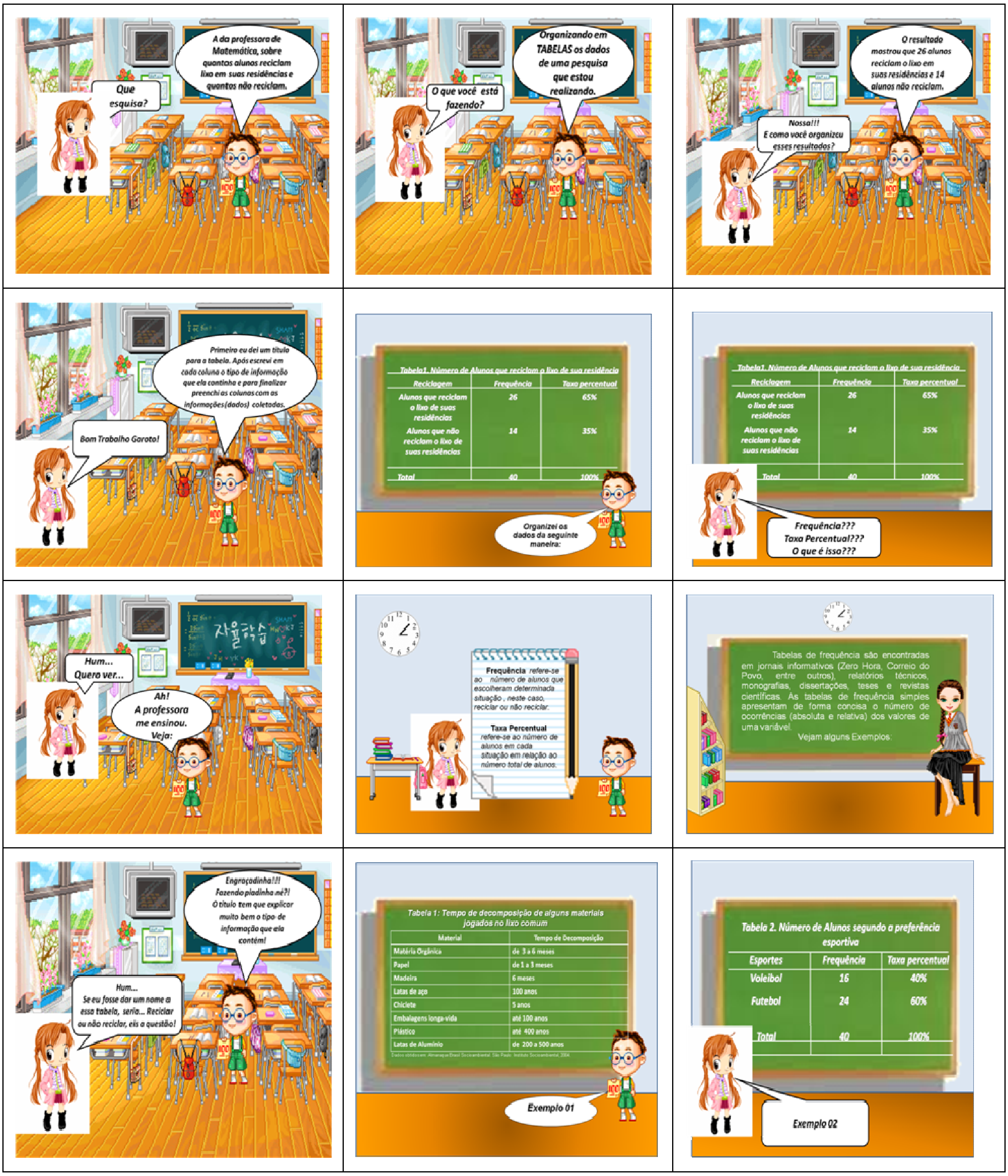


Figura 6. Apresentação em HTML do conceito de Tabelas
Fonte: SIENA

Um exemplo de atividade, no JClic, apresenta-se na Figura 7.

Figura 7. Exemplo de atividade de Gráficos no JClic
Fonte: SIENA

Análise dos Dados

No SIENA os alunos entraram em cada nodo e estudaram os conceitos na sequência desenvolvida e, depois dos estudos, realizaram o teste daquele nodo. Quando não obtiveram a nota mínima de 0,6 (em uma escala de 0,1 até 1) estudaram novamente e realizaram o teste novamente. Os trabalhos e testes foram realizados em duplas.

A Tabela 1 apresenta as notas dos testes realizados pelos alunos em cada nodo do grafo.

Tabela 1. Notas dos alunos nos Testes Adaptativos Informatizados

Nodos	1		2		3		4		5	
Alunos	Teste 1	Teste 2	Teste 1	Teste 2	Teste 1	Teste 2	Teste 1	Teste 2	Teste 1	Teste 2
Aluno 1	0,200	0,766	0,200	0,996	0,610	-----	0,143	0,974	0,143	0,978
Aluno 2	0,200	0,766	0,200	0,996	0,610	-----	0,143	0,974	0,143	0,978
Aluno 3	0,999	-----	0,200	0,686	0,998	-----	0,143	0,995	0,978	-----
Aluno 4	0,999	-----	0,200	0,686	0,998	-----	0,143	0,995	0,978	-----
Aluno 5	0,686	-----	0,997	-----	1	-----	0,143	0,996	0,143	-----
Aluno 6	0,686	-----	0,997	-----	1	-----	0,143	0,996	0,143	-----
Aluno 7	0,610	-----	0,200	0,996	0,942	-----	0,907	-----	0,143	0,947
Aluno 8	0,610	-----	0,200	0,996	0,942	-----	0,907	-----	0,143	0,947
Aluno 9	0,143	0,701	0,385	0,701	0,200	0,610	0,100	0,593	-----	-----
Aluno 10	0,143	0,701	0,385	0,701	0,200	0,610	0,100	0,593	-----	-----
Média	0,528		0,445		0,750		0,287		0,352	

Fonte: Banco de dados do SIENA

De acordo com as médias do teste 1, pode-se concluir que os alunos apresentaram dificuldades na construção de tabelas, na determinação das medidas de tendência central e na resolução de problemas. Na resolução de problemas apenas uma dupla conseguiu nota superior a 0,6 no primeiro teste. A leitura, interpretação e construção de gráficos não apresentou problemas para os alunos participantes do projeto, a média nos testes foi de 0,750 e apenas uma dupla teve que realizar estudos de recuperação e realizar o segundo teste neste nodo. Os alunos, no nodo com os conceitos introdutórios de Estatística, também apresentaram um rendimento satisfatório.

Os testes realizados na plataforma SIENA, com a sequência desenvolvida, tiveram suas funcionalidades de acordo com o previsto: apresentou a sequência para estudos e depois apresentou os testes de acordo com a sequência dos nodos do grafo e quando não se obteve o desempenho esperado foi apresentada a sequência didática para a recuperação daquele conceito.

Todo o trabalho com o tema proposto está implementado na plataforma SIENA, no servidor do PPGECIM (http://siena.ulbra.br), na ULBRA, onde foram validadas as funcionalidades de avaliação e apresentação da sequência.

Referências

Brasil. Secretaria de Educação Fundamental. (1997). Parâmetros Curriculares Nacionais. Brasília.

Groenwald, C. L. O. Moreno, L. R. (2006). *Formação de Professores de Matemática: uma proposta de ensino com novas tecnologias*. Acta Scientiae, Canoas, v.8, n.2, jul./dez.

Groenwald, C. L. O. et al. (2009). Sequência Didática com Análise Combinatória no Padrão SCORM. Bolema Rio Claro, ano22, n.34, p.27-56.

Kampff, A. J. C.; Machado, J. C.; Cavedini, P..(2004). Novas Tecnologias e Educação Matemática. In: X Workshop de informática na escola e XXIII Congresso da Sociedade brasileira de computação, Bahia.

Sands, William A.;WATERS, Brian K. Introduction to ASVAB and CAT. In: SANDS, William A.; WATERS, Brian K.; MCBRIDE, James R.(Eds.). (1997). Computerized adaptive testing: from inquiry to operation. Washington: American Psychological Association.

Wainer, H. (2000). Computerized adaptive testing: a primer. New Jersey: Lawewnce Erlbaum Associates.

REVISTA IBEROAMERICANA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA

ISSN: 1815-0640
Número 35. Septiembre de 2013
páginas 19-42

www.fisem.org/web/union

Contribuições de uma sequência de ensino para o processo de ensino e aprendizagem de gráficos e tabelas segundo pressupostos da contextualização

Danieli Walichinski; Guataçara dos Santos Junior

Fecha de recepción: 17/05/2012
Fecha de aceptación: 7/04/2013

Resumen	El objetivo de este estudio es divulgar una investigación sobre las contribuciones de una secuencia didáctica basada en los presupuestos de contextualización en el proceso de enseñanza y aprendizaje de gráficos y tablas. La investigación ha sido realizada en una clase de 7º grado de Enseñanza Primaria, de una escuela ubicada en la ciudad de Ponta Grossa, Paraná, Brasil. Para la recolección de datos, fue utilizada con los alumnos, una herramienta de diagnóstico para analizar, *a priori* y *a posteriori* de la aplicación de la secuencia didáctica. Basado en el análisis de los resultados, se ha considerado que la aplicación de una secuencia didáctica se constituye en un recurso eficaz para promover el aprendizaje. **Palabras clave**: secuencia didáctica, contextualización.
Abstract	The aim of this work is to promote research on the contributions of a sequence of teaching based on assumptions of contextualization for the teaching and learning process of graphs and charts. The survey was conducted with a group of 7° year of elementary school, a school in the city of Ponta Grossa, Paraná, Brazil. For data collection, was applied a diagnostic instrument with the *priori* analysis and the application of *retrospective* teaching sequence. Based on the analysis of the results, it is considered that the application of a sequence of teaching, constitutes an effective resource for the promotion of learning. **Keywords**: sequence of teaching, contextualization
Resumo	O objetivo deste trabalho é divulgar uma pesquisa sobre as contribuições de uma sequência de ensino pautada nos pressupostos da contextualização para o processo de ensino e aprendizagem de gráficos e tabelas. A pesquisa foi realizada em uma turma de 7° ano do Ensino Fundamental, em uma escola do município de Ponta Grossa, Paraná, Brasil. Para a coleta de dados, foi aplicado aos alunos um instrumento diagnóstico com análise a *priori* e a *posteriori* à aplicação da sequência de ensino. Com base na análise dos resultados, considera-se que a aplicação de uma sequência de ensino, constitui-se em um recurso eficaz para a promoção da aprendizagem. **Palavras-chave**: sequência de ensino, contextualização.

1. Introducción

Na atual sociedade, a cada dia que passa, novas informações são transmitidas à população em geral. Em diversos casos, os meios de comunicação fazem uso de tabelas e gráficos para divulgar tais informações. Basta ler um jornal, uma revista, ou assistir um programa de televisão, por exemplo, para perceber que a linguagem estatística está presente nas mais variadas situações, fazendo desse modo, parte do cotidiano das pessoas. Interpretar e analisar tais informações pode ser fundamental para qualquer cidadão compreender melhor o que se passa à sua volta e assim interagir na sociedade, de forma mais crítica.

Todavia, um indivíduo não alfabetizado em Estatística, geralmente encontra dificuldades para interpretar essa linguagem. Cabe ressaltar, que não se espera que todos os cidadãos apliquem fórmulas estatísticas complexas em seu dia-a-dia. Entretanto, é imprescindível que os mesmos saibam ler e interpretar um gráfico, um diagrama, uma tabela, além de compreender o significado de alguns conceitos estatísticos como média, mediana, população, amostra, margem de erro, dentre outros.

No início da década de noventa do século XX, Wallman (1993) considerava que para estar alfabetizado estatisticamente era necessário não apenas entender, mas também avaliar de modo crítico as informações expressas por meio da linguagem estatística. Percebe-se assim, que desde essa época não se priorizava apenas os procedimentos de cálculos estatísticos, mas também, a interpretação, a análise e a compreensão dos dados.

A literatura é rica em trabalhos que abordam a necessidade de a escola oferecer uma formação estatística satisfatória para que os alunos, enquanto cidadãos tenham condições de melhor atuar na sociedade. Podem-se citar como exemplos, trabalhos de vários autores de diferentes países que defendem tal necessidade: Gal (2002), Carrera (2002), Carvalho (2003), Castro e Cazorla (2007), Febles (2007), Medice (2007), Vasconcelos (2007), Cazorla e Castro (2008), Lopes (2010), Cavalcanti, Natrielli e Guimarães (2010), Batanero, Arteaga e Contreras (2011), Fernandes e Morais (2011), Lira e Monteiro (2011), além de outros.

Assim, o objetivo deste trabalho é apresentar uma pesquisa sobre as contribuições que a aplicação de uma sequência[1] de ensino (SE) pautada nos pressupostos da contextualização pode trazer para o ensino e aprendizagem de gráficos e tabelas. Estes são considerados conteúdos básicos de Estatística, usualmente abordados na disciplina de Matemática no Ensino Fundamental de escolas brasileiras. A pesquisa busca mostrar que a prática de uma atividade contextualizada em sala de aula pode contribuir para que ocorra uma efetiva aprendizagem em relação a esses conteúdos por parte dos alunos, além de servir como recurso motivador para o ensino de Estatística.

2. Leitura e interpretação de gráficos e tabelas

A leitura e interpretação de gráficos e/ou tabelas tem se constituído objeto de estudo de diversos pesquisadores, tais como, Curcio (1987), Monteiro e Selva (2001), Cazorla (2002), Flores e Moretti (2005), Monteiro (2006), Lima e Magina (2007), Araujo (2008), Vieira (2008), Carvalho, Monteiro e Campos (2010a; 2010b), Fernandes e Morais (2011), Freitas (2011), Conti e Carvalho (2011), dentre outros, nos vários níveis de ensino.

[1] Entende-se por sequência de ensino, atividades em que o professor conduz todas as etapas em conjunto com os alunos (Cazorla e Utsumi, 2010).

A habilidade de interpretar um gráfico requer muito mais que apreender as informações (Carvalho, Monteiro e Campos, 2010a). Esses autores entendem que ao interpretar um gráfico, o indivíduo desenvolve um processo dinâmico, uma vez, que estabelece interações entre os aspectos visuais e conceituais. Assim, entende-se que a habilidade de interpretar gráficos não é uma atividade tão simples quanto possa parecer. Corroborando com essa ideia, Cazorla (2002, p. 5) ressalta que embora os gráficos sejam amplamente utilizados “existem evidências de que nem todo indivíduo consegue extrair informações e captar as mensagens neles contidas”.

Carvalho, Monteiro e Campos (2010b) consideram que o processo de interpretação de gráficos não é espontâneo e por essa razão, os gráficos não podem ser entendidos como facilitadores da leitura e interpretação de dados, devendo ser trabalhados de maneira intencional no âmbito pedagógico.

Ainda Flores e Moretti (2005) afirmam que ler uma tabela ou um gráfico, não é uma tarefa imediata, pois é necessária certa desenvoltura visual e também um empenho cognitivo. Além disso, esses autores consideram que:

> [...] A leitura exige por parte do leitor certa intimidade, e também domínio, do modo de representação utilizado. Ler, interpretar, analisar e julgar, ou organizar dados em gráficos e tabelas significa, antes de tudo, dominar o próprio funcionamento representacional. [...] (Flores e Moretti, 2005, p. 2).

Fernandes e Morais (2011) em seu estudo que teve por objetivo descrever e compreender o desempenho, as dificuldades e os erros em relação à leitura e interpretação de gráficos por parte de 108 alunos do 9°ano de uma escola do distrito de Braga (Portugal), concluem que apesar de haver consenso entre os professores, de que se trata de um conteúdo fácil, a leitura e interpretação de gráficos, constituem-se em um tema complexo para os estudantes, tendo em vista o fraco desempenho apresentado pelos mesmos. Esses autores também argumentam que há possibilidade de o baixo desempenho desses alunos ter relação com o tipo de ensino pelo qual passaram.

Também Santana (2007) realizou uma pesquisa aplicando um questionário de perguntas abertas a 231 estudantes de nível médio de quatro escolas públicas da zona metropolitana da Cidade do México, que teve como objetivo identificar as dificuldades que os alunos apresentam em relação à compreensão de gráficos estatísticos. O pesquisador concluiu que apesar se ter a ideia de que a compreensão de gráficos é um processo fácil, na realidade é um processo complexo que apresenta muitas dificuldades aos alunos. Santana (2007) elencou as principais dificuldades apresentadas pelos alunos:

- Confundem os eixos;
- Não identificam as unidades de medida de cada eixo;
- Estabelecem relações icônicas;
- Não especificam as variáveis em questão;
- Omitem as escalas nos eixos vertical, horizontal ou em ambos;
- Não especificam a origem das coordenadas;
- Não sabem trabalhar com escalas.

Freitas (2011) acredita que para realizar a leitura de um gráfico, é importante que o aluno possua conhecimentos prévios sobre a construção e os elementos dos gráficos, para que assim, possa estabelecer uma conexão entre esses e uma nova situação de leitura. Ainda nesse sentido, Monteiro e Selva (2001) observam a importância do título e das legendas no processo de compreensão de dados, considerando que esse aspecto precisa ser melhor investigado, uma vez, que aparentemente esses elementos essencias dão suporte ao processo interpretativo.

Segundo Guimarães et al. (2009), a interpretação de dados, seja por meio de gráficos ou de tabelas, exige dois tipos diferentes de análise: análise pontual e análise variacional. Na análise pontual, ocorre a análise de pontos isolados da representação, como por exemplo, a localização de pontos extremos. Já na análise variacional, é necessário que ocorra a análise de uma relação entre os dados, como por exemplo, as variações de aumento ou decréscimo. De acordo com Cazorla (2002), Curcio (1987) apresentou a seguinte classificação no que diz respeito à habilidade de leitura e interpretação de gráficos:

- Leitura dos dados: esse nível de compreensão requer a leitura literal do gráfico; não se realiza interpretação da informação contida nele;
- Leitura dentro dos dados: que inclui a interpretação e integração dos dados no gráfico requer a habilidade para comparar quantidades e o uso de outros conceitos, além das habilidades matemáticas;
- Leitura além dos dados: requer que o leitor realize predições e inferências a partir dos dados, sobre informações que não se refletem diretamente no gráfico (Curcio, 1987, apud Cazorla, 2002, p. 57-58).

Entende-se que o nível de leitura de dados não exige um alto nível cognitivo, sendo que o leitor apenas retira as informações contidas na representação. Para realizar a leitura entre os dados, é necessário que seja feita uma comparação entre os valores assumidos pelas variáveis, o que requer um desenvolvimento cognitivo maior do que o esperado para a leitura de dados. Para realizar a leitura além dos dados, o leitor já deve possuir domínio no que se refere aos níveis anteriores, para que possa ainda inferir sobre os dados, o que exige maior desenvoltura cognitiva.

Assim como Freitas (2011), acredita-se que a evolução na habilidade de compreensão de dados deve acontecer por meio de um processo contínuo entre os níveis descritos, percorrendo desde o nível de leitura de dados, onde se leva em conta o que está visível em um gráfico, até o nível mais avançado, quando são retiradas informações cada vez mais abstratas.

Carvalho (2009) destaca que trabalhar com a leitura e com a construção de gráficos é um processo que exige tempo e envolvimento em diferentes tipos de atividades, cabendo ao professor, o papel fundamental de preparar atividades que sejam determinantes para a qualidade do desempenho dos alunos.

3. Contextualização

Atualmente a contextualização tem assumido uma posição de destaque no ensino em geral. Particularmente no ensino de Matemática, o objetivo da contextualização é atribuir significados aos conteúdos matemáticos (Brasil, 2010). Também Sadovsky (2007, p. 89) observa que no círculo da Educação Matemática, sustenta-se a necessidade de situar "[...] sempre que possível, a fonte de sentido nos contextos extramatemáticos, pois são eles que realmente possibilitam ao aluno compreender o funcionamento dos conceitos. [...]".

Tufano (2001) compreende a contextualização de uma situação de ensino, como sendo uma ação premeditada, que visa encadear ideias, de modo a criar um ambiente favorável, amigável e acolhedor para a construção do conhecimento.

Segundo Vasconcelos (2008, p. 49), contextualizar "[...] é apresentar em sala de aula situações que dêem sentido aos conhecimentos que desejamos que sejam aprendidos [...]". A autora destaca que a contextualização é uma alternativa que poderá auxiliar na construção de significados por parte dos alunos, podendo ainda atuar como ação motivadora da aprendizagem.

Machado e Salles (2009) entendem a contextualização como um ato, que durante o processo de ensino e aprendizagem, tem como finalidade vincular os conhecimentos à sua origem, bem como, à sua aplicação, de modo a recuperar o sentido, a pertinência histórica, o significado social e prático desse conhecimento.

Na visão de Pais (2002, p. 27), a contextualização trata-se de uma das principais noções pedagógicas, como se pode notar:

> A contextualização do saber é uma das mais importantes noções pedagógicas que deve ocupar um lugar de maior destaque na análise da didática contemporânea. Trata-se de um conceito didático fundamental para a expansão do significado da educação escolar. O valor educacional de uma disciplina expande na medida em que o aluno compreende os vínculos do conteúdo estudado com um contexto compreensível por ele.

Conforme afirmam Manechine et al. (2006), a contextualização do conhecimento não está desvinculada do trabalho com os conceitos mais clássicos de qualquer disciplina, cabendo ao professor, desenvolver atividades no sentido de trabalhar o conhecimento, de modo a potencializar a significação desse conhecimento por meio de atividades contextualizadas.

Nesse sentido, Ramos (2004) entende que o confronto com situações concretas visa estimular a atividade intelectual em direção à construção de conceitos, uma vez que esse processo depende não apenas do esforço individual, mas também do contexto em que o indivíduo está inserido.

Desenvolver um trabalho pautado na contextualização é um dos recursos que o professor pode dispor na tentativa de que sejam estabelecidas relações de reciprocidade entre os alunos e o objeto de conhecimento (Brasil, 1999).

Acredita-se que essa aproximação pode possibilitar um maior envolvimento e interesse por parte do aluno em relação ao conteúdo estudado. Mello (2005) também considera que o conhecimento terá mais significado para o aluno na medida em que o conhecimento formal estiver mais próximo dos contextos presentes em sua vida e no mundo no qual ele interage.

Por outro lado, deve-se ter o cuidado para não empobrecer a construção do conhecimento em nome de uma prática contextualizada, visto que o contexto é apenas o ponto de partida para a sistematização do conhecimento. Conforme afirma Wagner (2008), faz-se necessário trazer os alunos para a compreensão do conhecimento reconhecido cientificamente. Para a autora, trabalhar com questões do cotidiano é importante, porém, apenas na medida em que esse possa motivar os alunos para o entendimento do conhecimento científico. Deve-se ter claro ainda que não se pode confundir a valorização de uma situação corriqueira do dia-a-dia com a contextualização, como se pode observar na argumentação de Sadovsky (2007, p. 103):

> [...] Estabelecer relações que os alunos são incapazes de entender não produz uma estratégia eficaz, que possa realmente atraí-los para esse jogo. Suponhamos, por exemplo, que um professor queira ensinar *função quadrática* e diga a seus alunos que muitos faróis de automóvel têm a forma de uma parábola. Em seguida, comenta que as funções que eles vão estudar são representadas, graficamente, por meio de uma parábola e, assim, inicia o estudo mais ou menos convencional desse objeto. Nada do que ele propõe como estudo tem algum vínculo com o tema dos faróis dos automóveis. A simples referência a um contexto de uso não estimula o estudo, nem permite avaliar como se aplica o resultado desse estudo. O exemplo é intencionalmente extremo, mas ilustra o fato de que muitas vezes, com o propósito de motivar os alunos, é apresentada uma situação totalmente desligada do tema a ser estudado em seguida.

Com base nas considerações aqui expostas, entende-se a contextualização como uma prática que tem por objetivo atribuir sentido ao conhecimento sistematizado que se pretende ensinar. Acredita-se que a contextualização pode produzir efeitos positivos no que se refere às atitudes dos alunos (predisposição, interesse, motivação, e valorização do trabalho coletivo).

Portanto, acredita-se que a aplicação de uma sequência de ensino voltada a conteúdos básicos de Estatística, que esteja pautada nos pressupostos da contextualização, poderá trazer contribuições para o ensino desses conteúdos nos anos finais do Ensino Fundamental, tanto em relação ao desenvolvimento de aspectos atitudinais por parte dos educandos, quanto em relação ao desenvolvimento de aspectos conceituais e procedimentais.

4. Metodologia

Os sujeitos da pesquisa foram alunos de uma turma de 7° ano do Ensino Fundamental de uma escola pública estadual do município de Ponta Grossa, Estado do Paraná, Brasil. Quando foi aplicada a pesquisa, a turma constava com trinta alunos, meninos e meninas, com idade média de doze anos; porém, encontravam-se na turma educandos com onze e dezessete anos. Desses alunos, foram escolhidos para participar da pesquisa os 22 que estavam presentes em todos os momentos. Portanto, para a análise de dados foram considerados os protocolos desses 22 estudantes. Para facilitar a descrição e a análise dos dados e, no sentido de manter o anonimato dos estudantes, esses foram nomeados pela letra A seguida de um algarismo (Aluno A1, Aluno A2, Aluno A3, ..., Aluno A22).

Esta pesquisa se caracteriza por aplicada, descritiva e, qualitativa com análise interpretativa. A mesma ocorreu em três momentos, sendo distribuídos da seguinte forma:

<u>1° Momento</u>: Aplicação de um pré – teste

Aplicou-se nesse momento aos alunos um instrumento diagnóstico denominado pré-teste. Esse é composto por questões, as quais dizem respeito a leitura e interpretação de gráficos e tabelas. Essas questões foram adaptadas de um livro didático elaborado para a antiga 6ª série do Ensino Fundamental (atualmente denominada de 7° ano do Ensino Fundamental) e, portanto se encontram adequadas ao nível cognitivo dos sujeitos da pesquisa. Tais questões podem ser observadas na análise e discussão de resultados nos quadros 1, 2,3 e 4. Com a aplicação desse instrumento objetivou-se verificar o que os alunos já sabiam sobre o conteúdo em questão, bem como, suas possíveis dificuldades.

2° Momento: Trabalhando em sala de aula com uma sequência de ensino contextualizada

Foi aplicada pela professora - pesquisadora uma SE que teve por objetivo abordar as representações tabular e gráfica por meio da utilização de dados coletados na própria turma, ou seja, por meio da contextualização.

A aplicação da sequência de ensino envolveu três etapas. Essas foram desenvolvidas em sala de aula, nos horários das aulas de Matemática, sendo necessárias cinco aulas de cinquenta minutos cada. Dessas aulas, uma delas foi utilizada para o processo de coleta de dados, duas para o trabalho com representação tabular e, as outras duas, para o trabalho com representação gráfica.

3° Momento: Aplicação de um pós – teste

Nesse momento, foi aplicado aos educandos um instrumento diagnóstico agora chamado de pós – teste, o qual é formado pelas mesmas questões do pré – teste. Aplicou-se novamente esse instrumento com a intenção de se comparar os resultados obtidos em ambos os testes, visando identificar os avanços conquistados pelos alunos e as dificuldades ainda presentes após o trabalho com a SE.

Para a realização da pesquisa foi solicitada autorização por parte da direção da escola, para que os resultados obtidos pudessem ser posteriormente divulgados, bem como, foi encaminhado aos responsáveis pelos estudantes, um termo de consentimento livre e esclarecido para a participação dos mesmos junto à pesquisa.

5. Análise e discussão de resultados

5.1 Análise do desempenho prévio dos alunos

Por se tratar de alunos do 7° ano do Ensino Fundamental, presumiu-se que os mesmos já tinham adquirido algum conhecimento estatístico nos anos anteriores, visto que os documentos oficiais recomendam o trabalho com esse tema desde os anos iniciais do Ensino Fundamental. Assim, aplicou-se um instrumento diagnóstico denominado pré – teste, que teve como finalidade verificar que habilidades relacionadas a leitura, interpretação e construção de gráficos e tabelas esses alunos já alcançaram, bem como, verificar suas possíveis dificuldades em relação a essa temática. Segundo Carvalho (2006, p. 7), a literatura tem revelado que a construção dos conceitos estatísticos pelos estudantes de níveis diferentes de escolaridade "não é isenta de dificuldades como uma leitura mais superficial poderia sugerir". A seguir, apresenta-se a análise realizada a respeito do desempenho prévio dos estudantes para cada uma das questões abordadas no instrumento diagnóstico.

5.1.1 Análise da questão 1 do pré-teste

A questão 1 teve por objetivos verificar a habilidade do aluno em fazer a correspondência entre um valor numérico e seu respectivo setor circular em um gráfico de setor e, verificar se o aluno identifica um gráfico de setor. Essa questão pode ser observada no quadro seguinte:

Em uma escola com 800 alunos, realizou-se uma pesquisa sobre o esporte preferido dos estudantes. Os resultados estão representados no gráfico abaixo:

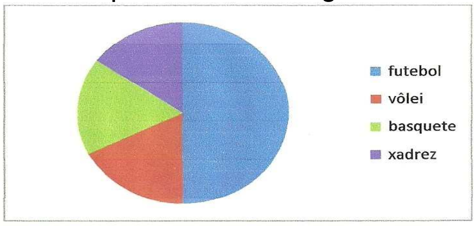


Figura 1. Esporte preferido pelos alunos
Fonte: Andrini e Vasconcellos (2005)

1.1)Observando o gráfico, é correto dizer que:
A (   ) O futebol foi escolhido por 400 alunos;
B (   ) O basquete foi escolhido por 210 alunos;
C (   ) O vôlei foi escolhido por 120 alunos;
D (   ) O xadrez foi escolhido por 90 alunos.
1.2) Como se chama esse tipo de gráfico?

Quadro 1 – Questão 1 do pré - teste
Fonte: Adaptado de Andrini e Vasconcellos (2005)

A tabela seguinte mostra o percentual das respostas apontadas pelos alunos para a questão 1.1:

Tabela 1. Resultado da questão 1.1

Percentual das respostas dadas pelos alunos				
A	**B**	**C**	**D**	**Total**
72,7 %	**9,1 %**	**9,1 %**	**9,1 %**	**100 %**

*Total de alunos = 22

Observou-se que a maioria dos alunos (72,7%) fizeram a correspondência entre o valor numérico (quatrocentos) e seu respectivo setor circular (180°), identificando a informação correta representada no gráfico de setor. Para isso, acredita-se que foi fundamental a leitura do enunciado da questão, o qual informava o total de alunos pesquisados, aliada a percepção do espaço ocupado pelos setores. Porém, 27,3% dos alunos não identificaram a informação correta, o que se faz acreditar que eles têm dificuldade em realizar tal correspondência.

Em relação à questão 1.2, esperava-se que a maioria dos estudantes soubessem nomear um gráfico de setores, por ser esse tipo de gráfico um dos mais comuns. Entretanto, apenas a aluna A12 (4,55%) nomeou corretamente. Dez alunos não responderam essa questão. As alunas A1, A11 e A13 responderam *"gráfico de porcentagem"*. Os alunos A3 e A20 responderam *"gráfico geográfico"*, o que se supõe pelo fato de que esse tipo de gráfico é bastante utilizado em livros didáticos da disciplina de Geografia. Outros termos como: *"retangular", 'gráfico geométrico", "de jogos", "redondo", "gráfico de esportes" e "legal"* também foram apresentados como resposta.

Embora saber nomear determinados tipos de gráfico possa parecer uma habilidade sem muita importância, a distinção dos tipos de representações gráficas faz parte da linguagem estatística, e também se trata de uma habilidade necessária para o prosseguimento dos estudos referentes a Estatística, como por exemplo, saber analisar que tipo de gráfico mais convém para representar cada tipo de variável. Além disso, de acordo com o quadro de Conteúdos Básicos proposto nas Diretrizes Curriculares Estaduais do Estado do Paraná (Paraná, 2008), identificar os diferentes tipos de gráficos é uma das expectativas de aprendizagem a ser desenvolvida já por alunos do 6° ano do Ensino Fundamental.

5.1.2 Análise da questão 2 do pré-teste

A questão 2 teve como objetivos verificar a habilidade do aluno em realizar a leitura dos dados em um gráfico de segmento, prestando atenção nos eixos horizontal e vertical. A mesma pode ser observada no quadro 2 a seguir:

O gráfico seguinte representa a evolução do “peso” de um senhor, desde seu nascimento até seus 40 anos de idade, conforme se pode observar:

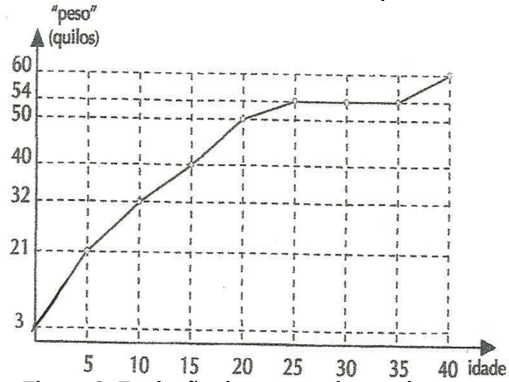


Figura 2. Evolução de peso ao longo dos anos
Fonte: Andrini e Vasconcellos (2005)

2.1) Qual era o “peso” desse senhor, quando ele tinha 5 anos?
2.2) Qual era a idade desse senhor, quando ele estava com 40 quilos?
2.3) Qual era o “peso” desse senhor, quando ele nasceu?

Quadro 2. Questão 2 do pré - teste
Fonte: Adaptado de Andrini e Vasconcellos (2005)

Com base na análise das respostas dos alunos, verificou-se que os estudantes realizaram a leitura dos dados em um gráfico de segmento, uma vez que 95,45% dos alunos retiraram a informação pedida (cinco quilos) na questão 2.1.

Como já se acreditava, ao responder à questão 2.2, a maioria dos alunos confundiu os eixos. Ou seja, ao procurar o valor quarenta no eixo vertical, 72,73% dos alunos confundiram com o valor quarenta do eixo horizontal. Esta observação também foi verificada na pesquisa desenvolvida por Santana (2007), o qual apontou a inversão dos eixos durante a leitura de dados como sendo uma das principais dificuldades apresentadas pelos estudantes em relação às representações gráficas. Observou-se essa dificuldade quando o valor procurado se encontra no eixo vertical.

Para responder a questão 2.3, esperava-se que os estudantes tivessem dificuldade em compreender o ponto zero como sendo o ponto de partida. Porém, para essa questão obteve-se 77,27% de acerto.

5.1.3 Análise da questão 3 do pré-teste

A questão 3 teve como objetivos verificar a habilidade do aluno em realizar a leitura dos dados e a leitura entre os dados em um gráfico de barras duplas, verificar se o aluno identifica um gráfico de barras duplas e ainda, verificar a habilidade do aluno em representar informações contidas em um gráfico de barras duplas por meio de uma tabela de dupla entrada. Essa questão pode ser observada no quadro 3 seguinte:

Numa escola há 120 alunos. O gráfico indica o número de alunos inscritos em cada modalidade esportiva praticada na escola. Cada aluno só pratica um tipo de um esporte.

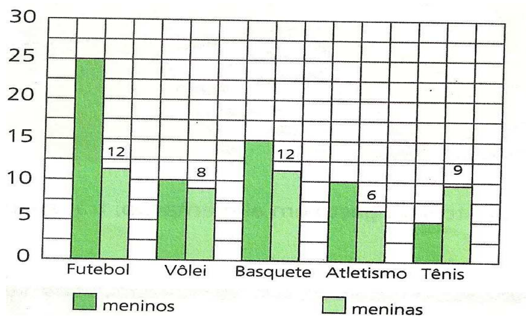


Figura 3. Modalidades esportivas praticadas na escola
Fonte: Andrini e Vasconcellos (2005)

3.1) Quantos meninos praticam vôlei?
3.2) Em qual modalidade esportiva o número de meninas é maior que o número de meninos?
3.3) Como é o nome desse tipo de gráfico?
3.4) Represente por meio de uma tabela as informações apresentadas no gráfico.

Quadro 3 – Questão 3 do pré - teste
Fonte: Adaptado de Andrini e Vasconcellos (2005)

Com base na análise das respostas da questão 3.1, verificou-se que 50% dos alunos realizaram a leitura dos dados e que os outros 50% marcaram 8 como resposta, ou seja, apresentaram a quantidade de meninas e não de meninos, como se pedia. Acredita-se que esses alunos não prestaram atenção na legenda.

Na questão 3.2 verificou-se que apenas 45,45% dos alunos realizaram a leitura entre os dados em um gráfico de barras duplas. Outros deram como resposta o basquete, nenhum esporte e, outros ainda não responderam a questão. Aqui se conclui que além de não prestar atenção na legenda, os alunos também não têm desenvolvida a habilidade de realizar leitura entre dados em um gráfico de barras duplas, o que se acredita acontecer pela falta de familiaridade dos estudantes com esse tipo de gráfico.

Quanto à identificação do gráfico de barras duplas, esperava-se que a maioria dos estudantes identificassem, pelo menos, que se tratava de um gráfico de barras. No entanto, apenas 18,18% dos alunos nomearam o gráfico como gráfico de barras. Verificou-se que 36,36% dos alunos deixaram em branco ou afirmaram não saber. Observaram-se também respostas já apresentadas para a questão 1.2 como: *"gráfico geográfico"* e *"gráfico de porcentagem"*. Outras denominações surgiram como: *"matemático"* e *"quadrado"*. Ainda 18,18% dos alunos responderam com o título do gráfico.

Na questão 3.4, onde era para fazer uma representação tabular com base nos dados representados no gráfico de barras duplas, observou-se que apenas 27,27% dos estudantes apresentaram uma tentativa de representação de uma tabela, porém sem sucesso. O restante dos alunos deixaram a questão em branco ou apresentaram como resposta, o esboço de outro gráfico de barras. Verificou-se com isso, que os alunos não têm desenvolvida a habilidade de passar informações de uma representação gráfica para uma representação tabular.

5.1.4 Análise da questão 4 do pré-teste

Os objetivos da questão 4 do pré-teste consistem em verificar a habilidade do aluno em retirar uma informação de uma tabela de dupla entrada e, verificar a habilidade do aluno em representar informações contidas em uma tabela de dupla entrada por meio de um gráfico de barras duplas. A questão 4 pode ser observada no quadro a seguir:

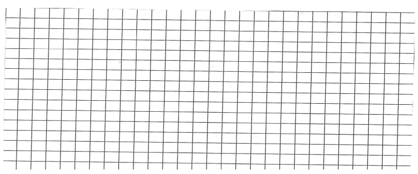
O professor de Educação Física perguntou aos alunos de uma turma do 7º ano qual era o esporte preferido deles. Todos os alunos responderam indicando um esporte apenas. O resultado dessa consulta pode ser visto na seguinte tabela.

Tabela 1- Esporte preferido de meninos e meninas

Esporte preferido	Como praticante		Como espectador	
	Meninos	Meninas	Meninos	Meninas
Basquete	2	3	2	2
Futebol	10	2	5	6
Vôlei	1	5	6	1
Tênis	0	4	2	7
Outros	2	3	0	1
Total	15	17	15	17

Fonte: Andrini e Vasconcellos (2002)

4.1) Qual é o esporte que as meninas mais gostam de assistir?
4.2) Na malha quadriculada abaixo, represente por meio de um gráfico de barras duplas, a preferência dos meninos e das meninas em relação ao esporte praticado pelos mesmos, conforme informações da tabela anterior.



Quadro 4. Questão 4 do pré - teste
Fonte: Adaptado de Andrini e Vasconcellos (2005)

Na questão 4.1 obteve-se 59,09% de acerto. Os demais alunos marcaram vôlei como resposta, ou seja, o esporte que as meninas mais gostam de praticar e, não o que elas mais gostam de assistir. Verificou-se com isso que um número significativo de alunos não fez uma leitura correta da tabela. O que se supõe que esses alunos não prestaram atenção nas informações contidas no cabeçalho da tabela e assim confundiram as informações.

Com relação à questão 4.2, onde se pedia para fazer uma representação gráfica com base nos dados representados na tabela de dupla entrada, verificou-se que 40,91% dos alunos deixaram a questão em branco e 9,09% dos alunos reproduziram a tabela do enunciado da questão. O que se faz acreditar que a metade dos alunos não tem a mínima compreensão de como fazer uma representação gráfica. Os outros 50% apresentaram tentativas de representações, porém, sem sucesso.

Com essa análise, verificou-se que os alunos não têm desenvolvida a habilidade de passar informações de uma representação tabular para um gráfico e que os mesmos desconhecem a necessidade de se apresentar certos elementos considerados essenciais em uma representação gráfica. Isto condiz com a afirmação de Cazorla (2004) de que embora seja reconhecida a importância da construção de gráficos como uma habilidade valiosa, muitos dos estudantes não têm desenvolvida tal habilidade.

Com base na análise realizada nas respostas dadas pelos alunos no pré-teste, verificou-se que os alunos apresentaram dificuldades nas questões mais simples, como por exemplo, identificar os tipos de gráficos mais comuns; realizar a leitura de dados em um gráfico onde se faz necessário observar a legenda; retirar uma informação de uma tabela de dupla entrada; trabalhar com a escala unitária na construção de gráficos de barras; escolher o eixo correto para realizar a leitura de dados. Além dessas, destacam-se outras dificuldades apresentadas pelos alunos, onde o nível de complexidade é maior, como por exemplo, realizar a leitura entre os dados em um gráfico; representar dados por meio de tabelas e gráficos de barras. Com isso, pode-se considerar como insatisfatório o desempenho prévio dos estudantes do 7° ano do Ensino Fundamental em relação à leitura, interpretação e construção de gráficos e tabelas, considerados conteúdos básicos de Estatística.

Com isso, trabalhou-se na turma com uma SE pautada nos pressupostos da contextualização, com a intenção de contribuir para a superação ou, pelo menos para a redução das dificuldades apresentadas pelos estudantes. A seguir, apresenta-se a análise e discussão de resultados obtidos durante o trabalho em sala de aula, por meio da observação direta dos aspectos atitudinais dos alunos envolvidos na pesquisa.

5.2 Trabalhando em aula com uma sequência de ensino contextualizada

Na primeira etapa da SE, propôs-se aos estudantes, a realização de uma pesquisa na própria turma, com o intuito de verificar algumas características da turma como um todo. A proposta foi aceita pelos estudantes com entusiasmo. A intenção de se desenvolver a coleta de dados na turma consiste no fato de se utilizar esses dados para trabalhar com os conteúdos de Estatística previstos no currículo. Segundo Lopes (2010), as orientações metodológicas para a Educação Básica sugerem que o conjunto de dados coletados sirva de base para o trabalho ao longo da unidade.

Decidiu-se com a turma que as características a serem pesquisadas seriam: disciplina preferida, gosto pela Matemática (muito, regular, pouco, não), esporte favorito, além do gênero (masculino e feminino). No quadro seguinte pode-se observar o modelo da planilha onde os dados foram coletados:

Gênero	Esporte favorito	Disciplina preferida	Gosto pela Matemática

Figura 1. Planilha de dados

Para preservar o anonimato, não se colocou o nome dos alunos na planilha. Desse modo, cada um escolheu uma linha qualquer para representar seus dados.

Pôde-se observar que o preenchimento da planilha pelos alunos gerou grande motivação na turma. Além disso, despertou a curiosidade quanto aos possíveis resultados, uma vez que os alunos conversavam entre si, perguntando o que o colega havia marcado na planilha e até mesmo levantavam hipóteses acerca dos resultados, mostrando assim, interesse pela inferência estatística. Da mesma forma que Mello (2005), acredita-se que o conhecimento terá mais significado para o aluno na medida em que o conhecimento escolar estiver mais próximo dos contextos presentes em sua vida e no mundo no qual ele interage.

Para Lopes (2008) uma questão importante na formação estatística dos estudantes diz respeito à percepção da necessidade de descrever populações, com base no levantamento de dados, observando-se tendências e características. Outro ponto importante para essa formação trata-se da conscientização dos dados (Rumsey 2002 apud Cazorla e Utsumi, 2010), o qual acredita-se ter sido possível desenvolver durante o processo da coleta de dados na turma.

Ao dar início à segunda etapa do trabalho em sala de aula com a SE, percebeu-se que os alunos estavam bastante curiosos para ver a planilha já preenchida, pois se tratava de uma atividade diferente da convencional. Acredita-se que pela forma em que foi dado início ao trabalho em sala de aula com a coleta de dados, foi possível promover a motivação do educando para o aprendizado.

Assim, com base na observação da planilha de dados já preenchida, foi possível estabelecer um diálogo entre a professora-pesquisadora e os alunos, na busca de uma melhor forma para representar os dados, na qual fosse possível agrupar os dados comuns para que as características da turma fossem mais facilmente observadas. Observou-se que a maioria dos alunos propôs a representação gráfica. Apenas a aluna A4 lembrou-se da representação tabular. Com isso, nota-se que os alunos estão mais acostumados a trabalhar com gráficos do que com tabelas.

Logo, na segunda etapa do trabalho em sala de aula com a SE foi possível abordar a representação tabular. Percebeu-se a atenção e o interesse por parte dos alunos quando se comentou sobre a utilidade das tabelas, a maneira como devem ser apresentadas e quais os elementos essenciais que devem compor uma tabela. Nota-se com isso, a importância da apresentação do conteúdo para o aluno por meio de um contexto que seja significativo para ele, conforme destaca Pais (2002).

Durante essa etapa, os alunos puderam formular hipóteses, comparar as mesmas com os resultados obtidos, representar os dados coletados por meio de diferentes tabelas, discutir resultados. Ou seja, pode-se dizer que os alunos participaram de forma ativa em um processo de tratamento de dados, conforme recomendações de documentos oficiais. Além disso, os estudantes puderam re (estruturar) seu conhecimento sobre a representação tabular, de maneira prazerosa, conforme se percebeu devido à interação entre esses e a professora-pesquisadora.

As tabelas foram construídas pelos alunos no ambiente papel e lápis[2]. Verificou-se que apesar de constantemente a professora lembrar que tabela é diferente de quadro, alguns alunos ainda construíram tabelas na forma de quadro. Com isso, percebeu-se a influência dos livros didáticos, que geralmente não omitem as linhas, formando assim, quadros e não tabelas.

Com base nos dados coletados na planilha, foi possível construir com os alunos tabelas simples, tabelas de dupla entrada e tabelas de distribuição de frequência (TDF), de modo que os alunos perceberam com facilidade a diferença entre tais representações, bem como, a necessidade de se representar os dados em diferentes contextos. Na figura seguinte, pode-se observar uma tabela de dupla entrada construída com os alunos.

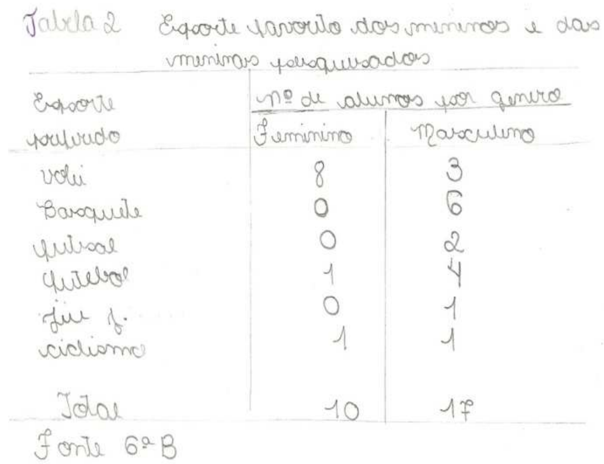


Tabela 2 Esporte favorito dos meninos e das meninas pesquisados

Esporte preferido	nº de alunos por gênero	
	Feminino	Masculino
vôlei	8	3
Basquete	0	6
futsal	0	2
futebol	1	4
Jiu J.	0	1
ciclismo	1	1
Total	10	17

Fonte 6ª B

Figura 2. Atividade realizada pela aluna A11

Verificou-se com as primeiras construções de tabelas, que a maioria dos alunos já havia adquirido autonomia para construírem sozinhos outras tabelas, pois davam sequência as suas construções enquanto a professora-pesquisadora percorria a classe.

Conti e Carvalho (2011) entendem que a procura por desenvolver atividades direcionadas a representação tabular, de modo que o material bruto seja produzido com os alunos, pode caminhar para o desenvolvimento do letramento estatístico dos alunos. Dessa forma, considera-se que as atividades da SE trabalhadas com os alunos, contribuíram para o enriquecimento da formação estatística dos estudantes.

Durante a realização da segunda etapa, observou-se tanto nos momentos de discussões, quanto nos momentos de construções das tabelas, a atenção, o entusiasmo e a disposição dos alunos para o aprendizado. Isto está de acordo com as concepções de Viali e Sebastiani (2010), que defendem que o trabalho com dados reais possibilita motivar os alunos e ensiná-los, sem necessariamente, fazer uso de exemplos que têm pouquíssima relação com seu cotidiano.

Na terceira etapa do trabalho em sala de aula com a SE, pôde-se discutir com os alunos sobre a utilidade dos gráficos para a sociedade moderna, o modo como devem ser apresentados, os elementos considerados essenciais em um gráfico,

[2] O termo “ambiente papel e lápis”, utilizado por Kataoka e Hernandez (2010) diz respeito à construção de tabelas e gráficos à mão.

além dos tipos mais comuns de representações gráficas. Nessa etapa os dados coletados com os alunos, foram representados em gráficos, no ambiente papel e lápis. Novamente observou-se o interesse, a atenção e a predisposição dos alunos para o aprendizado.

Ao se trabalhar com o pictograma, observou-se que os estudantes não conheciam esse tipo de gráfico. Contudo, durante a construção de um pictograma, por meio da observação dos dados representados em uma tabela feita na etapa anterior, os estudantes foram se mostrando bastante seguros para construírem sozinhos os pictogramas, afirmando: *"é muito fácil, professora"*. Na figura a seguir, pode-se observar um pictograma construído para representar os dados coletados com os alunos referentes à variável qualitativa disciplina preferida:

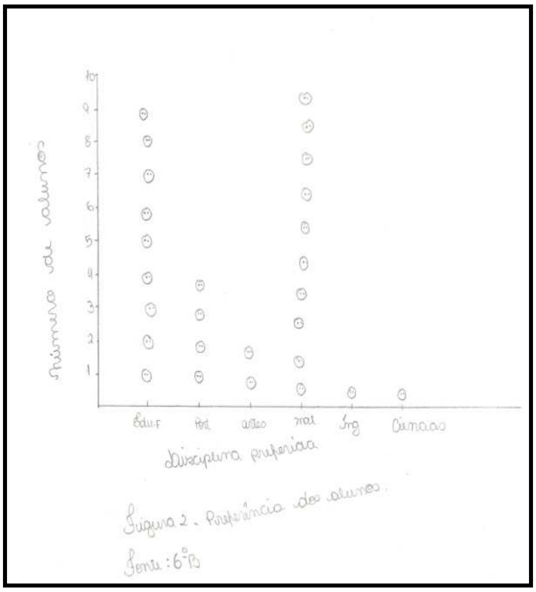


Figura 3. Atividade realizada pela aluna A6

Os gráficos de barras simples e de barras duplas também foram abordados no trabalho em sala de aula. Esses gráficos foram construídos com base na observação das tabelas construídas anteriormente. Desse modo, foi possível trabalhar com a transnumeração. A transnumeração trata-se de:

> [...] uma ideia fundamental de um enfoque estatístico para a aprendizagem e consiste em formar e mudar representações de dados de aspectos de um sistema para chegar à melhor compreensão desse sistema [...] (Coutinho, Silva e Almouloud, 2011, p. 500).

Assim como afirmam esses pesquisadores, entende-se que é necessário o indivíduo transitar por diferentes registros de representações, com vistas a uma melhor formação estatística.

Como o gráfico de barras simples é um dos mais conhecidos pelos alunos, eles não tiveram dificuldade em fazer essa construção. Porém, eram pouquíssimos os alunos que se lembravam de identificar as categorias da variável, de colocar um título para o gráfico, e de identificar a fonte. Nesse caso, era necessária a intervenção da professora. Monteiro e Selva (2001) observam a importância do título e das legendas no processo de compreensão de dados, uma vez, que esses elementos essencias dão suporte ao processo interpretativo.

Verificou-se ainda que a construção dos gráficos de barras simples no ambiente papel e lápis pelos estudantes é facilitada com a utilização do papel quadriculado.

Para a construção de gráficos de barras duplas, observou-se que os estudantes não tinham familiaridade com esse tipo de construção. Alguns alunos separavam as barras de mesma categoria, outros deixavam lado a lado categorias distintas, sendo necessária uma orientação individual para esses alunos. Quanto ao uso da legenda, todos percebiam sua necessidade, fato que não se verificou em relação ao título, a identificação da variável e suas categorias e, a fonte. Na figura a seguir, pode-se observar um gráfico de barras duplas trabalhado com os alunos:

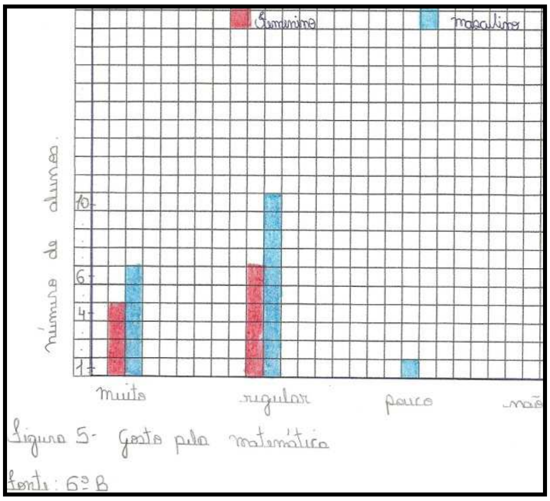


Figura 4. Atividade realizada pela aluna A1

Com a realização dessa etapa, além de se trabalhar a representação gráfica nos contextos univariado e bivariado, também foi possível discutir resultados, formular novas questões, levantar hipóteses.

Também foi possível realizar a construção de um gráfico de setores com base na transnumeração, ou seja, por meio da observação de uma tabela construída na etapa anterior. Embora tenha se construído um gráfico de setores com apenas duas categorias, os alunos demonstraram dificuldade tanto em relação ao cálculo dos ângulos (apesar de se ter utilizado calculadora), quanto em relação à utilização do transferidor. Com isso acredita-se que esses alunos ainda não haviam construído um gráfico de setores. Mesmo a aluna A1, que sempre apresenta grande facilidade de compreensão afirmou: *"Ai professora, é muito difícil"*. Também a aluna A11 considerou*: "dá muito trabalho*". Em Medice (2007, p. 72) também é observada certa dificuldade por parte de alunos do 6° ano na construção de um gráfico de setores: "[...] A principal dificuldade encontrada por eles foi o cálculo dos ângulos correspondentes a cada setor, apesar do uso da calculadora [...]".

Da mesma forma que durante o trabalho com a representação tabular, durante o trabalho com a representação gráfica, os estudantes puderam re (estruturar) seu conhecimento sobre a representação gráfica, de maneira prazerosa, conforme se percebeu devido à interação entre os alunos e a professora-pesquisadora.

Acredita-se que durante o trabalho em sala de aula com a sequência de ensino contextualizada, foi possível tornar familiar aos alunos, os termos e as idéias básicas referentes às representações gráficas e tabulares, por meio de um recurso motivador. Além disso, os alunos puderem perceber o significado prático do conhecimento ensinado.

5.3 Análise do desempenho dos alunos após a aplicação da sequência de ensino contextualizada

Nesta seção além de apresentar os resultados obtidos no pós - teste, buscou-se fazer comparações com os resultados do pré - teste com a intenção de identificar os avanços conquistados, bem como, identificar as dificuldades ainda presentes.

Como as questões que constituíram o pós – teste foram as mesmas que compuseram o instrumento de pré - teste, essas não serão apresentadas novamente, apenas serão lembrados os objetivos das mesmas.

5.3.1 Análise da questão 1 do pós-teste

A questão 1 teve por objetivos verificar a habilidade do aluno em fazer a correspondência entre um valor numérico e seu respectivo setor circular e, verificar se o aluno identifica um gráfico de setor.

Na questão 1.1 do pós – teste todos os alunos fizeram a correspondência entre o valor numérico (quatrocentos) e seu respectivo setor circular (180°). Acredita-se que o que contribui para o aproveitamento total da questão foi uma atividade proposta na sequência de ensino, na qual os alunos construíram um gráfico de setores, podendo perceber que existe uma correspondência entre o valor percentual ou numérico com o espaço ocupado pelos setores dentro do círculo.

Para a questão 1.2, onde no pré – teste apenas uma aluna respondeu satisfatoriamente a questão, obteve-se 86,36% de acerto no pós – teste. Percebeu-se que alguns alunos ainda confundem título com tipo de gráfico. Assim, considera-se importante que sejam desenvolvidas atividades em que os alunos identifiquem os tipos de gráficos mais comuns e também os elementos essenciais em uma representação gráfica.

5.3.2 Análise da questão 2 do pós-teste

A questão 2 teve como objetivos verificar a habilidade do aluno em realizar a leitura dos dados em um gráfico de segmento, prestando atenção nos eixos horizontal e vertical.

Com base na análise das respostas da questão 2.1 do pós – teste verificou-se que todos os estudantes realizaram a leitura dos dados em um gráfico de segmento, onde a informação pedida se encontrava no eixo horizontal.

Na questão 2.2, na qual a resposta se encontrava no eixo horizontal, houve um aproveitamento de 81,82%, sendo que somente 18,18% dos alunos continuaram confundindo os eixos. Com isso pode-se dizer que houve um avanço significativo no desempenho dos estudantes nessa questão, uma vez que no pré – teste o percentual de acertos foi de apenas 27,27%. Assim como na questão 2.1, também houve aproveitamento total na questão 2.3.

Embora a sequência de ensino não tenha abordado gráfico de linhas, acredita-se que a melhora no desempenho dos educandos em relação à leitura desse tipo de gráfico, tenha se dado devido ao contato proporcionado aos alunos com os pictogramas e com os gráficos de barras durante a aplicação da sequência de ensino, onde os eixos também foram temas de discussão.

5.3.3 Análise da questão 3 do pós-teste

A questão 3 teve como objetivos verificar a habilidade do aluno em realizar a leitura dos dados e a leitura entre os dados em um gráfico de barras duplas, verificar se o aluno identifica um gráfico de barras duplas e, verificar a habilidade do aluno em representar informações contidas em um gráfico de barras duplas por meio de uma tabela de dupla entrada.

Com base na análise das respostas da questão 3.1, verificou-se que somente a aluna A20 marcou o valor 8 como resposta, apresentando a quantidade de meninas e não de meninos, como se pedia. Os demais, 95,45% marcaram a resposta correta. Quando analisado o pré – teste, considerou-se que a metade dos alunos não haviam prestado atenção na legenda. Com isso, acredita-se que o aumento significativo de acertos, se deu em função da construção de vários gráficos durante a intervenção de ensino, onde era necessário trabalhar com a legenda.

Na questão 3.2 verificou-se que apenas três alunos não realizaram a leitura entre os dados em um gráfico de barras duplas, o que condiz a 86,36% de aproveitamento para essa questão. Percebe-se aqui também um aumento significativo de acertos comparando-se com o pré – teste, no qual nem a metade dos alunos havia acertado a questão. Acredita-se que esse avanço observado no desempenho dos alunos aconteceu por eles estarem agora familiarizados com esse tipo de gráfico. Esse resultado foi semelhante ao observado por uma pesquisa desenvolvida por Vasconcellos (2007), onde o pesquisador concluiu que a leitura de dados e a leitura entre os dados em gráficos não se configurou em dificuldade aos estudantes de uma 8ª série (9° ano) após a aplicação de uma intervenção de ensino pelo pesquisador.

Quanto à identificação do gráfico de barras duplas na questão 3.3, verificou-se que houve um aproveitamento de 90,91%. Apenas o aluno A18 confundiu com o gráfico de linhas e o aluno A10 associou com o título do gráfico. Observou-se que o aluno A10 já havia cometido esse engano com relação ao gráfico de setor.

Verificou-se também um avanço significativo no desempenho dos estudantes no que diz respeito à habilidade de passar informações de uma representação gráfica para uma representação tabular (transnumeração). Apenas 9,09% dos alunos construíram suas tabelas com os dados fictícios e 13,64% dos alunos deixaram a questão em branco. Os demais (77,27%) fizeram suas construções apresentando corretamente o cabeçalho, as categorias para as variáveis e os dados.

Quanto ao título da tabela e ao total, esses foram lembrados por uma minoria. Resultado diferente do observado por Medice (2007) com estudantes do 6° ano do Ensino Fundamental, onde segundo a pesquisadora, a maioria dos alunos assimilou as apresentações do título e do total para a construção de tabelas. Porém, em relação à informação da fonte, os resultados foram semelhantes, não havendo avanço significativo em ambos os casos. No que se refere ao cabeçalho, na pesquisa desenvolvida por Medice (2007) exatamente a metade dos alunos colocaram o cabeçalho em suas tabelas. Já na presente pesquisa, verificou-se que o cabeçalho fez parte de todas as tabelas construídas.

Apesar de a maioria dos alunos não terem se lembrado de colocar título, total e fonte em suas tabelas, considera-se que os resultados foram positivos, uma vez que pelo que foi verificado no pré – teste e observado durante a aplicação da sequência de ensino, esse foi um dos primeiros, senão o primeiro, contato que os estudantes tiveram com esse tipo de atividade.

5.3.4 Análise da questão 4 do pós-teste

Os objetivos da questão 4 do pré-teste consistiram em verificar a habilidade do aluno em retirar uma informação de uma tabela de dupla entrada e, verificar a habilidade do aluno em representar informações contidas em uma tabela de dupla entrada por meio de um gráfico de barras duplas.

Pode-se dizer que os alunos apresentaram um bom desempenho quanto a leitura de uma tabela de dupla entrada, totalizando 81,82% de acertos para a questão 4.1. Apenas quatro alunos erraram, marcando o futebol como resposta e, não o tênis como se esperava. Acredita-se que esses alunos não fizeram uma leitura geral dos dados, pois marcaram como resposta o esporte que ocupa o segundo lugar entre os que as meninas mais gostam de assistir. Também Vasconcelos (2007) percebeu que houve um aumento significativo no desempenho de estudantes de uma 8ª série (9° ano) quanto à leitura e interpretação de dados representados em uma tabela, após a aplicação de uma intervenção de ensino.

Na questão 4.2, onde foi solicitado que os dados contidos na tabela fossem representados em um gráfico de barras duplas, verificou-se que 72,73% dos alunos formaram um gráfico de barras duplas com os dados corretos, informando as categorias da variável e a legenda. Verificou-se também que 9,09% dos alunos representaram os dados por meio de dois gráficos de barras simples com valores incorretos e que os 18,18% restantes formaram gráficos de barras duplas, porém, os valores não correspondiam com os da tabela.

Quanto à apresentação do nome das categorias nos eixos horizontal e vertical, apenas 9, 09% dos pesquisados observou tal necessidade. Também na pesquisa realizada por Medice (2007) apenas 23% dos alunos do 6° ano se lembraram de colocar o nome das categorias. Para sanar esse problema, Medice (2007, p. 84) sugere que seja desenvolvida uma atividade em que sejam apresentados aos alunos “[...] gráficos sem nome nas categorias nos eixos, de forma que haja várias possibilidades, preferencialmente conflitantes, tentando fazê-los perceber a necessidade de sua apresentação”.

Embora durante a aplicação da sequência de ensino, os alunos tenham demonstrado compreender a necessidade da apresentação do título e da fonte tanto nos gráficos, quanto nas tabelas, um número mínimo de alunos lembrou-se de registrá-los em suas representações. Medice (2007) também não verificou um resultado completamente satisfatório quanto à apresentação desses elementos essenciais. Assim como essa pesquisadora, acredita-se que os alunos tenham se esquecido de colocar tais elementos em seus gráficos, “talvez pela ansiedade diante desse novo conhecimento” (Medice, 2007, p.84).

Da mesma forma que se afirmou sobre a atividade em que era solicitado que os alunos passassem as informações de um gráfico de barras duplas para uma tabela de dupla entrada, aqui também se concluiu que os resultados foram positivos, apesar de a maioria dos alunos terem se esquecido de colocar o título e a fonte em seus gráficos, pois conforme já discutido, essa atividade parece ser novidade para os estudantes.

Pode-se dizer que praticamente todos os estudantes tiveram seu desempenho melhorado quanto à construção de gráficos por meio da observação dos dados representados em uma tabela (transnumeração). Dentre as muitas observações realizadas, verificou-se um rendimento significativo na produção dos alunos que haviam deixado a questão em branco quando foi aplicado o pré – teste.

Em geral, como já discutido em cada uma das questões, verificou-se que houve um avanço significativo no desempenho dos estudantes do 7° ano do Ensino Fundamental em relação aos conteúdos básicos de Estatística. Na tabela 2 a seguir, pode-se melhor observar os dados discutidos anteriormente, e assim, evidenciar a eficácia da sequência de ensino contextualizada com base na melhora no índice de respostas corretas:

Tabela 2. Análise comparativa do desempenho dos alunos no pré-teste e no pós-teste em relação as respostas corretas

Questão	Pré-teste*	Pós-teste*
1.1	72,70 %	100 %
1.2	4,55 %	86,36 %
2.1	95,45%	100 %
2.2	27,27 %	81,82 %
2.3	77,27 %	100 %
3.1	50 %	95,45%
3.2	45,45 %	86,36 %
3.3	18,18 %	90,91 %
3.4	0 %	77,27 %
4.1	59,09 %	81,82 %
4.2	0 %	72,73 %

*Total de alunos = 22

Uma vez ainda, que a média de respostas corretas no pré-teste era de 40,91% e que passou a ser de 88,43% no pós-teste, reitera-se que a sequência de ensino pautada nos pressupostos da contextualização produz efeitos positivos para o processo de ensino e aprendizagem de conteúdos básicos de Estatística.

6 Considerações finais

Com base na análise realizada nas respostas dadas pelos alunos no pré-teste, pode-se considerar como insatisfatório o desempenho prévio dos estudantes do 7° ano do Ensino Fundamental em relação à leitura, interpretação e construção de gráficos e tabelas. Cabe salientar que tais conteúdos são considerados básicos e, que são recomendados pelos Parâmetros Curriculares Nacionais a serem trabalhados desde os anos iniciais do Ensino Fundamental nas escolas brasileiras.

Durante a aplicação da sequência de ensino contextualizada foram analisadas as atitudes dos alunos em relação ao processo de ensino e aprendizagem. Com isso, verificou-se que a sequência de ensino pautada nos pressupostos da contextualização contribuiu para:

- Despertar a motivação dos alunos para a participarem das aulas;
- Promover um envolvimento maior dos estudantes com o conteúdo abordado;
- Propiciar uma maior disposição dos educandos durante a realização das atividades.
- Promover maior interação entre o professor e os estudantes.

No que diz respeito aos conteúdos propriamente ditos, com base na verificação dos resultados obtidos no pós – teste, os quais foram detalhados na seção anterior, verificou-se que houve um avanço significativo quanto à aquisição de conteúdos básicos de Estatística por parte de educandos dos anos finais do Ensino Fundamental.

Considerando que a habilidade de leitura e interpretação de gráficos e tabelas é fundamental para a vida na sociedade moderna, acredita-se que a aplicação da sequência de ensino possibilitou que os estudantes aprimorassem seus conhecimentos sobre essas formas de representação de dados.

Verificou-se, porém, que os alunos não percebem a necessidade da apresentação do nome das categorias nos eixos horizontal e vertical nas representações gráficas, a apresentação do título e da fonte nas representações gráficas e tabulares. Assim, acredita-se que seja necessário dar mais atenção para a apresentação desses elementos. Portanto, com base nos resultados obtidos nessa pesquisa, pode-se concluir que a aplicação de uma sequência de ensino pautada nos pressupostos da contextualização, constitui-se em um recurso eficaz para a promoção da aprendizagem de conteúdos básicos de Estatística. Além disso, considera-se que essa aplicação contribui para a superação do modelo convencional de ensino, de modo a envolver ativamente o aluno com o conteúdo abordado.

Considera-se que a realização de atividades em que o aluno participa de forma ativa da coleta e tratamento de dados, como sugere a sequência de ensino aplicada nessa pesquisa, merece ter maior espaço na prática docente, uma vez que suas contribuições foram comprovadas. Espera-se que este trabalho possa incentivar outros professores de Matemática a investigarem contextos semelhantes, a fim de obter resultados que contribuam para uma melhor reflexão a respeito do ensino de Estatística no Ensino Fundamental.

Bibliografia

Andrini, Á.; Vasconcellos, M. J. C. de. (2005). *Novo Praticando Matemática*. São Paulo: Editora do Brasil.

Araujo, E. G. de. (2008). *O tratamento da informação nas séries iniciais uma proposta de formação de professores para o ensino de gráficos e tabelas*. 178. f. Dissertação (Mestrado em Educação Científica e Tecnológica) –Universidade Federal de Santa Catarina, Florianópolis, Brasil.

Batanero, C. ; Arteaga, P. ; Contreras, J. M. (2011). El currículo de estadística em la enseñanza obligatoria. *Revista de Educação Matemática e Tecnológica Iberoamericana*, v. 2, n. 2, p. 1-20.

Brasil. (1999). Ministério da Educação. Secretaria de Educação Média e Tecnológica. *Parâmetros Curriculares Nacionais:* Ensino Médio. Brasília.

Brasil. (2010). Ministério da Educação. Secretaria de Educação Básica. *Guia de livros didáticos*: PNLD 2011: Matemática. Brasília: MEC/SEB.

Carrera, E. T. F. (2002). Teaching statistics in secondary school. An overview: from the curriculum to reality. *Anais*…The Sixth International Conference on Teaching Statistics, Cape Town, South Africa.

Carvalho, C. (2003). Literacia estatística. *Anais...* I Seminário de Ensino de Matemática, Campinas, Brasil.

Carvalho, C. (2006). Desafios à educação estatística.In: *Boletim da Sociedade Portuguesa de Estatística*, Lisboa, Portugal.

Carvalho, C. (2009). Reflexões em torno do ensino e da aprendizagem da estatística: o exemplo dos gráficos. *Actas do II Encontro de Probabilidades e Estatística na Escola*, Centro de Investigação em Educação, da Universidade do Minho, Braga, Portugal.

Carvalho, L. M. T. L.; Monteiro, C. E. F.; Campos, T. M.M. (2010a). Refletindo sobre a interpretação de gráficos como uma atividade de resolução de problemas. In: Lopes, C. E. ; Coutinho, C. de Q. e S. ; Almouloud, S. A. (Orgs.) *Estudos e Reflexões em Educação Estatística*. Campinas: Mercado de Letras.

Carvalho, L. M. T. L.; Monteiro, C. E. F.; Campos, T. M.M. (2010b). Aspectos conceituais e visuais envolvidos na interpretação de gráficos. *Revista Iberoamericana de Educación Matemática*, n. 24, p. 135-144.

Castro, F. C. ; Cazorla, I. M. (2007). As armadilhas estatísticas e a formação do professor. *Anais... 16°* Congresso de Leitura do Brasil, Campinas, Brasil.

Cavalcanti, M. R. G.; Natrielli, K. R. B.; Guimarães, G. L. (2010). Gráficos na mídia impressa. *Bolema*, Rio Claro, Brasil, v. 23, n. 36, p. 733-751.

Cazorla, I. M. (2002). *A relação entre a habilidade viso-pictórica e o domínio de conceitos estatísticos na leitura de gráficos*. 315 f. Tese (Doutorado em Educação) – Faculdade de Educação, Universidade Estadual de Campinas, Campinas, Brasil. Cazorla, I. M. (2004). Estatística ao alcance de todos. *Anais...* VIII Encontro Nacional De Educação Matemática. Recife, Brasil.

Cazorla, I. M. ; Castro, F. C. (2008). O Papel da Estatística na Leitura de Mundo: O Letramento Estatístico. *Publicatio UEPG:* Ciências Humanas, Ciências Sociais Aplicadas, Linguística, Letras e Artes, Ponta Grossa, Brasil, v. 16, n. 1, p. 45-53.

Cazorla, Irene. ; Utsumi, M. C. (2010). Reflexões Sobre O Ensino Da Estatística Na Educação Básica. In: Cazorla, I.; Santana, E. (Org.) *Do tratamento da Informação ao Letramento Estatístico.* Itabuna: Via Litterarum.

Conti, K. C.; Carvalho, D. L. (2011). O letramento presente na construção de tabelas por alunos da educação de jovens e adultos. *Bolema*, Rio Claro, Brasil, v. 24, n. 40, p. 637-658.

Coutinho, C. Q. S. ; Silva, M. J. F. da. ; Almouloud, S. A. (2011). Desenvolvimento do pensamento estatístico e sua articulação com a mobilização de registros de representação semiótica. *Bolema*, Rio Claro, Brasil, v. 24, n. 39, p. 495-514, ago. Curcio, F. R. (1987). Comprehension of mathematical relationship expressed in graphs. *Journal for Research in Mathematics Education*, v.18, n.5, p. 382-393.

Febles, M. C. E. (2007). Construcción y razonamiento de gráficos estadísticos em la formación de profesores. *Investigación En Educación Matemática XI*, San Cristóbal de La Laguna, Espanha, p. 99-119.

Fernandes, J. A. ; Morais, P. C. (2011). Leitura e interpretação de gráficos estatísticos por alunos do 9° ano de escolaridade. *Educ. Matem. Pesq*., São Paulo, Brasil, v. 13, n. 1, p. 95-115.

Flores, C. R. ; Moretti, M. T. (2005). O funcionamento cognitivo e semiótico das representações gráficas: ponto de análise para a aprendizagem matemática. In:

28ª Reunião da Anped, Caxambu, Brasil. *Anais... 28ª Reunião da Anped*. Rio de Janeiro: Anped, v. 1.

Freitas, C. M. P. (2011). *O desenvolvimento da literacia estatística no 5° ano* uma experiência de ensino. 179 f. Dissertação (Mestrado em Educação) – Instituto de Educação da Universidade de Lisboa, Universidade de Lisboa, Lisboa, Portugal.

Gal, I. (2002). Adult's statistical literacy : meanings, components, responsabilities. *International Statistical Review*, v. 70, n. 1, p. 1-25.

Guimarães, G.; Gitirana, V.; Marques, M.; Cavalcanti, M. R. (2009). A educação estatística na educação infantil e nos anos iniciais. *Zetetiké*, Campinas, Brasil, v. 17, n. 32, p.12-28.

Kataoka, V. Y. ; Hernandez, H. (2010). Sequência de ensino 1: perfil da turma. In: Cazorla, I.; Santana, E. (Org.) *Do tratamento da Informação ao Letramento Estatístico*. Itabuna: Via Litterarum.

Lima, R. C. R. ; Magina, S. M. P . (2007). Ler e Interpretar Gráficos Usando as Novas Tecnologias: um estudo com alunos da 4a série do ensino Fundamental. In: IX Encontro Nacional de Educação Matemática, Belo Horizonte, Brasil. *Diálogos entre a Pesquisa e a Prática Educativa*. Belo Horizonte : Dantas Projetos Digitais, v. 1. p. 1-16.

Lira, O.; Monteiro, C. (2011). Interpretação de dados a partir da utilização de ferramentas do software tinkerplots, *Bolema*, Rio Claro, Brasil, v. 24, n. 40, p. 765-788.

Lopes, C. (2008). O ensino da Estatística e da Probabilidade na educação básica e a formação dos professores. *Cad. Cedes*, Campinas, Brasil, v. 28, n. 74, p. 57-73.

Lopes, C. E. (2010). Os Desafios Para Educação Estatística No Currículo de Matemática. In: Lopes, C. E. ; Coutinho, C. de Q. e S. ; Almouloud, S. A. (Orgs.) *Estudos e Reflexões em Educação Estatística*. Campinas: Mercado de letras.

Machado, L. R. S.; Salles, L. M. A. (2009). Aprendizagem contextualizada e educação superior em leis educacionais. *Revista Educação & Tecnologia*, Belo Horizonte, Brasil, v. 14, n. 1, p. 44-50.

Manechine, S.; Gabini, W. S.; Caldeira, A. M. A.; Diniz, R. E. S. (2006). A inserção de conceitos científicos no cotidiano escolar. *Ensaio- Pesquisa em Educação em Ciências*, Belo Horizonte, Brasil, v. 8, n. 1,p. 1-14, Minas Gerais, Brasil.

Medice, M. (2007). *A construção do pensamento estatístico:* organização, representação e interpretação de dados por alunos da 5ª série do ensino fundamental. 127 f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) - Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, Brasil.

Mello, G. N. (2005). *Transposição Didática, Interdisciplinaridade e Contextualização*. Produção on-line. Disponível em: http://www.namodemello.com.br/outros.html. Acesso em: 16 nov. 2010.

Monteiro, C. E. F. (2006). Investigando o Senso Crítico na Interpretação de Gráficos entre professores em formação inicial. In: Reunião Anual da Associação Nacional de Pós-Graduação em Educação, Caxambú. *Reunião Anual da Associação Nacional de Pós-Graduação em Educação*, v. 1, p. 1-16.

Monteiro, C. E. F.; Selva, A. C. V (2001). Investigando a atividade de interpretaçào de gráficos entre professores do ensino fundamental. In: 24a. Reunião anual da ANPEd, 2001, Caxambu, Brasil. *Anais da 24a. ANPEd*.

Pais, L. C. (2002). *Didática da Matemática*: uma análise da influência francesa . 2. ed. Belo Horizonte: Autêntica.

Paraná (2008). Secretaria de Estado da Educação. *Diretrizes curriculares da educação básica*: matemática. Paraná: SEED/DEB.

Ramos, M. N. (2004). Os contextos no ensino médio e os desafíos na construção de conceitos. In: *Temas de ensino médio*. Rio de Janeiro: Fundação Oswaldo Cruz; Escola Politécnica de Saúde Joaquim Venâncio, p. 66-79.

Rumsey, D. (2002). Statistical Literacy as a Goal for Introductory Statistc Courses, *Journal of Statistics Education*, v. 10, n. 3.

Sadovsky, P. (2007). *O ensino de matemática hoje*-enfoques, sentidos e desafios**.** São Paulo: Ática.

Santana, R. M. (2007). Categorización de la comprensión de gráficas estadísticas en estudiantes de secundaria (12-15). *Revista Electrónica De Investigación En Educación En Ciencias*, Argentina, Buenos Aires, v. 2, n. 2, p. 29-38.

Tufano, W. (2001). Contextualização. In: Fazenda, I. C. A. (Org). *Dicionário em Construção*: Interdisciplinaridade**.** São Paulo: Cortez.

Vasconcelos, M. B. F. (2008). *A contextualização e o ensino de matemática:* um estudo de caso. 113 f. Dissertação (Mestrado em Educação) - Universidade Federal da Paraíba, João Pessoa, Brasil.

Vasconcelos, P. R. (2007). *Leitura e Interpretação de Gráficos e Tabelas:* Estudo Exploratório com Alunos da 8ª Série do Ensino Fundamental. 206 f. Dissertação (Mestrado Profissional em Ensino de Matemática) - Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, Brasil.

Vialli, L; Sebastiani, R. (2010). Ensino de estatística na escola básica com o recurso da planilha. In: Lopes, C. E. ; Coutinho, C. de Q. e S. ; Almouloud, S. A. (Orgs.) *Estudos e Reflexões em Educação Estatística*. Campinas: Mercado de letras.

Vieira, M. (2008). *Análise exploratória de dados:* uma abordagem com alunos do ensino médio. 184 f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) - Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, Brasil.

Wagner, R. R. (2006). *A Relação Dos Professores De Matemática Com O Processo De Transposição Didática***:** Apoios Na Interdisciplinaridade, Na Contextualização E Na Complexidade Do Conhecimento. 103 f. Dissertação (Mestrado em Educação) Universidade Estadual de Ponta Grossa, Ponta Grossa, Brasil.

Wallman, K. K. (1993). Enhancing Statistical Literacy: Enriching our society. *Journal of the American Statistical Association*. v. 88, n. 421, p. 1-8.

Danieli Walichinski possui graduação em Licenciatura em Matemática pela Universidade Estadual de Ponta Grossa (2002) e especialização em Educação Especial pela Faculdade Internacional de Curitiba (2006). Leciona nas séries finais do Ensino Fundamental. Atualmente é aluna do curso de Mestrado do Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciência e Tecnologia da Universidade Tecnológica Federal do Paraná, desenvolvendo pesquisas relacionadas ao ensino de Estatística. **dani.walichinski@gmail.com**

Guataçara dos Santos Junior possui graduação em Licenciatura em Matemática pela Universidade Estadual de Ponta Grossa (1993), Mestrado em Ciências Geodésicas pela Universidade Federal do Paraná (2001) e Doutorado em Ciências Geodésicas pela Universidade Federal do Paraná (2005). Na Universidade Tecnológica Federal do Paraná atua no curso de Mestrado do Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciência e Tecnologia, orientando trabalho.

UNIÓN
REVISTA IBEROAMERICANA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA
www.fisem.org/web/union

ISSN: 1815-0640
Número 35. Septiembre de 2013
páginas 43-58

Generalizaciones del Concepto de Métrica

Otilio B. Mederos Anoceto, Rita A. Roldán Inguanzo

Fecha de recepción: 17/07/2012
Fecha de aceptación: 7/08/2013

Resumen	En este trabajo se define y se aplica el concepto de criterio de generalización de un concepto eliminando propiedades de su contenido. Se obtienen 16 generalizaciones del concepto de métrica. Se construyen los mapas de extensiones, simbólicos y de cardinalidades, para diferentes niveles de generalización correspondientes al criterio. Se construye, además, una clasificación para cada una de las generalizaciones. **Palabras clave**: métrica, generalizaciones.
Abstract	This paper defines and applies the concept of generalization criterion of a concept, by eliminating of properties of its content. 16 generalizations of the concept of metric are obtained. There are constructed maps of extensions, symbolic maps, and maps of cardinalities for different levels of generalization for the criterion. It's constructed also a classification for each of the generalizations. **Keywords**: metric, generalizations.
Resumo	Neste artigo definese e aplicase o conceito de um critério de generalização dum conceito eliminando propriedades de seu conteúdo. São obtidas 16 generalizações do conceito de métrica. São construídos mapas de extensões, simbólicos e de cardinalidades para diferentes níveis de generalização correpondentes ao critério. É construída também uma classificação para cada uma das generalizações. **Palavras-chave**: métrica, generalizações.

1. Introducción

Generalizar un concepto pudiera constituir una de las vías para comprenderlo mejor. Sin embargo, lo más común en la enseñanza de la Matemática es definir los diferentes conceptos, dejando las generalizaciones a los investigadores e interesados. En este trabajo se ejemplifica la generalización a partir del concepto de métrica, eliminando propiedades de su contenido. Se presentan 16 generalizaciones del concepto de métrica, con sus correspondientes clasificaciones y mapas de extensiones, simbólicos y de cardinalidades.

Las tres primeras secciones del trabajo constituyen fundamentos teóricos de la cuarta sección, en donde se presenta los resultados novedosos. La primera sección se dedica a exponer algunos de los resultados recientes de la Psicología Educativa relativos a los procesos, estrategias y técnicas de aprendizaje, y a justificar desde el punto de vista del aprendizaje cognitivo la utilización de mapas como técnicas de aprendizaje. En la segunda sección se fundamenta, desde el punto de vista de la lógica formal, una definición del concepto de concepto. En la tercera sección se hace referencia, por una parte a la generalidad de los mapas conceptuales como técnica de aprendizaje de conocimientos de cualquier asignatura y, por otra, a proponer mapas de otros tipos, más apropiados para representar relaciones significativas entre conceptos matemáticos. Se definen en esta sección los conceptos de mapas de extensiones, de proposiciones, simbólicos y de cardinalidades.

En la primera parte de la cuarta sección se presentan definiciones de la generalización restringida al proceso de formación conceptual, y como operación conceptual, en su doble carácter de proceso y resultado. En el epígrafe 5.2 se construyen 16 generalizaciones del concepto de métrica que se obtienen aplicando un adecuado criterio de generalización en el que intervienen las cuatro generalizaciones construidas por (Mederos y Roldán, 2010, pp. 29-39).

2. Sobre el proceso de aprendizaje

La Psicología Educativa, en los últimos años, ha tenido entre sus tareas fundamentales el estudio de los subprocesos del proceso complejo de aprendizaje. La determinación de estos subprocesos ha permitido profundizar en el aprendizaje significativo y se ha contrapuesto al objetivo casi exclusivo del aprendizaje tradicional, los contenidos.

Los resultados del aprendizaje dependen de los procesos sugeridos por el profesor y puestos en marcha por el estudiante mientras aprende. Surge entonces la pregunta ¿cuántos y cuáles son los procesos de aprendizaje? Según (Beltrán, 1998, p. 40-41), varios autores dieron respuesta a esta pregunta a finales del siglo pasado, presentando diferentes conjuntos de subprocesos, entre ellos Gagne, Cook, Thomas y Shuell. Los subprocesos presentados por Beltrán en el libro citado son los de sensibilización, atención, adquisición, personificación, recuperación, transfer y evaluación.

Una vez establecidos los subprocesos que forman el proceso complejo de aprendizaje, hay que dar respuesta a la pregunta ¿cómo se ponen en marcha los procesos de aprendizaje?

> “Los procesos de aprendizaje pueden llevarse a cabo por medio de actividades mentales muy diversas, dando lugar a estrategias más o menos eficaces que movilizan dichos procesos.” (Beltrán, 1998, p. 47).

Las estrategias de aprendizaje son operaciones o actividades mentales que facilitan y desarrollan los diversos procesos del aprendizaje escolar. Por medio de las estrategias, los estudiantes pueden procesar, organizar, retener y recuperar material informativo que tienen que aprender, a la vez que planifican, regulan y evalúan esos mismos procesos en función del objetivo previamente trazado o exigido por las demandas de la tarea.

En el subproceso de adquisición (Beltrán, 1998, p.78), intervienen varios subprocesos. Uno de ellos es el de comprensión, que es facilitado por estrategias de selección, de organización y de metacognición. Una vez que se han identificado y separado los elementos informativos relevantes de los no relevantes mediante la estrategia de selección, se deben ordenar estos elementos en un todo coherente y significativo por medio de la estrategia de organización. La estrategia de elaboración también tiene como objetivo articular elementos informativos relevantes en un todo significativo y coherente.

La diferencia esencial entre las estrategias de organización y elaboración es que la primera establece conexiones internas entre los datos informativos relevantes, y la segunda crea conexiones externas entre la nueva información y la información ya almacenada en la memoria. Según (Pérez, 1990, p. 45) cuantas más conexiones se establecen entre los datos informativos, mejor se aprende y se recuerda la información. (Yussen y otros, 1974, p. 97) demostraron que se produce un aumento de recuerdo a medida que aumenta el índice de organización de los contenidos.

Para poner en marcha cada una de estas estrategias es necesario aplicar diferentes técnicas. Por ejemplo, para la estrategia de organización se reportan las técnicas siguientes: red semántica, análisis de contenido estructural, árbol organizado, mapa semántico, mapa conceptual, heurístico, conocimiento como diseño.

Las técnicas para cada una de las estrategias de los diferentes subprocesos de aprendizaje han sido determinadas para el aprendizaje de contenidos en general, y no para contenidos matemáticos particulares y mucho menos para contenidos matemáticos de la educación universitaria.

Uno de los objetivos específicos de este trabajo es presentar nuevas técnicas, *mapas de extensiones, simbólicos y de cardinalidades*, para que los estudiantes desarrollen la estrategia de organización relativas a siete procesos de generalización del concepto de métrica con sus correspondientes procesos de clasificación, que les permitan participar en el subproceso de adquisición de conocimientos y, particularmente, en el de comprensión.

3. Sobre el concepto de concepto

Un concepto es un modelo mental generalizado de determinados rasgos o propiedades de objetos, o relaciones entre objetos agrupados en una clase; así como de los objetos con esas características agrupados en otra clase. Se denominan propiedades esenciales de un concepto a características de los objetos modelados en el mismo, cada una de las cuales es necesaria para distinguir los objetos que corresponden al concepto de los demás. El concepto de objeto se toma como primario; es decir, sin definición.

Todo concepto posee siempre dos características lógicas: el *contenido* y la *extensión*. Un conjunto de propiedades esenciales de los objetos modelados en el concepto, que sea suficiente para distinguir los nuevos objetos del concepto, constituye su contenido. El contenido es un factor indispensable de todo concepto, por lo que no puede existir un concepto carente de contenido, en el que consecuentemente no se conciba propiedad alguna. La extensión de un concepto es la clase (conjunto) de modelos de los objetos que dicho concepto abarca. La extensión es una característica lógica del concepto tan indispensable como su contenido. Se entiende por modelo del objeto la colección de sus registros de representaciones.

En este trabajo se indica el concepto por el par (E,C), o simplemente por E cuando no haya dudas; donde E denota a la extensión del concepto y C a su contenido. Pueden encontrarse diferentes colecciones C de propiedades que sólo cumplen los elementos de E. Es usual indicar el contenido por la colección de propiedades $\{P_i\}_{i\in I}$ que se haya escogido, donde I es un conjunto de índices. Ello indica que los objetos que pertenecen a la extensión del concepto cumplen simultáneamente todas esas propiedades, o lo que es lo mismo, cumplen la propiedad única $\underset{i\in I}{\wedge} P_i$.

4. Sobre los mapas conceptuales

Según (Beltrán, 1998, p.155)

> "…el significado del aprendizaje se percibe más fácilmente cuando los contenidos del aprendizaje están organizados, poseen una estructura y están relacionados entre sí. Ningún instrumento es mejor que los mapas conceptuales para lograr este objetivo".

En una entrevista concedida especialmente a EDUTEKA, (Novak, 2006, p.1) expresó

> "Los mapas conceptuales, como los conocemos y los describimos, se desarrollaron en 1972 dentro de un proyecto de investigación a mi cargo en la Universidad de Cornell. Este proyecto se enfocó en hacer seguimiento a estudiantes de educación básica desde el primer grado hasta el grado 11◦, para estudiar de qué manera la enseñanza en los conceptos básicos de ciencias en los dos primeros grados escolares influenciaría el aprendizaje posterior en ciencias y, además, comparar estudiantes que recibieran esa instrucción temprana con los que no la recibieran."

Para (Jones y otros, 1987) citado por (Beltrán, 1998, p. 155), se distinguen tres clases de mapas conceptuales: mapas araña, mapas encadenados y mapas jerárquicos. Según (Hernández, 1990) citado por (Beltrán, 1998, p. 157), los mapas se han usado con una gran variedad de contenidos y grupos de edad, y con dos medios: los textos y los ordenadores. El contenido ha incluido disciplinas como ecología, genética, economía familiar, geología, etc. Y los grupos de edad llegan desde los alumnos de primaria a la universidad.

(Beltrán, 1998, p. 162-168) cita una gran cantidad de investigaciones que se han realizado sobre los mapas conceptuales. Entre ellas, consideramos las investigaciones que han contribuido a determinar diferentes clases de relaciones en los mapas conceptuales (Armbruster, 1994), (Huang, 1988) y (McAllese, 1998).

> "Las relaciones son muy variadas, entre las cuales destacamos estas nueve: A es una instancia de B (por ejemplo, tipo de, clase de, y por ejemplo). La segunda, A es una propiedad de B (un rasgo de, es una característica de, se llama y es definido como). La tercera, A es idéntico a B (es idéntico a y es lo mismo que). La cuarta, A es semejante a B (es como, es semejante a, de manera semejante). La quinta, A no es semejante a B (es diferente, en contraste). La sexta, A es mayor que menor que). La séptima, A ocurre antes que B (y después, antes,…). La octava, A causa a B (causa, produce, porque, consiguientemente). La novena, A permite a B (permite, requiere)."

Tony Buzan le llamó mapa mental a una técnica que ideó para la toma de notas, la cual ha sido desarrollada por (Brinkmann, 2003, p. 96-101) para su uso en el proceso de enseñanza-aprendizaje de la Matemática. En la matemática disciplinar se utilizan representaciones visuales de las relaciones entre las extensiones de ciertas clases de conceptos. (Steen y Seebach, 1995, p. 15-24) hacen uso frecuente de este tipo de representaciones; por ejemplo, las figuras de la 1 a la 6 en las páginas 15,16, 21, 22, 23 y 24 respectivamente.

4.1. Mapas de extensiones, simbólicos y de cardinalidades

Otro objetivo específico del trabajo es ampliar los significados conocidos del concepto de mapa conceptual, al proponer y utilizar mapas de otros tipos para representar relaciones entre conceptos matemáticos y contribuir de esa manera al aprendizaje significativo de la Matemática.

Se introducen y utilizan los conceptos de mapa de extensiones, mapa simbólico y mapas de cardinalidades, y se considera un mapa conceptual matemático, como un conjunto de mapas entre los que se encuentran los tres anteriores, el cual tiene gran utilidad para la representación de relaciones exactas entre conceptos matemáticos tanto en el trabajo escolar como disciplinar. Por un problema de espacio solo tratamos exhaustivamente el concepto de mapa de extensiones.

Un *mapa de extensiones* es un diagrama (una imagen visual) en el que se representan gráficamente las extensiones de varios conceptos que se han definido a partir de un mismo concepto; o entre los que existe alguna relación de dependencia (por ejemplo, son generalizaciones de un mismo concepto).

Un *mapa de proposiciones* es un conjunto de proposiciones, cada una de las cuales se obtiene utilizando los contenidos correspondientes a las extensiones del mapa visual y el aparato lógico deductivo. La construcción de los mapas de extensiones y de proposiciones están intrínsecamente relacionadas.

Para la construcción de un mapa de extensiones es necesario establecer, mediante la demostración de proposiciones, todas las relaciones entre los conceptos correspondientes a las extensiones que va formando el mapa. Consecuentemente, se van construyendo de manera simultánea los mapas de extensiones y de proposiciones. Los mapas de extensiones tienen la ventaja de ser más fáciles de recordar que los de proposiciones y que, a partir de ellos pueden construirse los mapas de proposiciones.

Las relaciones entre los conceptos de ciertas clases, por ejemplo, de un concepto y sus generalizaciones, pueden expresarse mediante relaciones y operaciones de la teoría de conjuntos, lo que constituye un *mapa simbólico*. Entre los mapas de extensiones, de proposiciones y simbólicos tiene que existir una total correspondencia, lo cual se justifica por formar ellos parte del mapa conceptual.

Cuando se determina la cardinalidad de todas las extensiones de los conceptos que integran el mapa de extensiones, el conjunto de estas cardinalidades se denomina *mapa de cardinalidades*. Una vez que se ha construido el mapa de cardinalidades, la información que éste brinda permite construir una aproximación mejor del mapa de extensiones.

Los mapas de extensiones forman parte de los instrumentos que mejor propician y facilitan que el aprendizaje sea significativo; ya que por una parte, nuestro conocimiento está conectado o puede conectarse con todos los otros conocimientos con los que guarda relación por medio de conceptos y sus relaciones y, por otra parte, son organizadores excelentes de los contenidos y propician estrategias de elaboración. En consecuencia, contribuyen a que el significado del aprendizaje se aprecie más fácilmente.

La forma del mapa de extensiones depende del concepto de partida (concepto universo) que se tome para describir la organización de una colección de conceptos y está en correspondencia con sus relaciones de inclusión y con las operaciones conjuntista de intersección, unión, diferencia y diferencia simétrica.

Generalmente un mapa de extensiones comienza con el dibujo de una primera aproximación que refleja la información que se tiene en un determinado momento. Las insuficiencias de ese mapa compulsan a la determinación de más información y al dibujo de una sucesión de mapas que precisen, completen y mejoren la representación de la información que se va agregando. Cada nuevo mapa de esta sucesión constituye una aproximación mejor de la relación real de la colección de extensiones.

Los mapas de extensiones no necesariamente son jerárquicos porque muestran las relaciones exactas entre las extensiones, dos a dos, de los conceptos implicados; es decir, para el trazado del mapa se determina, para dos extensiones E_1 y E_1 cualesquiera, qué relación de las representadas en la figura 1 se presenta.

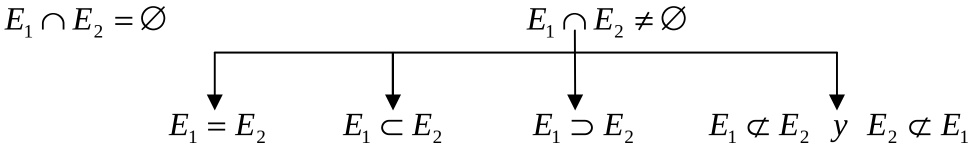


Figura 1: Posibles relaciones conjuntistas entre las extensiones de dos conceptos.

Algunas características de los mapas de extensiones, adicionales a las ya señaladas, son las siguientes:

1. Ponen de manifiesto la necesidad de formar nuevos conceptos para eliminar vacíos que aparecen ente los conceptos ya formados.
2. Al integrar un nuevo concepto a un mapa de extensiones que con anterioridad se tiene; se establecen conexiones duraderas entre el nuevo conocimiento y el ya adquirido.
3. Pueden ser usados en todos los niveles de enseñanza; pero son muy necesarios en la enseñanza universitaria donde muchos conceptos tienen extensión infinita.
4. Un mapa de extensiones demanda la caracterización de cada uno de los subconjuntos en que ha quedado dividida la extensión de un concepto subordinante, y el establecimiento de todas las relaciones proposicionales entre todas esta partes.
5. Cuando se trabaja con un conjunto de conceptos cuyas extensiones tienen determinadas estructuras, entonces este conjunto de conceptos puede tener desde el punto de vista conjuntista un mapa de extensiones y, otro distinto con respecto a una estructura diferente.

5. La generalización

La generalización, tanto como operación conceptual, como restringida al proceso de formación conceptual, tiene un doble carácter proceso y resultado. En la lógica, la psicología educativa y la didáctica, la generalización es considerada como uno de los subprocesos del proceso de formación conceptual.

Strogóvich, citado por (Davýdov, 1981, p.47), da la definición de generalización como subproceso del proceso de formación conceptual siguiente:

> "Generalizar es efectuar el tránsito mental desde los indicios aislados y singulares de los objetos hasta los indicios pertenecientes a grupos enteros de dichos objetos."

UNIÓN

Según Chelpanov y Asmus, citados por (Davýdov, 1981, p.47), la palabra generalización se utiliza también para designar el resultado de la generalización como proceso, que se materializa en el concepto ya formado.

En (Gorski y otros, s.f. p. 68) se define:

> ”se llama generalización del concepto a la operación lógica gracias a la cual se amplía la extensión de aquel eliminando todos los caracteres que pertenecen sólo a los objetos que entran en la extensión inicial.”

En (Gorski, 1987, p. 78) se da una definición lógico analítica de la generalización de un concepto:

> ”La generalización de un concepto es una operación lógica que posibilita pasar de conceptos de una clase menor a otros de una clase mayor, al descartar atributos que pertenecen únicamente a los objetos que forman parte del concepto que está siendo generalizado.”

En (Mederos y Roldán, 2010, , pp. 33) se define:

Definición 4.1. Dado un concepto (E_1,C_1), que se ha definido a partir del concepto (E,C), se llama generalización del concepto (E_1,C_1) subordinada a (E,C) a la operación que permite construir, a partir de (E_1,C_1), el concepto (F_1,D_1) con las propiedades:

(p1) D_1 es un debilitamiento de C_1, ($C_1 \Rightarrow D_1$ pero D_1 no implica C_1),

(p2) D_1 es más fuerte que C, ($D_1 \Rightarrow C$ pero C no implica D_1),

(p3) $\varnothing \subset E_1 \subset F_1 \subset E$.

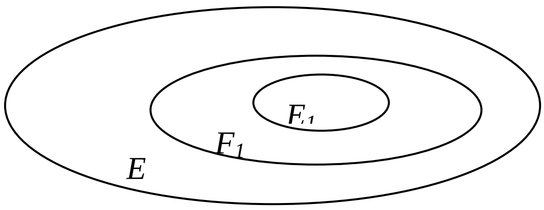


Figura 2: Mapa de las extensiones

El proceso de construcción de (F_1,D_1) a partir de (E_1,C_1) recibe el nombre de *proceso de generalización*; y el concepto (E_1,C_1) se denomina *concepto de partida de la generalización*. Los conceptos (E_1,C_1) y (E,C) son los casos límite del proceso de generalización, que corresponden a la ausencia de generalización y a la generalización absoluta subordinadas a (E,C) respectivamente. Las generalizaciones de los casos límite se denominan *generalizaciones impropias*. En la figura 2 se presenta un mapa de las extensiones E_1, F_1 y E.

5.1. Tipos de tareas didácticas sobre la generalización de conceptos

En el trabajo matemático se pueden presentar distintos tipos de tareas relativas a la generalización de conceptos, entre las cuales están las siguientes:

1. Dados un concepto (E_1,C_1) y un conjunto de propiedades D_1; determinar si D_1 es más débil que C_1.
2. Dado un concepto (E_1,C_1), obtener un debilitamiento D_1 de C_1.

3. Dado un concepto (E_1, C_1) y un debilitamiento D_1 de C_1; construir la generalización (F_1, D_1) de (E_1, C_1).
4. Dado un concepto (E_1, C_1), determinar uno o varios criterios de generalización del concepto.
5. Construir las generalizaciones de (E_1, C_1) correspondientes.
6. Construir los mapas de proposiciones, de extensiones, simbólicos y de cardinalidades de un conjunto de generalizaciones de un concepto.

Las tres primeras tareas se utilizaron en Mederos y Roldán (2010) para construir generalizaciones del concepto de métrica. Para dar cumplimiento a una tarea del primer tipo es necesario demostrar que C_1 implica D_1; pero que D_1 no implica C_1. La segunda tarea es de mayor complejidad que la primera, y se presenta cuando se quiere, por ejemplo, obtener un nuevo concepto que generalice algún significado del concepto que se desea generalizar. Cuando se dispone de un debilitamiento D_1 de C_1, la construcción de la generalización es inmediata, y en consecuencia, el cumplimiento de una tarea del tercer tipo.

El cuarto tipo de tarea requiere la realización de un proceso de selección de propiedades con las cuales se puedan construir conjuntos que generen los contenidos de diferentes generalizaciones. Para ello, por lo general hay que demostrar varias proposiciones. Una vez que se ha determinado un criterio de generalización, su aplicación permite dar cumplimiento a una tarea del quinto tipo. La construcción de un mapa de extensiones relativo a un conjunto de generalizaciones de un concepto, cuando se ha cumplido con anterioridad una tarea del tipo 4, por lo general no es una tarea fácil. Si se tiene construido un mapa de extensiones, la construcción de los mapas de proposiciones y simbólico es inmediata. La construcción de un mapa de cardinalidades de las extensiones de los conceptos que intervienen en el mapa de extensiones requiere de la demostración de proposiciones.

En este trabajo se obtienen los debilitamientos D_1 de C_1 quitando una propiedad de C_1. Es por ello que, en una primera aproximación, se considera criterio de generalización a una colección de conjuntos de conjunciones de propiedades del contenido del concepto que se generaliza. En la sección 5.2 se da cumplimiento a tareas de los tipos presentadas en esta sección.

5.2. Generalización del concepto de métrica

Dado un conjunto M, el concepto de función real no negativa con dominio $M \times M$ se indica por F_M. El concepto de métrica se ha definido a partir del concepto F_M, tiene por contenido al conjunto C de propiedades $\{m_1, m_2, m_3, m_4\}$, válidas para cualesquiera $x, y, z \in M$ y su extensión se indica por M_M, siendo

m_1) si $x = y$, entonces $m(x, y) = 0$;

m_2) $m(x, y) = m(y, x)$;

m_3) $m(x, y) = m(x, z) + m(z, y)$;

m_4) si $m(x, y) = 0$, entonces $x = y$.

Las colecciones de conjuntos de propiedades $\{F_i^{(1)}\}$, $\{F_{ij}^{(2)}\}$ y $\{F_{ijk}^{(3)}\}$ son criterios de generalización del concepto de métrica, donde $F_i^{(1)} = \{p_i\}$, $p_i = m_j \wedge m_k \wedge m_l$, $j,k,l \in \{1,2,3,4\} \setminus \{i\}$; $F_{ij}^{(2)} = \{p_{ij}\}$, $p_{ij} = m_k \wedge m_l$, $k,l \in \{1,2,3,4\} \setminus \{i,j\}$, $i < j$; $F_{ijk}^{(1)} = \{p_{ijk}\}$, $p_{ijk} = m_l$, $l \in \{1,2,3,4\} \setminus \{i,j,k\}$, $i < j < k$. A partir de estos criterios se construyen generalizaciones que dejan de satisfacer, como máximo, una, dos o tres propiedades de C, respectivamente.

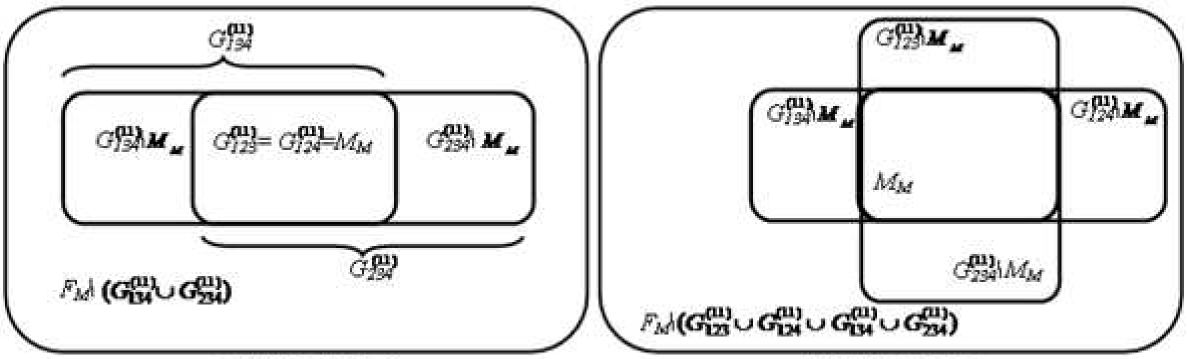
En esta sección se estudian las generalizaciones que se obtienen a partir del criterio $\{F_i^{(1)}\}$ con $i = 1:4$, en cinco niveles. Al primer nivel corresponden, como máximo, cuatro generalizaciones. El contenido de estas generalizaciones se indica por $C_{jkl}^{(11)}$, y se define por la igualdad $C_{jkl}^{(11)} = \{p_i\}$, $i = 1:4$. La extensión correspondiente se denota por $G_{jkl}^{(11)}$. Las letras de los subíndices de las notaciones de la extensión y del contenido corresponden a índices de las propiedades del contenido del concepto de métrica que se cumplen.

Mederos y Roldán (Mederos y Roldán, 2010, pp. 29-39) determinan y estudian las generalizaciones del primer nivel, a saber, las pseudométricas, quasimétricas, las semimétricas y las métricas sin identidad. Estas generalizaciones las denotan por P_M, Q_M, S_M e I_M, donde

$$G_{123}^{(11)} = P_M,\ G_{124}^{(11)} = S_M,\ G_{134}^{(11)} = Q_M \text{ y } G_{234}^{(11)} = I_M.$$

Se prueba que estas cuatro generalizaciones constituyen nuevos conceptos, si y solo si, el cardinal de M es mayor que 2. En el caso en que el cardinal de M es 2 las generalizaciones S_M y P_M coinciden con el concepto M_M que se generaliza. En este trabajo se construyen, además, los mapas simbólicos, de cardinalidades y de extensiones de las generalizaciones obtenidas.

La figura 3 muestra el mapa de extensiones correspondiente a estas generalizaciones y a continuación se presentan los correspondientes mapas simbólicos y de cardinalidades.



a) CASO: $[M] = 2$ b) CASO: $[M] \geq 2$

Fig. 3. Mapa de las extensiones y sus generalizaciones $G_{iik}^{(11)}$

MAPAS SIMBÓLICOS

- CASO $[M] = 2$:

$$G_{123}^{(11)} = G_{124}^{(11)} = M_M, \qquad G_{234}^{(11)} \cap G_{134}^{(11)} = M_M,$$

$$\varnothing \subset F_M \setminus (G_{234}^{(11)} \cup G_{134}^{(11)}) \subset F_M, \quad G_{234}^{(11)} \setminus M_M \neq \varnothing, \quad G_{134}^{(11)} \setminus M_M \neq \varnothing.$$

- CASO $[M]>2$:

$$G_{123}^{(11)} \cap G_{124}^{(11)} \cap G_{134}^{(11)} \cap G_{234}^{(11)} = M_M\,, \quad F_M \setminus (G_{123}^{(11)} \cup G_{124}^{(11)} \cup G_{134}^{(11)} \cup G_{234}^{(11)}) \neq \varnothing\,,$$

$$G_{234}^{(11)} \setminus M_M \neq \varnothing\ ,\ G_{134}^{(11)} \setminus M_M \neq \varnothing\ ,\ G_{123}^{(11)} \setminus M_M \neq \varnothing\ ,\ G_{124}^{(11)} \setminus M_M \neq \varnothing\,.$$

<u>MAPAS DE CARDINALIDADES</u>

- CASO $[M]=2$:

$$[M_M]=[G_{234}^{(11)} \setminus M_M]=[G_{134}^{(11)} \setminus M_M]=[F_M \setminus (G_{234}^{(11)} \cup G_{134}^{(11)})]=\aleph\,.$$

- CASO $[M]>2$:

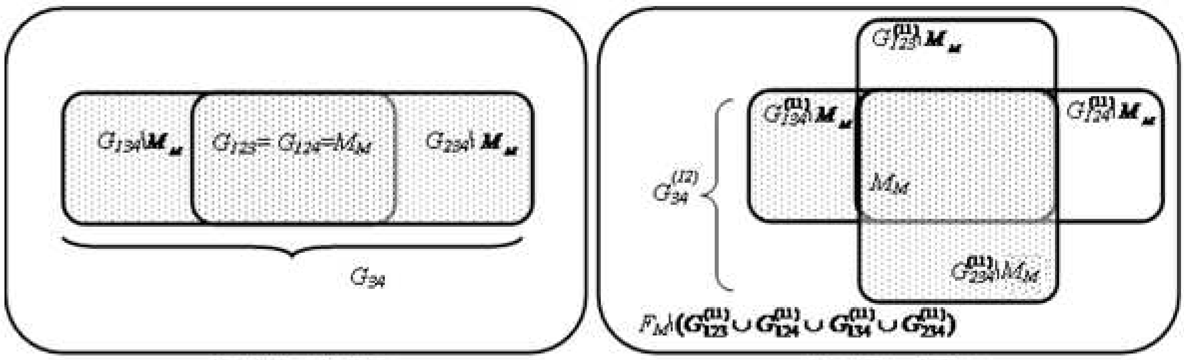
$$[M_M]=[G_{234}^{(11)} \setminus M_M]=[G_{134}^{(11)} \setminus M_M]=[G_{123}^{(11)} \setminus M_M]=[G_{124}^{(11)} \setminus M_M]=$$

$$=[F_M \setminus (G_{234}^{(11)} \cup G_{134}^{(11)} \cup G_{123}^{(11)} \cup G_{124}^{(11)})]=\begin{cases} \aleph & [M]<\infty \\ 2^C & [M]=c,\ c \text{ infinito} \end{cases}\,.$$

Las generalizaciones del segundo nivel tienen por contenido disyunciones de dos de las cuatro propiedades que forma los conjuntos del criterio. Se obtienen las 6 generalizaciones que se presentan a continuación

$$(G_{ij}^{(12)}, C_{ij}^{(11)})\,, \qquad C_{ij}^{(12)}=\{p_k \vee p_l\}\,, \qquad k,l \in \{1,2,3,4\} \setminus \{i,j\}\,, \quad i<j, \quad k<l\,.$$

En este nivel, en el caso $[M]=2$, se obtiene una única generalización, como muestra la figura 4a). En la figura 4b) aparece sombreada una de las generalizaciones correspondientes a este nivel (en forma de "L"), las 5 restantes se representan de manera análoga.



a) CASO: $[M]=2$ b) CASO: $[M] \geq 2$

Fig. 4. Mapa de las extensiones y sus generalizaciones $G_{ii}^{(12)}$

Para este nivel los mapas simbólicos y de cardinalidades del primer nivel se enriquecen con los elementos siguientes:

<u>MAPAS SIMBÓLICOS</u>

- CASO $[M]=2$: $G_{34}^{(12)}=G_{134}^{(11)} \cup G_{234}^{(11)}$
- CASO $[M]>2$:

$$G_{12}^{(12)}=G_{123}^{(11)} \cup G_{124}^{(11)}\,, \quad G_{13}^{(12)}=G_{123}^{(11)} \cup G_{134}^{(11)}\,, \quad G_{14}^{(12)}=G_{124}^{(11)} \cup G_{134}^{(11)}\,,$$

$$G_{23}^{(12)}=G_{123}^{(11)} \cup G_{234}^{(11)}\,, \quad G_{24}^{(12)}=G_{124}^{(11)} \cup G_{234}^{(11)}\,, \quad G_{34}^{(12)}=G_{134}^{(11)} \cup G_{234}^{(11)}\,.$$

MAPAS DE CARDINALIDADES

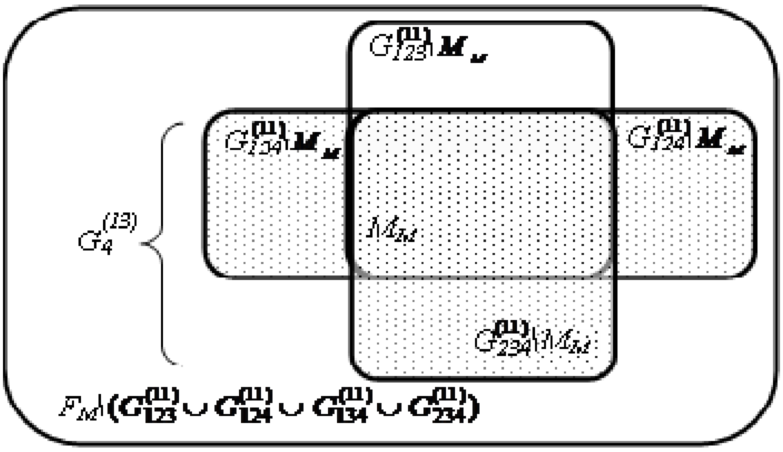
- CASO $[M]=2$: $[M_M]=[G_{34}^{(12)}\setminus M_M]=[F_M\setminus G_{34}^{(12)}]=\aleph$.
- CASO $[M]>2$: Para $i<j,\ \ i,j=1:4$.

$$[M_M]=[G_{ij}^{(12)}\setminus M_M]=[F_M\setminus\bigcup\{G_{ij}^{(12)};\ i<j,\ i,j=1:4\}]=\begin{cases}\aleph & [M]<\infty\\ 2^C & [M]=c,\ c\ \text{infinito}\end{cases}.$$

En el tercer nivel se obtienen otras cuatro generalizaciones $(G_i^{(13)},C_i^{(13)})$, tales que $C_i^{(13)}=\{p_j\vee p_k\vee p_l\}$ con $j,k,l\in\{1,2,3,4\}\setminus\{i\}$ y se tiene

$$G_1^{(13)}=G_{123}^{(11)}\cup G_{124}^{(11)}\cup G_{134}^{(11)},\qquad G_2^{(13)}=G_{123}^{(11)}\cup G_{124}^{(11)}\cup G_{234}^{(11)},$$
$$G_3^{(13)}=G_{123}^{(11)}\cup G_{134}^{(11)}\cup G_{234}^{(11)},\qquad G_4^{(13)}=G_{124}^{(11)}\cup G_{134}^{(11)}\cup G_{234}^{(11)}.$$

Con estas relaciones se completa el mapa simbólico de este nivel a partir del nivel anterior en el caso $[M]>2$. En este nivel ya no se obtienen nuevas generalizaciones en el caso $[M]=2$. En la figura 5 aparece sombreada una de las generalizaciones correspondientes a este nivel (en forma de “T”), las 3 restantes se representan de manera análoga.



CASO: $[M]\geq 2$

Fig. 5. Mapa de las extensiones y sus generalizaciones $G_i^{(13)}$

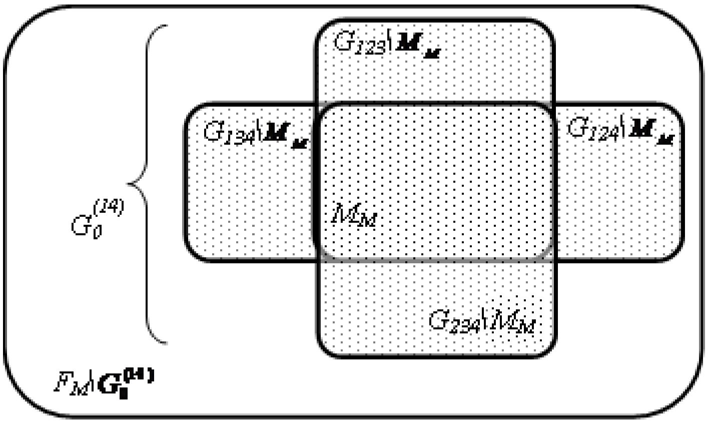
El mapa de cardinalidades de se forma agregando al mapa de cardinalidades del segundo nivel ($[M]>2$) los elementos siguientes ($i=1:4$):

$$[M_M]=[G_i^{(13)}\setminus M_M]=[F_M\setminus\bigcup\{G_i^{(13)};\ i=1:4\}]=\begin{cases}\aleph & [M]<\infty\\ 2^C & [M]=c,\ c\ \text{infinito}\end{cases}.$$

El cuarto nivel tiene una sola generalización:

$$(G_0^{(14)},C_0^{(14)}),\ G_0^{(14)}=G_{123}^{(11)}\cup G_{124}^{(11)}\cup G_{134}^{(11)}\cup G_{234}^{(11)}\ \text{y}\ C_0^{(14)}=\{p_1\vee p_2\vee p_3\vee p_4\}.$$

Obsérvese que los elementos de la extensión de cada una de las generalizaciones correspondientes al primer, segundo y tercer nivel, cumplen en común, a lo sumo, tres, dos o una propiedad del concepto de métrica, respectivamente. Los elementos de la generalización del cuarto nivel no cumplen en común propiedad alguna de este concepto. La figura 6 muestra sombreada esta última generalización correspondiente al cuarto nivel (en forma de cruz).



CASO: $[M] \geq 2$

Figura 6. Mapa de las extensiones y sus generalizaciones $G_0^{(14)}$

El mapa de cardinalidades del cuarto nivel ($[M] > 2$) se obtiene agregando al de tercer nivel los elementos siguientes:

$$[M_M] = [G_0^{(14)} \setminus M_M] = [F_M \setminus G_0^{(14)}] = \begin{cases} \aleph & [M] < \infty \\ 2^C & [M] = c, \ c \text{ infinito} \end{cases}.$$

Existe un nivel adicional, que llamaremos el nivel cero, en el que sus elementos satisfacen todas las propiedades del concepto de métrica,

$$(G_{1234}^{(10)}, C_{1234}^{(10)}), \ G_{1234}^{(10)} = M_M \text{ y } C_{1234}^{(10)} = \{m_1 \wedge m_2 \wedge m_3 \wedge m_4\}.$$

La generalización obtenida en este nivel corresponde a la ausencia de generalización, ya que coincide con el concepto que se generaliza, por lo que se denomina *generalización impropia* relativa al criterio utilizado.

En esta sección se construyeron 15 generalizaciones concernientes a los niveles del primero al cuarto. Las extensiones de estas generalizaciones son subconjuntos propios de F_M y contienen como subconjunto propio a M_M, por tal razón reciben el nombre de *generalizaciones propias relativas al criterio* $\{F_i^{(1)}\}, \ i = 1:4$. En total se han obtenido 16 generalizaciones del concepto de métrica.

Como se cumple que los cardinales de M_M y de F_M coinciden y son iguales a $2^{[M]}$, entonces todas las generalizaciones concernientes al primer nivel de este criterio también tienen este cardinal.

Estas generalizaciones del concepto de métrica conducen a la definición rigurosa del concepto de criterio de generalización.

Definición 4.2. Dado un concepto (E,C), donde $C=\{m_i\}$, $i\in\{1,2,..,n\}$, y considerando que $\{i_1,i_2,..,i_m\}\subset\{1,2,..,n\}$, $1\leq m<n-1$, se denominan *criterios de generalización de* (E,C) a los conjuntos de propiedades

$$\left\{F_{i_1 i_2 \ldots i_m}\middle| F_{i_1 i_2 \ldots i_m}=\{p_{i_1 i_2 \ldots i_m}\}\right\},\ p_{i_1 i_2 \ldots i_m}=\wedge p_j\ ,j\in N_n/\{i_1,i_2\ldots,i_n\}\ .$$

Para cada criterio existen tantos niveles de generalización como propiedades tiene el criterio, para precisar el concepto de nivel de generalización. Si un criterio tiene k propiedades, entonces al nivel j $(1\leq j\leq k)$ de ese criterio corresponden las generalizaciones que tienen por contenido un conjunto de una propiedad, formada por la disyunción de j propiedades del criterio.

5.3. Clasificaciones de diferentes generalizaciones

Para el estudio de muchos conceptos es necesario realizar una o varias clasificaciones, con el objetivo de obtener una o varias particiones de la extensión del concepto que se clasifica, poder realizar un estudio más profundo de cada una de esas partes y obtener una mejor información de la extensión inicial. En esta sección se realizarán clasificaciones de diferentes generalizaciones de las obtenidas en el epígrafe 5.2.

Se utilizan en este trabajo las definiciones de criterio de clasificación y de la operación clasificación de un concepto que se presentan en el artículo escrito por Mederos (2007):

"Dado un concepto (E,C) *y un conjunto de colecciones* P_i *de propiedades de elementos de* E, $P_i=\{p_{ij};\ i\in I,\ j\in J_i\}$, *donde* I *y* J_i *son conjuntos; la colección de propiedades* $P_i=\{p_i;\ \ p_i=\wedge p_{ij}\}$, *se llama criterio de clasificación de* (E,C) *si, y sólo si, la colección de conceptos* (E_i,C_i), *donde* $C_i=P_i$, $i\in I$, *es tal que* $\{E_i;\ \ i\in I\}$ *es una partición de* E. *Dado el criterio de clasificación P = {P_i : $i\in I$}, la operación que asocia al concepto* (E,C) *la colección de conceptos* $\{(E_i,C_i)\}$ *se denomina operación de clasificación*, *y la colección de conceptos* $\{(E_i,C_i)\}$ *recibe el nombre de clasificación de* (E,C) *según el criterio* P*."*

En Guillen (2005) se hace un análisis de la clasificación, desde un punto de vista diferente al que se propone en este epígrafe y se presenta una propuesta para abordar la clasificación de los sólidos.

La colección de propiedades $\{P_i;\ i=1:5\}$, donde $P_i=F_i\cup\{m_i\}$ y $P_5=\{m_i\}$, $i=1:4$, determina los cinco conceptos siguientes:

$$(G_{234}^{(11)}\setminus M_M,P_1),\ \ (G_{124}^{(11)}\setminus M_M,P_2),\ \ (G_{134}^{(11)}\setminus M_M,P_3),\ \ (G_{123}^{(11)}\setminus M_M,P_4),\ \ (M_M,P_5).$$

En la tabla 1 se presentan las clasificaciones con sus respectivos criterios de clasificación de conceptos que se forman con una, dos, tres y cuatro generalizaciones del concepto de métrica construidos en 4.2 ($\{i,\ j,k,l\}=\{1,2,3,4\}$, $i<j<k<l$).

Tabla 1. Clasificación y criterios de clasificación de generalizaciones del concepto de métrica relativas al primer criterio de generalización

Concepto que se clasifica	Clasificación	Criterio de clasificación
$(G^{(11)}_{ijk}, \{p_l\})$	$\{(G^{(11)}_{ijk} \setminus M_M, P_l), (M_M, P_5)\}$	$\{P_l, P_5\}$
$(G^{(12)}_{ij}, \{p_k \vee p_l\})$	$\{(G^{(11)}_{ijk} \setminus M_M, P_l), \{(G^{(11)}_{ijl} \setminus M_M, P_k), (M_M, P_5)\}$	$\{P_k, P_l, P_5\}$
$(G^{(13)}_{i}, \{p_j \vee p_k \vee p_l\})$	$\{(G^{(11)}_{ijk} \setminus M_M, P_l), \{(G^{(11)}_{ijl} \setminus M_M, P_k), \{(G^{(11)}_{ikl} \setminus M_M, P_j), (M_M, P_5)\}$	$\{P_j, P_k, P_l, P_5\}$
$(G^{(14)}_{0}, \{p_1 \vee p_2 \vee p_3 \vee p_4\})$	$\{(G^{(11)}_{ijk} \setminus M_M, P_l), \{(G^{(11)}_{ijl} \setminus M_M, P_k), \{(G^{(11)}_{ikl} \setminus M_M, P_j), (M_M, P_5)\}$	$\{P_j, P_k, P_l, P_5\}$
($I_M \cup Q_M \cup S_M \cup P_M$, $p_1 \vee p_2 \vee p_3 \vee p_4$)	$\{(G^{(11)}_{ijk} \setminus M_M, P_l), \{(G^{(11)}_{ijl} \setminus M_M, P_k), \{(G^{(11)}_{ikl} \setminus M_M, P_j), \{(G^{(11)}_{jkl} \setminus M_M, P_1), (M_M, P_5)\}$	$\{P_1, P_2, P_3, P_4, P_5\}$

Todas las clasificaciones de la tabla 1 satisfacen las reglas, tomadas de Mederos (Mederos, 1988), que se exponen a continuación: 1. Se realizan partiendo de un solo criterio, 2. La unión de las extensiones de los conceptos de la clasificación coincide con la extensión del concepto que se clasifica, 3. Las extensiones de los conceptos de la clasificación son disjuntos dos a dos, 4. Son proporcionadas, ya que todas las extensiones de los conceptos de la clasificación tienen la misma cardinalidad,

En el proceso de enseñanza-aprendizaje de la Matemática se pueden presentar distintos tipos de tareas, relativas a la clasificación de conceptos, entre las cuales están las que se exponen en Mederos (Mederos, 2007). A continuación planteamos algunas tareas que es importante realizar para que los estudiantes participen en la determinación de una clasificación a partir de una generalización de un concepto dado.

1. Dado un concepto (E, P_{n+1}), $P_{n+1} = \{p_i;\, i = 1:n\}$ y una generalización de este concepto (F, D), $D = P_{n+1} \setminus \{p_j\}$, $j = 1:n$. Construir la clasificación de (F, D) correspondiente al criterio $\{P_j, P_{j+1}\}$, donde $P_j = D \cup \{p_j\}$.

2. Dado un concepto (E, P_{n+1}), $P_{n+1} = \{p_i;\, i = 1:n\}$ y una generalización de este concepto (F, D), $D = P_{n+1} \setminus Q$, $Q \subset \{1,..,4\}$ y $1 < [Q] < n$. Construir la clasificación de (F, D) correspondiente al criterio $\{P_j, P_{j+1}\}_{j \in Q}$, donde $P_j = D \cup \{p_j\}_{j \in Q}$.

Determinar la cardinalidad de cada una de las extensiones de los conceptos que forman la clasificación.

6. Consideraciones finales

Se definen y ejemplifican los conceptos de mapas de extensiones, de proposiciones, simbólicos y de cardinalidades de una colección de conceptos. Se presentan 6 mapas de extensiones, simbólicos y de cardinalidades de generalizaciones del concepto de métrica.

Se aclaran las diferencias entre la generalización como operación conceptual y la generalización restringida al proceso de formación conceptual, y se establece el doble carácter de proceso y resultado de cada uno de los dos tipos de generalizaciones.

Se define y se aplica el concepto de criterio de generalización de un concepto eliminando propiedades de su contenido. Se aplicó un criterio de generalización al concepto de métrica, formado por cuatro propiedades que son conjunciones de tres de las cuatro propiedades del concepto de métrica.

Se presentan tres nuevos tipos de tareas didácticas que facilitan la construcción de generalizaciones en correspondencia con el primer nivel del criterio $\{F_i^{(1)}\}$.

Se define y aplica el concepto de nivel de generalización correspondiente a un criterio. Se construyeron 15 generalizaciones propias del concepto de métrica correspondientes a cuatro niveles del criterio aplicado.

Se construyen 15 criterios de clasificación y 15 clasificaciones, una para cada una de las 15 generalizaciones del concepto de métrica construidas en la sección 4,2.

Se presentan dos nuevos tipos de tareas didácticas que facilitan la construcción de clasificaciones de generalizaciones en correspondencia con el primer nivel del criterio $\{F_i^{(1)}\}$.

Bibliografia

Armbruster, B. y Anderson, T. (1984). *Mapping: representing informative text diagrammatically*. En C. Holley y F. Danserau, Spatial learning strategies, Academic Press, Orlando

Asmus, V. (1947). *Lógica*. Gospolitizdat, Moscú.

Beltrán, J. (1998). *Procesos, estrategias y técnicas de aprendizaje*. Editorial Síntesis, S.A., Madrid.

Brinkmann, A. (2003). *Mind mapping as a tool in mathematics education*. En *Mathematics Teacher*, 96(2), 96-101.

Chelpanov, G. (1946). *Manual de lógica*. Gospolitizdat, Moscú.

Davýdov, V. (1981). *Tipos de generalización en la enseñanza*. Editorial Pueblo y Educación, La Habana.

Gorski, D. y otros (Sin fecha). *Lógica*. Imprenta Nacional de Cuba, La Habana.

Gorski, D. (1987). *Generalización y cognición*. Progress Publishers, Moscow.

Guillén, S. (2005). *Análisis de la clasificación. Una propuesta para abordar la clasificación en el mundo de los sólidos. En Educación Matemática 17, 002*, 117-152. México DF.

Hernández, F. (1990). *Aprendiendo a aprender. Métodos y técnicas de estudio para alumnos de EGB, Bachillerato y Formación Profesional.* Distribuidor Editorial, Madrid.

Huang, J. (1988). *Assesing knowledge structure*. Umpublish Doctoral Dissertation. Universidad de Illinois. Urbana-Champaign, Illinois.

Jones, B. F. y otros (1987). *Strategic. Teaching and Learning: Cognitive Instruction in the Content Areas*. *En Virginia: Association for Supervision and Curriculum Development.* Virginia.

Mc Allese, R. (1988). *From concept maps to computer-aided instruction: Is it possible using notecard? En American Educational Research Association. 88, 1-24*.

Mederos, O. B. y Roldán, R. A. (2010). *Caracterizaciones y generalizaciones del concepto de métrica. En Revista Ciencias Matemáticas. Cuba. Volumen, 25, único,* 2009-2010 29-39

Mederos, O. B. y J. Mederos, B. J. (2009). *Los ejemplos y contraejemplos como herramientas para facilitar el proceso de generalización conceptual. En P. Lestón (Ed), Acta Latinoamericana de Matemática Educativa* 22, 257-266, México.

Mederos, M. O. y Ruiz, A. M. (2007): *Aplicación de la operación clasificación de conceptos al estudio de los cuadriláteros convexo. En Revista "NUMEROS"*. 67, 36-44.

Mederos, O. B. y Martínez, M. A. (1988): *Clasificación de las funciones elementales. En Revista Cubana de Educación Superior. VIII*, 3. 22-31.

Novak, J. D. (2006**).** Del origen de los mapas conceptuales al desarrollo de CmapTools. Recuperado el 15/10/2011, de www.eduteka.org/Entrevista22.php.

Pérez, L. F. (1990). *Proyecto Docente*. Universidad Complutense, Madrid:

Steen, L. y Seebach, J. (1995). *Counterexamples in Topology*. Holt, Reinehart and Winston Inc., New York.

Strogóvich, M. (1949). *Lógica.* Gospolitizdat. Moscú.

Yussen. S. R. (1974). *Determinants of visual attention and recall in observational learning by preschoolers and second graders. En Developmental Psychology* 10, 93-100.

Otilio Bienvenido Mederos Anoceto. Nació en Santa Clara, Villa Clara, Cuba, el 22 de febrero de 1945. Obtuvo su doctorado en Ciencias Físico Matemáticas en la Universidad Estatal de Odessa, República de Ucrania. Actualmente trabaja en la Universidad Autónoma de Coahuila, Saltillo, México. Sus publicaciones en la última década las ha realizado en el área de Matemática Educativa.

Rita Alejandra Roldán Inguanzo. Nació en La Habana, Cuba, el 24 de abril de 1962. Obtuvo su doctorado en Ciencias Matemáticas en la Universidad "Friedrich Schiller" de Jena, Alemania. Actualmente trabaja en la Universidad de La Habana, Cuba. Sus publicaciones en la última década las ha realizado en las áreas de Matemática Educativa, Divulgación de la Matemática y Análisis Funcional. **rroldancu@yahoo.es**

UNIÓN
REVISTA IBEROAMERICANA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA

ISSN: 1815-0640
Número 35. Septiembre de 2013
páginas 59-74

www.fisem.org/web/union

Desarrollo de competencia matemática en la educación secundaria desde la percepción de estudiantes y profesores del curso Matemática Elemental de la Universidad de Costa Rica

Floria Arias Tencio, Kattia Rodríguez Ramírez

Fecha de recepción: 22/07/2012
Fecha de aceptación: 10/06/2013

Resumen

En este trabajo se presentan las percepciones de un grupo de alumnos que han iniciado estudios universitarios y sus profesores, sobre si determinadas acciones, que favorecen el desarrollo de la competencia matemática, se realizaron durante su etapa de educación secundaria (13 a los 17 años). Estos resultados son parte de la investigación *Caracterización de la formación matemática en la educación secundaria de los estudiantes del curso MA-0125: Matemática Elemental de la Universidad de Costa Rica,* que se realizó durante los años 2010-2011, en la cual se consultaron distintas temáticas relacionadas con el quehacer matemático en las aulas de educación secundaria. El propósito de dicha investigación, más amplia, es profundizar en la comprensión del insatisfactorio desempeño matemático que muestran una mayoría de los estudiantes del curso Matemática Elemental.
Palabras clave: educación matemática, enseñanza de la matemática, competencia matemática.

Abstract

In this paper we present the perceptions of a group of freshman students, taking a mathematics course, and that of their instructors at the University of Costa Rica in regard to the development of skills for mathematical competency. The researchers studied whether specific actions had taken place to develop the students' skills for mathematical competency during their high school years (i.e. seventh to eleventh grades). The students' perceptions were compared to those of their university math instructors. These results derive from a macro investigation entitled "Characterization of the mathematical education at the secondary level of the students taking the course MA-0125 *Matemática Elemental* at the University of Costa Rica," which the researchers carried out during the years 2010-2011. This macro investigation answered questions about a variety of concerns regarding the teaching of mathematics at the secondary level. The purpose of the study is to shed light on the students' low level of mathematical proficiency on the course MA-0125 *Matemática Elemental*.
Keywords: mathematics education, teaching mathematics, mathematical competency

Resumo

Neste trabalho são apresentadas as percepções de um grupo de alunos que iniciaram seus estudos universitários e de seus professores, sobre se determinadas ações, que favorecem o desenvolvimento da competência matemática, o estudo foi realizado durante a etapa de ensino médio (de 13 a 17 anos). Os resultados fazem parte da pesquisa: Caracterização da formação matemática no ensino médio dos estudantes do curso MA-0125: Matemática Elemental da Universidade de Costa Rica; realizada nos anos 2010-2011. Na pesquisa foram consultados vários temas relacionados aos trabalhos matemáticos realizados nas salas de aula do ensino médio. O propósito da pesquisa, de forma mais abrangente, é examinar a fundo para compreender o insatisfatório desempenho matemático que mostram a maioria dos estudantes do curso Matemática Elemental.
Palavras-chave: educação matemática, ensino de matemática, competência matemática.

1. Introducción

La Escuela de Matemática de la Universidad de Costa Rica imparte el curso MA-0125: Matemática Elemental, el cual es un curso inicial que está dirigido a estudiantes de carreras tales como Administración Pública, Administración Aduanera, Dirección de Empresas, Contaduría Pública, entre otras y que se plantea como la base para continuar estudios específicos de cada carrera. Aproximadamente un 65% de los temas que se estudian están planteados en el Programa de Matemáticas de Educación Secundaria del Ministerio de Educación Pública y un porcentaje mayor son estudiados en los colegios privados. De manera que en el curso, muchos de los temas son abordados como un complemento de la educación matemática recibida en la secundaria.

Las estadísticas de las promociones de los últimos ciclos lectivos; muestran que sólo el 33.9% de los estudiantes matriculados aprobaron el curso MA-0125; además, es notoria la cantidad de estudiantes que hacen retiro de matrícula, en particular el I Ciclo lectivo de cada año. Estos resultados coinciden, además, con la percepción de las autoras de este trabajo, quienes han impartido éste y otros cursos iniciales de matemáticas en la universidad y se desempeñaron como profesoras de matemática en la educación secundaria, sobre un deterioro en la formación matemática de los estudiantes de la educación media de los últimos 10 años, muchos de los cuales no muestran los conocimientos y habilidades matemáticas mínimas que les permita desempeñarse adecuadamente en los cursos iniciales como el MA-0125.

Ahora bien, un tratamiento importante de una problemática como ésta, relacionada con la transición entre la secundaria y la universidad, es documentar y analizar, con mayor detalle, la formación matemática de la educación secundaria de los estudiantes del curso MA-0125, de manera que se puedan plantear directrices y sugerencias metodológicas para los profesores que imparten el curso. Aunque el problema de la transición entre la secundaria y la universidad es complejo, un estudio como el que se realizó puede contribuir a explicar las razones centrales del desempeño deficiente de los estudiantes en el curso y aportar los criterios necesarios para proponer desde un punto de vista realista y objetivo mejoras al curso, que conlleven a disminuir la deserción temprana, a mejorar el porcentaje de promoción y sobre todo a lograr un desempeño matemático de los alumnos más satisfactorio. A su vez, plantear mejoras en las prácticas de enseñanza y de aprendizaje que se realizan en la educación secundaria.

La caracterización de la formación matemática recibida por los estudiantes del curso MA-125 en la educación secundaria, puede construirse desde diversas ópticas y fuentes; por ello se hizo necesario delimitar el estudio en algunos aspectos; a su vez, se consideró necesario el planteamiento de algunos supuestos conceptuales que permitieran sustentar tanto las decisiones metodológicas como el análisis de la información recopilada. Se definieron así seis temáticas que las autoras valoraron como prioritarias: saber matemático y saber matemático escolar, construcción del conocimiento matemático, contrato didáctico, rol del profesor de matemáticas, del alumno y del saber matemático escolar, competencia matemática, errores y obstáculos en el aprendizaje de la matemática y la tecnología en el aula de matemáticas.

Con relación al tópico competencia matemática, se tiene, por una parte, que uno de los objetivos generales de la formación matemática de la educación secundaria es que sus egresados hayan adquirido un nivel de competencia matemática que les permita realizar diversidad de tareas matemáticas que involucran conceptos y procedimientos matemáticos. Por otra parte, por tratarse de un ciclo concluido de formación general, se espera que los estudiantes de MA-125 evidencien competencia matemática. Si bien no se ha realizado en esta investigación una evaluación directa de la competencia matemática de los alumnos del curso MA-125 como la que se hace con las pruebas PISA 2003 (INECSE; 2005; OCDE, 2003), los limitados resultados de los alumnos egresados en este curso se pueden considerar un indicador relevante de un bajo nivel de competencia matemática.

Una vez, aceptado que los alumnos provenientes de la secundaria tienen, en general, un bajo nivel de competencia matemática, nuestro objetivo de investigación ha sido caracterizar cómo se ha desarrollado la competencia matemática en secundaria para que los alumnos muestren este bajo nivel en el curso MA-125. En esta línea, algunas de las preguntas que nos formulamos fue ¿Cuáles son las acciones, asociadas al desarrollo de la competencia matemática, que son percibidas por los estudiantes como frecuentes en sus experiencias de clase de educación secundaria? y ¿Cuáles acciones de competencia matemática perciben los profesores del curso como dominantes en sus estudiantes?

En este artículo, se presentan los hallazgos obtenidos con respecto a la temática competencia matemática. En concreto, se presentan resultados de las percepciones que tienen los estudiantes y profesores del curso, sobre la realización, en su etapa de enseñanza secundaria, de ciertas acciones que desarrollan la competencia matemática. Las percepciones de los estudiantes revelan sus experiencias de formación matemática. Si bien puede suceder que los estudiantes no logren manifestarlas con el mismo lenguaje que sus profesores, ello no significa que éstas no sean válidas. Todo lo contrario, la coherencia o no en sus percepciones, también constituyen evidencias de construcciones adecuadas o no acerca de su formación matemática.

2. Supuestos teóricos: Dimensiones de competencia matemática

Para la consulta a los estudiantes y profesores sobre su percepción de la presencia de acciones asociadas al desarrollo de la competencia matemática, el primer paso fue caracterizar indicadores de desarrollo de competencia matemática. Para esto se estudiaron diversos autores sobre el tema competencia matemática tales como Goñi (2008); Llinares (2003), Niss & Hojgaard (2011), Lupiáñez (2010), Informe PISA (2003). Considerando el referente de conocimiento de la población a consultar, se valoró como conveniente asumir las dimensiones de competencia matemática específicas propuestas por Llinares (2003) y que permiten de manera puntual extraer acciones concretas asociadas al desarrollo de competencia matemática desde los niveles escolares iniciales.

Este autor vincula el logro de la competencia matemática con el desarrollo de cinco dimensiones de manera integrada: comprensión conceptual, destrezas procedimentales, comunicar, explicar y argumentar matemáticamente, pensamiento estratégico y actitudes positivas hacia la capacidad de aprender matemáticas; las cuales permiten derivar acciones más puntuales sobre lo que se espera pueda hacer un estudiante.

Una dimensión de la competencia matemática del alumno es la *comprensión conceptual*. El desarrollo de esta dimensión depende de cómo el estudiante representa mentalmente y relaciona las diferentes partes del contenido matemático y lo usa en la resolución de problemas. De ahí la importancia, como señala Llinares (2003) que el profesor genere espacios de presentación y discusión de aquellos procedimientos que pongan de manifiesto relaciones entre conceptos que son usados cómo herramientas para resolver la tarea matemática.

Una tarea matemática que permite la generación y discusión de diferentes procedimientos, proporciona un aprendizaje más poderoso. El poder mostrar la relación entre diferentes nociones matemáticas como instrumentos de resolución de un problema propuesto, le permite al estudiante comprender bien las relaciones entre las partes del conocimiento que fueron establecidas y utilizadas. De esta actividad podemos inferir que los estudiantes podrían estar construyendo nuevo conocimiento.

En cuanto a la segunda dimensión, el *desarrollo de destrezas procedimentales* Llinares se refiere a:

> (…) conocer los procedimientos matemáticos, conocer cómo y cuándo usarlos apropiadamente, y ser flexible ante la posibilidad de adaptarlos a las diferentes tareas propuestas. Es decir la destreza en realizar los procedimientos de manera flexible, correcta y eficaz. En cierta medida, el desarrollo de las destrezas procedimentales debe estar vinculado con la comprensión conceptual de los conceptos que fundamentan los procedimientos. (Llinares, 2003, p. 16)

De manera que cuando el docente diseña las tareas matemáticas que va a delegar a sus alumnos, debería tener presente que los diferentes contenidos de las matemáticas escolares están intrínsecamente relacionados. Lo anterior contribuye a ver las nociones y procedimientos matemáticos como herramientas que ayudan a resolver problemas matemáticos. Otro aspecto importante en el desarrollo de las destrezas procedimentales, es la posibilidad de que los estudiantes puedan usar variedad de estrategias mentales con lápiz y papel, usando calculadoras, construcciones, etc.

El desarrollo de las destrezas procedimentales se consigue en relación con la comprensión conceptual que es la que permite una aplicación más flexible de los procedimientos, e incluso ayuda a su uso idóneo como, instrumentos de resolución de las tareas matemáticas. Así también, la destreza en el manejo de un determinado nivel de los algoritmos contribuye al desarrollo de la compresión conceptual. Cuando los algoritmos se aprenden como una colección de recetas, sin relación entre ellas, son más fáciles de olvidar o de confundir y por tanto el aprendizaje de nuevas ideas matemáticas se convierte en una labor más dura o bien imposible.

Llinares plantea la tercera dimensión *comunicar, explicar y argumentar matemáticamente* y la resalta como un elemento clave en la capacitación matemática de los alumnos ya que:

> -Apoya y ayuda a desarrollar la comprensión conceptual al ser un contexto en el que se establecen relaciones entre conceptos y procesos.
> -Desarrolla las destrezas procedimentales por ser un contexto que favorece la clarificación y justificación de los procedimientos empleados.

> Más que imitar el procedimiento dado en el libro de texto, deben reflexionar sobre los significados implicados, ya que compartir su trabajo implica más que sólo «mostrar» el procedimiento seguido, implica explicar y justificar. En este sentido la comunicación es necesaria para construir competencia matemática. (Linares, 2003, p. 18-19)

La socialización de las producciones matemáticas, así como de los procesos que se siguieron para conseguir éstas, es sin duda una excelente estrategia para clarificar las ideas y para desarrollar la capacidad de establecer conexiones entre las nociones y procedimientos. De ahí la importancia de que el profesor de matemáticas propicie espacios para que el estudiante presente ante sus compañeros y profesor no sólo sus razonamientos, sino también la justificación de éstos; así como que tenga que ampliar, validar o refutar los de sus compañeros. Se trata de que los estudiantes aprendan por una parte a hablar matemáticamente y por otra, a hablar de las matemáticas. Lo anterior es, a su vez, una buena evidencia de comprensión conceptual y procedimental.

Con la dimensión *pensamiento estratégico*, Llinares se refiere a la capacidad de identificar estructuras comunes en representaciones y contextos diferentes. Se trata de la capacidad de inventar una forma de enfrentar la tarea matemática asignada, que a su vez está relacionada con un pensamiento flexible ante la resolución de problemas no rutinarios. Según Llinares:

> Para formular un problema los alumnos deben ser capaces de identificar aquello que puede ser relevante y de establecer relaciones, por consiguiente un aspecto de esta capacidad se manifiesta cuando los alumnos llegan a ser capaces de identificar estructuras generales en situaciones diferentes. (Linares, 2003, p. 19)

Cuando los alumnos logran identificar relaciones generales válidas en determinado contexto matemático, las pueden adaptar o bien formular nuevos procesos de resolución, relacionando las nociones previas al nuevo contexto. Esto es una manifestación del uso flexible de diferentes procesos de resolución de problemas apoyado en la capacidad de relacionar los datos de manera idónea.

En cuanto a la última dimensión, sabiendo que el aprendizaje es una tarea completamente personal en la cual ninguna labor que realice el docente es garantía absoluta de su logro, tiene sentido asumir entonces que la disposición de los estudiantes hacia el aprendizaje de las matemáticas es fundamental. El desarrollo de esta actitud positiva está determinado, en buena medida, con el tipo de oportunidades que el docente ofrece a sus estudiantes y con el tipo de tareas matemáticas que se les demande; de acuerdo con Llinares:

> El desarrollo de actitudes positivas hacia las matemáticas se relaciona con verse a uno mismo capaz de resolver las tareas matemáticas y ser capaz de aprender matemáticas considerando útil y con sentido el contenido matemático. Desarrollar esta disposición positiva hacia el aprendizaje de las matemáticas y las propias matemáticas requiere que los alumnos puedan tener oportunidades de dotar de sentido al contenido matemático y de tener la, oportunidad de aportar al proceso de generar significado matemático. (Llinares, 2003, p.20)

3. Descripción de la investigación

Se trata de una investigación descriptiva que pretende caracterizar las percepciones que tienen los alumnos y sus profesores del curso MA-125, sobre determinadas acciones que se producían en su proceso de instrucción durante su etapa de educación secundaria. Se inscribe dentro de un enfoque metodológico de tipo mixto (Johnson y Onwuegbuzie, 2004), puesto que se trata de un estudio en el que se considera la observación de variables cuantitativas (grado de acuerdo con las afirmaciones de un cuestionario) y cualitativas (afirmaciones del cuestionario). En este estudio, se realizan algunos intentos de correlacionar variables para no quedarse en la descripción de los hechos desde la percepción de los informantes, no se establecen relaciones causales, únicamente se examinan relaciones o asociaciones entre algunas variables.

El estudio se desarrolló básicamente en cuatro fases: construcción del marco teórico, trabajo de campo, análisis de la información aportada por los informantes y elaboración de conclusiones. Estas fases se desarrollaron de manera simultánea en intensidades distintas, de acuerdo con las necesidades e interrogantes que se presentaron durante la investigación.

3.1. Consulta a estudiantes

Para recopilar las percepciones de los estudiantes sobre las diversas temáticas tratadas en el marco teórico relacionadas con la formación matemática de educación secundaria y en particular competencia matemática; se siguieron dos procedimientos. Primero se elaboró un cuestionario piloto y una entrevista guiada a una muestra de estudiantes matriculados en el II Ciclo 2009. De esta forma, en el cuestionario piloto se realizaron todas las modificaciones de acuerdo con las recomendaciones en cuanto a vocabulario, secuencia, enunciados de preguntas (que no comprendieron los estudiantes) y se adicionaron preguntas que ayudaron a complementar los objetivos de esta investigación de acuerdo con el referente teórico.

El cuestionario (definitivo) se aplicó a una muestra de 169 estudiantes matriculados en el curso en el I Ciclo 2010 de un total de 682. Los estudiantes de la muestra eran de primer ingreso o habían ingresado a la Universidad en el 2009. Se consideró que ésta era una buena muestra en cantidad y características porque los informantes contaban con poca o ninguna formación matemática universitaria, que pudiera interferir en sus percepciones de la formación matemática de educación secundaria. En la siguiente tabla se describe la población estudiantil consultada.

Tabla 1. Descripción de la muestra de informantes IC- 2010

CARRERA	GÉNERO		MODALIDAD COLEGIO*					CARNÉ		TOTAL
	M	F	Ac	Ag	EA	Te	Ci	A9	B0	
Administración Pública	3	3	5		1			4	2	6
Administración Aduanera	9	13	20		1	1		2	20	22
Agronomía	1		1						1	1
Asistente de Laboratorio	3	4	7					1	6	7
Contaduría Pública	7	12	13		1	5			19	19
Dirección de Empresas	46	57	84	2		17		7	96	103
Geografía	4	1	5					3	2	5
Ingeniería Química		2	2					1	1	2
Ingeniería Civil	1		1						1	1
Microbiología		1	1					1		1
Promoción de la Salud		2	2					1	1	2
TOTAL	74	95	141	2	3	23		20	149	169

* Ac. Académico Ag. Agropecuario EA. Educación abierta Te. Técnico Ci. Científico

El instrumento se aplicó en forma administrada en la segunda sesión de clase del I Ciclo 2010, se explicó a los informantes el trabajo a realizar, de manera simultánea se leyó la instrucción de cada parte y en algunos casos se explicó más detenidamente lo que se solicitaba. Consta de siete partes donde se combinan diferentes tipos de preguntas y cada una responde a una temática específica. Con respecto a la temática *Matemáticamente Competente*, VII Parte del instrumento, se presenta un cuadro con 12 afirmaciones relacionadas con posibles acciones que se dan en una clase de matemática, todas ellas derivadas de los supuestos teóricos. El estudiante debía indicar la frecuencia con que se daba dicha acción en sus clases de matemática de secundaria, utilizando la escala de valoración dada. Seguidamente aparece el extracto del cuestionario; el número de cada acción es el indicado en el instrumento según secuencia.

VII PARTE. Matemáticamente competente

A continuación se presenta un cuadro que contiene en la columna izquierda afirmaciones relacionadas con acciones posibles en una clase de matemática. Utilice la escala dada abajo para indicar la frecuencia con la cual se daba en sus clases de matemática de secundaria la acción indicada a la izquierda:

1: nunca 2: casi nunca 3: algunas veces 4: casi siempre 5: siempre

Tabla 2. Acciones asociadas al desarrollo de competencia matemática

En la clase de matemáticas en secundaria,	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**
45. Era posible adaptar un método de solución de otros problemas diferentes para resolver problemas nuevos.					
46. Era posible generar y discutir diferentes procedimientos para resolver un problema.					
47. Adaptaba correctamente procedimientos aprendidos y utilizados en álgebra para resolver un problema en geometría.					
48. Para resolver un problema utilizaba variedad de estrategias: mentales, con lápiz y papel, calculadora, materiales concretos, dibujos, diagramas.					
49. Lograba conectar o relacionar entre sí los procedimientos distintos, por ejemplo los de factorización, los de resolución de ecuaciones, etc.					
50. Sabía identificar el error cometido en un proceso y justificarlo.					
51. Era necesario proporcionar argumentos y justificaciones de por qué se podían usar ciertos conceptos o procedimientos para conseguir lo solicitado.					
52. Si no comprendía la explicación del profesor o compañero hacía preguntas hasta convencerme de la validez de lo propuesto.					
53. Lograba identificar patrones en situaciones diferentes.					
54. Me consideraba capaz de resolver los ejercicios que planteaba el profesor.					
55. Consideraba útil y con sentido los conceptos y procedimientos matemáticos.					
56. Mi profesor consideraba que todos podíamos aprender matemáticas.					

Para analizar la información recopilada en esta parte del cuestionario, como un *primer nivel*, se estableció la frecuencia de cada uno de los 12 indicadores en cada una de los valores de la escala dada, esto permitiría determinar las acciones más y las menos frecuentes y procurar observar alguna tendencia. Como un *segundo nivel*, se realizó un análisis por dimensión de desarrollo de competencia. Para valorar un estudiante como alumno de una clase de secundaria que según sus percepciones desarrolló la competencia matemática, se definió que el informante debería mostrar la presencia del conjunto de indicadores de una misma dimensión como "siempre" o "casi siempre". De lo contrario, se pensaría que se trataban de acciones matemáticas que se dieron de manera aislada en la clase de matemática de secundaria y que no necesariamente garantizan el desarrollo de la competencia matemática. Por esta razón, para efectos del análisis de la información las investigadoras definieron el siguiente criterio:

- Una valoración de 4 ó 5 en todos los indicadores, se interpreta como que el informante desarrolló adecuadamente la dimensión.
- Una valoración de 1, 2 ó 3 en alguno de los indicadores se interpreta como que el informante no desarrolló adecuadamente la dimensión.

En la tabla siguiente se muestran las dimensiones de desarrollo de competencia matemática y los indicadores de cada una de ellas.

Tabla 3. Dimensiones de competencia matemática e indicadores de cada una

Dimensión	Indicadores
Comprensión conceptual	Proporcionar argumentos y justificaciones de por qué se podían usar ciertos conceptos o procedimientos para conseguir lo solicitado.
	Considerar útil y con sentido los conceptos y procedimientos matemáticos.
Destrezas procedimentales	Adaptar correctamente procedimientos aprendidos y utilizados en álgebra para resolver un problema en geometría.
	Utilizar variedad de estrategias: mentales, con lápiz y papel, calculadora, materiales concretos, dibujos, diagramas, para resolver un problema.
	Conectar o relacionar entre sí los procedimientos distintos, por ejemplo los de factorización, los de resolución de ecuaciones, etc.
	Identificar el error cometido en un proceso y justificarlo.
Pensamiento estratégico	Adaptar un método de solución de otros problemas diferentes para resolver problemas nuevos.
	Generar y discutir diferentes procedimientos para resolver un problema.
	Adaptar correctamente procedimientos aprendidos y utilizados en álgebra para resolver un problema en geometría.
	Identificar patrones en situaciones diferentes.
Comunicación matemática	Proporcionar argumentos y justificaciones de por qué se podían usar ciertos conceptos o procedimientos para conseguir lo solicitado.
	Plantear preguntas cuando no se comprende la explicación del profesor o compañero hasta convencerse de la validez de lo propuesto.
Actitud positiva en relación con sus capacidades matemáticas	Percibir capacidad para resolver los ejercicios que plantea el profesor.
	Percibir que el profesor considera que todos pueden aprender matemáticas.

En síntesis, inicialmente los resultados se analizaron por indicador, posteriormente por dimensiones y finalmente, una valoración general sobre la presencia de acciones para el desarrollo de la competencia matemática en las clases de secundaria de los informantes. Con el análisis de la información por dimensiones de competencia podría quedar evidente que los estudiantes pudieron desarrollar en mayor o menor medida una dimensión u otra. Pero debe tenerse claro que únicamente el desarrollo adecuado de las cinco dimensiones podría indicar desarrollo de la competencia matemática. Por ello se analizó lo contestado sujeto por sujeto para determinar cuántos perciben haber desarrollado 4 ó más de las dimensiones.

3.2. Consulta a profesores

Para construir el cuestionario de consulta a los docentes que han impartido el curso, se realizó un grupo focal que planteó la discusión sobre seis de las temáticas, una vez que se explicaron los objetivos del estudio. Esta consulta permitió aclarar algunos supuestos conceptuales y derivar información base a considerar en el cuestionario, el cual finalmente se planteó de acuerdo con los resultados iniciales del cuestionario para estudiantes, el grupo focal, así como el referente teórico y la experiencia de las investigadoras. Algunos de los enunciados propuestos se derivaron del cuestionario de estudiantes, con el propósito de establecer coincidencias o discrepancias entre las percepciones de los estudiantes y las de los profesores; esto permitiría también confirmar información o bien explicar diferencias. Este instrumento consta de seis partes combinando dos tipos de preguntas: abiertas y cerradas de respuesta dicotómica y de escogencia.

La consulta sobre la presencia de acciones asociadas a competencia matemática, se realizó en diversas partes del cuestionario. Para valorar si estas acciones predominan en una mayoría de los estudiantes durante su desempeño en el curso, los profesores debían indicar su criterio acuerdo o desacuerdo de la presencia de éstas en más del 70% de sus estudiantes.

Este cuestionario se aplicó a diecisiete profesores que han impartido el curso MA-0125 más de una vez y con experiencia en la educación secundaria. La solicitud a cada uno de los profesores para aplicar el cuestionario se realizó vía telefónica y por correo electrónico. Cada profesor fue visitado en la hora y lugar acordado en el recinto Rodrigo Facio, se le entregó el documento y éste debió ser contestado en el mismo momento.

Para registrar la información recolectada se diseñó una plantilla de tabulación en la cual se indicó la valoración SI o NO de cada docente para cada indicador en la presencia de la acción de competencia en más del 70% de sus estudiantes. Seguidamente, utilizando la Tabla N° 3 se agruparon por dimensión de competencia y se determinaron las frecuencias totales para cada acción para hacer el análisis de la información según las dimensiones.

4. Resultados y discusión

Se considera que lo valioso de la información recopilada es la posibilidad de identificar las acciones matemáticas con mayor presencia o menor presencia en la formación matemática de los estudiantes en su etapa de educación secundaria. De manera que esta información se haga del conocimiento de los docentes de secundaria y de los cursos iniciales universitarios para generar estrategias didácticas que tiendan a favorecer la presencia de tales acciones en el desarrollo de tareas matemáticas. A continuación se presentan los resultados en tres partes: la primera se refiere a las percepciones de los estudiantes, la segunda a la de los profesores del curso y la tercera una síntesis de contraste de ambas versiones.

4.1. Percepciones de los estudiantes sobre su competencia matemática

El análisis por indicador permitió notar que la mayoría de los estudiantes concentran la mayor frecuencia en la opción “algunas veces”, que suele ser la opción que utilizan los informantes para no exteriorizar una posición definitiva ante la consulta y que en este caso sólo podría interpretarse como producto de un proceso de formación matemática sin una línea clara en el desarrollo de competencia matemática. Es de notar también, que todos los indicadores, excepto el N°56, muestran un número reducido de informantes que señalan con “siempre” la frecuencia con que se dieron en sus clases de matemáticas de secundaria las acciones consultadas. Los indicadores 50 y 53 no fueron valorados por 4 informantes, se cree que esto se debe a que los estudiantes no comprendieron las afirmaciones, según las indicaciones dadas en la aplicación del instrumento.

La tabla siguiente muestra el comportamiento de los datos por indicador, lo cual permite determinar los más frecuentes y los menos frecuentes.

Tabla 4. Frecuencia relativa de la presencia de cada indicador en una clase de matemáticas de secundaria

Indicador En la clase de matemáticas en secundaria,	Nunca, casi nunca o algunas veces	Casi siempre o siempre
45. Era posible adaptar un método de solución de otros problemas diferentes para resolver problemas nuevos.	66.3%	33.7%
46. Era posible generar y discutir diferentes procedimientos para resolver un problema.	43.9%	56.2%
47. Adaptaba correctamente procedimientos aprendidos y utilizados en álgebra para resolver un problema en geometría.	56.8%	42.6%
48. Para resolver un problema utilizaba variedad de estrategias: mentales, con lápiz y papel, calculadora, materiales concretos, dibujos, diagramas.	29.6%	70.4%
49. Lograba conectar o relacionar entre sí los procedimientos distintos, por ejemplo los de factorización, los de resolución de ecuaciones, etc.	44.4%	55.0%
50. Sabía identificar el error cometido en un proceso y justificarlo.	54.3%	41.4%
51. Era necesario proporcionar argumentos y justificaciones de por qué se podían usar ciertos conceptos o procedimientos para conseguir lo solicitado.	67.5%	32.0%
52. Si no comprendía la explicación del profesor o compañero hacía preguntas hasta convencerme de la validez de lo propuesto.	45.0%	54.3%
53. Lograba identificar patrones en situaciones diferentes.	64.5%	33.1%
54. Me consideraba capaz de resolver los ejercicios que planteaba el profesor.	27.2%	72.2%
55. Consideraba útil y con sentido los conceptos y procedimientos matemáticos.	46.2%	53.3%
56. Mi profesor consideraba que todos podíamos aprender matemáticas.	17.8%	81.7%

De la tabla anterior, tres indicadores sobresalen en las respuestas de los informantes como *acciones poco o nada frecuentes* durante la secundaria, debido a que más del 64% (esto es 109 informantes) indican que se trata de acciones que realizaban en sus clases de matemáticas nunca, casi nunca o algunas veces:

- Adaptar un método de solución de otros problemas diferentes para resolver problemas nuevos.
- Identificar patrones en situaciones diferentes.
- Proporcionar argumentos y justificaciones de por qué se pueden usar ciertos conceptos o procedimientos para conseguir lo solicitado.

Así también, tres indicadores son señalados por más del 70% de los informantes (esto es 119 estudiantes) como las acciones o percepciones *con mayor presencia* en sus clases de matemáticas:

- Utilizar variedad de estrategias para resolver un problema: mentales, lápiz y papel, calculadora, materiales concretos, dibujos o diagramas.
- Se consideraba capaz de resolver los ejercicios que planteaba el profesor.
- Su profesor consideraba que todos los estudiantes podían aprender matemáticas.

La ausencia de los tres indicadores valorados como menos frecuentes, debilitan de una forma importante la formación matemática de los estudiantes, porque se refieren a acciones fundamentales que permiten una comprensión más profunda de los conceptos y procedimientos matemáticos. En cuanto a los indicadores con mayor presencia, dos de ellos se refieren a una misma dimensión, actitud positiva hacia aprender matemáticas, que si bien es importante, su desarrollo no garantiza en nada la formación de jóvenes matemáticamente competentes.

La siguiente tabla muestra la distribución de las valoraciones de los estudiantes en cada una de las dimensiones, según su desarrollo adecuado o no.

Tabla 5. Número de informantes por dimensión de competencia según su desarrollo

Dimensión / Desarrollo	Comprensión Conceptual		Destrezas Procedimentales		Pensamiento Estratégico		Comunicación Matemática		Actitud positiva	
	F. A	F. R	F. A	F. R	F. A	F. R	F. A	F. R	F. A	F. R
Adecuado	34	20.1%	13	7.7%	27	16%	32	18.9%	104	61.5%
No Adecuado	135	79.9%	156	92.3%	142	84%	137	81.1%	65	38.5%

Debe notarse que únicamente en una de las cinco dimensiones, *actitud positiva hacia aprender matemáticas*, más del 60% de los estudiantes perciben haber desarrollado adecuadamente esta dimensión de competencia matemática. Es decir, el 61.5% de los estudiantes se considera capaz de aprender matemáticas. Este resultado tan contrastante con el resto de las dimensiones, debe interpretarse con sumo cuidado. Por una parte, es muy valioso que los estudiantes se perciban capaces de resolver las tareas matemáticas que planteaba su profesor y que aprecien que éste los considera capaces de aprender matemáticas. Sin embargo, es muy importante tener en cuenta que esta actitud es construida a partir de las actividades matemáticas a las que han sido expuestos y obviamente a las exigencias o demandas de éstas; las cuales no necesariamente responden a un verdadero quehacer matemático. Así por ejemplo, es de resaltar que más del 80% de los estudiantes resultaron con un desarrollo no adecuado en todas las dimensiones excepto en la afectiva.

Ahora bien, de los 65 estudiantes que no mostraron una actitud positiva hacia sus capacidades de aprender matemáticas, 51 de ellos mostraron un desarrollo no adecuado en todas las otras dimensiones. Del resto, el 12.3% (es decir 8 informantes), mostraron un desarrollo adecuado únicamente en una del resto de las dimensiones. Resaltamos este hecho porque es frecuente asociar la actitud que se tiene en relación con las capacidades de aprender, con el desempeño general en la disciplina.

Por otra parte, en la tabla N°5 destaca que un número muy elevado de sujetos 92.3%, no lograron un desarrollo adecuado en destrezas procedimentales, lo que podría discrepar con la idea de que se tiene que en la secundaria domina una formación matemática basada en procedimientos y algoritmos. Sin embargo, esto no es una incoherencia porque los indicadores consultados, no se refieren a la aplicación memorística de los procedimientos y algoritmos, sino una aplicación en la que media la comprensión conceptual. Además esta percepción coincide plenamente con la de las investigadoras, al observar que un número elevado de estudiantes suelen tener un desempeño muy deficiente en el curso, aún en los procedimientos algebraicos más elementales porque todos éstos los asocian con el uso inadecuado e indiscriminado de la calculadora, o bien, con la repetición.

Con relación a las otras cuatro dimensiones, es posible identificar tres indicadores con la mayor frecuencia en las valoraciones de “nunca” o “casi nunca”, en orden de frecuencia éstos son:

- Proporcionar argumentos y justificaciones de por qué se pueden usar ciertos conceptos o procedimientos para conseguir lo solicitado.
- Adaptar correctamente procedimientos aprendidos y utilizados en álgebra para resolver un problema en geometría.
- Generar y discutir diferentes procedimientos para resolver un problema.

Los tres, son indicadores importantes de resaltar porqué están relacionados con más de una de las dimensiones. En el caso del primero, propiciar esta acción en la clase de matemáticas está relacionado con el desarrollo de la comprensión conceptual y la comunicación de las ideas matemáticas, ambas dimensiones interactúan y se apoyan una a la otra en su perfeccionamiento. El segundo indicador, tiene que ver con la capacidad de trasladar o generalizar lo que se aprende en un contexto. Esto es fundamental cuando se quiere construir el quehacer matemático como la interrelación de ideas o conceptos en un marco definido y no como objetos aislados o segmentados que demandan hacer y rehacer las tareas unas desligadas de las otras.

Como se apuntó anteriormente, la valoración de “algunas veces” tiene una presencia muy alta en todos los indicadores excepto en el N°56. Es decir, en general los estudiantes optaron por una respuesta parcial al valorar la frecuencia en sus clases de las acciones matemáticas consultadas, lo que nos hace suponer que no se dio una presencia dominante o muy frecuente de las mismas; sino más bien acciones aisladas.

4.2. Percepciones de algunos profesores del curso sobre la competencia matemática de sus estudiantes

La siguiente tabla muestra las valoraciones realizadas por los 17 profesores del curso consultados sobre si consideran que más del 70% de sus estudiantes, realizan durante su desempeño en el curso las acciones definidas como indicadores de competencia matemática.

Tabla 6. Frecuencia de las valoraciones docentes sobre la presencia de cada indicador en más del 70% de sus estudiantes

Dimensión	Indicadores	Número de profesores que consideran que más del 70% de sus estudiantes realizan la acción indicada	
Comprensión conceptual	Proporcionar argumentos y justificaciones de por qué se podían usar ciertos conceptos o procedimientos para conseguir lo solicitado.	3	17.6%
	Considerar útil y con sentido los conceptos y procedimientos matemáticos.	1	5.9%
Destrezas procedimentales	Adaptar correctamente procedimientos aprendidos y utilizados en álgebra para resolver un problema en geometría.	4	23.5%
	Utilizar variedad de estrategias: mentales, con lápiz y papel, calculadora, materiales concretos, dibujos, diagramas, para resolver un problema.	5	29.4%
	Conectar o relacionar entre sí los procedimientos distintos, por ejemplo los de factorización, los de resolución de ecuaciones, etc.	5	29.4%
	Identificar el error cometido en un proceso y justificarlo.	4	23,5%
Pensamiento estratégico	Adaptar un método de solución de otros problemas diferentes para resolver problemas nuevos.	4	23,5%
	Generar y discutir diferentes procedimientos para resolver un problema.	4	23,5%
	Adaptar correctamente procedimientos aprendidos y utilizados en álgebra para resolver un problema en geometría.	4	23,5%
	Identificar patrones en situaciones diferentes.	5	29,4%
Comunicación matemática	Proporcionar argumentos y justificaciones de por qué se podían usar ciertos conceptos o procedimientos para conseguir lo solicitado.	3	17,6%
	Plantear preguntas cuando no se comprende la explicación del profesor o compañero hasta convencerse de la validez de lo propuesto.	8	47,1%
Actitud positiva en relación con sus capacidades matemáticas	Percibir capacidad para resolver los ejercicios que plantea el profesor.	0	0%
	Percibir que el profesor considera que todos pueden aprender matemáticas.	No se consultó	

Todas las acciones son valoradas por más del 47% de los profesores como que la mayoría de sus estudiantes no muestran evidencias de tales acciones de competencia matemática. Únicamente, la acción “Plantear preguntas cuando no se comprende la explicación del profesor o compañero hasta convencerse de la validez de lo propuesto” es considerada por 8 docentes (47,1%) como que más del 70% de sus estudiantes la realizan durante las clases. Debe notarse que se trata de una acción que valorada al margen de las otras, no constituye ninguna evidencia de competencia matemática, porque su presencia aislada se puede interpretar como la práctica usual en una clase tradicional, donde el estudiante pregunta todo o casi todo a su profesor y asume que éste debe responderle.

Ninguna acción de competencia sobresale como presente en una mayoría de los estudiantes en ninguna de las percepciones de los profesores. Por el contrario, acciones tan importantes en matemática como adaptar un procedimiento matemático, identificar y corregir un error, generar y discutir diferentes procedimientos son valoradas por el 76,5% de los profesores como ausentes en más del 70% de sus estudiantes.

4.3. Percepciones de profesores del curso en contrate con las de sus estudiantes

Al realizar una comparación entre las valoraciones de los estudiantes y las de sus profesores del curso, debe resaltarse el contraste tan importante que se da en las percepciones de ambos grupos de informantes sobre el indicador “Considerarse capaz de resolver los ejercicios que plantea el profesor”, asociado a la dimensión actitud positiva. Como se observó en las percepciones de los estudiantes, el 72,2% valoró como altamente frecuente esto en sus clases de matemáticas, mientras que un 100% de los docentes valoran como algo ausente en más del 70% de sus estudiantes. Es decir, en general los profesores consideran que los estudiantes no tienen una actitud positiva hacia aprender matemática. Esta percepción se ve reforzada cuando un 94,1% (16) de los docentes opinan que la mayoría de sus alumnos no consideran útil y con sentido los conceptos y procedimientos matemáticos.

Resulta interesante también analizar los resultados obtenidos con respecto a la acción “Era necesario proporcionar argumentos y justificaciones de por qué se podían usar ciertos conceptos o procedimientos para conseguir lo solicitado.”. Una mayoría de los estudiantes la valoran como ausente siempre o casi siempre en sus clases; de igual forma los profesores del curso MA 125, la perciben como ausente en las acciones de desempeño que evidencian sus estudiantes en las clases. En alguna medida esto podría explicar el contraste de resultados entre ambos grupos de informantes. Es decir, si los profesores del curso suponen o asumen que sus estudiantes saben justificar o argumentar su trabajo matemático y por otro lado el estudiante no espera que se le solicite esto, entonces estaríamos ante un importante choque de expectativas y demandas de ambos actores. Lo anterior podría llevar a los docentes a suponer que sus estudiantes no poseen una actitud positiva hacia aprender matemáticas. Es importante notar además que la puesta en práctica de esta acción, supone una comprensión conceptual de los procedimientos matemáticos y su aplicación, de manera que su ausencia en las clases de secundaria limitó en buena medida el alcance de dicha comprensión.

En síntesis, las precepciones de los profesores con las de sus estudiantes son coherentes en el sentido de que la formación matemática recibida en la educación secundaria no favoreció el desarrollo de al menos las cinco dimensiones de competencia matemática necesarias para un buen desempeño matemático.

5. Consideraciones finales

Básicamente tres aspectos sobresalen de la consulta a los estudiantes. La gran mayoría de los estudiantes se perciben como capaces de aprender matemáticas; optaron por una valoración media de la frecuencia en la presencia en la clase de matemáticas de la mayoría de las acciones consultadas y no mostraron, según sus percepciones, desarrollo en cuatro de las cinco dimensiones de competencia matemática.

Con respecto a la primera, es un elemento interesante de resaltar y de aprovechar de manera adecuada en el curso universitario, porque como quedó establecido los profesores de este curso consideran que sus estudiantes no tienen buena disposición hacia el aprendizaje de la matemática. La explicación de esta contradicción, en nuestra opinión está relacionada con la problemática de la transición entre la secundaria y la universidad. Lo que podría estar sucediendo, es que los estudiantes de manera muy temprana viven un choque no muy positivo entre sus experiencias en la clase de secundaria y las de la clase universitaria. Es decir, las demandas o tareas resultan muy distintas; lo cual nos parece válido de suponer considerando que la mayoría de las acciones matemáticas consultadas no tuvieron mayor presencia en sus clases de educación secundaria.

Los resultados obtenidos en el análisis por dimensión de competencia nos parecen con sentido, porque éstos son similares en todas las dimensiones. Es decir el desarrollo o no de una dimensión de competencia determina el desarrollo del resto; dado que están muy asociadas y se apoyan entre sí. Las investigadoras consideran muy valioso el ejercicio de derivar acciones asociadas a las dimensiones de competencia, que permitan señalar de una manera más explícita las acciones matemáticas que se deben favorecer en una clase de matemáticas; en el caso que nos ocupa, en particular se deben resaltar las siguientes: adaptar los métodos o procedimientos de resolución de un problema a otros contextos nuevos; proporcionar argumentos y justificaciones de por qué se resuelve algo de determinada forma; plantear patrones en contextos matemáticos distintos.

Con respecto a las percepciones de los profesores, es evidente que éstos no encuentran en sus estudiantes que la formación matemática recibida en la educación secundaria, permita un trabajo matemático en el curso, ni tampoco la disposición de su parte para incursionar en este tipo de quehacer.

Bibliografía

Goñi, J. (2008) *3^2-2 Ideas Clave. El desarrollo de la competencia matem*ática. Graó, Barcelona. España.

Instituto Nacional de Evaluación y Calidad del Sistema Educativo. (2005). *PISA 2003, Pruebas de Matemáticas y de Solución de Problemas*, Madrid: MEC.

Johnson, R., Onwuegbuzie, A. (2004). *Mixed methods research: a research paradigm whose time has come*. Educational Research, 33(7), 14-26.

Llinares, S., Ruiz, M., Vecino, F., Belmonte, J. Chamorro, C. (coord). (2003). *Didáctica de las matemáticas para primaria*. PEARSON PRENTICE HALL. España.

Lupiáñez, J. (2008). *Expectativas de aprendizaje: Capacidades y competencias*. Centro del Profesorado de Marbella – Coín Fuengirola. Recuperado el 12 de febrero de 2012, de http://plataforma.cep-marbellacoin.org/moodle/mod/resource/view.php?id...

Lupiàñez, J., Rico, L. (2008). *Análisis Didáctico y formación inicial de profesores: competencias y capacidades en el aprendizaje de los escolares*. PNA, 3(1), 35 – 48. Recuperado el 18 de diciembre de 2009, de http://www.pna.es/Numeros2/pdf/Lupiannez2008Analisis.pdf

Niss, M., Hojgaard, T. (2011). *Competencies and Mathematical Learning. Ideas and inspiration for the development of mathematics teaching and learning in* IMFUFA, Roskilde University, *Denmark.* Denmark.

Organization for economic co-operation and development. (2003). *The PISA 2003 Assessment Framework – Mathematics, Reading, Science and Problem Solving Knowledge and Skills*. Paris: OECD.

Floria Arias Tencio: Licenciada en Enseñanza de la Matemática y Magíster en Planificación Curricular. Labora en la Escuela de Matemática de la Universidad de Costa Rica como profesora en cursos de servicio y en la formación inicial de profesores de matemática y como investigadora en Educación Matemática. Ha publicado varios libros de texto de matemáticas para primaria, secundaria y universidad. E-mail: **floria.arias@ucr.ac.cr**.

Kattia Rodríguez Ramírez: Licenciada en Enseñanza de la Matemática. Cuenta con amplia experiencia en la Enseñanza de la Matemática como profesora en educación secundaria y universitaria inicia.Coordina e imparte el curso Matemática Elemental de la Escuela de Matemática, Universidad de Costa Rica. Investigadora en Ed. Matemática. **kattia.rodriguez@ucr.ac.cr**

REVISTA IBEROAMERICANA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA

ISSN: 1815-0640
Número 35. Septiembre de 2013
páginas 75-91

www.fisem.org/web/union

El lenguaje de probabilidad en los libros de texto de Educación Primaria

Emilse Gómez Torres, Juan Jesús Ortiz de Haro, Carmen Batanero, José Miguel Contreras

Fecha de recepción: 19/02/2013
Fecha de aceptación: 10/09/2013

Resumen	En este trabajo analizamos el lenguaje de la probabilidad en dos series de libros de texto españoles de Educación Primaria. Los resultados muestran la gran riqueza y diversidad de expresiones verbales y predominio de lenguaje coloquial frente al formal; el lenguaje se asocia a diversos significados de la probabilidad (intuitivo, clásico, frecuencial y subjetivo). El lenguaje numérico se desarrolla de acuerdo a la introducción de diferentes sistemas numéricos en la enseñanza; se encuentra también, amplio uso de representaciones tabulares y gráficas. Algunas diferencias en los libros indican el importante papel del profesor al seleccionar y usar estos libros en la enseñanza. **Palabras clave**: Representaciones, currículo implementado, significados de la probabilidad, lenguaje formal.
Abstract	In this paper we analyze the language of probability in two series of Spanish primary school textbooks. Results suggest a wealth and variety of verbal expression and dominance of colloquial versus formal language; language is associated to different (intuitive, classical, frequentist and formal) meanings of probability. Numerical language is developed according the different number systems are introduced in teaching; also, there is a wide use of tabular and graphical representations. Some differences in the textbooks point to the important role of the teacher in selecting and using these books in teaching. **Keywords**: representations, implemented curriculum, meanings of probability, formal language
Resumo	O presente estudo analisa a linguagem da probabilidade em dois conjuntos de livros didáticos para a escola primária espanhol. Os resultados mostram a riqueza e diversidade da linguagem e domínio da linguagem coloquial versus linguagem formal associado com significados diferentes de probabilidade (intuitiva, freqüência, clássica formal). A linguagem numérica desenvolve de acordo com a introdução de diversos sistemas numéricos no ensino; também se percibe o uso extensivo de representações de tabelas e gráficos. Algumas diferenças entre os livros indicam o importante papel do professor para selecionar e utilizar esses livros no ensino. **Palavras-chave:** representações, currículo implementado, significados de probabilidade, linguagem formal.

1. Introducción

En los documentos curriculares actualmente vigentes en España, se sugiere iniciar el estudio de la probabilidad desde la Educación Primaria (6-12 años). Así, en el Decreto de Enseñanzas Mínimas (MEC, 2006), en el *Bloque 4. Tratamiento de la información, azar y probabilidad* se incluyen los siguientes contenidos:

> "Carácter aleatorio de algunas experiencias. Distinción entre lo imposible, lo seguro y aquello que es posible pero no seguro, y utilización en el lenguaje habitual, de expresiones relacionadas con la probabilidad" (p. 43098; primer ciclo). "Valoración de los resultados de experiencias en las que interviene el azar, para apreciar que hay sucesos más o menos probables y la imposibilidad de predecir un resultado concreto. Introducción al lenguaje del azar" (p. 43099; segundo ciclo). "Presencia del azar en la vida cotidiana. Estimación del grado de probabilidad de un suceso" (p. 43101; tercer ciclo).

Como vemos, este documento sugiere transmitir al niño un lenguaje elemental probabilístico mediante juegos, experimentos y observación de fenómenos naturales, para que aprenda a identificar las situaciones aleatorias y llegue al final de la etapa a asignar algunas probabilidades sencillas. Consideraciones similares se realizan en programas de otros países (p. e. NCTM, 2000).

Al considerar la enseñanza del lenguaje de la probabilidad, hemos de tener en cuenta que el niño de 6-7 años ya ha usado anteriormente términos y expresiones para referirse a los sucesos aleatorios, aunque no siempre con el mismo significado que tratamos de enseñar. También es importante el lenguaje que se presenta en los libros de texto que usa el niño, que son uno de los principales recursos educativos, ya que muchas de decisiones de los profesores sobre las tareas a realizar con los niños están mediadas por los libros de texto (Stylianides, 2009).

Cordero y Flores (2007) indican que el discurso matemático escolar es determinado con frecuencia por el libro de texto, además prácticamente regula la enseñanza y el aprendizaje, debido en parte a las creencias de los actores del sistema didáctico. En la enseñanza de la estadística y probabilidad, el libro contribuye a la formación del propio docente (García, 2011).

En este trabajo se presenta un estudio sobre el lenguaje de la probabilidad en algunos libros de texto a lo largo de la Educación Primaria, con el fin de orientar al profesor en su uso y alertarle de posibles problemas de interpretación de este lenguaje por parte de los niños. Para ello se han elegido dos series completas de libros de texto de editoriales de amplia difusión en España, realizando un análisis que utiliza la metodología propuesta por Cobo (2003). Una vez presentado brevemente el marco teórico y método utilizado, se aportan los resultados sobre las expresiones verbales, lenguaje numérico y simbólico, lenguaje tabular y representaciones gráficas, comparando las dos series en cada ciclo de la educación primaria.

2. Fundamentos

2.1. Marco teórico

Desde el currículo pretendido al implementado en el aula, una fase importante es el currículo escrito y la forma en que lo interpretan los profesores, a través de los libros de texto (Herbel, 2007). Estos libros son un producto del proceso de transposición didáctica (Chevallard, 1991), es decir, la adaptación de conocimiento matemático formal a conocimiento matemático para ser enseñado.

Un elemento fundamental en la construcción del conocimiento matemático es el lenguaje utilizado, que, iniciándose a partir del lenguaje cotidiano del niño, progresivamente se transforma en otro de mayor nivel de abstracción. Schleppegrell (2007) destaca los retos lingüísticos de la enseñanza de las matemáticas, debido a los múltiples sistemas semióticos utilizados para construir conocimiento: lenguaje oral, escrito, símbolos y representaciones como gráficos y tablas. Por tanto el lenguaje del libro de texto consta no sólo de vocabulario y símbolos, sino de representaciones complejas, puede afectar al aprendizaje de las matemáticas si los alumnos tienen dificultad en su comprensión (Orton, 1990). Son también importantes las relaciones lógicas implícitas que enlazan los elementos del discurso matemático en los libros de texto (Lemke, 2003; O'Halloran, 1999, 2003; Veel, 1999; Chapman, 1995).

El lenguaje matemático es fundamental en el Enfoque Onto-semiótico (EOS) (Godino, Batanero y Font, 2007), que postula que los objetos matemáticos emergen de las prácticas de un sujeto (persona o institución) al resolver problemas, y que estas prácticas están mediadas por el lenguaje, que es, a la vez, instrumento representacional y operativo. Los autores también indican la presencia de posibles conflictos semióticos al interpretar el lenguaje matemático, entendiendo por tales "*cualquier disparidad o discordancia entre los significados atribuidos a una expresión por dos sujetos (personas o instituciones)*" (Godino, Batanero y Font, 2007, p.133).

Otro punto que fundamenta nuestro análisis es la diferenciación entre algunos de los significados actuales de la probabilidad (Batanero, Henry y Parzysz, 2005): significado intuitivo (o uso no formalizado de ideas sobre azar y probabilidad), significado clásico (probabilidad como cociente entre casos favorables y posibles); significado frecuencial (probabilidad como límite al que tiende la frecuencia relativa en un número suficientemente elevado); y significado subjetivo (probabilidad como grado de creencia personal).

La investigación sobre la presentación de la probabilidad en los libros de texto es muy escasa y concentrada en la educación secundaria; menor aún la que se concentra en el lenguaje. A continuación resumimos estudios relevantes para nuestra investigación.

Ortiz, Batanero y Serrano (2001) analizaron el lenguaje utilizado en dos libros de texto de Educación Secundaria, distinguiendo entre el lenguaje de lo aleatorio y el lenguaje de la probabilidad. Respecto al experimento aleatorio observan una mayor riqueza del lenguaje empleado en uno de los textos, con una gama más variada de adjetivos y expresiones, ejemplos de generadores aleatorios asociados a una concepción frecuencial de la probabilidad y tablas de números aleatorios. Concluyen que en este libro hay un mayor énfasis en el concepto de aleatoriedad y la fenomenología del azar. El mismo texto presenta un vocabulario más rico respecto a la probabilidad, con gradaciones cualitativas, presentando las concepciones subjetivas y frecuencial; distingue entre "probabilidades teóricas" y "experimentales"; y conecta la probabilidad con el estudio de la estadística.

A pesar de que la mayor parte de los problemas se deben resolver usando conceptos combinatorios, no hay referencias explícitas ni vocabulario o notación sobre ellos. Ortiz (2002) complementa este estudio analizando otros elementos de los textos, como los problemas propuestos, definiciones y propiedades. También ilustra algunos sesgos en los significados de la probabilidad presentados e indica que el profesor debe mantener una permanente vigilancia epistemológica en el uso de textos para evitar su transmisión a los alumnos.

Serradó y Azcárate (2006) analizaron la estructura de las unidades didácticas sobre probabilidad en cuatro series de libros de texto para la Educación Secundaria Obligatoria. Las cuatro editoriales, a partir del establecimiento de los objetivos introducen una actividad inicial para motivar y evaluar los conocimientos previos de los estudiantes. Las mayores diferencias se encuentran en el desarrollo de las unidades didácticas, pues dos editoriales organizan los contenidos de forma lineal, introducen las nociones teóricas de forma deductiva, y las actividades son fundamentalmente de aplicación, sin utilizar recursos manipulativos ni fomentar el trabajo colaborativo. Las otras dos organizan los contenidos de forma helicoidal, con una estructura de discurso de carácter inductivo, alternando las nociones teóricas y las actividades, utilizando recursos manipulativos y trabajo cooperativo.

A partir del análisis de la estructura de las unidades didácticas, se pueden determinar dos tendencias: una de corte tradicional, donde se incluirían los libros de texto de dos editoriales, y otra de corte innovador, donde estarían los libros de texto de las otras dos editoriales. Este estudio se completa en Serradó, Azcárate y Cardeñoso (2006) mostrando que la caracterización escolar de la noción de probabilidad en los libros de texto se asimila, con preferencia del significado clásico en unas editoriales y del frecuencial para otras, sin formalizar las relaciones entre las dos aproximaciones.

Además de estos trabajos sobre probabilidad, otros analizan el lenguaje usado para presentar conceptos estadísticos en libros de texto. Entre ellos destacamos el de Cobo y Batanero (2004) quienes analizaron los problemas propuestos, algoritmos de cálculo, definiciones, propiedades, lenguaje y argumentos sobre la media aritmética en 22 libros de texto de secundaria. En relación al lenguaje, destacan la gran variedad de representaciones empleadas por los distintos libros de texto, sobre las notaciones y símbolos señalan la dificultad del uso del sumatorio y de los subíndices. Por último, aprecian que en algunos textos faltan ciertos elementos, concretamente gráficos y representaciones simbólicas, que pueden influir en las dificultades que encuentran los estudiantes cuando analizan un conjunto de datos.

García (2011) analiza el lenguaje utilizado sobre inferencia estadística en cuatro libros de texto de segundo curso de Bachillerato para Ciencias Sociales. Para cada concepto se estudia el significado en el Diccionario de la Real Academia Española; en los manuales universitarios y en los libros analizados. Los resultados mostraron que los libros de texto, en ocasiones aportan un significado incorrecto, con lo que no contribuyen a resolver los problemas conceptuales de los estudiantes. Por otro lado, mientras el contexto de trabajo es determinante en el significado de los conceptos, algunos libros de texto no usan el contexto matemático sino más bien el contexto cotidiano al definir un concepto.

Lavalle, Micheli y Rubio (2006) analizaron el lenguaje gráfico en la presentación de los conceptos de regresión y correlación en siete textos de matemáticas de secundaria en Argentina. Los resultados muestran que los libros de texto refuerzan la importancia de la correlación con el uso de diferentes diagramas y solicitando a los estudiantes que analicen el tipo y grado de relación lineal. Con respecto al tratamiento del tema, el nivel de profundidad depende de la edad del alumno, comenzando con los alumnos de menor edad mediante una aproximación intuitiva.

Para complementar los citados trabajos analizaremos el lenguaje matemático utilizado en algunos libros de texto de Educación Primaria. En lo que sigue se presentan el método y resultados del estudio.

3. Método

Las dos series de libros de texto analizadas se eligieron por ser los más utilizados en Andalucía en el curso 2011-2012 (se hizo una consulta a la Consejería de Educación). Cada una de estas editoriales tiene uno o dos proyectos o series vigentes, dependiendo del ciclo. Nuestra muestra intencional está constituida por los libros de texto que se incluyen como anexo y a los que se hará referencia en el texto como Serie 1 o 2.

El análisis fue cualitativo y adapta la metodología de Cobo (2003):

1. Identificación de las páginas o los capítulos de los libros de texto donde se incluyen temas de azar o probabilidad. División del texto en secciones independientes (párrafos, ejemplos, ejercicios) que se toman como unidades de análisis.
2. Fijación a priori de las siguientes variables para el análisis: expresiones verbales, símbolos, expresiones numéricas, representaciones tabulares y gráficas.
3. Para cada una estas variables se determinan las categorías en que pueden clasificarse diferenciadamente; por ejemplo, para la variable “expresión verbal” las categorías están dadas por palabras o expresiones usadas con sentido probabilístico en el texto. Estas categorías se determinan mediante revisiones sucesivas de los textos, de un modo cíclico e inductivo.
4. Establecimiento de la presencia de cada una de las categorías en los libros de la muestra, a través de la comparación del contenido de estos textos. Selección de ejemplos en los textos y elaboración de tablas cuya lectura facilite la obtención de conclusiones sobre el uso del lenguaje en estas colecciones.

4. Resultados y discusión

4.1. Expresiones verbales

En primer lugar se analizaron expresiones verbales, para las cuáles Shuard y Rothery (1984) distinguen tres categorías:

1) palabras específicas de las matemáticas que, normalmente, no forman parte del lenguaje cotidiano;

2) palabras que aparecen en las matemáticas y en el lenguaje ordinario, aunque no siempre con el mismo significado en los dos contextos, y

3) palabras que tienen significados iguales o muy próximos en ambos contextos. Como veremos, en nuestro estudio la mayoría de los vocablos pertenecen a las dos últimas categorías.

Tabla 1. Expresiones verbales incluidas en los libros de texto

Concepto	Expresión verbal	Significado a que se asocia
Aleatoriedad	Acertar, Adivinar	Clásico, frecuencial, intuitivo
	Aleatoria	Clásico, frecuencial, intuitivo
	Asegurar resultado	Frecuencial, intuitivo
	Azar	Intuitivo
	No saber	Frecuencial, intuitivo
	Saber qué saldrá	Clásico, intuitivo
	Saber de antemano	Clásico
	Saber resultados posibles	Clásico
	Sin mirar	Clásico, intuitivo
	Suerte	Clásico, intuitivo
Espacio muestral	Cuántos	Clásico, frecuencial
	Tabla (de doble entrada)	Clásico
	Todos los posibles; formas posibles	Clásico
Esperanza matemática	Apostar	Clásico, frecuencial, intuitivo
	Estimar	Frecuencial
	Fiable. Predecir	Frecuencial
	Juego (Juego) justo	Clásico, frecuencial, intuitivo
Experimento aleatorio	Coger/sacar objeto	Clásico
	Datos	Frecuencial
	Distribuir cartas	Clásico
	Elegir/extraer	Clásico, intuitivo
	Experiencia	Clásico, frecuencial, intuitivo
	Girar peonza/ruleta	Clásico
	Juego de pares y nones	Intuitivo
	Lanzar dado/moneda	Clásico
	Observar	Frecuencial
	Parchís	Clásico
	Sacar (salir) bola/carta	Clásico
	Sacar (salir) resultado	Frecuencial
	Situación	Clásico, frecuencial, intuitivo
	Sorteo (lotería)	Clásico
	Tabla (de datos)	Frecuencial
	Tirar (lanzar) chapa, dardo	Frecuencial
Probabilidad	*Cálculo de probabilidades*	Clásico
	Comparar probabilidad	Clásico
	Medir, valorar	Clásico
	Ocurrir sucesos	Clásico, frecuencial, intuitivo
	(Nº. de) posibilidad(es) entre	Clásico
	Posibilidad	Intuitivo
	Probabilidad	Clásico, frecuencial
	Seguridad	Intuitivo
Suceso y tipos	Bastante/poco probable	Intuitivo
	Casos favorables/casos posibles	Clásico
	Hay más/tantas/menos posibilidad	Intuitivo
	Más fácil de conseguir	Clásico
	Más, menos, muy probable	Intuitivo
	Ocurre siempre/a veces/ nunca	Intuitivo
	Posibles resultados	Intuitivo
	Probablemente	Intuitivo
	Resultado	Intuitivo
	Seguro posible/imposible	Clásico, frecuencial
	Suceso	Intuitivo
	Suceso muy/igual/poco probable	Clásico, frecuencial, intuitivo
Variable aleatoria	*Estadísticas*	Frecuencial
	Probabilidad estimada	Frecuencial

Identificamos un gran número de expresiones diferentes ligadas a la probabilidad en los textos analizados, que hacen alusión a algunos de los conceptos probabilísticos, a sus propiedades, o a procedimientos asociados y a significados diferenciados de la probabilidad. En la Tabla 1 presentamos estos términos, resaltando con cursiva aquellos que son específicamente matemáticos. Esta diversidad de términos pudiera aumentar la dificultad del tema, sobre todo si se utilizan términos del lenguaje cotidiano con otra acepción; por ejemplo, en el lenguaje ordinario el término seguro a veces se emplea para referirse a un suceso de probabilidad cercana a uno, mientras que en matemáticas, siempre indica un suceso de probabilidad uno (Ortiz, 2002).

Los conceptos con mayor riqueza de lenguaje verbal son el experimento aleatorio, los sucesos y sus tipos, y la aleatoriedad. La mayoría de expresiones ligadas a experimento aleatorio y aleatoriedad son verbos (asociados con procedimientos), y las ligadas a los sucesos adjetivos (propiedades de la tipología de sucesos). La mayor parte de las expresiones se refieren al significado clásico, habiendo casi el mismo número de expresiones asociadas al significado intuitivo. Pocas expresiones están asociadas al significado frecuencial, de poco peso (o nulo) en las editoriales, a pesar de recomendarse en el currículo.

Un resumen se presenta en la Tabla 2; observamos que las expresiones matemáticas específicas son pocas, y que de acuerdo a las normativas españolas el lenguaje de azar se incluye en todos los ciclos. Asimismo, se concluye que la Serie 1 presenta un mayor uso de lenguaje específico y más riqueza verbal en general. Al igual que el estudio de Ortiz (2002) con textos de secundaria, observamos más riqueza de lenguaje verbal referido a experimento aleatorio, aleatoriedad, sucesos y sus tipos, que con respecto a conceptos más avanzados.

Tabla 2. Número de expresiones, según tipología, incluidos en los libros de texto

	Primer ciclo		Segundo ciclo		Tercer ciclo	
	Serie 1	Serie 2	Serie 1	Serie 2	Serie 1	Serie 2
Expresiones cotidianas	4	6	26	18	19	21
Expresiones específicas de aleatoriedad y probabilidad			10	4	12	6
Expresiones específicas de los juegos de azar	1	2	8	6	7	7

4.2. Lenguaje numérico

En los libros analizados es frecuente el lenguaje numérico, observándose números enteros, fracciones y decimales. Los números enteros se introducen desde primer ciclo con función nominal o numérica. En el primer caso, el entero representa un valor (posible, imposible o seguro) de la variable aleatoria de interés o un suceso en el experimento; por ejemplo, al preguntar "*¿Cuál es la probabilidad de sacar un 3 al lanzar un dado en el juego de parchís?[…]¿y un número menor que 7?*" ([T10], p. 215). En el segundo caso, el entero representa un valor numérico, ya sea el número de casos favorables o posibles, en el significado clásico, o las frecuencias absolutas, en el significado frecuencial.

Las fracciones se utilizan desde segundo ciclo principalmente para representar el valor de la probabilidad o la frecuencia. Un ejemplo es el siguiente: *"La probabilidad de que Ana saque una varilla azul es 7/10*" ([T10], p. 215). En algunos casos y desde el tercer ciclo se hace la equivalencia de estas fracciones con números decimales. Como el siguiente ejemplo en la estimación frecuencial de la probabilidad: "*Probabilidad estimada de que mañana no falten menos de 3 […] 0,67*" ([T5], p. 211).

En ambas editoriales los números enteros se utilizan en todos los ciclos (Tabla 3), mientras que la representación con números decimales, de acuerdo al currículo se retrasa hasta tercer ciclo. Asimismo, se concluye que la serie 2 presenta un mayor uso de fracciones para representar probabilidades o frecuencias relativas, en particular en el tercer ciclo.

Tabla 3. Tipos de números incluidos en los libros de texto

	Primer ciclo		Segundo ciclo		Tercer ciclo	
	Serie 1	Serie 2	Serie 1	Serie 2	Serie 1	Serie 2
Números enteros	X	X	X	X	X	X
Números decimales					X	
Fracción representa probabilidad			X		X	X
Fracción representa frecuencia relativa			X		X	X

4.3. Lenguaje simbólico

La mayor parte del lenguaje simbólico es común con otros bloques de contenido y se introduce en el ciclo en que el niño aprende dicho contenido o en el siguiente ciclo. Por ejemplo, el símbolo de la suma (+) se utiliza desde segundo ciclo para calcular el número de casos posibles en un suceso compuesto o para obtener los valores posibles en un experimento compuesto sencillo. La igualdad (=) se usa también desde segundo ciclo; por ejemplo, como símbolo de equivalencia entre dos fracciones, o entre una fracción y un número decimal (Figura 1). La desigualdad se encontró en la segunda serie, en tercer ciclo, como símbolo de relaciones de orden en la comparación de probabilidades.

Como $\frac{7}{10} > \frac{2}{10}$, es más probable que Rebeca saque una varilla azul ([T8], p. 218).

	Frecuencia absoluta (aciertos)	Total de preguntas del test	Frecuencia relativa
María	14	16	$\frac{14}{16} = 0{,}875$

Figura 1. Uso de lenguaje tabular y simbólico ([T10], p. 210)

En la serie 1 se introduce lenguaje simbólico específico de la probabilidad; éste es muy variado e incluso complejo con relación al nivel de enseñanza. En particular, hemos observado el uso combinado de letras y notación funcional, aunque sólo en los textos del último curso, combinándolo con descripciones en lenguaje verbal, esquemas o gráficos, para iniciar la formalización del tema. Un ejemplo al formalizar la asignación clásica de probabilidad se muestra a continuación, donde la flecha simboliza representación, de manera que "P" (el significante que la sigue) significa "probabilidad de un suceso" (significado). El símbolo de igualdad simboliza asignación numérica, mediante la regla de Laplace, es decir, una fracción cuyos términos están descritos en lenguaje verbal.

$$\text{Probabilidad de un suceso} \rightarrow P = \frac{\text{n.º de casos favorables}}{\text{n.º de casos posibles}}$$ ([T5], p. 208)

En otro ejemplo, que mostramos en lo que sigue, los símbolos representan operaciones o equivalencias: *P* denota probabilidad estimada del suceso de interés; la primera igualdad representa la asignación hecha a *P*, la fracción, la frecuencia relativa del suceso. La segunda igualdad indica que la fracción también corresponde a la operación división (representado con el símbolo “:”). El símbolo $\simeq$ indica una probabilidad estimada, P se aproxima al decimal 0,27. Probabilidad estimada de que mañana no falte nadie; $P = 4/15 = 4{:}15 \cong 0{,}27$" ([T5], p. 211).

En ambas editoriales observamos ausencia de cualquier notación en el primer ciclo (Tabla 4), y uso de símbolos y operaciones de suma e igualdad en el segundo ciclo. La serie 2 usa el símbolo de desigualdad para la comparación de probabilidades; la serie 1 usa el símbolo de aproximación para la estimación de probabilidades o para la aproximación de fracciones a números decimales, y usa el símbolo de probabilidad y notación funcional.

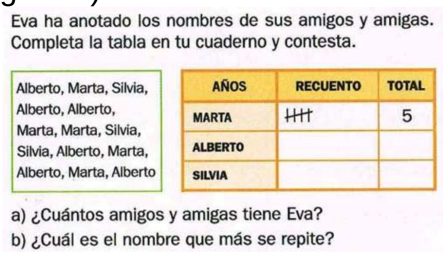
Tabla 4. Tipos de símbolos y operaciones incluidos en los libros de texto

	Primer ciclo		Segundo ciclo		Tercer ciclo	
	Serie 1	Serie 2	Serie 1	Serie 2	Serie 1	Serie 2
Igualdad (=)			X	X		
Suma (+)			X	X		
Desigualdad (>)						X
Aproximación ($\simeq$)					X	
División (:)					X	
Letras como símbolos					X	
Notación funcional			X		X	

Observamos también que las expresiones cotidianas son más frecuentes que las formales y simbólicas en estas colecciones, acorde con la edad de los niños; a diferencia de los hallazgos de Ortiz (2002) que encontró una presentación más formal, en textos dirigidos a estudiantes de 14 o 15 años. Una diferencia con el estudio de Ortiz es la mayor consistencia en el uso de lenguaje numérico y simbólico, en nuestras dos editoriales; aunque su presencia es mucho menor que en los textos analizados por dicho autor. Estas diferencias se relacionan con objetivos didácticos, pues los textos de Primaria se orientan a la fundamentación mientras que los textos de Secundaria se orientan a la consolidación y formalización.

4.4. Lenguaje tabular

El lenguaje de tipo tabular se usa con frecuencia, y su estructura avanza en complejidad con los cursos. Su principal uso es la presentación de datos. Sólo al final de la Educación Primaria se relaciona explícitamente con la probabilidad, al presentar las frecuencias relativas como estimaciones de probabilidades, facilitando su articulación con la estadística y la introducción del significado frecuencial. Un primer uso de las tablas es presentar listados de datos, que pueden constituir el espacio muestral en el experimento de interés o se usan para efectuar un recuento (ambos casos se dan en la Figura 2).


Eva ha anotado los nombres de sus amigos y amigas.
Completa la tabla en tu cuaderno y contesta.

Alberto, Marta, Silvia, Alberto, Alberto, Marta, Marta, Silvia, Silvia, Alberto, Marta, Alberto, Marta, Alberto

AÑOS	RECUENTO	TOTAL
MARTA	卌	5
ALBERTO		
SILVIA		

a) ¿Cuántos amigos y amigas tiene Eva?
b) ¿Cuál es el nombre que más se repite?

Figura 2. Listado de datos y tabla de recuentos ([T2], p. 204)

Otro uso está en las tablas de frecuencia, que se consolidan en el segundo ciclo con la presentación de frecuencias absolutas o relativas para resumir la información de una población o de una muestra, aunque no se estudia explícitamente el muestreo. Estas tablas de frecuencias ofrecen una estructura de relaciones, más allá de los números consignados en ellas (por ejemplo, relacionando cada valor de la variable con su frecuencia). En ocasiones también se presentan tablas de datos agrupados en intervalos al finalizar la Primaria; puesto que el agrupamiento en intervalos es un paso previo a la introducción de las variables aleatorias continuas, la interpretación de la frecuencia de un intervalo facilita la comprensión, posterior en Secundaria, de la probabilidad en intervalos de dichas variables. El ejemplo de la Figura 3 utiliza intervalos de edad desigual, lo que podría ser una fuente de conflicto potencial en los niños.

DATO (grupo de edad)	FRECUENCIA (n.º de habitantes)
0 - 14 años	665
15 - 24 años	527
25 - 49 años	1 857
50 - 64 años	770
65 - 79 años	555
80 años o más	206

Si los datos son muy numerosos, se agrupan en intervalos.

Figura 3. Tabla de frecuencias con datos agrupados en intervalos ([T4], p. 204)

La tabla de doble entrada se presenta en el segundo ciclo con algunas celdas en blanco para ser completadas a partir de operaciones aditivas; las actividades propuestas están dirigidas a su lectura e interpretación (no a su construcción). Este tipo de tabla implica un nivel de razonamiento más complejo porque establece relaciones entre tres objetos matemáticos, relaciona las dos variables que se ubican en filas y columnas con las frecuencias absolutas que se ubican en las celdas de esa matriz. También se puede ver como representación de un espacio muestral producto en un experimento compuesto.

Esta frecuencia conjunta es un concepto preliminar de la probabilidad conjunta y, si los niños han comprendido la noción parte-todo, permite introducir intuitivamente su cálculo. Asimismo, la comprensión de la noción parte-todo facilita la introducción de la probabilidad condicional cuando se relaciona una celda con el total de su fila o de su columna, en lugar de hacerlo con el total de la tabla. En el ejemplo de la Figura 4 las preguntas están formuladas en términos de frecuencias absolutas, que se pueden asociar con probabilidad simple (en a), conjunta (en b) y condicional (en c y d).

En esta tabla se recogen las preferencias deportivas de los niños y niñas del colegio de María. Completa la tabla en tu cuaderno y contesta.

	NIÑAS	NIÑOS	TOTAL
NATACIÓN	23	25	
TENIS	12	10	
FÚTBOL	18		45
ESQUÍ		20	41
BALONMANO	19	21	40
TOTAL	93	103	

a) ¿Cuántos niños y niñas prefieren el tenis?

b) ¿Qué significa el número 18 de la tabla? ¿Y el número 20?

c) ¿Cuál es el deporte preferido por las niñas? ¿Y por los niños?

d) ¿Cuál es el deporte que menos prefieren los niños y niñas?

Figura 4. Tabla de doble entrada ([T2], p. 205)

Aparecen pocas tablas de frecuencias relativas en el estudio de la probabilidad. El ejemplo de la Figura 5 difiere del formato estándar; su propósito es facilitar la comparación de la aparición de un suceso en tres experimentos diferentes. Este tipo de tabla es un preámbulo para la noción de probabilidad condicional; cada frecuencia relativa en la última columna se puede ver como la proporción de aparición de un suceso (acertar) variando el suceso condicionante (persona que contesta el test). Su construcción es una fuente de conflicto potencial para un niño que está aprendiendo las tablas de frecuencias tradicionales; por ejemplo, pierde sentido que la suma de valores en todas las filas corresponda al total.

	Frecuencia absoluta (aciertos)	Total de preguntas del test	Frecuencia relativa
María	14	16	$\frac{14}{16} = 0{,}875$
Paulo	12	15	$\frac{12}{15} = 0{,}8$
Elisa	28	40	$\frac{28}{40} = 0{,}7$

Figura 5. Tabla para comparación de frecuencias ([T10], p. 210)

Observamos en ambas editoriales el aumento en la complejidad de las tablas acorde con el ciclo educativo (Tabla 5). Notamos que la serie 1 presenta más riqueza en el lenguaje tabular, desde segundo ciclo, con la inclusión de al menos una tabla de frecuencias con datos agrupados y una tabla de doble entrada. El lenguaje tabular se vincula principalmente con la estadística y, en general, los autores no hacen mención de la relación entre estadística y probabilidad, ni resaltan que la suma de las frecuencias relativas debe ser igual a uno.

Tabla 5. Tipos de tablas incluidos en los libros de texto

	Primer ciclo		Segundo ciclo		Tercer ciclo	
	Serie 1	Serie 2	Serie 1	Serie 2	Serie 1	Serie 2
Listado de datos			X	X		
Tabla de recuento	X	X				
Tabla de frecuencias sin agrupar			X	X		
Tabla de frecuencias con datos agrupados					X	
Tabla de doble entrada			X			
Tabla de frecuencias relativas					X	X
Tabla con frecuencias relativas en formato no estándar					X	

Esta progresión es paralela al incremento del número de objetos matemáticos y la complejidad de las relaciones en estas tablas. En el primer ciclo, los niños realizan listados de datos y completan tablas de recuentos; en el segundo, los niños completan tablas de frecuencias absolutas (con una o dos variables); y en el tercero, los niños completan tablas de frecuencias relativas con una variable y tablas de frecuencias absolutas de doble entrada. También se usa como introducción a la probabilidad condicional (significado subjetivo) a través de las tablas de doble entrada.

En nuestro estudio hay más diversidad de lenguaje tabular, aunque de menor complejidad, que en Ortiz (2002). En concordancia con este autor, las diferencias entre las editoriales son visibles; también observamos el tratamiento separado para los contenidos de estadística y los de probabilidad.

4.5. Lenguaje gráfico

Aunque los diagramas de barra, de sectores y pictogramas, están más relacionados con la estadística que con la probabilidad, éstos son tenidos en cuenta también en este tema como base para la comprensión de la distribución de probabilidades y el significado frecuencial. Hemos encontrado en el estudio de la probabilidad: gráficos de barra, circulares, pictogramas, histogramas y diagramas en árbol.

El gráfico de barras sirve como preparación para el estudio en la secundaria del gráfico de probabilidades para variables aleatorias discretas. Su uso es muy amplio a partir de primer ciclo, tanto con actividades de lectura como de construcción y asociado al significado frecuencial de la probabilidad a partir del segundo o tercer ciclo. También se usa como apoyo en la argumentación (ver Figura 6).

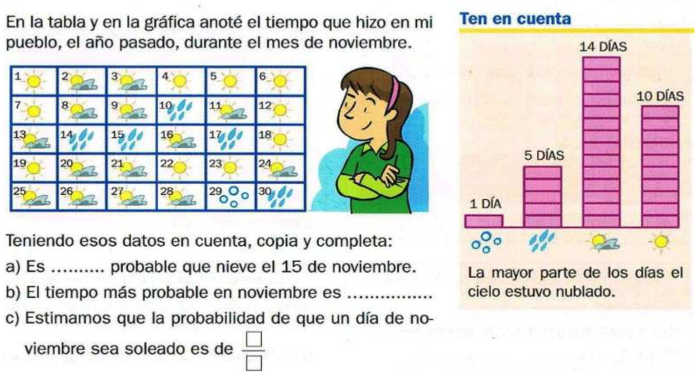


Figura 6. Uso de gráfico de barras en un problema de probabilidad ([T3], p. 211)

El pictograma es apropiado para representar las frecuencias absolutas de una variable cualitativa o discreta con pocos valores; su uso es frecuente a partir de segundo ciclo, enfocado a su lectura más que a su construcción. Apenas se usa en el contexto de probabilidades.

El gráfico de sectores es apropiado para representar proporciones (o frecuencias relativas) de una variable cualitativa o discreta con pocos valores; también se introduce con frecuencia a partir de segundo ciclo, pero poco en el contexto de probabilidades. Un ejemplo asociado al significado frecuencial se presenta en la Figura 7; es de notar que este gráfico tiene un error, que facilita su confusión con una ruleta, pues se representan sectores separados correspondientes al mismo valor de la variable (fútbol y tenis).

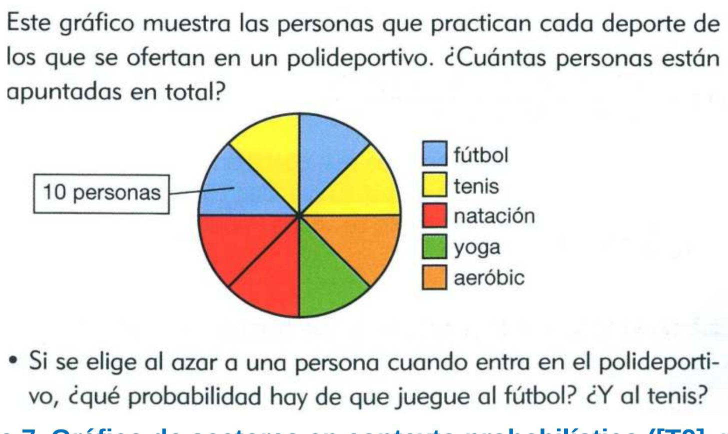


Figura 7. Gráfico de sectores en contexto probabilístico ([T9], p. 219)

El histograma es apropiado para representar las probabilidades (o frecuencias observadas) de una variable continua; su uso es escaso en los libros y básicamente orientado a la lectura. Un ejemplo se muestra en la Figura 8 donde la actividad se orienta a la interpretación de los datos resumidos después de una recolección.

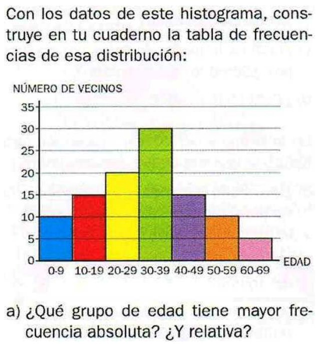


Figura 8. Uso de un histograma en un problema ([T5], p. 199)

Además de estos gráficos estadísticos, hemos encontrado el diagrama en árbol para representar el espacio muestral asociado a un experimento aleatorio de varias etapas, aunque no se hace una conexión explícita con el cálculo de probabilidades compuestas o condicionales. En el ejemplo de la Figura 9 se pregunta por el tamaño del espacio muestral compuesto de tres etapas simples, cada una con dos resultados. Cada posible resultado del experimento compuesto está representado por un trío ordenado de dibujos. El diagrama en árbol se presenta como un recurso sistemático de enumeración.

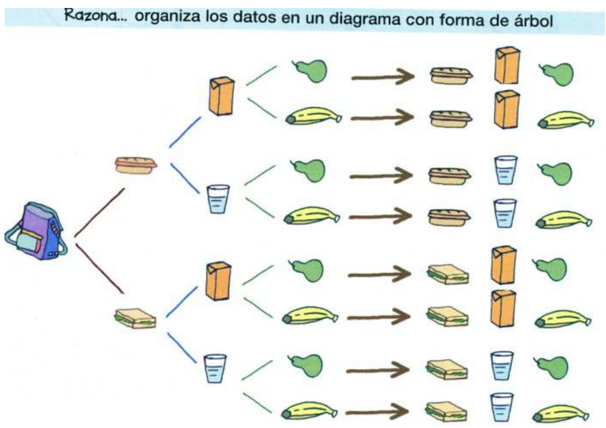


Figura 9. Uso de un diagrama en árbol en un experimento compuesto ([T7], p. 122)

Tabla 6. Tipos de gráficos incluidos en los libros de texto

	Primer ciclo		Segundo ciclo		Tercer ciclo	
	Serie 1	Serie 2	Serie 1	Serie 2	Serie 1	Serie 2
Gráfico de barras	X	X	X	X	X	X
Gráfico circular			X	X	X	X
Pictograma				X	X	X
Histograma					X	
Diagrama en árbol				X	X	

En ambas editoriales (Tabla 6) el uso de gráficos de más complejidad avanza con la formación. Al igual que en el uso de lenguaje tabular, la serie 1 desarrolla más el significado frecuencial, apoyado con el histograma; y notamos que el uso de esta representación no se usa en la serie 2. El pictograma, por el contrario, se adelanta en la serie 2 respecto a la serie 1.

En concordancia con Ortiz (2002), las diferencias entre las editoriales son visibles en cuanto al uso de lenguaje gráfico. Los dos estudios coinciden en la presencia de gráficos de barras y de diagrama en árbol; entre los restantes, en nuestro estudio aparecen dos de menos complejidad (gráfico circular y pictograma), con respecto a los observados por este autor (gráficos cartesianos, diagramas de flechas y de Venn), y el histograma (de mayor complejidad y riqueza probabilística).

5. Conclusiones

En este trabajo hemos mostrado la relevancia que tiene el lenguaje en los procesos de enseñanza-aprendizaje de las matemáticas, y especialmente en el campo de la probabilidad, así como la gran riqueza y diversidad de lenguaje en las dos series de textos analizados.

Nuestro análisis sugiere que la presentación de la probabilidad en los textos podría llevar un uso diferenciado de diversas representaciones (tabular, verbal, gráfica y numérica), dependiendo de la editorial y el ciclo educativo.

El lenguaje predominante en todos los ciclos es el verbal de uso cotidiano. Los lenguajes numérico y simbólico se introducen gradualmente, en concordancia con su aparición en otros bloques de contenido en el área de matemáticas, aunque no se relacionan de forma explícita. Los lenguajes tabular y gráfico, que se utilizan desde primer ciclo en contexto de estadística, aparecen menos ligados a la probabilidad.

Todos estos resultados han de interpretarse con precaución, pues, de acuerdo a Lowe y Pimm (1996), el impacto del libro de texto depende no sólo del mismo libro, sino del lector, y del profesor, así como de las interacciones que determinan su uso en el aula. En este sentido el profesor debe buscar estrategias para que los estudiantes progresen desde el lenguaje cotidiano a un lenguaje matemático más avanzado que les permita interpretar los significados más técnicos de la probabilidad. Ello requiere que los profesores relacionen lenguaje cotidiano y lenguaje formal, mediante el cual se construye el conocimiento matemático, facilitando el aprendizaje de los estudiantes (Veel, 1999; O'Halloran, 1998; Chapman, 1995).

La reflexión final es el importante papel de los escritores de libros de texto que marcan un nuevo nivel en la transposición didáctica del tema, al fijar y concretar lo establecido en los diseños curriculares; sin disminuir la importancia del profesor que, finalmente, en el aula decide no sólo el libro de texto que recomienda a sus alumnos, sino las partes de éste a usar en la enseñanza y los recursos con que debe ser complementado. Esperamos con este trabajo contribuir a la mejora de la enseñanza de las matemáticas, en particular de la aleatoriedad y la probabilidad, en los niveles de la Educación Primaria, así como facilitar la labor del profesorado en el aula.

Bibliografía

Batanero, C., Henry, M., Parzysz, B. (2005). The nature of chance and probability. En G. Jones (Ed.), *Exploring probability in school: Challenges for teaching and learning* (pp. 15-37). New York: Springer.

Cobo, B. (2003). *Significado de las medidas de posición central para los estudiantes de secundaria*. Tesis Doctoral. Universidad de Granada.

Cobo, B., Batanero, C. (2004). Significados de la media en los libros de texto de secundaria. *Enseñanza de las Ciencias*, 22(1), 5-18.

Cordero, F., Flores, R. (2007). El uso de las gráficas en el discurso matemático escolar. Un estudio socio epistemológico en el nivel básico a través de los libros de texto. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, 10(1), 7-38.

Chapman, A. (1995). Intertextuality in school mathematics: The case of functions. *Linguistics and Education*, 7(3), 243–262.

Chevallard, Y. (1991). *La transposición didáctica. Del saber sabio al saber enseñado*. Buenos Aires: Aique.

García, I. (2011). Análisis de los términos de inferencia estadística en bachillerato. *Números. Revista de Didáctica de las Matemáticas*, 77, 51-73.

Godino, J. D., Batanero, C., Font, V. (2007). The onto-semiotic approach to research in mathematics education. *ZDM. The International Journal on Mathematics Education*, 39 (1-2), 127-135.

Herbel-Eisenmann, B. A. (2007). From intended curriculum to written curriculum: Examining the "voice" of a mathematics textbook. *Journal for Research in Mathematics Education*, 38(4), 344-369.

Lavalle, A. L., Micheli, E. B. y Rubio, N. (2006). Análisis didáctico de regresión y correlación para la enseñanza media. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa,* 9 (3), 383-406.

Lemke, J. L. (2003). Mathematics in the middle: Measure, picture, gesture, sign, and word. En M. Anderson, A. Sáenz-Ludlow, S. Zellweger, V. Cifarelli (Eds.), *Educational perspectives on mathematics as semiosis: From thinking to interpreting to knowing* (pp. 215–234). Ottawa: Legas.

Lowe, E., Pimm, D. (1996). 'This is so': a text on texts. En A. Bishop, M. A. Clements, C. Keitel, J. Kilpatrick, C. Laborde (Eds). *International Handbook of Mathematics Education*, pp. 371-409. Dordrecht: Kluwer.

MEC (2006). *Real Decreto 1513/2006, de 7 de diciembre, por el que se establecen las enseñanzas mínimas de la Educación Primaria.* Madrid: Autor.

National Council of Teachers of Mathematics (NCTM) (2000). *Principles and Standards for School Mathematics*. Reston: VA, NCTM.

O'Halloran, K. L. (1998). Classroom discourse in mathematics: A multisemiotic analysis. *Linguistics and Education*, 10(3), 359–388.

O'Halloran, K. (1999). Towards a systemic functional analysis of multisemiotic mathematics texts. *Semiotica*, 124(1/2), 1–29.

O'Halloran, K. L. (2003). Educational implications of mathematics as a multisemiotic discourse. En M. Anderson, A. Sáenz-Ludlow,S. Zellweger, V. Cifarelli (Eds.), *Educational perspectives on mathematics as semiosis: From thinking to interpreting to knowing* (pp. 185–214). Brooklyn, NY y Ottawa, Ontario: Legas.

Ortiz, J. J. (2002). *La probabilidad en los libros de texto*. Universidad de Granada.

Ortiz, J. J., Batanero, C., Serrano, L. (2001). El lenguaje probabilístico en los libros de texto. *Suma*, 38, 5-14.

Orton, A. (1990). *Didáctica de las matemáticas*. Madrid: M.E.C., Morata.

Schleppegrell, M. (2007). The linguistic challenges of mathematics teaching and learning: A research review. *Reading and Writing Quarterly*, 23,139-159.

Serradó, A., Azcárate, P. (2006). Tendencias didácticas en los libros de texto de matemáticas para la ESO. *Revista de Educación*, 340, 341-378.

Serradó, A., Azcárate, P., Cardeñoso, J.M. (2006). La caracterización escolar de la noción de probabilidad en libros de texto de la ESO. *Tarbiya. Revista de Investigación e Innovación Educativa*, 38, 91-112.

Shuard, H., Rothery, A. (Eds.) (1984). *Children reading mathematics*. London: Murray.

Stylianides, G. J. (2009). Reasoning-and-Proving in School Mathematics Textbooks. *Mathematical thinking and learning*, 11(4), 258-288.
Veel, R. (1999). Language, knowledge and authority in school mathematics. En F. Christie (Ed.), *Pedagogy and the shaping of consciousness: Linguistic and social processes* (pp. 185–216). London: Continuum.

Anexo 1: Textos utilizados en el análisis

- Serie 1: Editorial Anaya:
  [T1]. Pérez, E., Marsá, M., Díaz, C., Ferri, T.. Cid, O. (2011). Matemáticas 2. Proyecto “Una a una”.
  [T2]. Ferrero, L., Gaztelu, I., Martín, P., Martínez, L. (2008). Matemáticas 3. Proyecto “Abre la puerta”, reedición 2011.
  [T3]. Ferrero, L., Gaztelu, I., Martín, P., Martínez, L. (2008). Matemáticas 4. Proyecto “Abre la puerta”, reedición 2011.
  [T4]. Ferrero, L., Gaztelu, I., Martín, P. (2009). Matemáticas 5. Proyecto “Abre la puerta”.
  [T5]. Ferrero, L., Gaztelu, I., Martín, P. (2009). Matemáticas 6. Proyecto “Abre la puerta”.Viñetas

- Serie 2: Editorial S.M.
  [T6]. Labarta, P., Santaolalla, E., Ferrandíz, B., Galve, R. (2011) Matemáticas. 2 Primaria. Conecta con Pupi, reedición 2012.
  [T7]. Peña, M., Aranzubía, V., Santaolalla, E. (2008). Matemáticas 3º. Proyecto Tirolina, reedición 2011.
  [T8]. Peña, M., Aranzubía, V., Santaolalla, E. (2008). Matemáticas 4°. Proyecto Tirolina, reedición 2011.
  [T9]. Peña, M., Santaolalla, E., Aranzubía, V., Sanz, B. (2009). Matemáticas 6º, Proyecto Timonel, reedición 2010.
  [T10]. Aranzubía, V., Santaolalla, E., Roldán, J., Pérez, E. (2009). Matemáticas 6º, Nuevo proyecto Planeta Amigo.

Reconocimiento: Proyecto EDU2010-14947, (MICINN-FEDER) y grupo FQM126 (Junta de Andalucía).

Emilse Gómez Torres. Profesora Asistente del Departamento de Estadística de la Universidad Nacional de Colombia. Estadística por la Universidad Nacional de Colombia, MSc en Estadística de la Universidad Nacional de Colombia y Máster en Didáctica de la Matemática por la Universidad de Granada, España. Ha publicado en revistas colombianas sobre estadística. **egomezt@unal.edu.co**

Juan Jesús Ortiz de Haro. Profesor Titular del Departamento de Didáctica de la Matemática de la Universidad de Granada. Licenciado y Doctor en Matemáticas por la Universidad de Granada. Miembro del Grupo de Investigación en Educación Estadística de la Universidad de Granada. Ha realizado numerosas publicaciones en revistas nacionales e internacionales sobre probabilidad y estadística. **jortiz@ugr.es**.

Carmen Batanero. Profesora de Didáctica de las Matemáticas en la Universidad de Granada. Licenciada en Matemáticas en la Universidad Complutense de Madrid y Doctora en Matemáticas (Estadística) por la Universidad de Granada, España. Ha publicado libros dirigidos al profesorado y artículos en diferentes revistas de educación matemática. Fue miembro del Comité Ejecutivo de ICMI (International Comisión on Mathematical Instruction) y Presidenta de IASE (International Association for Statistical Education). Ha coordinado vários congresos y proyectos de educación estadística. **batanero@ugr.es**

José Miguel Contreras. Profesor ayudante doctor de la universidad de Granada. Licenciado en ciencias matemáticas y en Ciencias y Técnicas, máster en estadística aplicada y Doctor en Didáctica de la Matemática. Miembro del Grupo de Investigación en Educación Estadística de la Universidad de Granada. Ha publicado en revistas nacionales e internacionales sobre didáctica de la probabilidad. **jmcontreras@ugr.es**.

UNIÓN
REVISTA IBEROAMERICANA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA
www.fisem.org/web/union

ISSN: 1815-0640
Número 35. Septiembre de 2013
páginas 93-113

Atribuciones de Afectividad hacia las Matemáticas

Santiago Hidalgo; Ana Maroto; Tomás Ortega; Andrés Palacios

Fecha de recepción: 21/11/2011
Fecha de aceptación: 13/12/2012

Resumen

El objetivo del trabajo que aquí se describe es detectar si aparecen creencias negativas sobre las matemáticas y si existen diferencias estadísticamente significativas sobre sus creencias respecto de las matemáticas en los pasos de un nivel educativo a otro. Presentamos un estudio estadístico sobre una muestra de siete niveles académicos con alumnos entre 11 y 18 años. En el análisis de los datos se aplican diferentes pruebas de comparación de distribuciones y, por medio de ellas, se detectan creencias negativas e interesantes diferencias en relación con el sexo de los alumnos y con los niveles educativos. En el artículo se presentan la metodología, el análisis y los resultados.

Palabras clave: afectividad, creencias.

Abstract

The objective of the work described here is to detect the presence of negative beliefs toward Mathematics and determine whether there are significant statistical differences in these beliefs in different academic levels. We have carried out a statistical study of a sample of seven academic levels of students between the ages of 11 and 18. A series of comparative distribution tests have been used to analyze the data. These tests have revealed negative beliefs as well as interesting differences regarding the sex and the educational level of the students. In this article we present the methodology, the analysis and the results of our study.

Keywords: affectivity, beliefs.

Resumo

O objetivo do trabalho descrito aqui é detectar crenças negativas sobre as matemáticas e se existem diferenças estatisticamente significativas nas crenças sobre matemáticas na passagem de um nível educativo a outro. Apresentamos um estudo estatístico sobre uma mostra com alunos de idades entre 11 e 18 anos de sete níveis de escolaridade. Na análise dos dados aplicam-se diferentes testes de comparação de distribuições e por meio destas detectam-se crenças negativas e diferenças interessantes relacionadas com o sexo dos alunos e com os níveis educativos. No artigo apresenta-se a metodologia, a análise e os resultados.

Palavras-chave: afetividade, crenças.

1. Introducción

Las creencias de los alumnos hacia las matemáticas han sido objeto de numerosos estudios desde finales del siglo pasado y, en el presente, se han incrementando las investigaciones que han tratado de averiguar la influencia que tales creencias producen en los alumnos sobre la matemática misma y, por ende, sobre el aprendizaje. Nuestra inquietud por el tema no es nueva y, de hecho, venimos investigando este fenómeno desde hace unos cuantos años en nuestra comunidad educativa. El presente trabajo se deriva de un proyecto de investigación I+D de la Consejería de Educación de la Junta de Castilla y León en el que se pretenden analizar distintos perfiles emocionales matemáticos que pueden clasificar a los estudiantes en función de sus diferencias actitudinales. Por otra parte, el fracaso escolar es una realidad perniciosa de nuestro sistema educativo y, en muchos casos, está íntimamente relacionado con el rechazo prematuro e irreflexivo hacia las Matemáticas.

En el desarrollo de este proyecto se han construido y legitimado varias escalas para medir ciertas componentes emocionales que configuran el perfil afectivo-emocional matemático del estudiante y se han establecido la fiabilidad y validez de las mismas. Entre ellas, está la *escala de creencias hacia las Matemáticas*, que es la que se ha utilizado en la investigación que aquí se describe.

El objetivo fundamental de la investigación que aquí se describe es detectar qué creencias pueden repercutir negativamente en el aprendizaje de las matemáticas, si las influencias de esas creencias son diferentes según el sexo de los alumnos y si aumentan o disminuyen conforme los alumnos van escalando diferentes niveles educativos.

2. Antecedentes

Desde la perspectiva de la Educación Matemática se reconocen dos orientaciones diferentes sobre las creencias de los alumnos: una, que tiene que ver con la adquisición de nuevos conceptos, y sus autores recomiendan que la docencia parta de los conocimientos que puedan tener los alumnos sobre ellos y de sus creencias (Azcárate, 1997; Socas, 2007; Pecharromán, 2009) y, otra, que es la que interesa aquí, que tiene que ver con lo que podríamos denominar perfil emocional matemático, orientación sobre la que esbozo una síntesis de las aportaciones de algunas investigaciones.

Gómez Chacón (2000) cree haber encontrado una relación bidireccional entre emociones, actitudes y creencias, por una parte, y el rendimiento, por otra, y considera que la experiencia que tiene el estudiante al aprender matemáticas le provoca distintas reacciones e influye en la formación de sus creencias y, recíprocamente, las creencias tienen una consecuencia directa en las situaciones de aprendizaje y en su capacidad para aprender. Guerrero, Blanco y Vicente (2002) corroboran esta idea, encuentran relaciones mutuas entre actitudes, creencias y emociones de los alumnos, y diseñan un programa de intervención psicopedagógica para que el alumno aprenda a resolver problemas, disminuya el estado de activación y tensión, y se familiarice en el autocontrol, pensamientos y emociones ante la tarea matemática. Hidalgo, Maroto y Palacios (2004 y 2005) obtienen relaciones de las creencias con el rechazo de los alumnos hacia las matemáticas y tratan de identificar los perfiles emocionales matemáticos de los alumnos. Posteriormente, Hidalgo et al (2004) relacionan el rendimiento en matemáticas con el estatus afectivo emocional hacia las matemáticas. Warfield, Wood & Lehman (2005) relacionan las creencias matemáticas con el tipo de metodología empleada y, más concretamente, con el grado de autonomía del alumno que el docente está dispuesto a desarrollar. Simpkins, Davis-Kean y Eccles (2006) establecen una relación clara entre valores, creencias y opiniones sobre las matemáticas y la ciencia, el rendimiento y la elección de un itinerario escolar o profesional al final de la educación secundaria. Chen &

Zimmerman (2007) ratifican las relaciones influyentes entre percepción de eficacia, creencias y rendimiento matemático en escolares americanos y taiwaneses. House (2007) también considera relación mutua entre actitudes, creencias y autoconcepto con el rendimiento entre escolares de Japón. Alomar (2007) ratifica estos datos con escolares kuwaitíes. Poulou (2007) considera de interés para el devenir del futuro maestro la existencia de creencias de autoeficacia y percepción de capacidad en cualquier materia y especialmente para las matemáticas (percibidas como más difíciles que otras disciplinas). Hodgen & Askew (2007) señalan las dificultades que tienen los futuros maestros en matemáticas que, además de arrastrar en muchos casos lagunas en conocimientos, sienten también emociones negativas hacia las matemáticas, lo que dificulta la búsqueda de una identidad asentada, necesaria para el correcto ejercicio de la profesión. Kunter et al. (2008) consideran de especial relevancia para el futuro docente, y del docente en ejercicio, el entusiasmo hacia la enseñanza de las matemáticas y hacia las matemáticas, y obtienen que aquellos candidatos con más entusiasmo por la educación matemática presentan rasgos de mayor calidad institucional. Gullberg et al. (2008) constatan la existencia de un amplio abanico de concepciones implícitas en los estudiantes de magisterio sobre cómo se aprenden las matemáticas en particular y las ciencias en general.

Así pues, a la vista de estas investigaciones, podemos inferir que existe una influencia mutua entre emociones, actitudes, creencias, opiniones (autoconcepto y percepción de rendimiento) y el rendimiento académico en los escolares de todo el mundo.

También hay investigaciones que podríamos calificar como clásicas que analizan la evolución de la actitud hacia las matemáticas que coinciden en señalar que las actitudes se tornan menos favorables hacia las matemáticas conforme los alumnos van avanzando en edad y señalan que en la finalización de la Educación Primaria empiezan a estabilizarse. (Fennema, 1978; Fennema y Sherman, 1977; Informe Cockroft 1985; Informes Pisa; ICECE, 2002). Sin embargo, estos estudios no dan detalles sobre la evolución de creencias específicas en el paso a Educación Secundaria ni, por supuesto, en estos cursos, que es el la muestra de análisis que consideramos en nuestra investigación.

La muestra de investigaciones que hemos presentado ilustra con absoluta claridad que las creencias de los alumnos de tipo emocional sobre las matemáticas perduran en los alumnos después de ingresar en la Universidad, concretamente en aquellos que siguen estudios de magisterio. Todas ellas destacan la importancia de las creencias sobre el aprendizaje de las matemáticas, pero no son investigaciones que analicen la evolución de estas creencias en el transcurso de la vida escolar de los alumnos desde los 11 hasta los 18 años. En nuestra investigación realizamos un seguimiento a los mismos alumnos a lo largo de siete cursos académicos, analizamos los datos mediante una metodología cuantitativa y detectamos diferencias y cambios significativos en la evolución de estas creencias, y también descubrimos las que influyen de manera negativa en el aprendizaje de las Matemáticas.

3. Marcos de investigación

Nos apoyamos en una escala tipo Likert que consta de 44 ítemes. Esta escala ha sido analizada por un grupo de profesores expertos, ha sido cumplimentada previamente por un centenar de alumnos en centros piloto y se ha depurado tras un análisis minucioso. Asimismo, se ha obtenido un valor alfa de Cronbach, α=0,9 y, en consecuencia, podemos asegurar que se trata de una escala validada y fiable. De todos los ítemes de la escala, aquí sólo consideramos 23 porque son los que tienen mayor relación con el tema que estamos tratando. Son éstos:

I1. Aprender matemáticas es cosa de unos pocos.

I2. Una de las cosas más importantes para aprender y aprobar matemáticas es el estudio diario o casi diario.

I3. Las dificultades que tengo o pudiera tener en matemáticas se deben a mis propias limitaciones.

I4. Las dificultades que tengo o pudiera tener en matemáticas se deben a la dificultad de la materia.

I5. Cuando tengo buenas notas en matemáticas, sobre todo, se debe a la suerte.

I6. Cuando tengo buenas notas en matemáticas, sobre todo, se debe a mi esfuerzo y estudio.

I7. Cuando tengo buenas notas en matemáticas, sobre todo, se debe a mis capacidades.

I8. Cuando tengo malas notas en matemáticas, sobre todo, se debe a la mala suerte.

I9. Cuando tengo malas notas en matemáticas, sobre todo, se debe a mi falta de esfuerzo y estudio.

I10. Cuando tengo malas notas en matemáticas, sobre todo, se debe a mi falta de capacidades.

I11. En matemáticas me cuesta trabajo decidir qué tengo que hacer para sacar buenas notas.

I12. La gente a la que le gustan las matemáticas suelen ser un poco rara.

I13. Me distraigo más en clase de matemáticas que en las de otras asignaturas.

I14. Ante un problema complicado, suelo darme por vencido fácilmente

I15. Entiendo que todos los casos expuestos en matemáticas, explican algo del mundo real, pero yo no lo he apreciado.

I16. El ser buen alumno en matemáticas (sacar buenas notas, tener buena actitud) hace que te sientas más valorado y admirado por los compañeros.

I17. Las matemáticas es una disciplina para la que están mejor capacitados los chicos que las chicas.

I18. Cuando no entiendo alguna cosa de matemáticas, me la estudio de memoria.

I19. El estudio de las matemáticas, en general, es poco entretenido.

I20. Las destrezas que utilizo en clase para resolver problemas matemáticos no tienen nada que ver con las que uso para resolver problemas de la vida ordinaria.

I21. Las matemáticas son un reto para la capacidad de uno mismo.

I22. Las matemáticas son muy abstractas y alejadas de la realidad.

I23. El resultado al que llego tras intentar resolver un problema es más importante que el proceso que he seguido.

Estos ítemes permiten establecer lo que denominamos *perfil positivo del alumno* y que estaría formado por las creencias presentes en estos ítemes que tendrían afectos positivos hacia las matemáticas. En oposición a este perfil, cuya descripción aparece en el párrafo siguiente, también consideramos el *perfil negativo* que responde a unas creencias con afectos negativos. Estos perfiles constituyen el marco teórico que permite analizar las respuestas de los alumnos. Como ya se ha indicado, se sigue una metodología cuantitativa y se aplican técnicas estadísticas de análisis de datos utilizando STATGRAPHICS. Los datos numéricos proceden de la cumplimentación de la escala anterior a cuyos ítems se han asignado las siguientes cuantías de valoración: 0, desacuerdo total; 1 en desacuerdo; 2 ni en desacuerdo ni de acuerdo; 3, bastante de acuerdo; 4, acuerdo total. que se ha valorado Esta escala se ha cumplimentado siguiendo un modelo de encuestas por accesibilidad en cinco provincias españolas de Castilla y León (Ávila, Segovia, Soria, Valladolid y Zamora).

Para tratar de tener una representatividad mayor, las encuestas se han realizado con alumnos de centros rurales y urbanos, de colegios e institutos públicos y de colegios concertados. En total, hemos conseguido reunir 945 encuestas de cada uno de los siete niveles educativos siguientes: 6º de Educación primaria; 1º, 2º, 3º y 4º de Educación Secundaria Obligatoria; 1º y 2º de Bachillerato. Esto supone un total de 6.615 encuestas con los datos ya depurados. Con el fin de analizar la evolución de las creencias al avanzar los alumnos en estos cursos, la encuesta ha sido cumplimentada por todos los alumnos, de todos los niveles educativos indicados, en todos los centros seleccionados, durante seis años.

4. Análisis general

Tras el volcado de datos en Excel, se ha realizado una depuración de los mismos antes de proceder a su análisis. Éste comienza examinando las respuestas de los alumnos de forma global y, como tratamos de detectar creencias que puedan repercutir de forma negativa en el aprendizaje de los alumnos, nos fijamos en el porcentaje de alumnos cuyas respuestas están más alejadas de lo que podríamos considerar un *perfil positivo* para el estudio de las matemáticas en relación con los ítemes considerados. Para nosotros sería positivo que los alumnos tuvieran las creencias que constituyen el citado perfil. Éstas son las siguientes:

- todos los alumnos pueden aprender las matemáticas escolares,
- el estudio diario es muy importante,
- reconocer que las dificultades en matemáticas no son debidas a las limitaciones propias,
- aceptar que la dificultad de la materia no es la causa de mis dificultades,
- la poca influencia de la suerte,
- la importancia del esfuerzo y del estudio,
- reconocer que sus capacidades no son las únicas responsables de sacar buenas o malas notas,
- saber qué hay que hacer para sacar buenas notas,
- los alumnos a los que les gustan las matemáticas son normales,
- no debe haber más distracciones en matemáticas que en otras asignaturas,
- la perseverancia para resolver problemas,
- apreciar que las matemáticas explican situaciones del mundo real,

- valorar positivamente ser buen alumno en matemáticas,
- el sexo no debe discriminar la capacidad matemática,
- los aprendizajes deben ser significativos,
- el estudio de las matemáticas es entretenido,
- las destrezas de resolución de problemas en el aula se deben aplicar a la vida real,
- el aprendizaje de las matemáticas es un reto para la capacidad,
- las matemáticas escolares no son muy abstractas ni están alejadas de la realidad,
- son más importantes los procesos que los resultados.

Un análisis de las frecuencias de los 5 valores de la escala Likert manifiesta que aparecen porcentajes de alumnos nada desdeñables que tienen creencias negativas (perfil negativo) hacia las matemáticas y, sin duda, éstas influirán negativamente en el aprendizaje de las matemáticas: para el 6,8% no todos los alumnos pueden aprender matemáticas; el 17,9% no cree que el estudio diario sea importante para aprender y aprobar matemáticas; el 13,8% se declara sus limitaciones le impiden salvar la dificultades matemáticas; un 23,2% culpa a sus dificultades para el estudio a las dificultades de la materia; el 8,9% cree en la influencia de la suerte para sacar buenas notas y el 10,8% para sacar malas notas, el 9,8% cree que saca buenas notas por su esfuerzo y estudio, pero el 24,3 no cree que saque malas notas por la falta de esfuerzo y estudio; un 17,3% no cree en sus capacidades para sacar buenas notas y un 17,1% achaca sus malas notas a la falta de sus capacidades; el 13,2% cree que le cuesta trabajo saber qué tiene que hacer para sacar buenas notas; un 12,1% afirma que la gente a la que le gustan las matemáticas es un poco rara; el 15,4% es poco perseverante para resolver problemas; un 15,7% no aprecia que las matemáticas explican situaciones del mundo real; el 53,4% no cree sentirse más valorado por sus compañeros si es buen alumno en matemáticas; un 9,71% cree que los chicos están mejor capacitados que las chicas para las matemáticas; el 16,6 % afirma que cuando no entiende algo se lo aprende de memoria; para el 25,6% el estudio de matemáticas es poco entretenido; un 22,5% cree que las destrezas que usa en el aula para resolver problemas no están relacionadas con las que se usan en la vida ordinaria; el 18,6 no cree que las matemáticas sean un reto a su capacidad; para el 10,4% de los alumnos las matemáticas son muy abstractas y alejadas de la realidad; un 16,2% cree que los resultados que se obtienen al resolver problemas son más importantes que los procesos de resolución.

En suma, se detectan muchas creencias de afectos negativos hacia las matemáticas con unos porcentajes que tienen su importancia y, en consecuencia, repercutirán negativamente en los aprendizajes de las matemáticas y, por ende, en el fracaso escolar. Destaca el porcentaje tan alto de alumnos que conceden poca importancia a la valoración que sus compañeros pueden hacer por ser brillante en matemáticas y el alcanzado por la creencia de que las malas notas no sean debidas a la falta de esfuerzo y estudio.

5. Análisis de las respuestas en relación con el sexo

Tras el volcado de datos en Excel, antes de proceder a su análisis se ha realizado una depuración de los mismos para eliminar los casos atípicos (por errores de transcripción) o incompletos. Este análisis comienza examinando posibles diferencias en relación con el sexo de los alumnos. Para ello, se han calculado las medianas y las medias de las respuestas y lo primero que se observa es que apenas hay diferencias entre las valoraciones de los 23 ítemes considerados. Sólo aparecen cuatro ítemes (7º, 9º, 15º y 17º) con medianas diferentes (el 7º con medianas 2 y 3, el 9º también con medianas 2 y 3, el 15º con 1 y 2, y el 17º con 0 y 1).

Por otra parte, la mayor diferencia de las medias se produce en el ítem número 15, y tan solo es de cinco centésimas. La figura 1 es una representación de estas puntuaciones medias de los 23 ítemes de la encuesta. A simple vista se observa que las distribuciones de uno y otro ítem son muy diferentes presentando variaciones muy notables, pero no se puede apreciar que haya diferencias de comportamiento por el sexo en ninguno de los ítemes, hecho corroborado por los valores de las medias.

Sin embargo, a pesar de ser promedios muy similares, pudiera ser que existieran diferencias estadísticamente significativas entre tales distribuciones y que pasaran desapercibidas. Para analizarlo se utilizan varias pruebas con el programa STATGRAPHICS.

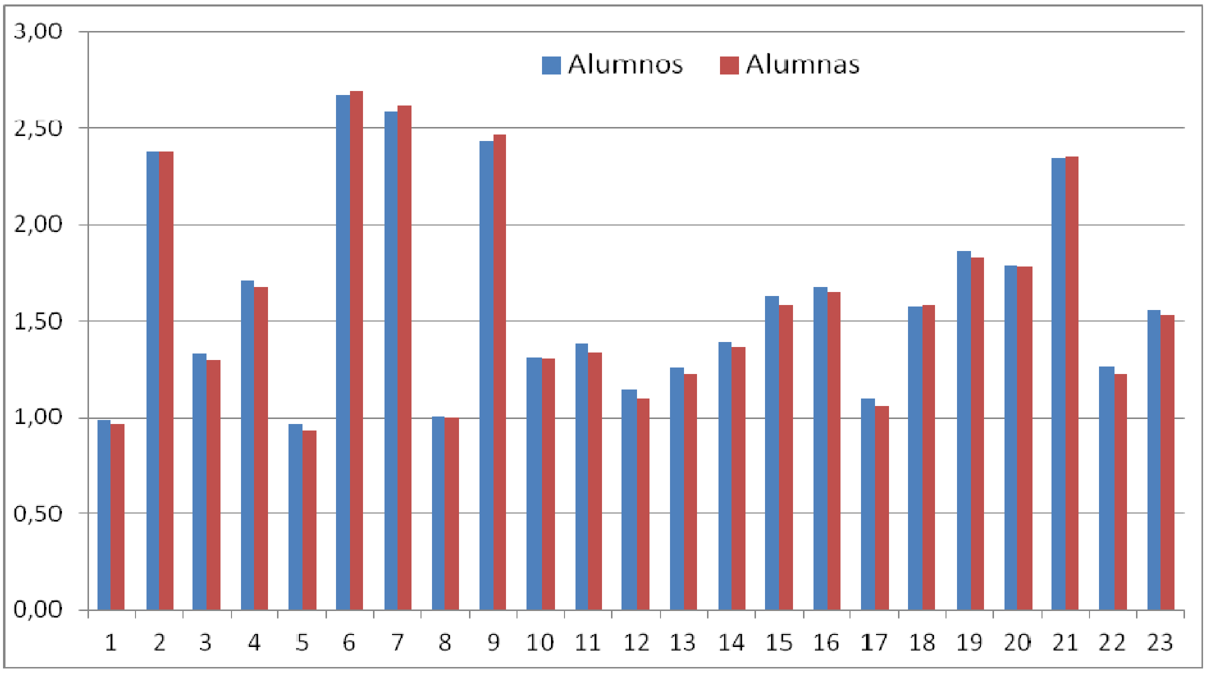


Figura 1. Puntuaciones medias de alumnos y alumnas.

Como los datos no son normales (no proceden de una distribución normal), lo que procede es comparar las distribuciones mediante tests de rangos. Por esta razón consideramos el test *Pruebas de Múltiples Rangos* (PMR), que detecta diferencias significativas entre pares de medias, y el test de Wilconson (Wilc), cuyo fin es detectarlas a través de las medianas.

Por otra parte, en este caso se puede considerar que los valores de los ítemes son datos categóricos y, como en estos casos suelen funcionar mejor los testes de homogeneidad, se hará una tabulación cruzada de datos categóricos y se calculará el estadístico Chi-cuadrado para cada uno de los 23 ítemes. También hemos aplicado las pruebas de Kruskal-Wallis, testes que evalúan la hipótesis nula de que las medianas dentro de cada una de los ítemes sea la misma. Este test combina los datos de todas las columnas y, tras ordenar los datos de menor a mayor, calcula el rango (rank) promedio para los datos de cada columna.

Por otra parte, en los casos dónde se hayan detectado que las distribuciones tienen diferencias estadísticamente significativas al 95%, debido a que los valores de las medianas son casi siempre iguales, se considerarán los valores de los promedios para decidir si son los alumnos o las alumnas quienes están más o menos de acuerdo con el texto de los ítemes. En la tabla 1 se muestran los valores obtenidos con estos cuatro estadísticos en cada uno de los 23 ítemes.

Tabla1. Resumen de los valores calculados respecto al sexo de los alumnos

Ítem	PMR	Wilc.	KW	Chi^2	Ítem	PMR	Wilc.	K-W	Chi^2
1	SÍ	0	0,5657	0,4281	13	NO	0	0,378321	0,3210
2	SÍ	0	0,0553	0,0006	14	NO	0,00002	0,168897	0,4900
3	SÍ	0,0008	0,0043	0,0284	15	NO	0,6254	0,073540	0,3740
4	SÍ	3,4E-12	0,0052	0,0003	16	NO	0,7791	0,103244	0,4190
5	NO	0	0,5336	0,4618	17	SÍ	0	0	0
6	SÍ	0	0,0098	0,0004	18	NO	0,3451	0,161514	0,4085
7	SÍ	0	0	0	19	NO	0,00005	0,09330	0,0471
8	NO	0	0,5765	0,5238	20	NO	0,1168	0,433047	0
9	NO	0	0,1203	0,5238	21	NO	0	0,361323	0,0362
10	NO	8,41E-8	0,0181	0,0067	22	SÍ	0	0,006457	0,0065
11	SÍ	0,0004	0,0156	0,0683	23	SÍ	0,0052	0,037369	0,0030
12	SÍ	0	0,0007	0,0007					

.Aunque los resultados obtenidos avalan una mayor discriminación con los estadísticos PMR, K-W y Chi^2 que con el test de Wilcoson, con el que sólo resultan distribuciones homogéneas las correspondientes a los ítemes 15º, 16º y 18º, se consideran las aportaciones conjuntas de las cuatro pruebas para establecer una clasificación de los 23 ítemes. Estos testes dan lugar a cinco grupos:

- Grupo A: formado por aquellos ítemes en los que los cuatro test aprecian diferencias estadísticamente significativas, A={3, 4, 6, 7, 12, 17, 22, 23}.
- Grupo B: formado por aquellos ítemes en los que tres test aprecian diferencias estadísticamente significativas pero uno de ellos no, B={2, 10,11}.
- Grupo C: formado por aquellos ítemes en los que dos test aprecian diferencias estadísticamente significativas pero otros dos de ellos no, C={1, 19, 21}.
- Grupo D: formado por aquellos ítemes en los que un test aprecian diferencias estadísticamente significativas pero tres de ellos no, D={5, 8, 9, 13, 14, 20}.
- Grupo E: formado por aquellos ítemes en los que ninguno de los cuatro test aprecian diferencias estadísticamente significativas. E={15, 16, 18}

En suma, dependiendo de si hay más, menos o igual número de testes que aprecian diferencias significativas, establecemos tres grupos de ítemes: A y B, por una parte, D y E, por otra, y C por otra. Esta agrupación nos permite hacer las siguientes afirmaciones:

Grupo 1: En 11 de los 23 ítemes (grupos A y B), se producen diferencias significativas en ambas distribuciones respecto del sexo y, teniendo en cuenta esta clasificación y los valores de las medias aritméticas, se puede afirmar que existen diferencias estadísticamente significativas respecto al sexo en las siguientes creencias:

- La importancia del estudio diario y que creen más en ese estudio los alumnos que las alumnas.
- La importancia de las propias limitaciones y creen más en ellas los chicos que las chicas.
- La importancia de la dificultad de la mataría y le conceden mayor importancia los alumnos que las alumnas.
- La importancia del esfuerzo y el estudio para sacar buenas notas y le conceden mayor importancia los chicos que las chicas.
- El comportamiento respecto de las capacidades es similar según se aplique a sacar buenas o malas notas. En el caso de sacar buenas notas las chicas les conceden mayor importancia y en el de malas notas son los chicos los que valoran más sus propias capacidades. Las figuras 2 y 3 representan las distribuciones de frecuencias del ítemes 7 y 10. En ellas se pueden apreciar visualmente estas diferencias de comportamiento.

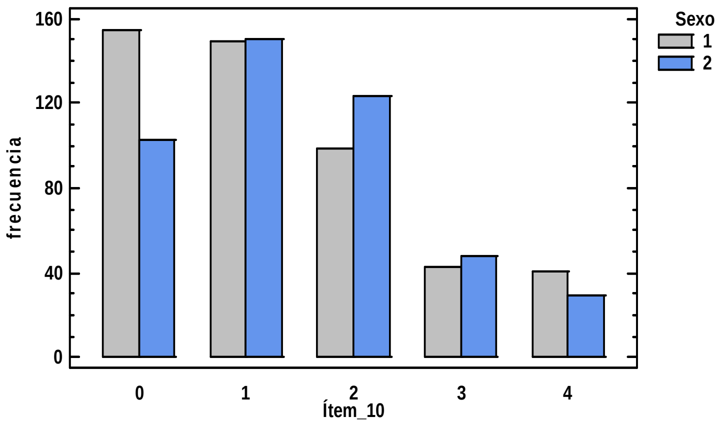


Figura 2. Distribución de frecuencias sobre la capacidad para sacar buenas notas.

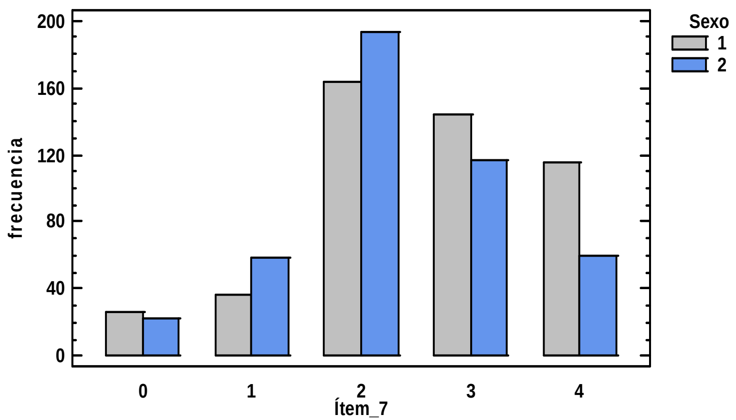


Figura 3. Distribución de frecuencias sobre la capacidad para sacar malas notas.

- En general, no creen que a quien les guste las matemáticas sea gente un poco rara (están en desacuerdo), ya que las puntuaciones medias son muy bajas, y esta creencia está menos arraigada en los chicos que las chicas.
- Mayoritariamente chicos y chicas están en desacuerdo sobre la creencia de que los chicos están mejor capacitados que las chicas para el estudio de las matemáticas y éste desacuerdo es mayor en los chicos que en las chicas.
- Chicos y chicas muestran un débil desacuerdo, y éste es menor en ellos que en ellas, sobre la creencia de que el estudio de las matemáticas es poco entretenido.
- Chicos y chicas están en desacuerdo, pero más los alumnos, sobre que las matemáticas sean muy abstractas y alejadas de la realidad y, ambos,
- Tanto los alumnos como las alumnas muestran cierto desacuerdo sobre la creencia de que los resultados de los problemas son más importantes que los procesos de resolución.

Grupo 2: Por el contrario, en otros nueve ítemes no se aprecian diferencias significativas, se puede considerar que las distribuciones son homogéneas y, por tanto, se puede afirmar que:

- En general no creen en el factor suerte ni cuando sacan buenas notas ni cuando las sacan malas.
- Tanto chicos como chicas creen en el esfuerzo para sacar malas notas.
- Ambos colectivos están de acuerdo sobre saber lo que tienen que hacer para sacar buenas notas de forma homogénea.
- Tanto los chicos como las chicas están entre desacuerdo y acuerdo de forma homogénea sobre distraerse más en las clases de matemáticas que en otras asignaturas.
- No existen diferencias significativas sobre la creencia de darse por vencidos ante un problema complicado y tanto unos como otras están entre desacuerdo y acuerdo.
- La mayor parte de los alumnos cree darse cuenta de que las matemáticas explican algo del mundo real.
- La mayor parte de los alumnos está en desacuerdo de forma homogénea con la creencia de ser más valorados los alumnos que son buenos en matemáticas.
- La mayor parte de los alumnos está en desacuerdo de forma homogénea con creencia de aprendizajes memorísticos faltos de entendimiento.

Grupo 3. Finalmente, no se puede afirmar si hay diferencias significativas debido al sexo en otros tres ítemes, aunque sobre ellos se puede afirmar lo siguiente:

- Ni chicos ni chicas creen que el estudio sea cosa de pocos.
- Existe un ligero desacuerdo sobre creencia de que las destrezas para resolver problemas en el aula y en la vida ordinaria están pocos relacionados.
- Tanto los alumnos como las alumnas creen que las matemáticas son un reto para sus capacidades.

6. Análisis de las respuestas en relación con los niveles

Con el fin de ver si existen diferencias significativas conforme los alumnos van avanzando en edad, se realiza un análisis por niveles educativos.

A continuación se presenta un resumen del mismo. La figura 4 es una representación de los promedios de los valores asignados a cada uno de los 23 ítemes considerados.

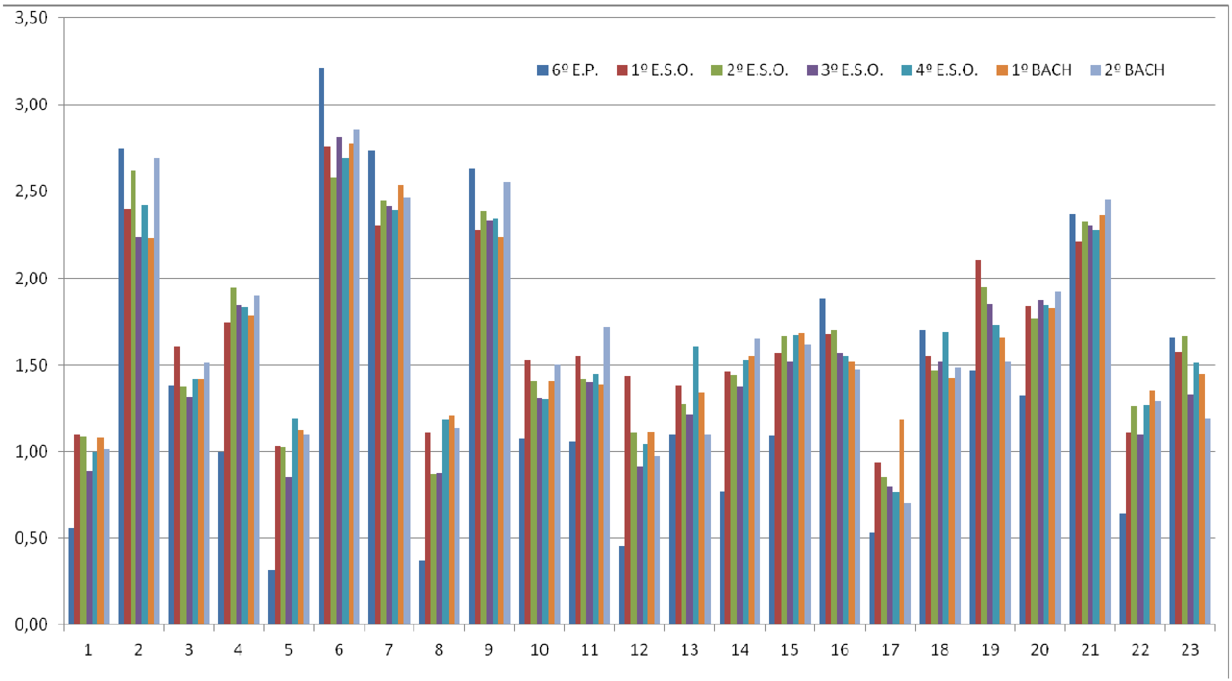


Figura 4. Puntuaciones medias de alumnos por niveles educativos.

Esta gráfica permite apreciar a simple vista diferencias notables en algunos de los ítemes, pero vamos a calcular varios estadísticos para confirmar que no se trata de ilusiones visuales y que justifiquen sin lugar a dudas si estas diferencias son estadísticamente significativas o no.

En primer lugar, presentamos un resumen del estudio realizado aplicando las pruebas de *Kruskal-Wallis* considerando cada nivel educativo como una muestra. Por otra parte, visto que la aportación de las pruebas de *Wilconson* producen menor discriminación, en lugar de éstas consideraremos las pruebas de la *Mediana de Mood* (MM).

Tabla 2. Pruebas de Kruskal-Wallis y Pruebas de la Mediana de Mood.

Pruebas globales de Kruskal-Wallis (K-W) y de la Mediana de Mood (MM) por cursos								
		6º EP	1º ESO	2º ESO	3º ESO	4º ESO	2º BACH	1º BACH
K-W	Estadístico	529,29	385,17	879,22	1162,12	472,29	485,36	756,85
	P valor	0	0	0	0	0	0	0
MM	Estadístico	464,34	387,13	531,57	1065,13	280,28	466,02	468,71
	P valor	0	0	0	0	0	0	0

Estas pruebas evalúan la hipótesis nula de que las medianas de todos los 23 ítemes sean iguales para cada uno de los siete niveles educativos, pero con una fundamentación diferente. Este test cuenta el número de observaciones en cada muestra a cada lado de la mediana global, la cual es igual a 2,0.

Estos valores se muestran en la tabla 2 y, puesto que el valor-P para la prueba de chi-cuadrada es menor que 0,05, las medianas de las muestras son significativamente diferentes con un nivel de confianza del 95,0%.

Es evidente que el análisis anterior es demasiado general y que conviene hacer otro más minucioso con el fin de tratar de descubrir si en el paso de un nivel a otro se producen diferencias significativas; por ello se realizar pruebas de independencia para cada ítem en función de los siete niveles considerados, pero antes se presenta la figura 5 en la que aparecen las diferencias entre los promedios absolutos de las respuestas obtenidas entre un curso y el siguiente.

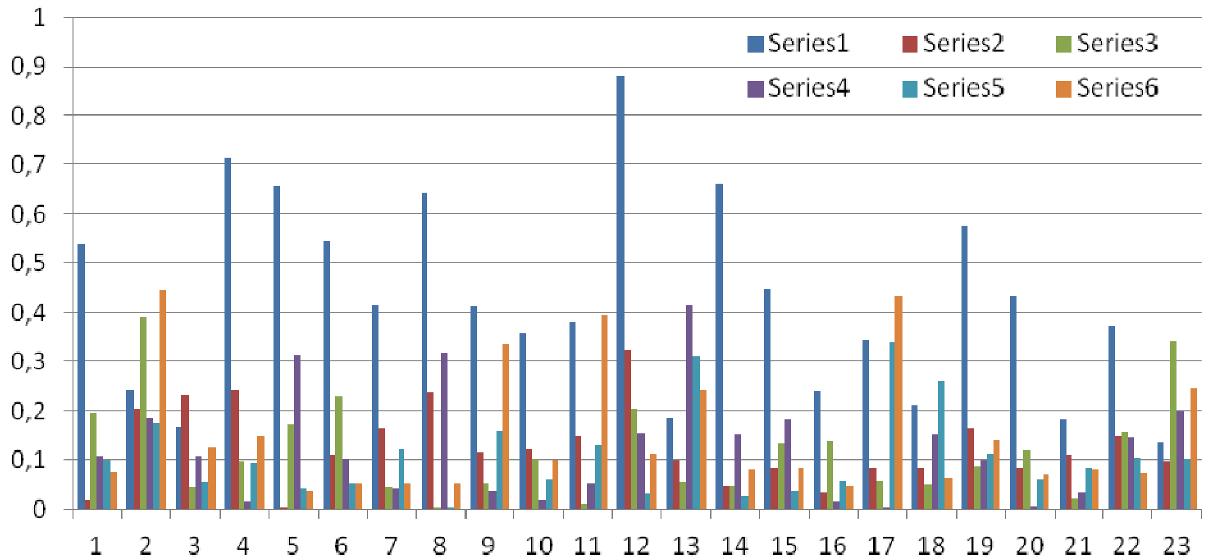


Figura 5. Diferencias absolutas entre los promedios de un curso y el siguiente.

En esta gráfica se puede observar que, en casi todos los ítemes, las mayores diferencias se producen en el paso de 6º de E.P. a 1º de E.S.O.

La suma de estas diferencias absolutas es de 10,55 y la segunda diferencia absoluta mayor (3,51) se produce entre los dos cursos de bachillerato, pero este valor está bastante más próximo a los que tienen lugar en el resto de cursos (1º y 2º de ESO 2,93; 2º y 3º de ESO 2,78; 3º y 4º de ESO 2,83; 4º de ESO y 1º de BACH 2,34).

Las sumas de las diferencias absolutas de las puntuaciones de un nivel con los otros seis amortiguan estas diferencias, pero, aun así, las del primer nivel son aproximadamente el doble que las del resto (64,4 en 6º de E.P; 31,1 en 1º de ESO; 31 en 2º de ESO; 43 en 3º de ESO; 33,5 en 4º de ESO; 34,9 en 1º de BACH; 30,8 en 2º de BACH).

En la tabla 3 se muestran los valores obtenidos con la prueba Chi-Cuadrada en cada uno de los 23 ítemes según los niveles de los alumnos conjuntamente. Esta prueba contrasta la dependencia de las siete medianas de cada ítem respecto de todos los niveles y, por tanto, es difícil que detecte una significación estadística de dependencia.

Tabla 3. P-valores de la prueba de independencia Chi-cuadrada

Valores obtenidos con la Prueba de Independencia Chi-cuadrada							
Nº ítem	Valor-P	Nº ítem	Valor-P	Nº ítem	Valor-P	Nº ítem	Valor-P
1	0,0000	7	0,0000	13	0,0011	19	0,0000
2	0,0000	8	0,0000	14	0,0000	20	0,0000
3	0,0439	9	0,0001	15	0,0000	21	0,0000
4	0,0000	10	0,0003	16	0,0001	22	0,0000
5	0,0000	11	0,0000	17	0,0407	23	0,0001
6	0,0010	12	0,0000	**18**	**0,1361**		

De hecho, el único P-valor mayor que 0,05 es el que corresponde al ítem 18º y, por tanto, éste es el único caso en el que, con este test, se puede considerar que las distribuciones no presentan diferencias estadísticamente significativas al 95%. La figura 6 representa la distribución de frecuencias de este ítem.

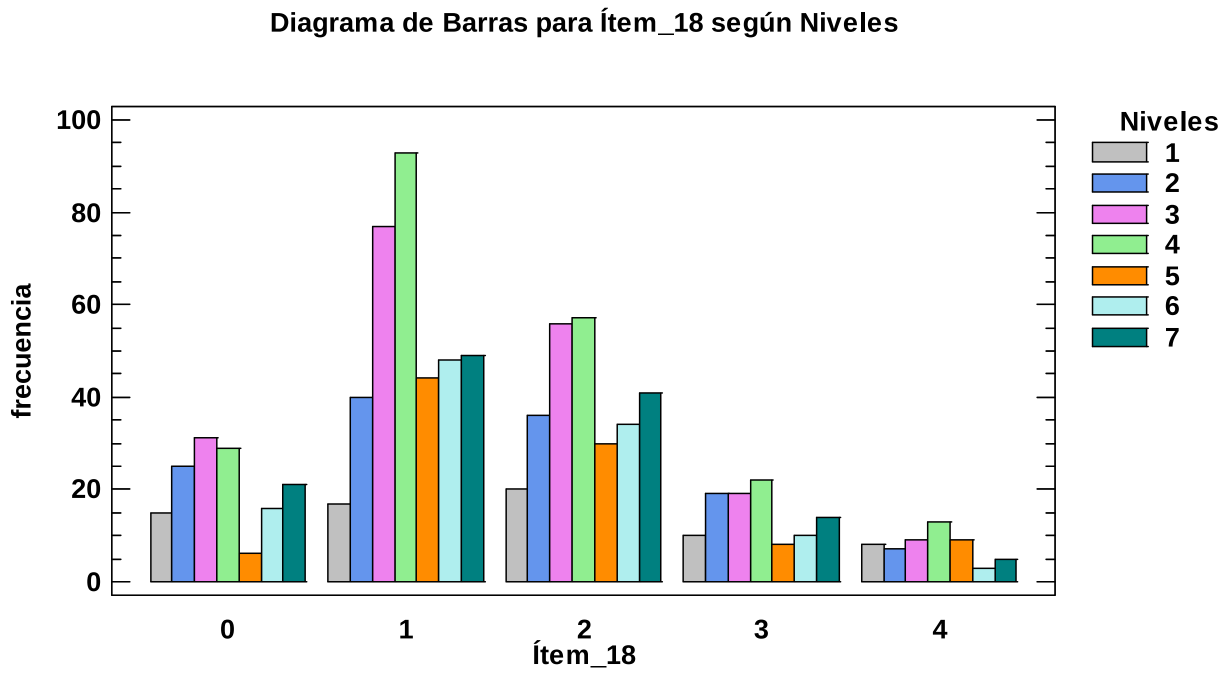


Figura 6. Diagrama de barras de la distribución de frecuencias del ítem 18 por niveles.

Es evidente que el test anterior es poco riguroso y, por esta razón, se comparan por separado las distribuciones de cada uno de los 23 ítemes según los siete niveles educativos considerados, tanto con las Pruebas de Kruskal-Wallis como con las de la Mediana de Mood. Los P-valores que aportan estas pruebas se presentan en la tabla 4.

Además de los test anteriores consideraremos, las *Pruebas de Múltiples Rangos* (PMR), pruebas que para discriminar entre las medias utilizan el procedimiento de diferencia mínima significativa (LSD) de Fisher, y tienen un riesgo del 5% al calificar que cada par de medias es significativamente diferente cuando la diferencia real es 0.

Estas pruebas permiten construir grafos como los de las figuras 7 y 8 que representan las diferencias significativas que se han producido en los ítemes 2º y 8º.

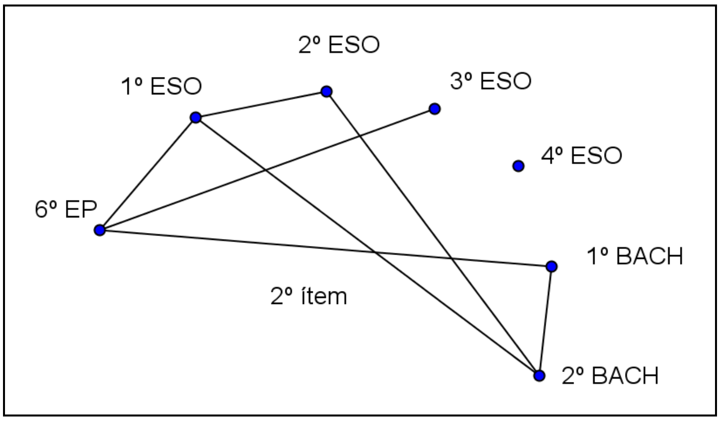


Figura 7. Diagrama de diferencias significativas de los promedios del 2º ítem.

En ellas las distribuciones de los siete niveles aparecen representadas por puntos y las distribuciones que presentan diferencias significativas entre sus medias aparecen unidas por segmentos.

Así, en el 2º ítem (figura 7), por ejemplo, 6º de Educación primaria tiene diferencias significativas con 1º y 2º de ESO, y con 1º y 2º de bachillerato, mientras que en el 8º ítem (figura 8), 6º de Educación primaria mantiene diferencias con todos los niveles educativos.

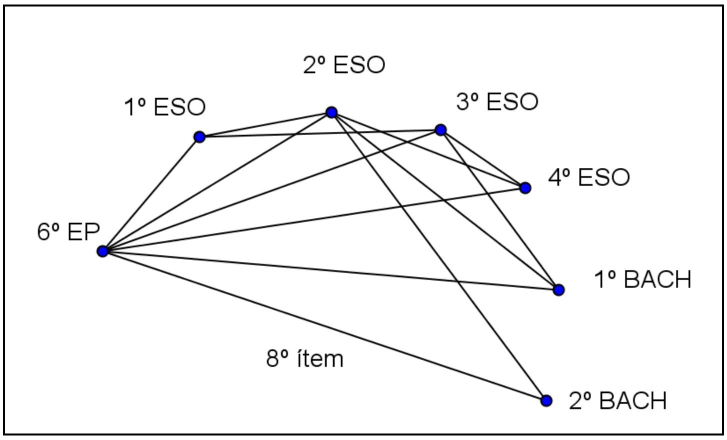


Figura 8. Diagrama de diferencias significativas de los promedios del 8º ítem.

Por otra parte, en la tabla 4 se muestra el número de medias que son significativamente diferentes con la media de la correspondiente columna.

Las pruebas de Kruskal-Wallis y de la Mediana de Mood permiten clasificar a los ítemes en tres niveles:

- Un primer grupo, A={2, 4, 5, 6, 7, 8, 11, 12, 13, 14, 15, 17, 19, 22, 23}, formado por los ítemes en los que ambas pruebas han detectado diferencias significativas,
- un segundo nivel, B={1, 20}, en el que sólo una prueba las detecta y
- un tercero, C={3, 9, 10, 16, 18, 21}, en el que ninguna de las pruebas las descubre.

Tabla 4. P-valores de las pruebas de K-W y MM, y número de diferencias significativas ente las medianas de los siete niveles educativos.

	Diferencias de medianas		Diferencias significativas de medias con PRM							
Ítem	*P-valor de K-W*	*P-valor de MM*	6º E.P.	1º ESO	2º ESO	3º ESO	4º ESO	1º BACH.	2º BACH.	Total
1	0,000050	0,108342	6	1	2	2	1	1	1	14
2	0,000056	0,000402	3	1	3	3	2	2	2	16
3	0,33587	0,698347	0	1	0	1	0	0	0	2
4	8,5235E-8	0,019231	6	1	1	1	1	1	1	12
5	3,402E-10	0,001111	6	1	1	4	2	2	2	18
6	0,001264	0,000260	6	1	2	1	1	1	2	14
7	0,049022	0,002992	3	2	1	0	1	1	0	8
8	1,111E-11	0,000012	6	3	5	4	3	3	2	26
9	0,190016	0,22614	1	0	0	0	0	1	0	2
10	0,184259	0,263984	3	1	1	0	0	1	0	6
11	0,000420	0,009146	6	1	2	1	1	2	5	18
12	1,483E-8	0,000010	6	6	2	2	2	2	2	22
13	1,483E-8	0,000010	2	2	1	1	4	0	2	12
14	2,214E-7	0,001668	6	1	1	2	1	1	2	14
15	0,001289	0,042947	6	1	1	1	1	1	1	12
16	0,438736	0,199979	3	0	0	1	0	1	1	6
17	0,006160	0,022711	2	2	3	1	1	5	2	16
18	0,647224	0,684841	0	0	0	0	0	0	0	0
19	0,00005	0,007199	3	5	3	3	1	2	3	20
20	0,00196	0,454833	6	1	1	1	1	1	1	12
21	0,80571	0,768124	0	0	0	0	0	0	0	0
22	2,490E-7	0,021913	6	1	1	2	1	2	1	14
23	0,00337	0,000365	2	2	1	2	1	0	3	11
Totales			88	34	32	33	25	30	33	275

Observando la tabla 4, es claro que las mayores diferencias se presentan entre 6º de EP con el resto de niveles educativos, que presentan números de diferencias significativas similares y que todas ellas rondan la tercera parte de las que presenta 6º de EP.

Comparando los ítemes de los grupos anteriores con el número total de medias que PRM ha detectado como significativamente diferentes, se observa que los ítemes del grupo B son los que menos diferencias significativas tienen y, excepto el ítem 7º, el resto son los que más.

Por otra parte, consideramos que para que se puedan atribuir creencias distintas en un nivel educativo determinado se deben detectar medias significativamente diferentes como mínimo con otros 3 niveles educativos.

Con este criterio: las creencias en 6º de EP son diferentes en el siguiente conjunto de ítemes {1, 2, 4, 5, 6, 7, 8, 10,12, 14, 15, 16, 19, 20, 22}, las de 1º de ESO en {8, 12, 19}, las de 2º de ESO en {2, 8, 19}, las de 3º de ESO en {2, 5, 8, 19}, las de 4º de ESO en el conjunto {2, 8, 19}, las de 1º de BACH en {8, 17}, las de 2º de BACH en {11, 18, 13}. Además, 6º de EP es el único nivel educativo en el que se aprecian diferencias significativas con todos los demás niveles en varios ítemes, concretamente con los siguientes: 1, 4, 5, 6, 8, 11, 12, 14, 15 y 20. En suma, se pueden enunciar las siguientes afirmaciones:

a) 6º de E.P. es el nivel educativo que tiene más diferencias estadísticamente significativas y es el único que, además, tiene estas diferencias en casi la mitad de los ítemes con el resto de los niveles educativos considerados.

b) Se aprecian diferencias estadísticamente significativas entre 6º de E.P. y los 6 restantes niveles educativos sobre las siguientes creencias: la restricción de alumnos para el aprendizaje de las matemáticas; la relación entre las dificultades de aprendizaje con la dificultad de la materia; la conexión de buenas notas con el esfuerzo, con el estudio y con las capacidades; la perseverancia para resolver problemas; la apreciación de la conexión de las matemáticas con el mundo real; la valoración por sus compañeros de los alumnos brillantes en matemáticas; la relación entre las destrezas para resolver problemas en el aula con las que se utilizan fuera de ella; la naturaleza abstracta de las matemáticas y su lejanía con la realidad.

c) Se aprecian diferencias estadísticamente significativas de los cursos que se señalan con al menos otros tres niveles educativos en los siguientes casos:

- Los alumnos de 6º de E.P., 2º y 3º de ESO sobre la creencia de que las matemáticas están restringidas a unos pocos y sobre la necesidad del estudio diario o casi diario.
- Los alumnos de 6º de EP y 3º de ESO sobre el efecto de la suerte para sacar buenas notas.
- Todos los niveles excepto 2º de BACH sobre el efecto suerte para sacar malas notas.
- Los cursos de 6º de E.P. y 2º BACH sobre que hay que hacer para sacar buenas notas.
- Los niveles de 6º de E.P. y 1º de ESO sobre la rareza de la gente a quien le gustan las matemáticas.
- Los alumnos de 2º de ESO y 1º de BACH en relación con la mejor capacitación de los chicos que las chicas para las matemáticas.
- Todos los alumnos excepto bachillerato sobre que sea poco entretenido el estudio de las matemáticas
- Sólo los alumnos de 2º de BACH sobre los resultados y los procesos en resolución de problemas.

En relación con las respuestas negativas observadas en el análisis general, ahora se han obtenido porcentajes en cada nivel educativo de las frecuencias de los valores que expresan creencias negativas hacia las matemáticas (valores 0 y 1 para los ítemes positivos, y valores 3 y 4 para los negativos).

El diagrama de barras de la figura 9 representa estos porcentajes. En la gráfica se pueden apreciar diferencias de comportamiento entre niveles en casi todos los ítemes, pero hace falta ver si tales diferencias son estadísticamente significativas.

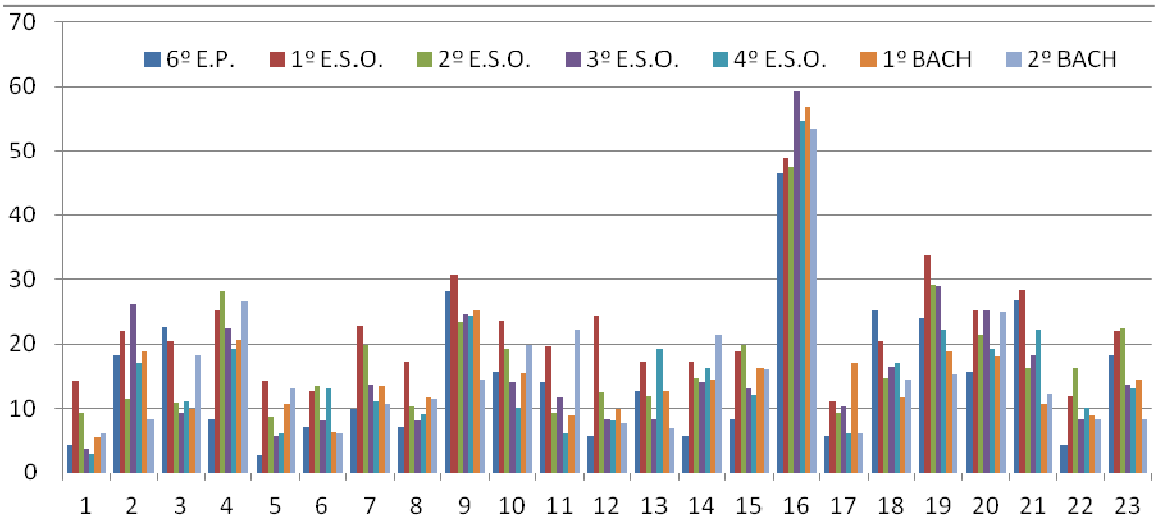


Figura 9. Porcentajes de las puntuaciones extremas de creencias negativas.

Partiendo de la referencia de 6º de E.P, el análisis de los mismos nos permite afirmar que, al avanzar en los niveles educativos, hay más creencias negativas que refuerzan su carácter que las que lo debilitan. Precisando un poco más, se describen las siguientes apreciaciones:

a) Creencias negativas que aumentan en todos cursos superiores sobre: las dificultades propias en relación con las dificultades de la materia; el factor suerte cuando se sacan buenas notas (destacando 1º de ESO, y 1º y 2º de BACH), y cuando se sacan malas notas destaca 1º de ESO; el esfuerzo y estudio personal cuando se sacan buenas notas, especialmente en 1º, 2º y 4º de ESO; las capacidades propias cuando sacan buenas notas; especialmente en 1º y 2º de ESO; la rareza de la gente a quienes les gustan las matemáticas, destaca 1º de ESO; la falta de perseverancia en la resolución de problemas, especialmente en 2º de BACH; el carácter explicativo de las matemática, sobre todo en 1º y 2º de ESO; la valoración por sus compañeros; que los chicos están mejor dotados para las matemáticas que las chicas, especialmente en 1º de BACH; la no aplicación de las estrategias de resolución de problemas de uso en el aula a problemas de la vida, destaca en 1º y 3º de ESO y 2º de BACH; el carácter abstracto de las matemáticas y su alejamiento de la realidad, destacando 2º de ESO.

b) Creencias negativas que disminuyen en todos cursos superiores sobre: achacar las dificultades en matemáticas a sus propias limitaciones, especialmente en 2º y 3º de ESO y 1º BACH; los aprendizajes memorísticos, sobre todo en 1º de BACH.

c) Creencias negativas que aumentan en unos cursos y disminuyen en otros: suben en 3º y bajan en 2º de ESO y 2º de BACH las creencias sobre el estudio diario o casi diario; sube en 1º de ESO y 2º de BACH y baja en 4º de ESO achacar a la falta de capacidades el hecho de sacar malas notas; las creencias negativas sobre saber qué hacer para sacar buenas notas suben en 1º de ESO y 2º de Bachillerato y bajan en el resto, especialmente en 2º y 4º ESO, y en 1º de BACH; sube en 1º y 4º de ESO y baja en 3º de ESO y 2º de BACH la distracción en clase de matemáticas; suben en 1º, 2º y 3º de ESO y bajan en los otros tres niveles, especialmente en 2º BACH, las creencias negativas sobre que el estudio de matemáticas es entretenido; que las matemáticas sea un reto para el estudio de las matemáticas aumenta en 1º y 2º y baja en los demás cursos, especialmente 1º y 2º de BACH; que en resolución de problemas los resultados sean más importantes que los procesos sube en 1º y 2º de ESO y baja en el resto de cursos, especialmente 2º de BACH.

6. Conclusiones

En suma, se puede concluir que existen creencias que repercuten negativamente en el estudio de las matemáticas, que bastantes de estas creencias son diferentes según el sexo y que, además, van variando con el paso de los años.

En primer lugar, se puede asegurar que en todos los ítemes considerados aparecen importantes porcentajes de alumnos con creencias negativas sobre las matemáticas y que, sin duda afectan, a su rendimiento, como ya señalaron House (2007), Japón, Alomar (2007) y Poulou (2007), entre otros. Resumiendo, estas creencias tienen que ver con: selección de alumnos, el estudio diario, las limitaciones de los alumnos (Guerrero, Blanco y Vicente, 2002), la dificultad de la materia, la suerte, el esfuerzo y el estudio, la desorientación, la visión estrafalaria de los matemáticos, la distracción, el abandono, la no apreciación del carácter aplicado, la valoración social, la capacitación respecto al sexo, el estudio memorístico, que son poco entretenidas, la desconexión con la vida real, el carácter abstracto, la importancia de resultados frente a procesos. Hidalgo, Maroto y Palacios (2004 y 2005), e Hidalgo et al (2004)

Se detectan diferencias estadísticamente significativas respecto al sexo en las siguientes creencias: la importancia del estudio diario, de las propias limitaciones, dificultad de la materia, el esfuerzo para sacar buenas notas, las capacidades para sacar buenas y malas notas, la apreciación estrafalaria de los matemáticos, la diferencia de capacitación, que el estudio de las matemáticas es poco entretenido, la abstracción de las matemáticas y su alejamiento de la realidad, los procesos y los resultados.

Finalmente, por una parte, se descubren diferencias estadísticamente significativas sobre la mayor parte de las creencias de los alumnos respecto de los diferentes niveles educativos, sobre todo entre 6º de E.P. y el resto de cursos (descritas en el apartado anterior), hecho que estaría de acuerdo con la influencia metodológica detectada por Warfield, Wood & Lehman (2005) y que contradice las conclusiones de Fennema (1978) y Fennema y Sherman (1977) sobre la estabilización de afectividades hacia las matemáticas, aunque también aparecen diferencias significativas en otros cursos; por otra, se constata que respecto a 6º de E.P. hay un grupo de creencias negativas que se han reforzado en ESO y BACH y que es mucho más numeroso que el de creencias positivas que se han debilitado (descritas en el apartado anterior), hecho que, sin duda, influye en los rendimientos negativos señalados por Gómez Chacón (2000); Simpkins, Davis-Kean & Eccles (2006); Chen & Zimmerman (2007).

Las conclusiones que se acaban de enunciar tienen sumo interés para la docencia de las Matemáticas en los siete niveles considerados. El Profesorado de estos niveles educativos debiera tener en consideración las creencias de estos alumnos y la evolución de las mismas, ya que éstas juegan un papel fundamental en el estudio de esta disciplina y, por ende, en los aprendizajes. Por otra parte, visto el fortalecimiento de muchas creencias negativas con el paso del tiempo, el profesorado debiera esforzarse más aún en motivar a los alumnos para que ese fortalecimiento detectado en creencias negativas diera paso a un debilitamiento de las mismas.

Bibliografía

Alomar, B. O. (2007). Personal and family factors as predictors of pupils' mathematics achievement. *Psychological Reports*, 101, 259-269.

Andrews, P. (2007). Negotiating meaning in cross-national studies of mathematics teaching: Kissing frogs to find princes. *Comparative Education, 43*(4), 489-509.

Andrews, P. (2007). The curricular importance of mathematics: A comparison of english and hungarian teachers espoused beliefs. *Journal of Curriculum Studies, 39*(3), 317-338.

Azcárate, C. (1997). Si el eje de ordenadas es vertical, ¿qué podemos decir de las alturas de un triángulo? *SUMA*, Nº 25, 23-30.

Barrantes, M. y Blanco, L. (2006). A study os perspective primery teachers' conceptions of teaching and learning school geometry. *Journal of Mathematics Teacher Education*, 9, 411-436.

Chen, P. & Zimmerman, B. (2007). A cross-national comparison study on the accuracy of self-efficacy beliefs of middle-school mathematics students. *Journal of Experimental Education*, 75(3), 221-244.

COCKCROFT, M. (2007). Las matemáticas sí cuentan. Madrid: MEC.

Fennema, E. (1978). "Sex Related Differences in Mathematics Achievement and Related Factors: a Further Study" en *Journal for Research in Mathematics Education,* nº 9 (3), pp. 189-203.

Feneman, E. & Sherman, J.A. (1977). "Sex-related differenses in mathematics achievement, spatial visual and affective factors" en *American Educational Research Journal*, nº 12, pp. 52-71.

ICECE (Instituto Canario de Evaluación y Calidad Educativa) (2002). *Estudio longitudinal de la ESO: avance de resultados.* Gran Canaria: Instituto Canario de Evaluación y Calidad Educativa.

Correa, C. A. et al. (2008). Connected and culturally embedded beliefs: Chinese and US teachers talk about how their students best learn mathematics. *Teaching and Teacher Education, 24*(1), 140-153.

Ghaith, G. & Yaghi, H. (1997). Relationships among experience, teacher efficacy, and attitudes toward the implementation of instructional innovation. *Teaching and Teacher Education, 13*(4), 451-458.

Gill, M. G; Ashton, P. T; & Algina, J. (2004). Changing preservice teachers' epistemological beliefs about teaching and learning in mathematics: An intervention study. *Contemporary Educational Psychology, 29*(2), 164-185.

Gómez Chacón, I. M. (2000). *Matemática emocional: los afectos en el aprendizaje matemático*. Madrid, Narcea.

Guerrero, E; Blanco, L; Vicente, F. (2002). Trastornos emocionales ante la educación matemática, en GARCÍA, J.N. (coord.): *Aplicaciones a la Intervención Psicopedagógica.* Madrid, Pirámide, 229-237.

Gullberg, A. et al. (2008). Prospective teachers' initial conceptions about pupils' understanding of science and mathematics. *European Journal of Teacher Education, 31*(3), 257-278.

Hidalgo, S; Maroto, A. y Palacios, A. (2004). ¿Por qué se rechazan las matemáticas? Análisis evolutivo y multivariante de actitudes relevantes hacia las matemáticas. *Revista de Educación*. Ministerio de Educación y Ciencia nº 334, 75-99.

Hidalgo, S; Maroto, A. y Palacios, A. (2005). El perfil emocional matemático como predictor del rechazo escolar: relación con las destrezas y los conocimientos desde una perspectiva evolutiva. *Revista Educación Matemática*. 17(2), 89-116.

Hidalgo, S. et al. (2008). Estatus afectivo emocional y rendimiento escolar en matemáticas. *Revista de Didáctica de las Matemáticas Uno*, 1(2), 9-28.

Hodgen, J. & Askew, M. (2007). Emotion, Identity and Teacher Learning: Becoming a Primary *Mathematics Teacher.* Oxford Review of Education, 33(4), 469-487.

House, J. D. (2007). Mathematics beliefs and instructional strategies in achievement of elementary-school students in Japan: Results from the TIMSS 2003 assessment. *Psychological Reports*, 100(2), 476-482.

Kunter, M. et al. (2008). Students' and mathematics teachers' perceptions of teacher enthusiasm and instruction. *Learning and Instruction, 18*(5), 468-482.

Mapolelo, D. C. (1999). Do pre-service primary teachers who excel in mathematics become good mathematics teachers? *Teaching and Teacher Education, 15*(6), 715-725.

Pecharromán, C. (2009). *Aprendizaje de las propiedades de las funciones a través de las gráficas*. Tesis doctoral. Universidad de Valladolid.

Poulou, M. (2007). Personal teaching efficacy and its sources: Student teachers' perceptions. *Educational Psychology, 27*(2), 191-218.

Sánchez, V. (2000). Representaciones y comprensión en el profesor de Matemáticas. *Actas IV Congreso SEIEM.*51-63.

Simpkins, S.D; Davis-Kean P.E. & Eccles, J.S. (2006). Math and science motivation: A longitudinal examination of the links between choices and beliefs, *Developmental Psychology*, 42(1), 70-83.

Socas M. et al. (2001). Análisis de las concepciones, creencias y actitudes hacia las matemáticas de los alumnos que comienzan la diplomatura de maestro. Formación del profesorado e investigación en educación matemática III. *La Laguna*, 115-125.

Socas, M. (2007). Dificultades y errores en el aprendizaje del las matemáticas. Análisis desde el Enfoque Lógico Semiótico. En *Investigación en Educación Matemática XI*, 19-52.

Warfield, J; Wood, T. & Lehman, J. D. (2005). Autonomy, beliefs and the learning of elementary mathematics teachers. *Teaching and Teacher Education, 21*(4), 439-456.

Agradecimientos

Esta investigación se ha desarrollada en el marco del Proyecto I+D VA051A09, subvencionado por la Consejería de Educación de la Junta de castilla y León

.

Santiago Hidalgo, Catedrático de Escuela Universitaria de la Escuela de Magisterio de Segovia, Universidad de Valladolid (España). Es miembro de equipos de investigación en proyectos nacionales y regionales y también del Instituto de Investigación en Matemáticas de la Universidad de Valladolid (IMUVA), siendo sus campos prioritarios de investigación las dificultades de aprendizaje en general y de las matemáticas en particular de cuyos campos tiene algo más de 30 publicaciones tanto nacionales como internacionales, **shidalgo@am.uva.es**

Ana Maroto, Profesora Titular de Escuela Universitaria de la Escuela de Magisterio de Segovia, Universidad de Valladolid (España), Es miembro de equipos de investigación en proyectos nacionales y regionales y también del Instituto de Investigación en Matemáticas de la Universidad de Valladolid (IMUVA), siendo sus campos prioritarios de investigación las dificultades de aprendizaje en general y de las matemáticas en particular de cuyos campos tiene algo más de 30 publicaciones tanto nacionales como internacionales, **amaroto@am.uva.es**.

Andrés Palacios, Catedrático de Escuela Universitaria de la Escuela de Magisterio de Segovia, Universidad de Valladolid (UVA), España; miembro del GIR por la Universidad de Valladolid “Educación Matemática”. Tiene publicados numerosos trabajos de investigación en Didáctica de la Matemática y en Psicología, **palacios@psi.uva.es**

Tomás Ortega, Catedrático de Universidad de Facultad de Educación y Trabajo Social de la Universidad de Valladolid (España), miembro del GIR de la Universidad de Valladolid “Educación Matemática”, miembro senior del IMUVA, Presidente de la Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática (SEIEM), director de más de 30 trabajos tutelados de investigación y de 11 tesis doctorales, y ha publicado más de 100 trabajos de investigación. **ortega@am.uva.es**

UNIÓN
REVISTA IBEROAMERICANA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA

www.fisem.org/web/union

ISSN: 1815-0640
Número 35. Septiembre de 2013
páginas 115-134

Dinamización Matemática:

Actividades de aprendizaje usando elipsógrafos para apoyar el proceso de demostración en geometría analítica

José Carlos Cortés Zavala, Graciela Eréndira Núñez Palenius, Christian Morales Ontiveros

Resumen	En éste artículo se dan a conocer los resultados obtenidos al aplicar a ocho estudiantes de bachillerato dos actividades de aprendizaje de Geometría Analítica en las que se utilizan elipsógrafos (artefactos concretos). Las actividades tenían el objetivo de apoyar el proceso de demostración en Geometría Analítica, específicamente con el tema de Elipse. Se implementó una hoja de trabajo para cada elipsógrafo, las cuales guían a los estudiantes a través de instrucciones en la manipulación del Elipsógrafo y preguntas relacionadas con el artefacto de tal manera que descubran el modelo matemático inmerso en cada uno de los elipsógrafos y que a través de la exploración construyan una demostración matemática que les permita construir el concepto formal de Elipse. **Palabras clave:** Geometría Analítica, Elipsógrafos, Demostración Matemática.
Abstract	In this article are given to know results when applied to eight high school students two learning activities of analytical geometry in which elipsografos (specific artifacts) are used. Activities had the objective of supporting the process of demonstrating in analytical geometry, specifically with the theme of ellipse. Implemented a worksheet for each elipsografo, which guide students through instruction in the handling of the Elipsografo and questions relating to the appliance in such way that discovered the mathematical model immersed in each of the elipsografos and that the exploration to build a mathematical demonstration that allows them to build the formal concept of ellipse. **Keywords:** Analytical geometry, Elipsografos, mathematical proof.
Resumo	Neste trabalho são apresentados os resultados obtidos através da aplicação de oito estudantes do ensino médio de aprendizagem duas atividades de geometria analítica em elipsógrafos utilizados (artefatos de concreto). As actividades destinadas a apoiar o processo de demonstração de Geometria Analítica, especificamente com a questão da Ellipse. Implementamos uma planilha para cada elipsógrafo, que orientam os alunos por meio de instrução no manejo perguntas Elipsógrafo e afins, tais artefato descobrir o modelo matemático imerso em cada um dos elipsógrafos e através exploração de uma construção matemática que lhes permite construir formais conceito Ellipse. **Palavras-chave:** Geometria Analítica, Elipsógrafos, demonstração matemática.

1. Introducción

Para la realización de este trabajo utilizamos dos artefactos matemáticos que dibujan una elipse, a estos comúnmente se les denomina “Elipsógrafos”, el primero es el *Elipsógrafo de palancas y colisa de Inwards* y el segundo el *Elipsógrafo Antiparalelogramo articulado de Van Schooten.* En la Figura 1 se presenta (modelo concreto y virtual) el elipsógrafo de palanca y colisa de Inwards y en la figura 2. el Antiparalelogramo de Van Schooten; los cuales fueron construidos con material plástico (acrílico, modelo físico) y también con Geogebra (modelo virtual).

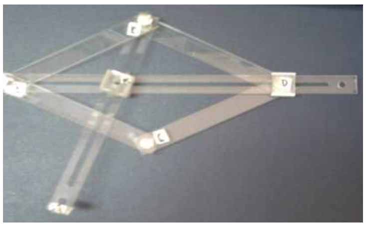
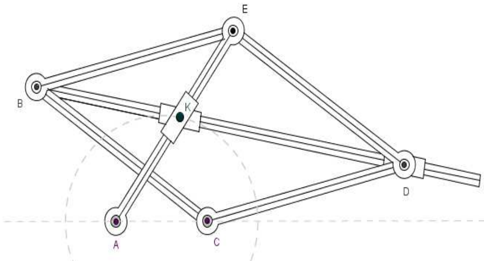
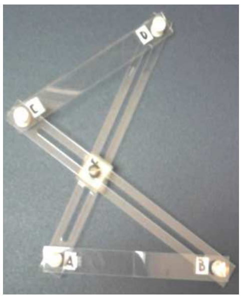
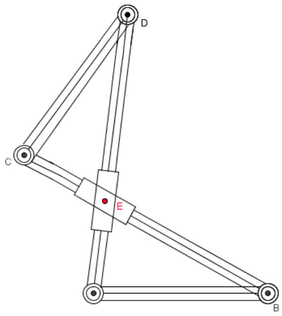





Figura 1 y 2. Elipsógrafo de palancas y colisa de Inwards construcción física y construcción virtual. Antiparalelogramo articulado de Van Schooten construcción física y construcción virtual.

Para cada uno de los artefactos se diseñó una hoja de trabajo, en la que a través de preguntas y de la manipulación del mismo se promovía el descubrimiento del modelo matemático inmerso en él. Las hojas de trabajo se presentaron a un grupo de ocho estudiantes de bachillerato, ellos formaron 4 equipos con dos integrantes cada equipo.

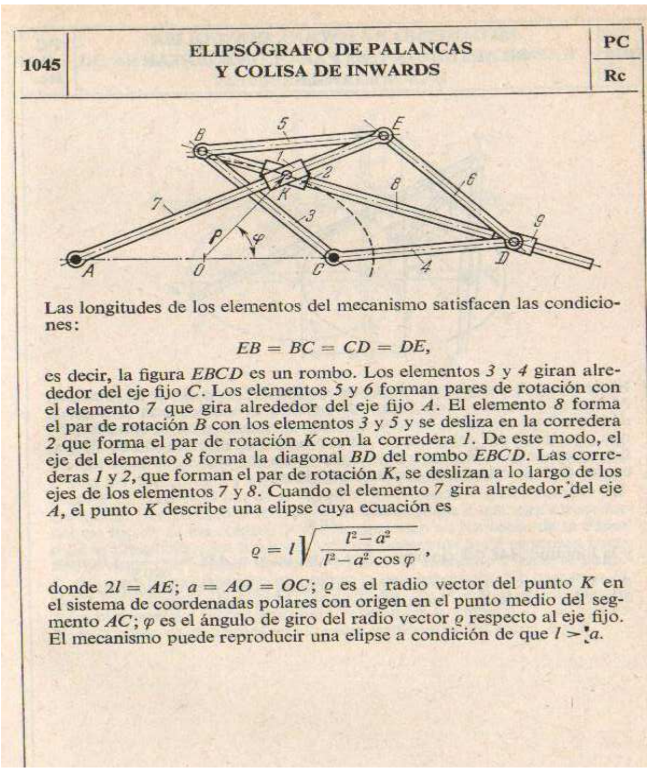
En este artículo se explica cómo se llevo a cabo la investigación cuando los estudiantes trabajaron con los artefactos concretos (construcciones físicas) y no con las construcciones virtuales y se exponen y analizan los resultados de uno de los equipos de estudiantes cuando trabajaron con el *Elipsografo de Palanca y Colisa de Inwards*.

2. Los Artefactos Matemáticos

Desde la época de los Griegos se han construido artefactos matemáticos para el trazado de las cónicas, en el libro “*Katalog matematischer und matematisch-physikalischer Modelle, Apparate und Instrum*ente” (Dyck, W. 1892) se menciona que Meneachmus (~380 - ~320 A.C.) tenía un dispositivo mecánico para construir cónicas; a Isidoro de Mileto quien tenía un instrumento para trazar una parábola [Dyck, p.58]. Posteriormente Leonardo Da Vinci (1452-1519) inventó un elipsógrafo con un movimiento invertido de la conexión fija, Albrecht Dűrer (1471-1528) utilizó dispositivos mecánicos para dibujar curvas. René Descartes (1596-1650) publicó su *Geometría* (1637) libro en el cual daba métodos geométricos para dibujar cada curva con algunos aparatos, y estos aparatos eran a menudo articulados. En el año de 1657, Van Schooten publicó su *“Exercitationum mathematicarum libri quinque”*. Como el título sugiere, la obra se divide en cinco "libros" de un centenar de páginas cada uno. El libro I es una revisión bastante estándar de la aritmética y la geometría ordinaria. El libro II contiene construcciones con regla. En el Libro III, Van Schooten trata de reconstruir algunas de las obras de Apolonio en lugares geométricos. Este fue un importante tema de investigación de la época. El libro IV contiene la obra más conocida de Van Schooten. Su título es " *Orgánica conicarum sectionum* ", o "Los instrumentos de las secciones cónicas." La palabra "orgánica" está más estrechamente relacionada con el órgano como instrumento musical que a la "orgánica" de la Química o de la Agricultura. Como sugiere el título, el capítulo describe una variedad de bellos artefactos para la elaboración de las diferentes secciones cónicas.

En 1877 A. B. Kempe publicó el libro titulado *“How to Draw a Straight Line” (Como dibujar una línea recta),* allí menciona los trabajos de: J. Watt (1736-1819), J.J. Sylvester (1814-1897), Richard Roberts (1789-1864), P.L. Chebyshev (1821-1894), Harry Hart (1848-1920), William Kingdon Clifford (1845-1879), Jules Antoine Lissajous (1822-1880), Samuel Roberts (1827 - 1913), y Arthur Cayley (1821-1895) todos ellos relacionads con la utilización de artefactos matemáticos.

Iván Ivánovich Artobolevski, (1905 – 1977) recopiló en “*Les mécanismes dans la technique moderne*” (1975, Artobolevski) varios tipos de mecanismos tanto mecánicos como eléctricos; dentro de la recopilación aparecen varios artefactos mecánicos cuya finalidad era trazar algún tipo de curva cónica. La obra de Artobolevski está dividida en 6 tomos y es precisamente de esta obra de donde obtuvimos los modelos de los artefactos matemáticos. En ellos él realiza una pequeña descripción del funcionamiento ver figura 3.



1045	ELIPSÓGRAFO DE PALANCAS Y COLISA DE INWARDS	PC / Rc

Las longitudes de los elementos del mecanismo satisfacen las condiciones:

$$EB = BC = CD = DE,$$

es decir, la figura $EBCD$ es un rombo. Los elementos *3* y *4* giran alrededor del eje fijo C. Los elementos *5* y *6* forman pares de rotación con el elemento *7* que gira alrededor del eje fijo A. El elemento *8* forma el par de rotación B con los elementos *3* y *5* y se desliza en la corredera *2* que forma el par de rotación K con la corredera *1*. De este modo, el eje del elemento *8* forma la diagonal BD del rombo $EBCD$. Las correderas *1* y *2*, que forman el par de rotación K, se deslizan a lo largo de los ejes de los elementos *7* y *8*. Cuando el elemento *7* gira alrededor del eje A, el punto K describe una elipse cuya ecuación es

$$\varrho = l\sqrt{\frac{l^2-a^2}{l^2-a^2\cos\varphi}},$$

donde $2l = AE$; $a = AO = OC$; ϱ es el radio vector del punto K en el sistema de coordenadas polares con origen en el punto medio del segmento AC; φ es el ángulo de giro del radio vector ϱ respecto al eje fijo. El mecanismo puede reproducir una elipse a condición de que $l > a$.

Figura 3. Hoja del libro “Los mecanismos de la técnica moderna”

Para cada uno de los artefactos utilizados previamente se realizó un estudio matemático más detallado, el cual se describirá en el siguiente apartado, con la finalidad de que, teniendo como base este estudio, se realizaran las preguntas que conforman las hojas de trabajo.

3. Marco Conceptual

Perspectivas teóricas y de prácticas alternativas complementarias en didáctica de las matemáticas propuestas por varios investigadores, (Mariotti et al 1997; Bartolini et al 2003, 2004; Bartolini 2007, Boero et al., 1996, 1997; Arzarello, Robutti 2004, Jill *et al* 2002), argumentan a favor de la introducción en el salón de clases de “contextos históricos de recreación de la experiencia científica”, en particular aquéllos que tienen que ver con la práctica de la geometría y que utilizan modelos mecánicos o articulados de máquinas para dibujar o trazar, como un medio de generación de ideas o nociones matemáticas complejas. Además, otros investigadores mencionan que “en sesiones de trabajo dirigido, los alumnos son capaces de desplegar recursos matemáticos que se desencadenan por medio de la comprensión de nociones” (Hoyos, Capponi y Génèves, 1998), lo anterior realizado en un trabajo colaborativo hará que se promueva la creatividad y el ingenio en los estudiantes. Es decir a través de la manipulación guiada de los artefactos se espera que el estudiante descubra el modelo matemático inmerso en el artefacto, esto permitirá la reversibilidad del conocimiento de acuerdo a la mencionado por Piaget (Piaget, 1950).

Seymour Papert (1982) señala tres aspectos en la utilización de los recursos en el aprendizaje:

1. Sirven como modelos, a los que las ideas matemáticas pueden asociarse.
2. Contribuyen a dotar a las matemáticas de una tonalidad afectiva positiva.
3. Vinculan el conocimiento formal de las matemáticas con el conocimiento corporal, con los esquemas sensorio-motores del estudiante.

Papert (idem) formula como un hecho fundamental del aprendizaje que "cualquier cosa es fácil si uno puede asimilarla a su propia colección de modelos" y menciona también “con la utilización de los recursos apropiados es más fácil crear condiciones, en las que puedan arraigar los modelos intelectuales”.

Por otro lado en una concepción constructivista del aprendizaje, las personas necesitan de experiencias y modelos sobre los que sustentar los conocimientos que adquieren y es mediante la manipulación, que los estudiantes adquieren una percepción más dinámica de las ideas. Una parte importante de esta investigación consistió en realizar la demostración matemática de cada uno de los artefactos utilizados, la cual guiaría para la elaboración de las preguntas de las hojas de trabajo, por tal razón a continuación se expone.

3.1 Demostración matemática del Elipsógrafo de palancas y colisa de Inwards.

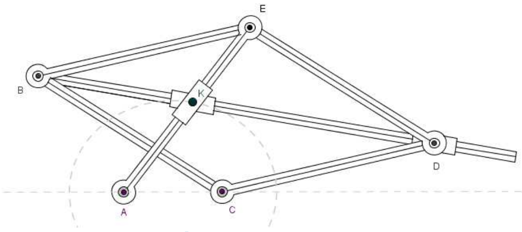


Figura 4 Elipsógrafo de palancas y colisa

<u>Descripción:</u>
Las longitudes de los segmentos del artefacto satisfacen que EB = BC = CD = DE, es decir, la figura EBCD es un rombo. Los puntos A y C se mantienen fijos (focos). El segmento BD es la diagonal del rombo. El punto K es la intersección entre la corredera 2 y 3. Cuando el segmento AE gira alrededor del punto fijo A, el punto K describe una elipse.
Existe una condición para que dicho artefacto pueda describir una Elipse. La 2 AE > AO (AO = OC) es decir, que la distancia entre los focos sea menor que el segmento AE.

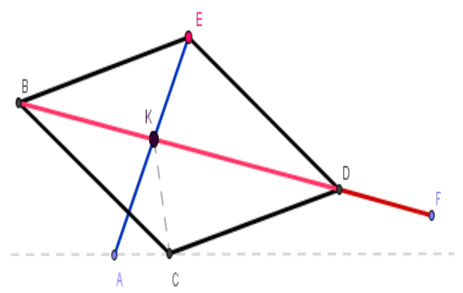
<table>
<tr>
<td>


Figura 5. Modelo Elipsógrafo de Inwards
</td>
<td>
1. Por construcción sabemos que:
BC = CD = DE =EB
2. La figura EBCD es un rombo.
3. Tracemos el segmento KC:
4. Los triángulos KDE y KDC son congruentes por LAL por tener:
a. DE = DC (por construcción)
b. KD lado común.
c. Ángulo KDE = Ángulo KDC puesto. que BD es diagonal.
5. De la congruencia anterior podemos deducir que: KC = KE
6. Observemos que: AE = AK + KE
AE = AK +KC (por ser KE ≅ KC)
Pero AE es constante → AK + KC = Cte.
7. Por lo tanto se cumple la condición para que el punto *K* describa una elipse según su definición.
</td>
</tr>
</table>

3.2. Demostración matemática del Antiparalelogramo articulado de Van Schooten.

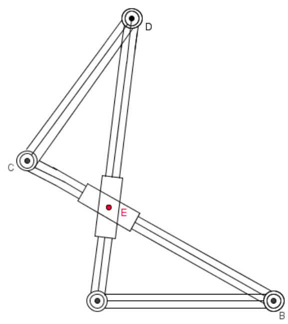


Figura 6. Elipsógrafo Articulado de Van Schooten

<u>Descripción:</u>
La base de este artefacto es el Antiparalelogramo ABCD. Cabe mencionarse que: AB = CD y AD = BC. Se dice que es Antiparalelogramo, puesto que en el movimiento, el artefacto sigue manteniendo la propiedad de no tener dos pares de lados paralelos. Los puntos fijos (focos), son los puntos A y B. Con la intersección de la corredera 1 y 2 obtenemos el punto E. Al mover el artefacto, el punto E tiene desplazamiento por los segmentos AD y BC, describiendo durante el movimiento una elipse.

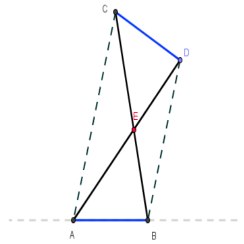


Figura 7. Módelo del Elipsógrafo de Van Schooten

Por construcción conocemos que:
AB = CD
AD = BC

Ahora tracemos los segmentos CA y DB:
Ahora tracemos el eje de simetría al cual llamaremos t: Sea M el punto de la intersección de t con CA y N el punto de la intersección entre t y BD:

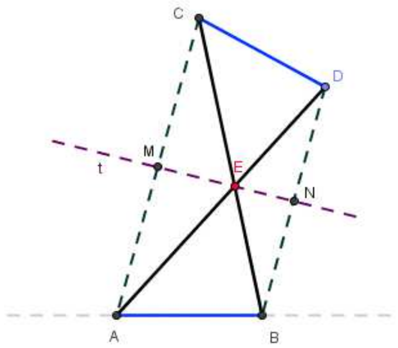


Figura 8. Ejes de simetría del Elipsógrafo de Van Schooten

Nótese que el trazo del eje de simetría tiene algunas implicaciones interesantes en nuestra figura como son las siguientes:

t es perpendicular a BD y AC y los corta en su punto medio (mediatriz).

t bisecta a los ángulos DEB y CEA.

Ahora tenemos todo lo necesario para afirmar que ΔBEN es congruente con ΔDEN por el criterio LAL:

EN es lado común.

Angulo BNE = Angulo DNE (porque el eje de simetría es perpendicular a BD formando ángulos rectos).

BN = ND (puesto que t bisecta a BD por ser eje de simetría).

$\therefore\ \Delta BEN \cong \Delta DEN$

También ΔMEA es congruente con ΔMEC:

EM lado común.

Angulo CME = Angulo AME (porque el eje de simetría es perpendicular a BD formando ángulos rectos).

CM = MA (puesto que t bisecta a AC por ser eje de simetría).

$\therefore\ \Delta MEA \cong \Delta MEC$

De las dos congruencias anteriores obtenemos que el ΔAEB es congruente con ΔCED por el criterio LLL (ya que de las congruencias anteriores deducimos que EB $\cong$ ED y EA $\cong$ EC además de que por construcción conocíamos que AB $\cong$ CD).

De allí vemos que:

AE + EB = AE + ED = AD = cte.

$\therefore$ Se cumple la condición para que el punto *E* describa una elipse según su definición.

4.Metodología

La investigación se llevó a cabo en un ambiente de trabajo colaborativo, que incentiva la cooperación entre individuos para conocer, compartir y ampliar la información que cada uno tiene sobre el tema.

Es de carácter cualitativo, es decir las conclusiones y comentarios que se desprenden del análisis de datos obtenidos, no son producto de las relaciones numéricas que se puedan obtener de las hojas de trabajo aplicadas, sino emergen del análisis de las cualidades asociadas tanto a las preguntas de las hojas de trabajo, como a los comportamientos de los estudiantes en cada una de ellas.

En cada uno de los Elipsógrafos seleccionados se analizaron sus características y se realizó una demostración matemática, lo anterior permitió realizar las hojas de trabajo y definir lo que se esperaba lograr con ellas.

Las hojas de trabajo con las respuestas de los estudiantes, las videograbaciones realizadas durante el trabajo de cada uno de los equipos, así como las observaciones en el trabajo de campo, conforman el cuerpo de datos para llevar a cabo el estudio. El proceso que se siguió para implementar la investigación constó de seis etapas:

1. Selección de artefactos
2. Descripción y Demostración matemática de los artefactos
3. Construcción de los artefactos
4. Realización de las hojas de trabajo
5. Etapa de Aplicación
6. Análisis de los datos

De las seis etapas, las dos primeras ya han sido descritas en los incisos anteriores y de la tercera diremos que la construcción de los prototipos fue realizada con varios tipos de materiales (papel ilustración, Tireno, metal y acrílico). Las etapas 4, 5 y 6 se describen a continuación:

4.1 Realización de actividades didácticas

Se comenzó tomando en cuenta las características de cada artefacto así como su demostración matemática. A partir de allí se decidió que las hojas de trabajo deberían de consistir en una serie de preguntas que invitaran a los estudiantes a manipular cada artefacto, que conocieran cada parte que los conforma, que observaran las figuras que se formaban entre sus barras así como las longitudes de las mismas, también que verificaran su comportamiento mientras dicho artefacto tenía movimiento así como en estado inmóvil. Lo que se deseaba era que los alumnos, a partir de esa guía y de la manipulación del artefacto pudieran construir por sí mismos el concepto de elipse, deduciendo el modelo matemático involucrado en cada artefacto. De esta manera se hizo una actividad didáctica por cada artefacto.

A continuación se muestra, como ejemplo la hoja de trabajo correspondiente al Elipsógrafo de Palanca y Colisa de Inwards.

<u>HOJA DE TRABAJO PARA LA MANIPULACIÓN DEL ELIPSÓGRAFO DE PALANCAS Y COLISA DE INWARDS</u>

Integrantes del equipo: ________________________________

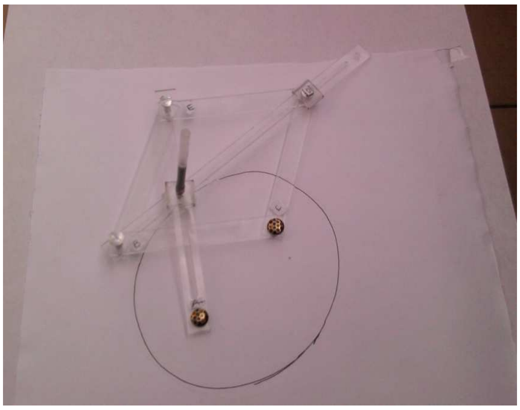
Nombre del equipo: ________________________________

Grado: ____________

<u>Instrucciones:</u>

1) Se te proporcionará un artefacto, un lápiz, un pincelín y una regla.
2) El punto K es el punto de la intersección de los segmentos AE y BD.
3) Coloca el lápiz en el punto K, puesto que este es el punto que realiza el trazo.

4) Podrás mover el artefacto mediante el punto E o bien mediante el lápiz que se inserta en el punto K. Analiza con mucha atención el lugar geométrico trazado por el punto K, así como el movimiento en general del artefacto.
5) Puedes medir la longitud de los segmentos con la regla para contestar algunas de las preguntas que se te piden.
6) Responde las preguntas planteadas lo más detallado posible, haciendo uso de la manipulación del artefacto.
7) Al hacer referencia a un segmento, escríbelo de la siguiente forma. *AB* ()



Elipsógrafo de palancas y colisa de Inwards.

1. ¿De cuántas barras está conformado el artefacto? Escribe la longitud de cada una de ellas, nombrando a cada barra con los puntos de cada uno de sus extremos (por ejemplo barra AE).
2. Mueve el artefacto y observa sus diferentes puntos durante el movimiento.
   Cuando moviste el artefacto, ¿Cuáles fueron los puntos que se mantuvieron fijos?
3. Al mover el artefacto ¿Cuáles son los segmentos que no cambian de longitud durante el movimiento?
4. Mueve el artefacto y observa sus segmentos. ¿Cuáles fueron los segmentos que cambiaron su longitud durante el movimiento?
5. De los segmentos que cambiaron de longitud durante el movimiento, ¿Cuáles tienen la misma longitud entre ellos?
6. Mueve el artefacto y observa la figura formada por los segmentos BC, CD, DE y EB. ¿Qué figura se forma?, ¿qué características tiene dicha figura?
7. ¿El segmento BD, siempre pasa por la mitad del segmento CE? Justifica tu respuesta.
8. Deja fijo el artefacto y traza con tu pincelín el segmento KC. ¿Cómo son los triángulos KED y KCD entre ellos? Justifica tu respuesta.
9. Suma la distancia de los segmentos AK+KC. ¿A cuánto equivale la distancia AK+KC?, ¿Siempre se cumple la equivalencia en cualquier posición del artefacto? Justifica tu respuesta.
10. Auxiliándote de la respuesta de la pregunta 1, ¿Hay alguna barra del artefacto cuya longitud sea igual a la suma de AK + KC?, ¿cuál es dicha barra?
11. Acerca el punto A al punto C, mueve el artefacto y observa el trazo. Después coloca el punto A sobre el punto C, mueve el artefacto y observa el trazo. ¿Cómo se comportaron estos trazos en comparación con el primer trazo realizado en la actividad?
12. Reflexiona sobre tus respuestas de las preguntas anteriores y escribe con tus palabras la definición de Elipse.
13. <u>Solicita a tu coordinador el Anexo 1 para responder lo siguiente.</u>
    Explica si el instrumento cumple la definición de elipse y ¿por qué

4.2 Etapa de Aplicación

Las actividades didácticas desarrolladas fueron aplicadas primeramente en una prueba piloto dividida en dos sesiones. Auxiliándonos de los estudiantes se pretendía con esta prueba, afinar detalles, cambiar el orden de las preguntas de ser necesario, quitar o agregar alguna de ellas así como mejorar su redacción, etc.

Así finalmente haciendo las modificaciones pertinentes a las hojas de trabajo se hizo la prueba formal, la cual fue dividida en dos sesiones. Se contó con dos cámaras de video grabación en cada una de ellas. Primero se aplicó la actividad del Elipsógrafo de palancas y colisa de Inwards, ésta se llevó a cabo el día jueves 6 de Mayo del 2010, en el CBTIS 149 en Morelia Michoacán, con una duración aproximada de 150 minutos. En esta ocasión se realizó con ocho alumnos del cuarto semestre de la especialidad de Administración, cuatro hombres y cuatro mujeres. Se formaron cuatro equipos de dos integrantes cada uno, formados por un hombre y una mujer.

En la segunda actividad se aplico el Antiparalelogramo articulado de van Schooten, se llevó a cabo el día miércoles 13 de Mayo del 2010, en el mismo lugar donde se realizo la primera sesión con una duración aproximada de 120 minutos y con los equipos conformados en la sesión anterior.

4.3 Análisis de los datos

Se digitalizaron las hojas de trabajo de todos los equipos y se analizaron las mismas. Posteriormente se revisaron las notas de observación realizadas durante las actividades así como los videos de las mismas y la información obtenida de ellos se organizó en tablas que contenían columnas para el episodio, tiempo y explicación de los equipos. Esto nos permitió seleccionar los diálogos más importantes y luego rescatarlos para analizarlos más a fondo. Sin embargo, por ser muy extensa la información sólo se muestran algunas de las respuestas más relevantes.

5. Exposición de Resultados

5.1. Resultados de la hoja de trabajo del Elipsógrafo de palancas y colisa de Inwards

Los resultados que se muestran a continuación corresponden a las preguntas 6, 7, 11 y 12 de uno de los equipos formados. Se presentan los diálogos obtenidos a través de la videograbación y lo que respondieron los alumnos en la hoja de trabajo. Los diálogos corresponden al equipo formado por Gabriela (**Gabi**), Uriel (**Ur**) y el Profesor que coordino la actividad (**Prof**).

5.1.1. Dialogo 1

<u>Participantes</u>**:** Gabriela, Uriel (**Gabi**, **Ur**) y Profesor (**Prof**).

5.1.1.1. Introducción.

Los alumnos tratan de concluir la respuesta de las preguntas 6 y 7; la comienzan a escribir en sus hojas de trabajo. Después de se acerca el Profesor, les pide que digan la respuesta a dicha pregunta y les hace más preguntas al respecto.

- En la pregunta 6, se les pedía que observaran la figura formada por su artefacto cuando este estuviera fijo, que dijeran de qué figura se trataba así como algunas de sus características. Allí se dieron cuenta de que se trataba de un rombo y entre sus características mencionan que el rombo tiene dos ejes de simetría.

6. Mueve el artefacto y observa la figura formada por los segmentos BC, CD, DE y EB. ¿Qué figura se forma?, ¿qué características tiene dicha figura?

Rombo, tiene sus 4 lados con la misma longitud y que tiene 2 lados paralelos CD, BE y ED, CB
tiene 2 ejes de simetria

Figura 9. Respuesta de estudiantes a la pregunta 6

- La pregunta que tratan de responder en el diálogo que sigue es la 7 y dice lo siguiente: ¿El segmento BD, siempre pasa por la mitad del segmento CE? Justifica tu respuesta. Entonces, de la respuesta de la pregunta anterior, ellos ya se habían dado cuenta de que su rombo tenía dos ejes de simetría y que uno de ellos era el segmento BD y el otro eje lo era el segmento CE.

7. ¿El segmento BD, siempre pasa por la mitad del segmento CE? Justifica tu respuesta.

Si... xq, es el eje de simetria

Figura 10. Respuesta de estudiantes a la pregunta 7

Gabi:	*¿Por qué sería?*
Ur:	*Es un eje de simetría.*
Gabi:	*Es la diagonal… ¿así nada más, ¿BD es eje de simetría de CE?*
Ur:	*Pues sí, el punto K no cambiaría de distancia entre el EC también.*
Gabi:	*No influye, K no influye (señala el punto K), nada más te está preguntando de estos (señala los puntos D y B). Entonces porque es su eje de simetría... siempre va a ser su eje de simetría.*
Ur:	*Pues… sí.*
Prof:	*¿En que pregunta van?*
Gabi:	*En la siete.*
Prof:	*¿En la siete?, a ver ¿qué respondieron?*
Gabi:	*Que si porque EC es el eje de simetría (señala el segmento EC en su artefacto).*
Prof:	*¿Por qué?*
Gabi:	*Este… se supone que nosotros estamos tomando que es un rombo, ¿no?*
Ur:	*Rombo.*
Gabi:	*Entonces tiene dos ejes de simetría, lo que viene siendo este (señala el segmento CE) y viendo siendo este (señala el segmento BE).*
Ur:	*BD (corrigiendo a Gabi que había dicho BE).*
Gabi:	*Aja, este (señala el BD) y este (señala el CE). Entonces se supone que aquí, quedaría hacia la mitad si quedáramos en este (simula con sus manos que dobla el artefacto por CE). Entonces al doblarlo (ahora por BD) automáticamente me esta formando su eje de simetría… y es una figura que siempre lo va a tener allí y aquí (señala el segmento CE).*
Prof:	*¿Siempre en distintas posiciones se cumple que la distancia de C al segmento BD y de E a BD es la misma?*
Ur:	*Sí.*
Gabi:	*Cuando es un eje en el rombo sí porque sus cuatro lados son iguales.*
Prof:	*Ok sigan adelante…*

5.1.1.2 Conclusiones del dialogo 1.

Una buena observación al momento de tratar de responder la pregunta 6 les dio de inmediato la respuesta de la pregunta 7. De antemano ellos conocían que su rombo tenía dos ejes de simetría y de esa manera no dudaron en responder que BD siempre pasa por la mitad del segmento CE.

5.1.2 Dialogo 2.

Participantes: Gabriela, Uriel (**Gabi**, **Ur**) y Profesor (**Prof**).

5.1.2.1. Introducción:

En la pregunta 8 se espera que los estudiantes lleguen a que los triángulos que se les pide que comparen son congruentes y de allí puedan responder sin mucha dificultad las preguntas posteriores. Su enunciado dice lo siguiente: Deja fijo el artefacto y traza con tu "*pincelín*" el segmento KC. ¿Cómo son los triángulos KED y KCD entre ellos? Justifica tu respuesta.

Los alumnos tratan de responder la pregunta 8, donde **Gabi** menciona que los triángulos KED y KCD son congruentes. Ella trata de convencer a su compañero del por qué dichos triángulos son congruentes así como explicárselo también al profesor.

Gabi:	*¿Cómo son los triángulos QED?...pero si de este lado no se hace triángulo (señala los puntos mencionados).*
Ur:	*KED (corrigiendo a Gabi la cual dijo QED. Señala también los puntos).*
Gabi:	*Y KCD pero jamás me dijo que trazáramos este lado. Bueno se supone que son… ¡espera espera!, ¿cómo se llaman cuando son?... son congruentes. Son dos triángulos congruentes porque has de cuenta que…*
Ur:	*No, pero mira este lado está más chico (señalando el lado EK).*
Gabi:	*Pero por aquí va la línea esta, esta de aquí que parte de la línea de en medio, es la línea fija (traza el segmento KE). Entonces si marcas esto de aquí (segmento ED).*
	…(Trazan los triángulos KED y KCD con ayuda de su artefacto y de su pincelín).
Gabi:	*Este lo doblas y quedan iguales (simula doblar los triángulos KED y KCD por BD), entonces los dos triángulos son congruentes.*
Ur:	*No, es que no serían congruentes porque si comparáramos los triángulos quedarían así (señala que los triángulos no quedarían uno sobre otro).*
Gabi:	*Al levantarlos, los dos picos quedarían arriba, quedarían igual (con sus manos indica que dichos puntos se tocan).*
Ur:	*Sí pero, ¿qué te están diciendo? (refiriéndose a la pregunta).*
Gabi:	*Deja fijo el artefacto, ¿cómo son los triángulos KCD y KDE? (etiqueta los triángulos que previamente trazó). En este con este (indica los triángulos a comparar).*
Prof:	*¿Por qué me dices que son triángulos congruentes?*
Gabi:	*No me acuerdo como se dice cuando los dos son iguales, que están opuestos sólo por una diagonal.*
Prof:	*A ver, ¿este lado cómo es para los dos triángulos, el KD?*
Gabi:	*El KD es igual.*
Prof:	*¿Es igual para los dos?*
Gabi:	*Sí.*
Ur:	*Para los dos.*
Prof:	*¿Por qué?*

Ur:	*Porque mide lo mismo.*
Prof:	*Concéntrense sólo en el segmento KD, ¿qué pasa con KD?*
Gabi:	*Es la diagonal media.*
Prof:	*En estos dos triángulos ¿qué pasa con KD (señalo el segmento)?, ¿es igual?*
Gabi:	*Es un cateto de ambos.*
Prof:	*¿Cómo es el lado KC con el KE?*
Gabi:	*¿KC con KD?*
Ur:	*Con KE*
Gabi:	*Son… ¿cómo se dice?*
Prof:	*A ver ¿por qué no los mides?*
Ur:	*Son iguales*
Gabi:	*Mide 5 (CK), se supone que también mide 5 (KE)…son iguales (mide los segmentos). De CK y KE es igual también (afirmando). Por lo tanto quedaría que de C a D y de D a E…*
Ur:	*Deben de medir lo mismo.*
Gabi:	*Miden lo mismo (CD=DE), entonces los dos triángulos son iguales solamente que KD es un eje de simetría para los dos. Es el eje de simetría de una figura y es por eso que se forman dos triángulos.*
Prof:	*Por eso son ¿cómo me dijiste?*
Gabi:	*Congruentes…*

5.1.2.2 Observaciones

- **Gabi** usa su artefacto para trazar los triángulos KED y KCE. Remarca los lados de los triángulos con su pincelín por debajo del artefacto.

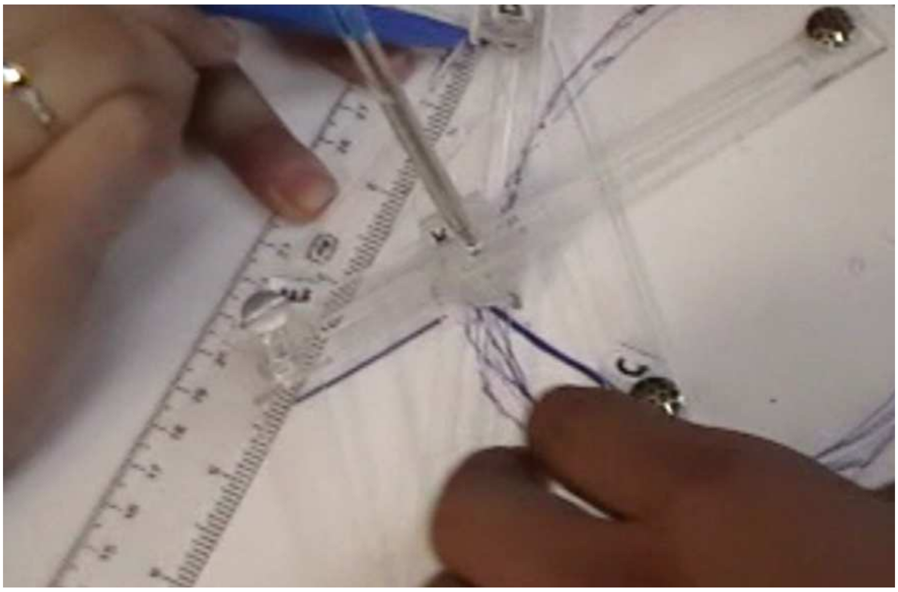


Figura 11. Integrantes del Equipo 3 remarcando los triángulos KED y KCE

- Una vez qué quedan remarcados los lados de sus triángulos opta por quitar su artefacto de la hoja de dibujo. Prefiere trabajar con los triángulos que dibujó previamente, etiquetando los puntos correspondientes con los que tenía el artefacto en dicha posición.

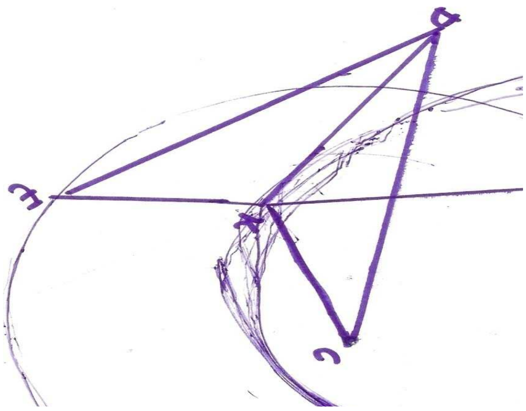
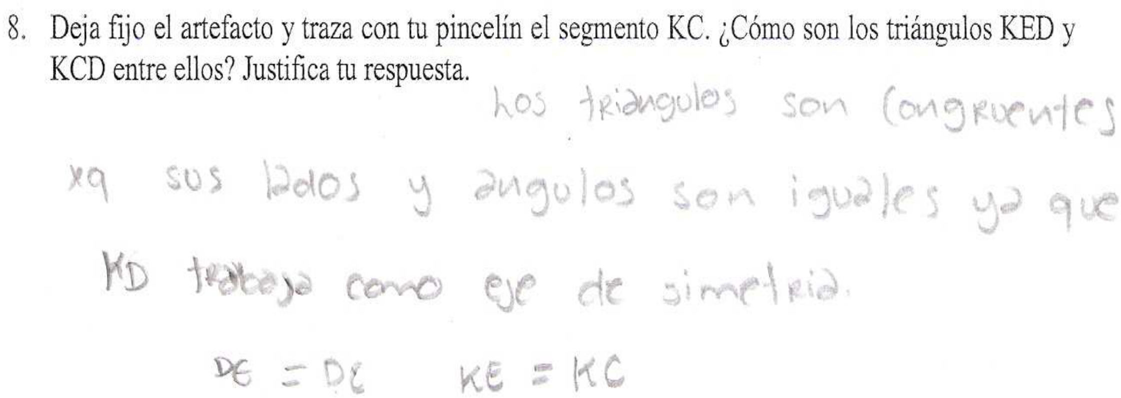


Figura 12. Triángulos remarcados y etiquetados en la hoja de dibujo del Equipo 3

- Los integrantes de este equipo sabían por su respuesta de la pregunta 7 que el segmento BD es un eje de simetría. Tratan de justificar que los triángulos KED y KCD son congruentes porque dicho segmento (BD) los separa y al doblarlos por allí los triángulos van a pegarse el uno con el otro. Al analizar las evidencias recabadas se deduce que intuitivamente trataban de responder de esa manera, al saber que la figura era un rombo, que tenía como ejes de simetría a los segmentos BD y EC y que ED y CD son barras del artefacto que miden lo mismo (esto lo conocieron en la respuesta de la primera pregunta). Además también conocían que el punto K se desplazaba sobre el segmento BD. Su razonamiento tuvo que ver con todo lo anterior y se dieron cuenta de que al medir lo mismo las barras ED y CD y saber que dichos segmentos cambiaban de longitud por estar conectados al punto K, los segmentos EK y CK cambiaban de la misma manera y podían medir lo mismo.
- Intuitivamente y por observación pudieron darse cuenta de que los segmentos EK y CK eran iguales, antes de sugerirles que midieran dichos segmentos Uriel respondió inmediatamente que dichos segmentos eran iguales, aún cuando **Gabi** media los segmentos, **Ur** seguía mencionando que deberían de medir lo mismo.
- Les costó mucho trabajo tratar de justificar su respuesta, aún cuando habían contestado bien las preguntas anteriores a esta.



8. Deja fijo el artefacto y traza con tu pincelín el segmento KC. ¿Cómo son los triángulos KED y KCD entre ellos? Justifica tu respuesta.

los triangulos son congruentes xq sus lados y angulos son iguales ya que KD trabaja como eje de simetria.

DE = DC KE = KC

Figura 13. Respuesta escrita del Equipo 3 en sus hojas de trabajo.

5.1.2.3. Conclusiones del dialogo 2.

Los integrantes de dicho equipo conocen el término “congruencia” y saben en qué situaciones pueden utilizarlo, pero también, a través de la evidencia recabada se observó que no recuerdan los criterios de congruencia distintos al LLL, se deduce que esto ocurre ya que en la actividad los alumnos pueden medir los segmentos con regla.

5.1.3. Dialogo 3.

Participantes: Gabriela (**Gabi**), Uriel (**Ur**) y Profesor (**Prof)**.

5.1.3.1 Introducción:

Tratan de responder la pregunta 11 así que realizan los trazos realizados en dicha pregunta. Conforme los van realizando los trazos van haciendo una comparación entre ellos y comentan sus observaciones.

Gabi:	*Bueno ¿este cómo se mueve?, ¿respecto al primer trazo?, ¿cuál fue el primer trazo?*
Prof:	*El primero que hicieron en toda la actividad.*
Gabi:	*¿La cosa que nos quedó toda chueca?*
Prof:	*Aja, la chueca (risas).*
	…(Realizan el trazo segundo trazo sugerido)
Gabi:	*Aquí ya van como en un movimiento circular (refiriéndose al segundo trazo), si ¿no?*
Ur:	*A ver…estaba así (tratando de colocar el artefacto en los puntos donde lo fijaron para realizar el segundo trazo).*
Gabi:	*Observa el trazo (lee parte de la pregunta 11), entre más cerca están los dos puntos más circular es la figura ¿no? Entre más cerca están ambos puntos fijos más circular es la figura, porque cuando estaban separados como que hacían como una elipse.*
Ur:	*Sí.*
Gabi:	*Entonces cuando los fuimos acercando como que más redonda se va haciendo. Entonces como nos dice que pongamos luego A sobre C va a ser el mismo punto (refiriéndose a que A sobre C será solo un punto único), entonces solamente será como si tuviéramos un compás girando y entonces ya va a hacer un círculo.*
Ur:	*Ay, hace lo mismo (mientras realiza el tercer trazo con A sobre C).*
	… (Gabi escribe la pregunta y Ur termina de realizar el tercer trazo)

5.1.3.2 Observaciones

- La pregunta 11 es la siguiente: Acerca el punto A al punto C, mueve el artefacto y observa el trazo. Después coloca el punto A sobre el punto C, mueve el artefacto y observa el trazo. ¿Cómo se comportaron estos trazos en comparación con el primer trazo realizado en la actividad? La finalidad de esta pregunta es que los alumnos se den cuenta de cómo cambia la elipse cuando la distancia focal va siendo menor (de esta manera se afecta la excentricidad). No se planteó en las hojas de trabajo el otro extremo, es decir cuando los focos se alejan puesto que el artefacto es incapaz de realizar el trazo en dichas condiciones.
- Gabi se dio cuenta de que al colocar el punto A sobre el C el artefacto dibujaría una circunferencia (aunque ella menciona un círculo) aún sin realizar el trazo. Intuitivamente se dio cuenta de que el segmento AK funcionaba como un radio

al mantener fijo el punto A aunque no lo menciona y en cambio dice que el artefacto funciona en esas condiciones como un compás.

- En el diálogo pueden leerse algunas buenas ideas que tienen los integrantes de este equipo, y casi logran plasmar todo lo mencionado en el diálogo en sus hojas de trabajo.

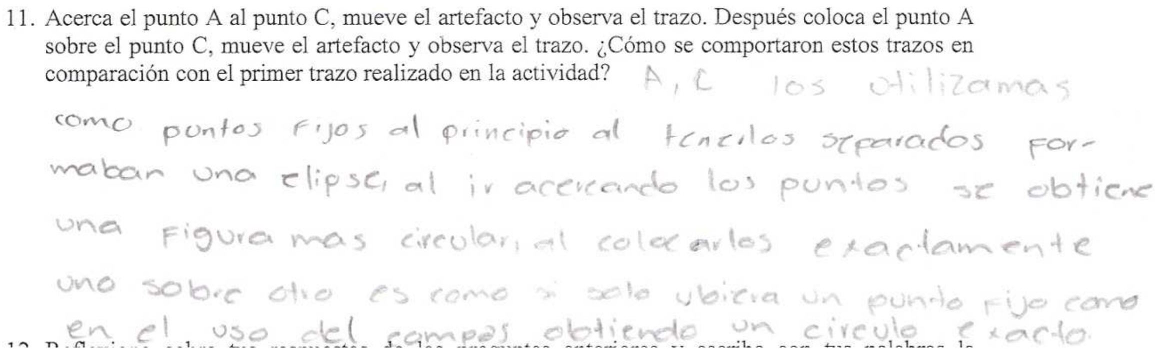

11. Acerca el punto A al punto C, mueve el artefacto y observa el trazo. Después coloca el punto A sobre el punto C, mueve el artefacto y observa el trazo. ¿Cómo se comportaron estos trazos en comparación con el primer trazo realizado en la actividad? A, C los utilizamos como puntos fijos al principio al tenerlos separados formaban una elipse, al ir acercando los puntos se obtiene una figura mas circular, al colocarlos exactamente uno sobre otro es como si solo ubicara un punto fijo como en el uso del compas obtiendo un circulo exacto.

Figura 14. Respuesta de estudiantes a la pregunta 11.

5.1.3.3. Conclusiones

A través de la observación del movimiento del artefacto, Gabi dedujo lo que sucedía cuando alejabas los puntos fijos o los acercabas aún sin realizar dichos trazos. El artefacto por sí solo y mediante su observación es capaz de brindar valiosa información para deducir características particulares de la figura que traza. De esta manera Gabriela puede asociar su experiencia moviendo el artefacto con los temas vistos en clase correspondientes a la elipse, en específico con esta pregunta puede llegar a redescubrir y asociar el concepto de excentricidad mediante sus observaciones.

5.1.4 Dialogo 4

Participantes: Gabriela (**Gabi**), Uriel (**Ur**) y Profesor (**Prof**).

5.1.4.1 Introducción

Tratan de responder la pregunta 12 con sus palabras. Revisan las respuestas de preguntas anteriores, mencionan lo que sucedía cuando movían el artefacto y mencionan algunos elementos de la elipse. El proceso es largo y lleno de cuestiones interesantes. Gabi menciona la definición de elipse a través de un hilo y a partir de eso trata de definir con su compañero lo que es la elipse. A través de mover el artefacto y mediante la observación de él trato de que los alumnos aclaren sus ideas y respondan de la mejor manera posible.

Gabi:	*Para formar una elipse necesitaremos dos puntos fijos.*
Ur:	*Sí.*
Gabi:	*Entonces la definición de elipse es…*
Ur:	*¿Te dice que pongas la definición?*
Gabi:	*Aja. Escribe con tus palabras la definición de elipse…*
	…(Pasan un tiempo prolongado pensando)
Ur:	*Pero dice que reflexiones sobre tus respuestas anteriores (las señala en sus hojas).*
Gabi:	*Y escribe con tus palabras la definición de elipse. Nosotros siempre estuvimos manejando los dos puntos, entonces cuando girábamos siempre…*
Ur:	*Cuando estaban más separados, salía más… ¿cómo se dice?...la elipse… ¿cómo se dice?*

Gabi:	*Ovaladita.*
Ur:	*Y si los acercábamos salía más …*
Gabi:	*Más circular se iba haciendo. Entonces es la distancia de entre dos… no… teniendo dos puntos fijos como referencia…*
Ur:	*Como nos hizo el maestro con el hilito.*
Gabi:	*Aja.*
Ur:	*¿Pero cómo se explica?*
Gabi:	*Pues es que se supone que tienes dos puntos fijos de referencia, uno fijo y otro en movimiento, porque teníamos este así (pone 2 lápices simulando que son los focos)… ¡nooo!, los dos estaban fijos. Tenemos esto aquí así ¿no? (dibuja dos puntos en su hoja de trabajo), entonces nosotros tenemos este punto que giraba, por ejemplo aquí (lo dibuja en medio de los dos puntos anteriores). Entonces como en el hilito, tienes un punto fijo y has de cuenta que tuvieras dos, entonces nada más… al girarlo esto se va haciendo como ondular (realiza el trazo de la elipse) y este también se va abriendo hacía acá y este se cierra hacia acá (señala el movimiento del trazo respecto al foco que toma como referencia) cuando este va acá este se abre hacía acá. Entonces tenemos tres puntos.*
Ur:	*¿Tres?*
Gabi:	*Sí. Dos fijos y uno en movimiento. Entonces, al mover el punto que está en medio de los dos, da forma a una figura elíptica (en su simulación el punto medio era el punto móvil y los puntos extremos los focos).*
Ur:	*¿Por qué?*
Gabi:	*Porque mientras aumenta de un lado del otro va disminuyendo.*
Ur:	*Sí, sí ponle que la distancia de uno aumenta mientras la distancia de otro disminuye*
Gabi:	*Pero le pongo lo de los 3 puntos ¿no? Que tenemos dos puntos fijos y uno en movimiento.*
	…(Piensan en voz baja)
Gabi:	*Es una figura geométrica en la que actúan dos puntos fijos llamados focos.*
Ur:	*Y al otro que tenemos, ¿cómo se le podría decir?*
Gabi:	*Y uno llamado… ¿vértice?, ¿cómo se llama el del centro?, ¿vértice?*
Ur:	*No… y uno… ¿cómo se le puede decir?*
Gabi:	*Y un punto en movimiento que va marcando… ah es que ¿cómo se le puede decir a un punto en movimiento?*
Ur:	*Pregúntale a Arturo.*
Gabi:	*Héctor, cuando teníamos la elipse ves que teníamos dos puntos fijos que eran los focos y teníamos cuando trazábamos con el hilito aquí (señala su dibujo), ¿cómo se llama el punto que queda en el hilito, el punto qué va marcando el recorrido?, ¿o nada más es un simple punto que marca el recorrido?*
Prof:	*Sí, es un punto.*
Gabi:	*Un punto a cualquier distancia marcando el recorrido que forma la elipse.*
Prof:	*Aja pero ¿cómo es ese punto?... a ver tienes tu hilo aquí y estos son tus focos (hago mi simulación en su hoja de dibujo)…pero si te fijas lo que hace este aparato (contrastando en artefacto con su definición de hilo)…*
Gabi:	*Este vendría siendo supongamos que el hilito que tenemos.*
Prof:	*Aja, tú me dices que este es él…*
Gabi:	*Estos eran nuestros puntos fijos. Has de cuenta que estos son nuestros focos, los dos puntos fijos (señala los puntos A y C en el artefacto fijo) entonces este lo estamos manejando como si fuera el hilito (el artefacto) que al girarlo va marcando nuestra forma de la elipse pero se encuentra respectivamente a una distancia de los focos.*
Prof:	*Aja, ¿y cómo es esa distancia?, ¿cómo es la suma, por ejemplo, de aquí a aquí es*

	una distancia (de K a A) y de aquí a aquí es la otra (de K a C)? Conforme lo gira (el artefacto) ¿qué pasa con esas distancias?
Gabi:	*Aumentan o disminuyen: aumentan de un lado y disminuyen de otro.*
Prof:	*Pero al final de todo ¿la suma es distinta en cada movimiento?*
Gabi:	*No, es la misma.*
Ur:	*Aja, es la misma.*
Gabi:	*Acuérdate que es la misma (recordándomelo).*
Prof:	*Exacto, es la misma porque están marcando KA y KC. Entonces lo que tú me dices es que esta es tu cuerda, este es el punto que dibuja en tu cuerda y estos son tus focos (señalo cada parte en el artefacto)…*

5.1.4.2 Observaciones

- En esta pregunta se espera que los alumnos retomen detalles de las preguntas anteriores y mediante la observación del artefacto puedan dar una definición de elipse que se aproxime a la definición formal de elipse como lugar geométrico.
- Algo notable fue que Uriel hubiera mencionado la definición de elipse a través de un hilo. Gabriela intentó dar una explicación de dicha definición primero auxiliándose de dos lápices y después rayando en su hoja de respuestas. En su segunda simulación lo que en otras palabras ella trata de explicarle a Uriel es que cuando jala de la cuerda con el lápiz, mientras lo mueve, uno de los segmentos de un punto de los que ella marcó (foco) al lápiz aumenta de longitud mientras el otro segmento (del otro punto o foco al lápiz) disminuía, y que si movía el lápiz en sentido contrario al primer movimiento ocurría lo contrario, es decir, el segmento que había disminuido de longitud ahora aumenta y el que aumentaba ahora disminuye.
- Algo muy importante y que ninguno de los dos integrantes de este equipo observó, tomó en cuenta o descubrió fue que el movimiento del artefacto era similar al de la definición de elipse por medio de una cuerda al que hicieron mención. De haberlo hecho hubieran respondido inmediatamente dicha pregunta.

Figura 15. Estudiantes trabajando en la pregunta 12.

- Después de eso los integrantes comenzaron a identificar lo puntos importantes de la elipse en su artefacto. Mencionaron que los puntos fijos A y B eran sus focos, que el punto móvil K es el que trazaba la elipse. A través de la observación del artefacto y del uso de algunas preguntas anteriores pudieron dar una definición de elipse, en función del artefacto.

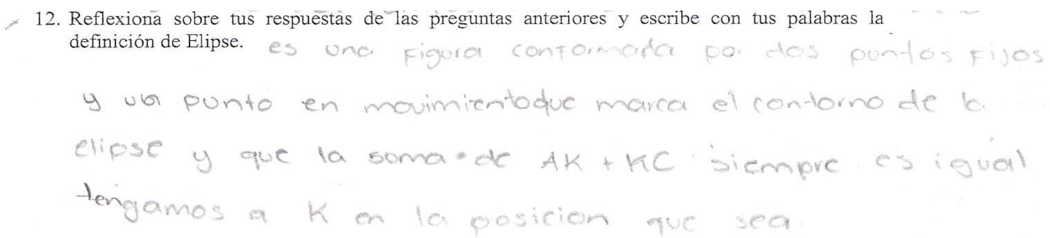

12. Reflexiona sobre tus respuestas de las preguntas anteriores y escribe con tus palabras la definición de Elipse. es una figura conformada por dos puntos fijos y un punto en movimiento que marca el contorno de la elipse y que la suma de AK + KC siempre es igual tengamos a K en la posicion que sea

Figura 16. Respuesta de estudiantes a la pregunta 12.

5.1.4.3. Conclusiones del dialogo 4.

Los alumnos fueron obteniendo información esencial a lo largo de toda la actividad. Fueron incapaces de entrelazar toda esa información para brindar la definición de elipse. Aún así, era suficiente que solo observaran sus respuestas de la pregunta 8 en adelante para dar una definición. En este caso, Gabriela y Uriel conocían la definición de elipse por medio de una cuerda y un lápiz, la cual tiene similitudes con el movimiento del artefacto. Una vez que lograron comparar su definición a través de una cuerda con el comportamiento del artefacto durante su movimiento lograron dar su definición de elipse.

6. Conclusiones Globales

El aprendizaje cooperativo es un enfoque de enseñanza, en el cual se procura utilizar actividades en las cuales es necesaria la ayuda entre estudiantes, ya sea en pares o grupos pequeños, dentro de un contexto enseñanza-aprendizaje. El aprendizaje cooperativo se basa en que cada estudiante intenta mejorar su aprendizaje y resultados, pero también el de sus compañeros.

Cabe mencionar que a los alumnos se les dificulta trabajar en equipo puesto que en ocasiones no pueden asimilar las opiniones de sus compañeros. En determinadas partes de las actividades así como en determinados equipos se observaron fragmentos de debate científico.

Para cada uno de los instrumentos, los estudiantes hicieron uso de recursos matemáticos como la utilización de representaciones algebraicas, lenguaje geométrico y transformación del lenguaje cotidiano al lenguaje matemático, como parte fundamental en la construcción del conocimiento.

Trabajar con instrumentos concretos en el aprendizaje es viable ya que, se observó que la mayoría de los estudiantes se motivan trabajando con ellos, es una dinámica muy distinta a la de una clase cotidiana, además el concepto en cuestión es construido por ellos mismos por lo que este puede ser más duradero.

En cuanto a la manipulación del artefacto, al principio les costó trabajo moverlo, lo cual se vio reflejado en sus trazos, los cuales quedaban muy chuecos. Después de realizar varios trazos, los alumnos obtenían práctica y las elipses les comenzaron a quedar bien. Un problema para los alumnos fue que en ocasiones se salían las tachuelas con las que se fijaban los puntos fijos (focos) y esto les perjudicaba en la estética de sus dibujos.

De acuerdo a los diálogos y respuestas que los integrantes del equipo hicieron, consideramos que ellos comprendieron cuál es modelo inmerso en el artefacto matemático, de hecho siguiendo el orden de las preguntas descritas se pudo constatar que los estudiantes pudieron seguir los pasos necesarios para llevar a cabo la demostración matemática, ahora bien posterior a este trabajo se les presentó a ellos la demostración matemática previamente realizada y se constato que ellos entendieron los pasas seguidos y cómo se llega a demostrar que el artefacto utilizado traza una elipse.

Bibliografía

Artobolevski, I. (1975). *Mecanismos en la técnica moderna.* Tomo 2, parte 1. Ed. Mir.

Arzarello, E, & Robutti, O. (*2004*). Approaching functions through motion experiments. Educational Studies in Mathematics, 57(3).

Bartolini, M. (2007) *Experimental mathematics and the teaching and learning of proof.* Research funded within the PRIN 2005019721 on "Meanings, conjectures, proofs: from basic research in mathematics education to curricular implications.

Bartolini, M. et al. (2004). *The MMLAB: a laboratory of geometrical instruments.* Comunicazione orale all'interno del minisimposio Applicazioni della Matematica all'industria culturale.

Bartolini, M. et al. (2003). *Learning Mathematics with tools.* U.M.I. (the association of school and university teachers of Mathematics), The paper is a part of the book that is presented at ICME.

Boero, P.; Garuti, R. and Mariotti, M. (1996). 'Some dynamic mental processes underlying producing and proving conjectures', *Proceedings of PME-XX, Valencia, vol. 2*, pp. 121-128.

Boero,P.; Pedemonte, B. & Robotti, E.: (1997). 'Approaching Theoretical Knowledge Through Voices and Echoes: a Vygotskian Perspective', *Proc. of PME-XXI, Lahti, vol. 2*, pp. 81-88.

Dennis, D. (1995). *Historical Perspectives for the Reform of Mathematics Curriculum: Geometric Curve Drawing Devices and Their Role in the Transition to an Algebraic Description of Functions*. PhD Dissertation, Cornell University.

Duval, R. (1995). *Semiosis et Penseé Humain*. Ed. Peter Lang S.A. 1995. Traducción Universidad del Valle, Instituto de Educación y Pedagogía 2001.

Dyck, W. (1994). *Katalog matematischer und matematisch-physikalischer Modelle, Apparate und Instrum*ente. Georg Olms Verlag, Zurich, New York.

Hoyos, V. (2006). *Funciones Complementarias de los artefactos en el aprendizaje de las transformaciones geométricas en la escuela secundaria.* Enseñanza de las Ciencias, 2006, 24(1), pp. 31–42.

Hoyos y Falconi. (2005). *Instrumentos y matemáticas: historia, fundamentos y perspectivas educativas*. Ed. UNAM.

Hoyos, V., Capponi, B. y Génevès, B. (1998). *Simulation of drawing machines on Cabri-II and its dual algebraic symbolization*, en *Proceedings of CERME1*. Alemania: Universidad de Osnabrueck.

Jill, Vincent, et al. (2002). *Mechanical linkages as bridges to deductive reasoning: a comparison of two environments.* PME 26. Pp 313-320.

Jorgensen, L. (1999). *Involving Midlle Students in Research Design.* Proceedings of CSCL99.

Kempe, A. (1877). *How to Draw a Straight Line.* London, England: Macmillan and Co.

Mariotti, M.A., Bartolini Bussi, M., Boero, P., Ferri, F. y Garuti, R. (1997). *Approaching Geometry Theorems in Contexts: From History and Epistemology to Cognition*, en *Proc. XXI PME Int. Conf.*, 1, pp.180-195, Finlandia: Lathi.

Papert, S (1982). *Alas para la mente. Galápago*. Buenos Aires. 1982.

Piaget, J. (1950). *Introducción a la Epistemología Genética. "El pensamiento matemático".* Buenos Aires: Paidós, 1975.

Schooten, F. Van (1657). *Exercitationum mathematicarum liber IV, sive de organica conicarum sectionum in plano descriptione.* Lugd. Batav ex officina J. Elsevirii.

Verillon, P. y Rabardel, P. (1995*). Cognition and Artefacts: A Contribution to the Study of Thought in Relation to Instrumented Activity.* European Journal of Psychology of Education*,* 10(1), pp. 77-101.

José Carlos Cortes Zabala. Profesor Investigador Facultad de Físico Matemáticas Universidad Michoacana, México; Presidente de AMIUTEM. Responsable de la Red Académica "Uso de la Tecnología para la enseñanza de las Matemáticas".
jcortes@umich.mx

Graciela Eréndida Nuñez Palenius. Profesora Investigador Facultad de Ing. Química Universidad Michoacana, México; Coordinadora de la Maestría "Enseñanza de las Ciencias.
erepalenius@hotmail.com

Christian Morales Ontiveros. Profesor Investigador Facultad de Físico Matemáticas Universidad Michoacana, México. **chrismora23@gmail.com**

UNIÓN
REVISTA IBEROAMERICANA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA
www.fisem.org/web/union

ISSN: 1815-0640
Número 35. Septiembre de 2013
páginas 135-143

El rincón de los problemas

Uldarico Malaspina Jurado
Pontificia Universidad Católica del Perú
umalasp@pucp.edu.pe

Nuevos horizontes matemáticos mediante variaciones de un problema

Problema

En la bodega A, venden paquetes de 6 vasitos de yogur por S/. 8,00 y cada vasito individual a S/. 1,50; pero en la bodega B, venden el mismo producto en paquetes de 3 vasitos por S/.4,00 y cada vasito individual a S/. 1,60. ¿Cuánto es el pago mínimo que puede hacerse por la compra de n vasitos de yogur, según la información dada? Explicitar la función correspondiente.

Este problema fue propuesto como un “problema pos” luego de trabajar en un taller con profesores de matemáticas de educación secundaria, en torno al siguiente episodio en clase:

En el grupo de estudios de matemáticas, el profesor propone el siguiente problema a los alumnos:

En la bodega A, venden paquetes de 6 vasitos de yogur por S/. 8,00 y cada vasito individual a S/. 1,50; pero en la bodega B, venden el mismo producto en paquetes de 3 vasitos por S/.4,00 y cada vasito individual a S/. 1,60. ¿Hay una sola forma de comprar 9 vasitos de yogur gastando lo menos posible?¿Cuál?

Después de unos minutos:

- La mayoría dice que sí, que solo hay una forma.
- Carmen dice que hay muchas formas de comprar 9 vasitos de yogur.
- Toño dice que hay dos formas de comprar 9 vasitos de yogur, gastando lo mismo.
- Sara dice que el problema es muy fácil.

En el *VII Congreso Iberoamericano de Educación Matemática (VII CIBEM)*, recientemente realizado en Montevideo, expuse con pormenores mi propuesta de estrategias para estimular en los profesores el desarrollo de la capacidad de crear problemas. Parte de esa propuesta es crear problemas haciendo variaciones a un problema dado, en el marco de un episodio en clase (como el presentado líneas arriba). Así, se propone a los profesores que en trabajo inicialmente individual y luego grupal, creen dos problemas:

- uno con el propósito de ayudar a los alumnos a aclarar su comprensión del problema dado y a llegar a una solución correcta del mismo. A tal problema se le denomina "*problema pre*".
- y otro cuya solución se facilite por haber resuelto correctamente tanto el "problema pre" como el problema dado en el episodio descrito; un problema con el propósito de retar a los alumnos a ir más allá de una solución correcta del problema dado. A tal problema se le denomina "*problema pos*".

Con el propósito de compartir experiencias y reflexiones en torno a la creación de problemas de matemáticas, a continuación transcribo y comento dos de los "problemas pre" propuestos en los grupos de trabajo en el Mini curso que desarrollé en el VII CIBEM.

Problema pre_1

En la bodega A, venden paquetes de 6 vasitos de yogur por S/. 8,00 y cada vasito individual a S/. 1,50; pero en la bodega B, venden el mismo producto en paquetes de 3 vasitos por S/.4,00 y cada vasito individual a S/. 1,60.

1) *¿Cuánto se paga por comprar 9 vasitos en la bodega A?*
2) *¿Cuánto se paga por comprar 9 vasitos en la bodega B?*
3) *¿Cuánto se paga por comprar 9 vasitos combinando un paquete en la bodega A y un paquete en la bodega B?*

Problema pre_2

En un kiosco venden cajas de alfajores de 6 unidades a S/. 10 y de 12 unidades a S/. 20. ¿De cuántas maneras puedo comprar 18 alfajores? ¿Cuánto gasto en cada una de las posibilidades? ¿Hay alguna más barata?

Comentarios

1. Tendremos en cuenta los elementos básicos en un problema: *Información, Requerimiento, Contexto y Entorno matemático* (comentados en *El rincón de los problemas* del número anterior de *UNIÓN*).
2. Podemos observar que en relación al problema dado en el episodio descrito, en el primer problema no se ha modificado la información, el contexto ni el entorno matemático; solo se ha modificado el requerimiento, considerando diversos casos específicos de compra de 9 vasitos de yogur. Es clara la intención de hacer evidente las diversas posibilidades, para que luego se entienda lo que se pide en el problema inicial, mostrado en el episodio en clase.
3. En el segundo problema se ha modificado la información y el requerimiento. En la información se mantiene la misma estructura que en el problema del episodio, pues el precio de la caja de 12 alfajores es el doble del precio de la caja de 6 alfajores. El requerimiento se hace con una cantidad que se

relaciona con la información de manera similar a la que se relaciona en el problema del episodio. Es decir, se da información de precios *Q* y 2*Q* de paquetes de *n* y 2*n* objetos respectivamente y se hace un requerimiento sobre la compra de 3n objetos (*Q* y *n* representan números naturales). Si bien el contexto sigue siendo extra matemático, se ha modificado la presentación de tal contexto, pues ya no se trata de vasitos de yogur sino de alfajores. Cabe mencionar que el grupo que propuso este problema estaba integrado por docentes de Argentina, Uruguay y Paraguay, y que los alfajores son parte de las golosinas típicas en estos países. La situación es más sencilla que la del episodio, por no haber precios unitarios y también es clara la intención de hacer evidente las diversas posibilidades de comprar una cantidad fija de alfajores, con el añadido explícito de pensar sobre la existencia de una opción más barata.

4. En el problema del episodio y en el problema 1, el entorno matemático es el mismo: operaciones de multiplicación y adición de números enteros positivos; de multiplicación de un número entero positivo por un decimal positivo; y de adición de números enteros positivos y decimales positivos. En el problema 2, el entorno matemático es de operaciones de adición y multiplicación de números enteros positivos (ya no se considera operaciones con números decimales).
5. La solución del primer problema, mostrada por el grupo que lo creó es la siguiente:

   - *Bodega A, 9 vasitos: S/.12,50*
   - *Bodega B, 9 vasitos: S/. 12,00*
   - *Bodega A y Bodega B: 6 vasitos + 3 vasitos: S/.8 + S/.4 = S/. 12.*

   Esto nos hace pensar que la intención del grupo fue pedir cuánto es *lo mínimo* que se paga por comprar 9 vasitos de yogur en cada uno de los tres casos que presenta. Sin embargo, el problema, tal como está redactado, sin referirse al pago mínimo, ofrece otras interesantes posibilidades. Así, para responder a las preguntas 1 y 2 se deben considerar todas las posibles formas de comprar 9 vasitos de yogur en la bodega correspondiente. Para responder a la pregunta 1, hay dos formas de comprar 9 vasitos de yogur en la bodega A:

   1.1 Un paquete de 6 vasitos, a S/. 8, y 3 vasitos individuales a S/. 1,50 cada uno. En tal caso se paga un total de S/. 12,50.

   1.2 9 vasitos individuales a S/. 1,50 cada uno. En tal caso se paga un total de S/. 13,50.

   Análogamente, para responder a la pregunta 2, hay cuatro formas de comprar 9 vasitos de yogur en la bodega B:

   2.1 3 paquetes de 3 vasitos, a S/. 4 cada uno. Se paga S/. 12.

   2.2 2 paquetes de 3 vasitos y 3 vasitos individuales a S/.1,60 cada vasito. Se paga S/. 2 x 4,00 + S/.3 x 1,60. Total: S/. 12,80.

2.3 1 paquete de 3 vasitos y 6 vasitos individuales. Se paga un total de S/. 13, 60.

2.4 9 vasitos individuales. Se paga un total de S/. 14,40.

La pregunta formulada en la parte 3 del problema sí lleva a una sola posibilidad, que es la que mostró el grupo.

6. Este problema (el primero) fue puesto a consideración de otro grupo de profesores en otro taller sobre creación de problemas, y propusieron que una manera de formular las preguntas 1 y 2 para que las respuestas sean las que dio el grupo que las creó, son:

   1’) ¿Cuánto es lo mínimo que se puede pagar por la compra de 9 vasitos en la bodega A?

   2’) ¿Cuánto es lo mínimo que se puede pagar por la compra de 9 vasitos en la bodega B?

7. Lo expuesto en los comentarios 5 y 6 nos suscita reflexiones como las siguientes, en relación a la redacción del texto de un problema creado:

   - Poner especial atención para que lo que se escribe refleje exactamente lo que el o los autores del problema tienen en mente, sobre todo en el requerimiento.
   - Es muy importante resolver el problema creado, con mente abierta a las interpretaciones posibles, sobre todo de la información y el requerimiento, según lo expresado en el enunciado. Suele ocurrir que quien crea un problema, considera como interpretación y solución solo la que tiene en mente al momento de crearlo y no “toma distancia” para ver otras posibles interpretaciones y soluciones a lo que dice en el enunciado del problema.
   - Un problema creado inicialmente con un propósito, puede realmente abrir posibilidades didácticas y matemáticas muy interesantes, más allá de tal propósito, en las que no se pensó al momento de crearlo.

8. La solución mostrada por el grupo que creó el Problema pre-2, fue:

   Opciones:

   - *3 cajas de 6 alfajores: 3 x S/. 10 = S/. 30*
   - *1 caja de 12 alfajores y 2 cajas de 6 alfajores: S/. 20 + S/. 10 = S/. 30*

   En las dos opciones se paga lo mismo: S/. 30.

   En efecto, según la información dada, estas son las dos únicas posibilidades y ninguna es más barata que la otra.

En cuanto a “problemas pos”; es decir a aquellos posteriores a la comprensión y solución correcta de los “problemas pre” y del problema del episodio, creados con la intención de que quienes lo resuelvan amplíen el panorama matemático que les brinda el problema del episodio, a continuación transcribo y comento dos problemas:

el que creó uno de los grupos y se comentó en la fase de socialización en la segunda sesión del Mini curso desarrollado en el VII CIBEM; y el que propuse en otro curso-taller con profesores de secundaria en el Perú y que llevó al "descubrimiento" de una función que no está considerada en el curriculum de la educación secundaria en el Perú (Es el problema con el que se comienza el presente artículo.)

Problema pos_1

Con la misma información dada en el problema del episodio,

a) Dar cuatro cantidades distintas de vasitos de yogur, para las cuales se obtenga el menor precio por vasito.

b) ¿Qué característica común tienen los números que respondió en (a)?

c) ¿Hay más cantidades que pueden ser respuesta de (a)? ¿Puede generalizar?

d) Si la cantidad de vasitos a comprar no es múltiplo de 3, ¿en cuál de las dos bodegas es más barato?

Problema pos_2

En la bodega A, venden paquetes de 6 vasitos de yogur por S/. 8,00 y cada vasito individual a S/. 1,50; pero en la bodega B, venden el mismo producto en paquetes de 3 vasitos por S/.4,00 y cada vasito individual a S/. 1,60. ¿Cuánto es el pago mínimo que puede hacerse por la compra de n vasitos de yogur, según la información dada? Explicitar la función correspondiente.

El primero de estos problemas induce a la generalización, considerando múltiplos de 3 y múltiplos de 6 y una oportunidad para recordar y usar el hecho que si un número es múltiplo de 6 entonces es múltiplo de 3, pero que lo recíproco no es cierto. La parte (d) lleva a la construcción cuidadosa de una función que – según el contexto dado – a cada número natural que no es múltiplo de 3 le hace corresponder la letra A o la letra B. Es interesante hacer la lista de asignaciones considerando, por ejemplo cantidades (enteras) de 1 a 16 e ir observando regularidades. Notar que las autoras del problema cuidaron no considerar los múltiplos de 3, porque, por ejemplo, por 6 vasitos de yogur se paga igual en la bodega A y en la bodega B y ya no se tendría la asignación única para el número 6, como lo exige la definición de función. Sin embargo, 9 es múltiplo de 3 y la compra de 9 vasitos es más barata en la bodega B. Situación similar se presenta para 3 y 15, que también son múltiplos de 3. Esto lleva a pensar que puede ampliarse el dominio de la función que asigna la bodega en la que es más barato comprar cierta cantidad de vasitos de yogur.

En cuanto al segundo "problema pos", una manera natural de comenzar a resolverlo es obtener el pago mínimo que corresponde a algunos valores de *n* (evidentemente, números enteros positivos), teniendo en cuenta que lo más barato es pagar S/.4 por cada 3 vasitos de yogur y S/. 1,50 por cada vaso individual. Así, llamando *f* a la función pedida, tendremos, por ejemplo:

$$f(1) = 1{,}50$$

$$f(2) = 2 \text{ x } 1{,}5 = 3$$

$f(3) = 1\text{x}4$

$f(4) = 4 + 1\ \text{x}1{,}50 = 5{,}50$

$f(5) = 4 + 2\text{x}1{,}50 = 7$

$f(6) = 2\text{x}4$

…

$f(9) = 3\text{x}4 = 12$

$f(10) = 3\text{x}4 + 1\text{x}1{,}50 = 13{,}5$

$f(11) = 3\text{x}4 + 2\text{x}1{,}50 = 15$

…

Un profesor de secundaria se entusiasmó con el problema y para formalizar la función hizo uso de la propiedad "todo número natural es múltiplo de 3; múltiplo de 3, más1; o múltiplo de 3, más 2", lo cual significa que $n = 3k$, $n = 3k + 1$ ó $n = 3k + 2$, para k número natural[1]. Así, obtuvo la siguiente función:

$$f(n) = \begin{cases} 4k \quad si\ n = 3k \\ 4k + 1{,}5 \quad si\ n = 3k + 1 \\ 4k + 2 \times 1{,}5 \quad si\ n = 3k + 2 \end{cases}$$

Grande fue su sorpresa cuando le comenté que era una buena formalización, y que un siguiente paso sería obtener una expresión "en una sola línea" en la que la variable n figure explícitamente en la expresión que define la función, sin la intervención de la variable k. Le sugerí que observe cuidadosamente los pasos que da para determinar cuánto es lo mínimo que pagaría por la compra de 127 vasitos de yogur y luego por la compra de 236 vasitos de yogur.

Luego de un interesante diálogo que reproduzco en el apéndice de este artículo, el profesor me trajo la siguiente expresión para la función f, muy contento de haber redescubierto la función "mayor entero" en una situación cotidiana.

$$f(n) = 4\left[\!\left[\frac{n}{3}\right]\!\right] + \left(\frac{n}{3} - \left[\!\left[\frac{n}{3}\right]\!\right]\right) \times 3 \times 1{,}5$$

Observar que $\left[\!\left[\frac{n}{3}\right]\!\right]$ es el mayor entero menor o igual que $\frac{n}{3}$ (la parte entera de $\frac{n}{3}$) que nos dice el mayor número de paquetes de 3 vasitos de yogur correspondientes a los n que se desean comprar. Por eso la multiplicación por 4, que es el precio de cada paquete de 3. La expresión entre paréntesis es la parte decimal de $\frac{n}{3}$. Ésta será 0, 1/3 ó 2/3, según n sea múltiplo de 3; múltiplo de 3, más 1; o múltiplo de 3 más 2. Al multiplicarla por 3 se obtiene el resto de la división euclidiana, que es 0, 1 ó 2 (el número de vasitos que deberá comprarse en forma individual) y al multiplicarla por 1,5 ya se tiene el importe por la compra de tales vasitos.

[1] Esto es consecuencia natural de hacer la división euclidiana de un número natural cualquiera entre 3 y observar que el residuo será 0, 1 ó 2.

Comentarios finales

1. Las experiencias tenidas en los talleres desarrollados con profesores, partiendo de episodios en clases en torno a la solución de problemas específicos y proponiendo la creación individual y grupal de “problemas pre” y “problemas pos”, que luego se resuelven y comentan grupalmente, confirman que es una estrategia que
    - estimula la capacidad de crear y resolver problemas que tienen los profesores
    - lleva a reflexiones didácticas y matemáticas sobre el uso de la creación de problemas que favorezcan el aprendizaje de las matemáticas.
    - posibilita encontrar en un problema creado mayores potencialidades que las que se pensaron al crearlo.
2. Un aspecto muy importante al crear un problema es la redacción adecuada de su enunciado, para que exprese con claridad – sobre todo – la información y el requerimiento.
3. Crear problemas haciendo variaciones al requerimiento y al entorno matemático de un problema dado y pensando en generalizaciones, lleva a ampliar el horizonte matemático inicial, como hemos ilustrado con el uso de la relación entre múltiplos de 3 y múltiplos de 6 y con el paso de un registro verbal relacionado con una función, a un registro algebraico de tal función, pasando por el “descubrimiento” de la función mayor entero en un contexto cotidiano.
4. Vemos una vez más que la creación de problemas está estrechamente ligada a la resolución de problemas y que contribuye al desarrollo del pensamiento matemático al brindar oportunidades – a alumnos y profesores – para examinar generalizaciones e iniciarse en la investigación y en el hacer matemáticas.

Apéndice

Diálogo con un profesor de secundaria, participante en uno de los talleres sobre creación de problemas, ofrecido por el autor, en torno al problema que se presenta en este artículo.

– *Observa bien los pasos que sigues para determinar cuánto es lo mínimo que se pagaría por la compra de 127 vasitos de yogur, y luego por la compra de 236 vasitos de yogur.*

➢ *(Luego de hacer varias operaciones) Cada cantidad la divido entre 3; el cociente entero lo multiplico por 4 y el residuo lo multiplico por 1,5.*

– *Muy bien. Has usado la división euclidiana. Ve la forma de obtener el resultado sin restringirte a ella. Por ejemplo, usando una calculadora.*

- *Pero al dividir con la calculadora obtendré cifras decimales…*
- *Precisamente por eso, te sugiero usar la calculadora; para que veas la forma de obtener el resultado usando adecuadamente la información que te da las cifras decimales.*
- *(Usando su calculadora) 127 entre 3 me da 42.333333….*
- *¿42.333333… qué? Quiero decir, ¿qué expresa este número?, ¿vasitos de yogur?*
- *Mmm… No… Paquetes de 3 vasitos…*
- *Claro. Entonces tienes que separar la parte entera y ver cómo tratas la parte decimal.*
- *La parte entera la multiplico por 4 y la parte decimal por 1,5.*
- *Cuidado. Recuerda que S/.1,50 es el precio de un vasito, no de un paquete de tres vasitos de yogur.*
- *Verdad! Tengo que convertir paquetes a vasitos… ¿Multiplicando por 3?*
- *Claro!*
- *Entonces la parte decimal la multiplico por 3 y luego por 1,5.*
- *Perfecto. Y entonces ¿cuál sería el pago total mínimo que harías por 127 vasitos de yogur?*
- *42x4 + 0,333333…x3x1,5. O sea 169,5.*
- *Muy bien! Ahora hazlo de manera similar considerando 236 vasitos de yogur. Divide 236 entre 3 y luego trata de obtener el resultado escribiendo todo "en una sola línea" en la pantalla de tu calculadora. Debes usar el resultado de la división y los paréntesis para expresar algunas operaciones. Examinando con cuidado lo que vas haciendo, estoy seguro que mañana me puedes traer por escrito una explicación del procedimiento a seguir con cualquier número natural n.*

El profesor se despidió mostrando gran inquietud por pensar en el asunto. Al día siguiente tuvimos el siguiente diálogo:

- *Ya le tengo la respuesta.*
- *Me lo imaginaba! Dime.*
- *Para saber la cantidad mínima que pagaré por n vasitos de yogur, divido n entre 3. La parte entera la multiplico por 4 y la sumo a la parte decimal multiplicada por 3 y por 1,50.*
- *Excelente! Lo que has dicho, puedes expresarlo formalmente usando una función que hace corresponder a cada número real x el mayor entero que sea menor o igual que tal número x.*
- *Esa función… la función mayor entero… la estudié en la universidad, pero no la volví a ver, porque en la secundaria no se enseña. Ya no me acuerdo…*

- *No es complicada. Recuerda que todo número real x siempre lo puedes ubicar entre dos números enteros consecutivos; es decir, para todo número real x, existe un número entero k tal que k ≤ x < k + 1. La función mayor entero hace corresponder a cada número real su correspondiente número entero k. Como ves, k es el mayor entero menor o igual que x. Así, el mayor entero menor o igual que 5,333 es 5. ¿Te das cuenta por qué, verdad?*

➢ *Porque 5 ≤ 5,333 < 5 +1.*

- *Claro. Bueno, la expresión mayor entero de x se suele representar simbólicamente con un doble corchete que encierra a x. Así, el mayor entero de 5,333 se representa por* $[\![5{,}333]\!]$ *y entonces se tiene* $[\![5{,}333]\!] = 5$. *Ahora puedes usar esta función y su representación simbólica para expresar en una sola línea, y en términos de n, lo que me has enunciado verbalmente respecto a la forma de obtener el pago mínimo de n vasitos de yogur.*

UNIÓN
REVISTA IBEROAMERICANA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA
www.fisem.org/web/union

ISSN: 1815-0640
Número 35. Septiembre de 2013
páginas 145-160
Coordinado por
Agustín Carrillo de Albornoz

Tecnologías de la Información y la Comunicación (TIC): Um Estudo Sobre a Influência do Software GeoGebra na Elaboração das Demonstrações Geométricas

Celine Maria Paulek, Michele Regiane Dias Veronez

Resumen	Presentamos algunos resultados de una investigación realizada en 1º año de un curso de licenciatura en Matemática, para analizar las influencias del *software GeoGebra* en las demonstraciones geométricas. Primeramente, abordamos algunas consideraciones respecto de la enseñanza y el aprendizaje de *Geometria* y miramos el uso del software. El estudio de áreas de regiones polígonales, particularmente del *paralelogramo,* es lo que vamos enfatizar, pero, nuestro objetivo está en las demostraciones geométricas elaboradas por los alumnos, antes y después de tener realizado una tarea utilizando *GeoGebra.* En la análisis buscamos evidencias de la influencia del *software* en las demonstraciones elaboradas. Por más que los alumnos no observen ciertos detalles de sus demostraciones, pudimos inferir que algunas de los que presentaron se deben al hecho de haber utilizado *GeoGebra.* Señalizamos, aún, que existe una necesidad de envolver los alumnos del curso de licenciatura con el uso de este *software de geometria dinâmica* a fin de contribuir para la elaboración y demonstración geométrica.
Abstract	We present some results of a survey among students of the 1st year of an undergraduate course in mathematics, in which we sought to analyze the influence of GeoGebra software in the geometrics statements prepared by the undergraduates. We initially discuss some considerations on the teaching and learning of geometry, and turn our attention to the use of dynamic geometry software. The study areas of polygonal regions, particularly the parallelogram, is what we bring to the fore in this work; however, we focus on geometrical proofs prepared by the students at first, and afterwards they perform a task using GeoGebra. In the analysis we sought evidence of the influence of the software on the demonstrations prepared by them. Although students do not have to work out many details in preparing their demonstrations, we can infer that some of those were presented due to the fact that they had experienced using GeoGebra. We signal, therefore, that there is need to involve undergraduate students in using this dynamic geometry software in order to contribute to the elaboration of geometrical proofs.
Resumo	Neste trabalho apresentamos alguns resultados de uma pesquisa realizada com alunos do 1º ano de um curso de licenciatura em Matemática, na qual se buscava analisar as influências do software GeoGebra nas demonstrações geométricas elaboradas. Inicialmente abordamos algumas considerações sobre o ensino e a aprendizagem de Geometria e direcionamos o nosso olhar para o uso de softwares de geometria dinâmica. O estudo de áreas de regiões poligonais, particularmente do paralelogramo, é o que trazemos à tona nesse trabalho, contudo, nosso foco está nas demonstrações geométricas elaboradas pelos alunos, antes e depois de terem realizado uma tarefa utilizando GeoGebra. Na análise buscamos evidências da influência do software nas demonstrações por eles elaboradas. Embora os alunos não tenham se atentado para diversos detalhes na elaboração de suas demonstrações, podemos inferir que alguns dos que foram apresentados se deve ao fato de terem vivenciado atividades utilizando o GeoGebra. Sinalizamos, portanto, que há necessidade de envolver os alunos do curso de licenciatura com o uso desse software de geometria dinâmica a fim de contribuir para a elaboração de demonstrações geométricas

1. Introdução

O ensino e a aprendizagem de Geometria são focos de vários estudos e pesquisas. Andrade e Nacarato (2004) apresentam um levantamento das pesquisas que têm sido realizadas no âmbito da Geometria e salientam que muitas delas revelam que os alunos têm acentuada dificuldade na compreensão de conceitos geométricos. Os autores também sinalizam que é "significativo o número de trabalhos que vêm discutindo sobre o papel das provas e argumentações no ensino da Geometria, além de uma preocupação com discussões de aspectos epistemológicos do pensamento geométrico." (Andrade e Nacarato, 2004, p.61). No rol de pesquisas apresentadas por estes autores, há algumas realizadas com professores e, que nos levam a refletir sobre a formação de professores de matemática. Tal reflexão vem também amparada nas observações realizadas ao trabalhar com a disciplina de Geometria em um curso de licenciatura em Matemática e, com isso, identificar que os licenciandos não lidam com facilidade com as demonstrações geométricas.

Sendo assim, direcionamos nosso olhar para um curso de licenciatura em matemática, mais precisamente para o envolvimento dos licenciandos (futuros professores) com as demonstrações geométricas. Compreender um sistema axiomático e escrever demonstrações dentro desse sistema não é uma tarefa que os licenciandos realizam com tranquilidade. Dessa forma, buscou-se meios de tentar auxiliá-los neste aspecto.

O termo demonstrações é entendido aqui na mesma acepção proposta por Garnica (2002, p.98), que elas "têm, sempre, a função de convencer", por 'convencimento' entende-se "como a negociação que se estabelece para a atribuição de significados".

Consideramos neste artigo o uso do software GeoGebra como uma possibilidade para o desenvolvimento do pensamento geométrico, uma vez que este software possui características que podem vir a colaborar na elaboração das demonstrações geométricas. Muito embora algumas das pesquisas apresentadas em Andrade e Nacarato (2004) abordem experimentos com Geometria Dinâmica, os autores sustentam que há necessidade de mais pesquisas com esse enfoque.

A concepção de geometria aqui apresentada ancora-se nas ideias esboçadas por Guimarães, (Belfort e Belemain, 2003) de que o estudo em geometria inicia-se na exploração concreta e experimentação, passa pelo estabelecimento de conjecturas e resolução de problemas e segue até a elaboração de justificativas e provas formais. Na pesquisa realizada busca-se analisar as influências do software GeoGebra nas demonstrações geométricas elaboradas pelos licenciandos. Ao focar o estudo das demonstrações geométricas de áreas de regiões poligonais, particularmente do paralelogramo, evidencia-se a necessidade de nos cursos de Licenciatura em Matemática os licenciandos se envolverem com as demonstrações geométricas para além da compreensão, ou seja, deve-se incentivá-los a elaborar tais demonstrações.

2. Algumas considerações sobre o Ensino e a Aprendizagem de Geometria

Nas diversas pesquisas que discutem sobre a Geometria enquanto disciplina escolar têm-se buscado identificar o papel da Geometria no ensino e os avanços e retrocessos históricos acerca da inserção e exclusão da disciplina de Geometria nas escolas. Baldini (2004), Constantino (2006), Gravina (2001), são algumas das pesquisas que se inserem nesse contexto.

Pavanello (1993) retrata que durante muito tempo o ensino de Geometria foi um ponto falho do currículo escolar, pois, ou a deixavam como um último conteúdo (que quase sempre não era trabalhado por falta de tempo), ou a retiravam do currículo. Todavia, essa conduta não foi totalmente aceita por todos. Pavanello retrata este fato:

> a inquietação com o abandono da geometria – abandono este que é, na verdade, um fenômeno mundial – parece estar ligada a questões de ordem educacional. O estudo da geometria não foi considerado durante séculos, como indispensável à formação intelectual dos indivíduos e ao desenvolvimento da capacidade de hábitos de raciocínio? Privar indivíduos deste estudo não acarretaria prejuízos à sua formação? (Pavanello, 1993, p.7)

É possível encontrar no trabalho de Lorenzato (1995) duas causas relevantes para a ausência da Geometria nas nossas salas de aula. Seja porque os professores não conhecem a geometria suficientemente para ensinar com segurança, seja pela dependência que a maioria deles têm do livro didático, no qual a Geometria aparece como um aglomerado de fórmulas e definições.

> Considerando que o professor que não conhece Geometria também não conhece o poder, a beleza e a importância que ela possui para a formação do futuro cidadão, então, tudo indica que, para esses professores, o dilema é tentar ensinar Geometria sem conhecê-la ou então não ensiná-la. (Lorenzato, 1995, p.3-4)

Guimarães, Belfort e Bellemain (2003) colocam que se observarmos a evolução dos currículos ao longo de um período suficientemente longo, veremos que a ênfase oscila entre abordagens privilegiando “mais figuras e exploração/menos geometria formal” por um lado e “menos figuras/mais provas e dedução” por outro. Esse processo dialético envolvendo o trabalho exploratório com figuras, culminando na elaboração de provas, que pode ser observado tanto na evolução histórica da Geometria como no processo mental dos matemáticos em atividade, parece ter evidenciado algumas dificuldades para os formuladores de currículos.

Apesar de existirem vários apontamentos sobre a necessidade de alterações na maneira de se trabalhar Geometria em sala de aula, percebe-se que muitos livros didáticos ainda tratam a Geometria de maneira inadequada, conforme afirmam os autores:

> Os problemas geométricos propostos por esses livros privilegiam resoluções algébricas, e poucos exigem raciocínio dedutivo ou demonstração. E ainda, quase não existe a passagem da geometria empírica para a geometria dedutiva, além de poucos trabalhos focarem a leitura e a interpretação de textos matemáticos. Essas abordagens criam no aluno concepções inadequadas no que diz respeito ao aprimoramento dos conceitos geométricos. (Almouloud, S. A. et al, 2004, p.99).

Esta abordagem da Geometria feita de forma pontual, e normalmente separada dos demais conteúdos, acaba por dificultar a compreensão, por parte dos alunos, dos conceitos geométricos. Mas não só os livros didáticos causam tais dificuldades. Mello (2002) pontua que a formação dos professores em relação à Geometria é precária e não contribui para que façam uma análise criteriosa sobre o ensino e a aprendizagem desse conteúdo, pois

> [...] ninguém facilita o desenvolvimento daquilo que não teve oportunidade de desenvolver em si mesmo. Ninguém promove a aprendizagem de conteúdos que não domina nem a constituição de significados que não possui ou a autonomia que não teve oportunidade de construir (Mello, 2002, p.8-9 apud Almouloud, S. A. et al, 2004, p.100).

Segundo Pavanello (2004), até mesmo nos cursos superiores de matemática é possível perceber uma acentuada dificuldade, por parte dos alunos, em compreender os processos da demonstração, ou até mesmo a incapacidade de usá-los. Para Guimarães, Belfort e Belemain (2003) os alunos ingressam no Ensino Superior sem conhecer muitos dos elementos que são relevantes para a sua carreira e, no entanto, precisam terminar seus cursos preparados suficientemente para desenvolver um bom trabalho. Caso contrário, inserem-se na profissão de professor com um sentimento de insegurança em relação a suas habilidades matemáticas.

Sendo assim, é importante que os cursos de licenciatura em Matemática proporcionem um ensino de Geometria que possibilite ao futuro professor conhecimento e compreensão dos conceitos da Geometria e também uma reflexão sobre o ensinar e aprender Geometria a partir de um estudo axiomático da mesma. O fato é que, mais do que apenas conhecimento, deve-se incutir nesses alunos competências específicas à construção de conhecimentos. Essas competências serão proporcionadas a partir da oportunidade dos alunos lidarem com questões profundas, e diretamente relacionadas com o currículo escolar, com ênfase especial no quesito demonstrações geométricas.

Na intenção de que os licenciandos em Matemática atinjam um nível de dedução formal[1], se faz necessário possibilitar a eles o desenvolvimento de seu pensamento geométrico para além da compreensão das demonstrações. Os softwares de geometria dinâmica podem ser um recurso para auxiliar os licenciandos e incentivá-los a elaborar demonstrações geométricas.

2.1. Demonstrações em Geometria e o uso de softwares de geometria dinâmica

A ideia de demonstrar esteve sempre vinculada à validação das ideias matemáticas, e segundo Hanna (1990 apud Loureiro e Bastos, 2002):

> o formalismo desenvolveu-se para eliminar a necessidade de recorrer à evidência intuitiva e ao julgamento humano, por serem ambos vistos como fontes potenciais de erros graves. Dentro do formalismo, a verdade de uma afirmação reside apenas nos axiomas e na consistência interna do próprio sistema. (p. 107)

O discurso dedutivo em matemática e o argumentativo de outras áreas do conhecimento possuem características bastante diferentes. Segundo Duval (1998 apud Loureiro e Bastos, 2002, p.117) “para raciocinar é necessário que os alunos descubram como se organiza o raciocínio dedutivo e porque ele não funciona da mesma forma que uma argumentação ou explicação em outras áreas do conhecimento (geologia, botânica, química, mecânica, história).” Esse autor acrescenta que descobrir e desenvolver diferentes formas de raciocínio são também objetivos do ensino da Geometria.

---

[1] De acordo com o modelo de Van Hiele de desenvolvimento do pensamento geométrico, no nível de dedução informal os alunos acompanham e formulam argumentos informais, porém não compreendem o significado da dedução como um todo ou o papel dos axiomas. No nível de dedução formal os alunos compreendem o significado da dedução como uma maneira de estabelecer a teoria geométrica no contexto de um sistema axiomático e são capazes de construir demonstrações (Crowley, 1994).

As Orientações Educacionais Complementares aos Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN+ Ensino Médio) pontuam que no Ensino Fundamental a Geometria é estruturada de modo a possibilitar aos alunos uma reflexão através das experimentações e deduções informais, e que no Ensino Médio é necessário que haja um aprofundamento de tais ideias, de modo que o aluno possa conhecer um sistema dedutivo e compreender o significado de postulados e teoremas. Frisa-se que não se trata de memorizar postulados e demonstrações, mas analisar como a ciência matemática procede à validação e apresentação de seus conhecimentos, e assim propiciar ao aluno o desenvolvimento de seu pensamento lógico dedutivo e também da linguagem matemática. Pontua-se também a importância de que o aluno compreenda a necessidade da existência de axiomas para, a partir deles, estabelecer uma cadeia dedutiva que leve a provar as demais afirmações, criando assim a Geometria axiomática (BRASIL, 2002).

As Orientações Curriculares Para o Ensino Médio (2006) apresentam, a respeito da Geometria, a necessidade de possibilitar aos alunos o desenvolvimento da capacidade de resolver problemas de seu cotidiano e também apontam o Ensino Médio como uma oportunidade para os alunos estudarem e admirarem a parte matemática que aborda os teoremas e as argumentações dedutivas.

Possibilitar ao aluno a leitura de uma figura e incentivá-lo a usá-la para conjecturar ou entender uma demonstração é parte importante do trabalho de ensinar Geometria. A importância das demonstrações em Geometria e as dificuldades apresentadas pelos alunos em compreender e elaborar tais demonstrações levaram vários pesquisadores a proporem o uso de softwares de geometria dinâmica. Para Guimarães, Belfort e Belemain (2003) esses softwares podem oferecer novas representações de objetos geométricos que, de alguma forma, “concretizam” a figura formal.

Segundo Ferreira, Soares e Lima (2008, p. 383) “os objetos matemáticos construídos nesses ambientes, segundo suas propriedades, podem ser manipulados diretamente na tela do computador dinamizando-se as configurações”. Os mesmos autores pontuam ainda que a movimentação dos objetos geométricos, favorecida pelo software de geometria dinâmica, revela os invariantes geométricos decorrentes da construção feita. Essa característica viabiliza trabalhar com as demonstrações em ambiente dinâmico, no qual o aluno pode investigar e conjecturar muito mais do que utilizando apenas lápis e papel. Hoyles e Jones afirmam que o uso de softwares de geometria dinâmica

> [...] acompanhados de tarefas adequadas, podem proporcionar oportunidades para que desenvolvam bases para uma apreciação mais completa da natureza e propósito da demonstração matemática. [...] Deste modo, acreditamos que podemos desenvolver uma apreciação flexível dos papéis da demonstração que incluem iluminação, descoberta e comunicação, paralelamente com os da verificação e rigor. (Hoyles e Jones 1998 apud Loureiro E Bastos, 2002, p. 125)

Estes autores vêem como positiva a utilização de softwares de geometria dinâmica, mas frisam a importância dessa utilização vir acompanhada de tarefas, uma vez que o livre acesso ao software pode não trazer resultados positivos. Essas tarefas podem tanto ajudar no sentido de proporcionar que se estabeleçam contraexemplos para as falsas conjeturas que podem emergir no decorrer do seu desenvolvimento, como ajudar a investigar as propriedades que são comuns na solução de casos particulares.

Alguns dos principais benefícios e aplicações da geometria dinâmica, segundo King e Schattschneider (1997) citados por Santos e Martinez (2000) são:

- precisão e visualização: a construção da geometria é feita pelo estabelecimento de relações geométricas entre os elementos (perpendicularismo, paralelismo, pertinência, ângulo, etc.). Pode-se medir ângulos e distâncias e calcular-se relações com precisão, permitindo facilmente a verificação empírica de hipóteses e teoremas. Os conceitos de um teorema podem ser compreendidos por visualização. A precisão também é importante porque construções imprecisas podem conduzir a conclusões errôneas já que é natural o julgamento humano ser fortemente influenciado pelas formas percebidas visualmente.
- exploração e descoberta: a manipulação de construções permite que se explore a Geometria e novas relações e descober propriedades. Muitas vezes, os próprios alunos "re-descobrem" teoremas em aula. O professor precisa estar preparado para responder a perguntas inesperadas. Da mesma forma que as planilhas eletrônicas permitem responder a perguntas do tipo "e se..." referentes a fórmulas e manipulações numéricas, a Geometria Dinâmica o faz para as relações gráficas.
- provas de teoremas: embora a geometria dinâmica não possa provar teoremas, a capacidade de experimentação de hipóteses que proporciona pode motivar a busca pela prova de um teorema, pois induz à convicção de sua validade. Da mesma forma, pode ajudar e sugerir caminhos para a prova formal. (p. 3)

É possível encontrar vários softwares de geometria dinâmica que contemplam os benefícios e aplicações supracitados. Para o desenvolvimento de nossa pesquisa, apresentada parcialmente neste trabalho, foi utilizado o software GeoGebra[2] que, segundo Cavalcante (2010), congrega recursos da geometria, álgebra e cálculo. Gravina (2010) complementa ainda que

> Na tela do *software*, tem-se, em linguagem clássica da Geometria, recursos para construção de objetos geométricos, a partir das propriedades que os definem. O processo de construção é feito mediante escolhas de primitivas que são disponibilizadas nos diferentes *menus,* pontos, retas, círculos, retas paralelas, retas perpendiculares, transformações geométricas, por exemplo. A base inicial de *menus* pode ser expandida com a inclusão de rotinas de construção, as macroconstruções. (p. 1).

Este software tem como diferencial a possibilidade de serem inseridas diretamente equações e coordenadas, podendo assim representar um mesmo objeto de diferentes maneiras: representações geométrica e algébrica.

3. O contexto investigativo e a caracterização da pesquisa

A pesquisa realizada ocorreu em uma turma de 1º ano de um curso de Licenciatura em Matemática, durante 07 (sete) aulas da disciplina de Geometria. Uma das pesquisadoras era professora da disciplina, não havendo assim influência da presença de um membro externo à rotina dos alunos. Vale frisar que os alunos tiveram contato com a elaboração de demonstrações geométricas antes do início desta pesquisa. Em relação ao software GeoGebra, praticamente todos os alunos já

[2] Este software foi escolhido por suas posibilidades, por ser gratuito e por estar presente em todas as escolas da rede pública do Estado do Paraná.

conheciam e sabiam trabalhar com o software. Porém, antes do desenvolvimento da tarefa relacionada à pesquisa a professora abordou as principais ferramentas deste software.

Os dados que proporcionaram a realização da análise das demonstrações dos alunos foram coletados em dois momentos. No primeiro momento foi solicitado aos alunos que deduzissem uma relação que viabilizasse calcular a área de um paralelogramo (Figura 1). A intenção era compreender que procedimentos os alunos usariam para obter tal relação.

1. Seja ABCD um paralelogramo. Deduza uma relação que descreva a área desse paralelogramo. (Descreva todo o desenvolvimento da sua dedução).

Figura 1. Atividade 1. Fonte: Autoria própria

Depois dos alunos terem escrito a relação solicitada na Atividade 1, eles, utilizando o software GeoGebra realizaram a tarefa apresentada na Figura 2. Essa tarefa possibilitou que eles construíssem paralelogramos, calculassem e comparassem áreas e buscassem justificativas quanto às regularidades encontradas.

- Abra um arquivo novo.
- Crie um paralelogramo *ABCD*. Para isso, crie a reta *a* passando por *AB* e uma reta *b* paralela a reta *a* passando por um ponto *C* não pertencente a reta *a*.
- Trace a reta *c* passando por *B* e *C*.
- Trace uma reta *d* paralela a reta *c* passando por *A*. Marque o ponto *D* de interseção das retas *b* e *d*. Assim temos o quadrilátero *ABCD*, paralelogramo por construção.
- Trace uma reta *e* perpendicular a reta *a* passando por *C* e uma reta *f* perpendicular a reta *a* passando por *D*.
- Marque o ponto *E* de interseção de *e* e *a* e o ponto *F* de interseção de *a* e *f.*
- Com a ferramenta "distância, comprimento ou perímetro" meça *AB* e *CE*.
- Crie um campo de texto dinâmico que represente $\overline{AB} \cdot \overline{CE}$, utilizando a ferramenta "inserir texto" e digitando: *"AB*CE="+distânciaAB*distânciaCE*. (lembre-se de selecionar a opção fórmula Latex)
- Utilizando a ferramenta "polígono" determine os polígonos *ABCD*, *DCEF* e meça suas respectivas áreas.
- Movimente os vértices do paralelogramo. O que acontece com os valores das áreas de *ABCD*, *DCEF* e do campo da fórmula $\overline{AB} \cdot \overline{CE}$? Por que isso acontece?

A partir desta atividade, o que é possível dizer sobre a área do paralelogramo?

Figura 2. Roteiro da Tarefa Realizada no Software GeoGebra
Fonte: Adaptado de Gerônimo, Barros e Franco (2010).

Na Figura 3, foi solicitado aos alunos que elaborassem uma demonstração para a área do paralelogramo. Os dados coletados, a partir das considerações dos alunos compuseram o segundo momento de coleta de dados. A busca por indícios da influência da tarefa realizada no GeoGebra na escrita da demonstração solicitada na Figura 3, aconteceu por meio da comparação entre o que os alunos escreveram na Atividade 1 e a demonstração apresentada na Atividade 2, ou seja, nas atividades antes e depois da realização da tarefa com o GeoGebra.

1. Demonstre que a área de um paralelogramo é o produto da medida de qualquer base pela altura correspondente, ou seja, $A(ABCD) = b \cdot h$.

Figura 3. Atividade 2. Fonte: Autoria própria

Ao observar os diferentes processos utilizados pelos alunos nas suas demonstrações, foi possível categorizá-las em três grupos e então escolher, aleatoriamente, os registros escritos de uma dupla de cada grupo categorizado para procedermos à análise.

4. Análise das demonstrações elaboradas pelos alunos: impactos do uso do GeoGebra

Buscou-se identificar, por meio dos registros das Atividades 1 e 2 realizadas pelos alunos em duplas, definidas como A, B e C, se houve influência do GeoGebra na demonstração elaborada por eles.

4.1. Análise das Demonstrações da Dupla A

Na Atividade 1 a dupla A encontrou a relação solicitada dividindo o paralelogramo em dois triângulos retângulos e um retângulo (Figura 4) e adicionando as áreas dos três polígonos obtidos. Na Atividade 2 a dupla também dividiu o paralelogramo em dois triângulos retângulos e um retângulo, mas diferentemente do que foi realizado na Atividade 1, não adicionam as áreas dos três polígonos; criam um novo triângulo retângulo congruente aos outros dois de modo a formar um retângulo (Figura 5) e portanto demonstram o que era pedido.

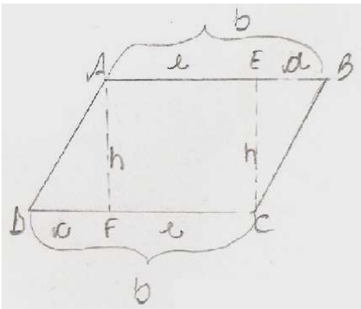


Figura 4. Desenho feito pela dupla A na Atividade 1

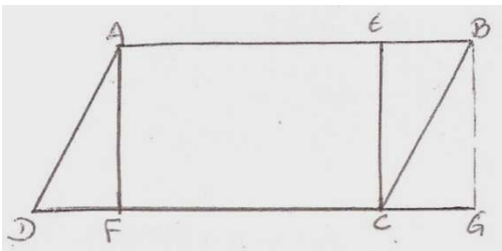


Figura 5. Desenho feito pela dupla A na Atividade 2

Analisando a demonstração escrita pelos alunos (Figura 6) podemos observar que na Atividade 1 os alunos consideram o paralelogramo e traçam as alturas, logo em seguida utilizam a palavra “assim”, o que nos leva a considerar que a afirmação seguinte decorre da anterior. No entanto, como isto não procede, os alunos mostram dificuldade em desenvolver uma sequência coerente e formal de afirmações.

Verifica-se que os alunos consideram congruentes a AE y FC, ao chamar ambos os segmentos de *e*, mas não justificam tal fato. Quando adicionam as áreas dos três polígonos da figura misturam a identificação do polígono com o cálculo da área, mostrando erros ao utilizar os símbolos matemáticos. Nesse caso, há falta do sinal de igualdade e uso errôneo das setas. Ainda é possível observar que os alunos utilizam relações para o cálculo da área de retângulos e triângulos como base para concluir a relação que descreve a área do paralelogramo, mas não explicitam na demonstração que assumem tais relações e porque as assumem como verdadeiras.

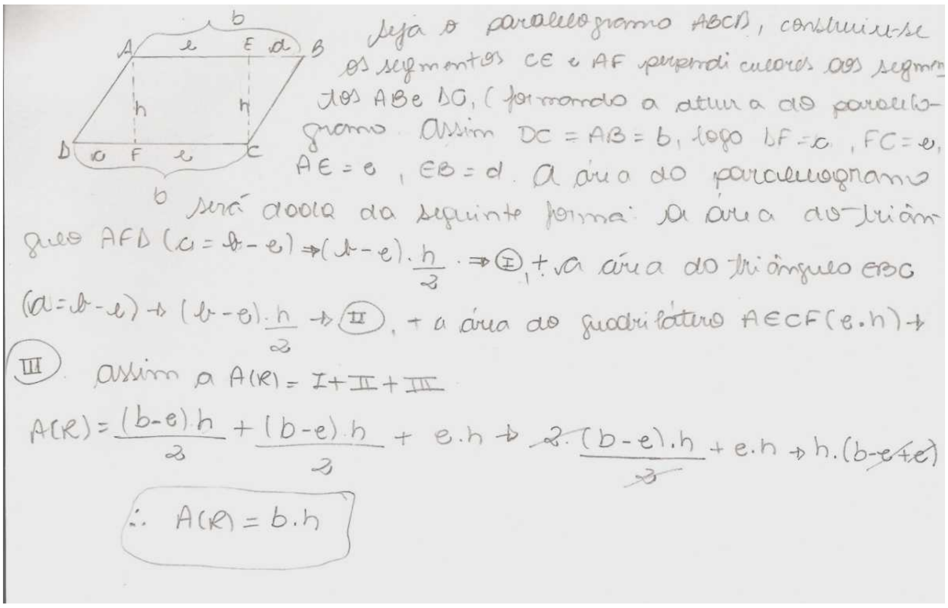


Figura 6. Registros escritos da dupla A na Atividade 1.

Na Atividade 2, verifica-se que os alunos dividem novamente o paralelogramo em um retângulo e dois triângulos, mas chamam o retângulo apenas de quadrilátero. Em um momento posterior utilizam o fato de ele ser retângulo, o que nos remete novamente à falta de formalidade. Em seguida consideram os triângulos CEB e AFD como congruentes e apontam o caso de congruência, contudo, na hora de justificá-lo afirmam apenas que CB e DA congruentes por serem paralelas, mas não afirmam que CB e DA são lados opostos de um paralelogramo, o que justificaria a congruência.

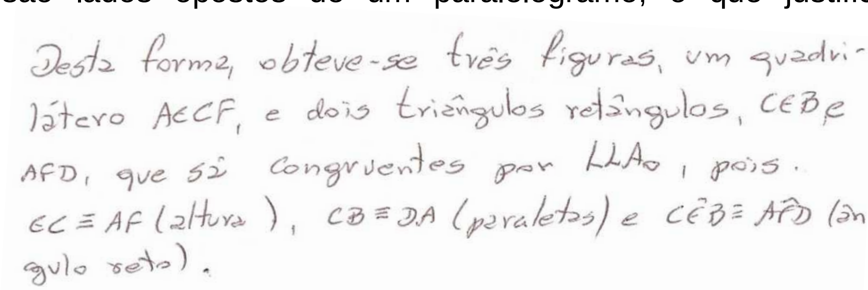


Figura 7. Registros escritos da dupla A na Atividade 2.

Quando os alunos constroem o triângulo BCG é possível verificar a busca de uma sequência lógica e formal. Embora não tenham utilizado a construção de retas e demarcação de pontos de modo a obter segmentos e ângulos congruentes, mencionam tais congruências para poder concluir que $ADF \equiv BCG$ e assumem como necessário criar este triângulo congruente para poder dar continuidade à demonstração.

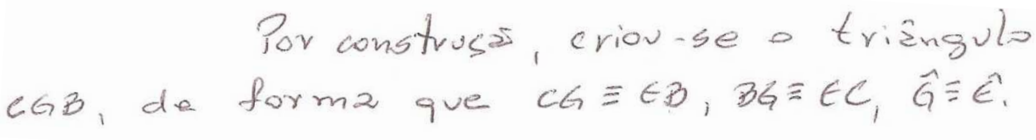
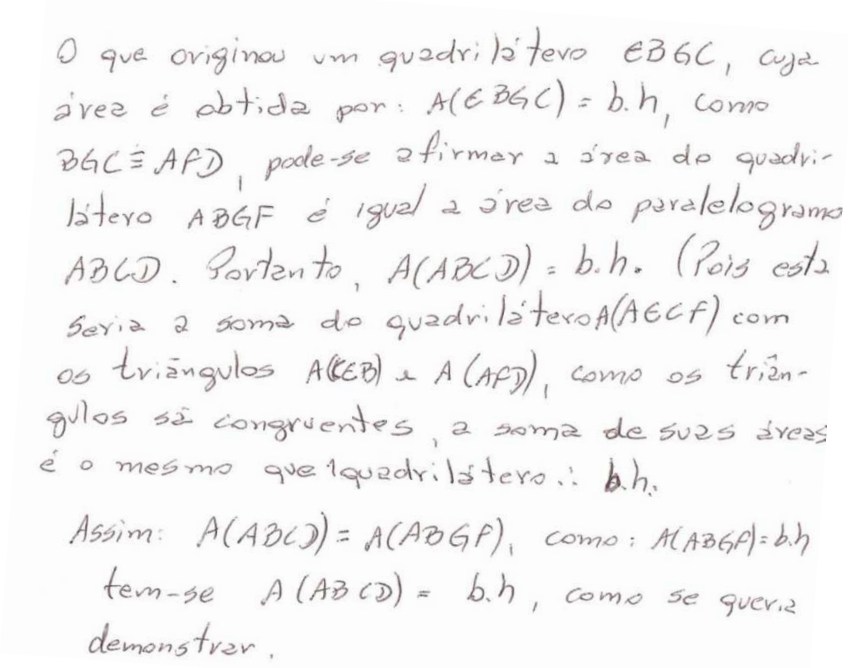

Por construçã, criou-se o triângulo CGB, de forma que CG ≡ EB, BG ≡ EC, Ĝ ≡ Ê.

Figura 8. Registros escritos da dupla A na Atividade 2.

A finalização da demonstração elaborada na Atividade 2 mostra-se mais detalhada que na Atividade 1, porém este detalhamento nos permite perceber que os alunos não conseguiram escrever uma demonstração com um sistema lógico subjacente, há um excesso de informações e redundâncias (Figura 9).


O que originou um quadrilátero EBGC, cuja área é obtida por: A(EBGC) = b.h, como BGC ≡ AFD, pode-se afirmar a área do quadrilátero ABGF é igual a área do paralelogramo ABCD. Portanto, A(ABCD) = b.h. (Pois esta seria a soma do quadrilátero A(AECF) com os triângulos A(CEB) e A(AFD), como os triângulos sã congruentes, a soma de suas áreas é o mesmo que 1 quadrilátero ∴ b.h.

Assim: A(ABCD) = A(ABGF), como: A(ABGF) = b.h
tem-se A(ABCD) = b.h, como se queria demonstrar.

Figura 9. Registros escritos da dupla A na Atividade 2.

Observando as duas demonstrações escritas pela dupla A, percebe-se que houve influência do GeoGebra na demonstração escrita na Atividade 2 quando os alunos consideram os triângulos CEB e AFD como congruentes e apontam o caso de congruência, mesmo que a justificativa da congruência não esteja totalmente satisfatória. A construção do triângulo BCG também pode ter sido inserida na demonstração sob influência das construções realizadas no GeoGebra, mesmo que não tenham sido citados os passos da construção.

4.2. Análise das Demonstrações da Dupla B

A dupla B utilizou o mesmo procedimento para realizar as Atividades 1 e 2, mas é possível perceber particularidades em ambas. Na Atividade 1 os alunos iniciam a demonstração sem escrever que consideram *ABCD* como um paralelogramo, o que pode ser apontado como uma falha, visto que toda a demonstração baseia-se nesse paralelogramo.

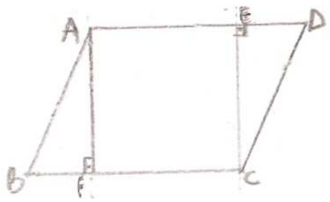
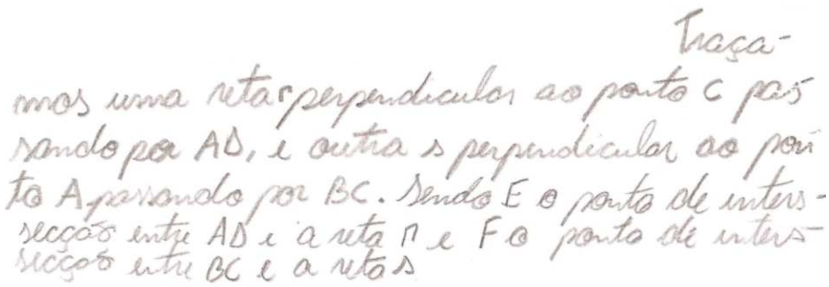


Figura 10. Desenho feito pela dupla B na Atividade 1.

Na demonstração elaborada por essa dupla (Figura 11) verifica-se um possível erro conceitual. Os alunos consideram a reta perpendicular ao ponto passando pelo lado do paralelogramo e não a reta perpendicular ao lado do paralelogramo passando pelo ponto, o que nos leva a crer que eles não compreendem corretamente o conceito de retas perpendiculares. Embora tenham apresentado este erro conceitual, verifica-se que eles buscam detalhar os passos da construção, o que é importante na demonstração.

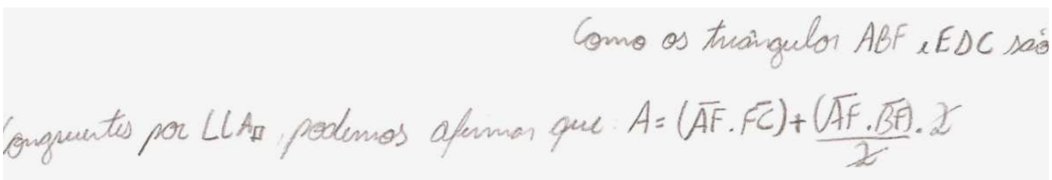


Traça-
mos uma reta r perpendicular ao ponto C pas-
sando por AD, e outra s perpendicular ao pon-
to A passando por BC. Sendo E o ponto de inters-
secção entre AD e a reta r e F o ponto de inters-
secção entre BC e a reta s

Figura 11. Registros escritos da dupla B na Atividade 1.

Na Figura 12 percebe-se que os alunos consideram os triângulos ABF e EDC como sendo congruentes e indicam o caso de congruência, porém não explicitam como concluem que tais lados e ângulos são congruentes. Eles denominam erroneamente os triângulos, pois consideram a congruência como $f: \{A, B, F\} \rightarrow \{E, D, C\}$ e a congruência correta seria $f: \{A, B, F\} \rightarrow \{C, D, E\}$

Observa-se ainda que os alunos utilizam as expressões já conhecidas para cálculo da área do retângulo e do triângulo, mas não explicitam porque podem considerar essas expressões como verdadeiras, deixando falha a sequência de informações na demonstração.



Como os triângulos ABF e EDC são
congruentes por LLA$_o$, podemos afirmar que $A = (\overline{AF}.\overline{FC}) + \frac{(\overline{AF}.\overline{BF})}{2}.2$

Figura 12 – Registros escritos da dupla B na Atividade 1.

Na Atividade 2, observa-se que os alunos definem o paralelogramo que será a base da demonstração e ao traçar as perpendiculares às bases não cometem o mesmo erro da demonstração anterior:

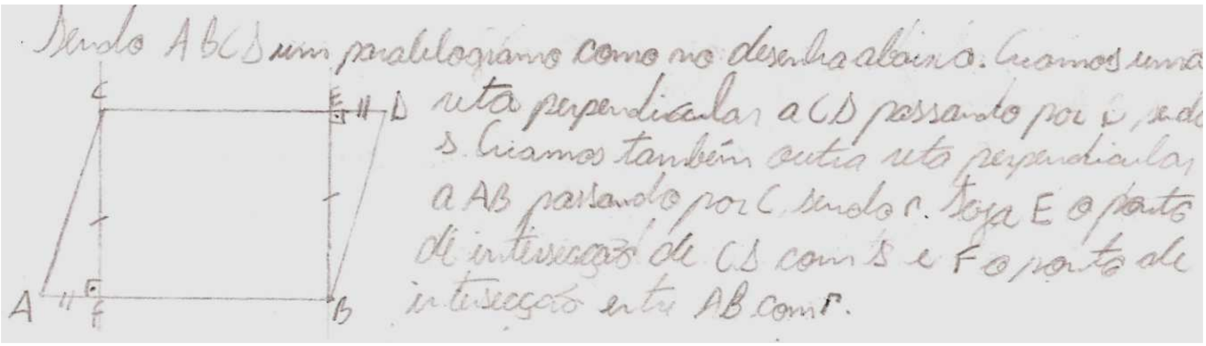


Figura 13 – Registros escritos da dupla B na Atividade 2.

Em relação à congruência dos triângulos ACF e BDF, verifica-se os mesmos erros apresentados na Atividade 1. Na conclusão da demonstração, observa-se que os alunos buscam deixar mais claro a área de cada polígono a ser adicionado a fim de obter a área desejada, no entanto, não explicitam que as fórmulas utilizadas foram anteriormente demonstradas.

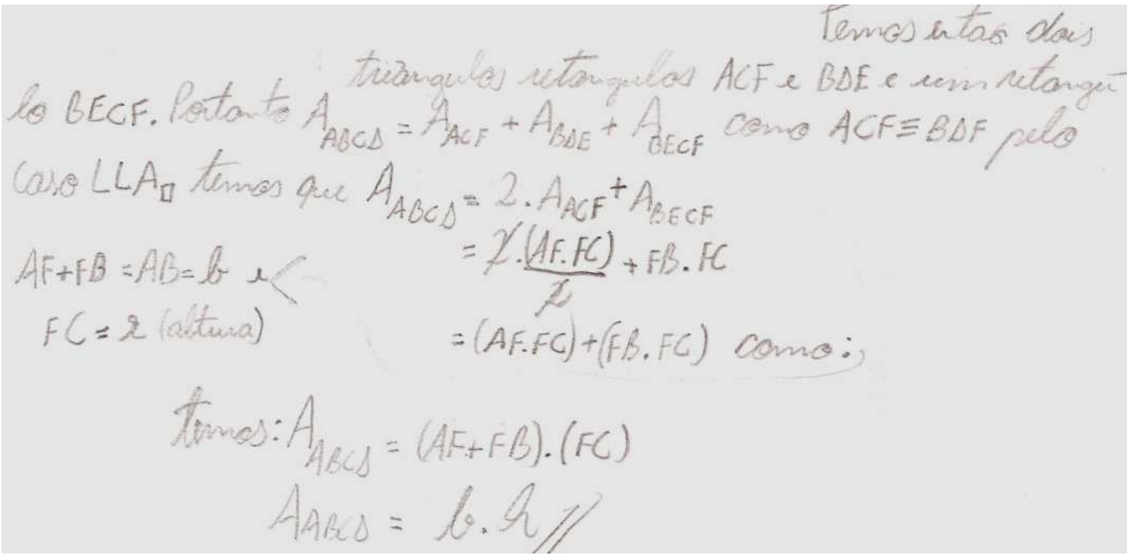


Figura 14 – Registros escritos da dupla B na Atividade 2.

Ao observar as duas demonstrações escritas pela dupla B, podemos verificar algumas possíveis influências do GeoGebra na demonstração escrita na Atividade 2, sendo que a primeira é ao iniciar a demonstração considerando *ABCD* como sendo um paralelogramo. Como no GeoGebra o paralelogramo utilizado foi construído passo-a-passo, acredita-se que isso pode ter levado os alunos a especificarem o quadrilátero com o qual trabalharam. Outro avanço percebido refere-se às retas perpendiculares, quando os alunos escrevem que a reta é perpendicular a um lado do paralelogramo e passa por um ponto específico, não cometendo o mesmo erro da demonstração escrita na Atividade 1.

4.3. Análise das Demonstrações da Dupla C

Na Atividade 1 esta dupla encontrou a relação solicitada dividindo o paralelogramo em dois triângulos e um retângulo, como mostra a Figura 15, para então calcular a área de cada triângulo e do retângulo e adicioná-las para obter a área do paralelogramo.

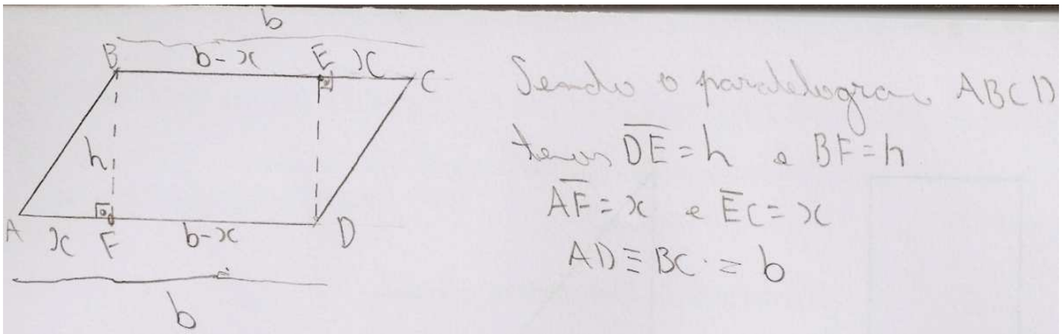


Figura 15. Registros escritos da dupla C na Atividade 1.

Ainda na Figura 15, observa-se algumas falhas, pois os alunos consideram os segmentos DE e BF como sendo h (que nós interpretamos como altura), mas não descrevem como traçar esta altura e tampouco explicitam que as alturas devem ser traçadas passando pelos pontos D e B. É possível verificar ainda que, após traçar a altura, consideram os segmentos EC e AF como congruentes, mas não justificam tal congruência.

Para concluir a demonstração somam a área dos dois triângulos (considerando bases e alturas congruentes) e a área do retângulo (Figura 16).

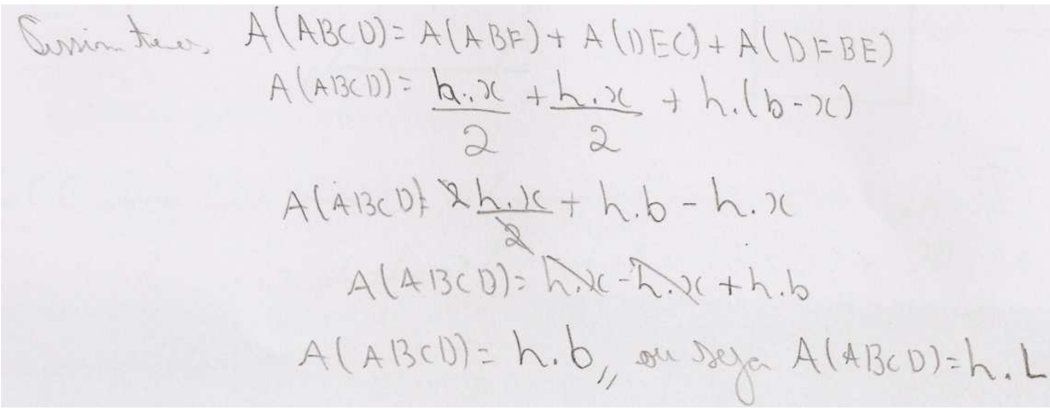


Figura 16. Registros escritos da dupla C na Atividade 1.

Outra falha é percebida na conclusão da demonstração. Os alunos generalizam a base como sendo L (que entendemos como lado), mas não explicam o que seria este L. É possível perceber que as ideias dos alunos são bastante pertinentes, mas em alguns momentos a formalização de tais ideias não ficam explícitas.

Na Figura 17 apresenta-se a demonstração feita pela dupla C na Atividade 2. Nessa atividade os alunos utilizam procedimentos distintos dos utilizados na Atividade 1. Eles dividem o paralelogramo em dois triângulos e a partir disso constroem a demonstração.

Para provar a congruência dos triângulos *ABD* e *CDB*, os alunos utilizam e justificam corretamente o caso de congruência, mas erram ao denominar os triângulos, pois consideraram $f: \{A, B, D\} \rightarrow \{D, B, C\}$ e a congruência correta seria $f: \{A, B, D\} \rightarrow \{C, D, B\}$.

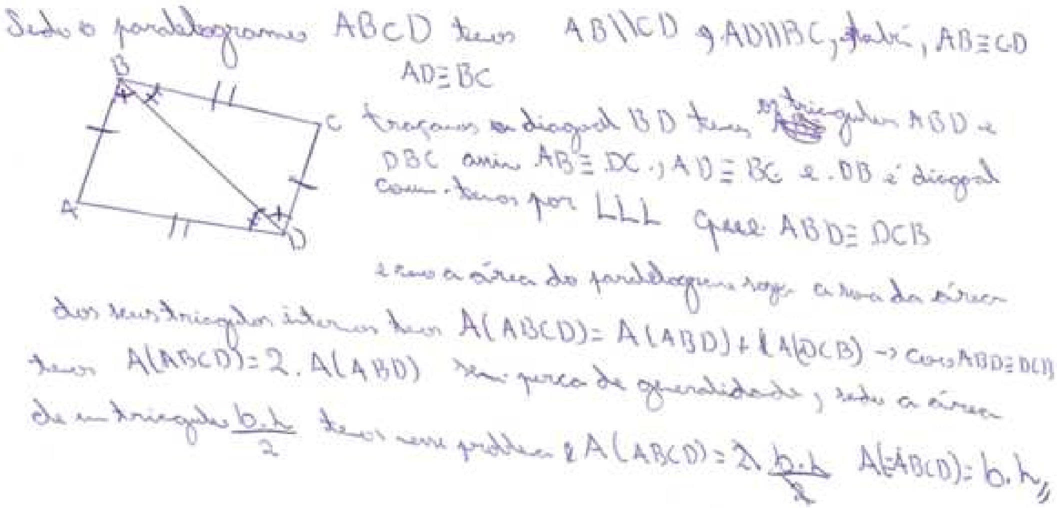


Figura 17. Registros escritos da dupla C na Atividade 2.

Em seguida os alunos adicionam as áreas dos dois triângulos congruentes, utilizando a expressão $\frac{b \cdot h}{2}$ para o cálculo da área de um triângulo, mas não explicitam porque podem utilizar tal expressão, e assim concluem a demonstração.

Analisando as demonstrações escritas pela dupla C, observa-se a influência do GeoGebra na demonstração escrita na Atividade 2, no momento em que os alunos buscam explicitar as características do paralelogramo, o que pode ser fruto da construção realizada no software. Outro avanço identificado diz respeito a congruência de triângulos, quando os alunos deixam claro o caso de congruência de triângulos e as congruências entre quais lados dos triângulos permitiram afirmar que os triângulos eram congruentes.

5. Considerações Finais

O propósito desta pesquisa era investigar se, após realizar a tarefa no software GeoGebra, os alunos seriam capazes de escrever uma demonstração com uma linguagem adequada, bem como justificar suas afirmações.

Ao analisar as Atividades 1 e 2 verifica-se alguns avanços nas demonstrações elaboradas pelos alunos. Esses avanços foram identificados devido aos procedimentos utilizados por eles nas demonstrações aparecerem de forma detalhada. Este detalhamento permitiu que identificássemos a dificuldade que eles têm de limitar o que é necessário escrever, pois a escrita em alguns casos ficou redundante.

Verificou-se nas demonstrações a presença de afirmações sem uma justificativa que as sustentassem e, em alguns casos, a falta de qualquer justificativa, tanto na Atividade 1 quanto na Atividade 2. Porém, a incidência dessas falhas foi menor na Atividade 2, o que nos permite inferir que o uso do GeoGebra pode ter facilitado a enunciação de justificativas para as conclusões obtidas.

Não se pode deixar de considerar a acentuada dificuldade, apresentada pelos alunos, em compreender os processos de uma demonstração e, consequentemente, de escrevê-la. E ainda, vale pontuar que em alguns momentos não foi possível identificar se os erros apresentados nas demonstrações decorrem da dificuldade de escrever a demonstração ou se são erros conceituais relacionados a conteúdos de Geometria estudados anteriormente.

Outro aspecto observado foi a descrição das construções utilizadas nas demonstrações, pois a tarefa desenvolvida no GeoGebra continha passos para a construção das figuras a serem analisadas e acreditava-se inicialmente que essa descrição seria transferida para a demonstração escrita pelos alunos. Em algumas demonstrações, ou em partes delas, houve um avanço na descrição das construções, mas em algumas demonstrações a atividade realizada no GeoGebra parece não ter influenciado nesse aspecto.

Pode-se dizer que a tarefa realizada no software GeoGebra influenciou nas demonstrações geométricas elaboradas pelos alunos, mas vemos que ainda há vários aspectos em que a atividade no software permitia que os alunos percebessem diversos elementos (e consequentemente os utilizassem ao escreverem a demonstração), mas não os perceberam (ou não os colocaram na demonstração), o que fez com que as expectativas quanto ao uso do GeoGebra fossem apenas parcialmente confirmadas.

Bibliografia

Almouloud, S. A. et al. (2004). A geometria no ensino fundamental: reflexões sobre uma experiência de formação envolvendo professores e alunos. *Revista Brasileira de Educação*. Nº 27, pp. 94-108.

Andrade, J. A., Nacarato, A. M. (2004). Tendências didático-pedagógicas no ensino de Geometria: um olhar sobre os trabalhos apresentados nos ENEMs. *Educação Matemática em Revista.* Ano 11, Número 17, dez., pp. 61-70.

Baldini, L. A. F. (2004). *Construção do conceito de área e perímetro: uma seqüência didática com auxílio de software de geometria dinâmica.* 211 p. Dissertação (Mestrado em Ensino de Ciências e Educação Matemática), Universidade Estadual de Londrina, 2004.

Brasil. Ministério da Educação. Secretaria de Educação Básica. (2006). *Orientações curriculares para o Ensino Médio: Ciências da natureza, matemática e suas tecnologias.* Brasília.

______ Secretaria da Educação Média e Tecnológica. (2002). *PCN+: Ensino Médio – orientações educacionais complementares aos Parâmetros Curriculares Nacionais.* Brasília: MEC.

Cavalcante, N. I. dos S. (2010). *O Ensino de Matemática e o Software GeoGebra: Discutindo Potencialidades Dessa Relação Como Recurso Para o Ensino de Funções.* In VI EPBEM – Monteiro, PB – 09, 10 e 11 de novembro de 2010.

Constantino, R. (2006). *O ensino de Geometria no ambiente Cinderela.* Dissertação de Mestrado, Maringá: UEM.

Crowley, M. L. (1994). O modelo van Hiele de desenvolvimento do pensamento geométrico. In Lindquist, M. M. e Shulte, A. P. *Aprendendo e Ensinando Geometria*. São Paulo: Atual.

Ferreira, E. B., Soares, A. B., Lima, J. C. (2008). O resgate das demonstrações: uma contribuição da Informática à formação do professor de Matemática. In *Revista Semestral da Associação Brasileira de Psicologia Escolar e Educacional* (ABRAPEE). Volume 12. Número 2 *Julho/Dezembro,* pp. 381-389.

Garnica, A. V. M. (2002). As demonstrações em educação matemática: um ensaio. *Bolema,* 18, pp. 91-122.

Gerônimo, J. R.; Barros, R. M. O.; Franco, V. S.; (2010). *Geometria Euclidiana Plana:* um estudo com o software GeoGebra. Maringá: EDUEM.

Gravina, M. A. (2010). *O software GeoGebra no Ensino de Matemática.* In anais III Semana de Matemática - Campos dos Goytacazes/RJ 23 a 25 de Setembro.

Gravina, M. A. (2001). *Os ambientes de geometria dinâmica e o pensamento hipotetico dedutivo.* Tese (Doutorado do Programa de Pós-Graduação em Informática na Educação) - Universidade Federal do Rio Grande do Sul, 2001.

Guimarães, L. C.; Belfort, E.; Bellemain, F. (2003). Geometria: uma volta ao futuro via tecnologia? In: SEMINÁRIO INTERNACIONAL DE PESQUISA EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 2., São Paulo. *Anais...* São Paulo: SBEM, 2003. 1 CD-ROM.

Lorenzato, S. (1995). Porque não ensinar Geometria? *A Educação Matemática em Revista.* Blumenau: SBEM, Ano III, n. 4. pp.3-13.

Loureiro, C., Bastos, R. (2002). *Demonstração - uma questão polémica.* In: M. J. Saraiva, M. I. Coelho e J. M. Matos (Orgs.), Ensino e Aprendizagem da Geometria. pp. 105-128, 2002. Covilhã: Secção de Educação Matemática e Sociedade Portuguesa de Ciências da Educação (SPCE). Disponível em: <http://www.spce.org.pt/sem/CL.pdf> . Acesso em 11 novembro 2011.

Pavanello, R. M. (2004). *Por que ensinar /aprender geometria?* In: VII Encontro Paulista de Educação Matemática. *Anais eletrônicos...* São Paulo, 2004. Disponível em: http:// www.sbempaulista.org.br/epem/anais/mesas_redondas/mr21-Regina.doc. Acesso em: 13 de setembro de 2011.

______ (1993). O abandono do ensino da Geometria no Brasil: causas e conseqüências**.** *Revista Zetetiké.* Campinas: UNICAMP, Ano 1, n. 1.

Santos, E. T., Martinez, M. L. (2000). *Software para Ensino de Geometria e Desenho Técnico.* Ouro Preto: Graphica, 9 p.

Celine Maria Paulek Possui graduação em Licenciatura em Matemática pela Faculdade Estadual de Filosofia, Ciências e Letras de União da Vitória (2009), e Especialização em Ensino da Matemática na Perspectiva da Educação Matemática pela Faculdade Estadual de Filosofia, Ciências e Letras de União da Vitória (2012). Atualmente é professora colaboradora da Universidade Estadual do Paraná.

celemaria03@yahoo.com.br

Michele Regiane Dias Veronez Possui graduação em Matemática pela Universidade Estadual de Londrina (2002) e mestrado em Ensino de Ciências e Educação Matemática pela Universidade Estadual de Londrina (2005). Desenvolveu projeto de extensão vinculado à Secretaria de Ciência e Tecnologia - SETI no programa USF, subprograma Apoio às Licenciaturas nos anos 2007 a 2010. Atua em projeto de pesquisa, vinculado à Fundação Araucária. É aluna de doutorado do Programa de Ensino de Ciências e Educação Matemática da Universidade Estadual de Londrina. **miredias@uol.com.br**

UNIÓN
REVISTA IBEROAMERICANA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA
www.fisem.org/web/union

ISSN: 1815-0640
Número 35. Septiembre de 2013
páginas 161-175

Ideas para enseñar:

El Contraejemplo como Recurso Didáctico en la Enseñanza del Cálculo

Orlando García Marimón, Luisa Morales

Fecha de recepción:19/12/12
Fecha de aceptación:24/04/13

Resumen	Estructurar un pensamiento matemático en los estudiantes es un fenómeno didáctico que se debe poner atención ¿Incorporar el contraejemplo y la conjetura en el aula posibilita que los estudiantes transiten de un pensamiento ingenuo a un pensamiento matemático? En cuanto al pensamiento ingenuo se caracteriza como un pensamiento inmediato e irracional, el cual evita dar pie a acceder al conocimiento de la realidad de manera científica porque está mal organizado, y se percibe como una característica predominante en muchos estudiantes de diversos niveles educativos. Por otro lado, un pensamiento matemático requiere elementos tales como la inducción, el pensamiento crítico y analítico, la modelación y la abstracción, así como el uso adecuado de contraejemplos y conjeturas. En este reporte se muestra un análisis sobre el papel que juega la incorporación de la conjetura y el contraejemplo cuando se pretenden instalar conceptos matemáticos del Cálculo. **Palabras clave**: Contraejemplos, recursos didácticos, cálculo.
Abstract	Structuring a mathematical thinking in students is an educational phenomenon in which attention must be paid. Does adding the counter and conjecture in the classroom allow students to transfer from a naive thought to mathematical thinking? Naive in thinking is characterized as an immediate and irrational thinking, which prevents the access to real scientific knowledge being poorly organized, and is seen as a prominent feature in many students from different educational levels. Moreover, mathematical thinking required elements such as induction, critical thinking and analytical, modeling and abstraction, as well as the proper use of counterexamples and conjectures. This report is an analysis of the role played by the incorporation of the conjecture and counterexample when trying to install mathematical concepts of Calculus. **Keywords**: counterexamples, teaching resources, calculus.
Resumo	Estruturar um pensamento matemático em estudantes é um fenômeno educacional que se deve prestar atenção Será que a adição do contra-exemplo e a conjectura na sala de aula permite que os alunos transitem de um pensamento ingênuo a um raciocínio matemático? Em quanto o pensamento ingênuo é caracterizado como um pensamento imediato e irracional, o que impede ter acesso ao conhecimento da realidade científica porque está sendo mal organizado, e é visto como uma característica proeminente em muitos estudantes de diferentes níveis educativos. Além disso, o pensamento matemático requeira elementos obrigatórios, tais como a indução, o pensamento crítico e analítico, e modelagem e abstração, bem como o uso adequado de contra-exemplos e conjecturas. **Palavras-chave:** contra-exemplos, recursos pedagógicos, calculo.

1. Introducción

Es bien sabido que el aprendizaje de las Matemáticas es un fenómeno complejo de interés principalmente didáctico que se presenta en todos los niveles educativos. Debido al bajo rendimiento de los estudiantes existe una preocupación que se observa en los resultados obtenidos en países latinoamericanos, como se da el caso de las pruebas de PISA[1] colocándolos por debajo de la media internacional[2]; y que en cierta forma este rendimiento lo manifiestan los estudiantes cuando no logran la estructuración de un pensamiento matemático adecuado.

A través de la historia el desarrollo del pensamiento matemático no ha sido en forma progresiva, más bien los conocimientos matemáticos han sufrido cambios drásticos por el papel importante que han jugado recursos como las *conjeturas* y los *contraejemplos* en la construcción y evolución de las Matemáticas. Aunque estos recursos son empleados por los investigadores, como parte de su quehacer en el caso de la estructuración de los "nuevos conocimientos", pocas veces son usados por el profesor en su práctica docente para el desarrollo y adquisición de conocimientos en el aula. Este trabajo analiza el papel que juega la incorporación de la conjetura y el contraejemplo cuando se desean instalar algunos conceptos fundamentales de las Matemáticas escolar y al pretender la resolución de problemas que la involucran en diferentes niveles educativos.

En una sociedad, los individuos continuamente están tratando de resolver los problemas que se les presentan diariamente cuando intentan obtener explicaciones o resultados para avanzar en su actividad. De una u otra forma la construcción del conocimiento sucede cuando los investigadores se hacen preguntas, e intentan responderlas dando soluciones que no necesariamente son siempre correctas; y sin embargo, les permiten crear estrategias para abordar el mismo problema desde otras perspectivas.

Por otro lado, algunas investigaciones en Matemática Educativa han analizado las equivocaciones de los alumnos como lo muestra Rico (1995); el cual realizó un estudio minucioso en torno a la *categorización y clasificación de los errores*. En ese trabajo se presentan sistemáticamente como *aquellos que se deben a la dificultad de lenguaje, otros debido a asociaciones incorrectas, otros sobre la aplicación de reglas*, *entre otros*; los cuales surgen en la necesidad de construir conocimientos matemáticos en el aula. Con estos elementos propuestos para el docente las percepciones erróneas pueden ser prevenidas o corregidas pero no siempre son fáciles de cambiar por concepciones correctas, como lo muestran algunos estudiantes cuando vuelven a cometer las mismas faltas.

La conjetura y el contraejemplo son recursos que en cierta forma han sido usados desde tiempos inmemoriales: como es el caso de Sócrates y su joven discípulo Teeteto, cuando discuten el significado de ¿qué es la ciencia? En ese diálogo Sócrates pone en tela de juicio las "conjeturas" de su discípulo, por ejemplo cuando Teeteto expone *… lo que se puede aprender con Teodoro, como la geometría y las otras artes de que has hecho mención, son otras tantas ciencias, y, hasta todas las artes, sea la de zapatero o cualquier otro oficio, no son otra cosa que*

[1] **Program for International Student Assessment**
[2] Habilidad Matemática de 406 (México), 370 (Colombia), Brasil (370) , y Media Internacional es 498. (Ministerio de Educación y Ciencia, 2006, p. 70)

ciencias, y Sócrates (con un contraejemplo) le contesta a su discípulo *…cuando se pregunta sobre qué es la ciencia, es ponerse en ridículo al dar por respuesta el nombre de una ciencia, puesto que es responder sobre el objeto de la ciencia, y no sobre la ciencia misma, que es a la que se refiere la pregunta*[3], con una refutación que ayuda a cambiar la respuesta de Teeteto (Platón, 2003). Aquí se observa cómo el maestro induce a "conjeturar" a su discípulo para modificar sus respuestas, lo cual le permite desarrollar un pensamiento mejor estructurado.

Frecuentemente los investigadores falsean sus propias conjeturas o bien las propuestas por otros colegas, y en parte lo hacen estructurando contraejemplos que pueden ayudar el logro de un enfoque distinto en sus investigaciones, llevándolos a la posible construcción de nuevos teoremas. De acuerdo a lo anterior Lakatos (1978) señala que *el descubrimiento ni sube ni baja sigue una trayectoria zigzagueante aguijoneado por los contraejemplos, se mueve a la conjetura ingenua a las premisas y vuelve de nuevo a eliminar la conjetura ingenua, sustituyéndola por el teorema*. Entonces construir conocimientos en las Ciencias requiere de recursos como la conjetura y el contraejemplo y así poder encontrar nuevas estructuras conceptuales.

Las Matemáticas como ciencia no escapan al uso de la conjetura y el contraejemplo, ya que científicos han logrado que a través de mostrar la validez de sus conjeturas su comunidad cambie los enfoques al identificar contradicciones o errores; lo cual permite incorporar otras nociones en una determinada teoría. Conforme a esto, Lakatos menciona que el uso del contraejemplo muestra la necesidad de modificar el objeto matemático por otro que lo convierta en un concepto más acabado. Y en ese sentido Castro y Puig (1997) dicen que *los asaltos al concepto por sucesivos contraejemplos son producidos como consecuencia de la prueba de teoremas y las formas de modificar el concepto*. En la historia de las Matemáticas diversos conceptos han sufrido cambios necesarios y en parte se debe al empleo de los contraejemplos, los cuales muestran incongruencias en el desarrollo de esas nociones matemáticas.

En la perspectiva de este trabajo de investigación, se pretende poner en práctica el papel de la conjetura y del contraejemplo en el aprendizaje de las Matemáticas, para analizar qué tanto propician el cambio del pensamiento ingenuo y cómo fomentan a la estructuración de un pensamiento matemático adecuado en los estudiantes.

2. Sobre la conjetura y el contraejemplo

El hombre es un ser dotado de capacidades mentales que han evolucionado paulatinamente tratando de responder las interrogantes que afronta a diario; aunque algunas veces sus soluciones son inadecuadas, éste persiste haciendo cambios de perspectiva presentando nuevas ideas. Entonces en su formación ha usado la ayuda del método de ensayo y error para su desarrollo como individuo; el cual está sustentado con la Teoría de aprendizaje de Thorndike (1911) sobre ¿cómo aprenden los seres humanos? donde se afirma que *cuando aprendemos a jugar golf o tenis o billar,… no aprendemos principalmente de ninguna idea que se explique a nosotros, por ninguna inferencia que razonamos hacia fuera. Aprendemos por la selección gradual del acto o del juicio apropiado, por su asociación con las circunstancias o la situación requerida.* Sin embargo, surgen otras teorías sobre ¿cómo se aprende?

[3] Platón. (2003). *Diálogos. Volumen V: Parménides. Teeteto. Sofista. Político.* Madrid: Editorial Grecos.

con diversos enfoques; las cuales intentan explicar las formas de adquirir conocimientos, destrezas y habilidades necesarios como es el caso del conductismo o el constructivismo o el socioconstructivismo, entre otras.

Muchas de esas teorías apuntan sobre la idea que algunos individuos a través de buenas preguntas pueden elaborar conjeturas con la intención de resolver sus problemas, pero frente a problemas con otro grado de dificultad presentan un “pensamiento ingenuo” que obstaculiza el desarrollo hacia un pensamiento científico. Algo similar ocurre con algunos estudiantes cuando están intentando aprender Matemáticas, y que se refleja en sus desempeños escolares cuando no logran comprender conceptos, propiedades, estructuras matemáticas, entre otras que son necesarias para la construcción de un pensamiento matemático propio.

Sobre el desempeño escolar, las evaluaciones del sistema educativo muestran en cierta forma las limitaciones de los alumnos. En ese sentido, actualmente se realizan pruebas anuales a estudiantes mexicanos como es el caso de ENLACE (*Evaluación Nacional del Logro Académico en Centros Escolares)* desde primaria, secundaria y media superior en donde se manifiestan particularmente errores en Matemáticas. ¿Será que existen pensamientos muy arraigados en los alumnos? ¿Es posible cambiar estas percepciones con elementos lógico-matemáticos que lleven a transitar de un pensamiento ingenuo hacia uno matemático?

El pensamiento ingenuo se expresa algunas veces en errores que representan una preocupación en el medio educativo y muchas veces el docente lo caracteriza como un aspecto negativo en el proceso de aprendizaje, pues en su postura la equivocación de los estudiantes en su trabajo matemático escolar es un fracaso y *no se abandonan por simple exposición a los conceptos científicos correctos* (Pozo, 2003). Algunos autores lo han denominado obstáculo[4] en el sentido que impide la construcción de otros conocimientos y el surgimiento de nuevas ideas.

No es muy frecuente que el docente le pregunte a sus estudiantes sobre sus ideas o “conjeturas” para buscar soluciones a los problemas planteados en el aula, simplemente éste les da las respuestas sin realizar ningún análisis ni discusión con ellos acerca de cómo es que se llegó a tales respuestas. Es decir, la clase se presenta de manera tradicional cuando generalmente el docente expone el contenido siempre de la misma forma (contestándose él mismo sus preguntas), y exhibe una “postura conductista” dando todo como algo acabado sin un análisis crítico sobre el tema abordado.

Sin embargo, muchas veces los estudiantes no entienden el por qué esas respuestas son las adecuadas; ya que ellos poseen sus propias ideas que posteriormente usan en la solución de sus problemas. Esas respuestas algunas veces no son las correctas y casi nunca cambian las percepciones erróneas (errores o pensamientos ingenuos) por las soluciones adecuadas negándose a analizar las equivocaciones construidas en el proceso de aprendizaje.

Además, dentro del quehacer educativo referente al aprendizaje de las Matemáticas, el contraejemplo es un recurso que puede hacer ver a los estudiantes de cualquier nivel educativo que su pensamiento ingenuo no siempre funciona. Por

[4] La noción de obstáculo está relacionada con la idea de aprendizaje por adaptación. (Brousseau, 1986).

lo tanto, requiere modificarlo para tener una percepción adecuada de los conceptos y estructuras matemáticas estudiadas.

Los errores[5] dentro de casos específicos de pensamiento ingenuo son elementos que se han estudiado logrando que ese camino sea el inadecuado al momento de resolver un problema en el aula, pero pocas veces son tomados desde otro ángulo comprendiendo que realmente ese camino es incorrecto para el mejor logro de los aprendizajes. En ese aspecto Carrión (2007) sostiene que *no es suficiente que un individuo sepa lo correcto; debe saber lo que es incorrecto porque, de esta manera, se puede identificar el punto donde termina lo correcto y empieza lo incorrecto*. Dentro de la investigación, los errores son tomados como concepciones previas que no permiten una evolución del pensamiento en el alumno imposibilitándolo cambiar a la estructuración de un pensamiento matemático.

Ahora, si un estudiante posee un pensamiento matemático bien estructurado, puede hacer un análisis crítico de estructuras matemáticas como otras concepciones propias de la ciencia, o diversas actividades que involucren a este tipo de pensar. Entonces, una preocupación para la Didáctica de las Matemáticas es intentar explicar ¿cómo se puede lograr estructurar un pensamiento matemático en los estudiantes? Con esta interrogante se intenta buscar elementos tanto en la Matemática como en la Didáctica, que sirvan para dar respuesta a esta inquietud dentro de la investigación presentada.

En ese sentido, el proceso de conjeturar como elemento de construcción de un pensamiento matemático para los estudiantes, la mayor parte de las veces es algo que no es fomentado por el docente en el aula dejando de observar los conocimientos previos que estos tienen. Los científicos no construyen los conocimientos fácilmente; más bien en la mayoría de las veces están elaborando nuevas conjeturas que más tarde pueden llegar a convertirse en conocimientos mejor estructurados como es el caso de definiciones, lemas, teoremas, corolarios y teorías completas que componen las ciencias. Es por ello que nuestro objetivo en esta investigación es mostrar el papel que juega la conjetura y el contraejemplo en el aprendizaje de las Matemáticas.

Existe un recurso en Matemáticas que puede permitir en parte el cambio del pensamiento ingenuo de los estudiantes al que se le ha denominado “contraejemplo”. El contraejemplo consiste en plantear al estudiante una situación a partir de una contradicción que tiene que resolver, la cual constituye contraria a la que se analiza en el sentido que difiere del objeto de estudio.

Por ejemplo, cuando en álgebra se pregunta el resultado de $(a + b)^2$ algunos estudiantes dan como “conjetura precipitada” sin un buen análisis $a^2 + b^2$; se sabe que este pensamiento ingenuo y otros se ha estudiado desde distintas perspectivas teóricas como el caso de Ruano et al. (2008), los cuales clasifican y analizan los errores cometidos por parte de los alumnos en álgebra. Pero la pregunta que surge es ¿por qué vuelven a presentar esta idea como solución?, cuando en realidad la respuesta es $a^2 + 2ab + b^2$. La ayuda del contraejemplo presenta casos donde se obtiene que la relación $(a + b)^2 = a^2 + b^2$ no es válida, como se muestra cuando se asigna en particular $a = 1$ y $b = 2$. Con la ayuda de este pensamiento numérico $(1+2)^2 \neq 1^2 + 2^2 \Rightarrow 9 \neq 5$ se puede permitir un mejor tránsito a un pensamiento

[5] Concepto equivocado o juicio falso. (RAE).

algebraico; lo que sirve para mostrar una contradicción a la concepción errónea previamente establecida.

El empleo del contraejemplo permite estimular el razonamiento en los estudiantes del cómo y del porqué de los procesos que se siguen para llegar a conclusiones, y disminuir los procedimientos memorísticos y algorítmicos de aprendizaje que generalmente es lo que realizan la mayoría de los estudiantes. De acuerdo con lo que afirma Santos (2007) *el uso de contraejemplos cumple una función fundamental en el establecimiento de argumentos matemáticos y es una actividad que los estudiantes necesitan practicar constantemente*.

Con el contraejemplo y la conjetura se puede avanzar en la estructuración de los razonamientos lógico-matemáticos necesarios en los estudiantes, para que puedan ser valorados y mejorados por el docente y por ellos mismos. De esta manera, sus razonamientos pueden ser refinados o hasta fortalecidos, lo que a la vez puede permitir la formación de un pensamiento crítico y analítico vital en la formación de los individuos de una sociedad.

En consecuencia, es necesario observar cómo el uso de estos recursos permite un análisis de los temas matemáticos, haciendo un contraste con la clase tradicional que todavía se da en las escuelas. Con lo cual, se intente obtener provecho de los mismos al posibilitar el fortalecimiento de un pensamiento matemático científico en los estudiantes.

En la Didáctica de las Matemáticas poco se ha reportado sobre la importancia y transcendencia de la conjetura y el contraejemplo en el aprendizaje de las Matemáticas. Resulta pues necesario realizar investigaciones sistemáticas sobre tales temas lo que puede permitir poner atención en cómo estos recursos ayudan a la estructuración de un pensamiento matemático.

3. Construcción del saber matemático

El problema del aprendizaje de las Matemáticas está fuertemente vinculado con muchas variables que entran en juego dentro y fuera del aula de clases. Sin embargo, los estudiantes manifiestan muchas veces en sus desempeños académicos una falta de comprensión de las Matemáticas; el cual es el punto de partida de este trabajo de investigación. En el sentido de que se buscan analizar algunos elementos que intervienen en la construcción de un pensamiento matemático necesario para la compresión de las Matemáticas.

Algunos autores han tratado de caracterizar el pensamiento matemático para identificar cuándo un individuo lo pone en juego en diversas situaciones de su entorno. Una interpretación está relacionada con la capacidad de hacer matemática de parte un sujeto, dentro de las cuales se rescata las actividades de resolver problemas que involucra Matemáticas como es el caso particular del cálculo de tasas de interés en un banco, o la interpretación y análisis de datos estadísticos en una encuesta, entre otras.

Sin embargo, la mayor parte de las veces la “construcción de un pensamiento matemático” dentro de las actividades escolares sólo involucra el aprender a hacer como si eso fuera algo “mecánico”. Polya (1965) asegura que *para muchos estudiantes las matemáticas las pueden ver como un conjunto de rígidas reglas, algunas de las cuales se aprenden de memoria antes de los exámenes finales, y* *todas ellas se pueden olvidar después.* Entonces el aprendizaje de las Matemáticas solo se enfoca desde una perspectiva muy reducida sin intentar explicar otros elementos que entran en juego.

Todo lo anterior se refleja en la aula cuando se pide a los alumnos que resuelvan muchos ejercicios parecidos como una expresión del conductismo, cuando se observa las Matemáticas como algo principalmente algorítmico; lo que no permite una comprensión y análisis de que pensar matemáticamente incluye el aprender a conocer (logos), aprender a hacer (praxis) y aprender a ser profundizado en el objeto matemático estudiado en particular.

Sobre los aspectos antes mencionados se puede rescatar parte de los pilares de la educación en el informe de la UNESCO como lo reporta en Delors (1994) sobre el "*aprender a conocer*" que recae en adquirir conocimientos como su comprensión y contextualización para ser aprovechados a lo largo de la vida, el cual se entiende como una parte primordial para comprender el mundo que nos rodea porque el individuo accede en forma correcta a un razonamiento científico que lo hace involucrarse en el desarrollo de la humanidad. Relativo al "*aprender a hacer*" menciona que no es un *significado simple que tiene cuando se trata de preparar a alguien para una tarea material bien definida, para que participase en la fabricación de algo* sino que implica más allá de una mera transmisión de prácticas sociales rutinarias útiles en el desarrollo de una comunidad tanto actividades puramente físicas como otras de carácter de producción científica o intelectual. Sobre el *aprender a ser* se menciona de la capacidad de escoger responsablemente por medio de un *pensamiento autónomo y crítico y de elaborar un juicio propio, para determinar por sí mismos qué deben hacer en las diferentes circunstancias de la vida*, involucrando diversas formas de pensamientos que lleven a los estudiantes a ser tanto responsables como críticos en una sociedad de la que forman parte. Y entonces surge una pregunta ¿cómo es posible estructurar un pensamiento matemático en ellos?

3.1. Pensamiento matemático

El pensamiento matemático está relacionado con un saber erudito como sostiene Bachelard (1985, p.18) cuando habla de la formación de un espíritu científico sobre *la crisis del crecimiento del pensamiento implican una refundición total del sistema del saber*; para tal fin resulta importante dotar al estudiante elementos conceptuales que le permitan transitar de un pensamiento ingenuo a un pensamiento científico, referido a un pensamiento matemático (construido en parte por una comunidad de matemáticos) y que entre otros aspectos relevantes que lo conforman están lo crítico, analítico, entre otros.

Una de las tareas de la comunidad científica de matemáticos, es la que se refiere precisamente al desarrollo del saber erudito que entre otras actividades de su quehacer, están el caracterizar y definir diversos objetos abstractos con los que trabaja hasta llegar a obtener resultados generales que se expresan en teoremas y teorías completas. En cuanto al presente trabajo es de interés investigar lo relacionado con algunas formas de lograr que se desarrolle en los estudiantes su pensamiento matemático, que si bien en cierta forma se asemeja a lo que realizan los matemáticos profesionales, existen e intervienen otros elementos de carácter semiótico y sociocultural sobre los cuales se irá abundando más adelante.

Una aproximación a un pensamiento matemático está dada como un *concepto de carácter cognitivo, generalmente ubicado dentro de la psicología matemática y dentro de la psicopedagogía, que hace alusión al conjunto de representaciones mentales, o redes de conceptos de carácter matemático, y a los procesos cognitivos que actúan sobre esas representaciones*; tomada de la S. E. C.[6] (2005). Sin embargo, se resalta el hecho que no sólo debe observarse o interpretarse como algo puramente sicológico y que debe incorporar otros aspectos de carácter cultural, escolar o social entre otros.

En ese sentido, el pensamiento matemático, es la capacidad del individuo de usar las matemáticas para resolver diversas situaciones que se dan en su vida cotidiana ya sea este un matemático profesional o un estudiante como sostienen Cantoral et al. (2005) que *se desarrolla en todos los humanos en el enfrentamiento cotidiano a múltiples tareas* y como aquel que *no se reduce al pensar cuando se está ante una actividad matemática*; sino que se involucra dentro de las necesidades sociales y culturales de cada individuo que le permitan darle solución, siempre y cuando posea los elementos matemáticos adecuados.

En cierta forma la sociedad en que se encuentra inmerso un individuo demanda de la construcción de un pensamiento matemático como un requisito indispensable para entender al menos en parte el mundo matematizado que está en medio de muchas de sus diarias actividades, como el caso entre otros aspectos matemáticos de entender o interpretar las representaciones gráficas. Si por ejemplo, un inversionista quiere examinar la evolución del dólar estadounidense frente a otras divisas monetarias en una página de Internet; tiene la posibilidad de hacer estudios de comportamiento, y tendrá la necesidad de usar un pensamiento matemático para buscar soluciones a sus inquietudes cuando lee, interpreta y analiza la gráfica que le permitan tomar decisiones.

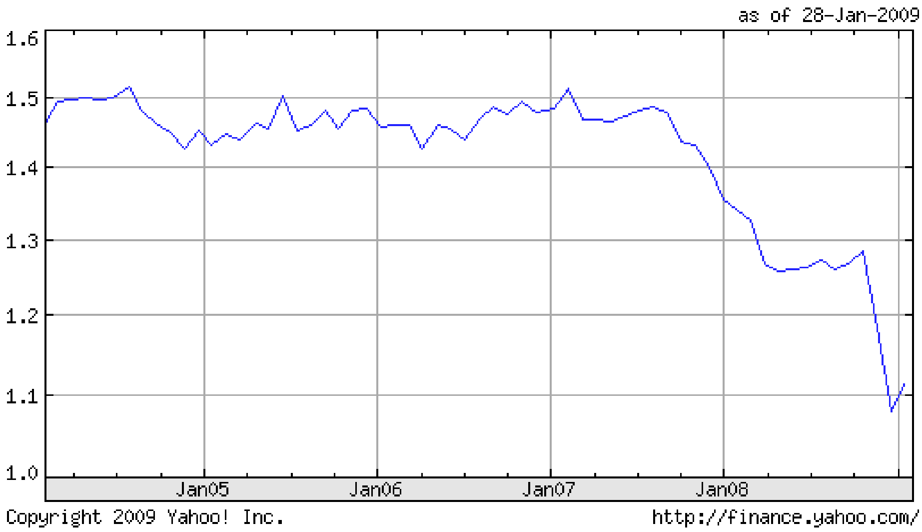


Figura 1. Tomado de Yahoo! México finanzas el jueves 29 de enero de 2009, 3:32PM MX de la relación de cambio de dólares estadounidenses a euros.

[6] Secretaría de Educación de Colombia. Pruebas Comprender Matemáticas.

En forma más amplia dentro de los Cuadernos de Evaluación, S. E. C.[7] (2005) designan al pensamiento matemático como conjunto de representaciones mentales internas, redes de conceptos, se relaciona con las diferentes representaciones simbólicas externas - lenguaje verbal, íconos, símbolos matemáticos. Entonces si los alumnos poseen elementos matemáticos bien definidos como conceptos, las relaciones entre conceptos, representaciones geométricas, representaciones algebraicas, entre otros pueden ser capaces en menor o mayor escala de construir un pensamiento matemático adecuado usándolo en un contexto particular donde interviene lo crítico y lo analítico.

Se afirma entonces que estructurar un pensamiento matemático en los individuos es relacionarlo con lo crítico y lo analítico; donde un pensamiento crítico es buscar características invariantes que se observan como: la capacidad de discernimiento aunado a elementos para incorporar al debate, evaluación de los hechos o eventos que entran en juego, la búsqueda de contradicciones, el aspecto autocrítico, entre otras. Además, en un pensamiento analítico se identifican variables que intervienen en la situación problema, se incorpora un razonamiento lógico inductivo o deductivo que muestra, participa e interrelaciona el todo y las partes de un objeto estudiado.

El *pensamiento matemático* es un concepto en el que se hace referencia sobre la manera de pensar matemáticamente usando diversos elementos de la ciencia para resolver actividades que la requieran; pero involucrar a las Matemáticas es entre otros. Es decir, dentro del pensamiento matemático existe una variedad de pensamientos más específicos muchas veces entrelazados que usa el matemático y también pueden ocuparlos los estudiantes en sus procesos de razonamiento que ligados conforman o unifican un pensamiento matemático requerido.

3.2. Metodología.

La metodología que se ocupa en este trabajo es de tipo cualitativa sustentada en la Ingeniería Didáctica, de tal manera que se ha realizado un análisis de la relevancia de la conjetura y el contraejemplo en el medio escolar sobre el aprendizaje de las Matemáticas. Con respecto al análisis se toman como elementos de búsqueda de información una entrevista, un examen diagnóstico y la revisión de libros de textos; donde todo lo anterior es similar al trabajo realizado por un ingeniero pero en la Didáctica de las Matemáticas.

En ese mismo orden, Artigue et al. (1995) denominan a la Ingeniería Didáctica como *una forma de trabajo didáctico equiparable con el trabajo de un ingeniero quien, para realizar un proyecto determinado, se basa en los conocimientos científicos de su dominio y acepta someterse a un control científico*. Una investigación que se sustenta en la Ingeniería Didáctica no se basa solamente en un cuadro teórico didáctico general, ya que se ocupan herramientas como la entrevista a un experto[8] que enriquecen el trabajo; y que ayuda a validar en parte lo mostrado en el marco conceptual sobre el papel de la conjetura y el contraejemplo al estructurar un pensamiento matemático.

[7] Secretaría de Educación de Colombia. (2005)
[8] *Ver sección 3.1 página 48*

La Ingeniería Didáctica (Artigue et al., 1995) presenta cuatro fases que permiten ayudar en el desarrollo del trabajo investigativo, y las cuales se explican a continuación.

- *Primera fase:* un análisis preliminar, *se estructura en torno al análisis del funcionamiento de un sistema, un equilibrio que por mucho tiempo fue estable pero que ahora se percibe como obsoleto.* En el trabajo se ubica la situación del aprendizaje de las Matemáticas en México y Panamá, haciendo un análisis general breve de algunas de las evaluaciones en parte de los dos sistemas educativos, revisando libros de texto de autores extranjeros usados en las aulas, entre otras actividades teniendo en cuenta los objetivos de la investigación.
- *Una Segunda fase:* el análisis a priori y concepción, donde *el investigador toma la decisión de actuar sobre un determinado número de variables del sistema no fijadas por las restricciones*. En el trabajo se relación dos variables, el pensamiento ingenuo y el pensamiento matemático, pero a su vez qué papel en ese tránsito juegan la conjetura y el contraejemplo, donde todo lo anterior permite un análisis descriptivo de todas esas variables.
- *Tercera fase: la experimentación*, donde se ocupan variables para observar su desarrollo. En el trabajo no se realiza una intervención didáctica directa en el sistema; más bien se muestra cómo aparecen las variables en los libros de textos y cómo lo emplea el docente entrevistado, lo cual permite mostrar las ventajas de la conjetura y el contraejemplo en la educación.
- *Cuarta fase: análisis a posteriori*, *se basa en el conjunto de datos recogidos a lo largo de la experimentación, a saber de las observaciones realizadas*. Hay un análisis a posteriori que realiza la investigación sobre las consecuencias de la incorporación de la conjetura y el contraejemplo que permitan algunas modificaciones de las prácticas tradicionales, donde se analiza en parte las formas de enseñanza del experto como el uso de estos recursos en libros de textos que se emplean para la preparación de las clases por parte de los profesores.

Douady (1995) sostiene que la Ingeniería Didáctica se considera un *producto*, el cual resulta de un análisis a priori que se realiza en el transcurso del trabajo de investigación. Además, los análisis a priori y a posterior permiten una confrontación y *se fundamenta en esencia la validación de las hipótesis formuladas en la investigación*, como sostienen Artigue et al. (1995), en el caso de este trabajo se buscan evidencias que permitan mostrar que tanto la puesta en escena en situación escolar de la conjetura y el contraejemplo, posibilitan el tránsito del pensamiento ingenuo al pensamiento matemático.

3.3. La Conjetura y el contraejemplo, recursos para el proceso de aprendizaje.

El tránsito de un pensamiento ingenuo a la estructuración de un pensamiento matemático es uno de los procesos que están tomando mayor interés en la Didáctica de las Matemáticas. Existen muchos elementos que entran en juego en este proceso del individuo que permiten el posible tránsito necesario en los alumnos.

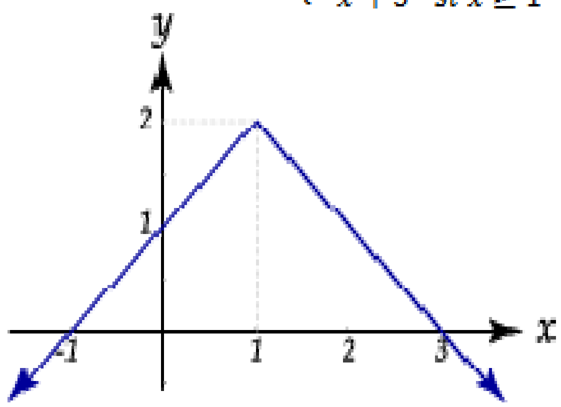
Muchas veces los estudiantes no entienden el por qué sus respuestas son inadecuadas; ya que ellos poseen sus propias ideas que posteriormente usan en la solución de sus problemas. Esas respuestas algunas veces no son las correctas y casi nunca cambian las percepciones erróneas (errores o pensamientos ingenuos) por las soluciones adecuadas negándose a analizar las equivocaciones construidas en el proceso de aprendizaje.

Un pensamiento ingenuo se puede manifestar en un error que requiere el uso de elementos auxiliares que posibiliten cambiar o modificar esas percepciones por otras; las cuales ayuden a transitar a un pensamiento matemático a los alumnos.

Hay elementos auxiliares para el proceso de enseñanza-aprendizaje, como es el caso de ejemplos que refuten la forma incorrecta de pensar sobre temas tratados por el alumno. Estos pueden ser necesarios para cambiar parte del contrato didáctico, el cual se da carácter principalmente acrítico en las unidades académicas observadas.

Dentro de los cursos de matemáticas examinados el contrato didáctico es tradicional (con una postura conductista, en general); porque la mayor parte de las veces solo se presentan las demostraciones formales de los teoremas y se hace poca referencia a sus recíprocos. Con respecto a los recíprocos, se tiene el caso de la afirmación que "*toda función continua es derivable"* (ejemplo de un curso de Cálculo); y para observar que este enunciado es falso se podría hacer un ejemplo que lo refuten como el siguiente:

Sea f la función definida por: $f(x) = \begin{cases} x+1 & si\ x < 1 \\ -x+3 & si\ x \geq 1 \end{cases}$. Su representación gráfica es la siguiente:



Los estudiantes se pueden percatar que la función no es derivable en x = 1; con lo cual el enunciado "*toda función continua es derivable"* no es verdadero por medio de la visualización gráfica presentada, en el cual existen dos derivadas porque la función tiene dos rectas. Pero es importante observar que si se busca entender por medios matemáticos más formales, se da caso de la definición de derivada en el punto x = 1 se muestra el siguiente fundamento:

$$f'(1) = \lim_{h\to 0} \frac{f(h+1) - f(1)}{h} \text{ no existe}$$

Pero ¿por qué no existe la derivada en ese punto? ¿Se pueden comprobar los siguientes hechos?

$$\lim_{h\to 0^+} \frac{f(h+1) - f(1)}{h} = \lim_{h\to 0^+} \frac{(h+1)+1-2}{h} = \lim_{h\to 0^+} \frac{h}{h} = 1 \quad \text{y}$$

$$\lim_{h\to 0^-} \frac{f(h+1) - f(1)}{h} = \lim_{h\to 0^-} \frac{-(h+1)+3-2}{h} = \lim_{h\to 0^-} \frac{-h}{h} = -1$$

En algunos libros de Calculo esos dos límites se conocen como *derivada por la derecha* y *derivada por la izquierda* cuando *f* se valúa en 1. Como estos dos límites difieren entonces la derivada no existe. Con lo cual se tiene que:

$$f'(x) = 1 \quad \text{si } x > 1,$$

$$f'(x) = -1 \quad \text{si } x < 1$$

Con todos estos argumentos presentados se expresa de una manera más formal que en efecto la derivada no puede evaluarse en el punto $x = 1$. Entonces con este ejemplo se tiene claro que no todos los enunciados presentados como afirmaciones en el aula son verdaderos.

Un ejemplo en matemática que refute un enunciado (como el caso del problema anterior) es conocido como un *contraejemplo*; el cual permite observar claramente cuando una conjetura no es correcta. Según la RAE un contraejemplo *es un ejemplo que contradice lo que se ha pretendido mostrar con otro*. Es decir, que el enunciado tomado como verdadero presenta ejemplos que lo refutan en un contexto que no cumbre con las mínimas expectativas para ser cierto. Esta idea está apoyada en que *es un elemento perteneciente al dominio de una determinada afirmación que no verifica lo afirmado. La existencia de un contraejemplo, desde un punto de vista lógico, es una crítica con la fuerza suficiente para refutar la afirmación, o sea, para hacer explícita su falsedad* (Calvo, 2002)

En ese sentido, muchas afirmaciones presentadas como conjeturas son falsas y en el caso del quehacer matemático es necesario refutarlas para poder limitar cuando se ha construido un nuevo conocimiento de otro que podría considerarse un obstáculo como sostiene Lakatos (1978) cuando se está construyendo el concepto de poliedro regular que forma parte del razonamiento matemático, cual se debería reflejar dentro de la práctica escolar cuando los alumnos presentan pensamientos ingenuos o errores o conjeturas con poca sustentación teórica. Entonces existe la necesidad de un cambio en las prácticas educativas tradicionales porque estas no permiten la estructuración de un pensamiento matemático en los estudiantes similar a los científicos ya que no introducen elementos como la conjetura y el contraejemplo.

Siguiendo con el hecho de examinar funciones especiales en el Cálculo, se cumplirá siempre que "*toda función con limite en x_0 es continua en x_0*". Esta afirmación se puede refutar presentado el siguiente contraejemplo:

Siguiendo con el hecho de examinar funciones especiales en el Cálculo, se cumplirá siempre que "*toda función con limite en x_0 es continua en x_0*". Esta afirmación se puede refutar presentado el siguiente contraejemplo:

Sea $f(x) = \frac{x^2-4}{x-2}$, ¿Qué pasa con la continuidad cuando $x = 2$?

Se tiene que $\lim_{x\to 2} \frac{x^2-4}{x-2} = \lim_{x\to 2}(x+2) = 4$

Una función es continua si se cumple que $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$. Sin embargo, en la función *f(x)* no es posible asignarle a $x = 2$ ya que no es posible dividir entre cero.

$|x-2| > 0$ Porque no puede tomar el valor de 0.

$$|x-2| > 0 \quad \to \quad |x-2| \neq 0 \quad \to \quad x-2 \neq 0 \quad \to \quad x \neq 2$$

Entonces con todos estos lineamentos tratados se puede construir una especie de jerarquización de las funciones con límites en x_0, funciones continuas en x_0 y funciones derivables en x_0. Se muestra un diagrama a continuación de las relaciones esas funciones.

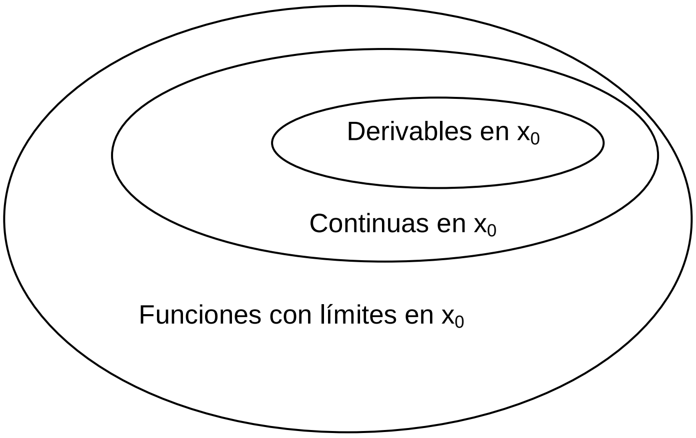


Figura 2. Estos conjuntos dan una relación estrecha entre estas estructuras matemáticas con diferentes categorizaciones en el estudio de Cálculo

Como se puede observar, si las afirmaciones no están claramente construidas con buenos argumentos lógico-matemáticos como los dos últimos enunciados ("*toda función con limite en x_0 es continua en x_0*" y "*toda función continua es derivable"*); es necesario el uso de contraejemplos (si existen) que posibiliten cambiar esos errores que frecuentemente exhiben los estudiantes.

El empleo de contraejemplos permite estimular el razonamiento en los estudiantes del cómo y del porqué de los procesos que se siguen para llegar a conclusiones, y disminuir los procedimientos memorísticos y algorítmicos de aprendizaje que generalmente es lo que realizan la mayoría de los estudiantes. De acuerdo con lo que afirma Santos Trigo (2007) *el uso de contraejemplos cumple una función fundamental en el establecimiento de argumentos matemáticos y es una actividad que los estudiantes necesitan practicar constantemente*.

La postura del docente se muestra por su poca disponibilidad de usar recursos diferentes a los que generalmente presenta en el aula, con esta forma siempre aborda los temas sin un análisis crítico de la situación y por la falta de interés de los estudiantes al intentar encontrar las respuestas a las problemas planteados en el aula. Aquí la postura del estudiante es que él aprende los nuevos conocimientos sólo cuando el maestro le enseña, de tal manera que no es capaz de buscar por su propia cuenta soluciones a sus dudas.

Parte de las posturas que adoptan algunos profesores, como las anteriormente señaladas, repercuten en los estudiantes cuando reiteradamente cometen las mismas equivocaciones a la hora de realizar sus desarrollos matemáticos; mostrando en parte un pensamiento ingenuo al no tener control sobre ellos porque carecen de otros elementos que posibiliten un cambio. Desde esta perspectiva, puede ser el contraejemplo un recurso de aprendizaje de las Matemáticas que proporcione cambiar el pensamiento ingenuo a la estructuración de un pensamiento matemático.

Con este elemento presentado surge la necesidad de usar otras estrategias para la estructuración de un pensamiento matemático, el cual es fundamental incorporar en los estudiantes como miembros de una sociedad que explica en gran parte muchos fenómenos de la naturaleza con el uso de un lenguaje matemático.

4. Reflexión final

Todos los individuos tienen pensamientos inmediatos que en un momento pueden ser ingenuos, los cuales no se modifican tan fácilmente porque las estructuras conceptuales donde subyacen necesitan ser "sacudidas" (García, O. y Morales, L. 2012) Es necesario cambiar esos pensamientos con la ayuda de contraejemplos, que el profesor puede incorporar en el escenario didáctico para dotar a los estudiantes de elementos conceptuales que le permitan reforzar con argumentos coherentes la instalación de un pensamiento matemático.

El contraejemplo es un elemento que se puede usar en el quehacer educativo matemático, permitiendo cambiar los pensamientos ingenuos de los estudiantes, específicamente sus percepciones inadecuadas que causan una limitación para la compresión de un concepto matemático, lo que se convierte en un obstáculo cognitivo que imposibilita avanzar en la estructuración de un pensamiento matemático.

En el proceso investigativo se reafirmó que el desarrollo del pensamiento matemático es uno de los ejes principales al que se requiere poner atención dentro del proceso de enseñanza aprendizaje de las Matemáticas, ya que sin su adecuada instalación los estudiantes difícilmente pueden tener un desempeño matemático competente.

En general, es necesario realizar cambios urgentes en las prácticas educativas tradicionales donde se pueda incorporar a la conjetura y al contraejemplo, para que los profesores ayuden a sus estudiantes a cambiar sus pensamientos ingenuos hacia la estructuración de un pensamiento matemático adecuado. Así, los estudiantes pueden tener herramientas para ser en cierta forma competitivos, críticos y analíticos en una sociedad que maneja muchas de sus informaciones en un lenguaje matemático

Reconocimiento: Investigación financiada por la Secretaria de Ciencia y Tecnología (SENACYT) en el programa Nuevos Investigadores 2011.

Bibliografía

Bachelard, G. (1985). *La formación del espíritu científico*. México: Editorial Siglo XXI.

Brousseau, G (1986) *Fundamentos y métodos de la Didáctica de las Matemáticas*. Investigaciones en Didáctica de la Matemáticas, Vol. 7, n. 2, pp. 33-115.

Calvo, C. (2001) *Un estudio sobre el papel de definiciones y las demostraciones en cursos preuniversitarios de Cálculo Diferencial e Integral.* Tesis Doctoral. Universidad Autónoma de Barcelona. Departamento de Didáctica de la Matemática y de las Ciencias Experimentales.

Cantoral, R., Farfán, R., Cordero, F., Alanís, J.A., Rodríguez, R.A., Garza, A. (2005). *Desarrollo del pensamiento matemático.* México: Trillas.

Carrión, V. (2007). Análisis de errores de estudiantes y profesores en expresiones combinadas con números naturales. *Revista Iberoamericana de Educación Matemática*, 11, 19-57.

Castro, E. y Puig, L. (1997). Representaciones y Modelización. Análisis fenomenológico, en Rico, L. (coord.). *La Educación Matemática en la Enseñanza secundaria*. Barcelona: ICE/Horsori. pp. 61-122.

Delors, J. (1994). *Los cuatro pilares de la educación*. *La educación encierra un tesoro*. México: Ediciones UNESCO. pp. 91-103

García, O. y Luisa, M. (2012). La incorporación de la conjetura y el contraejemplo. Alemania: Editorial Académica Española.

Lakatos, I. (1978) *Pruebas y Refutaciones. La lógica del descubrimiento matemático*. Madrid, España. Alianza Universidad (Traducción al castellano de: *Proofs and Refutations-The Logic of Mathematical Discovery*. Cambridge: University Press, 1976).

Ministerio de Educación y Ciencia. (2006). *PISA 2006. Programa para la Evaluación Internacional de los Alumnos de la OCDE. Informe en Español.* Madrid: Secretaria General Técnica. p. 70

Platón. (2003). *Diálogos. Volumen V: Parménides. Teeteto. Sofista. Político.* Madrid: Editorial Grecos.

Pozo, J. (2003). *Teorías cognitivas del aprendizaje.* Madrid: Ediciones Morata, S.

RAE. *Diccionario de la Real Academia Española.* Disponible en la red en la dirección electrónica http://www.rae.es/rae.html

Rico, L. (1995). Errores en el aprendizaje de las Matemáticas*.* En Kilpatrick, J., Rico, L. y Gómez, P. *Educación Matemática*. México: Grupo Editorial Iberoamérica.

Ruano, R., Socas, M. y Palarea, M. (2008). Análisis y Clasificación de Errores cometidos por Alumnos de Secundaria en los Procesos de Sustitución Formal, Generalización y Modelización en Álgebra. *PNA*, 2(2), 61-74.

Santos, L. M. (2007) *La Resolución de Problemas Matemáticos. Fundamentos Cognitivo.* México: Editorial Trillas.

Secretaria de Educación de Colombia. (2005). Pruebas Comprender de Matemáticas. Serie Cuadernos de Evaluación. Bogotá: Cargraphics S.A. http://www.sedbogota.edu.co/AplicativosSED/Centro_Documentacion/anexos/publicaciones_2004_2008/guias_eval_matematicas_5_9.pdf. *Ultima fecha de acceso en la red 10 de diciembre de 2012*

Thorndike, E. (1911). *Animal intelligence.* New York: Macmillan. Recuperado de la dirección de internet http://psychclassics.asu.edu/Thorndike/Animal/

Orlando García Marimón y Luisa Morales Maure tienen una Licenciatura en Matemática de la Universidad de Panamá, además de una Maestría en Ciencias Matemáticas y su Didáctica de la UAEH-México, investigadores del Instituto de Estudios Nacionales y SENACYT. **lui.mora@hotmail.com, nangarcia@hotmail.com**

REVISTA IBEROAMERICANA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA
www.fisem.org/web/union

ISSN: 1815-0640
Número 35. Septiembre de 2013
páginas 177-201
Coordinada por Fredy González

Historia Social de la Educación Matemática en Iberoamérica:

Las Ecuaciones Lineales en los Libros de Texto de Matemática para Educación Básica en Venezuela: 1987-2007

Evelyn Pinto, Fredy González

Resumen	Las ecuaciones lineales son importantes en la Matemática Escolar del Subsistema Educativo Bolivariano; los autores han observado, recurrentemente, que los estudiantes de Séptimo Grado de la III Etapa de Educación Básica (actualmente Primer Año del Subsistema de Educación Básica) presentan fallas al estudiarlas, presumiendo que están asociadas con el modo como se expresan en los libros de texto usados para enseñar Matemática en este nivel. Por ello, se llevó a cabo esta investigación, cuyo propósito fue analizar el tratamiento dado a las ecuaciones lineales en los libros de texto de Matemática de séptimo grado usados en Venezuela entre 1987 y 2007. Se planteó un estudio documental, de carácter no experimental en la selección de las unidades de análisis (libros de textos). **Palabras clave**: Libros de texto, Ecuaciones lineales, Educación básica.
Abstract	Linear equations are important in School Mathematics Bolivarian Educational Subsystem, the author has observed, repeatedly, that the Seventh Grade Students of the Third Stage of Basic Education (now First Year Basic Education Subsystem) are flawed by studying, presuming that are associated with the way they are expressed in the textbooks used to teach mathematics at this level. Therefore, we conducted this research, whose purpose was to analyze the treatment given to the linear equations in mathematics textbooks used seventh grade in Venezuela between 1987 and 2007. The study was planned documentary, experimental non-selection of the units of analysis (textbooks). **Keywords:** Text books, Linear Equations, Basic Education.
Resumo	Equações lineares são importantes na Escola Matemática Educativo Bolivariano Subsystem, o autor observou, repetidamente, que o Sétimo Grau Alunos da terceira etapa da Educação Básica (agora Primeiro Ano do Subsistema de Educação Básica) são falhos, estudando, presumindo que estão associadas à maneira como eles são expressos nos manuais utilizados para ensinar matemática a este nível. Por isso, realizamos esta pesquisa, cujo objetivo foi analisar o tratamento dado às equações lineares nos livros didáticos de matemática utilizados sétima série na Venezuela entre 1987 e 2007. O estudo foi planejado documentário, experimental não-seleção das unidades de análise (livros didáticos). **Palavras-chave**: Livros didáticos, Equações lineares, Educação Básica.

1. Introducción

Actualmente, se vive en una era de constantes cambios y adelantos, tales como las TIC'S (Tecnologías de Información y Comunicación) y los *software* educativos, que ofrecen al estudiante una amplitud de oportunidades para su formación; al mismo tiempo, brindan al docente la posibilidad de innovar, ayudándoles a crear un ambiente propicio para llegar, positivamente, al alumno, aportando así una instrucción de calidad.

Sin embargo, un aspecto que no debe dejarse de lado son los libros de texto que, previo a aquellos avances tecnológicos, han sido el recurso didáctico más usado; ellos son la principal fuente de información a la que acuden estudiantes y docentes en búsqueda de apoyo para su quehacer educativo, siendo, por tanto, una herramienta didáctica en la que se confía y un medio que incentiva y motiva al estudio. Esta es una de las razones por las que, para acompañar el proceso de formación educativa en las instituciones y por parte del docente, es común recomendar el uso de libros de texto, en donde, además se consulta y se hace seguimiento al contenido.

La situación antes descrita es particularmente notoria en el caso de la Matemática, asignatura fundamental en el desarrollo académico de todo individuo y disciplina científica, cuyas bases históricas, teóricas y epistemológicas, son esquematizadas en forma secuencial en los programas educativos que, al propiciar las adaptaciones de los objetos matemáticos a los diferentes proyectos educativos, hace posible la Transposición Didáctica, tal como lo expresó Chevallard (1985; citado en Godino, Batanero, y Font, s.f.); es decir, la transformación del saber científico en un saber que sea susceptible de ser enseñado.

De igual manera, ocurre igualmente con los libros de texto, considerados como referentes del programa de estudio, cuando son adaptados a las exigencias y necesidades previstas en tales programas; la Transposición Didáctica, además, está presente en la planificación que el docente seguirá durante el desenvolvimiento de su clase, mediante la cual pretende clarificar el contenido correspondiente.

En el estudio aquí reportado, el interés se centró en el tratamiento que se da en los libros de texto a las ecuaciones lineales (ecuaciones de primer grado con una incógnita). Para ello, se tomaron en cuenta tanto los planteamientos de Orellana (2002), quien pregunta *"¿Qué enseñar de un tópico o de un tema?";* es decir, ¿Cuáles son los requerimientos para enseñar un determinado contenido?; como también los de Toulmin (1958, citado en Jiménez, Álvarez y Lago, 2005), quien sostiene que el desenvolvimiento argumentativo de un contenido exige, al menos, la presencia de datos, conclusiones y justificaciones, relacionados con dicho contenido; así mismo, (F. González, entrevista personal, febrero 03, 2009), plantea aspectos esenciales para analizar un libro de texto.

Vale destacar que el análisis no se limitó sólo a los conceptos y procedimientos desarrollados en los libros de texto de Matemáticas, sino que, además, se procuró comprender y dar una visión general de cómo son tratadas las ecuaciones lineales en Séptimo Grado de la III Etapa de Educación Básica (actualmente Primer Año del Subsistema de Educación Básica en Venezuela) tanto en los conjuntos de números Naturales (*N*), y los números Enteros (*Z*), como en el de los números racionales (*Q*); así que, de los libros más utilizados se examinaron:

(a) Sus características físicas de tipo educativo y motivacional; (b) los criterios pedagógicos y didácticos tomados en cuenta en su edición y (c) el uso que proponen de la resolución de problemas.

El estudio abarcó el lapso 1987-2007; y procuró saber cuáles orientaciones didácticas fueron seguidas durante el lapso indicado, en la enseñanza del mencionado objeto matemático, en función de: (a) elementos que se han tomado en cuenta; (b) aspectos necesarios en su desenvolvimiento; (c) direccionalidad de la enseñanza y (d) aportes al estudiantado.

2. Planteamiento del problema

Los libros de texto se caracterizan por ser un apoyo sobre el cual se sustenta lo aprendido en clase; se acude a este material didáctico impreso como parte de los procesos de enseñanza y aprendizaje, para complementar lo estudiado o realizar una tarea asignada; de igual forma, el docente lo usa como guía en su planificación diaria, de ahí la importancia que se les atribuye como elemento integrante de dicho proceso; por tanto, deben conservar un orden que se ajuste a los programas educativos.

Además, se considera que estas publicaciones proporcionan indicaciones sobre cómo debe hacerse seguimiento al proceso de aprendizaje; señalan las soluciones inherentes al tema; sugieren diferentes actividades y, a su vez, posibles formas de evaluar el contenido correspondiente. Son un recurso al que se puede acceder tanto en el aula como fuera de ella, realizando estudios independientes, donde no se cuente con las correcciones inmediatas de un docente; por esto, deben manejar cuidadosamente, la información y evitar dar paso a definiciones ambiguas, sin calidad formativa.

Es común en la práctica docente, al revisar los libros de texto para la planificación de las clases, observar que (siendo el mismo nivel educativo y siguiendo los acuerdos establecidos en los programas de estudio) cada autor tiene una manera de presentar los contenidos, de dirigir las actividades y sugerir estrategias de evaluación.

Además, es preocupante que en este tipo de publicaciones, algunos temas no se expresen en forma clara o correcta, propiciando una interpretación inadecuada de los conceptos, generando así confusiones que, en la práctica docente, se hacen notar. Ésta es una de las razones que se tuvieron presentes para desenvolver el presente estudio, el cual consistió en un análisis de los libros de textos en cuanto a sus orientaciones didácticas, dado que es un recurso de fácil acceso y, por lo tanto, debe ser estudiado a profundidad.

El análisis se centró en las ecuaciones lineales, que es un contenido contemplado en el Séptimo Grado de la III Etapa de Educación Básica (actualmente Primer Año del Subsistema de Educación Básica en Venezuela), debido a que se observa que los estudiantes, al resolverlas, no realizan adecuadamente los procedimientos matemáticos correspondientes ni ponen en práctica las definiciones básicas; utilizan un vocabulario y operaciones inadecuadas, sin aplicar las propiedades implicadas en su resolución; por tanto, es oportuno revisar el tratamiento didáctico de este tema que se maneja en estas publicaciones, como aspecto que podría estar influyendo en esta forma de proceder de los alumnos, quienes no comprenden qué es una ecuación ni qué significa resolverla. Las ecuaciones, representan un objeto matemático de gran importancia; la interacción del aprendiz con situaciones problema donde se utiliza este objeto, coadyuva al proceso de desarrollo de su pensamiento matemático, el cual debe formarse desde los primeros niveles de estudio.

Uno de los principales participantes en el proceso de enseñanza-aprendizaje es el docente, quien actúa como mediador entre el conocimiento científico y el estudiante, para lo cual debe valerse de estrategias didácticas que le permitan propiciar el desarrollo del pensamiento matemático del alumno; llevando a cabo una enseñanza de calidad: (1) Aportando adecuadas definiciones, ejemplos y demostraciones; (2) planteando la resolución de problemas relacionados con el entorno; y, en la medida de lo posible, con otras áreas afines; (3) aclarando las dudas que el estudiante pueda presentar, cuando el lenguaje utilizado en el libro de texto no esté a su alcance o en las diferentes fuentes disponibles para realizar las actividades asignadas, medios a los que, también, acude el docente para su actualización y planificación de clases.

Por otra parte, se puede afirmar que, el libro de texto constituye un recurso básico para el docente, quien recurre a este medio como una herramienta fundamental para apoyarse en su desempeño en el aula. Por tal motivo, sus contenidos deben ser fidedignos, precisos, claros, didácticos y con un alto valor pedagógico, de modo que sean accesibles al análisis, comprensión y entendimiento por parte del alumnado, tal como lo afirma Restrepo (1999), quien sostiene que:

> El éxito de la relación texto-alumno, se da en la medida que los contenidos que el texto involucra sean accesibles desde la didáctica al lector o usuario, el cual debe interrelacionar de manera individual con el texto. De ahí la importancia de conocer algunos conceptos de didáctica. (p. 74).

Por lo tanto, en un libro de texto la disposición de los objetivos, contenidos, estrategias metodológicas, materiales y recursos, debe atender y estar en concordancia con las necesidades de cada nivel educativo y, al mismo tiempo, crear oportunidades para que el estudiante/lector pueda desarrollar su pensamiento crítico y tenga opción para formular preguntas y analizar diferentes puntos de vista.

Por consiguiente, esta investigación surgió con el propósito de verificar estos requerimientos en los libros de texto de Matemáticas que se han usado en Venezuela para la Educación Básica, examinando, particularmente, el tratamiento que se la ha dado a las ecuaciones lineales, conocidas, también, como ecuaciones de primer grado con una incógnita.

3. Método

En cierto sentido, esta investigación se emparenta con aquellas que se refieren a la evaluación de la producción científica; al respecto, Maletta (2009), plantea que:

El concepto de “producción” aplicado a la ciencia no es demasiado usual. Es un concepto más abarcativo que la “investigación” científica, pues incluye todos los procesos involucrados en la actividad científica, y enfatiza además que la ciencia no es un saber adquirido, sino un "hacer", una *actividad*. El concepto de producción implica, además, que los científicos toman ciertos “insumos” o ingredientes y los transforman en “productos” que luego pueden ser usados por otros científicos o por la sociedad en su conjunto (p. 17).

En efecto, se supone que los autores de libros de texto en una disciplina determinada, son practicantes de tal disciplina; por ende, los ejemplares que se escriben para que sean usados como texto en los procesos de enseñanza y aprendizaje, deben ser asumidos como parte de la producción científica dentro de la misma. De allí que, la presente investigación se apoyó en una indagación de naturaleza documental de carácter no experimental.

Por consiguiente, en cuanto a la investigación documental el “Manual de Trabajos de Grado de Especialización y Maestría y Tesis Doctorales” de la Universidad Pedagógica Experimental Libertador (UPEL, 2006), señala que es “el estudio de problemas con el propósito de ampliar y profundizar el conocimiento de su naturaleza, con apoyo, principalmente, en trabajos previos, información y datos divulgados por medios impresos, audiovisuales o electrónicos...” (p. 20). Dentro de esta perspectiva, la revisión de los libros de texto de Matemática de Séptimo Grado de la III Etapa de Educación Básica (actualmente Primer Año del Subsistema de Educación Básica en Venezuela), permitió ahondar en el tratamiento dado a las ecuaciones lineales.

Globalmente, este estudio se caracterizó como no experimental. Al respecto, Palella y Martins (2006), estiman que así son caracterizadas las indagaciones que se desarrollan: “sin manipular en forma deliberada ninguna variable. El investigador no sustituye intencionalmente las variables independientes. Se observan los hechos tal y como se presentan en su contexto real y en un tiempo determinado o no, para luego analizarlos” (p. 96), de donde en la selección de las unidades de análisis (libros de texto) no hubo, según Palella y Martins (ob. cit.), “asignación aleatoria entre grupo experimental y grupo control” (p. 97); es decir, no se manipularon variables; el estudio fue hecho a partir de materiales que no podían ser modificados de forma alguna; en este sentido, las conjeturas, conclusiones realizadas no pueden asumirse, según indican Palella y Martins (ob. cit.), como “inferencias causales” (p. 97) sino, a lo sumo, como “generalizaciones descriptivas” (p. 97), aplicables sólo a los libros constitutivos del *corpus* de análisis.

En cuanto a los materiales utilizados lo constituyeron ocho (08) libros de texto usados para la enseñanza de Matemática en Séptimo Grado de la Tercera Etapa de Educación Básica (actualmente Primer Año del Subsistema de Educación Básica), seleccionados de acuerdo con: el lapso asumido para esta investigación (1987-2007); los más utilizados, incluyendo sin fecha de publicación o que no son directamente dirigidos al nivel de séptimo grado, pues forman parte de una realidad en cuanto a la enseñanza de las ecuaciones lineales.

En cuanto a las características didácticas, Ballesta (1995), señala las siguientes:

1. Secuenciar adecuadamente los contenidos.
2. Favorecer la reversibilidad del pensamiento.
3. Estimular la creatividad del lector.
4. Poseer un diseño atractivo.

5. Posibilitar su uso en combinación con otros materiales curriculares.
6. Contener actividades de evaluación de conocimientos, procedimientos y actitudes, potenciando la autoevaluación en el alumnado.

De la misma manera, se consideró a González (1995), en cuanto a la resolución de problemas, verificando la transferencia de aprendizaje y la capacidad analítica. Por otra parte, en cuanto al contenido del objeto matemático estudiado (ecuaciones lineales), se tomaron en cuenta los aspectos formales y analíticos planteados por Orellana (2002) y Toulmin (1958, citado en Jiménez, Álvarez y Lago, 2005), respectivamente, al igual que el modelo de González (F. González, entrevista personal, febrero 03, 2009), estos fueron aplicados, con el fin de examinar la forma didáctica, discursiva y al analizar un libro de texto en relación con un objeto matemático.

La presente investigación se ejecutó a través de los siguientes procedimientos:

1. Revisión bibliográfica.
2. Recopilación de los libros de texto de Matemática de Séptimo Grado de la III Etapa de Educación Básica (actualmente Primer Año del Subsistema de Educación Básica); así como, los de mayor uso.
3. Diseño de los instrumentos (lista de cotejo y fichas).
4. Aplicación de los instrumentos.
5. Análisis de los datos: Se estudiaron, a través de lo arrojado en la lista de cotejo y el análisis de contenido haciendo uso de lo recolectado en la ficha.
6. Conclusiones y recomendaciones.

3.1. Técnicas e Instrumentos de Recolección de Datos

Se realizó una revisión bibliográfica acerca de los libros de texto de Matemática para Educación Básica producidos en Venezuela durante el lapso 1987-2007, examinando en ellos los aspectos considerados en este estudio. En dicha revisión fue tomado en cuenta lo expresado por Icart, Fuentelsaz y Pulpón (2006), quienes afirman que “una revisión bibliográfica comprende todas las actividades relacionadas con la búsqueda de información escrita sobre un tema acordado previamente y sobre la cual, se reúne y discute críticamente, toda la información recuperada y utilizada” (p. 12).

Como instrumento, Palella y Martíns (ob. cit.), enfatizan que es “... cualquier recurso del cual pueda valerse el investigador para acercarse a los fenómenos y extraer de ellos información” (p. 113). Por su parte, Arias (2006), plantea que: “...es cualquier recurso, dispositivo o formato (en papel o digital), que se utiliza para obtener, registrar o almacenar información” (p. 69).

En este sentido, se hizo uso de la lista de cotejo, definida por el mismo autor, como “... un instrumento en el que se indica la presencia o ausencia de un aspecto o conducta a ser observada” (p. 70); para precisar las características en los libros de texto estimadas por Ballesta (1995); así como, particularmente, la transferencia de aprendizaje y el mejoramiento de la capacidad analítica respecto a la resolución de problemas establecidas por González (1995), dónde se pudo constatar, qué elementos propuestos por los autores antes mencionados, se encuentran presentes en cada libro de texto revisado.

De igual manera, luego de revisar los documentos objeto de estudio y hallar elementos precisos para la investigación, se utilizaron las fichas (Palella y Martins, ob. cit.), específicamente la textual, definidas como aquellas que: "...constan de párrafos, o trozos seleccionados que aparecen en la obra, de estadísticas, cuadros, entre otros.

Estos fragmentos se repiten exactamente tal como han sido escritos, sin la menor alteración, para respetar el trabajo creador de quien se está citando" (p. 130); con el fin de registrar los aspectos formales y analíticos de un libro de texto sugeridos por Orellana y Toulmin, respectivamente; además, de los aspectos esenciales para el análisis de un texto referido a un objeto matemático, estimados por González (F. González, entrevista personal, febrero 03, 2009), consultando para ello los más utilizados, en el período de tiempo establecido (1987-2007).

3.2. Técnicas de Análisis de Datos

Para el examen de los datos, se realizó el análisis de contenido, contemplando los aspectos establecidos en esta investigación. Tal como lo expresa Hurtado de Barrera (1998):

> Integra diversos recursos que permiten abordar los eventos en estudio, hechos, situaciones, textos, autores, vídeo, cine, con el interés de profundizar en su comprensión... el análisis de contenido puede ser utilizado en investigaciones descriptivas, por ejemplo, cuando se pretende hacer un diagnóstico y agrupar contenidos significativos de una serie de entrevistas, conversaciones u observaciones (pp. 486-487).

Mediante tal análisis se procuró develar los aspectos formales que conforman un contenido, siguiendo el planteamiento de Orellana (*ob. cit.*), así como el analítico mediante el discurso argumentativo, siguiendo el modelo de Toulmin *(1958, citado en Jiménez, Álvarez y Lago, 2005),* al igual que los referidos a un análisis de un texto presentado por González (F. González, entrevista personal, febrero 03, 2009).

3.3. Unidad de Análisis

Rojas de Escalona (2007), afirma que: "Consiste en descomponer el material en partes, elementos o ítems. Representan los núcleos de significados…" (p. 137). Para los efectos de este estudio, como unidades de análisis fueron consideradas aquellas partes o secciones de los libros de texto en las que se hace referencia a las ecuaciones lineales, tomando en consideración cada uno de los aspectos previstos anteriormente en cada objetivo.

3.4. Referentes conceptuales

En el Cuadro siguiente se muestra una síntesis integradora de los autores que fueron consultados para construir el repertorio teórico conceptual de referencia para el presente estudio; se indica autor, año de publicación de la obra consultada, el asunto de interés indagado por el autor, y la relación que dicho asunto tiene para el trabajo aquí reportado.

Cuadro 1: Relación de las Investigaciones Previas con el Tema de Interés

Autor	Asunto de Interés	Relación con la Investigación
García (1999)	Carencias de conocimientos matemáticos desde los libros de texto	Consideración del libro de texto como centro de atención con fines analíticos y el interés por precisar cómo se específica el contenido matemático.
Cabero *et al.* (2002)	Propuestas para la evaluación de libros de texto	Importancia de evaluar al libro de texto, desde las cualidades que lo definen y, también, como una vía para el aprendizaje.
Serradó y Azcárate (2003)	Unidades de trabajo para abordar el "tratamiento del azar" y su repercusión en el aula	Necesidad de tomar en cuenta la distribución del contenido, el discurso utilizado y las actividades planteadas en torno a dicho contenido, mostrando cómo se desenvuelve el libro de texto, y esto se ve reflejado en el aula.
Vargas (2003)	Implicaciones del libro de texto en el continuo numérico	Tomar en cuenta un contenido específico y así analizar la forma como se aborda en los libros de texto.
Beyer (2006)	Importancia de recrear la enseñanza en un lapso determinado	Poner en evidencia como ha sido manipulado un concepto matemático durante un tiempo específico en los libros de texto.
León (2006)	Imperativa consulta previa de especialistas en atención a irregularidades detectadas	Debilidades que en el libro de texto se pueden determinar, reafirmando la importancia de ahondar en el tratamiento de las ecuaciones de primer grado con una incógnita.
Pérez (2008)	Diversidad en la presentación de métodos de resolución de ecuaciones, que promuevan en el alumnado avances cognitivos, que den paso a la construcción del pensamiento matemático	Considerar el libro de texto y las consecuencias implícitas del mismo, analizando las ecuaciones de primer grado con una incógnita, destacando la incidencia de éstos en el proceso educativo mediante un análisis de contenido y así concretar elementos necesarios para el desarrollo de habilidades matemáticas.

4. Modelos aplicados

4.1. Modelo Orellana

De acuerdo con el Modelo sugerido por Orellana (2002) para la enseñanza de un tema de Matemática, la revisión de un libro de texto para la enseñanza de esta asignatura implicaría examinar los aspectos siguientes: (1) tiene que ver con los fundamentos matemáticos, para lo cual se indican definiciones, conceptos, teoremas, corolarios, ejercicios. (2-3) Relación del tema con otras áreas y con el mundo real, se considera que, por lo general, no se acostumbra a hacer efectivo este aspecto. (4) Si antes de iniciar, se hace referencia a alguna exploración gráfica y numérica como un preámbulo a los conceptos, teoremas y los problemas, donde se active la motivación a través de otras ciencias

Por la otra, (5-6) se refiere al dibujo (a mano alzada o asistido por instrumentos) o cálculos (manuales y con tecnología). (7) Acerca de la generalización expansiva, donde la recomienda para la enseñanza por analogía, destacando la importancia de mostrar, cuando no es posible generalizar conceptos y teoremas, dando apertura a problemas abiertos. (8) En éste no sólo se debe incorporar la parte histórica, notas biográficas de matemáticos célebres; también, el origen de ciertos problemas, definiciones y teoremas, dificultades y el desarrollo de éstos, para así poder contextuarlos, haciendo uso de la historia como estrategia didáctica, además se pueden anexar, (9) utilización de materiales (especialmente en Geometría), juego y matemática recreativa, respecto al contenido de estudio; así como, el aspecto (10) referido a didáctica del tema o del tópico en consideración, destacando la mejor manera de enseñarlo.

Ninguno de estos lineamientos es cerrados; por el contrario, en cada uno de ellos el docente tiene libertad para considerar otros elementos o tomar los que estime convenientes, según sean las condiciones y el objetivo que quiera lograr (Orellana, ob. cit.). Caso puntual ejemplos del tema a estudiar, estos no se mencionan explícitamente dentro de lo contemplado en el Modelo de Enseñanza – aprendizaje (MEA); sin embargo, se aprecian al desarrollar un cierto contenido matemático, en forma de orientación como ejemplo, por parte del autor, dentro de la respectiva publicación.

4.2. Modelo Toulmin

Para examinar los aspectos analíticos en un contenido, como lo es el discurso argumentativo, se siguió el Modelo de Toulmin, quien según Jiménez, Álvarez y Lago (2005), "propone seis componentes de los argumentos... modificado [en] algunos aspectos y añadido categorías nuevas siguiendo a Kelly, Drucker y Chen (1998)", dando forma, aún más, al establecimiento y consolidación de un concepto.

Jiménez, Álvarez y Lago (2005), expresan que: "La argumentación a que nos referimos tiene un carácter específico, pues está sustentada en datos y conocimientos básicos de carácter científico y, por otra parte, es específica, también, la forma en la que se llega desde los datos hasta las conclusiones" (p. 54), para lo cual Toulmin (1958, citado en Jiménez, Álvarez y Lago, 2005), propone los seis componentes siguientes:

1) Datos: A éstos se apela para llegar a la conclusión, donde se diferencia entre datos provenientes, externamente, como un libro de texto y los obtenidos por la persona que argumenta, pueden ser empíricos e hipotéticos.

2) Conclusiones: Son los enunciados cuya veracidad se quiere determinar, señalan, también, que los que surjan contrarios a éstos lo llamarán oposición.

3) Justificaciones: Son los que validan la relación entre los datos y las conclusiones.

4) Conocimiento Básico: Son de índole teórica y fundamentan a la justificación, éste puede venir del docente, de libros, entre otros. En ocasiones, se consideran también:

5) Calificadores Modales: Condiciones que regulan la hipótesis o conclusión.

6) Refutación: Condiciones en las que se descartaría la hipótesis o conclusión.

Para que exista un razonamiento argumentado basta con que existan los tres primeros de los seis establecidos. Toulmin (1958, citado en Jiménez, Álvarez y Lago, 2005).

4.3. Modelo González

Por otra parte, se integró a esta investigación el modelo propuesto por González (F. González, entrevista personal, febrero 03, 2009), quien afirma que entre los aspectos a ser considerados en el análisis de un texto referido a un objeto matemático, se deben incluir los siguientes:

1) Fenomenológico: Se refiere a los fenómenos intramatemáticos o sociales, culturales, históricos, etc.; asociados con el concepto que son referidos, directa o indirectamente en el texto.

2) Representacional: Tiene que ver con los modos expresivos lingüísticos usados para referirse al objeto: Textual, icónico, gráfico, tabular, ideográfico, simbólico, conjuntista, diagramas, ilustraciones, esquemas, mapas.

3) Cognitivo: Alude a los procesos de pensamiento (básicos, intermedios o globales) generales o matemáticamente específicos (deducción, inducción, demostración, inferencia,...) que vinculan al trabajo con el objeto. En cuanto a los procesos de pensamiento, de los cuales se desprenden una serie de habilidades propias de cada nivel, ya sean básicos, intermedios o globales.

> Entre los ***Procesos Cognitivos Básicos*** están los que se mencionan a continuación: Agrupar: Consiste en conformar grupos de elementos comunes y no comunes de acuerdo a un criterio particular; Buscar información: Proceso a través del cual se ubican fuentes de información relacionada con un tema específico vinculado con el asunto de interés; Clasificar: Consiste en agrupar objetos, hechos o fenómenos en correspondencia con uno o varios criterios dados para integrar un todo; Comparar: Proceso mediante el cual se establecen relaciones de semejanza o diferencia entre objetos, situaciones, hechos o personas bajo un parámetro establecido previamente; Extraer información: Supone un proceso donde se precisan elementos relevantes en textos, párrafos, citas, autores, conversaciones, revistas, dibujos, gráficos y eventos; Identificar: Es un proceso que permite ubicar en un objeto, hecho, acontecimiento o evento sus rasgos y propiedades que lo conforman; Jerarquizar: Consiste en establecer prioridades entre variables de acuerdo con un criterio lógico; Observar: Atención focalizada sobre una porción de la realidad que permite la percepción de sus propiedades y características (Hidalgo, 2009, p. 236); Ordenar: Permite establecer secuencias entre variables, hechos o acontecimientos partiendo de criterios preestablecidos; Recoger información: Proceso que permite recabar insumos sobre un asunto de interés; Relacionar: Consiste en establecer nexos entre rasgos característicos de un evento o variable; Seleccionar: Alude a los criterios, factores y condiciones que un sujeto aplica para aprehender una realidad; Tomar información: Consiste en la apropiación de una fuente, referencia o material informacional. (Hidalgo, ob. cit.).
>
> Los ***Procesos Cognitivos Intermedios*** incluyen: Analizar: Permite descomponer un todo en sus partes constitutivas de acuerdo con algún criterio; Codificar: Consiste en registrar un evento, hecho o fenómeno a través de un código preestablecido; Comprender: Proceso que permite hacer con un tópico una variedad de cosas que estimulan el pensamiento reflexivo; Concluir: Versa sobre la emisión de juicios sobre un hecho consumado; Cualificar: Consiste en resaltar cualidades específicas de un objeto respecto a variables seleccionadas de acuerdo a ciertas relaciones establecidas;

Cuantificar: Se aplica en aquellos casos donde se desea conocer una cantidad respecto a un objeto; Describir: Permite destacar características de los objetos, animales y personas; Deducir: Se fundamenta en la obtención de una parte esencial de un todo a partir de sus constituyentes; Determinar: Consiste en fijar o detectar una o varias cualidades en un fenómeno, hecho o evento estudiado respecto a ciertos criterios o estándares establecidos. (Hidalgo, ob. cit.); Evaluar: Consiste en elaborar un juicio de valor con base a la comparación e identificación de discrepancias entre eventos estudiados; Inferir: Proceso a través del cual se predice un evento, hecho o fenómeno respecto a una realidad estudiada con base en criterios; Interpretar: Proceso donde se expresan ideas personales a partir de un tópico particular; Resumir: Consiste en concentrar las ideas a través de un discurso corto; Sintetizar: Mediante este proceso cognitivo se integran en un todo una unidad con significado de acuerdo o no con un criterio previamente establecido. (Hidalgo, ob. cit.).

Los ***Procesos Cognitivos Globales*** son: Abstraer: Permite aislar cualidades de un objeto a través de una representación mental de sus signos en una conexión concreta total; S: Consiste en formular comparaciones entre objetos con base a criterios preestablecidos; Caracterizar: Es un proceso donde se resaltan explícitamente los atributos de un hecho, evento o situación de acuerdo a criterios que le son propios; Categorizar: Consiste en ubicar objetos, fenómenos o hechos dentro de un grupo que lo representa de acuerdo a un conjunto de elementos comunes entre sí; Conjeturar: Proceso donde se suponen relaciones y demostraciones entre objetos, eventos, fenómenos; Hipotetizar: Consiste en establecer relaciones causa-efecto entre dos o más variables; Razonar: Proceso cognitivo por medio del cual, a partir de elementos conocidos se obtienen otros resultados. (Hidalgo, ob. cit.).

4) Contextual: Remite a planteamientos intra o extramatemáticos cuya comprensión, interpretación o solución requieren de algún aspecto del objeto.

5) Histórico: Tiene que ver con las circunstancias que han rodeado el surgimiento, evolución, desarrollo y situación actual del objeto con el contexto de la Matemática.

6) Conceptual*:* En el concepto asociado con un objeto matemático, contempla los siguientes componentes: Definición (el cual puede considerarse como un aspecto estático), procedimientos (como el elemento dinámico, en cuanto a su forma procedimental asociada al objeto a estudiar), imágenes y símbolos.

Como se mencionó, existen elementos puntuales que caracterizan un concepto; de igual manera, los argumentos que se empleen al presentar el discurso, todos estos aspectos se conjugan para darle forma a un objeto matemático; por lo tanto, es ineludible la relevancia e interés de observar, registrar y analizar cada uno, con el propósito de develar sus alcances y limitantes. Como una manera de asociar cada modelo asumido para el análisis con el objeto matemático, seguidamente, se detalla cada uno de ellos adaptado a la ecuación lineal (sujeto al nivel educativo), con el fin de mostrar, el criterio de la autora en cuanto a su presentación. Por cuestiones de espacio, sólo se colocará el modelo de Toulmin.

5. Modelo Toulmin (1958) Aplicado a las Ecuaciones Lineales

Este modelo requiere, previamente, una revisión global, destacando aspectos desde el inicio hasta el final en relación a las ecuaciones lineales en los libros de texto utilizados en esta investigación, donde se aprecie una dinámica en secuencia, con el fin de vislumbrar el discurso argumentativo empleado en el libro de texto. Esta dinámica puede estar compuesta por momentos, los cuales pueden ser cíclicos.

Para identificar los criterios establecidos en este modelo, para cada libro de texto se elaboró una matriz semejante a la que se muestra en el Cuadro 3, donde se reflejó numéricamente cada aspecto, partiendo del recorrido realizado previamente.

Cuadro 2: Hallazgos de Componentes de Toulmin

Componentes	Ítems	Descripción
1. Datos		
2. Conclusiones		
3. Justificaciones		
4. Conocimiento básico		
5. Calificadores Modales		
6. Refutación		

1. Datos

Punto de inicio del autor del libro de texto, referente a las ecuaciones lineales, en cuanto al modo como se comienza el contenido, si con una indagación, definición, ejemplo, ejercicio o problema (enlazado desde el título hasta donde se sustente el mismo y sea posible esta vinculación).

2. Conclusión.

Forma como finalice el libro de texto, en relación con el objeto de estudio. Sin embargo, este puede ser general o parcial, en aquellos casos donde se observe un inicio y un fin (en concordancia con el modelo) que paulatinamente en conjunto conformarán el argumento en su totalidad. Esto dependerá de la forma como se muestre en el libro de texto, en cuanto a si existen cambios significativos al pasar de una conclusión a otra, además se tendrá en consideración aquellos usos posteriores que se haga del objeto matemático, en otros contenidos, puesto que para efecto de las ecuaciones lineales, se estudian en *N,* en *Z* y en *Q,* conjuntos numéricos referidos al nivel de Séptimo Grado de la III Etapa de Educación Básica (actualmente Primer Año del Subsistema de Educación Básica).

3. Justificación.

Aquellos elementos que unen los datos con la conclusión (dependerá de cómo inicie el libro de texto), éstos pueden ser explícitos o implícitos.

4. Conocimiento básico.

Se observa de manera teórica, sustentando a la justificación, manteniendo la trayectoria, que la refuerza.

5. Calificadores modales.

Condiciones que normalizan la conclusión.

6. Refutación.

Condiciones en las que se rechaza la conclusión, es decir, aquellas afirmaciones que no sean válidas, sean evidentes o supuestas.

En este modelo, se coloca directamente el contenido que se está tratando para suprimir la palabra definición, de la misma manera, se consideró, en la parte de los ejercicios o ejemplos, ubicar entre paréntesis, la posición en la que se encuentran en el libro de texto y en corchetes indicar la cantidad que se muestra en el recurso (Gráfico 1)

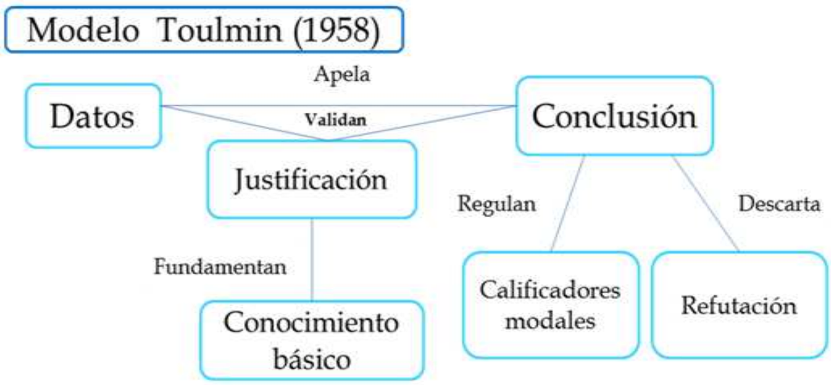
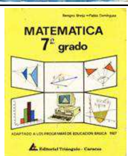
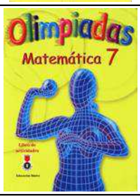
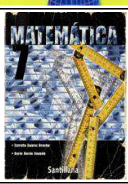


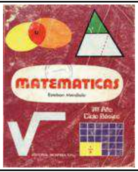
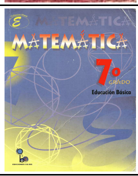
Gráfico1. Modelo de Toulmin

6. Análisis

En cuanto a los materiales utilizados, lo constituyeron ocho (08) libros de texto usados para la enseñanza de Matemática en Séptimo Grado de la Tercera Etapa de Educación Básica (actualmente Primer Año del Subsistema de Educación Básica), seleccionados de acuerdo con: El tiempo estimado para esta investigación (1987-2007); los más empleados, incluyendo sin fecha de publicación o que no son directamente dirigidos al nivel de séptimo grado, pues forman parte de una realidad en cuanto a la enseñanza de las ecuaciones lineales (ver Cuadro 3). A su vez, para el análisis del objeto matemático ya mencionado, en los Libros de Texto, se muestra en el Cuadro 4, las especificidades de los Modelos utilizados en esta investigación como son el de Orellana (2002), Toulmin (1958) y González (2009).

Cuadro 3: Libros Ubicados. Objetos de Análisis en la Presente Investigación

Código	Portada	Datos de Referencia	Dimensiones / Nº de págs.
L1		José Sarabia, Fernando Barragán, Héctor Pantoja (1987) *Matemática 7º grado*. Caracas: Ediciones CO. BO.	26 cm.x19 cm./351
L2		Benigno Breijo, Pablo Domínguez, (S/f). Matemática 7º grado. Caracas: Editorial Triángulo.	24,9 cm.x19,1 cm./175
L3		Víctor Hernando Ardila Gutiérrez (2001). Olimpiadas. *Matemática 7*. Caracas: Editorial. Excelencia. C. A.	27,5 cm.x21 cm./135
L4		Estrella Suárez Bracho, Darío Durán Cepeda (2002). *Matemática 7*. Caracas: Editorial. Santillana.	27,2cm.x21cm./240

Código	Portada	Datos de Referencia	Dimensiones / Nº de págs.
L5		Esteban Mendiola (s/f). *Matemáticas. 1er año del Ciclo Básico*. Caracas: Editorial Biosfera.	25cmx19,2cm/238
L6		Fernando Barragán Z, José Sarabia R. (s/f). *Matemáticas 7º grado. Educación Básica*. Caracas: Ediciones CO-BO	24,9cm x 19,2cm/264
L7		J. Giménez Romero. (s/f). *Matemáticas 7º grado. Educación Básica*. Caracas: Ediciones ENEVA	25,3cmx 19,8cm/404 Faltan páginas
L8		Dr. Aurelio Baldor. (1994). *Álgebra*. México. Publicaciones: Cultural.	22,9 cm x 16 cm/576

Nota. Datos de esta Investigación, 2011. La codificación del libro de texto (LN) se compone de:
L = Libro de texto. N = Número de libro de texto correspondiente

Cuadro 4

Modelos Aplicados a los Libros de Texto

Orellana (2002)	Toulmin (1958)	González (2009)
Aspectos Formales	Argumentación	Análisis de Textos
1. Fundamentos Matemáticos (Definiciones, Conceptos, Teoremas, Corolarios, Ejercicios) 2. Relación con otras áreas 3. Relación con el mundo real 4. Exploración gráfica y numérica 5. Dibujo a mano alzada. Cálculos manuales 6. Dibujo y cálculo con tecnología 7. Generalización expansiva 8. Desarrollo histórico 9. Utilización de materiales, juegos y matemática recreativa 10. Didáctica del tema	1. Datos 2. Conclusiones 3. Justificaciones 4. Conocimiento Básico 5. Calificadores modales 6. Refutación	1. Fenomenológico 2. Representacional 3. Cognitivo 4. Contextual 5. Histórico 6. Conceptual

A fin de identificar las características didácticas predominantes en los libros de texto más utilizados, se empleó la lista de cotejo, considerando los criterios de Ballesta (1995) y la caracterización de la presencia de la resolución de problemas planteada por González (1995). A continuación, se especifican siguiendo los procedimientos de cotejo establecidos anteriormente mediante el siguiente cuadro.

Cuadro 5: Criterios de Ballesta (1995) y la caracterización de la presencia de la resolución de problemas planteada por González (1995)

Nº	Características Formales	Libros de texto							
Características Didácticas		L1	L2	L3	L4	L5	L6	L7	L8
01	Secuenciar los contenidos	-	+	+	+	-	+	+	-
02	Reversibilidad del pensamiento	-	+	-	+	-	+	+	+
03	Creatividad	-	+	+	+	-	+	-	+
04	Diseño atractivo	-	-	+	+	-	+	-	+
05	Combinación con otros materiales curriculares	-	+	+	+	+	+	-	-
06	Actividades de evaluación de conocimientos, procedimientos y actitudes	-	+	+	+	+	+	+	+
Resolución de Problemas									
07	Planteamiento del Problema	+	+	+	+	+	+	+	+
08	Transferencia de Aprendizaje	-	+	+	+	-	+	+	+
09	Capacidad Analítica	-	+	+	+	-	+	+	+

Nota. Datos de esta Investigación, 2011. + = Presencia; - = Ausencia

Así mismo se presenta a continuación la forma como se organizó la información obtenida al aplicar el modelo de Orellana. En detalles, está presente en el desarrollo de la investigación, de igual manera como se realizó con los modelos de Toulmin y González.

Cuadro 6: Modelo de Orellana Respecto a Cada Libro de Texto

Modelos \ Libros		L1	L2	L3	L4	L5	L6	L7	L8
Orellana	1								
	- Definición	N	S	S	S	S	S	S	S
	- Concepto	N	N	N	N	N	N	N	N
	- Teorema	N	N	N	N	N	N	N	N
	- Corolario	N	N	N	N	N	N	N	N
	- Ejercicio	S	S	S	S	S	S	S	S
	2	N	N	S	S	N	N	N	S
	3	S	S	S	S	N	S	S	S
	4	N	S	N	S	N	S	S	S
	5	N	N	N	N	N	N	N	N
	6	N	N	N	N	N	N	N	N
	7	S	S	N	S	N	S	S	S
	8	N	N	N	S	N	N	N	S
	9	N	N	N	N	N	N	N	N
	10	N	N	N	N	N	N	N	N

Nota. Datos de esta Investigación, 2011. S = Si; N = No.

Cuadro 7:Modelo de Toulmin Respecto a Cada Libro de Texto

Modelos \ Libros		L1	L2	L3	L4	L5	L6	L7	L8
Toulmin	1	S	S	S	S	S	S	S	S
	2	S	S	S	S	S	S	S	S
	3	S	S	S	S	S	S	S	S
	4	S	S	S	S	S	S	S	S
	5	S	S	S	S	S	S	S	S
	6	S	S	S	S	S	S	S	S

Nota. Datos de esta Investigación, 2011. S = Si; N = No.

Cuadro 8: Modelo de González Respecto a Cada Libro de Texto

Modelos \ Libros		L1	L2	L3	L4	L5	L6	L7	L8
González	1	S	S	S	S	N	S	S	S
	2	S	S	S	S	S	S	S	S
	3	S	S	S	S	S	S	S	S
	4	S	S	N	S	S	S	N	N
	5	N	N	N	S	N	N	N	S
	6	S	S	S	S	S	S	S	S

Nota. Datos de esta Investigación, 2011. S = Si; N = No.

Con el propósito de mostrar cómo se realizó el análisis durante la investigación, a continuación se muestra un libro de texto con el modelo de Toulmin aplicado (por cuestiones de espacio), éste libro, es uno de los más utilizados y también aporta mayor información, juicio que la práctica docente le permite a la autora de éste artículo.

6.1. Toulmin (1958)

L4 (ver Cuadro 5)

1. Ecuaciones de primer grado en *N* (título). Pág. 14.
2. Ejemplos [2] igualdades numéricas, haciendo la observación del signo igual (=). Pág. 14.
3. Ejemplos [2] igualdades algebraicas o igualdades literales. Pág. 14.
4. Ejemplo de identidades. Pág. 14.
5. Ejemplo de igualdades llamadas ecuaciones. Pág. 14.
6. Variables en una ecuación (definida en un apartado llamado Lengua y Matemática). Pág. 14.
7. Constantes (definida en un apartado llamado Lengua y Matemática).Pág. 14.
8. Términos de una ecuación. Pág. 14.
9. Miembros de una ecuación. Pág. 14.
10. Grado de una ecuación (sin título). Pág. 14.
11. Ecuación. Pág. 14.
12. Ejemplo mostrando los elementos de una ecuación. Pág. 14.
13. Lenguaje algebraico (sin título). Pág. 15.
14. Expresión en el lenguaje cotidiano. Pág. 15.
15. Identifica cuáles son ecuaciones (1) [10]. Pág. 15.
16. Determina la variable, los términos, el primer y segundo miembro. (2) [15]. Pág.15

17. Expresa diversas situaciones a través de ecuaciones. (3) [13]. Pág. 15.
18. Solución de ecuaciones en *N* (título). Pág. 16.
19. Ejemplo de solución de una ecuación. Pág. 16.
20. Solución. Pág. 16.
21. Resolver. Pág. 16.
22. Una ecuación tiene solución en el conjunto de los naturales si el valor de la incógnita pertenece a *N*. Pág. 16.
23. Propiedades de las igualdades (sin título). Pág. 16.
24. Ejemplos (sin título, hallando la solución, comprobando el resultado, aplicando las propiedades antes mencionadas) [4]. Págs. 16-17.
25. Resuelve (1) [25]. Pág. 17.
26. Plantea y halla la solución. (2) [9]. Pág. 17.
27. Solución de problemas usando ecuaciones (parecido al modelo de Polya) a través de una serie de pasos. Pág. 18.
28. Problemas resueltos [4] y su comprobación. Págs. 18-19.
29. Resuelve los siguientes problemas usando ecuaciones (1) [10]. Pág. 19.
30. Para hacer en el cuaderno. Ejercicios y problemas. Pág. 20.
31. Escribir una ecuación para las expresiones dadas (9) [4]. Pág. 20.
32. Resuelve las siguientes ecuaciones (10) [6]. Pág. 20.
33. Plantea cada situación como una ecuación y resolverla. (11) [11]. Pág. 21.
34. Recuerda lo más importante, se refuerza de nuevo qué es una ecuación, las propiedades para resolverlas. Pág. 22.
35. Ejemplo empleando valor absoluto. Pág. 27.
36. ¿Para qué valores de x se cumple la igualdad? (3) [8]. Pág. 27.
37. Unidad 4. Ecuaciones en *Z* (título). Pág. 48.
38. Ejemplo de ecuación que no tiene solución en *N*. (Sin título). Pág. 48.
39. Resolver una ecuación (sin título). Pág. 48.
40. Solución de una ecuación (se destaca que una ecuación tiene solución en *Z*, si el valor de la incógnita pertenece a él). Pág. 48.
41. Ejemplos (sin título) [5]. Págs. 48-49.
42. En términos generales, para resolver una ecuación, se pueden seguir los siguientes pasos. [5]. Pág. 49.
43. Resuelve mentalmente las ecuaciones señaladas. (1) [5]. Pág. 49.
44. Halla la solución a las ecuaciones dadas. (2) [18]. Pág. 49.
45. Resolución de problemas usando ecuaciones (título). Pág. 50.
46. Ejemplos [3] expresiones del lenguaje cotidiano al lenguaje algebraico. Pág. 50.
47. Expresiones en el lenguaje cotidiano con su respectiva expresión matemática [7]. Pág. 50.
48. Problemas resueltos y su comprobación [3]. Págs. 50-51.
49. En los siguientes problemas, plantea la ecuación correspondiente y resuélvela. (1) [10]. Pág. 51.
50. Para hacer en el cuaderno. Ejercicios y problemas. Pág. 52.
51. Halla la solución a las ecuaciones planteadas. (6) [13] Pág. 52.
52. En las siguientes ecuaciones, determina para qué número de los indicados se satisface la igualdad. (7) [4] Pág. 52.
53. Comprueba y responde. (8) [3] Pág. 52.
54. Expresa en lenguaje algebraico los enunciados indicados. (9) [4]. Pág. 52.
55. Resuelve los siguientes problemas utilizando ecuaciones. (10) [6]. Pág. 53.
56. Activa tú ingenio. Actividad didáctica relacionada con las ecuaciones. Pág. 53.
57. Recuerda lo más importante cuando una ecuación tiene solución en el conjunto *Z* y pasos a seguir para resolver la ecuación (parecido al modelo de Polya). Así como en el apartado, curiosidades matemáticas, se presenta el hecho histórico, relacionado con la incógnita, designada con la letra *x*). Pág. 54.
58. Necesidad de ampliar el conjunto *Z* (título). Pág. 80.
59. Ejemplo de una ecuación que no tiene solución en *Z*. Pág. 80.
60. Actividades para hacer el cuaderno. Pág. 80.
61. Resuelve e indica cuáles no tienen solución en *Z*. (1) [8]. Pág. 80.
62. Responde (4) [c]. ¿Cuánto vale *x*? Pág. 99.

63. Ecuaciones en *Q* (título). Pág. 102.
64. Ejemplo planteando una situación que conduce a una ecuación. Pág. 102.
65. Ecuaciones en *Q*. Pág. 102.
66. Ejemplos [4] resolviendo ecuaciones. Pág. 102.
67. Una ecuación en números racionales se refiere a una ecuación que contiene por lo menos un número racional o que la solución es un número racional (en el apartado Lengua y matemática). Pág. 102.
68. Problemas resueltos [3]. Pág. 103.
69. Resuelve las siguientes ecuaciones. (1) [6]. Pág. 103.
70. Calcula y responde. (2) [3] Pág. 103.
71. Plantea la ecuación correspondiente y resuelve. (3) [2] Pág. 103.
72. Para hacer en el cuaderno. Ejercicios y Problemas. Pág. 104.
73. Resuelve las siguientes ecuaciones. (9) [5]. Pág. 104.
74. Situaciones pueden ser expresadas en forma de ecuación, sin embargo no se mencionan de esta manera. (11-16; 20-21) [8]. Pág. 105.
75. Solucionario. Págs. 228-239.
76. Propiedades de los triángulos (título). Pág. 162.
77. Ejemplos empleando ecuaciones para determinar el valor de un ángulo [6]. Pág.162.
78. Calcula y responde (1) [7]. Pág. 163.
79. Halla los valores de los ángulos (4) [4]. Pág. 164.
80. Trazado de triángulos (título). Pág. 164.
81. Ejemplo empleando una ecuación. Pág. 164.

Cuadro 9: Hallazgos de Componentes de Toulmin (1958) Presentes en L4

Componentes	Ítems	Descripción
1. Datos	2-5	Aspectos que llevan a la intención con la cual se inicio
2. Conclusiones	70-81	
3. Justificaciones	14,17,22,39	
4. Conocimiento Básico	2-11,14,20-23,27,37-42,45-47, 58,59,63-67	Contemplando a las ecuaciones desde N hasta Q
5. Calificadores Modales	22,40,67	No depende directamente del recurso, en este caso, es un elemento externo, además, se vincula con la pertenencia de la solución de la ecuación a un conjunto numérico
6. Refutación	6,16	Así como en todos los aspectos que durante el desarrollo se empleó variable como sinónimo de incógnita

Nota. Datos de esta Investigación, 2011.

<u>Datos</u>: *Inicia con ejemplos de* igualdades numéricas, igualdades algebraicas o igualdades literales, identidades, igualdades llamadas ecuaciones.

<u>Conclusiones</u>: Planteamientos de problemas en *Q* (considerando los planteamientos para expresar algebraicamente y resolver ecuaciones en *N* y en *Z*). Se utiliza a la ecuación para desarrollar otros contenidos posteriores a los números racionales (contemplado este conjunto numérico, porque el estudio de las ecuaciones en el nivel de Séptimo Grado de la III Etapa de Educación Básica [actualmente Primer Año del Subsistema de Educación Básica], es en los naturales, los enteros y en los racionales) como un medio para determinar el valor de un ángulo, en el contenido de triángulos.

<u>Justificaciones</u>: Lenguaje natural, solución en *N,* en *Z* y en *Q.*

Conocimiento Básico: Igualdades numéricas, igualdades algebraicas o igualdades literales, identidades, igualdades llamadas ecuaciones, definición de variables, constantes, términos, miembros, ecuación, expresión en el lenguaje cotidiano (lenguaje natural), solución en *N,* resolver, propiedades de las igualdades, solución de problemas usando ecuaciones, problemas resueltos y su comprobación, ecuación que no tiene solución en *N,* resolver una ecuación en *Z,* solución, pasos para resolver una ecuación, expresiones en el lenguaje cotidiano (lenguaje natural), ecuación que no tiene solución en *Z,* planteamiento que conduce a una ecuación, ecuaciones en *Q,* ejemplos resolviendo ecuaciones (se consideran por tener aspectos teóricos dentro de su resolución), problemas resueltos.

Calificadores Modales: La traducción a la expresión algebraica aunado a las operaciones matemáticas para la resolución de las ecuaciones, vinculado con la pertenencia de la solución a cada conjunto numérico.

Refutación: Aquellas partes donde se empleó como sinónimo variable e incógnita además en la suma o resta de un miembro en ambos de la igualdad, no se conservaron las posiciones de un mismo elemento ya sea por la derecha o izquierda.

Conclusiones

Los hallazgos que se desprenden de la investigación que aquí se presentan, constituyen el total de los Libros de texto, desde sus aspectos formales, como la aplicación de los tres modelos ya citados.

En cuanto a las características formales que predominan en los libros de texto, se observó que predomina la secuencia en los contenidos, a pesar de que algunos libros de texto, están sujetos al programa de 1987, esto no se evidencia en su totalidad, permitiendo así, la continuidad en los temas a estudiar; de igual manera, la reversibilidad del pensamiento, mostrando actividades que están orientadas hacia este criterio, poseen, además, creatividad en su estructura; también, se tiene que, se combinan con otros materiales curriculares y presentan actividades de evaluación de conocimientos, procedimientos y actitudes.

Referente a la descripción de la ecuación lineal como un objeto matemático, se mostró tal propósito en el marco teórico, desde su aspecto histórico, donde el modo de vida y de expresar las realidades llevan a un lenguaje desde el retórico hasta el simbólico, destacando el ámbito algebraico, aunado a su evolución, el procedimiento propio para concebir su estudio, que la caracterice como objeto matemático; además, de contemplar la estructura algebraica a la que está asociada.

En lo pertinente a la resolución de problemas, se hacen planteamientos que permiten la transferencia de aprendizaje y mejoran la capacidad analítica. Sin embargo, no son situaciones que surgen de las realidades o entorno de los estudiantes.

- Respecto a los aspectos formales, señalados por Orellana (2002), empleados en las ecuaciones lineales, se tiene que:
  1. Fundamentos Matemáticos (Definiciones, Conceptos, Teoremas, Corolarios, Ejercicios Propuestos). Predomina la definición, los ejemplos y los ejercicios; de igual manera, se determinaron que carecen de conceptos, teoremas y

corolarios. Sin embargo, se tienen detalles de lenguaje, en cuanto a usar como sinónimo variable e incógnita, aumento como suma; así como, en ejemplos y en ejercicios o no están ajustados al nivel de estudio o falta de la teoría necesaria para la compresión o resolución del mismo.

2. Relación con otras áreas: Es escasa, en los que se presenta, sólo se realiza con la Geometría, además de suponer el conocimiento de los contenidos, ya sea durante la explicación que ofrece el libro de texto o en las asignaciones.

3. Relación con el mundo real: Aún cuando, en la mayoría está presente, no están vinculadas con las circunstancias del estudiante, son eventos ficticios, debe mejorarse al respecto, para que si sean producto de su contexto, ya sean por asignaciones de búsqueda en otros medios de estas realidades, que conduzcan a una ecuación o como una propuesta de parte del libro texto, bajo una orientación, donde en el aula, se induzca al surgimiento de situaciones reales.

4. Exploración gráfica y numérica:*S*e visualiza, sin embargo, sólo en la numérica.

5. Dibujo a mano alzada. Cálculos manuales: No está presente.

6. Dibujo y cálculo con tecnología: No está presente.

7. Generalización expansiva: Se destaca este aspecto, no obstante, no se realiza a través de una resolución al efectuar una operación que no sea propia dentro del conjunto numérico, para así mostrar que es necesario el estudio de tal situación en otro, caso puntual al tema de estudio, donde se resuelven ecuaciones en N en Z y en Q.

8. Desarrollo histórico: Es muy escaso el espacio que se dedica al respecto, es importante acentuar la trascendencia de un contenido matemático.

9. Utilización de materiales. Juego y matemática recreativa: No se observó, es importante tener en cuenta este aspecto que permite llegar, aún más, hacia el propósito del contenido de una manera creativa.

10. Didáctica del tema: Al respecto, no se encontró ningún rasgo.

- En atención a los aspectos analíticos, formulados por Toulmin (1958, citado en Jiménez, Álvarez y Lago, 2005), se tiene que:

1. Datos: *Van desde conjunto numérico N,* definición de Ecuaciones en N (siguiendo con los elementos), actividad didáctica para la introducción de ecuaciones, *ejemplos,* ejercicios, para determinar el valor de x, también con la noción de ecuación, a través de un planteamiento de un problema para expresarlo en una ecuación y con notación algebraica. Es decir, el dato varía según la intención del autor, donde se observó que, en ocasiones, se utiliza a la ecuación como un medio para tratar otros contenidos, más no para desarrollarla como un objeto matemático.

2. Conclusiones: *Varían desde, conjunto numérico nuevo a definir,* mediante el planteamiento de una ecuación, miscelánea de problemas de ecuaciones, uso de la ecuación para desarrollar otros contenidos (como en la parte de Geometría); además, para mostrar que en *Z* no tiene solución, ejercicios de ecuaciones en el contenido cociente de los números racionales, al igual que

concluyen en problemas que se resuelven por ecuaciones de primer grado, son los hallazgos que se tienen en este sentido.

3. Justificaciones: En algunos libros de texto, se halló que éstas no fueron suficientes para sustentar a la conclusión; además, ésta puede estar dentro del recurso; también, se evidenció que, en algunos casos, depende de un factor externo.
4. Conocimiento Básico:Es de índole teórico, en su mayoría, está el necesario para resolver tantos los ejercicios como los problemas; sin embargo, en ocasiones, no estuvo presente; además, también se observó que, aún estando, no era el ideal al no ser abordado de la manera correcta o era imprescindible la búsqueda de información para poder resolver las actividades planteadas.
5. Calificadores modales: Este aspecto está ligado a la conclusión, en cuanto a que es lo necesario para que sea válida la misma; por supuesto, depende de cómo concluye el libro de texto, se vislumbró, en aquellos recursos donde se relacionó el *valor que se obtenga de la* x*, en atención a la pertenencia de un conjunto u otro; también, en* la traducción que se haga con la correspondiente expresión algebraica, aunado a las operaciones matemáticas para la resolución de las ecuaciones, lo cual, en este punto, es un elemento externo para el logro de la conclusión, debido a que dependerá de cómo, efectivamente, se lleven a cabo estas consideraciones. También, se constató o que no estaba presente o que era muy limitado para el logro de la conclusión.
6. Refutación. Puede ser evidente en el libro de texto o se realiza al ubicarse atisbos que no sean idóneos. Al respecto, uso de la ecuación sin ser definida, en aquellos fragmentos donde se requiere un procedimiento y no fue expuesto en el libro de texto, al igual que en el manejo inadecuado de contenidos y lenguaje; así mismo, en el uso de la transposición de términos.

En relación a lo establecido al analizar un libro de texto referido a un objeto matemático, estimado por González (F. González, entrevista personal, febrero 03, 2009), se determinó lo siguiente:

1. Fenomenológico: Predominan, los de tipo de social e intramatemáticos, aunque, no son estrictamente ajustados a un evento social.
2. Representacional: Es de tipo textual, se observó, también, simbólicamente, al denotar la incógnita haciendo uso en su mayoría de la x, a pesar que, en algunos se destacó que puede designarse con las últimas letras del alfabeto, empero, prevalece el uso de x, aparte de emplearse un tipo de esquema para la resolución de problemas.
3. Cognitivo: En relación a los procesos de pensamiento, imperan los básicos, en menor medida los intermedios y, escasamente, los globales, observándose que no se desarrollan o se proponen actividades que permitan alcanzar procesos cognitivos de mayor nivel; en cuanto a los matemáticamente específicos, prepondera la demostración, en menor magnitud la inducción y deducción en el desarrollo del contenido o en las actividades propuestas.
4. Contextual: Sobresale al utilizar a la ecuación para iniciar un nuevo conjunto numérico; así como, en los contenidos geométricos.

5. Histórico: No es un aspecto que tiene mayor frecuencia, sólo se hace en apartados sobre la variable y una pequeña reseña en relación a Diofanto.
6. Conceptual: Es constante en cuanto a la definición y una marcada inclinación hacia el método de transposición de términos.

En conclusión, aunque, se tiene, en su mayoría, algunos aspectos formales, éstos no son expuestos de forma adecuada, ni en contenido ni en lenguaje; así como, en la correspondencia entre lo que se desarrolla ni lo que se asigna; en cuanto al aspecto analítico, no se presenta una coherencia al exponer la intención del autor, en relación a sus argumentaciones, si bien no se precisa un patrón, es importante tener un esquema de razonamiento, donde, progresivamente, se lleguen a procesos cognitivos de índole superior. En la mayoría, las actividades, están orientadas hacia este fin, sin embargo, no están presentes, adecuadamente; por una parte, están ubicadas en un apartado que no corresponde (aquellos libros de texto que proponen ejercicios que no están dentro del conjunto numérico correspondiente) y por la otra, los que muestran problemas, su contenido no se ofreció en el recurso o no están adaptados al nivel. En tanto, a los aspectos para el análisis de un libro de texto, los planteamientos son de tipo social e intramatemático, sin brindar el óptimo desenvolvimiento de éstos, la representación es de tipo textual y el simbólico a través de la notación de la incógnita; además, predomina el uso de la transposición de términos, lo cual, como se ha puntualizado, impide el desarrollo de habilidades matemáticas; así como, la comprensión de términos y propiedades que este procedimiento de resolución impide, debido a que éste tergiversa a la ecuación, es un efecto ilusorio de unas operaciones matemáticas, se anulan términos y en el fondo no se aplican ciertas propiedades que coadyuvan al objeto. Así, se puede evidenciar que, las fallas que presentan los estudiantes, al resolver ecuaciones lineales, están estrechamente relacionadas con lo que expresa el libro de texto.

Bibliografía

Alonso, I. y Martínez, N. (2003). La Resolución de Problemas Matemáticos. Una Caracterización Histórica de su Aplicación como Vía Eficaz para la Enseñanza de la Matemática. *Revista Pedagogía Universitaria*, *8*(3), 81-88.

Anfossi, A. y Flores, M. (2006). *Álgebra*. México: Progreso.

Área, M. (2001). Los Medios y Materiales Impresos en el Curriculum. *Para una Tecnología Educativa.* (3ª Ed.). Barcelona, España: Horsori.

Arias, F. (2006). *El Proyecto de Investigación. Introducción a la Metodología Científica* (5ª Ed.). Caracas: Episteme.

Ballesta, J. (1995). *Función Didáctica de los Materiales Curriculares*. [Documento en línea]. Disponible: http://dewey.uab.es/pmarques/EVTE/matcurri.doc [Consulta: 2008, Octubre 13].

Beyer, W. (1986). Algunas Innovaciones Necesarias en los Programas de Matemática que se Imparten a Nivel de Educación Media en Venezuela. *Paradigma*, *8*(1-2).

Beyer, W. (1998). *Algunas Precisiones Acerca de la Resolución de Problemas y de su Implementación en el Aula*. [Documento en línea]. Disponible: http://www.revistaparadigma.org.ve/Doc/Paradigma981/Art3.htm [Consulta: 2008, Octubre 13].

Beyer, W. (2006). *Algunos Libros de Aritmética Usados en Venezuela en el Período 1826-1912.* [Documento en línea]. Disponible: http://www.scielo.org.ve/

scielo.php?script=sci_arttext&pid=S0798979220060001000004&lng=pt&nrm=iso - [Consulta: 2008, Junio 05].

Biblioteca Hipermedia. (2007). (Vol. I). Barcelona, España: Oceano.

Blanco, L. (1993). Una Clasificación de Problemas Matemáticos. *Épsilon*, (25), 49-60. [Revista en línea]. Disponible: http://www1.unex.es/eweb/ljblanco /documentos/blanco93.pdf [Consulta: 2011, Enero 3].

Borja, I. (2005). Caracterización del Libro de Texto de Castellano para la Educación Primaria Colombiana: Tipología y Componentes*. Revista Iberoamericana de Educación,* 1-14.

Cabero, J.; Duarte, A. y Romero, R. (2002, Junio 9). *Los Libros de Texto y sus Potencialidades para el Aprendizaje.* [Documento en línea]. Disponible: http://tecnologiaedu.us.es/revistaslibros/public5.htm [Consulta: 2008, Octubre 13].

Chevallard, Y. (1998). *La transposición didáctica.* (3ª Ed)*.* [Documento en línea]. Disponible:http://www.e-historia.cl/cursosudla/13-EDU413/lecturas/03%20-%20La%20Trasposicion%20Didactica%20-%20Del%20Saber%20Sabio%20al%20Saber%20Ense%C3%B1ado%20-%20Yves%20Chevallard%20(pag.%203-24).pdf [Consulta: 2013, Julio 30].

D'Amore, B. y Godino, J. (2007). El Enfoque Ontosemiótico como un Desarrollo de la Teoría Antropológica en Didáctica de la Matemática. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa, 10*(002), 191-218.

De las Mercedes, M. y Medina, P. (1999). La Adquisición del Lenguaje Algebraico: Reflexiones de una Investigación. *Números: Revista de Didáctica de las Matemáticas, 40,* 3-28.

Fernández, F. (1997). Aspectos Históricos del Paso de la Aritmética al Álgebra. Implicaciones para la Enseñanza del Lenguaje Simbólico Algebraico. *Revista Didáctica de la Matemática,* (14), 75-91*.*

García, Y. (1999). *Análisis de Contenido del Texto Escolar de Matemática según las Exigencias Educativas del Nuevo Milenio.* [Documento en línea]. Disponible: http://www.monografías.com/trabajos7/texe/texe.shtml. [Consultado: 2008, Julio 17].

Godino, D.; Batanero, C. y Font, V. (s.f.). *Didáctica de las Matemáticas para Maestros.* [Documento en línea] Disponible: http://www.ugr.es/local/ jgodino/edumat-maestros/ manual/9_didactica_maestros.pdf [Consulta: 2008, Octubre 13].

Godino, J. y Font, V. (2003). *Razonamiento Algebraico y su Didáctica para Maestros.* [Documento en línea] Disponible: http: //www.webpersonal.net/vfont//ralgebraico.pdf [Consulta: 2011, Enero 08].

González, F. (1995). *El Corazón de la Matemática.* Serie Temas de Educación Matemática. Parte Tres. Maracay: Copiher.

González, F. (1987). La Trascendencia de la Resolución de Problemas en Matemática, *Paradigma*, *8*(1-2).

Hidalgo, B. (2009). *Metabolización de Información: Un Modelo Dinámico para Interpretar el Proceso de Producción de Conocimiento.* Tesis Doctoral no publicada. Universidad Pedagógica Experimental Libertador, Instituto Pedagógico "Rafael Alberto Escobar Lara", Maracay.

Hurtado de Barrera, J. (1998). *Metodología de la Investigación Holística* (2ª Ed.). Caracas: Fundación Sypal.

Ibáñez, P. y García, G. (2009). *Matemáticas I. Aritmética y Álgebra*. México: Cengage Learning.

Icart, M.; Fuentelsaz, C. y Pulpón, A. (2006). *Elaboración y Presentación de un Proyecto de Investigación y una Tesina.* Barcelona, España: Universidad de Barcelona.

Jiménez, P.; Álvarez, V. y Lago, J. (2005). La Argumentación en los Libros de Texto de Ciencias, *Tarbiya,* 36, 35-58.

Kieran, C. (1995). *Una Empresa Docente*. (V. Mesa, Trad.) [The Learning and Teaching of School Algebra]. Bogotá: Universidad de los Andes. (Trabajo original publicado en 1992).

León, N. (2006). *La Probabilidad en los Textos de Matemática de 7mo Grado de Educación Básica*. Trabajo Especial de Grado de Maestría no publicado, Universidad Pedagógica Experimental Libertador, Caracas.

Luzardo, D. y Peña, A. (2006). Historia del Álgebra Lineal hasta los Albores del Siglo XX. *Divulgaciones Matemáticas, 14*(2), 153-170.

Maalouf, A. (1993). *Samarcanda.* Madrid: Alianza.

Maletta, H. (2009). *Epistemología Aplicada: Metodología y Técnica de la Producción Científica.* Lima: Consorcio de Investigación Económica y Social, Centro Peruano de Estudios Sociales (CEPES), Universidad del Pacífico Centro de Investigación.

Malisani, E. (1999). Los Obstáculos Epistemológicos en el Desarrollo del Pensamiento Algebraico. Visión Histórica. *Revista IRICE,* (13), 1-26.

Maor, E. (2006). *e: Historia de un Número*. México: Libraria.

Monterrubio, M. y Ortega, T. (2011). Diseño y Aplicación de Instrumentos de Análisis y Valoración de Textos Escolares de Matemáticas. *PNA, 5*(3)*,* 105-127.

Orellana, M. (2002). ¿Qué Enseñar de un Tópico o un Tema?, *Revista Oficial de la Asociación Venezolana de Educación Matemática. Enseñanza de la Matemática. ASOVEMAT*, *11*(2), 21-42.

Palella, S. y Martins, F. (2006). *Metodología de la Investigación Cuantitativa* (2ª Ed.). Caracas: FEDUPEL.

Papini, M. (2003). Algunas Explicaciones Vigotskianas para los Primeros Aprendizajes del Álgebra, *Relime*, *6* (001), 41-71.

Peralta, J. (1995). *Principios Didácticos e Históricos para la Enseñanza de la Matemática.* Madrid: Huerga y Fierro.

Pérez, C. (2008). *Implicaciones de la Didáctica del Profesor y la Utilización del Libro de Texto de Matemática en las Ecuaciones de Primer Grado con una Incógnita.* Trabajo Especial de Grado de Maestría no publicado, Universidad Pedagógica Experimental Libertador, Instituto Pedagógico “Rafael Alberto Escobar Lara”. Maracay.

Prendes, Mª. y Solano, I. (2003). *Herramienta de Evaluación de Material Didáctico Impreso.* [Documento en línea] Disponible: http://tecnologiaedu.us.es/nweb/htm/pdf/paz7.pdf [Consulta: 2008, Octubre 13].

Puig, L. (2003). *Historia de las Ideas Algebraicas: Componentes y Preguntas de Investigación desde el Punto de Vista de la Matemática Educativa.* [Documento en línea] Disponible: http://www.uv.es/puigl/granada%2003%20oral.pdf [Consulta: 2011, Agosto 16].

Ramírez, T. (2004). *El Texto Escolar en el Ojo del Huracán.* Cuatro Estudios sobre Textos Escolares Venezolanos. Caracas: Fondo Editorial de Humanidades y Educación.

Rees, P. y Sparks, F. (1998). *Álgebra*. México: Reverté.

Restrepo, M. (1999). *Producción de Textos Educativos.* Colección Aula Abierta. Bogotá: Cooperativa Editorial Magisterio.

Rojas de Escalona, B. (2007). *Investigación Cualitativa. Fundamentos y Praxis.* FEDUPEL.

Serradó, A. y Azcárate, P. (2003). Estudio de la Estructura de las Unidades Didácticas en los Libros de Texto de Matemáticas para la Educación Secundaria Obligatoria, *Educación Matemática*, *15*(1), 67-98.

Silva, J. y Lazo, A. (2005). *Fundamentos Matemáticos. Álgebra, Trigonometría, Geometría Analítica y Cálculo*. México: LIMUSA.

Stewart, I. (2008). *Historia de las Matemáticas: En los Últimos 10.000 Años.* Barcelona, España: Crítica.

Universidad Pedagógica Experimental Libertador. (UPEL, 2006). *Manual de Trabajos de Grado de Especialización y Maestría y Tesis Doctorales* (4ª Ed.). Caracas: FEDUPEL.

Vargas, J. (2003). La Construcción de los Irracionales de Dederind como Instrumento en un Análisis de Textos de Octavo Grado*.* Tecne, Episteme y Didaxis. *Revista de la Facultad de Ciencias y Tecnología, 14*, 4-18.

Evelyn del Valle Pinto Serrano. Profesora en el área de Matemática y Estadística en la Escuela Técnica Robinsoniana de Promoción Social y Servicios de Salud “Mariño” Turmero, Aragua; Venezuela. **pintoserranoevelyndelvalle@gmail.com**

Fredy Enrique González. Miembro del personal académico activo del Departamento de Matemática, del Instituto Pedagógico “Rafael Alberto Escobar Lara” (Universidad Pedagógica Experimental Libertador, Núcleo Maracay, Aragua, Venezuela. Coordinador del Núcleo de Investigación en Educación Matemática “Dr. Emilio Medina” (NIEM). **fredygonzalez1950@gmail.com**

UNIÓN
REVISTA IBEROAMERICANA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA

www.fisem.org/web/union

ISSN: 1815-0640
Número 35. Septiembre de 2013
páginas 203-204

Libros

Gente en Obra. Historia interactiva de los orígenes de la Matemática

Autores:
Mario Dalcín, Mónica Olave

Editorial: Ediciones Palindromo. Montevideo, Uruguay.

ISBN: 978-9974-989-863-7

Edición: Diciembre de 2012

Páginas: 215

A continuación transcribimos la primera y la última parte del prólogo de este libro, que fue escrito por Juan Grompone en la ciudad de Montevideo

"*La matemática ha presentado siempre dificultades entre los educadores. Es un hecho reiterado que a muchos niños y jóvenes la matemática les resulta difícil, inútil, detestable o incomprensible. Por el contrario, para una minoría la matemática es la culminación del pensamiento humano, la belleza abstracta, la poesía. ¿Por qué hay esta división enorme entre los seres humanos? Es claro que estas posiciones tan antagónicas no se presentan en otras ramas del conocimiento. Sin duda es un interesante tema a dilucidar, puesto que es claro que la matemática es necesaria -y en forma creciente- para todas las ramas de la actividad humana*.

....

El presente libro expone la matemática siguiendo su proceso histórico. Aparecen aquí los escribas de la Mesopotamia, de Egipto, de China o de los Mayas. Estos seres humanos construyeron conceptos matemáticos que les permitían contar los días y los años, intercambiar el ganado o los productos agrícolas, comparar y medir las áreas sembradas y finalmente calcular los impuestos. El escriba era un artesano empírico al que poco le preocupaba la *precisión de pi, siempre que la medida del tonel fuese aceptable. No demostraba el teorema de Pitágoras, solamente lo empleaba por saberlo verdadero.*

Aparecen en este libro los primeros grandes matemáticos griegos - Tales y Pitágoras- con dos resultados emblemáticos de la matemática, si bien desconocemos en qué medida eran verdaderos "teoremas". Finalmente, luego de milenios de matemática empírica, aparecieron los primeros matemáticos teóricos -Euclides y Arquímedes-, como culminación de una larga aventura humana. Esta aventura no fue verbalmente lineal. La historia del cero lo muestra. El cero fue descubierto tres veces, una vez en cada continente. Ocurrió en la India, en el Yucatán y en la Mesopotamia, en fechas dispares y sin relación entre sí, en forma empírica y asociada a diferentes sistemas de numeración.

Este libro se propone realizar una interesante y muy documentada historia de la matemática clásica. Desde mi punto de vista, ofrece una alternativa para enseñarla a nivel elemental: para romper con el esquema cartesiano y regresar al origen empírico de la matemática. Es lo que Poincaré creo que intuyó, pero no se atrevió a afirmar sobre la matemática"

Equipo Editor

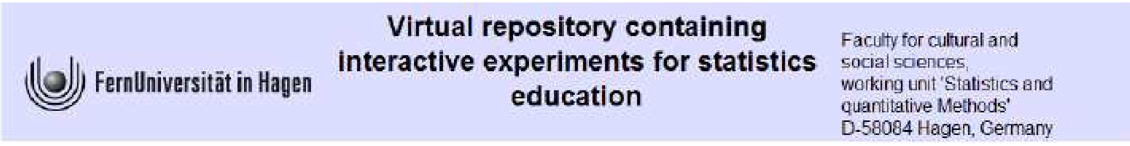
REVISTA IBEROAMERICANA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA
www.fisem.org/web/union

ISSN: 1815-0640
Número 35. Septiembre de 2013
páginas 205-206

Educación en la Red:

Virtual repository containing interactive experiments for statistics education

http://www.fernuni-hagen.de/jmittag/repository_es/hinweise.php



La principal línea teórica que sustenta la propuesta de enseñanza de los contenidos de Estadística utilizando herramientas multimediales es la definida por los estudiosos como la pedagogía interactiva. Ésta exige a los formadores ser vehículos de nuevas habilidades y competencias en quienes aprenden, para que ellos sean capaces de relacionar, comparar, clasificar, categorizar, explicar, justificar y fundamentar. Estos son los ejes de la pedagogía interactiva trabajados como contenidos procedimentales.

La tecnología brinda al docente nuevas herramientas como la interactividad, el hipertexto, las posibilidades de búsqueda rápida, la autoevaluación sincrónica y la multimedia. Estas herramientas permiten complementar la enseñanza tradicional en las aulas posibilitando al alumno-usuario formarse con el mecanismo que prefiera dentro del abanico de posibilidades existentes que permite la informática.

En esta página para trabajar se encuentra material sobre:

Distribución Binomial:

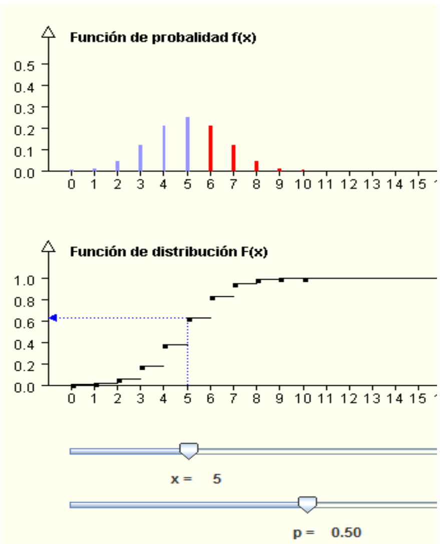


Figura 1

Variando los parámetros n y p se generan las distintas funciones de cuantía y de probabilidad acumulada en las cuales, definido el suceso, se puede observar en la gráfica en ambas distribuciones, la probabilidad del mismo.

Distribución Normal Standarizada

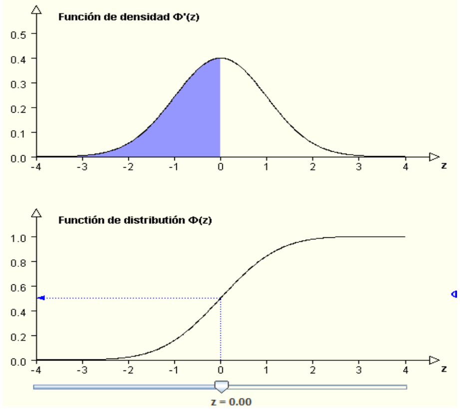


Figura 2

En este ejercicio interactivo se trabaja en una Normal standart z, con media cero y desvío uno.

$$Z = \frac{X-\mu}{\sigma} \quad y \quad tiene \quad E(Z)=0 \quad y \quad V(Z)=1$$

El área en la función de densidad, f(z), representa la probabilidad del suceso y esa misma probabilidad es representada por la longitud en la función de distribución acumulada

Diferencia entre dos valores en una distribución normal standarizada.

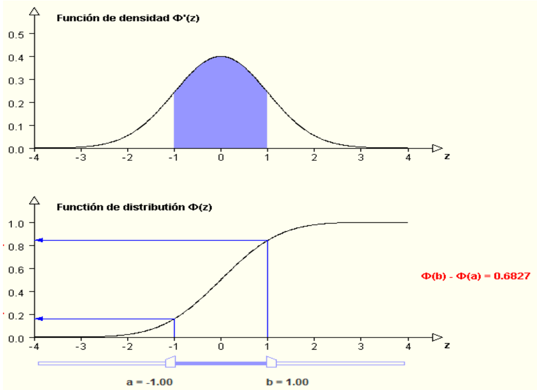


Figura 3

En esta applet se puede definir un intervalo en el recorrido de la variable y observar el área que representa la probabilidad en la función densidad y la longitud, que corresponde a la probabilidad de dicho suceso en la función de probabilidad acumulada

Distribución de probabilidad Normal

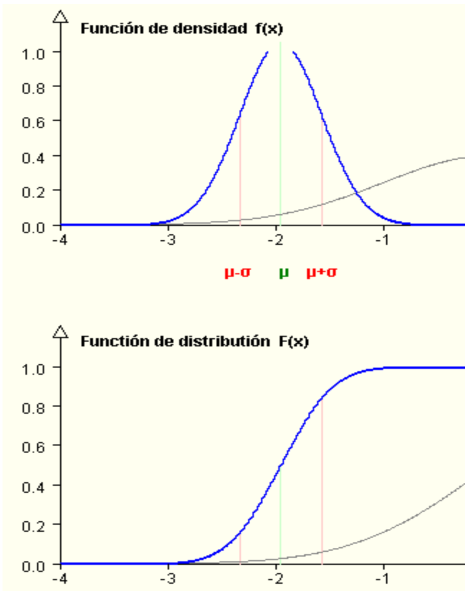


Figura 4

En este tipo de ejercicio interactivo se puede variar los valores de una Normal, X ~ N (μ , σ) que toma infinitos valores en sus parámetros y evaluar su comportamiento respecto a una distribución normal standarizada cuya distribución es z ~ N (0 , σ)

Equipo Editor.

REVISTA IBEROAMERICANA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA

ISSN: 1815-0640
Número 35. Septiembre de 2013
páginas 207-214

www.fisem.org/web/union

Fundación Canaria Carlos Salvador y Beatriz

III Convocatoria de Ayudas al alumnado de niveles postobligatorios para el curso escolar 2013-2014

Animados por el éxito alcanzado en las convocatorias anteriores, y en este momento del inicio del curso (en España comienza los primeros días de septiembre y se prolonga hasta el mes de junio del año próximo), la Fundación acude a su cita con los estudiantes de los niveles educativos postobligatorios de Canarias para ofrecer ayudas a aquellos cuyas familiares sufran los rigores de la situación económica actual. Se les pide, además, que tengan una trayectoria académica que justifique la concesión de la ayuda. Tendrán que cumplimentar una solicitud en la que tras los datos de localización, deben explicar su situación para que el Comité que estudie las solicitudes pueda hacer una propuesta razonada al Patronato de la Fundación que es quien, en definitiva, realiza la adjudicación. Las cantidades que se asignen son variables y adaptadas a las circunstancias individuales de cada solicitante. Para este delicado cometido, la Fundación contará con la colaboración de los equipos directivos y los consejos escolares que, en las ediciones anteriores, fueron determinantes en casi todos los casos. El plazo de admisión se ha ampliado este curso hasta el 15 de noviembre para tratar de conseguir que participe el mayor número de estudiantes posible.

Las ayudas que se otorguen serán sufragadas íntegramente con fondos propios de la Fundación.

En nuestra web pueden leerse las bases por las que se rige la convocatoria así como consultar cuantas dudas puedan surgir.

Carta de agradecimiento de una nueva alumna universitaria: matrícula gratuita para estudiar medicina

Son los hechos, los pequeños detalles, las pequeñas noticias que hacen que el trabajo de la Fundación Canaria Carlos Salvador y Beatriz pueda seguir adelante “haciendo cosas por los demás” pues “con poco se puede hacer mucho”, uno de nuestros lemas.

La carta de la alumna nos llegó el 2 de septiembre de 2013 con su nombre y apellidos, instituto en el que estudió y el lugar de Canarias en el que vive. Por la justa confidencialidad que merece su carta no incluimos esos datos.

En dos ocasiones se le ha ayudado con 400 € en los cursos 2011 -2012 (1º de Bachillerato) y 2012-2013 (2º de Bachillerato) terminando sus estudios previos al ingreso a la Universidad con excelentes calificaciones y una matrícula de honor que le permite empezar de forma gratuita los estudios en la Facultad de Medicina de la Universidad de La Laguna. .

Sobran las palabras. Aquí está la carta enviada:

"Estimada Fundación:

Soy una estudiante canaria que me he visto beneficiada de su ayuda económica y que les está enormemente agradecida de la ayuda que me han aportado, porque ya no solo se trata del motivo económico sino del orgullo y la satisfacción que me ha producido el verme respaldada en unos momentos tan difíciles. Ese apoyo ha contribuido a que pudiese finalizar el Bachillerato con excelentes calificaciones, y a que se me haya atribuido matrícula de honor, la cual me ha permitido matricularme gratuitamente en la universidad de La Laguna durante el curso 2014/2014 en la carrera que siempre he deseado estudiar, medicina.

Por todo esto, deseaba expresar mi enorme gratitud hacia la Fundación, que desde un primer momento confió en mí y que se ha convertido en un pilar muy importante dentro de mi formación.

Espero que puedan seguir ayudando a otros muchos estudiantes canarios que, al igual que yo, se encuentran en una situación económica difícil pero que poseen fuerza y ánimo para seguir estudiando y formándose.

Les desea lo mejor."

Proyecto "Útiles para todos" en las Instituciones Educativas de Educación Inicial y Primaria IE N° 10469 Conchud – IE N°10526 El Verde. Provincia de Chota. Región Cajamarca. Perú.

La Institución Educativa de El Verde se suma a la de Conchud para recibir los útiles que permitirán mejorar la calidad de la enseñanza que reciban a lo largo del curso 2013. Gracias una vez más a la generosa colaboración del Profesor José Ventura Vegas, de su esposa la Profesora Gladys Zorrilla Cieza de Ventura y a un amplio equipo de colaboradores, venciendo no pocas dificultades, se pudo hacer llegar este material a los 196 niños y niñas que estudian en esas dos Comunidades Educativas. La inversión ha sido de 2530,46 dólares.

El Prof. Ventura firma el contrato para la elaboración de las mochilas

La mochila y los materiales escolares dentro

En un detallado informe remitido a la Fundación, el Profesor Ventura relata los pasos seguidos para llevar a cabo la acción una vez que recibe el 22 de febrero la confirmación de la aprobación por parte del Patronato del proyecto “Útiles para todos” solicitándole un presupuesto para desarrollarlo.

En esta ocasión, la entrega del material escolar va acompañada de una mochila de gran utilidad y necesidad teniendo en cuenta las condiciones climáticas de estos lugares. Se encarga su elaboración a una empresa de Chiclayo que las elabora de manera artesanal con un material de excelente calidad. Hace la compra de los materiales escolares que, debidamente embalados (19 cajas, y un paquete grande) son trasladados en una camioneta desde Chiclayo hasta Chota.

El día 27 de Marzo se realiza el viaje de Gladys y Evelia Zorrilla de Chiclayo a Chota (saliendo a las 20:30h y llegando a las 09:30h del día siguiente). La empresa se ve obligada a cambiar la ruta debido a las lluvias propias de la temporada y se hace un recorrido más largo por Cajamarca, retrasando la llegada una tres horas aproximadamente.

Elaboración de las mochilas

La Profesora Gladys Zorrilla supervisa los materiales

Reinician el viaje en combi expresamente contratada para el traslado de los materiales y las mochilas de Chota a Conchud. Nuevamente se contó con el apoyo de los docentes del Instituto Superior Pedagógico “Nuestra Señora de Chota” (Chota) tanto para el traslado como para la entrega a los niños y niñas. Enrumbaron de Chota 09:30h, llegando a la Púcara a las 12:30h aproximadamente, donde se cargaron los materiales en las acémilas y la comitiva de docentes se dirigió caminando a Conchud.

Prepararon los paquetes escolares y los introdujeron en las mochilas, que se entregaron a todos y cada uno de los escolares. Pero el tiempo no se puede estirar y se hizo de noche. Tuvieron que pernoctar en el lugar y tomar una decisión con respecto al material sobrante. Hablamos con los padres de familia para que regrese el material a la Púcara para entregar a los niños de la I.E N° 10526 del Verde, considerada zona de extrema pobreza. Vale decir que esta comunidad no estaba esperando ninguna donación, por lo que la comunidad quedó profundamente agradecida.

Cargando los acémilas

Traslado hasta Conchud entre brumas

Una vez concluida la misión que les llevó hasta allí, emprendieron el regreso. Pero los inconvenientes no habían acabado porque hubo un derrumbe y se vieron obligadas a quedarse en el Bus hasta que despejaran la carretera, hecho que ocurrió recién en la mañana del día siguiente, hasta que finalmente llegaron a su destino, Chiclayo, a las 13:30h del domingo 31 de Marzo de 2013.Ante esta ejemplar entrega, honradez y generosidad, la Fundación se muestra muy agradecida y estimulada a seguir adelante con el proyecto porque como indica unos de sus lemas, dirigido a sus Patronos y colaboradores, “TU AYUDA, LLEGA”.

Colaboradores en el camino hacia Conchud

Una mochila con los materiales para cada escolar

El profesor Ventura remitió a la Fundación, por correo postal, además de dos mochilas iguales a las entregadas, un dvd con amplia información gráfica de la entrega (555 fotografías más un largo video). Son escenas muy emocionantes y emotivas. También incluyen las actas de la entrega firmadas con la huella dactilar de cada uno de los niños y niñas así como el documento de identidad y la firma del padre de familia, todas las facturas originales de los gastos realizados y un cd con la bella música de “Voces del Ande”.

Fundação Canaria Carlos Salvador e Beatriz

III Convocação de Ajudas ao alumnado de níveis postobligatorios para o curso escolar 2013-2014

Animados pelo sucesso atingido nas convocações anteriores, e neste momento do início do curso (em Espanha começa nos primeiros dias de setembro e prolonga-se até o mês de junho do ano próximo), a Fundação vai a sua cita com os estudantes dos níveis educativos postobligatorios de Canárias para oferecer ajudas àqueles cujas familiares sofram os rigores da situação económica actual. Pede-se-lhes, ademais, que tenham uma trajectória académica que justifique a concessão da ajuda. Terão que preencher uma solicitação na que depois dos dados de localização, devem explicar sua situação para que o Comité que estude as solicitações possa fazer uma proposta raciocinada ao Patronato da Fundação que é quem, em definitiva, realiza a adjudicação. As quantidades que se atribuam são variáveis e adaptadas às circunstâncias individuais da cada solicitante. Para este delicado cometido, a Fundação contará com a colaboração das equipas directivas e os conselhos escoares que, nas edições anteriores, foram determinantes em quase todos o casos. O prazo de admissão ampliou-se este curso até o 15 de novembro para tratar de conseguir que participe o maior número de estudantes possível. As ajudas que se outorguem serão sufragadas integralmente com fundos próprios da Fundação. Em nosso site podem ler-se as bases pelas que se rege a convocação bem como consultar quantas dúvidas possam surgir.

Carta de agradecimento de uma nova aluna universitária: matrícula gratuita para estudar medicina

São os factos, os pequenos detalhes, as pequenas notícias que fazem que o trabalho da Fundação Canaria possa seguir adiante “fazendo coisas pelos demais” pois “com pouco pode-se fazer muito”, um de nossos lemas. A carta da aluna chegou-nos o 2 de setembro de 2013 com seu nome e apellidos, instituto no que estudou e o lugar de Canárias no que vive. Pela justa confidencialidade que merece sua carta não incluímos esses dados.

Em duas ocasiões tem-se-lhe ajudado com 400 € nos cursos 2011 -2012 (1º de Bachillerato) e 2012-2013 (2º de Bachillerato) terminando seus estudos prévios ao rendimento à Universidade com excelentes qualificações e uma matrícula de honra que lhe permite começar de forma gratuita os estudos na Faculdade de Medicina da Universidade da Laguna. Sobram as palavras. Aqui está a carta enviada:

“Estimada Fundação:

Sou uma estudante canaria que me vi beneficiada de sua ajuda económica e que lhes está enormemente agradecida da ajuda que me contribuíram, porque já não só se trata do motivo económico senão do orgulho e a satisfação que me produziu o me ver respaldada nuns momentos tão difíceis. Esse apoio tem contribuído a que pudesse finalizar o Bachillerato com excelentes qualificações, e a que se me tenha atribuído matrícula de honra, a qual me permitiu matricularme gratuitamente na universidade da Laguna durante o curso 2014/2014 na carreira que sempre tenho desejado estudar, medicina.

Por tudo isto, desejava expressar minha enorme gratidão para a Fundação, que desde um primeiro momento confiou em mim e que se converteu num pilar importantíssimo dentro de minha formação

Espero que possam seguir ajudando a outros muitos estudantes canarios que, ao igual que eu, se encontram numa situação económica difícil mas que possuem força e ânimo para seguir estudando e se formando.

Deseja-lhes o melhor.”

Projecto “Úteis para todos” nas Instituições Educativas de Educação Inicial e Primária IE N° 10469 Conchud – IE N°10526 O Verde. Província deChota. Región Cajamarca. Perú.

A Instituição Educativa do Verde soma-se à de Conchud para receber os úteis que permitirão melhorar a qualidade do ensino que recebam ao longo do curso 2013. Obrigado uma vez mais à generosa colaboração do Professor José Ventura Vegas, de sua esposa a Professora Gladys Zorrilla Cieza de Ventura e a uma ampla equipa de colaboradores, vencendo não poucas dificuldades, se pôde fazer chegar este material aos 196 meninos e meninas que estudam em dois Comunidades Educativas. O investimento tem sido de 2530,46 dólares.

O Prof. Ventura assina o contrato para a elaboração das mochilas

A mochila e os materiais escolares dentro

Num detalhado relatório remetido à Fundação, o Professor Ventura relata os passos seguidos para levar a cabo a acção uma vez que recebe o 22 de fevereiro a confirmação da aprovação por parte do Patronato do projecto “Úteis para todos” solicitando-lhe um orçamento para desenvolvê-lo.

Nesta ocasião, a entrega do material escolar vai acompanhada de uma mochila de grande utilidade e necessidade tendo em conta as condições climáticas destes lugares. Encarrega-se sua elaboração a uma empresa de Chiclayo que as elabora de maneira artesanal com um material de excelente qualidade. Faz compra-a dos materiais escolares que, devidamente embalados (19 caixas, e um pacote grande) são transladados numa camioneta desde Chiclayo até Chota.

No dia 27 de Março realiza-se a viagem de Gladys e Evelia Zorrilla de Chiclayo a Chota (saindo às 20:30h e chegando às 09:30h do dia seguinte). A empresa vê-se obrigada a mudar a rota devido às chuvas próprias da temporada e faz-se um percurso mais longo por Cajamarca, atrasando a chegada uma três horas aproximadamente.

Elaboração das mochilas

A Professora Gladys Zorrilla Supervisiona os materiais

Reiniciam a viagem em combi expressamente contratada para o translado dos materiais e as mochilas de Chota a Conchud. Novamente contou-se com o apoio dos docentes do Instituto Superior Pedagógico “Nossa Senhora de Chota” (Chota) tanto para o translado como para a entrega aos meninos e meninas. Enrumbaron de Chota 09:30h, chegando à Púcara às 12:30h aproximadamente, onde se carregaram os materiais nas acémilas e a comitiva de docentes se dirigiu caminhando a Conchud.

Prepararam os pacotes escoares e introduziram-nos nas mochilas, que se entregaram a todos e a cada um dos escolares. Mas o tempo não se pode esticar e se fez de noite. Tiveram que pernoctar no lugar e tomar uma decisão com respeito ao material sobrante. Falamos com os pais de família para que regresse o material à Púcara para entregar aos meninos da I.E N° 10526 do Verde, considerada zona de extrema pobreza. Vale dizer que esta comunidade não estava a esperar nenhuma doação, pelo que a comunidade ficou profundamente agradecida.

Carregando os acémilas

Translado até Conchud entre brumas

Uma vez concluída a missão que lhes levou até ali, empreenderam o regresso. Mas os inconvenientes não tinham acabado porque teve um derrube e se viram obrigadas a ficar no Autocarro até que desocupassem a estrada, facto que ocorreu recém na manhã do dia seguinte, até que finalmente chegaram a seu destino, Chiclayo, às 13:30h do domingo 31 de Março de 2013.

Ante esta instância entrega, honradez e generosidad, a Fundação mostra-se muito agradecida e estimulada a seguir adiante com o projecto porque como indica uns de seus lemas, dirigido a seus Patronos e colaboradores, "TUA AJUDA, CHEGA".

Colaboradores no caminho para Conchud

Uma mochila com os materiais para a cada escolar

O professor Ventura remeteu à Fundação, por correio postal, além de dois mochilas iguais às entregadas, um dvd com ampla informação gráfica da entrega (555 fotografias mais um longo video). São cenas muito emocionantes e emotivas. Também incluem as actas da entrega assinadas com a impressão digital da cada um dos meninos e meninas bem como o documento de identidade e a assinatura do pai de família, todas as facturas originais das despesas realizadas e um cd com a bela música de "Voces del Ande"

UNIÓN
REVISTA IBEROAMERICANA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA
www.fisem.org/web/union

ISSN: 1815-0640
Número 35. Septiembre de 2013
páginas 215-216

VII Congreso Iberoamericano de Educación Matemática

La séptima versión del Congreso Iberoamericano de Educación Matemática, convocada por la Federación Iberoamericana de Sociedades de Educación Matemática (FISEM) ha sido organizada por la Sociedad de Educación Matemática de Uruguay (SEMUR), con el auspicio de ANTEL y el apoyo de numerosas entidades y organismos, entre ellos la Organización de Estados Iberoamericanos para la Educación, la Ciencia y la Cultura (OEI).

El congreso que ha contado con 1197 participantes ha abordado los desafíos y retos que la tiene la educación en los distintos niveles educativos en los distintos países iberoamericanos, además de servir de espacio de comunicación y de intercambio de experiencias y materiales a través de los más de mil cien trabajos presentados y expuestos.

El VII CIBEM ha tenido lugar en Montevideo, durante los días 16 al 20 de septiembre, ha contado con un amplío programa académico, constituido por las conferencias plenarias a cargo de Ubiratán D'ambrosio (Brasil), Cecilia Calvo (Uruguay), María Salett (Brasil), Marcelo C. Borba (Brasil), Pablo Flores (España), Vicenç Font (España) y Paola Valero (Colombia). El programa se ha completado con 37 conferencias regulares, 58 talleres, 140 mini cursos, 3 mesas redondas, 37 póster, 19 exposiciones en la feria matemática y 851 comunicaciones, lo que nos puede dar una idea de la variedad de trabajos presentados por representantes de Angola, Argentina, Brasil, Colombia, Costa Rica, Chile, Ecuador, España, Estados Unidos, Guatemala, Hungría, México, Panamá, Paraguay, Perú, Portugal, Uruguay y Venezuela.

En el acto de inauguración, realizado en el excelente marco del Auditorio Adela Reta, la Intendencia de Montevideo nombró Visitante Ilustre al profesor Ubirantan D´ambrosio.

Acto de inauguración del VII CIBEM

Además, también quedo tiempo para el disfrute de la ciudad y la diversión en las distintas actuaciones y actividades culturales y lúdicas incluidas en el programa; por lo que nos queda más que felicitar al comité organizador por el excelente trabajo realizado que ha hecho que esta nueva edición del CIBEM sea un éxito.

Aprovechando la celebración del CIBEM, la Federación Iberoamericana de Sociedades de Educación Matemática convocó reunión de la junta de gobierno que contó con participación de la mayoría de las sociedades representadas en esta Federación.

Reunión de la Junta de Gobierno de FISEM

En esta reunión, la junta de gobierno felicitó a Etda Rodríguez como presidenta de la Sociedad de Educación Matemática de Uruguay por el trabajo realizado en este congreso, felicitación que hace extensiva a todo el equipo de colaboradores y voluntarios.

Tal y como se anunció en el acto de clausura, la próxima edición del CIBEM se celebrará en Madrid (España) en el mes de julio de 2017, en la que nos costará mucho trabajo y esfuerzo superar el trabajo realizado en la edición que hace unos días terminó y de la que aún tenemos muchos y muy buenos momentos en nuestra retina.

Aunque aún quedan cuatro años, os esperamos en Madrid en 2017.

Agustín Carrillo de Albornoz Torres
Secretario general FISEM

UNIÓN
REVISTA IBEROAMERICANA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA
www.fisem.org/web/union

ISSN: 1815-0640
Número 35. Septiembre de 2013
páginas 217-219

Convocatorias y eventos

"La Matemática, en y para la Vida"
COVEM 2013
VIII CONGRESO VENEZOLANO DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA
del 1 al 4 de octubre
Santa Ana de Coro
Edo. Falcón - Venezuela

Convoca: ASOVEMAT y Universidad Nacional Francisco de Miranda
Lugar: Santa Ana de Coro. Estado de Falcón. Venezuela.
Fecha: 1 al 4 de octubre de 2013.
Información: **http://siscovem.falcon.gob.ve**

ASOCIACIÓN COLOMBIANA DE MATEMÁTICA EDUCATIVA

14º Encuentro Colombiano de Matemática Educativa.
ECME—14

Convocan: Asociación Colombiana de Matemática Educativa (ASOCOLME) y Universidad de Atlántico, Barranquilla..
Lugar: Ciudad de Barranquilla, Colombia.
Fecha: 9 al 11 de octubre de 2013.
Información: **www.asocolme.com**

SOCIEDAD ARGENTINA DE ESTADISTICA
SAE

XLI Coloquio Argentino de Estadística

Convocan: Sociedad Argentina de Estadística y Universidad Nacional de Cuyo.
Lugar: Mendoza Capital.
Fecha: 15 al 18 de octubre de 2013.
Información: **http://www.xlicoloquiodeestadistica.com/**

VI Congresso Internacional de Ensino da Matemática

Convoca: Universidade Luterana de Brasil
Organiza: Programa de Pós-graduação em Ensino de Ciências e Matemática (PPGECIM) da ULBRA Canoas
Lugar: Canoas, Rio Grande do Sul. Brasil.
Fecha: 16 al 18 de octubre de 2013.
Información: **www.ulbra.br/ciem2013**

XL Jornadas Nacionales de Estadística

Convocan: Sociedad Chilena de Estadística (SOCHE).
Organiza: Departamento de Matemática. Universidad de Valparaíso
Lugar: Valparaíso, Chile.
Fecha: 22 al 25 de octubre de 2013.
Información: **http://www.deuv.cl/jne2013/index.html**

Escuela de Primavera en Didáctica de la Matemática

Convocan: Universidad de San Martín (UNSAM). Universidad Pedagógica de Buenos Aires (unipe).
Lugar**:** Buenos Aires. Argentina.
Fecha: 24 al 26 de octubre de 2013.
Información: **cede@unsam.edu.ar - equipomatesec@unipe.edu.ar**

Convoca: GeoGebra Institute of Rio Grande do Norte.
Lugar: Mossoró. Brasil.
Fecha: 24 al 26 de octubre de 2013
Información: **http://geogebrainstitute-rn.com.br/**

Convoca: Universidad del Chaco Austral.
Lugar: Presidencia Roque Sáenz Peña. Chaco. Argentina.
Fecha: 7 al 9 de noviembre de 2013
Información: **http://geogebra.uncaus.edu.ar**

SOCIEDAD CUBANA DE MATEMÁTICA Y COMPUTACIÓN

Congreso Internacional COMPUMAT 2013

Convoca: Universidad de Ciencias Informáticas.
Lugar: La Habana. Cuba
Fecha: 27 al 29 de noviembre de 2013
Información: **https://compumat.uci.cu/**

INSTITUTO DE INVESTIGACIÓN SOBRE LA ENSEÑANZA DE LAS MATEMÁTICAS — PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATÓLICA DEL PERÚ

VII Coloquio Internacional sobre Enseñanza de las Matemáticas

Convoca: IREM-Perú y Maestría en Enseñanza de las Matemáticas de la Pontificia Universidad Católica del Perú (PUCP)
Lugar: Lima, Perú
Fecha: 11 al 13 de febrero de 2014
Información: **irem@pucp.edu.pe**
http://www.pucp.edu.pe/departamento/ciencias/matematicas/irem

REVISTA IBEROAMERICANA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA

www.fisem.org/web/union

ISSN: 1815-0640
Número 35. Septiembre de 2013
páginas 221-222

Normas para publicar en Unión

1. Los trabajos para publicar se deben enviar a **union.fisem@sinewton.org** con copia a **revistaunion@fisem.org**. Deben ser originales y no estar en proceso de publicación en ninguna otra revista. Los artículos recibidos serán sometidos a un proceso de evaluación, en función de los resultados de la misma el Comité Editorial decidirá que el trabajo se publique, con modificaciones o sin ellas, o que no se publique.
2. Los artículos remitidos para publicación deben ser escritos en Word, preferentemente usando la plantilla establecida al efecto (descargar plantilla) y, en todo caso, cumpliendo las siguientes normas: letra tipo **arial**, tamaño **12 puntos**, interlineado simple, los cuatro márgenes de 2,5 cm., tamaño DIN A-4. La extensión no debe ser superior a las 25 páginas, incluyendo figuras, que deben estar situadas en el lugar del texto donde deben ser publicadas. La simbología matemática necesaria deberá ser escrita con el editor de ecuaciones de Word, se insertará como una imagen o se realizarán utilizando los símbolos disponibles en el juego de caracteres “Arial”. Es importante no cambiar el juego de caracteres, especialmente **evitar el uso del tipo “Symbol”** u otros similares.
3. Las **ilustraciones y fotografías** deben estar situadas en el lugar del texto donde deben ser publicadas. Si es posible, los “pie de foto” se escribirán dentro de un “cuadro de texto” de Word (con o sin bordes) que estará “agrupado” con la imagen de referencia. Se deben numerar usando: **Figura 1, Figura 2,… Tabla 1, Tabla 2,…(Arial, negrita, tamaño 10)**
4. El artículo debe tener un **resumen en español, en portugués y en inglés**, cada uno de los cuales tendrá una longitud máxima de 10 líneas.
5. Teniendo en cuenta el carácter internacional de la revista, se hace indispensable que cuando los autores se refieran a un determinado sistema educativo nacional lo hagan constar expresamente y que siempre que se trate de un nivel educativo se indique la edad normal de los alumnos, lo que permitirá la comparación con el sistema educativo nacional del lector.
6. Los datos de identificación de los autores deben figurar solamente en la última página con el fin de garantizar el anonimato en el proceso de evaluación, deben constar los siguientes datos:
   - **De contacto**: nombre, dirección electrónica, dirección postal, teléfono.
   - **Para la publicación**: título o títulos, institución o instituciones a las que pertenece, lugar de residencia, títulos, publicaciones, así como una breve reseña biográfica de no más de ocho líneas.
7. Las referencias bibliográficas se incluirán al final del trabajo (y antes de la hoja de datos de autor) y deben seguir los formatos que se indican a continuación:

Para libro:

Bourbaki, N. (1972). *Elementos de historia de las matemáticas*. Madrid: Alianza.

Para capítulo de libro, actas de congreso o similar:

Fuson, K. (1992). Research on whole number addition and subtraction. En Grouws, D. (ed.) *Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning*, 243-275. MacMillan Publishing Company: New York.

Para artículo de revista:

Otte, M. (2003). Complementarity, sets and numbers. *Educational Studies in Mathematics*, 53, 203–228.

Para artículo de revista electrónica o información en Internet:

Guzmán Retamal, I. (2009). *Actividades Geométricas en la enseñanza. Análisis desde el punto de vista cognitivo.* UNIÓN [en línea], 19. Recuperado el 15 de octubre de 2009, de **http://www.fisem.org/paginas/union/revista.php**

Las referencias bibliográficas dentro del texto deben señalarse indicando, entre paréntesis, el autor, año de la publicación y página o páginas, por ejemplo (Godino, 1991, p. 14-18)

NOTA: Las normas que se indican en los puntos 2, 3 y 7 pretenden dar uniformidad en la redacción a los trabajos recibidos y simplificar así el trabajo de composición y maquetación de la revista. Si alguien tiene dudas sobre su aplicación, puede dirigir sus preguntas (lo más concretas posible) a **revistaunion@fisem.org**