UNIÓN

REVISTA IBEROAMERICANA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA

NÚMERO 37 – MARZO DE 2014

ÍNDICE

CRÉDITOS — Pág. 3

EDITORIAL — Pág. 5

FIRMA INVITADA: RAYMOND DUVAL

BREVE RESEÑA — Pág. 7

COMMENT ANALYSER LE PROBLEME CRUCIAL DE LA COMPREHENSION DES MATEMATIQUES? — Pág. 9

ARTÍCULOS

DIFICULDADES DE APRENDIZAGEM DE ÁREA E PERÍMETRO NA PERSPECTIVA DA PRODUÇÃO DE SIGNIFICADOS
MARCÍLIO DIAS HENRIQUES, AMARIDO MELCHIADES DE SILVA — Pág. 31

UNA CLASE DE TEORÍA DE GRUPOS USANDO PROGRESIONES ARITMÉTICAS, GEOMÉTRICAS Y MATRICES CUADRADAS DE ORDEN IMPAR
JOSEPH FRANCISCO, THAIS ARREAZA, EDILMO CARVAJAL — Pág. 57

ESTRATÉGIAS DE AVALIAÇÃO DE RELATÓRIOS ESCRITOS NA REGULAÇÃO DAS APRENDIZAGENS EM MATEMÁTICA
MARIA GORETE PIRES BRANCO, MARIA HELENA MARTINHO — Pág. 71

DISEÑO INSTRUCCIONAL PARA EL APRENDIZAJE DEL CONCEPTO DE LÍMITE: UN ESTUDIO DE CASO EN EL ITCG, LA UJED, LA UASLP Y LA UAN
R. PANTOJA RANGEL, A. LÓPEZ BETANCOURT, M. I. ORTEGA ÁRCEGA, J. C. HERNÁNDEZ GARCÍA — Pág. 91

ALGORITMO PARA LA RESOLUCIÓN DE ECUACIONES NO LINEALES UTILIZANDO DEFLACIÓN
ADAIR MARTINS, CLAUDIA ALLAN, SUSANA PARRA, ROBERTO LAURENT — Pág. 111

SECCIONES FIJAS

DINAMIZACIÓN MATEMÁTICA: MULTIDISCIPLINARIEDAD EN ALGUNAS ARITMÉTICAS ESPAÑOLAS DEL SIGLO XIX
VICENTE MEAVILLA SEGUÍ; ANTONIO M. OLLER MARCÉN — Pág. 121

EL RINCÓN DE LOS PROBLEMAS: OPORTUNIDADES PARA ESTIMULAR EL PENSAMIENTO MATEMÁTICO. TRIÁNGULOS DE ÁREA MÁXIMA O DE ÁREA MÍNIMA
ULDARICO MALASPINA JURADO — Pág. 139

TIC: APLICACIONES DE LAS DERIVADAS PARCIALES EN CONCEPTOS ECONÓMICOS UTILIZANDO LOS RECURSOS DE LA CLASSPAD
ANA MARÍA MARTÍN CARABALLO Y CONCEPCIÓN PARALERA MORALES — Pág. 147

IDEAS PARA ENSEÑAR: VIDAS DE MATEMÁTICOS QUE ABRAZARON LA FE RELIGIOSA
MARÍA ARROYO CASTILLEJA, JUAN NÚÑEZ VALDÉS, SILVIA RECACHA GONZÁLEZ — PÁG. 161

HISTORIA SOCIAL DE LA EDUCACIÓN MATEMÁTICA EN IBEROAMÉRICA: CONSIDERACIONES HISTÓRICAS Y DIDÁCTICAS RELACIONADAS CON EL SÍMBOLO ALGEBRAICO DE IGUALDAD
ANDRÉS GONZÁLEZ RONDELL, FREDY GONZÁLEZ — Pág. 181

LIBROS: MAPAS DEL METRO Y REDES NEURONALES. LA TEORÍA DE GRAFOS.
RESEÑA: CLAUDIA REYES — Pág. 199

EDUCACIÓN EN LA RED: MATEMÁTICA EN LA ESCUELA PRIMARIA
RESEÑA: LORENA ALFONSO — Pág. 201

INFORMACIÓN

FUNDACIÓN CANARIA CARLOS SALVADOR Y BEATRIZ — Pág. 203

CONVOCATORIA A LA DIRECCIÓN DE UNIÓN — Pág. 209

CONVOCATORIAS Y EVENTOS — Pág. 211

INSTRUCCIONES PARA PUBLICAR EN UNION — Pág. 215

UNIÓN
REVISTA IBEROAMERICANA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA

www.fisem.org/web/union

ISSN: 1815-0640
Número 37. Marzo de 2014
páginas 3-4

Unión. Revista Iberoamericana de Educación Matemática es una publicación de la Federación Iberoamericana de Sociedades de Educación Matemática **(FISEM).** Tiene una periodicidad trimestral, de modo que se publican cuatro números al año, en los meses de marzo, junio, septiembre y diciembre. Es recensionada en ***Mathematics Education Database*** y está incluida en el catálogo ***Latindex***.

Evaluadores

Pilar Acosta Sosa
María Mercedes Aravena Díaz
Lorenzo J Blanco Nieto
Alicia Bruno
Natael Cabral
María Luz Callejo de la Vega
Matías Camacho Machín
Agustín Carrillo de Albornoz
Silvia Caronia
Eva Cid Castro
Carlos Correia de Sá
Cecilia Rita Crespo Crespo
Miguel Chaquiam
María Mercedes Colombo
Patricia Detzel
Dolores de la Coba
José Ángel Dorta Díaz
Rafael Escolano Vizcarra
Isabel Escudero Pérez
María Candelaria Espinel Febles
Alicia Fort
Carmen Galván Fernández
María Carmen García González
María Mercedes García Blanco
José María Gavilán Izquierdo
Margarita González Hernández
María Soledad González
Nelson Hein
Josefa Hernández Domínguez
Rosa Martinez
José Manuel Matos
José Muñoz Santonja
Raimundo Ángel Olfos Ayarza
Luiz Otavio.
Manuel Pazos Crespo
María Carmen Peñalva Martínez
Inés del Carmen Plasencia
María Encarnación Reyes Iglesias
Natahali Martín Rodríguez
María Elena Ruiz
Victoria Sánchez García
Leonor Santos
Maria de Lurdes Serrazina
Martín M. Socas Robayna
María Dolores Suescun Batista
Ana Tadea Aragón
Mónica Ester Villarreal
Antonino Viviano Di Stefano

Diseño y maquetación

Diseño web: Daniel García Asensio

Logotipo de Unión: Eudaldo Lorenzo

Colaboran

CARLOS SALVADOR Y BEATRIZ FUNDACIÓN CANARIA

OEI

REVISTA IBEROAMERICANA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA

www.fisem.org/web/union

ISSN: 1815-0640
Número 37. Marzo de 2014
páginas 5-6

Editorial

"¿Es posible para los niños hacer matemáticas creativas (es decir: hacer matemáticas) en todas y cada una de las etapas de su vida estudiantil? Yo argumentaré que la respuesta es: sí, pero una gran cantidad de trabajo matemático creativo realizado por matemáticos adultos es necesario para hacerlo posible".

Seymour Papert.

Estimados colegas y amigos:

Una nueva edición de UNION nos permite llegar a ustedes nuevamente, con el propósito de compartir trabajos que han realizado colegas de varios países, esto nos alegra pero, hoy estamos tristes por la pérdida de una gran persona, un entrañable amigo, un gran colaborador y educador matemático, el Profesor Sergio Peralta Nuñez, referente de la Sociedad Matemática Uruguaya (SEMUR) y tesorero de la Federación Iberoamericana de Sociedades de Educación Matemática (FISEM), acompañamos a todos sus seres queridos y lo tendremos siempre presente en nuestros recuerdos.

Tenemos el gran honor de contar con el Dr. Raymond Duval como firma invitada en este número, quién ha escrito el interesante artículo "*Comment analyser le probleme crucial de la comprehension des matematiques?*", tema central de la Educación Matemática. Le agradecemos enormemente su colaboración en este proyecto que une a tantos educadores de distintos países.

Se presentan artículos de distintas temáticas, entre otras, geometría, teoría de grupos, límite y ecuaciones no lineales, también hay interesantes trabajos y reseñas en las siete secciones fijas de la Revista. Muchas sugerencias para aplicar en el aula que pueden ser adaptadas a los diferentes niveles educativos y a distintos contextos.

No nos podemos despedir hasta el próximo volumen, sin antes agradecer a todas las personas, docentes preocupados y ocupados en mejorar la enseñanza en términos generales y en particular la enseñanza de la matemática, que hacen que el proyecto de UNION tenga sentido y permanezca vigente desde hace ya tantos años.

Un abrazo fraternal.

Norma S. Cotic – Teresa C. Braicovich.
Directoras

Editorial

"¿É possível para os meninos fazer matemáticas criativas (isto é: fazer matemáticas) em todas e a cada uma das etapas de sua vida estudiantil? Eu argumentarei que a resposta é: sim, mas uma grande quantidade de trabalho matemático criativo realizado por matemáticos adultos é necessário para fazê-lo possível".

Seymour Papert.

Estimados colegas e amigos*:*

Uma nova edição de UNION permite-nos chegar a vocês novamente, com o propósito de compartilhar trabalhos que têm realizado colegas de vários países, isto nos alegra mas, hoje estamos tristes pela perda de uma grande pessoa, um entrañable amigo, um grande colaborador e educador matemático, o Professor Sergio Peralta Nuñez, referente da Sociedade Matemática Uruguaia (SEMUR) e tesorero da Federação Iberoamericana de Sociedades de Educação Matemática (FISEM), acompanhamos a todos seus seres queridos e tê-lo-emos sempre presente a nossas lembranças.

Temos a grande honra de contar com o Dr. Raymond Duval como assina convidada neste número, quem tem escrito o interessante artigo "*Comment analyser lhe probleme crucial da comprehension dês matematiques*?", tema central da Educação Matemática. Agradecemos-lhe enormemente sua colaboração neste projecto que une a tantos educadores de diferentes países.

Apresentam-se artigos de diferentes temáticas, entre outras, geometria, teoria de grupos, limite e equações não lineares, também há interessantes trabalhos e reseñas nas sete secções fixas da Revista. Muitas sugestões para aplicar no sala que podem ser adaptadas aos diferentes níveis educativos e a diferentes contextos.

Não nos podemos despedir até o próximo volume, sem dantes agradecer a todas as pessoas, docentes preocupados e ocupados em melhorar o ensino em termos gerais e em particular o ensino da matemática, que fazem que o projecto de UNION faça sentido e permaneça vigente desde faz já tantos anos.

Um abraço fraternal.

Norma S. Cotic – Teresa C. Braicovich.
Directoras

UNIÓN
REVISTA IBEROAMERICANA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA
www.fisem.org/web/union

ISSN: 1815-0640
Número 37. Marzo de 2014
página 7-8

Firma Invitada: Raymond Duval

Breve Reseña

Philosophe et psychologue de formation, Raymond Duval a fait sa thèse avec Pierre Gréco sur les hypothèses épistémologiques de la psychologie génétique de Piaget. De 1970 à 1995, il a travaillé à l'IREM de Strasbourg (Institut de Recherche sur l'enseignement des Mathématiques) où il participé à de nombreuses enquêtes et expériences dans des classes de Collège (élèves de 11-16 ans). Puis il a enseigné à l'I.U.F.M. (Institut de Formation des Maîtres) de l'Académie de Lille, dans le cadre de la formation des futurs enseignants de l'Ecole primaire. Il a été en même temps directeur du laboratoire Mutations des Systèmes Educatifs, de l'Université du Littoral. Il est maintenant Professeur émérite de l'Université du Littoral.

Ses premiers travaux ont porté sur les difficultés systématiques de compréhension que l'apprentissage des mathématiques pose à une grande majorité d'élèves tout au long du curriculum. Cela l'a conduit à s'interroger sur le type de fonctionnement cognitif que l'activité mathématique, requiert de manière spécifique, quelques soient les concepts enseignés. Pour saisir le mode de fonctionnement cognitif propre à la pensée en mathématique, et qui n'est pas requis dans les autres domaines de la connaissance, ses recherches se sont faites dans deux grandes directions. Elles ont tout d'abord porté sur l'utilisation de la langue naturelle pour raisonner en comparant les pratiques de raisonnement en mathématiques et en dehors des mathématiques (les démonstrations en géométrie et l'argumentation dans les questions sociétales). Elles ont ensuite porté sur tout ce qui concerne la visualisation en mathématiques et son rôle non seulement dans l'heuristique mais aussi pour pouvoir appliquer les connaissances mathématiques dans des situations réelles. Il a également travaillé sur les problèmes de compréhension des textes.

Ces différentes recherches ont donnés lieu à des publications dans *Educational Studies in Mathematics*, *Recherches en Didactique des Mathématiques*, les *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives*, à des collaborations à des ouvrages. Elles ont aussi donné présentées dans Conférences à des Actes de congrès internationaux, et dans des séminaires.

Les résultats de ces différentes recherches l'ont conduit à développer, à partir des années 1990, un modèle cognitif de la pensée mettant l'accent non seulement sur l'importance de la pluralité des registres de représentation sémiotiques, mais sur les difficultés et la nécessité de leur coordination pour la compréhension conceptuelle en mathématiques. Une présentation de ce modèle du fonctionnement cognitif de la pensée est donné dans l'ouvrage *Sémiosis et pensée humaine* (Peter Lang 1995), traduit en espagnol (1999). Une synthèse tenant compte des recherches développées depuis a été publiée en 2011 sous le titre: *Ver e ensinar a Matematica de outra forma. (I) Entrar no modo matemacico de pensar os registros de* *representacoes semioticas* (Sao Paolo).

En 1988 Raymond Dvual a créé la revue *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives*. Il a été été membre du comité scientifique national des IREM, membre du comité scientifique de *Recherches en didactique des mathématiques,* et membre de l'Advisory Board du Kaput Center de l'University of Massachussets (Dartmouth).

UNIÓN
REVISTA IBEROAMERICANA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA
www.fisem.org/web/union

ISSN: 1815-0640
Número 37. Marzo de 2014
páginas 9-29

Comment analyser le problème crucial de la compréhension des mathématiques?

Firma Invitada: Raymond Duval

L’enseignement des mathématiques se heurte à des difficultés systématiques et récurrentes de compréhension qu’on ne retrouve pas dans l’enseignement des autres disciplines. Cette incompréhension apparaît très vite, à tous les niveaux, lorsque les élèves doivent résoudre des problèmes, ce qui est pourtant considéré comme la situation par excellence pour acquérir des connaissances mathématiques et pour apprendre à les utiliser. D’où vient l’incompréhension ressentie, de manière durable et souvent définitive, par tant d’élèves à l’égard des mathématiques?

Beaucoup d’explications ont été avancées. Certaines ont insisté sur la nécessité de prendre en compte la complexité épistémologique propre à chacun des concepts enseignés. D’autres ont mis en avant la nécessité d’introduire les connaissances mathématiques en suivant le processus naturel et commun de la formation des concepts à partir d’observations et d’expériences concrètes. D’autres ont plus simplement souligné qu’il fallait commencer par faire découvrir l’intérêt pratique des mathématiques puisqu’elles sont utilisées dans beaucoup d’activités, quotidiennes et professionnelles. Cependant toutes ces explications ont un point commun. Elles en restent au seul point de vue mathématique pour analyser ce qu’est l’activité mathématique, pour choisir les connaissances qui vont être fixés comme objectifs globaux d’une éducation mathématique pour tous les élèves jusqu’à 16 ans, et pour décomposer ces connaissances en une progression à suivre sur un cycle de plusieurs années. Et quand on s’en tient à ce seul point de vue sur ces questions décisives pour l’enseignement des mathématiques, on manque la raison profonde des difficultés récurrentes des élèves dans l’apprentissage des mathématiques. En mathématiques, on ne pense pas et on ne travaille pas du tout de la même manière que dans les autres domaines de connaissance.

Le défi majeur de l’enseignement des mathématiques est de faire entrer les élèves dans la manière de penser et de travailler propre aux mathématiques. Car c’est la condition préalable à toute acquisition de concepts mathématiques. Mais pour cela, il faut pouvoir analyser la manière mathématique de penser et de travailler *dans ce qu’elle a de radicalement différent des manières plus spontanées de penser et de travailler dans les autres domaines de la connaissance.* Une telle analyse ne peut être faite que d’un point de vue cognitif. La théorie des registres de représentation sémiotique est essentiellement un outil que nous avons élaboré pour analyser la manière de penser et de travailler en mathématiques, quels que soient les concepts mathématiques utilisés et quels que soient les domaines des mathématiques où l’on travaille (géométrie, algèbre, analyse..). En un certain sens, l’activité mathématique présente deux faces: celle qui apparaît quand on la considère du point de vue mathématique, et celle qui apparaît quand on la considère du point de vue cognitif.

Dans cet article, nous allons présenter l'importance et la nécessité de faire entrer les élèves dans la manière de penser et de travailler propre aux mathématiques. Pour cela nous allons aborder les quatre questions suivantes:

— Comment décrire la manière de penser et de travailler en mathématiques?

— La conversion des représentations est-elle le premier obstacle à la compréhension en mathématiques?

— Qu'est-ce comprendre en mathématiques?

— Les deux faces de l'activité mathématique sont-elles prises en compte dans l'enseignement et dans les recherches didactiques?

1. Comment décrire la manière de penser et de travailler en mathématiques?

Cette question est cruciale pour toute recherche sur l'apprentissage des mathématiques et, par conséquent, pour l'enseignement des mathématiques. Pour y répondre, il faut comparer les mathématiques aux autres types de connaissance. Les mathématiques sont-elles un type de connaissance comme les autres connaissances ou sont-elles un type de connaissance à part? Autrement dit, l'acquisition de connaissances mathématiques relève-t-elle des mêmes processus cognitifs que pour les autres types de connaissance, ou exige-t-elle le développement de processus cognitifs spécifiques?

Trois idées sont fondamentales pour analyser la connaissance et son processus de développement, quels que soient les types de connaissance considérés.

1.1. Tout objet donne lieu à autant de représentations possibles et différentes qu'il existe de systèmes utilisables pour produire des représentations de cet objet.

Il existe deux grandes classes de systèmes producteurs de représentations. Les systèmes sémiotiques comme le langage, et les systèmes non sémiotiques comme les instruments qui donnent des images de ce qu'on ne peut pas percevoir directement (télescopes, microscopes, oscilloscopes). Parmi tous les systèmes non sémiotiques, on peut aussi ranger les réseaux neuronaux d'une région cérébrale qui permettent de produire des images mentales, comme dans le cas de la mémoire visuelle ou auditive.

Ainsi, en mathématiques, les systèmes producteurs de représentations utilisés sont des systèmes sémiotiques. Le développement des mathématiques a été étroitement lié à l'invention de nouveaux systèmes sémiotiques producteurs de représentations. L'exemple le plus simple est celui de la représentation des nombres. Il y a autant de représentations possibles d'un nombre entier que de systèmes d'écriture des nombres. Les deux progrès décisifs dans la représentation des nombres ont été, d'une part, leur représentation en fonction d'une base et de la position des signes utilisés et, d'autre part, l'invention du «zéro». L'écriture décimale constitue ainsi un véritable système sémiotique selon la définition structuraliste des signes de Saussure (Duval 2006c, p. 53-54). Mais l'exemple le plus frappant est la révolution sémiotique qui s'est produite en mathématiques aux XVIe et XVIIe siècle, en moins de 150 ans. Il y a eu l'invention d'une écriture littérale pour exprimer des relations d'égalité ou d'inégalité entre des grandeurs et, dans la foulée, l'invention d'un système de représentations graphiques en utilisant une règle de correspondance entre un point et un couple de nombres sur deux axes gradués. L'invention de ces deux systèmes ont marqué l'émergence de l'algèbre et celle de l'Analyse (Duval 2011, b. 24-25). Notons ici que l'invention du système cartésien de représentation graphique constitue un type visualisation mathématique qui est totalement différent de la visualisation proprement géométrique qui s'était développée avec Euclide. Cette observation est d'autant plus importante que ces deux types de visualisation sont très vite utilisés dans l'enseignement pour introduire des notions mathématiques.

Dans tous les autres domaines scientifiques, les systèmes producteurs de représentations sont, au contraire, des systèmes non sémiotiques, c'est à dire des instruments qui permettent d'accéder aux objets échappant à toute perception directe. L'exemple historique est l'utilisation en 1609 d'une lunette pour regarder la lune. En l'absence d'appareils enregistreurs, Galilée a du dessiner les images obtenues grâce une lunette grossissant à peine 10 fois l'objet regardé. Naturellement il fallait interpréter ces images pour savoir ce qu'elles représentaient, car elles montraient des choses différentes de celles que l'on distingue à l'œil nu. Leur interprétation exigeait un raisonnement analogique et non mathématique, entièrement fondé sur le principe expérimental de l'isolation et de la variation des facteurs. Galilée est le premier à l'avoir mis en œuvre en appliquant ce type de raisonnement aux phénomènes de réflexion de la lumière sur différents types de surface (Duval 2011a, p. 46-47, 57).

1.2. Un objet ne doit jamais être confondu avec l'une quelconque de ses représentations possibles.

C'est l'exigence fondatrice de toute connaissance et, plus particulièrement de toute connaissance scientifique. Elle a été formulée pour la première fois par Platon qui en a fait l'idée directrice de toute sa « théorie de la connaissance».

Une telle exigence peut paraître triviale et relever du bon sens. Dans le domaine des objets concrets, que l'on peut non seulement voir, mais toucher et, surtout, manipuler (regrouper ou séparer, déplacer, retourner, déformer..), confondre la représentation d'un objet avec l'objet lui-même — même si on voit sans pouvoir toucher – ne vient pas à l'esprit. Ou alors on commencera à parler de «troubles»! Dans le domaine des connaissances scientifiques, c'est moins trivial comme l'histoire de la connaissance de l'univers et de la nature le montre. Mais cela ne soulève aucune difficulté épistémologique ou cognitive sérieuse. *Car il y a toujours un moyen d'avoir un accès non-sémiotique aux objets eux-mêmes.* Et l'on oublie jamais qu'on utilise un instrument, alors qu'on oublie souvent les représentations sémiotiques, à commencer par le langage, qui sont mobilisées implicitement, ou produites « mentalement»!

En mathématiques, au contraire, on ne peut jamais distinguer l'objet et ses représentations, car il n'y a pas de double accès aux objets mathématiques, l'un qui serait celui d'une perception concrète ou lié à l'utilisation d'un instrument comme en physique, et l'autre qui serait lié à la production de représentations sémiotiques. L'accès aux objets mathématiques passe nécessairement par la production de représentations sémiotiques. Revenons à l'exemple de la représentation des nombres. Dans le tableau ci-dessous nous avons juxtaposé différentes représentations d'un nombre, à la manière dont Kosuth avait photographié une chaise réelle contre un mur avec, de part et d'autre, collés au mur la photo de cette chaise et un texte définissant le mot «chaise ». Et il avait intitulé la photo de cette mise en scène: «une ou trois chaises». Nous pourrions de même intituler ce regroupement de représentations: « un nombre ou huit nombres?».

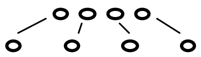
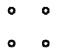
IIII *ou* II II *doigts, allumettes*  *la t‰che piagetienne* ((((I) I) I) I) *inclusions lineaires*  *configuration polygonale*	**«quatre»** *Le lexique varie considérablement selon les langues*	**«4»** (dans le système décimal) . **«100»** (dans le système binaire) **64/16** (dans l'écriture fractionnaire)
Organisation spatiale de marques matérielles ou dessinées: **Opérations** de regroupement, de séparation des items	**Une suite de désignations verbales** à reproduire toujours dans le même ordre. **Opération** de comptage des éléments de petites collections discrètes.	**Organisation sémiotique ensystèmes d'écriture** utilisant **le symbole «0»** **Les quatre opérations** arithmétiques sur les entiers

Figure 1. Un nombre ou huit nombres?

Mais la question importante dans ce montage de représentations à la manière de Kosuth n'est pas celle-là. Dans la photo de Kosuth, il est facile de reconnaître où se trouve la chaise elle-même et où sont les deux représentations de la chaise. Ici, dans ce montage, peut-on dire où se trouve le nombre lui-même et, donc, le distinguer de ses représentations? Dans le mot, dans son écriture décimale ou dans l'une des organisations spatiales d'items matériels? La question peut paraître saugrenue. On peut en donner une formulation moins tranchée. Parmi toutes ces représentations possibles, quelle est la meilleure pour que les élèves puissent apprendre et comprendre? Cette question est celle que les enseignants posent chaque fois qu'ils doivent introduire en classe une nouvelle notion mathématique et qu'ils se heurtent à l'incompréhension des élèves.

L'impossibilité d'un double accès aux objets mathématiques, c'est à dire d'un accés non sémiotique qui soit indépendant de la production de représentations sémiotiques, constitue ce que nous avons appelé le «paradoxe cognitif» des mathématiques.

— *Si les objets mathématiques ne sont pas accessibles en dehors de la production d'une représentation sémiotique,* comment ne pas confondre l'objet mathématique et la représentation sémiotique utilisée?

— *Et si il y a plusieurs représentations sémiotiques d'un même objet mathématique qui apparaissent n'avoir rien de commun,* qu'est-ce qui permet de savoir qu'il ne s'agit pas d'objets mathématiques différents mais du même objet mathématique?

Pour bien comprendre le paradoxe cognitif des mathématiques, il est important d'introduire un troisième personnage, si l'on ose dire, dans la distinction entre l'objet lui-même et l'une quelconque des représentations de l'objet: *le contenu de la représentation*. Ainsi, les légendes pertinentes pour la photo de Kosuth et le montage de représentations d'un nombre sont «un chaise et deux représentations différentes» et «huit représentation représentations différentes d'un nombre».

Le contenu d'une représentation sémiotique présente, en effet, deux caractéristiques inséparables. D'une part, il explicite ou présente certaines propriétés d'un objet et en occulte d'autres. D'autre part, il dépend entièrement du système sémiotique utilisé pour produire la représentation, comme on peut le voir dans la troisième colonne de la Figure 1 ci-dessus. *Cette deuxième propriété montre le fossé épistémologique qui sépare les représentations sémiotiques et les représentations non sémiotiques.* Les systèmes sémiotiques permettent une création illimitée de représentations nouvelles, indépendamment d'une relation préalable à l'objet lui-même. Elles libèrent l'esprit de la connaissance préalable des objets. En ce sens, le symbole «0» est le symbole par excellence de la représentation sémiotique des nombres.

1.3. En mathématiques, l'intérêt d'un système sémiotique dépend de ses possibilités de transformation de représentations produites en d'autres représentations du même système.

D'un point de vue mathématique toutes les représentations sémiotiques ne sont pas du tout équivalentes ou également intéressantes. Le critère de choix dépend des opérations que l'on peut faire avec un type de représentations pour obtenir d'autres représentation dont les contenus feront apparaître une information ou une donnée nouvelle.

Ainsi les opérations numériques que l'on peut faire avec des éléments matériels, ou des marques tracées portent sur leur disposition spatiale et sont en quelque sorte extérieures au contenu de la représentation (Figure 1, colonne 1). Ces éléments servent simplement de support pour une une opération de comptage, c'est à dire pour une désignation verbale successive de chacun des éléments (Figure 1, colonne 2). En revanche, les opérations que l'on peut faire avec l'écriture décimale portent sur les chiffres et la position des chiffres dans l'écriture. Ces systèmes permettent de calculer sans effectuer aucun comptage, et indépendamment de la grandeur des nombres. Ces systèmes offrent donc une puissance de calcul illimitée au regard des autres types de représentations des nombres. En revanche, la puissance de calcul à partir de la seule utilisation de la langue naturelle est très faible. L'utilisation de la langue naturelle implique toujours la mobilisation implicite ou explicite d'un autre type de représentation des nombres.

On peut aussi observer l'importance du système sémiotique choisi, même lorsque les systèmes offrent la même puissance de calcul. *Les algorithmes de calcul changent en fonction du système d'écriture utilisé, alors que du point de mathématique les opérations arithmétiques sont les mêmes.* Il suffit de comparer les opérations suivantes:

$$0,25 + 0,5 \quad \text{et} \quad 1/4 + 1/2 \quad ; \qquad 0,25 \times 0,5 \quad \text{et} \quad 1/4 \times 1/2$$

Tous les systèmes sémiotiques utilisés en mathématiques *sont des systèmes spécialisés pour remplir une fonction spécifique de transformation de représentations sémiotiques*. Certains ont été créés dans la dynamique du développement des mathématiques. Ainsi le système des représentations graphiques a été créé pour pouvoir décrire de manière algébrique des formes géométriques, des courbes quadratiques, des courbes mécaniques, etc. Et cela a conduit à faire de ce système un puissant moyen de visualisation mathématique. D'autres systèmes ont été développés en reprenant une pratique culturellement commune, mais en en modifiant les règles de production. Ce qui est important, par exemple, avec les figures géométriques, ce n'est pas leur production à l'aide d'instruments visualisant certaines propriétés (règle, compas, etc.), mais c'est *leur possibilité d'être réorganisées visuellement en d'autres figures.* Grâce à cette possibilité de transformation visuelle, les figures «géométriques» remplissent une fonction d'exploration heuristique dans la résolution de problèmes (Duval, 2005).

1.4. Quelle théorie pour analyser le fonctionnement cognitif spécifique à la manière de travailler et de penser en mathématiques?

Les mathématiques sont un type de connaissance qui, d'un point de vue épistémologique, est complément différent des autres types de connaissance. Deux caractéristiques fondamentales les mettent à part. Tout d'abord, l'accès aux objets mathématiques se fait exclusivement par la production de productions sémiotiques. Et cela se traduit par le fait que les mathématiques sont le domaine de connaissance où l'on utilise presque tout le spectre des types possibles de représentation sémiotique. Ensuite, la manière de travailler en mathématiques est indissociable de la transformation de représentations sémiotiques en d'autres représentations sémiotiques dans un même système sémiotique. Et cela se traduit par le fait que les preuves mathématiques sont exclusivement fondées sur la nécessité de certaines transformations de représentations sémiotiques.

Ce statut épistémologique à part explique le fossé cognitif qui sépare la manière de penser et de travailler en mathématiques et celle qui est commune aux autres types de connaissance. Les difficultés de compréhension auxquelles la majorité des élèves se heurtent dans l'apprentissage des mathématiques viennent d'abord de ce fossé à franchir. Elles sont de deux types. Il y a celles liées au paradoxe cognitif des mathématiques. Et il y a celles liées à la manière de voir en mathématique et avec la manière d'utiliser la langue naturelle. La manière mathématique de voir va contre la reconnaissance perceptive des formes et contre la reconnaissance iconique des objets graphiquement représentés. La manière de définir et d'utiliser les définitions en mathématiques va contre la manière spontanée de débattre, de justifier, de raisonner en dehors des mathématiques. Comment alors analyser le fonctionnement cognitif dont l'enseignement des mathématiques doit favoriser le développement chez les élèves, pour qu'ils puissent réellement comprendre, quels que soient les contenus mathématiques enseignés?

Nous avons introduit la notion de registre pour désigner tous les systèmes sémiotiques qui sont utilisés en mathématiques pour remplir une fonction spécifique de transformation de représentations sémiotiques. Cela signifie qu'aucune représentation sémiotique ne peut être considérée isolément. Les représentations sémiotiques doivent être décrites en fonction du registre dans lequel elles ont été produites et qui en détermine le contenu (ci-dessus 1.2). Mais l'intérêt principal de la notion de registre est de permettre d'analyser l'activité mathématique à partir de la distinction de deux grands types de transformation de représentation sémiotique : les conversions et les traitements. *Les conversions sont nécessaires chaque fois qu'il est nécessaire de mobiliser simultanément, ou en alternance, au moins deux registres*. Cela est le cas dans la géométrie enseignée au primaire et au collège. On mobilise à la fois le langage pour définir les concepts et la visualisation des propriétés et des objets dans des figures construites instrumentalement. Cela est, aussi, le cas pour l'étude des fonctions. Elle mobilise à la fois les graphes cartésiens et l'écriture d'équations, et aussi le langage. Et ce n'est là que le début d'une longue liste d'exemples. Mais la situation la plus révélatrice est la résolution de problème, à tous les niveaux de l'enseignement.

On peut ainsi affirmer qu'en mathématiques, même si les démonstrations sont des traitements effectués dans un seul registre de représentation, on pense et on travaille en mobilisant au moins deux registres de représentations, et non pas un seul.

2. La conversion des représentations est-elle le premier obstacle à la compréhension en mathématiques?

La première exigence cognitive pour comprendre en mathématique est de pouvoir utiliser au moins deux représentations d'un même objet (ci-dessus 1.1), sans jamais confondre l'objet lui-même avec les contenus respectifs des deux représentations (1.2). Cela signifie qu'il faut toujours pouvoir reconnaître le même objet dans les deux représentations. Autrement dit, si une seule des deux représentations est donnée, *il faut pouvoir penser spontanément à substituer l'autre représentation à celle qui est donnée.* Ce simple geste intellectuel est le préalable à toute résolution de problème. Car pour pouvoir commencer à chercher, il faut d'abord convertir les représentations initiales des données du problème, présentées dans un registre, en représentations d'un autre registre qui va permettre de travailler et d'avancer vers la solution.

Or l'obstacle majeur à la conversion des représentations tient au fait qu'il n'y a rien de commun entre les contenus des représentations de deux registres différents. Autrement dit pour pouvoir reconnaître que deux représentations réfèrent au même objet et peuvent être substituées l'une à l'autre selon le principe d'équivalence sémantique *salva veritate* (Frege), il n'y a pas d'autre possibilité que de *reconnaître une correspondance terme à terme entre les contenus de ces représentations de deux registres différents*. Par exemple, si la langue et les figures géométriques sont les deux registres utilisés, il faut reconnaître la correspondance entre certaines *unités discursives de sens d'un énoncé* (définition, théorème) et *certaines unités figurales de la configuration géométrique*. Si l'écriture symbolique de relations et la langue sont les deux registres utilisés, il faut reconnaître la correspondance entre certaines unités de sens d'un énoncé et *toutes les unités symboliques d'une équation (lettres, signes d'opérations et de relation)*. Si l'écriture symbolique de relations et le registre des graphiques cartésiens sont les deux registres utilisés, il faut pouvoir reconnaître la correspondance entre chacune des unités de sens d'une équation, ou d'une inéquation, et *les différentes valeurs visuelles* d'une droite, d'une courbe, etc.

2.1. Comment observer les difficultés liées à la conversion des représentations?

Les difficultés venant de la non reconnaissance d'un même objet dans des représentations dont les contenus sont différents ne sont jamais réellement remarquées. Car les données recueillies viennent de l'observation du travail des élèves lors du déroulement d'une séquence didactique, ou des productions obtenues pour résoudre des problèmes, ou encore des résultats globaux à des questionnaires d'évaluation. *Autrement dit, le cadre mis en place pour recueillir des données est organisé en fonction de connaissances mathématiques à acquérir*. Les difficultés liées à la conversion des représentations, sont alors interprétées comme des difficultés ou des erreurs concernant un concept mathématique.

Pour observer les difficultés qui sont directement liées à la conversion de représentations, nous avons élaboré un questionnaire uniquement constitué de tâches de reconnaissance (Duval 1988). Les variations des items étaient des variations systématiques du contenu d'une représentation (les différentes positions possibles d'une droite sur un plan cartésien) et il s'agissait de choisir, parmi plusieurs équations données, celle qui correspondait à chaque position. *Cette tâche de reconnaissance ne demandait aucun traitement mathématique.* Toutes les variations de contenu correspondaient à des oppositions visuelles de position par rapport à trois facteurs. Il n'y a avait ni calcul à faire pour choisir l'équation correspondante, ni à dire s'il s'agissait ou non d'une fonction. Les échecs ont été massifs et récurrents, même après un enseignement sur les fonctions. Depuis ce travail, la multiplication des observations et des enquêtes ont confirmé l'importance et la généralité du ce phénomène de non reconnaissance. Il touche tous les aspects des mathématiques enseignées du primaire à la première année de l'université (Duval 2006a, 2006b).

La conversion des représentations sémiotiques est l'obstacle majeur et primordial à franchir pour pouvoir comprendre et apprendre en mathématiques. Aussi bien à travers les réactions des élèves que dans leurs productions, cet obstacle se manifeste de deux manières différentes. La première est l'incapacité à reconnaître dans l'une des deux représentations — un énoncé, une équation, une figure, un graphique, etc. — les unités à mettre en correspondance avec celles de l'autre représentation. Et cela conduit *à un blocage et à un abandon rapide de toute activité de recherche pour résoudre un problème,* ou à des errreurs révélant des confusions ininterprétables. La deuxième manière, et c'est la plus fréquente, est une fausse reconnaissance des unités discursives, figurales ou symboliques à mettre en correspondance. *Cette fausse reconnaissance est d'autant plus prégnante qu'elle serait en réalité une bonne reconnaissance si l'on était pas dans le domaine des mathématiques!* Et cela conduit à des erreurs systématiques et récurrentes que l'on retrouve à tous les niveaux de l'enseignement. Les fausses reconnaissances, tant qu'elles persistent, rendent incompréhensible toute explication mathématique, et elles rendent de plus en plus difficile tout réel progrès dans l'apprentissage des mathématiques.

Les deux exemples les plus frappants concernent la reconnaissance des unités figurales dans une figure géométrique, c'est à dire la visualisation géométrique, et la reconnaissance des unités discursives de sens dans les énoncés de problèmes, c'est à dire l'utilisation du langage en mathématiques. Les unités figurales qui sont d'emblée reconnues à l'exclusion de toutes les autres dans les figures géométriques, sont les unités 2D qui s'imposent en fonction des lois gestaltistes de la reconnaissance des formes, ou les unités figurale 3D. Et cela bloque l'articulation cognitive des figures avec les énoncés mathématiques, y compris les énoncés de problème. De même, les unités discursives qui s'imposent dans la compréhension d'un énoncé sont d'abord des mots, et non pas les syntagmes ou les phrases. Ainsi les mots « gagner » et « perdre » ont-ils un sens propre qui les associe d'emblée aux opérations d'addition et de soustraction. Et cela conduit à des fausses reconnaissances systématiques dans la plupart des problèmes additifs, ainsi que les résultat de l'enquête de G. Vergnaud (1976) et les recherches ultérieures sur cette question l'ont mis en évidence.

2.2. Comment faire franchir l'obstacle de la conversion des représentations?

Le problème n'est jamais posé de cette manière dans les recherches didactiques. Car, comme nous le verrons plus loin, l'enseignement est organisé en fonction d'une liste mathématique de concepts et de procédures à acquérir. Et toutes les innovations didactiques s'inscrivent dans le cadre de cette organisation avec, pour objectif, de faire acquérir l'un ou l'autre de ces concepts. Mais bien que l'obstacle majeur de la conversion des représentations ne soit reconnu comme tel, différentes stratégies didactiques sont adoptées et, souvent, combinées pour le contourner.

— La multireprésentation des objets mathématiques. Elle consiste à faire associer d'emblée plusieurs représentations d'un même objet. Le développement des nouvelles technologies a donné le moyen de faire passer presqu'instantanément et automatiquement d'un registre de représentation à un autre. Il suffit d'utiliser les commandes du menu des instructions qui sont propres au logiciel utilisé.

— La recherche de la meilleure représentation pour les élèves. Elle conduit à privilégier les représentations iconiques comme les images et les schémas utilisant des flèches, parce que voir donne un accès aux objets qui est à la fois plus rapide et plus riche en informations que toute explication verbale.

— L'utilisation d'une connaissance mathématique dans la réalité. Elle consiste à partir de situations réelles ou concrètes dans lesquelles l'utilisation de la propriété ou de la procédure mathématique que l'on veut enseigner s'avère indispensable pour résoudre les problèmes qu'on peut rencontrer dans cette situation.

— Une organisation du travail en classe selon le modèle développemental d'apprentissage. Il s'agit de mobiliser tous les types d'activités que chaque individu met successivement en œuvre lorsqu'il à cherche à s'approprier quelque chose de nouveau : tout d'abord faire ou manipuler par tâtonnements successifs, puis formuler ce qu'il fait ou ce qu'il observe, enfin contrôler les résultats de son action et valider la démarche suivie pour les obtenir. Naturellement, il s'agit de trouver le problème adapté à la propriété ou à la procédure que l'on veut introduire. Car c'est sur la résolution de ce problème que ces différents types d'activités vont être sollicités pour faire prendre progressivement conscience du concept mathématique utilisé.

Aucune de ces stratégies n'aide véritablement les élèves à franchir l'obstacle de la conversion des représentations sémiotiques, c'est à dire à prendre conscience de la manière de travailler qui est propre aux mathématiques et à se l'approprier personnellement. Les problèmes de non reconnaissance resurgissent régulièrement bien après l'enseignement. Et les passages d'un cycle d'enseignement à un autre, du primaire au collège, puis du collège au Lycée, se révèlent être des ruptures totales dans les exigences mathématiques de ce qui est attendu des élèves. Un des exemples les plus spectaculaires concerne, en géométrie, la manière de voir les figures et le type de preuve. Les élèves doivent passer d'une utilisation empirique des figures dans le primaire à une utilisation qui serait exclusivement déterminée par les hypothèses du problème à résoudre! Ce qui, dans les deux cas, est complètement étranger à la manière mathématique de voir les figures géométriques et ce qui est aussi contre éducatif (Duval 2005, 2014).

Dans toutes ces stratégies didactiques, en effet, le point cognitivement crucial de la conversion des représentations en mathématiques reste complètement ignoré.

Car, bien évidemment, les élèves ont à reconnaître, parmi toutes les représentations avec lesquelles ils sont conduits à travailler, celles qui se rapportent au concept mathématique à découvrir. Autrement dit, ils doivent reconnaître les correspondances terme à terme qui existent entre les unités constituant les contenus respectifs d'un large spectre de représentations: images, schémas, figures géométriques, graphiques, expression linguistique, expression littérale, etc. Comment peuvent-ils apprendre à maîtriser ce jeu sémio-cognitif à la fois complexe et toujours différent?

Il faut construire des situations d'apprentissage dans lesquelles les élèves puissent comparer des variations de contenu des représentations dans un registre A, avec les variations correlatives de contenu des représentations dans un registre B. C'est la seule manière pour apprendre à discerner les unités à mettre en correspondance et devenir capable de reconnaître rapidement si deux représentations quelconques étant données respectivement dans deux registres, elles sont, ou ne sont pas, deux représentation équivalentes d'un même objet. Autrement dit, la méthode utilisée pour construire un questionnaire de tâches de reconnaissance permet également de constuire des situations d'apprentissage. Mais une telle méthode ne peut être facilement utilisée qu'entre des registres monofonctionnels, c'est à dire des registres dont les traitements sont des algorithmes (Duval 2006 b, p. 110).

Les langues naturelles et toutes les figures sont des registres multifonctionnels. Tous les traitements faits dans ces registres, c'est à dire les raisonnements et l'exploration heuristique de transformations de figures, ne sont pas algorithmisables. Et c'est ce qui fait la difficulté de leur utilisation dans l'enseignement. Aussi, pour que les élèves puissent apprendre à passer de ces registres à des registres où les traitements sont algorithmisables, il est nécessaire de recourir à des représentations auxilaires. Cela s'impose par exemple avec tous les énoncés de problème comme les problèmes additifs ou les problèmes de mise en équation. En ce qui concerne les problèmes additifs, il existe maintenant une littérature considérable avec des propositions très différentes de représentations auxilaires pour favoriser la compréhension de ces problèmes: des images représentant des collections d'objets, les schémas ternaires de Vergnaud, la droite numérique, etc. *La principale question que le recours à ces représentations auxiliaires soulève est celle de leur pertinence cognitive* pour apprendre à convertir les données d'un problème. Car, pour être réellement utiles, elle doivent rendre visibles une double correspondance: celle entre les unités discursives de l'énoncé et les unités figurales de la représentation auxiliaire, d'une part, et celle entre les unités figurales et les unités symboliques d'une égalité numérique, d'autre part. Autrement dit, les représentations auxiliaires doivent montrer à la fois comment sélectionner les informations pertinentes dans l'énoncé et comment les organiser en une égalité numérique. Les expériences faites par R. Damm ont montré que seules des représentations bi-dimensionnelles remplissaient ces deux conditions et permettaient à de jeunes élèves de comprendre et de résoudre tous les problèmes additifs (Duval 2011 b, p. 128-129).

2.3. Quelle théorie permet de rendre compte du fonctionnement cognitif sous-jacent à l'activité mathématiques?

Pour prendre en compte les difficultés d'apprentissage de la grande majorité des élèves, les recherches sur l'enseignement des mathématiques ont du recourir à des théories cognitives, et non pas seulement à des théories pédagogiques. Ainsi, entre les années 1960 et 1980, l'épistémologie génétique de Piaget a été la référence théorique absolue pour justifier et organiser une réforme profonde de l'enseignement des mathématiques, aussi bien dans les contenus que dans les méthodes. Une expression la résumait: «la construction des concepts». Mais il s'est avéré que le constructivisme ne couvrait ni tous les aspects des processus d'apprentissage ni d'ailleurs tous les aspects de l'activité mathématique. On a alors fait appel à d'autres théories. Celle de Vygotski, à partir des années 1980. Son analyse fonctionnelle des rapports entre la pensée et le langage permettait d'expliquer l'importance des interactions sociales en classe, et sa notion de « zone proximale de développement » soulignait le rôle de l'enseignant. Ensuite, à partir des années 1990, pour justifier l'importance à donner aux signes (et non plus seulement aux concepts et au langage) lorsqu'il s'agit d'introduire l'algèbre, et également pour insister sur le rôle des images et des schémas dans l'acquisition des connaissances mathématiques, on s'est tourné vers la sémiotique de Peirce. Naturellement, aucune de ces théories ne pouvant couvrir la diversité et la complexité d'un enseignement des mathématiques du primaire à l'université, d'autres théories ont été avancées. D'où la question du choix d'une théorie ou, plus exactement, du critère de choix d'une théorie cognitive.

On peut partager toutes les théories cognitives en deux grands types, en fonction du statut épistémologique qu'elles reconnaissent aux mathématiques par rapport aux autres domaines de connaissance. Ou bien les mathématiques sont un type de connaissance comme les autres, et alors l'acquisition de connaissances en mathématiques relève des mêmes processus cognitifs que ceux mobilisés dans tous les autres domaines de connaissance. Ou, au contraire, les mathématiques sont une connaissance épistémologiquement différente des autres, et alors on se trouve face la question suivante: *quels processus cognitifs spécifiques faut-il développer pour entrer dans la manière de penser et de travailler en mathématiques?*

Toutes les théories cognitives utilisées jusqu'à présent dans les recherches sur l'enseignement des mathématiques reposent sur l'idée que les mathématiques sont épistémologiquement une connaissance comme les autres et qu'elles s'apprennent donc comme les autres connaissances. Ce sont des théories générales qui ont été élaborées en dehors de toute analyse de l'activité mathématique et du développement historique des connaissances mathématiques. Elles ont pour caractéristique commune de méconnaître le paradoxe cognitif des mathématiques et d'ignorer l'obstacle de la conversion des représentations (ci-dessus, 1.2 et 2.1). Et c'es aussi le cas de la sémiotique de Peirce et toutes les théories qui s'en inspirent.

Mais en mathématiques on travaille pas et on ne pense pas de la même manière que dans les autres disciplines (ci-dessus, 1.4). En outre, l'obstacle de la conversion des représentations se révèle irréductible à toute analyse de l'activité mathématique en termes de concepts mathématiques et d'application de concepts mathématiques. Il suffit, par exemple, d'inverser l'ordre de conversion des représentations dans toutes les tâches de reconnaissance pour voir des chutes spectaculaires de réussite (Duval 2005 b, p. 123). Le statut épistémologique à part des mathématiques oblige à reconnaître que les mathématiques mobilisent un fonctionnement cognitif différent de celui qui est spontanément mobilisé dans les autres domaines de la connaissance. *En ce sens les mathématiques constituent le lieu privilégié pour une toute autre analyse du fonctionnement cognitif de la pensée* *et de sa créativité.* C'est dans cette perspective que nous avons commencé à élaborer la théorie des registres de représentation.

3. Qu'est-ce comprendre en mathématiques ? Deux points de vue opposés et irréductibles l'un à l'autre.

L'activité mathématique n'apparaît du tout de la même manière quand on la regarde du point de vue mathématique ou, au contraire, du point de cognitif c'est à dire comme une activité de transformations de représentations sémiotiques qui sont effectuées dans des registres totalement différents. Bien évidemment, le seul point de vue qui compte est le point de vue mathématique. Car on ne peut comprendre les mathématiques qu'en faisant des mathématiques, ne fût-ce que de façon rudimentaire. Et, pour les mathématiciens et presque tous les didacticiens des mathématiques, regarder les mathématiques du point de vue cognitif c'est ne plus faire de mathématiques et donc ne pas se donner les moyens de comprendre. Mais lorsqu'on veut enseigner mathématiques à tous élèves, le point de vue cognitif s'impose de manière incontournable. Car il concerne la manière de penser et de travailler en mathématiques, indépendamment des concepts et des connaissances à utiliser ou à appliquer. Pour montrer l'opposition et la nécessité de ces deux points de vue, nous allons prendre trois questions cruciales pour l'organisation de l'enseignement des mathématiques et pour leur apprentissage par les élèves.

3.1 Quels sont les critères de compréhension?

D'un point de vue mathématique, les deux critères de compréhension sont l'exactitude du résultat obtenu et la justification du résultat obtenu. Pour les tâches qui demandent seulement la mise en œuvre d'un algorithme simple, comme un calcul avec les entiers, le premier critère est suffisant. En revanche, le second critère devient très vite nécessaire comme en géométrie où il est nécessaire de dire les propriétés qui «expliquent» comment on parvient à la solution d'un problème et pourquoi «ça marche», ou encore pourquoi d'autres réponses «ne peuvent pas marcher» même lorsqu'elles apparaissent perceptivement évidentes. Plus généralement, la compréhension doit répondre à l'exigence épistémologique de preuve qui est commune à toute connaissance scientifique. En ce sens, le critère de justification, qui implique évidemment le critère de réussite, est le critère essentiel de compréhension. Mais, en mathématiques, la justification ne se limite pas au fait de mentionner la bonne propriété. *Elle doit entraîner un changement de conviction*. Et losrqu'on met les élèves en situation de le vivre, ce changement est pour eux une véritable expérience intellectuelle et déclenche une prise de conscience de la manière de penser propre aux mathématiques (Duval 1991, p. 237-238 ; 2011 a, p. 39).

D'un point de cognitif, le critère de compréhension est la reconnaissance immédiate d'un même objet dans des représentations dont les contenus n'ont rien de commun. Cette reconnaissance est la condition qui permet de changer de registre, en substituant à une représentation donnée une représentation totalement différente (ci-dessus 2.1). Ce critère de reconnaissance doit être pris au sens fort. *La reconnaissance d'un même objet, quand on change de registre de représentation, doit se faire dans les deux sens de conversion,* et non pas dans un seul, celui qui est habituellement privilégié par l'enseignement. Pour les fonctions, par exemple, on va habituellement de l'écriture algébrique d'une équation au graphe, en faisant tracer ce graphe. Mais cette pratique privilégie une appréhension locale des points d'intersection au détriment d'une appréhension globale des valeurs visuelles du graphe. *Or la reconnaissance doit couvrir les variations possibles du contenu visuel des graphes.* Autrement dit, le critère cognitif de reconnaissance porte sur un ensemble de représentations différentes possibles, et non pas sur les quelques situations typiques étudiées en classe en relation avec le concept enseigné. Rien n'est plus révélateur d'une méprise sur les objectifs et les apports de l'éducation mathématique, et sur son échec, que l'argument que nous avons souvent entendu dans la bouche des enseignants et dans celle des élèves: «cela n'a pas été vu en classe». Cet argument est la négation même du premier critère psychologique de réussite d'un apprentissage: le transfert à des situations entièrement nouvelles.

La question des critères de compréhension oblige à s'interroger sur les pratiques d'évaluation et sur l'élaboration des questionnaires d'évaluation en mathématiques. Les «réussites» enregistrées correspondent-elles à une compréhension et donc une acquisition qui va faciliter d'autres acquisitions? Ou, au contraire, masquent-elles une incompréhension qui va conduire ultérieurement à des échecs et des difficultés croissantes de compréhension? La valeur diagnostique et pronostique des évaluations dépend du critère de compréhension qui a déterminé le choix des tâches pour élaborer un test d'acquisition. Le plus souvent, ce critère est uniquement l'exactitude du résultat obtenu. Car le deuxième critère mathématique s'avère difficile à utiliser, les enseignants et les chercheurs étant souvent réduits à relever dans les productions des élèves, la présence de quelques mots pris comme indicateurs de compréhension. *En revanche, le critère cognitif n'est presque jamais pris en compte.*

3.2. Quelles sont les connaissances de base à acquérir: les concepts ou les gestes propres à la manière de travailler en mathématiques?

D'un point de vue mathématique, les connaissances mathématiques sont les définitions et les théorèmes qui établissent les propriétés d'objets mathématiques tels que les nombres, les fonctions, les types de relations (métriques, projectives, affines, topologiques) relatives à l'espace et aux objets dans l'espace, etc. Elles permettent de justifier de nouveaux résultats mathématiques et de résoudre des problèmes pratiques à partir de données enregistrées dans des situations réelles. Mais le point essentiel, ici, est que *les connaissances mathématiques sont toujours DES PROPOSITIONS que l'on peut CONDENSER DANS DES MOTS,* mots qui deviennent simultanément des termes mathématiques et des concepts! Les concepts mathématiques ne résultent pas d'un processus d'abstraction comme pour tous les concepts empiriques, mais d'un travail lent et complexe de construction, qui passe par l'élaboration de définitions, par une exploration heuristique conduisant à des conjectures et par la démonstration de ces conjectures. Mais, du point de vue mathématique, il n'est pas possible de faire des mathématiques sans utiliser et donc sans acquérir des concepts mathématiques. Sinon on le fait de façon très rudimentaire et sans aucun développement possible, comme dans toutes les cultures qui n'ont pas disposé d'un système d'écriture!

Du point de vue cognitif, l'acquisition de connaissances mathématiques dépend de la reconnaissance d'un même objet dans au moins deux représentations différentes, puisque les objets mathématiques ne sont pas accessibles empiriquement. Mais elle dépend aussi des transformations des représentations en de nouvelles représentations à l'intérieur d'un même registre. Or chaque registre offre des possibilités spécifiques de transformation que les autres registres n'offrent pas. Ainsi les traitements propres aux figures géométriques consistent en des réorganisations visuelles des formes perçues et, surtout, dans leur déconstruction dimensionnelle (Duval 2011 b, p. 89-90). Avec les écritures algébriques, les traitements consistent en des réorganisations d'écriture, soit d'une expression soit de l'équation par déplacement de termes d'un membre à l'autre. Pour la langue naturelle, les transformations commencent, au degré zéro d'organisation discursive, avec les différentes opérations verbales possibles pour désigner un objet, etc. (Duval 2011b, p.78-80). Les conversions et les traitements propres à chaque registre constituent ce qu'on pourrait appeler les gestes intellectuels du travail mathématique. Les connaissances mathématiques de base à acquérir sont d'abord ces gestes intellectuels nécessaires pour comprendre la construction de ce qui est maintenant condensé en «concepts».

L'opposition entre ces deux points de vue sur les connaissances mathématiques à acquérir se traduit, par exemple, dans les questions suivantes. Faut-il introduire les représentations graphiques *à partir de la notion de fonction linéaire* ou, au contraire, faut-il faire développer la coordination entre l'écriture d'équations très simples du premier degré et les variations de position d'une droite sur deux axes, *avant même d'introduire la notion de fonction?* Dans l'enseignement primaire faut-il faire d'abord travailler sur la décomposition visuelle de surfaces, concaves ou convexes, en réseaux de droites avant d'introduire les notions de lignes, de droite, de points, de parallélisme, ou, au contraire, ces notions sont-elles nécessaires (Duval et Godin 2005)? Plus généralement, est-ce que la compréhension en mathématiques présuppose le développement, chez les élèves, de la coordination des registres de représentation sémiotique ou, au contraire, est-ce l'acquisition de concepts mathématiques qui permet aux élèves de changer de registre de représentation, d'apprendre à voir aussi bien les graphiques cartésiens que les figures géométriques, à utiliser les propriétés mathématiques, etc.?

3.3 Les problèmes: apprendre à les résoudre ou apprendre à les poser?

La résolution de problèmes est l'activité mathématique par excellence. L'un des apports les plus significatifs des recherches didactiques est d'en avoir fait la situation principale d'apprentissage des mathématiques. Et le seul moyen de montrer l'utilité et l'importance des mathématiques est de proposer des problèmes réels que l'application de connaissances enseignées va permettre de résoudre. Tout cela est devenu comme la règle d'or didactique. Mais la résolution de problème reste une boîte noire pour la très grande majorité des élèves. Et c'est là que se révèle, de manière souvent brutale, l'incompréhension profonde et durable des élèves. Les recherches sur la résolution de problème sont innombrables, qu'il s'agisse des problèmes additifs, des multiplicatifs, de mise en équations et des problèmes de géométrie. Mais toutes laissent dans l'ombre la question peut-être la plus importante: qu'est-ce qu'un problème mathématique, ou plus exactement qu'est-ce qu'un problème dans l'enseignement des mathématiques?

Du point de vue mathématique, les problèmes donnés dans l'enseignement des mathématiques ne sont plus des problèmes pour la recherche mathématique. Ce sont *des problèmes construits* dans le but de faire acquérir ou de faire utiliser une propriété ou une procédure mathématique déterminée. *Il y a donc une procédure de construction qui permet de générer tous les types de problèmes possibles pour* *l'utilisation d'une propriété ou d'une procédure mathématique*. Son principe est simple. On part de la description complète du traitement mathématique élémentaire correspondant à une propriété ou à une procédure*, et on* effectue les différentes suppressions de données possibles de manière à ce que les données restantes permettent de retrouver les données supprimées. On obtient ainsi, à partir de la description complète d'un traitement mathématique élémentaire, plusieurs descriptions minimales qui correspondent à tous les problèmes possibles résolubles à l'aide de cette propriété ou de cette procédure (Duval 2013). Le choix d'une situation concrète, comme d'ailleurs le choix de la valeur des données (par exemple, des petits ou des grands nombres pour les problèmes additifs et multiplicatifs) devient alors secondaire, même si cela est souvent considéré comme deux variables didactiques importantes.

Du point de vue cognitif, la difficulté fondamentale dans la résolution de problème est la reconnaissance de la propriété ou de la procédure à utiliser. Trouver c'est reconnaître. Dans les problèmes additifs et multiplicatifs, la reconnaissance porte sur le choix de l'opération à effectuer. Dans les problèmes de géométrie, la reconnaissance est beaucoup plus complexe, à la fois pour des questions de reconnaissance visuelle des unités figurales pertinentes et pour le choix plus grand des propriétés possibles (théorème des milieux, théorème de Thalès, théorème de Pythagore, etc.). En outre, l'analyse cognitive montre que les conversions de représentations requises pour résoudre un problème sont beaucoup plus complexes que celles requises pour construire le problème qui est donné à résoudre (Duval 2013). Et pour les problèmes réels à résoudre à l'aide de propriétés géométriques, il faut en plus mobiliser, explicitement ou implicitement, une schématisation intermédiaire qui montre le rapport entre la situation réelle et la figure géométrique qui en est une modélisation mathématique (Duval 2011b, p. 95-96). Autrement dit, comment peut-on apprendre à reconnaître les connaissances mathématiques à utiliser pour résoudre un problème, si on ne sait pas comment construire un problème et, surtout, si on n'a pas exploré tous les types de problèmes qu'une propriété mathématique déterminée permet de résoudre?

La question que soulève l'opposition de ces deux points de vue est d'autant plus cruciale qu'il y a un partage institutionnel des rôles entre les enseignants et les élèves. Ce sont les enseignants, les auteurs de manuels ou les experts qui construisent les problèmes, et ce sont les élèves qui doivent les résoudre. Comment s'étonner alors que la résolution de problème reste une boîte noire pour la grande majorité des élèves ? Comment s'étonner que les connaissances mathématiques apprises soient destinées à rester des connaissances mortes ou inutiles pour tous ceux qui ne suivront pas des filières scientifiques? D'un point de vue cognitif, on ne peut pas apprendre à résoudre des problèmes, et donc à savoir utiliser des connaissances mathématiques, si on n'apprend pas comment on construit les problèmes à résoudre. Ces deux types d'activité sont inséparables. Apprendre à construire des problèmes qui puissent être résolus mathématiquement implique évidemment l'organisation de tâches spécifiques (Duval 2013).

Cette opposition entre le point de vue mathématique et le point de vue cognitif vient de ce que *l'activité mathématique a deux faces.* L'une est *la face exposée.* Elle est centrée sur les objets, leurs propriétés, les algorithmes et les méthodes de résolution. L'autre est *la face cachée*. Elle concerne les manières de voir, de raisonner, de définir, de sauter d'une représentation à l'autre avec des objets qui sont uniquement accessibles par les représentations sémiotiques que l'on produit. Cette face est cachée parce qu'elle cesse d'être remarquée lorsqu'on commence à comprendre en mathématiques. Mais elle reste irréductible à la face exposée des mathématiques. *Car la manière de «faire des mathématiques» est indépendante des objets avec lesquels on travaille.* Elle est transversale à tout contenu mathématique enseigné. En ce sens, *les méthodes de résolution*, comme les méthodes de démonstration, relèvent de la face exposée des mathématiques, et non pas du type de fonctionnement cognitif qui est requis pour savoir comment «faire», ou quoi «faire», en mathématiques pour comprendre, chercher et trouver.

4. Les deux faces de l'activité mathématique sont-elles prises en compte dans l'enseignement et dans les recherches didactiques?

Avec cette question, on retrouve tous les débats et toutes les prises de position sur les contenus mathématiques à enseigner ou à ne plus enseigner, sur les outils didactiques à utiliser (matériel, logiciels), sur le type de problème à donner aux élèves, sur le choix des théories, sur la fiabilité des évaluations ou sur celle de l'analyse des productions verbales des élèves, etc. Aussi est-il nécessaire de subdiviser cette question en trois autres questions, pour mettre en évidence des éléments de réponse.

4. 1. Quels sont les objectifs de l'enseignement des mathématiques pour tous les élèves jusqu'à 15 ou 16 ans?

Cette question se pose évidemment à l'échelle du système éducatif d'un pays. Et elle est généralement examinée de manière séparée pour l'école primaire et pour le collège. Car ce ne sont pas évidemment ni les mêmes connaissances de base qui vont définir les objectifs pour chacun de ces deux cycles d'enseignement, ni les même « experts » qui vont être consultés pour chacun de ces deux cycles. Mais, dans ces deux cycles, les objectifs sont déterminés du seul point de vue mathématique. Cela apparaît dans *la décomposition des connaissances de base en concepts (propriétés et algorithmes)* et dans *l'organisation d'une progression d'acquisition* sur les quatre ou cinq années du cycle. Prenons l'un des objectifs du collège: la résolution des équations et leur utilisation pour résoudre des problèmes.

La méthode de décomposition mathématique de cette connaissance de base, qui est en réalité un complexe de connaissances, consiste à expliciter les connaissances mathématiquement prérequises pour résoudre et utiliser les équations. C'est un processus *top down* que nous avons représenté dans le schéma ci-dessous par des flèches en petit pointillé. Le schéma ne représente que la première décomposition en prérequis. En réitétant ce processus de décomposition on obtient, pour les algorithmes, les règles de priorité opératoire, la distributivité de la multiplication par rapport à l'addition, la notion d'opposé ou d'inverse d'un nombre. Et pour le statut de l'équation et la signification du signe «=», on obtient les notions d'identité, de nombre de solution, de variable (et non plus d'inconnue), etc.

Finalement le terme ultime de cette décomposition *top down* est l'introduction de lettres, *ce qui est le seul prérequis mathématique commun à la résolution d'équations et à l'utilisation d'équations pour résoudre des problèmes* (Duval 2011 c). Ainsi l'objectif global d'acquisition à la fin du collège est découpé en une suite d'objectifs locaux à atteindre chaque année en classe, sur toute la durée du collège.

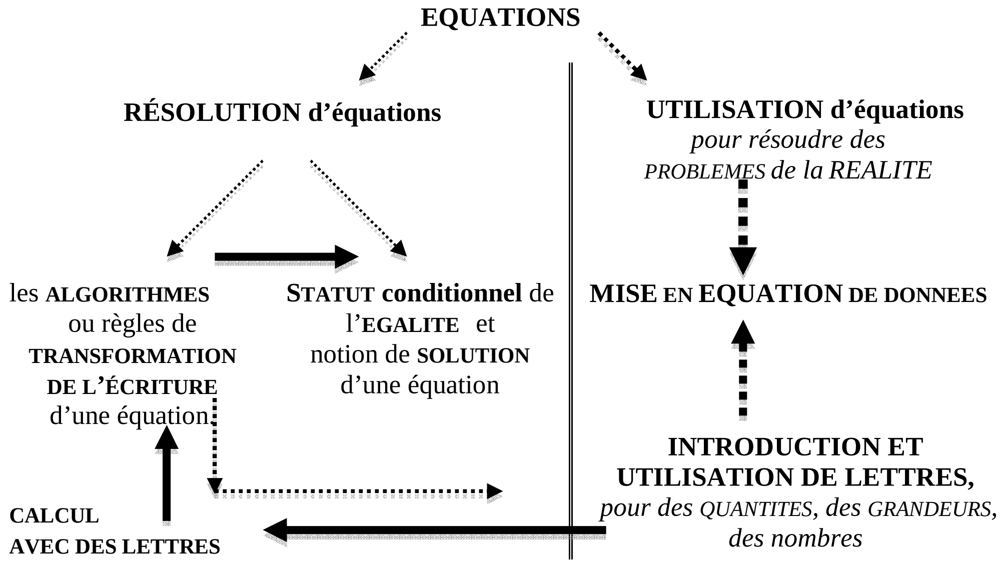


Figure 2. Analyse *top down* d'une connaissance de base et organisation *bottom up* de son enseignement sur la durée d'un cycle.

L'organisation de la progression de l'enseignement se fait en suivant l'ordre inverse, *bottom up*, de la décomposition en prérequis mathématiques (les flèches en traits pleins sur le schéma). Autrement dit, l'ordre d'apprentissage est défini du seul point de vue mathématique. Quand on décrit l'apprentissage comme une «construction de connaissances», on demande en réalité aux élèves une *RE-construction* de connaissances en partant des prérequis les plus élémentaires ou les plus simples *mathématiquement parlant!*

On commence donc par l'introduction des lettres et du calcul littéral. Et là ce qui est simple devient une source d'équivoques durables, étant donné qu'une lettre peut avoir des statuts différents et qu'elle doit servir à la fois pour la désignation directe de quelque chose et pour la désignation fonctionnelle d'autre chose. En réalité, l'introduction des lettres est celle implicite d'opérations discursives de désignation différentes les unes des autres, et d'un jeu varié de conversions, c'est à dire de substitutions possibles, comme on peut le voir dans le tableau ci-dessous.

CHIFFRES	LETTRES	MOTS *(interface verbale, souvent muette ou oubliée, entre chiffres et lettres)*
UN nombre	**Redésignation directe** par une lettre	Désignation directe ou Désignation indirecte par micro-description
UNE LISTE OUVERTE de nombres	**Condensation** en une lettre **Balayage des éléments** d'un ensemble de nombres	Désignation directe du **type nom propre** pour un ensemble de nombres ou pour un type de grandeur: vitesse, temps, aire..
DES LISTES dont la génération des nombres est corrélée	**Désignation fonctionnelle** par ***une combinaison opératoire lettre-chiffre:*** «2n +1» **Balayage** d'un ensemble de nombres	**Désignation directe d'une propriété** des nombres: « impair » **Désignation indirecte** par une micro-description (souvent relative à une quantité ou une grandeur)

Figure 3. Variations des objets désignés et des opérations de désignation impliqués dans l'introduction d'une lettre[1].

[1] Ce tableau a été élaboré dans un travail, en cours, avec F. Pluvinage, sur les entrées mathématiques et l'entrée cognitive dans l'algèbre élémentaire au collège.

Il suffit de regarder la seule colonne des lettres pour constater qu'il ne peut pas y avoir de réelle compréhension pour les élèves, si on ne leur fait pas d'abord prendre conscience des différents emplois possibles d'une lettre et de ses conversions avec les nombres (écriture décimale) et avec l'expression verbale de propriétés mathématiques, de termes physique ou des mots du langage quotidien.

En outre, les lettres sont souvent introduites dans le cadre de la résolution de problèmes. Ce qui exige, évidemment, une mise en équations des données. Et là c'est une autre source d'embarras pour les élèves. *Car il n'y a pas de méthode pour mettre en équations.* Celle qui est répétée comme un refrain dans les manuels, depuis plus d'un siècle, est aussi vague que la description du plan à suivre pour composer une dissertation. Elle exige le recours à des représentations auxiliaires bidimensionnelles dont l'utilisation ne dépend d'aucun concept ni d'aucune connaissance mathématique (Duval 2002).

4.2 Qu'est-ce qui détermine le choix d'une théorie d'apprentissage pour l'organisation du travail en classe?

Tout d'abord, *le travail en classe est organisé en fonction de l'acquisition des concepts* qui ont été institutionnellement fixés comme objectifs locaux d'acquisition pour le niveau de la classe. Le temps consacré à l'acquisition des différents concepts sera donc une ou deux séances par semaine, sur une période de temps excédant rarement quatre ou cinq semaines. Et c'est à cette brève échelle de temps que les séquences didactiques visant l'acquisition d'un concept sont organisées. Dans ce cadre instutionnel, qui échappe totalement à l'enseignant et auquel il doit se soumettre, deux facteurs vont déterminer le choix d'une théorie d'apprentissage.

Le premier facteur est la prise en compte du degré de complexité du concept mathématique enseigné. Un des moyens d'analyse de la complexité des concepts est l'histoire de son émergence et de son développement. Le deuxième facteur est que la théorie soit une théorie de la formation des concepts concernant tous les domaines de la connaissance. Et cela explique les recours successifs au théories constructivistes, empiristes, pragmatiques de l'apprentissage (ci-dessus 2.3). Car *on attend de ces théories importées qu'elles puissent être appliquées localement* pour organiser une séquence didactique dont le but est, la compréhension et l'acquisition des concepts, quels qu'ils soient. Ainsi, à l'échelle d'une année et à celle d'un cycle d'enseignement, la progression dans l'acquisition des connaissances est organisée comme une suite d'acquisition de concepts entre lesquels la très grande majorité n'arrive pas à voir de rapports. On pourrait parler d'un apprentissage « en miettes».

Dans le choix d'une théorie de la formation des concepts, ni le paradoxe cognitif des mathématiques ni l'équivocité épistémologique du terme concept (ci-dessus 3.2) ne sont réellement pris en compte.

4.3. Quel est le point de vue privilégié dans les recherches sur l'enseignement des mathématiques, celui des enseignants ou celui des élèves?

Depuis plus d'une trentaine d'années, la formation des enseignants s'est imposée comme la préoccupation majeure de toutes les politiques d'éducation, et tout particulièrement en mathématiques. Parallèlement, il y a la demande des futurs enseignants, ou des enseignants, sur «quoi faire» en classe pour que leurs élèves comprennent les concepts qu'ils ont à enseigner. C'est dans ce contexte que l'organisation de séquences d'activités et la manière de gérer le passage d'une type d'activité à l'autre sont devenues l'objet principal des recherches en didactique des mathématiques.

Tout le travail d'observation est alors fait pour tester une séquence d'activités visant l'un des objectifs locaux de l'année. Comment les élèves participent-ils aux différentes tâches proposées? Comment l'enseignant prend il en compte ce que les élèves font et ce qu'ils expliquent? Les données recueillies sont alors les interactions orales avec l'enseignant et avec les autres élèves. C'est ce type de données qu'on utilise pour dire si le travail en classe a bien marché et, donc, si les élèves ont acquis ce qui leur a été enseigné. *Teaching/learning.* Il est révélateur que les deux mots soient maintenant toujours employés ensemble, comme si la compréhension des mathématiques par les élèves dépendait uniquement de la manière de les enseigner. Or le problème que soulève l'organisation des séquences d'activités est que chacun des types d'activité formant la séquence didactique recouvre plusieurs tâches cognitivement hétérogènes. La formulation est déjà, implicitement ou explicitement, dans la phase d'action.

Toutes les observations que l'on peut faire sur le choix des objectifs de l'enseignement des mathématiques, sur l'organisation de l'enseignement à l'échelle d'un cycle et sur l'organisation du travail en classes convergent vers la même conclusion. La face cachée des mathématiques, c'est à dire la manière de penser et de travailler qui est propre aux mathématiques, n'à aucune place dans l'enseignement des mathématiques au primaire et au collège. Il nous a fallu d'ailleurs la collaboration active d'enseignants qui nous ont accueilli dans leurs classes pour que nous puissions faire des observations d'élèves sur de longues périodes, et qui ont aussi accepté d'organiser des expériences marginales. C'est sur la base de cette collaboration, sur le terrain, avec les enseignants et leurs élèves, et aussi dans des discussions ouvertes et régulières avec des mathématiciens, que nous avons pu élaborer la théorie des registres de représentation.

Conclusion

L'objectif prioritaire de l'enseignement des mathématiques doit être de faire entrer les élèves dans la manière de penser et de travailler qui est propre aux mathématiques. C'est la condition cognitive pour comprendre en mathématiques et savoir comment utiliser dans les situations de la réalité les connaissances enseignées. Pour atteindre cet objectif, des activités spécifiques doivent être élaborées en fonction des variables cognitives qui correspondent aux manières mathématiques de voir, de désigner, de définir, de raisonner que chacun des registres de représentation permet de mettre en œuvre. La reconnaissance spontanée d'un même objet dans des représentations différentes est le tout premier seuil à franchir pour ne pas se trouver très vite perdu dans n'importe quelle activité mathématique donnée en classe.

La théorie des registres de représentation oblige à s'interroger sur la manière unilatérale dont l'enseignement des mathématiques est organisé dans l'enseignement primaire et au collège. Tout y est fait, en définitive, du point de vue mathématiques, car tout y est centré sur les acquisitions successives de concepts et sur les procédures associées à ces concepts. La théorie des registres vise, au contraire, à analyser ce que nous avons appelé la face cachée des mathématiques, celle qui n'a plus aucun intérêt lorsqu'on est passé de l'autre côté du miroir, c'est à dire lorsqu'on on a commencé à penser et à travailler un peu comme le font les mathématiciens.

La théorie des registres n'est pas une théorie générale et close. Elle est d'abord un outil pour analyser les activités et les problèmes élaborés pour l'enseignement ainsi que les productions des élèves. Mais, surtout, elle ouvre de nouveaux champs de recherche sur la visualisation en géométrie, sur l'articulation entre langage et visualisation, sur la manière d'introduire l'algèbre, et sur une autre approche de la résolution de problème.

La théorie des registre se place résolument du point de vue des élèves, de l'incompréhension sourde et persistante qu'ils ressentent dans l'apprentissage des mathématiques, et non pas du point de vue des enseignants. Le point de vue des élèves est important pour la formation des enseignants. Car, dans la réalité quotidienne des classes, les enseignants se trouvent face à une situation complexe, qui vient de l'inadéquation fréquente entre la séquence planifiée et ce que les élèves font réellement, et aussi de la grande diversité entre les élèves d'une même classe. Les enseignants doivent alors, comme des médecins en consultation, diagnostiquer les incompréhensions récurrentes qui se cachent sous des erreurs locales ou sous des blocages, et trouver les tâches ou les exercices qui vont aider les élèves à les dépasser.

Je teminerai par la réflexion qu'un élève de 13 ans m'avait faite, il y a plus de quarante ans, dans la période alors enthousiaste de la réforme des mathématiques. Cette réfléxion m'est souvent revenue à l'esprit, car elle exprime parfaitement le problème de la compréhension des mathématiques: «Les mathématiques, Monsieur, ce n'est pas logique!».

Références

Duval R., (1988). Graphiques et Equations: l'articulation de deux registres, in *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives*, n°1, 235-255. (Traduction en portugais: Gráficos e equações: a articulação de dois registros. http://www.periodicos.ufsc.br/index.php/revemat).

Duval R. (1991) Structure du raisonnement déductif et apprentissage de la Démonstration, *Educational Studies in Mathematics*. n°22/3, 233-261.

Duval R. (2002). L'apprentissage de l'algèbre et le problème cognitif de la désignation des objets *Actes des Séminaires SFIDA-13 à SFIDA-16*, Volume IV 1901-2001 (p.67-94) (Ed. J.Ph. Drouhard et M . Maurel) IREM de Nice.

Duval R., (2005). Les conditions cognitives de l'apprentissage de la géométrie : développement de la visualisation, différenciation des raisonnements et coordination de leurs fonctionnements. *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives*, n° 10, 5-53.

Duval R., (2006a). Un tema crucila en la educacion matematica: la habilidad para cambiar el registro de representacion. *La Gaceta de la RSME*. Vol.9. 9.1 pp.143-168.

Duval R. (2006b). The cognitive analysis of Problems of comprehension in the learning of mathematics. In a A Saenz-Ludlow, and N.Presmeg (Eds.), *Semiotic perspectives on epistemology and teaching and learning of mathematics, Sépcial issue, Educational Studies in Mathematics, 61, 103-131*

Duval R., (2006c). Quelle sémiotique pour l'analyse de l'activité et des productions mathématiques ? *Relime*, Numero Especial pp. 45-81. Clame.

Duval R., (2011a). Preuves et preuve: les expériences des types de nécessité qui fondent la connaissance scientifique. *Du mot au concept. Preuve,* 33-68. Grenoble: Presses Universitaires

Duval R., (2011b). *Ver e ensinar a Matematica de outra forma. (I) Entrar no modo matemacico de pensar: os registros de representacoes semioticas.* Sao Paolo: Proemeidtora.

Duval R., (2011c). Dois olhares opostos sobre os pontos críticos do ensino de álgebra no ensino fundamental. *SIEMAT 3*. 23 Juin 2011 Sao Paolo. In T. M. M. Campos; U. D'Ambrosio; V. Y. Kataoka; M. Karrer; R. N. de Lima; S. H. A. A. Fernandes. *Proceedings of the III Seminário Internacional de Educação Matemática - SIEMAT*

Duval R., (2013). Les problèmes dans l'acquisition des connaissances mathématiques: apprendre comment les poser pour devenir capable de les résoudre? https://periodicos.ufsc.br/index.php/revemat

Duval, R. Godin M., (2005). Les changements de regard nécessaires sur les figures. *Grand*, *76*, 7-27.

Vergnaud G., Durand C., (1976). Structures additives et complexité psychogénétique. *Revue française de de pédagogie*, 36, 28-43.

REVISTA IBEROAMERICANA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA
www.fisem.org/web/union
ISSN: 1815-0640
Número 37. Marzo de 2014
páginas 31-55

Dificuldades de aprendizagem de Área e Perímetro na perspectiva da Produção de Significados

Marcílio Dias Henriques, Amarido Melchiades de Silva

Fecha de recepción: 23/03/2013
Fecha de aceptación: 15/11/2013

Resumen	En este artículo presentamos un estudio en el que discutimos el aprendizaje de perímetro y área de figuras geométricas, y señalamos algunos caminos de tratar las dificultades de aprendizaje de estas nociones geométricas, caminos que producimos y describimos en algunas de nuestras investigaciones anteriores, en la cuales utilizamos el Modelo de los Campos Semánticos como marco teórico. Vamos a mostrar también algunos resultados de estas investigaciones, que nos han permitido elegir a las características deseables para el desarrollo de tareas educativas que involucran área y el perímetro, basado en el proceso de producción de significados. **Palabras clave**: figuras geométricas, modelo de campos semánticos.
Abstract	This article presents a study in which we discussed the learning of perimeter and area of geometric figures, and point out some ways to treat learning difficulties these geometric notions, such paths we created and described in some of our previous research, in which we use the Model of Semantic Fields as theoretical referential. We'll show also some results of these investigations, which allowed us to elect desirable characteristics to the development of educational tasks involving area and perimeter, based on the process of production of meanings. **Keywords**: geometric figures, Model of Semantic Fields.
Resumo	Neste artigo, apresentamos um estudo no qual discutimos acerca da aprendizagem de perímetro e de área de figuras geométricas, e apontamos alguns caminhos para o tratamento de dificuldades de aprendizagem destas noções geométricas, caminhos que criamos e descrevemos em algumas de nossas investigações anteriores, nas quais utilizamos o Modelo dos Campos Semânticos como aporte teórico. Exibiremos, também, alguns resultados dessas investigações, que nos permitiram eleger características desejáveis à elaboração de tarefas educacionais envolvendo área e perímetro, com base no processo de produção de significados. **Palavras-chave:** figuras geométricas, Modelo dos Campos Semânticos.

1. Introdução

Para que possam ser estabelecidos parâmetros gerais que sirvam de suporte à caracterização ou à adoção de determinada *educação geométrica*, no âmbito da escola básica, faz-se necessário identificar os objetivos e os elementos que lhe integrariam o currículo (Jones, 2000; Hoyles, Foxman e Küchemann, 2002).

O desenvolvimento curricular, estando intimamente relacionado com os processos de aprendizagem e de ensino, deve também apontar para uma discussão explícita dos limites criados nesses processos (Lins, 2001). Compreendemos que tais limites podem ser identificados e analisados mediante o estudo das dificuldades de aprendizagem de determinado tema.

No presente artigo, estamos interessados em discutir e refletir acerca da aprendizagem de perímetro e de área de figuras geométricas, além de apontar alguns caminhos para o tratamento de dificuldades de aprendizagem destas noções, que foram criados e descritos em nossas investigações anteriores (Henriques e Silva, 2009, 2012), nas quais utilizamos como aporte teórico o Modelo dos Campos Semânticos (Lins, 1994, 2004). Desta forma, apresentaremos, nas seguintes seções, uma revisão crítica da literatura acerca dos temas *medidas*, *Geometria Escolar* e, mais especificamente, *dificuldades de aprendizagem de área e perímetro*, apresentando também algumas alternativas para o tratamento destas dificuldades, ao exibirmos resultados de algumas de nossas pesquisas anteriores. Importa-nos ainda observar que este trabalho é parte integrante de um projeto maior em desenvolvimento no interior do NIDEEM/UFJF[1] e que tem o propósito de investigar as possibilidades de reestruturação do currículo de Matemática da Educação Básica, pelo prisma da *produção de significados* (Lins, 1997; Silva, 2003).

2. Medidas *versus* Geometria Escolar: a questão do currículo

Ao compulsarmos alguns documentos de orientação curricular em Matemática, como os Parâmetros Curriculares Nacionais (Brasil, 1998) e os Princípios e Normas (NCTM, 2007), encontramos o tema *Medidas* relacionado aos conteúdos da Geometria da escola básica, embora apresentados em seções ou capítulos apartados. Talvez por esta razão pudéssemos considera pertinente a seguinte questão: *O tema Medidas integraria os currículos de Geometria Escolar?*

Tal discussão está intimamente ligada à gênese de nosso interesse em pesquisar sobre as dificuldades discentes relacionadas à distinção e à associação entre área e perímetro de figuras geométricas euclidianas planas.

Quando dissemos que o tema Medidas está relacionado à Geometria Escolar, estamos entrando no controvertido campo do *design* curricular, e nele inserindo a nossa parcela de questionamentos. *Que relações existem entre Medida e Geometria? Há apenas uma estreita ligação entre elas? De que modo esta suposta ligação e aquelas possíveis relações influenciam a aprendizagem de medidas, especialmente das medidas de comprimento e de área?* Vamos, agora, delinear um caminho para tentar responder a estas questões. E este caminho passa necessariamente pela questão curricular. Embora a nossa concepção de currículo envolva também outros aspectos igualmente importantes, como objetivos, metodologias e produção de significados (sobre isto trataremos mais adiante), fixaremos nosso foco apenas nos conteúdos curriculares, como ponto de partida desta discussão.

---

[1] Núcleo de Investigação, Divulgação e Estudos em Educação Matemática da Universidade Federal de Juiz de Fora, Minas Gerais, Brasil (ver o site: http://www.ufjf.br/nideem).

Os Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN) de Matemática para os 3º e 4º Ciclos do Ensino Fundamental (Brasil, 1998, p. 51) afirmam que "o trabalho com noções geométricas contribui para a aprendizagem de números e medidas". Esta distinção de campos de aprendizagem – *noções geométricas* e *medidas* – figura explicitamente naquele documento (Brasil, 1998), quando são apontados os quatro blocos de conteúdos nos quais se deve dividir a Matemática Escolar: Números e Operações, Grandezas e Medidas, Espaço e Formas, Tratamento de Informações. O bloco Espaço e formas é o que constitui o arcabouço da Geometria Escolar, sugerido nos PCN. Uma divisão similar a esta é encontrada em outro importante documento, intitulado Princípios e Normas para a Matemática Escolar (NCTM, 2007), que divide os conteúdos matemáticos em cinco grandes categorias: Números e Operações, Álgebra, Geometria, Medida e, finalmente, Análise de Dados e Probabilidade.

Um dos assuntos que quase sempre se leva em consideração, nas pesquisas sobre a geometria escolar, é o currículo. Entretanto, parece não haver concordância entre os pesquisadores, acerca daquilo que possa ser considerado elemento curricular de Geometria. Muito pelo contrário, o que se observa a esse respeito é que existe ampla divergência quanto aos detalhes e quanto à natureza da Geometria que deveria ser ensinada, desde a escola primária até a universidade. (Usiskin, 1994)

No esforço de fundamentar uma opção ou intenção curricular, alguns pesquisadores lançaram mão de categorizações das "geometrias" escolares. Por exemplo, Houdement e Kuzniak (2003) propuseram que a geometria elementar parece ser dividida em três paradigmas[2] diferentes, caracterizando três diferentes formas de geometria: Geometria Natural, Geometria Axiomática Natural e Geometria Axiomática Formalista. O referencial teórico desenvolvido por estes pesquisadores especifica a natureza dos objetos geométricos, a utilização de diferentes técnicas e modos de validação concebidos em cada um destes paradigmas, sendo os dois primeiros os que mais se relacionam a escola básica, por englobarem, respectivamente, objetos materiais (incluindo suas representações gráficas) e objetos ideais, como aqueles da Geometria Euclidiana. (Houdement, 2007)

Segundo os estudos da *International Commission on Mathematical Instruction* (1994), houve, no passado, e ainda há, na atualidade, fortes desacordos sobre objetivos, conteúdos e métodos para o ensino de geometria, em diferentes níveis. Esta constatação é corroborada por trabalhos mais recentes, como os de Jones (2010) e de Hoyles, Foxman e Küchemann (2002). Allendoerfer (1969, apud Usiskin, 1994, p. 28) já havia notado esse dilema fundamental, subjacente ao problema do currículo, quando asseverou que "em geometria não há concordância nem mesmo quanto ao seu objeto". Esta mesma falta de consenso impulsionou um estudo encomendado pela UNESCO sobre a geometria escolar, desenvolvido por Morris (1986) e amplamente divulgado na Europa, na década de 1990.

Uma parcela considerável do desenvolvimento da geometria, ocorrido durante o século XX, foi inspirada na obra de Felix Klein (1849-1925), que propôs que a

[2] A noção de paradigma utilizada por esses autores é a de Kuhn (1998).

geometria deve ser vista como *o estudo das propriedades de um espaço que são invariantes sob um determinado grupo de transformações*. Com esta definição, tornou-se possível classificar as diversas geometrias relacionadas em "famílias", variando desde a topologia, como a mais geral, passando pelas geometrias projetiva e afim, até a geometria euclidiana, que tem maior número de propriedades invariantes, quando comparada às demais geometrias. Esta forma de ver a geometria e seus desenvolvimentos posteriores estimulou a demarcação de muitas geometrias mais. (Jones, 2000) Neste ponto, vemos o desenvolvimento da geometria na perspectiva dos matemáticos, e não em outra perspectiva[3].

Os PCN de Matemática (Brasil, 1998) nos oferecem um bom exemplo da influência de tal desenvolvimento sobre as orientações curriculares, ao apresentar a Matemática a ser ensinada nas escolas, da seguinte maneira:

> Fruto da criação e invenção humanas, a Matemática não evoluiu de forma linear e logicamente organizada. Desenvolveu-se com movimentos de idas e vindas, com rupturas de paradigmas. Frequentemente um conhecimento é amplamente utilizado na ciência ou na tecnologia antes de ser incorporado a um dos sistemas lógicos formais do corpo da Matemática. Exemplos desse fato podem ser encontrados no surgimento dos números negativos, irracionais e imaginários. Uma instância importante de mudança de paradigma ocorreu quando se superou a visão de uma única geometria do real, a Geometria Euclidiana, para aceitação de uma pluralidade de modelos geométricos, logicamente consistentes, que podem modelar a realidade do espaço físico. (Brasil, 1998, p. 25)

A existência e a aceitação desta "pluralidade dos modelos geométricos" parecem influenciar as perspectivas de ensino e de aprendizagem da geometria, em diversos países, de tal sorte a estimular uma constante reestruturação curricular, pela revalorização da geometria no âmbito da escola básica. Esta hipótese é corroborada por um documento de orientação curricular do Ministério da Educação de Portugal, no qual Abrantes, Serrazinha e Oliveira (1999) afirmaram:

> O lugar da geometria nos currículos tem sido alvo de grande controvérsia, um pouco por todo o mundo. Nos últimos anos, observa-se uma tendência geral no sentido da revalorização da geometria nos programas de Matemática. No entanto, quer os conteúdos a incluir, quer as metodologias a utilizar, continuam a ser questionados. (Abrantes, Serrazinha e Oliveira, 1999, p. 57)

Na introdução do capítulo VI de sua obra, intitulado *Outras Geometrias*, Veloso (2000) chama a atenção para a necessidade de se fazer uma pausa, no percurso de aprendizagem dos ensinos fundamental e médio, para reflexão acerca das concepções sobre a geometria; e justifica a sua preocupação:

> Os alunos devem ter oportunidade de trabalhar com "outros pontos", "outras rectas", "outros triângulos", "outras distâncias". Numa palavra, devem tomar contato com *outras geometrias*. Por isso intitulamos assim este capítulo. Nele apresentaremos algumas dessas outras geometrias que ao longo dos últimos dois séculos – por vezes até anteriormente, de maneira não explícita – foram tomando o seu lugar ao lado da geometria euclidiana. [...] Não estamos a propor que *todos* os alunos, no futuro, experimentem trabalhar em *todos* esses tópicos. Mas que

[3] Esta diferenciação, que entendemos ser necessária, está calcada na distinção entre a matemática do matemático e a matemática escolar, concebida por Lins (2004).

> alguma vez, na sua vida escolar, tenham saído dos limites hoje estreitos da geometria euclidiana, por pouco tempo que seja. (Veloso, 2000, p. 311)

Consideramos esta perspectiva de Veloso (2000) bastante coerente com a *ótica* que o nosso referencial teórico nos oferece, isto é, a ótica da legitimação, na escola, dos diferentes modos de produção de significados para os temas estudados (como, por exemplo, os geométricos). Supomos que isto possa interferir diretamente no modo como os alunos aprendem geometria.

Um importante estudo comparativo de currículos, desenvolvido por Hoyles e colaboradores (2002), encontrou uma considerável variação nas abordagens atuais para a geometria escolar, em diferentes países. A diversidade de abordagens e tratamentos teórico-metodológicos de tais currículos parece estar relacionada à concepção da natureza da geometria. Costa (2000), discutindo os fundamentos curriculares de geometria escolar, afirma:

> Sob a égide de "geometria", podemos apontar tanto para matemáticas aplicadas como para matemáticas teóricas e podemos utilizar tanto a intuição como a axiomática. Contudo é esta grande versatilidade, tão fascinante para os matemáticos, que parece desorientar os estudantes na aprendizagem da geometria, bem como as tentativas para ensinar, por parte dos professores. (Costa, 2000, p. 159)

Por um lado, vemos que não existe uma concordância no que se deva ensinar e aprender na escola, quando o tema é a Geometria. Mas, por outro, a possibilidade de eleger este ou aquele assunto a ser tratado em determinada aula ou em certo programa de Geometria soa-nos como algo no mínimo interessante e legítimo, pois dá ao professor a liberdade para desenvolver tarefas que criem para os alunos uma *demanda de conhecimento*[4] de temas geométricos.

Esta liberdade, que entendemos desejável, talvez seja a razão mesma da falta de consenso sobre o currículo de geometria da escola básica. Além disso, como asseveraram Mammana e Villani (1998), "[...] é imprópria a alegação de que é possível elaborar um currículo de geometria que tenha validade universal".

Entretanto, documentos oficiais de muitos países e instituições parecem ter como um de seus objetivos a uniformização do trabalho dos professores de matemática, ao menos no que tange a escolha dos conteúdos a serem ensinados e aprendidos. Um exemplo disto são os PCN de Matemática para os 3º e 4º Ciclos do Ensino Fundamental (Brasil, 1998), que ressaltam o estudo das *Grandezas e Medidas* como instrumento que permite se estabeleçam interligações entre os campos da Aritmética, da Álgebra, da Geometria, do Tratamento de Informações e de outros campos de estudo. Observemos o que orientam os PCN (Brasil, 1998) quanto à descrição e ao tratamento da categoria "Grandezas e Medidas":

> Neste bloco serão tratadas diferentes grandezas (comprimento, massa, tempo, capacidade, temperatura, etc.) incluindo as que são determinadas pela razão ou produto de duas outras (velocidade, energia elétrica, densidade demográfica, etc.). [...] Outro conteúdo destacado neste bloco é a obtenção de algumas

[4] Para o termo *demanda de conhecimento* atribuímos, aqui, o sentido de *situação problemática* de Majmutov (1983), que se aproxima da noção de *zona de desenvolvimento proximal* de Vygotsky (1994); para a noção de *conhecimento*, adotamos o sentido proposto por Lins (1993).

> medidas não diretamente acessíveis, que envolvem, por exemplo, conceitos e procedimentos da Geometria e da Física. (Brasil, 1998, p. 52)

Sob a denominação de *Medidas*, são comumente tratadas as mensurações de grandezas diversas que podem ser ensinadas e aprendidas na escola, como o tempo de percurso de um móvel, a massa de um corpo, a temperatura de um *quantum* de determinada massa, o comprimento de uma figura plana ou a área da superfície de um objeto tridimensional. (NCTM, 2007). Owens e Outhred (2006), discutindo a complexidade da aprendizagem de *medidas geométricas*, concluíram:

> Para comprimento, área e volume, a organização espacial das unidades, em uma, duas ou três dimensões, respectivamente, é fundamental para a compreensão da medição de quantidades [destas grandezas]. Por outro lado, a estrutura espacial não é imprescindível para [a compreensão da medição de quantidade de] massa, temperatura e tempo, exceto em termos de leitura de uma escala. (Owens e Outhred, 2006, p. 100, tradução nossa)

O trabalho de Abrantes e colaboradores (1999) reforça a perspectiva da conexão da aprendizagem do tema *Medidas* com a aprendizagem dos temas geométricos, como podemos ver no trecho:

> A medida é um meio privilegiado para se estabelecerem conexões, quer dentro da própria Matemática, quer na ligação a outras disciplinas. Na medida, estão interligados conceitos geométricos, aritméticos, trigonométricos, bem como a capacidade de formulação e de resolução de problemas e várias destrezas. Há uma forte ligação deste tópico à geometria (por exemplo, o perímetro e a área são características mensuráveis de certas figuras geométricas). (Abrantes, Serrazinha e Oliveira, 1999, p. 64)

Segundo Battista (2007), a noção de *medidas* desempenha um papel essencial na construção da intrincada teia de concepções, raciocínios e aplicações geométricos. Uma parcela considerável das pesquisas acerca do ensino e da aprendizagem de *medidas* está focada na compreensão que os estudantes desenvolvem acerca de grandezas como a amplitude angular, comprimento, área e volume (ver, por exemplo, Lehrer, 2003; Battista, 2007). Entretanto, entendemos que, em tais pesquisas, é insuficiente a discussão feita sobre a natureza dos elementos geométricos, cujas medidas e suas formas de aprendizagem pelos alunos são investigadas. Estamos nos referindo, mais uma vez, à diversidade das geometrias e, portanto, das *naturezas geométricas*, euclidianas ou não. Isto por entendermos que devemos, em sala de aula, ampliar as possibilidades de produção de significados (portanto, de distintos campos semânticos) para os elementos geométricos que são constituídos pelos estudantes em determinadas atividades.

Já existem propostas de introdução de temas de geometrias não-euclidianas no ensino fundamental (por exemplo, Martos, 2002), como também estudos das dificuldades em implementar, na prática, tais propostas (Lovis e Franco, 2011). Mas o que tem se mostrado comum às pesquisas, às orientações curriculares oficiais e aos livros didáticos, para este nível de ensino, é o trabalho com a Geometria Euclidiana. Por esta razão, não inovamos, mas envolvemos, em nossas investigações anteriores (Henriques e Silva, 2012; Henriques, 2011; Henriques e Silva, 2009), apenas as noções de elementos da Geometria Euclidiana, e não aqueles de outras geometrias. Faz-se mister destacar que, não obstante elegermos tais elementos, assumimos, como nosso pressuposto de trabalho, que objetivos (curriculares e político-pedagógicos) devem orientar conteúdos e métodos. Tal afirmação equivale a dizer que não colocamos o foco de nossas atenções nos conteúdos curriculares, mas sim nos objetivos que norteiam a nossa prática de professores da educação básica, sempre embasada em nossos pressupostos teórico-epistemológicos e metodológicos.

Além de influenciar o modo como operamos ao *ensinar* e como vemos o *aprender* dos alunos, em nossas salas de aula, a existência de clareza de objetivos e pressupostos nos propicia a possibilidade de criarmos um currículo dinâmico, adaptável às necessidades discentes e pedagógicas, sem nos engessarmos a um programa inflexível, centrado em conteúdos, ou a cronogramas pré-estabelecidos por outrem, quando não impostos por um sistema ou uma instituição de ensino.

E mesmo quando se tem a clareza acerca de *que conteúdo se deve ensinar*, advêm outras questões, não menos relevantes, quais sejam: *como os alunos aprendem certo conteúdo* e, ainda, *quais estratégias seriam facilitadoras deste aprendizado*. Não obstante a possibilidade de obtermos respostas para tais questionamentos, continuaríamos desprovidos de um suporte suficiente para que pudéssemos *ler* os processos de produção de significados e, então, intervir na dinâmica de tal processo; porquanto concordamos com Lins (2002), quando analisa a questão dos conteúdos de ensino e afirma:

> O que nós e este pequeno mas crescente número de pesquisadores procura, é caracterizar o que seja “Matemática” quando nos referimos à atividade profissional do professor de “Matemática”. Não é apenas o conteúdo da Matemática “do matemático”, mas não é também – cada vez entendemos melhor – a Matemática “do matemático” mais uma compreensão do que seu ensino possa envolver – seja em termos de estágios de desenvolvimento intelectual, seja em termos de estratégias de ensino. Mais do que uma taxonomia – não importa quão ampla ela seja – precisamos de categorias básicas que nos permitam ver esta Matemática da sala de aula acontecendo enquanto ela acontece, isto porque, como já apontaram diversos pesquisadores, os fenômenos da educação são complexos demais para serem cristalizados . (Lins, 2002, p. 23)

Quanto à relação entre Geometria e Medidas, aceitamos o fato de haver uma interdependência entre estes elementos curriculares, no que diz respeito à sua aprendizagem no ensino fundamental, fato esse estudado por alguns dos pesquisadores que citamos acima, como, por exemplo, Owens e Outhred (2006). Desta foram, acreditamos que o desenvolvimento das noções que envolvem estes dois temas curriculares depende de estímulos dados na idade escolar, através da educação formal, baseada em pressupostos teóricos e em observações práticas, que por sua vez geram pesquisas e novas propostas de intervenção.

Consideramos ser legítimo, portanto, assumir que o tema *Medidas* integra o currículo da *Geometria* da escola básica, pelo fato de existir intrínseca relação entre estes temas, conforme vimos anteriormente. A partir deste nosso posicionamento – trabalhar com medidas geométricas é, também, trabalhar com Geometria – vamos buscar explicitar e entender as dificuldades de aprendizagem de medidas de área e de perímetro de figuras euclidianas planas, dificuldades que temos reincidentemente observado ao lecionar para turmas do 6º ao 9º ano do Ensino Fundamental e para classes do Ensino Médio de escolas públicas da cidade de Juiz de Fora (Minas Gerais, Brasil). E se buscamos identificar e compreender tais "problemas" de aprendizagem, nada mais nos moveu nesta direção senão o desejo criar caminhos de intervenção didática, minimizando ou mesmo eliminando sua incidência, no momento em que surjam e sejam percebidos (Henriques e Silva, 2012).

Para tratar de tais dificuldades de aprendizagem e das possíveis alternativas para diminuir a sua ocorrência, empenhamos toda a discussão desenvolvida na seção seguinte.

2. Aprendizagem de área e perímetro: dificuldades e perspectivas

Como podemos avaliar a partir do que foi discutido na seção anterior, há uma complexidade subjacente ao processo de aprendizagem de medidas geométricas, que torna necessária uma busca por identificarmos os elementos característicos de tal processo, não somente relativos aos seus condicionantes pedagógicos, mas especialmente no que respeita os aspectos cognitivos que o constituem. Iniciamos, então, essa busca.

Ao elaborar uma revisão da literatura acerca da compreensão do tema *medidas de comprimentos e áreas* por crianças recém-ingressas na escola, Clements e Stefhan (2004) estudaram em profundidade o desenvolvimento desta compreensão, e puderam afiançar:

> As crianças pequenas encontram e discutem quantidades, com naturalidade [...]. Elas primeiramente aprendem a usar as palavras que representam quantidade ou magnitude de uma determinada grandeza. Em seguida, elas comparam dois objetos diretamente e reconhecem a igualdade ou a desigualdade [...]. Neste momento, elas estão prontas para aprender a medir, ligando o número à quantidade: **Medida** é definida como a atribuição de um número a quantidades contínuas. (Clements e Stefhan, 2004, p. 301, tradução e grifo nossos)

Segundo Jones e Mooney (2003), o trabalho com medidas na escola básica, embora muitas vezes seja iniciado através de atividades em contextos espaciais, frequentemente é abandonado com muita rapidez, e é provavelmente vivido pelas crianças como *mais uma forma de fazer cálculos*. Para evitar esta situação, as primeiras experiências (escolares) dos alunos com a geometria deveriam enfatizar o estudo informal das formas físicas e suas propriedades, com o objetivo principal de desenvolver a *intuição geométrica* e o *conhecimento dos estudantes* sobre o seu ambiente espacial. (Jones e Mooney, 2003).

Para nos referirmos mais especificamente aos temas *área* e *perímetro*, destacamos o trabalho de Alsina i Pasttels (2009). Nele são sugeridas tarefas manipulativas no *Geoplano*, através das quais estudantes de 6 a 9 anos de idade poderiam desenvolver habilidades que vão desde a percepção de propriedades de figuras geométricas planas (como polígonos), até a distinção entre a medida do perímetro e a medida da superfície destas mesmas figuras.

Tanto em sugestões práticas como esta, de Alsina i Pasttels (2009), quanto em estudos como o Jones e Mooney (2003), há um grande número de aspectos teóricos e epistemológicos a serem considerados, na análise do processo de aprendizagem de tópicos de geometria escolar, possivelmente também ligados ao seu ensino e às concepções docentes sobre ambos os processos e sobre a própria natureza da geometria que se pretende ensinar.

Discutiremos, agora, alguns destes aspectos, relacionados à aprendizagem das noções que envolvem área e perímetro de figuras geométricas planas, e a *medidas* destas grandezas. Na base dessa discussão está o nosso esforço em compreender as razões de alguns *obstáculos* e *limites epistemológicos*[5] discentes que têm se mostrado muito frequentes em nossas aulas de Geometria, ao lecionar para turmas da educação básica.

2.1. Algumas dificuldades na aprendizagem de perímetro e área

Uma das dificuldades dos estudantes, que com muita frequência temos observado em nossas salas de aula do ensino fundamental e do ensino médio, é a confusão entre as ideias de área e de perímetro, quando eles resolvem problemas usuais de geometria euclidiana plana. E parece que não estamos sozinho nesta constatação. Trabalhos como os de Nunes (1995), Chappell e Thompson (1999), Malloy (1999), French (2004), Baldini (2004), D'Amore e Fandiño Pinilla (2006), Owens e Outhred (2006) e Hernández (2008) apontam tal dificuldade e procuram identificar sua gênese.

Ao descrever, a seguir, alguns destes (e outros) trabalhos, relacionados ao estudo de dificuldades dos estudantes na aprendizagem de perímetro e de área de figuras planas, buscamos identificar características que nos favorecessem na elaboração das tarefas desenvolvidas e aplicadas em algumas de nossas investigações anteriores (Henriques e Silva, 2012; Henriques, 2011).

Antes de propor uma aplicação do Modelo de van Hiele para o trabalho com perímetro e área nos anos finais do ensino fundamental, Malloy (1999) afiançou que, embora uma considerável parcela dos alunos deste nível educacional possa resolver problemas de deduzir e aplicar fórmulas de *área* e de *perímetro* de algumas figuras geométricas (como retângulos, quadrados e triângulos), eles não têm conseguido conceituar plenamente os significados de ambos os termos, e acabam por fazer confusão entre tais fórmulas, encontrando a área de uma figura quando se pede o seu perímetro, e vice-versa.

Baltar (1996), ao estudar a aquisição da relação entre comprimento e área na escola, relata as dificuldades que estudantes dos anos finais da educação básica encontram, em primeiro lugar, em reconhecer *medidas* de uma figura como um de seus elementos constituintes e, em segundo, em distinguir medidas de área das medidas de perímetro.

Santos (2008), em sua pesquisa de mestrado, cuja metodologia se baseou em uma análise qualitativa sob a ótica da Didática da Matemática francesa, concluiu que a não resolução de certas tarefas – propostas aos estudantes por autores de certos livros didáticos e que envolvem as noções de área e perímetro – indica dificuldades que podem estar associadas à forma como se dá a passagem entre os *níveis de conhecimento*, às mudanças de *registros de representação semiótica* e às *mudanças de quadros* envolvidas nas tarefas.

---

[5] Os termos obstáculo epistemológico e limite epistemológico expressam dificuldades inerentes ao processo de produção de significados, segundo o sentido proposto por Lins (1993) e que assumimos neste trabalho, deste ponto em diante. Sobre isto, trataremos no Capítulo 3.

Embora não seja nosso interesse trabalhar com estas noções da Didática francesa, consideramos pertinente levantar a questão da influência das abordagens dos temas geométricos trazidas pelos livros didáticos. Por exemplo, Kordaki (2003) destaca que os alunos enfrentam dificuldades relacionadas à introdução prematura da abordagem quantitativa de área, privilegiando o uso das fórmulas para se calcular a área de figuras planas e negligenciando uma abordagem qualitativa, que enfatize o conceito de conservação.

Se voltarmos nosso olhar para as avaliações em larga escala, divisaremos, por exemplo, a Prova Brasil. Esta avaliação, que se insere no Plano de Desenvolvimento da Educação do Ministério de Educação e integra o Sistema Nacional de Avaliação da Educação Básica (Brasil, 2008), foi aplicada a mais de nove milhões de estudantes brasileiros do 5º e do 9º anos do ensino fundamental, em cada uma de suas duas edições, ocorridas nos anos de 2005 e 2007. Da totalidade dos alunos avaliados, 67% erraram uma questão simples que envolvia o cálculo do perímetro de um polígono desenhado em uma malha quadriculada, o que demonstrou que os estudantes “confundiram perímetro com área” (Brasil, 2008, p. 127). Vale ressaltar que a elaboração de questões de avaliações em larga escala, como esta, tem critérios muitíssimos rígidos e objetivos, a ponto de cada item (questão) estar relacionado a um único descritor (tema disciplinar) da matriz de referência, por exemplo, o descritor (da matriz de Matemática) “resolver questões que envolvem o cálculo do perímetro de uma figura plana poligonal” (Brasil, 2008). Entendemos que estas avaliações, embora nos deem pistas do quadro geral de determinado grupo de alunos, envolvendo certo tema, não nos permitem conhecer quais sejam as dificuldades discentes, tampouco avaliar suas possíveis causas.

Um sistema internacional de avaliação em larga escala, que também avalia estudantes do 5º e do 9º anos da escolaridade básica, o TIMSS (*Trends in International Mathematics and Science Study)*, em sua versão 2007 aplicada na Suécia, foi analisado pela Agência Nacional de Educação daquele país, em parceria com a Universidade de Gotemburgo. Não obstante o fato de classificarem a Suécia entre os quinze de melhor pontuação no *ranking* da avaliação de conhecimentos matemáticos, os resultados mostraram que os conceitos de perímetro e área são frequentemente confundidos pelos alunos suecos. E revelaram ainda que muitos alunos não estão familiarizados com o caráter aditivo do conceito de área e por isso não são capazes de calcular áreas de figuras compostas. No mesmo documento, afirma-se que o desconhecimento do caráter aditivo da área acomete os estudantes, provavelmente, devido à falta de experiências conceituais, que por sua vez resulta de uma abordagem de ensino predominante processuais, ou seja, de aplicação de fórmulas destituídas de compreensão. (Skolverket, 2008)

Segundo French (2004), a dificuldade de dissociar área e perímetro pode surgir de uma simples confusão de palavras ou mesmo originar-se de conceitos profundamente errôneos, os quais fazem os estudantes pensarem que perímetro e área estão ligados de um modo tão elementar, que o aumento de uma dessas grandezas conduz necessariamente ao aumento da outra.

Para se evitar o surgimento de tal dificuldade, Yeo (2008) destacou a necessidade de se primar por uma aprendizagem através do desenvolvimento de um conhecimento conceitual e relacional destes temas, e ressaltou um grave obstáculo a esta prática: o fato de os próprios professores confundirem os conceitos de perímetro e de área.

D'Amore e Fandiño Pinilla (2006) sustentam que dificuldades estabelecidas na escola básica, acerca de questões ligadas a área e perímetro, persistem para muitos estudantes, até mesmo entre aqueles que já estão na universidade. Após a análise de tarefas aplicadas e entrevistas realizadas com professores e estudantes, D'Amore e Fandiño Pinilla (Ibidem) concluíram que, na construção de um conhecimento das relações entre *perímetro* e *área,* os alunos revelam obstáculos que não são apenas epistemológicos – como estabeleceram muitos dos trabalhos neste campo de investigação – mas que apresentam também uma natureza didática.

Os *Princípios e Normas* (NCTM, 2007), apoiando-se nas pesquisas de Lindquist e Kouba (1989), apontam dificuldades que muitos alunos do ensino fundamental apresentam na compreensão das ideias de perímetro e de área, fato que tais pesquisadores entendem ser decorrente da utilização, pelos alunos, de fórmulas como $P=2\boldsymbol{c}+2\boldsymbol{l}$ ou $A=\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{l}$, sem que estes tenham compreendido de que modo estas fórmulas se relacionam com a grandeza a ser medida ou com a unidade de medida utilizada.

Outhred e Mitchelmore (1992, apud D'Amore e Fandiño Pinilla, 2006), estudando dificuldades específicas de conceitualização de área e perímetro, mostraram que é apenas uma ilusão a atividade de ensinar tomada como garantia de que, se uma criança calcula a área de um retângulo, ela está automaticamente aprendendo a medir ou calcular a área de qualquer outra figura geométrica.

Em uma de nossas investigações anteriores (Henriques e Silva, 2009), pudemos verificar que muitos estudantes dos anos finais do ensino médio (ou secundário) utilizam sempre o mesmo procedimento de cálculo ou a mesma fórmula para calcular a área de *qualquer* figura geométrica plana, poligonal ou não poligonal.

Entendemos ser pertinente considerar as possibilidades de existência e de identificação das dificuldades que citamos na revisão acima, o que é corroborado pela seguinte afirmação de Bellemain (2003):

> A consideração pelos professores de que não há dificuldades conceituais de aprendizagem significativas com respeito aos conceitos de área e perímetro é preocupante, pois se os professores não percebem as dificuldades que os alunos apresentam na aprendizagem desses conteúdos, terão pouca chance de intervir para sua superação. (Bellemain, 2003, p. 17)

2.2. Algumas perspectivas para a aprendizagem de perímetro e área

Como podemos observar, através desse quadro de referência das pesquisas sobre as dificuldades de aprendizagem das noções de área e perímetro de figuras geométricas planas, o tema é de extraordinária complexidade, o que exige atenção e profundidade nas tentativas de tratamento e prevenção de tais dificuldades, através de propostas didáticas. Discutiremos, agora, algumas destas propostas.

Os Princípios e Normas (NCTM, 2007) trazem sugestões de atividades para que os professores trabalhem habilidades de alunos da pré-escola até o 2º ano do ensino fundamental, relacionados à medição de comprimentos e de áreas de figuras planas, sem recorrerem ao rigor, mas sim à estimativa, dirigindo a atenção dos estudantes para as grandezas, para o processo de medição e para o valor das unidades de referência.

Já segundo Chappell e Thompson (1999), os estudantes precisam de tarefas nas quais possam analisar o perímetro e a área ao mesmo tempo para distinguirem claramente os dois objetos. Estes pesquisadores afirmam, ainda, que os alunos precisam construir representações visuais de figuras com determinadas áreas e perímetros, criar problemas relacionados com estas palavras e justificar as propriedades figurais observadas.

Estudos conduzidos por Outhred e Michelmore (2000) mostraram a necessidade de que os conceitos de área e perímetro sejam trabalhados de forma a articular os *conhecimentos declarativos* dos alunos e os seus *conhecimentos de procedimentos*, visando a uma aprendizagem significativa. Em contraposição a estas pesquisas, a posição que assumimos não tende ao pragmatismo, nem à visão de *campos conceituais*[6] e nem ainda a uma articulação entre estas concepções. Concebemos que o ensino e a aprendizagem das noções de área e perímetro (como de um outro tema qualquer, matemático ou não) devem ser calcados na produção de significados (Henriques, 2011), como modo de ler os processos cognitivos e de intervir nestes processos, dentro dos quais o sujeito do conhecimento constitui novos objetos, como, por exemplo, área e perímetro, sem que tal constituição (ato de conhecer) tenha sua legitimidade colocada em cheque, isto é, sem concepções prévias nem juízo de valor. A perspectiva da produção de significados favorece a criação de um espaço comunicativo, dentro do qual a possibilidade de negociação de significados deve existir (Lins, 2004).

Chamorro (1997) analisou distintos aspectos que determinam os ambientes de aprendizagem relacionados a medidas em geral. Entre os diversos exemplos que o autor apresentou, aparece com destaque a dificuldade de identificar as relações entre perímetro e área. Sobre isto, afirmou Chamorro (1997):

> Em se tratando de superfície, por causa da medida produzida, convergem múltiplos obstáculos conceituais. Entre estes, está a relação que as unidades de superfície mantêm com as unidades de comprimento, sendo que a primeira subsidia a segunda, como produto da medida. Tais relações podem ser compreendidas começando pelas relações espaciais, as quais, por sua vez, deveriam ser coordenadas com as relações multiplicativas. A coordenação entre a linearidade de cada uma das dimensões e a linearidade das superfícies deve poder ser garantida através de um modelo geométrico que ajude a visualização de tais relações. (Chamorro, 1997, p. 45, tradução nossa)

Para construir a noção geométrica de área, é preciso estabelecer relações entre as fórmulas de área e de perímetro e os invariantes geométricos das figuras. E é necessário, também, desenvolver um trabalho geométrico sobre o tratamento destas figuras em casos não prototípicos ou não padronizados, isto é, um tratamento diverso do que encontramos na maioria dos livros didáticos de Matemática. (Teles, 2009; Baltar, 1996)

[6] Ver Vergnaud (2008).

Em um documento de divulgação da matriz de referência e dos resultados da *Prova Brasil* (Brasil, 2008), aparecem sugestões de como os professores podem trabalhar com a habilidade (dos alunos) de calcular a área de figuras planas poligonais:

> Durante o trabalho com a habilidade em questão, tanto o perímetro quanto a área podem ser encadeados, possibilitando, assim, destacar-se a diferença entre os dois conceitos. As mesmas atividades utilizadas para conceituação de perímetro podem ser aqui abordadas. Entretanto, cabe ao professor tomar figuras geométricas bastante ilustrativas e que permitam a contagem de unidades de áreas. Essa é uma tarefa que atrai o aluno, pois um quadro que apresente regularidades e atratividade visual coaduna com o cálculo preciso, enquanto aqueles quadros ou formas geométricas não regulares remetem à idéia de estimativa. (Brasil, 2008, p. 129)

Aceitamos a ideia do trabalho com unidades de área como algo um tanto natural para os estudantes e, portanto, mais favorável à aprendizagem da noção de área de polígonos. Entretanto, a proposição de tarefas que envolvam a noção multiplicativa de área parece ser bastante importante para o desenvolvimento da própria noção de estimativa, no cálculo da área de figuras planas poligonais (Abrantes, Serrazinha e Oliveira, 1999). Em sua dissertação de mestrado, fundamentada na Teoria das Situações Didáticas de Guy Brosseau e na metodologia da Engenharia Didática de Artigue, Baldini (2004) mostrou uma utilização do *software Cabri Géometrè II* contribuindo significativamente para a construção dos conceitos de área e perímetro. Na sequência didática que a pesquisadora elaborou e aplicou aos estudantes (sujeitos da pesquisa), há 30 *atividades*, entre as quais 5 relacionam os conceitos de área e perímetro. Como exemplo, vejamos apenas duas destas *atividades*:

> **Atividade 24:** Verificar se existe alguma relação entre área e perímetro de uma mesma figura. **Objetivos:** Calcular e relacionar área e perímetro de uma mesma figura; compreender que não existe nenhuma relação de proporcionalidade entre área e perímetro de uma mesma figura; ou seja, que área e perímetro não variam num mesmo sentido. [...] **Atividade 26:** Cálculo de área a partir do perímetro e cálculo do perímetro a partir da área. **Objetivos:** Calcular área de um quadrado conhecendo o seu perímetro; calcular o perímetro de um quadrado conhecendo sua área. (Baldini, 2004, p. 125, grifos da autora)

Assumimos a posição de considerar que "atividades" como estas – que trabalham simultaneamente as noções de área e de perímetro – são mais favoráveis à sua aprendizagem, que outras tarefas que envolvem apenas um destes temas. Este posicionamento se funda na perspectiva defendida por Lins (1993), segundo a qual a prática tradicionalmente adotada, quanto ao ensino de matemática, esconde os saltos entre diferentes campos semânticos e confiam numa passagem "suave" entre noções distintas, relacionadas a um mesmo elemento. Por exemplo, quando são estudados a área e o perímetro de um triângulo. Não é raro encontramos, em livros didáticos avalizados pelo Ministério da Educação brasileiro, através de publicações do Programa Nacional do Livro Didático[7], estes temas sendo tratados em capítulos distintos e, em algumas obras,

[7] Ver Brasil (2010).

distantes um do outro, na ordenação de seus capítulos. Desta forma, as noções de área e de perímetro são trabalhadas separadamente e em momentos distintos de um mesmo ano letivo, por professores que seguem as sugestões dos autores de determinados livros didáticos, talvez assim não oferecendo a muitos alunos a oportunidade de comparar tais noções, associadas a figuras geométricas, e de perceber as relações existentes entre elas.

Com base na noção de signos como mediadores das interações (sociais, culturais) que geram o desenvolvimento cognitivo (Vygotsky, 1994), Nunes (1995) explicita as duas alternativas mais usuais para se representar o conceito de área de figuras planas. A primeira alternativa envolve medir o comprimento e a largura de certa figura (um retângulo, por exemplo) e utilizar tais medidas para calcular a área desta figura, através de uma fórmula, que neste caso corresponde ao produto das medidas. A segunda alternativa envolve começar por unidades de área (por exemplo, centímetros quadrados), que se forem arrumadas em linhas e coluna, sobre a figura a ser medida (novamente, consideremos o retângulo), a área desta figura é calculada pela multiplicação do número de unidades numa linha vezes o número de linhas. Estas duas alternativas – explica a pesquisadora – diferem basicamente em relação ao número variáveis envolvidas em cada concepção de produto de medidas: três variáveis na primeira e duas na segunda concepção. Vejamos a metodologia que Nunes (1995) utiliza em sua pesquisa:

> Pedimos a pares de crianças inglesas, dos 8 aos 10 anos, para resolverem alguns problemas de áreas. Os pares de alunos foram distribuídos aleatoriamente por uma de duas condições. Na primeira condição, foram-lhes dadas réguas como instrumento de medida. Na segunda condição, foram-lhes dados tijolos de 1 cm^2, mas não lhes demos tijolos suficientes para cobrir completamente as figuras, para que a solução de simplesmente cobrir a figura e contar o número de tijolos não fosse possível. (Nunes, 1995, p. 17)

E observemos alguns resultados desta pesquisa (Nunes, Ibidem):

> O desempenho dos alunos, nestes problemas, diferiu em função do sistema de signos que tinham disponível na situação experimental: réguas ou unidades de área. As diferenças foram observadas quer quanto ao número de respostas correctas, quer quanto ao tipo de concepção utilizada na resolução do problema. As crianças que tinham a sua disposição unidades de área tiveram um desempenho significativamente superior ao das que tinham réguas. Os alunos que tinham régua como instrumento de medida costumavam, mais frequentemente, adicionar as medidas do que multiplicá-las. Eles calculavam ora o perímetro, ora o semi-perímetro. [...] Os alunos que tinham unidades de área como instrumentos de medida frequentemente descobriam uma fórmula para resolverem o problema, número de tijolos numa linha vezes o número de linhas, e usavam-na com sucesso para ultrapassar o facto de faltarem tijolos. (Nunes, 1995, p. 18)

É importante destacar que há, nestas conclusões de Nunes, indícios de uma abordagem com bases eminentemente piagetianas, na revelação da concepção de conhecimento *a priori*, quando a autora se refere às "respostas corretas" dos sujeitos de pesquisa. De fato, Nunes (1995), em sua abordagem, entende serem compatíveis as teorias de Vygotsky e de Piaget. Mas nós consideramos que isto é impraticável, pois os pressupostos de um são diversos dos pressupostos do outro. Por exemplo, no que concerne ao desenvolvimento cognitivo humano, enquanto

Piaget se refere a *estágios*[8] e a mecanismos de passagem entre estágios, Vygotsky fala de *processos* cognitivos que, uma vez postos em marcha, são a causa de sua própria mudança (Lins, 1999). Embora este ponto de discordância nossa com a abordagem de Nunes (1995), sua pesquisa nos ajuda a pensar acerca da confusão discente entre *área* e *perímetro*, além de nos informar da importância da mediação de instrumentos ou ferramentas na aprendizagem destes temas. E esta informação influenciou-nos no processo de elaboração das tarefas educacionais envolvendo área e perímetro (Henriques, 2012; Henriques, 2011).

Em uma pesquisa mais recente, Owens e Outhred (2006) investigaram a *compreensão* de jovens alunos acerca da quantificação de uma superfície plana, e chegaram às seguintes conclusões: *i)* os alunos parecem considerar duas quantidades, o número de quadrados (unidades de área) ao longo do comprimento e o número destes quadrados ao longo da largura de um retângulo, sem reconhecerem estas quantias como o número de quadrados numa linha e o número de linhas; *ii)* poucos alunos utilizam a multiplicação para enumerar os elementos em uma malha quadriculada; *iii)* a metade dos alunos conta elemento a elemento, e 38% deles utilizam a adição, repetidamente; *iv)* o conhecimento discente de estruturas em malha (matriz retangular) proporciona bases para uma alternativa de trabalho com unidades de área necessárias para se cobrir um retângulo; *v)* desenhar uma matriz de unidades quadradas, usando dois conjuntos de linhas paralelas, revelou-se algo mais difícil do que o esperado, para os alunos, o que sugere que a estrutura de tesselação (estrutura de malhas), embora não seja óbvia para eles, precisa ser aprendida. Mas a maneira de se operacionalizar esta aprendizagem parece estar imbricada a alguns fatores ligados ao comportamento cognitivo dos estudantes.

Clements e Stefhan (2004) investigaram quais atividades contribuem para que os alunos aprendam a noção de área, e concluíram: em primeiro lugar os alunos devem experimentar cobrir várias superfícies planas com uma unidade de medidas, percebendo que as regiões devem ser cobertas sem sobreposição das unidades entre si e sem lacunas entre elas; em segundo lugar, devem aprender a estrutura de malhas (matrizes), o que demonstrou ser um processo que demanda muito tempo, mas com resultados muito significativos; terceiro, os alunos devem aprender que o comprimento dos lados de um retângulo pode ser determinado pelo número de unidades em cada linha e o número de linhas na matriz; em quarto lugar – e isso geralmente é apropriado apenas nas séries intermediárias e mais avançadas – as crianças podem aprender a multiplicar as duas dimensões como um *atalho* para a determinação do número total de quadrados. (Clements e Stefhan, 2004)

A partir dos aportes desta última pesquisa (Clements e Stefhan, 2004), detacamos dois modos de proceder do professor, em sala de aula, que nos parecem suficientes para que se crie um campo favorável ao desenvolvimento

[8] A noção piagetiana de estágios de desenvolvimento cognitivo nos permite entender como a teoria de Piaget favorece uma *leitura pela falta*. Exemplificando isto, Lins (1999, p. 78) escreveu o que parece ser a fala de um professor fictício do ensino tradicional, em concordância com os pressupostos piagetianos: “eu, que já me desenvolvi (já aprendi), e que sei que você é igual a mim, posso ver o que falta em seu desenvolvimento, ver o que você ainda não é”.

cognitivo dos alunos, acerca das noções de área de figuras planas. O primeiro desses modos didáticos é a comparação de formas planas, envolvendo também decomposição e composição de figuras. O segundo modo é a associação das unidades de área às superfície a serem medidas, o que permite a estruturação das malhas de unidades, que também aceitamos como um processo cognitivo de moroso desenvolvimento e de difícil intervenção docente.

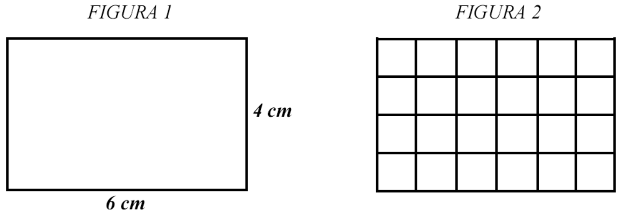
Clements e Stefhan (2004) ainda defendem que, para o desenvolvimento dos processos de aprendizagem de áreas, o professor não deve focar os procedimentos de cálculo, mas sim os significados que tais processos trazem para os alunos. Para estes pesquisadores, pode ser um exagero o argumento básico de Piaget, de que as crianças devem aprender antes a conservar comprimentos para que possam produzir sentido para os sistemas de medições, como as réguas (físicas) ou ferramentas computacionais. (Clements e Stefhan, 2004). Em nossa mais recente investigação acerca do tema ‘aprendizagem de área e perímetro’ (Henriques e Silva, 2012), tivemos como sujeitos de pesquisa alunos do 9º ano do Ensino Fundamental (Educação Básica) de duas escolas públicas da cidade de Juiz de Fora, Minas Gerais, Brasil; para a coleta de dados, utilizamos a videografia e também os registros escritos das alunas, em fichas que continham as tarefas; após a transcrição das entrevistas gravadas, analisamos as falas e escritas através do Método de Leitura Plausível (Silva, 2003). Procedimentos semelhantes a estes podem ser adotados em sala de aula, sobretudo ao trabalhar com registros escritos.

Ao nos lançarmos a elaborar tarefas educacionais (Henriques e Silva, 2012), tivemos ainda o objetivo de investigar o próprio processo de produção de tarefas que possuam determinadas características gerais, ou seja, tarefas que: *i)* estimulem a produção de significados dos alunos; *ii)* ampliem as possibilidades discentes de desenvolver e utilizar estratégias de resolução das tarefas; *iii)* possibilitem que vários elementos do pensamento matemático estejam em discussão, como a análise da razoabilidade dos resultados, a busca de padrões nas resoluções, o desenvolvimento de estratégias de resolução de problemas, etc.

A seguir, apresentaremos duas das tarefas utilizadas em nossa pesquisa de campo (Henriques e Silva, 2012) e seus objetivos específicos.

Tarefa 1

Os dois retângulos abaixo são iguais. Observe.



Considerando as Figuras 1 e 2, responda às seguintes perguntas:

a) Qual é a medida da área do retângulo?

b) Qual é a medida do perímetro do retângulo?

Figura 1. Tarefa 1 sobre e Perímetro

A Tarefa 1 do produto educacional, apresentada abaixo (Figura 1), foi elaborada para atender aos seguintes objetivos: permitir que o professor ou pesquisador identifique de que maneira o aluno opera ao pensar em área e perímetro (por exemplo, com a multiplicação de grandezas lineares ou com a contagem de unidades de área); vislumbramos a perspectiva de, através de uma intervenção orientada, fazer com que os sujeitos pensem e falem a partir das duas figuras, caso não o façam espontaneamente.

A produção de significados dos sujeitos de pesquisa para a Tarefa 1, além de demonstrar que tal tarefa pode revelar dificuldades de aprendizagem das noções de área e de perímetro, evidenciou que os sujeitos operam de maneiras diferentes. (Henriques e Silva, 2012)

A segunda tarefa que aplicamos foi a seguinte:

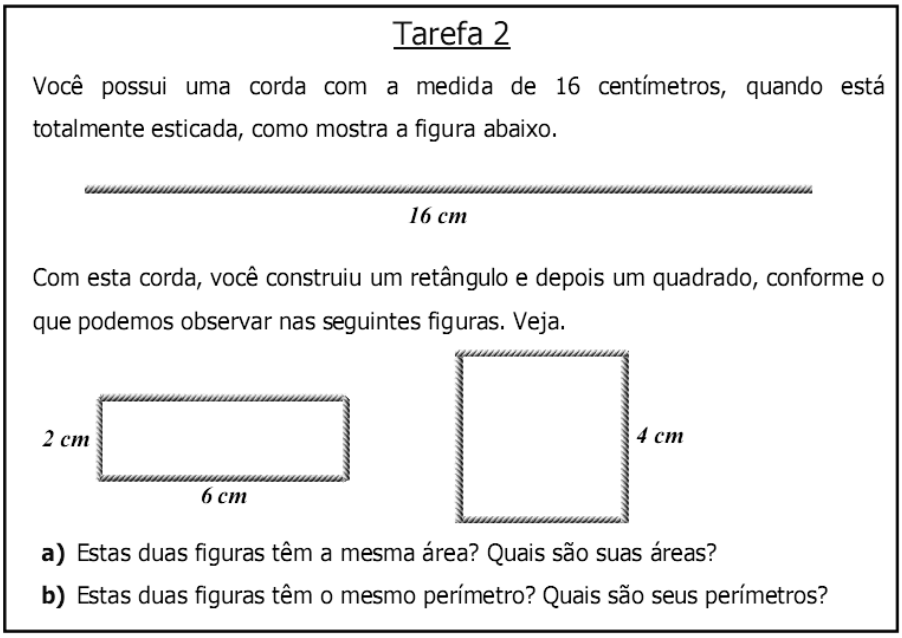


Figura 2. Tarefa 2 sobre e Perímetro

O principal objetivo da Tarefa 2 foi estimular os estudantes a explicitarem seus conhecimentos sobre perímetro, área e relação área-perímetro, segundo possíveis significados produzidos pelos sujeitos. Com esta tarefa (Figura 2), vislumbramos, ainda, a ideia de fixar o perímetro (com um exemplo que tenda ao físico, como uma corda, embora desenhada), com a intenção de gerar, nos sujeitos, o desconforto de obter medidas de área diferentes, para uma mesma medida de perímetro.

A partir da análise dos registros da aplicação da Tarefa 2, encontramos a confusão entre perímetro e área, reincidentemente, na produção de significados de um dos alunos, que parece considerar que as figuras foram feitas com a mesma corda e que, por esta razão, teriam áreas com mesma medida. Já outro sujeito de pesquisa opera com a noção multiplicativa de área, discordando daquela aluna quanto à semelhança das áreas das figuras dadas.

Toda a revisão de literatura, que fizemos em pesquisas anteriores (Henriques e Silva, 2012; Henriques, 2011) e que sintetizamos acima, permite-nos eleger elementos constituintes de tarefas geométricas elaboradas com o objetivo central de nos permitir identificar as dificuldades de aprendizagem de área e perímetro, desde que tais elementos sejam coerentes com os nossos pressupostos e objetivos. Ao sustentar esta desejável coerência no processo de desenvolvimento das tarefas, o Modelo dos Campos Semânticos é o referencial teórico que utilizamos em nossas investigações. Na seguinte seção, passaremos a explicitar este referencial e algumas consequências desta abordagem em nossas pesquisas e práticas.

3. Uma nova abordagem para dificuldades de aprendizagem em Geometria

A diferença fundamental que se estabelece entre as últimas pesquisas que realizamos (Henriques e Silva, 2009, 2012; Henriques, 2011) e todas as outras acima citadas – que também investigam um caminho para a solução das dificuldades de aprendizagem de perímetro e área – está na perspectiva que adotamos, a partir do nosso referencial teórico, o Modelo dos Campos Semânticos (MCS). Como veremos mais adiante, este referencial nos proporciona um olhar diferente das teorias piagetianas e do modelo de Van Hiele, que analisam os processos cognitivos pela falta[9], mas também diferente dos trabalhos baseados no arcabouço da Didática Francesa, na qual as caracterizações epistemológicas são distintas daquelas trazidas pelo modelo teórico que adotamos. Este modelo nos possibilita identificar quais significados cada sujeito produz, no interior de uma certa atividade, para um determinado objeto que está sendo constituído por este sujeito.

Outro diferencial importante está no fato de valorizarmos os significados não-matemáticos produzidos pelos alunos, na escola ou fora dela. E esta diferença parece ter maior relevo, quando explicitadas as possíveis consequências da legitimação (ou não) dos significados não matemáticos na escola, nas considerações de Lins e Gimenez (1997):

> É preciso que a escola tenha a dignidade de admitir que significados matemáticos são *mais um* modo de produzir significados, e não o único, e mais, que os significados matemáticos e os não-matemáticos são diferentes. Apenas assim, permitindo a legitimidade dos significados não-matemáticos na escola, poderemos aspirar à legitimidade dos significados matemáticos fora da escola. (Lins e Gimenez, 1997, p. 165)

Uma diferenciação semelhante a esta diz respeito ao caráter internalista da Matemática dos matemáticos, ou seja, aquele que a diferencia da Matemática do cotidiano, do cidadão comum. Para exemplificar, Lins (2004, p. 95) pondera que "quando o matemático define um objeto, não cabe a discussão de se esta definição corresponde bem ou mal a *algo* fora da própria matemática". É nesta direção que o MCS permite comparar e distinguir significados matemáticos e não-matemáticos.

Quanto à Geometria, é imensa a gama de informações e habilidades que os alunos levam às salas de aulas, fruto das suas experiências cotidianas, fora do

[9] Por exemplo, o modelo dos Campos Conceituais de G. Vergnaud, como ressalta Lins (2008, p.534).

ambiente escolar. Por exemplo, muitos daqueles que ajudam ou acompanham seus pais, nos trabalhos da construção civil, serão capazes de estimar uma quantidade de piso quadrangular, em metros quadrados, necessários para cobrir o chão de um determinado cômodo. Outro exemplo: os jovens com extraordinária habilidade para confeccionar papagaios. Mas de que forma pode a escola considerar legítimos os conhecimentos geométricos produzidos não-oficialmente?

A resposta a esta questão é dada por Lins e Gimenez (1997), quando afirmam que "a rua" não se caracteriza *a priori* pelas coisas que se faz na rua, mas sim por seus significados próprios; e seguem exemplificando:

> [...] não é "fazer papagaios (pipas)" que caracteriza a rua, e, sim, os significados (da rua) que se produza numa atividade que envolva aquela tarefa. Quando um arquiteto ou um físico fazem papagaios, é quase certo que os significados produzidos não sejam os mesmos, nem entre si nem com relação os produzidos pela criança na rua. O que queremos dizer com isso é que não basta trazer para a escola a tarefa para produzir com base nela apenas significados da escola. Qual o sentido de dizer "Vamos fazer papagaios!" com a intenção única de falar de simetria, triângulos, cálculo de hipotenusas e de áreas, e – pior ainda – para terminar fazendo o mesmo papagaio de sempre? Alguns dos significados básicos que os papagaios têm na rua estão ligados à beleza e ao equilíbrio. Porque não colocar o desafio de fazer um papagaio diferente *mas que seja tão bom quanto o comum*? Numa situação dessas, é preciso discutir e explicar: i) o que é que faz o papagaio comum funcionar; ii) qual é o "papagaio dos sonhos", o que envolve discussões sobre beleza, forma e tamanho. Num processo como esse, afirmações sobre a "geometria" do papagaio seriam feitas e possivelmente gerariam outras, abrindo-se a possibilidade da intervenção *legítima* do professor para trazer novas possibilidades. (Lins e Gimenez, 1997, p. 27)

Os pesquisadores (Ibidem, p. 27) asseguram que explorar o item (i) da citação acima, juntamente com uma intervenção legítima do professor, é o suficiente para que se constitua um conjunto de instrumentos que vão participar da organização da atividade de produzir novos papagaios. Desta forma, os alunos serão capazes de produzir, nessa atividade, significados matemáticos e não-matemáticos, que coexistirão e terão legitimidade comum.

Segundo o MCS, "conhecimento é entendido como uma crença – algo que o sujeito acredita e expressa, e que se caracteriza, portanto, como uma afirmação – junto com o que o sujeito considera ser uma justificação para a sua crença-afirmação" (Lins, 1993, p. 88). Esta concepção epistemológica está fortemente ligada à ideia, defendida por Lins (1999), de que conhecimento é algo do domínio da enunciação, entendendo-se que não há conhecimento, por exemplo, nos livros (objetos físicos), pois nestes há apenas enunciados.

Da caracterização de conhecimento, citada acima, decorre a noção de que diferentes justificações para uma mesma crença-afirmação constituem conhecimentos distintos (Lins, 1994). E a noção de conhecimento está ligada à noção de significados. De acordo com o MCS (Lins, 1999), *significado* é aquilo que o sujeito pode e efetivamente diz sobre um objeto, no interior de uma *atividade* – assumimos para este termo o sentido proposto por Leontiev (2006, p. 68). Assim, *produzir significados* é produzir ações enunciativas a respeito do objeto, no interior da atividade (Silva, 2003). Ao discutir os limites criados nos processos de produção de significados (LINS, 2001), o MCS permite que sejam tratadas as dificuldades de aprendizagem que os alunos apresentem.

O método de leitura dos processos cognitivos – criado a partir das noções-categorias do Modelo dos Campos Semânticos e que nos possibilita identificar as produções de significados dos alunos, no momento em que elas ocorrem – foi denominado *Método de Leitura Plausível* (Silva, 2003). Além de nos permitir uma leitura do outro através de suas legitimidades, a importância desse método reside no fato de nos possibilitar a interação com os sujeitos, de modo que consigamos intervir intencionalmente em sua produção de significados. Nisto consiste o processo de negociação de significados.

Os resultados de alguns de nossos estudos (Henriques, 2011; Henriques e Silva, 2009), baseados nos aportes do MCS, permitem-nos afirmar que é possível observar as dificuldades de aprendizagem de perímetro e área, através de tarefas geométricas com características específicas que tenham consonância com os pressupostos da produção de significados. Além disso, tais investigações colocaram em evidência que estudantes produzem diferentes significados para os mesmos objetos geométricos.

Em uma investigação recente (Henriques e Silva, 2012), projetamos produzir uma série de tarefas orientadas por objetivos e pressupostos teóricos bem definidos. No caminho de esboçar tal protótipo de tarefas, nosso principal interesse residiu em compreender como elaborar tarefas que permitam aos estudantes associarem os conhecimentos prévios aos novos conhecimentos que estão sendo produzidos pelos próprios estudantes. Em suma, através dessa pesquisa pudemos concluir que tarefas como essas podem tornar visíveis ao professor/pesquisador as dificuldades de aprendizagem de tal modo que, ao se tornarem objeto de atenção destes alunos, tais dificuldades possam ser superadas, a partir de intervenções de seu professor e de interações com seus colegas de classe.

4. Uma síntese e considerações finais

Com base na revisão de literatura empreendida acima e nos resultados de nossas pesquisas (Henriques e Silva, 2012; Henriques, 2011; Henriques e Silva, 2009), sintetizamos nosso posicionamento acerca das dificuldades de aprendizagem de perímetro e área, através dos seguintes tópicos:

- avaliamos que a principal dificuldade observada no processo de aprendizagem de área e de perímetro é a confusão que os alunos estabelecem entre estas grandezas geométricas, o que inclui a não dissociação entre suas medidas;
- aceitamos que o trabalho simultâneo com área e perímetro favorece a aprendizagem destas noções;
- admitimos o fato de que um sujeito saber calcular a área de um tipo de figura plana (um retângulo, por exemplo) não garanta que ele tenha aprendido a calcular a área de uma outra figura qualquer;
- concordamos com a afirmação (já muito bem endossada pelas pesquisas) de que a mudança de dimensão gera dificuldades na medição de certas grandezas, como comprimento e área de figuras planas;

- assumimos com válida a ideia de comparação entre objetos (figuras) mensuráveis para a aprendizagem de área e perímetro;
- atentamos para o fato de que a área de uma figura não é sempre reconhecida como uma de suas características (isto nos ajuda a pensar na gênese das possíveis dificuldades no processo cognitivo dos alunos que aprendem sobre perímetro e área);
- consideramos relevante o fato de muitos estudantes avaliarem que o aumento do perímetro de uma figura implica necessariamente em um aumento de sua área, e vice-versa;
- entendemos ser razoável considerar a estrutura de malhas (quadriculadas, triangulares, etc.) favorável à aprendizagem da noção multiplicativa de área, mas potencialmente geradora de dificuldades de aprendizagem, como aquelas citadas ao longo deste capítulo;
- damos foco para o caráter aditivo de área, a expressar-se na utilização de diferentes unidades de área e na decomposição e composição de figuras;
- não aceitamos as noções de concepções errôneas, de conhecimento *a priori* e de níveis de desenvolvimento do pensamento por faixa etária;
- não assumimos a necessidade de uma variedade de representações para o aprendizado de área e perímetro, mas sim de uma diversidade de experiências e de tarefas – que favoreçam a multiplicidade de significados produzidos pelos alunos – e também de intervenções docentes que objetivem a negociação destes significados.

Estes posicionamentos não são senão um ponto de partida para outros estudos, muito embora ampliem, para o professor que ensina sobre área e perímetro de figuras geométricas, o horizonte para compreensão do *modus operandi* de seus alunos e das dificuldades que surge na aprendizagem de tais temas.

Importa-nos ainda ressaltar que as tarefas que elaboramos em nossas investigações mais recentes (Henriques e Silva, 2012; Henriques, 2011) não se enquadram na categoria de tarefas de fixação de conteúdos, ou na tipologia de simples exercícios. Elas foram criadas com o objetivo de gerar situações que permitissem ao professor-pesquisador observar e entender os modos segundos os quais os estudantes operavam, ou seja, as maneiras pelas quais eles constituíam em objetos as noções de área e de perímetro. Ao modificar tal série de tarefas, reorganizá-la ou mesmo criar outras tarefas, para utilizá-las em sua sala de aula, o professor deve ter clareza de seus objetivos e estar atento à produção de significados dos alunos, dando-lhes possibilidades diversas de expressão, e intervindo quando julgar necessário, organizando a aplicação das tarefas sem a preocupação com critérios de categorização discente que envolvam juízo de valor.

Embora ainda outras pesquisas sejam necessárias para que possamos compreender melhor os processos cognitivos ligados à aprendizagem de área e perímetro, entendemos que as ações docentes de levantar tais dificuldades e intervir de modo orientado, a partir de uma série de tarefas elaboradas com este propósito, constituem um elemento-chave para que orientemos o nosso trabalho, em sala de aula, envolvendo tópicos de Geometria, de modo coerente com os pressupostos do Modelo dos Campos Semânticos.

Bibliografia

Abrantes, P.; Serrazina, L.; Oliveira, I. (1999). *A matemática na educação básica*. Lisboa: Ministério da Educação - Departamento de Educação Básica.

Alsina i Pastells, A. (2009). *Desenvolvimento de competências matemáticas com recursos lúdicos-manipulativos para crianças de 6 a 12 anos*. Trad. de Vera Lúcia de Oliveira Dittrich. Curitiba, Brasil: Base Editorial.

Baldini, L. A. F. (2004). *Construção do conceito de área e perímetro: uma seqüência didática com o auxílio do software de Geometria dinâmica*. Londrina, Brasil: Universidade Estadual de Londrina.

Baltar, P. M. (1996).*Enseignement et apprentissage de la notion d'aire de surfaces planes: une étuide del'acquisition des relations entre lês longueurs et les aires au collège.* Tese de Doutorado em Didática da Matemática. Université Joseph Fourier, Grenoble.

Battista, M. (2007).The development of Geometric and spatial thinking. In: F. K. Lester, Jr. (Ed.). *Second Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning.* NCTM/Information Age Publishing, pp.843-908. Charlotte, NC.

Bellemain, P. M. B. (2003).A aprendizagem das relações entre comprimento e área no ensino fundamental. In: Seminário Internacional de Pesquisa em Educação Matemática, 2., 2003, Santos. *Anais...* Santos, São Paulo.

Brasil. Ministério da Educação (2010).*Guia de Livros Didáticos: PNLD 2011: Matemática.* Brasília: Ministério da Educação. Secretaria de Educação Básica.

Brasil. Ministério da Educação (2008). *PDE: Plano de desenvolvimento da Educação: Prova Brasil: ensino fundamental: matrizes de referência, tópicos e descritores.* Brasília: MEC, SEB; INEP.

Brasil. Secretaria de Educação Fundamental (1998). *Parâmetros Curriculares Nacionais: Matemática.* (Terceiro e Quarto Ciclos). Brasília: MEC/SEF.

Brousseau, G. (1983).Les obstacles epistèmologiques et les problemes en mathématiques. *Recherches en Didactiques des Mathématiques*, v. 4, n. 2, p. 165-198. Grenoble: RDM.

Chamorro, M. C. (1997). *Estudio de las situaciones de enseñanza de la medida en la escuela elemental.* Doctoral thesis. Madrid: UNED.

Chappell, M.; Thompson, D. (1999).Perimeter or Area? Which measure is it? *Teaching Mathematics in the Middle School*, NTCM, v.1, n. 5, p. 20-23. Reston, VA.

Clements, D.; Stefhan, M. (2004). Measurement in Pre-K to Grade 2 Mathematics. In: Clements, D.; Sarama, J.; DiBiasi, A.-M. (Eds.). *Engaging Young Children in Mathematics: Standards for Early Childhood Mathematics Education, Lawrence Erlbaum Associates.* Mahwah, NJ. p. 299-320.

Costa, C. (2000). *Visualização, veículo para a educação em geometria.* Coimbra: Escola Superior de Coimbra. Disponível em: <http://www.spce.org.pt/sem/CC.pdf>. Acesso em: 12 mar. 2011.

D'Amore, B.; Fandiño Pinilla, M. I. (2006). Relationships between area and perimeter: beliefs of teachers and students. *Mediterranean journal for research in mathematics education* (Cyprus Mathematical Society). v. 5, n. 2. p.1-29. Nicosia, Cipro: Università di Cipro.

French, D. (2004). *Teaching and learning geometry.* London: Continuum.

Henriques, M. D. (2011). *Um estudo sobre a produção de significados de estudantes do ensino fundamental para área e perímetro.* 218 p. 2011. Dissertação (Mestrado Profissional em Educação Matemática) – Universidade Federal de Juiz de Fora, Juiz de Fora (MG).

Henriques, M. D.; Silva, A. M. (2012). Dificuldades de aprendizagem de área e perímetro na escola básica. In: *Simpósio de Educación Matemática*, 12, 2012. Chivilcoy. *Memorias…* Chivilcoy, Argentina: EDUMAT, v.1. p. 579-601. CD-ROM.

Henriques, M. D.; Silva, A. M. (2009). Significados producidos por estudiantes secundarios brasileños para área de figuras planas. In: Congreso Iberoamericano de Educación Matemática, 6., 2009, Puerto Montt. *Actas…* Puerto Montt, Chile: FISEM. v.1, p. 580-585.

Hernández, B. (2008). *Creative ideas for teaching area and perimeter: ideas for teaching math.* About.com. Disponível em: http://homeschooling.about.com/od/basicmath/qt/teachingarea.htm. Acesso em: 21/11/2009.

Houdement, C. (2007). Geometrical working space, a tool for comparison. In: Conference of The European Society for the Research of Mathematics Education, 5., 2007, Chipre. *Proceedings…* University of Cyprus. p. 972-981.

Houdement, C.; Kuzniak, A. (2003). Elementary geometry split into different geometrical paradigms. In: Congress of the European Society for Research in Mathematics Education, 3., 2003, Bellaria. *Proceedings…* Bellaria, Italy.

Hoyles, C.; Foxman, D.; Küchemann, D. (2002). *A Comparative Study of Geometry Curricula.* London: Qualifications and Curriculum Authority.

International Commission on Mathematical Instruction. (1994). *Perspectives on the teaching of geometry for the 21st century: Discussion document for an ICMI study,* L'Enseignement Mathématique, vol. 40, pp. 345-357. Catania, Italia: ICMI.

Jones, K. (2010). Linking geometry and algebra in the school mathematics curriculum. In: Usiskin, Z.; Andersen, K.; Zotto, N. (Eds.). *Future Curricular Trends in School Algebra and Geometry.* Charlotte, NC: Infoage. p. 203-216.

Jones, K. (2000). Critical Issues in the Design of the Geometry Curriculum. In: Barton B. (Ed.), *Readings in Mathematics Education.* Auckland, New Zealand: University of Auckland. p 75-90.

Jones, K; Mooney, C. (2003). Make Space for Geometry in Primary Mathematics. In: THOMPSON, I. (Ed.). *Enhancing Primary Mathematics Teaching,* London: Open University Press. p 3-15.

Kordaki, M. (2003). The effect of tools of a computer microworld on student's strategies regarding the concept of conservation of area. *Educational Studies in Mathematics*, n. 52, p. 177-209.

Kuhn, T. S. (1998). *A estrutura das revoluções científicas.* 5 ed. São Paulo: Perspectiva.

Lehrer, R. (2003). Developing understanding of measurement. In Kilpatrick, J.; Martin, W.; Schifter, D. (Eds.). *A Research Companion to Principles and Standards for School Mathematics*, Reston, VA: NCTM. p. 179-192.

Leontiev, A. N. (2006). Uma contribuição à teoria do desenvolvimento da psique infantil. In: Vigotsky, L. S. (Dir.), *Linguagem, desenvolvimento e aprendizagem.* São Paulo: Ícone. p. 59-83.

Lins, R. C. (2004). Matemática, monstros, significados e educação matemática. In: Bicudo, M.A.V. (Ed.). *Pesquisa em Educação Matemática: concepções e perspectivas.* São Paulo, Brasil: EDUNESP. p. 92-120.

Lins, R. C. (2001). The production of meaning for algebra: a perspective based on a Theoretical Model of Semantic Fields. In: Sutherland, R.; Rojano, T.; Bell, A.; Lins, R. (Eds.). *Perspectives on School Algebra.* Dordrecht, Holanda: Kluwer Academic Publishers. p. 37-60.

Lins, R. C. (1999). Por que discutir teoria do conhecimento é relevante para a Educação Matemática. In: Bicudo, M. A. V. (Org.). *Pesquisa em Educação Matemática: concepções e perspectivas.* São Paulo: Editora da UNESP.

Lins, R. C. (1997). Luchar por la supervivencia: la producción de significados. *UNO - Revista de Didáctica de las Matemáticas*, v. 1, n. 14, p. 39-46. Barcelona: Graó.

Lins, R. C. (1994). O modelo teórico dos campos semânticos: uma análise epistemológica da álgebra e do pensamento algébrico. *Revista Dynamis.* abril/junho. v.1, n. 7, p. 29-39. Blumenau: FURB.

Lins, R.C. (1993). Epistemologia, História e Educação Matemática: Tornando mais Sólidas as Bases da Pesquisa. *Revista de Educação Matemática da SBEM-SP*, Ano 1, n.1, São Paulo: SBEM-SP.

Lins, R. C.; Gimenez, J. (1997). *Perspectivas em aritmética e álgebra para o século XXI.* Campinas, Brasil: Editora Papirus (Coleção Perspectivas em Educação Matemática).

Lindquist, M. M.; Kouba, V. L. (1989). Measurement. In: Lindquist, M. M. (Ed.). *Results from the Mathematics Assessment of the Natonal Assessment Of Educational Progress.* Reston, Va: NCTM. p. 35-43

Lovis, K. A.; Franco, V. S. (2011). Geometria Hiperbólica: resistências e dificuldades em compreendê-la. In: Conferência Interamericana de Educação Matemática, 13., 2011, Recife. *Anais...* Recife, Brasil: UFPE.

Majmutov, M. I. (1983). *La enseñanza problémica***.** La Habana: Ed. Pueblo y Educación.

Malloy, C. E. (1999). Perimeter and Area Through the van Hiele Model.In: *Mathematics Theching in the Middle School*, vol. 5, n. 2, p. 87-90, NCTM.

Mammana, C.; Villani, V. (1998). *Perspectives on the Teaching of Geometry for the 21st Century: an ICMI study.* Netherlands: Kluwer Academic Publisher.

Martos, Z. G. (2002). *Geometrias não-euclidianas: uma proposta metodológica para o ensino de Geometria no Ensino Fundamental.* 147 p. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática). Rio Claro, Brasil: IGCE/UNESP.

Morris, R. (1986). *Studies in mathematics education volume 5: Geometry in schools.* Paris: Unesco.

NCTM - National Council of Teachers of Mathematics. (2007). *Princípios e Normas para a Matemática Escolar.* Lisboa: APM. (Trabalho original, em Inglês, publicado em 2000).

Nunes, T. (1995). Sistema de signos e aprendizagem conceptual. In: *Quadrante*, vol. 4, n. 1, p.7-24. Lisboa: APM.

Nunes, T.; Light, P.; Mason, J. (1993). Tools for thought: the measurement of length and area. *Learning and Instruction*, v. 3, n. 1, p. 39-54. Disponível em: <http://www.eric.ed.gov/ERICWebPortal/search>. Acesso em: 15 fev. 2010.

Owens, K; Outhred, L. (2006). The complexity of learning Geometry and Measurement. In: Gutiérrez, A.; Boero, P. (Eds.). *Handbook of Research on the*

Psychology of Mathematics Education: Past, Present and Future. Rotterdam: Sense Publishers. p.83-115.

Santos, C. A. B. (2008). *Formação de professores de matemática: contribuições de teorias didáticas no estudo das noções de área e perímetro.* 152 p. Dissertação (Mestrado em Ensino de Ciências e Matemática). São Paulo: Universidade Cruzeiro do Sul.

Silva, A. M. da (2003). *Sobre a dinâmica da produção de significados para a Matemática.* Tese (Doutorado em Educação Matemática). Rio Claro, Brasil: UNESP.

Skolverket (2008). *TIMSS 2007. Swedish Pupils' Mathematical Knowledge (Trends in International Mathematics and Science Study), an analysis.* (Report 323, 2008). Stockholm: Skolverket.

Teles, R. A. M. (2009). Um estudo sobre fórmulas de área em livros didáticos brasileiros. In: Congreso Iberoamericano de Educación Matemática, 6., 2009, Puerto Montt. *Actas...* Puerto Montt, Chile: FISEM. v.1., p. 499-504.

Usiskin, Z. (1994). Resolvendo os dilemas permanentes da geometria escolar. In: Lindiquist, M. E Shulte. A. P. *Aprendendo e ensinando geometria.* São Paulo: Atual. p.21-37. (Trad. Hygino H. Domingues).

Vergnaud, G. (2008). *Atividade humana e conceitualização.* Porto Alegre: Comunicação Impressa.

Veloso. E. (2000). *Geometria: temas actuais: materiais para professores.* Lisboa: Instituto de Inovação Educacional.

Vygotsky, L. S. (1994). *A formação Social da Mente.* São Paulo, Martins Fontes.

Yeo, J. K. H. (2008). Teaching Area and Perimeter: Mathematics-Pedagogical-Content Knowledge-in-Action. In: Annual Conference of the Mathematics Education Research Group of Australasia, 31., 2008. *Proceedings...* MERGA. p. 621-627.

Marcílio Dias Henriques. Professor do Instituto Estadual de Educação de Juiz de Fora (Minas Gerais, Brasil). Pesquisador do Núcleo de Investigação, Divulgação e Estudos em Educação Matemática da Universidade Federal de Juiz de Fora (UFJF). Primeiro secretário da Diretoria Regional Minas da Sociedade Brasileira de Educação Matemática (2010-2013). Possui Especialização em Educação Geométrica (UFJF/2008) e Mestrado em Educação Matemática pela UFJF (2011). mdhenriques@oi.com.br

Amarildo Melchiades da Silva. Professor do Departamento de Matemática da Universidade Federal de Juiz de Fora (Brasil). Pesquisador-coordenador do Núcleo de Investigação, Divulgação e Estudos em Educação Matemática da UFJF. Diretor da Sociedade Brasileira de Educação Matemática – Regional Minas (2010-2013). Possui Doutorado em Educação Matemática pela UNESP/Rio Claro (2003) e Pós-doutorado em Educação Matemática pela Rutgers University (2012). **xamcoelho@terra.com.br**

UNIÓN
REVISTA IBEROAMERICANA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA
www.fisem.org/web/union

ISSN: 1815-0640
Número 37. Marzo de 2014
páginas 57-70

Una clase de teoría de grupos usando progresiones aritméticas, geométricas y matrices cuadradas de orden impar

Joseph Francisco, Thais Arreaza, Edilmo Carvajal

Fecha de recepción: 3/04/13
Fecha de aceptación: 5/12/13

Resumen	La estructura de grupo es una noción importante en el aprendizaje del Álgebra. Con ella comienza la abstracción característica de todo sistema axiomático de la matemática. Este documento muestra una clase de grupo abeliano tomando en cuenta progresiones y matrices cuadradas de orden impar. Se utiliza este tipo de matrices porque al realizar ciertas operaciones con todos los elementos de la matriz, se obtiene su elemento central. Los autores siguen una secuencia lógica de pasos que facilitan la enseñanza y aprendizaje del tema tratado. **Palabras clave**: Enseñanza del álgebra, estructuras algebraicas, grupo.
Abstract	The group structure is an important concept in learning algebra. With this feature abstraction begins all axiomatic system of mathematics. This document shows a class of abelian group considering progressions and odd-order square matrices. Use these matrices to perform certain operations because all the elements of the matrix returns its central element. The authors follow a logical sequence of steps that facilitate the teaching and learning of the subject. **Keywords**: teaching algebra, algebraic structures, groups
Resumo	A estrutura do grupo é um conceito importante em aprender álgebra. Com essa abstração característica começa todo o sistema axiomático da matemática. Este documento mostra uma classe de grupo abeliano considerando progressões e estranha ordem matrizes quadradas. Usar estas matrizes para efectuar certas operações, porque todos os elementos da matriz de volta o seu elemento central. Os autores seguem uma seqüência lógica de passos que facilitam o ensino ea aprendizagem do sujeito. **Palavras-chave** Álgebra de ensino, estruturas algébricas, grupo.

1. Introducción

En la enseñanza de la matemática emergen situaciones que obstaculizan el aprendizaje de los contenidos propios de esta disciplina. Un aspecto característico del álgebra, es el alto nivel de abstracción en sus conceptos básicos, las dificultades conceptuales que esta rama representa para los estudiantes es significativa. En el Instituto Pedagógico de Caracas (IPC), en la asignatura Estructuras Algebraicas, ubicada en el cuarto semestre de la carrera de profesor de matemáticas se introducen los contenidos referentes al concepto de grupo. La noción de grupo se encuentra presente en muchas de las ramas de la matemática y, es necesario que los estudiantes manipulen las propiedades de dichos elementos, por esta razón deben tener consolidados algunos conocimientos previos, entre los cuales podemos señalar: la aritmética (manejo de sus operaciones y propiedades); nociones de conjuntos; sistemas numéricos (números reales y números complejos); transformaciones geométricas (traslaciones, rotaciones y reflexiones); álgebra matricial; nociones de cálculo (funciones, sucesiones, progresiones), entre otras. En los libros de textos sugeridos para este curso, se pueden ver ejemplos relacionando la noción de grupo con: matrices, propiedades aritméticas de los sistemas numéricos, nociones de cálculo, geometría, pero nos llama la atención que no lo hacen con las progresiones aritméticas o geométricas.

Específicamente en el curso de Estructuras Algebraicas los ejemplos trabajados son abstractos. La estructura de grupo es un sistema axiomático básico y fundamental de la matemática. No es fácil lograr que el estudiante adquiera rigurosidad, que generalice, que discrimine entre un concepto u otro, o entre varias operaciones realizadas sobre el mismo conjunto. Para que el estudiante demuestre que un conjunto cualquiera con una ley de composición interna definida sobre él, es un grupo, debe comprobar los axiomas de grupo y manejar los conocimientos previos antes señalados.

En este trabajo, veremos cómo relacionar matrices y progresiones aritméticas y geométricas a través de la noción de grupo abeliano. Los ejemplos y contraejemplos propuestos permitirán que los participantes aprendan a identificar si un conjunto con una ley de composición definida sobre él, es un grupo abeliano o no. Además, se incluyen "notas", donde los autores basados en su experiencia docente en el área de álgebra dan sugerencias de los aspectos que se deben enfatizar para facilitar la enseñanza y aprendizaje del tema tratado. Se presentan curiosidades relativas al calendario, los meses del año se pueden considerar como una de las matrices descritas en este trabajo.

La organización del artículo es como sigue: en la sección 2, se repasan los conceptos de ley de composición, ley de composición interna, definición de progresiones y se introduce la definición de grupo y de grupo abeliano; en la sección 3, se dan los pasos necesarios para probar que un conjunto con una ley de composición interna es un grupo y se hacen comentarios a cada uno de estos pasos; en la sección 4, se da un ejemplo de grupo utilizando un conjunto de matrices cuyos elementos se forman utilizando progresiones aritméticas; en la sección 5, se da otro ejemplo de grupo, pero utilizando un conjunto de matrices cuyos elementos se forman utilizando progresiones geométricas y; finalmente, se dan conclusiones y la bibliografía.

2. Grupos y progresiones

Definición 1: Una ley de composición interna (binaria) sobre un conjunto A, que denotaremos por *, es una regla que asocia a dos elementos x, y de A un elemento de A, que notamos por x*y.

Ejemplo 1: La suma usual de números naturales es una ley de composición interna binaria. Aquí, A=N y dados m, n números naturales tenemos m*n=m+n es un número natural.

Para un conjunto A y una ley de composición interna * resulta interesante comprobar si satisface alguna de las siguientes propiedades:

i) Elemento neutro: Un elemento y en el conjunto A es llamado elemento neutro bajo * si para cualquier elemento x de A se tiene x*y=x=y*x.

ii) Elemento inverso: Un elemento z en el conjunto A es el inverso bajo * de un elemento x en A si se tiene x*z=y=z*x, donde y es el elemento neutro de i).

iii) Asociativa: La operación * satisface la propiedad asociativa, si para cualesquiera x, y, z en A se cumple (x*y)*z=x*(y*z).

iv) Conmutativa: La operación * satisface la propiedad conmutativa, si para cualesquiera x, y en A se cumple x*y=y*x.

Nota1:

- Cuando existen los elementos neutro e inverso en un conjunto para una ley de composición interna estos son únicos.

- La existencia de elementos neutro e inverso depende del conjunto A y la ley de composición interna *. Puede darse el caso que para un conjunto A y dos leyes de composición interna sobre A se tengan distintos elementos neutro e inverso.

- La existencia de elemento inverso depende de la existencia de elemento neutro, es decir, primero se debe garantizar la existencia de elemento neutro para luego garantizar la existencia de elemento inverso (en la comprobación, seguir este orden es importante).

Definición 2: Si un conjunto A, y una ley de composición interna * sobre A satisfacen las propiedades i), ii) y iii) decimos que (A,*) es un grupo, y si además satisface la propiedad iv), decimos que (A,*) es un grupo abeliano o conmutativo.

Definición 3: Una progresión aritmética es una sucesión en la que cada término, después del primero, se obtiene agregando al término anterior una cantidad constante llamada razón de la progresión. En una progresión aritmética se tiene:

$$a_n=a_1+(n-1)r,$$

siendo a_n el término n-ésimo, a_1 es el primer término y r es la razón de la progresión.

Definición 4: Una progresión geométrica es una sucesión en la que cada término, después del primero, se obtiene multiplicando al término anterior por una cantidad constante llamada razón de la progresión. En una progresión geométrica se tiene:

$$a_n=a_1r^{(n-1)}$$

siendo a_n el termino n-ésimo, a_1 es el primer termino y r es la razón de la progresión.

Si la sucesión tiene un número finito de términos se dice que la progresión es finita.

3. Pasos para comprobar si (A,*) es un grupo:

p1. Establecer los elementos que conforman el conjunto A sobre el cual se va a trabajar, es decir, el estudiante debe estar claro en cuales elementos forman el conjunto A, cuales son las características que comparten estos elementos y que permiten distinguir para un objeto dado si pertenece o no al conjunto A.

p2. Establecer la ley de composición (binaria) entre elementos del conjunto. El estudiante debe entender lo que hace la ley de composición con un par de elementos del conjunto A, en esta parte es necesario que tome elementos específicos y aplique la ley de composición definida. Es decir, debe tener dominio operacional sobre los elementos del conjunto dado y la ley de composición interna definida.

Nota 2: Estos dos pasos son los que representan mayor inconveniente a los estudiantes al momento de comprobar si para un conjunto dado y una ley de composición interna definida sobre éste se tiene una estructura de grupo. A este punto los estudiantes no reconocen y no saben operar con los elementos del conjunto.

p3. Probar que la ley de composición es una ley de composición interna, es decir, probar que la operación es cerrada (si consideramos dos elementos de un conjunto al aplicar la ley de composición sobre estos elementos se produce un elemento del conjunto, en otras palabras, el elemento obtenido al aplicar la ley de composición interna es un elemento de la misma naturaleza de los elementos tomados inicialmente).

p4. Probar la existencia de elemento neutro en el conjunto dado bajo la ley de composición definida.

p5. Probar la existencia de elemento inverso en el conjunto dado bajo la ley de composición definida.

p6. Verificar que los elementos del conjunto dado bajo la ley de composición interna dada cumplen la propiedad asociativa.

Pasos para comprobar si (A,*) es un grupo abeliano:

Todos los anteriores y además:

p7. Verificar que los elementos del conjunto dado bajo la ley de composición interna dada cumplen la propiedad conmutativa.

A continuación, ilustramos los pasos descritos anteriormente para comprobar si (A,*) es un grupo, para ello trabajaremos en un conjunto A formado por matrices relacionadas con progresiones aritméticas o geométricas.

4. Trabajando la noción de grupo con matrices y progresiones aritméticas

Estamos interesados en definir una ley de composición relacionada con la suma de números complejos, la suma usual de matrices y las progresiones aritméticas.

4.1. El conjunto MC3

p1 Estableciendo el conjunto con el que se va a trabajar:

Las matrices que vamos a tratar en las secciones siguientes son matrices cuadradas, es decir, de tamaño nxn y también se pueden llamar matrices de orden n. Consideremos las matrices de orden 3:

$$A = \begin{pmatrix} a & a+b & a+2b \\ a+c & a+b+c & a+2b+c \\ a+2c & a+b+2c & a+2b+2c \end{pmatrix}$$

cuyos elementos en sus filas y columnas son progresiones aritméticas de razón b y c respectivamente, con a como el elemento en la posición (1,1) y con a,b,c números complejos. A estas matrices las notamos por $M_3(a,b,c)$ ya que estos elementos las caracterizan completamente. Al conjunto formado por estas matrices lo notaremos por MC_3. Se tiene que cada matriz de MC_3 es un elemento del conjunto de las matrices de orden 3 con entradas en los números complejos, el cual denotaremos como $Mat_3(C)$.

Ejemplo 2:

1. Considere la matriz $M_3(1,-1,3)$ de manera que

$$M_3(1,-1,3)=\begin{pmatrix}1 & 0 & -1\\ 4 & 3 & 2\\ 7 & 6 & 5\end{pmatrix}$$

   Observe que $M_3(1,-1,3)$ es una matriz que cumple con las propiedades que definen MC_3.

2. Considere la matriz $M_3(-\frac{1}{2},-1,\frac{1}{2})$ de manera que:

$$M_3(-\tfrac{1}{2},-1,\tfrac{1}{2})=\begin{pmatrix}-\frac{1}{2} & -\frac{3}{2} & -\frac{5}{2}\\ 0 & -1 & -2\\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{3}{2}\end{pmatrix}$$

   Además, las matrices MC_3 tienen la siguiente propiedad: Si consideramos la suma de los elementos de la matriz $M_3(a,b,c)$ se tiene:
   a+a+b+a+2b+a+c+a+2c+a+b+c+a+2b+c+a+2c+b+a+2b+2c=9a+9b+9c=9(a+b+c)
   y luego si dividimos este resultado entre el cuadrado del orden de la matriz da como resultado a+b+c, el elemento que ocupa la posición (2,2) de la matriz M_3(a, b, c).

3. Para la matriz M_3(1,-1,3) se tiene 0+1+2+3+4+5+6+7-1=27 que dividido entre el cuadrado del orden de la matriz da 3 y es el elemento que ocupa la posición (2,2) de la matriz dada.

4. Los elementos de la matriz $M_3(-\frac{1}{2},-1,\frac{1}{2})$ son fracciones. Sumando los elementos tenemos $-\frac{1}{2}+(-\frac{3}{2})+(-\frac{5}{2})+0+(-1)+(-2)+\frac{1}{2}+(-\frac{1}{2})+(-\frac{3}{2})=-\frac{9}{2}+(-3)+(-\frac{3}{2})=-9$ y dividiendo este resultado entre el cuadrado del orden de la matriz se tiene -1.

5. Algunas de las matrices M_3(a,b,c) se pueden interpretar como partes del calendario de un mes cualquiera. Consideremos la matriz M_3(1,1,7), es decir, la matriz

$$M_3(1,1,7)=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 8 & 9 & 10\\ 15 & 16 & 17\end{pmatrix}$$

Revisando el calendario del mes de septiembre del año 2013 y comparándolo con la matriz anterior se observa que los elementos de la matriz M_3(1,1,7) están ubicados en la esquina superior izquierda de dicho mes.

Consideremos el conjunto MB_3 como el conjunto de las matrices de orden 3 que cumple que al sumar todos sus elementos y dividirlos por el cuadrado del orden de la matriz da el elemento central.

Se debe tener cuidado en pensar que los conjuntos MB_3 y MC_3 son iguales. El conjunto MC_3 está contenido en el conjunto MB_3, sin embargo, MB_3 no está contenido en MC_3.

El siguiente ejemplo muestra una matriz en la que el elemento de la posición (2,2) es el resultado de sumar todas las entradas de la matriz y luego dividirlo entre el cuadrado de su orden, pero sus elementos no siguen progresiones aritméticas en sus filas y columnas.

Ejemplo 3: En la matriz: $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 3 & 0 \end{pmatrix}$

la suma de sus elementos da 9 que dividido entre 3^2 da 1, el elemento en la posición (2,2), pero no es una de las matrices M_3(a,b,c) para algunos a,b,c $\in$ C.

p2 y p3 Definiendo la ley de composición y probando que es una ley de composición interna:

Consideremos ahora la matriz $M_3(d,e,f)=\begin{pmatrix} d & d+e & d+2e \\ d+f & d+e+f & d+2e+f \\ d+2f & d+e+2f & d+2e+2f \end{pmatrix}$

Al sumar las matrices M_3(a, b, c) y M_3(d, e, f) se obtiene la matriz M_3(a+d, b+e, c+f). En efecto,

$$M_3(a,b,c)+M_3(d,e,f)=\begin{pmatrix} a & a+b & a+2b \\ a+c & a+b+c & a+2b+c \\ a+2c & a+b+2c & a+2b+2c \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} d & d+e & d+2e \\ d+f & d+e+f & d+2e+f \\ d+2f & d+e+2f & d+2e+2f \end{pmatrix}$$

$$M_3(a,b,c)+M_3(d,e,f)=\begin{pmatrix} (a+d) & (a+d)+(b+e) & (a+d)+2(b+e) \\ (a+d)+(c+f) & (a+d)+(b+e)+(c+f) & (a+d)+2(b+e)+(c+f) \\ (a+d)+2(c+f) & (a+d)+(b+e)+2(c+f) & (a+d)+2(b+e)+2(c+f) \end{pmatrix}$$
$$=M_3(a+d,b+e,c+f)$$

Observe que al sumar dos matrices del conjunto MC_3, el resultado es de nuevo una matriz del conjunto MC_3. De aquí, tenemos que la suma de matrices de la forma M_3(a,b,c) es cerrada.

Ejemplo 4:

1. La suma de las matrices M_3(1,-1,3) y M_3(-$\frac{1}{2}$,-1, $\frac{1}{2}$) es la matriz

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{3}{2} & -\frac{7}{2} \\ 4 & 2 & 0 \\ \frac{15}{2} & \frac{11}{2} & \frac{7}{2} \end{pmatrix}$$

es decir, la matriz M_3($\frac{1}{2}$,-2, $\frac{7}{2}$).

2. Si consideramos las matrices

$$M_3(-\tfrac{1}{2},-\tfrac{1}{2},\tfrac{1}{2})=\begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & -1 & -\frac{3}{2} \\ 0 & -\frac{1}{2} & -1 \\ \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad M_3(\tfrac{1}{3},-\tfrac{1}{3},\tfrac{1}{2})=\begin{pmatrix} \frac{1}{3} & 0 & -\frac{1}{3} \\ \frac{5}{6} & \frac{1}{2} & \frac{1}{6} \\ \frac{8}{6} & 1 & \frac{4}{6} \end{pmatrix}$$

la suma de estas dos matrices es la matriz: $M_3(-\frac{1}{6},-\frac{5}{6},1)=\begin{pmatrix} -\frac{1}{6} & -1 & -\frac{11}{6} \\ \frac{5}{6} & 0 & -\frac{5}{6} \\ \frac{11}{6} & 1 & \frac{1}{6} \end{pmatrix}$

p4 Obteniendo el elemento neutro bajo la ley de composición interna definida:

Del trabajo que hemos realizado con matrices en álgebra lineal tenemos que la matriz nula de orden 3 es la matriz $0_3=M_3(0,0,0)$. Es decir,

$$M_3(0,0,0)=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$$

y satisface la propiedad que $M_3(0,0,0)+M_3(a,b,c)=M_3(a,b,c)$ para cualquier matriz $M_3(a,b,c)$.

p5 Obteniendo el elemento inverso bajo la ley de composición interna definida:

Para la matriz $M_3(a,b,c)$ consideramos la matriz $M_3(-a,-b,-c)$. Es decir,

$$M_3(-a,-b,-c)=\begin{pmatrix}-a&-a-b&-a-2b\\-a-c&-a-b-c&-a-2b-c\\-a-2c&-a-b-2c&-a-2b-2c\end{pmatrix}$$

con la propiedad que $M_3(a,b,c)+M_3(-a,-b,-c)=M_3(0,0,0)=0_3$.

Además, se tiene $M_3(-a,-b,-c)= -M_3(a, b, c)$.

p6 y p7 Comprobando las propiedades asociativa y conmutativa para la ley de composición interna definida:

Observe que la ley de composición interna definida es la suma usual de matrices de orden 3, de la cual sabemos que satisface las propiedades asociativa y conmutativa.

De lo anterior, tenemos la siguiente

Proposición 1: El conjunto $MC_3=\{M_3(a,b,c) \in Mat_3(C)\}$ junto con la suma usual de matrices de orden 3 es un grupo abeliano.

4.2. El conjunto MC4

Consideremos ahora el caso particular de las matrices cuadradas de orden 4, cuyos elementos siguen progresiones aritméticas tanto en filas como en columnas. ¿Se cumplirá que la suma de los elementos de la matriz dividido entre el cuadrado de su orden da el elemento de la posición central de la matriz?

A continuación trabajaremos el siguiente

Ejemplo 5: Sea la matriz de orden 4: $\begin{pmatrix}1&2&3&4\\8&9&10&11\\15&16&17&18\\22&23&24&25\end{pmatrix}$

cuyos elementos en sus filas y columnas son progresiones aritméticas. A esta matriz la denotamos $M_4(1,1,7)$ como en el caso de las matrices de orden 3. Observe que en esta matriz, cuyo orden es par, no se obtiene un elemento central como sucede en el caso de las matrices de orden 3.

Una curiosidad acerca de este ejemplo es que revisando el calendario del mes de septiembre y la anterior matriz observamos que los elementos de $M_4(1,1,7)$ están ubicados en la esquina superior izquierda de dicho calendario.

De lo anterior, podemos afirmar que en las matrices cuadradas cuyos elementos en sus filas y columnas son progresiones aritméticas y su orden es par, no se cumplen las propiedades trabajadas en $M_3(a,b,c)$.

4.3 El conjunto MC5

A continuación invitamos a los participantes a comprobar que para las matrices $M_5(a,b,c)$, se satisfacen las propiedades probadas en las matrices $M_3(a,b,c)$. Sería conveniente comprobar mediante una generalización, que dichas propiedades están presentes en las matrices $M_n(a,b,c)$ para n impar.

4.4 Generalizando: MCn, con n impar

Una de las etapas cruciales en álgebra es la generalización de situaciones particulares.

Matrices de la forma Mn(a,b,c), con n impar.

En lo que sigue trabajaremos con la descripción general de las matrices $M_n(a,b,c)$.

En vista que las matrices $M_n(a,b,c)$ siguen progresiones aritméticas tanto en filas como en columnas, se tiene que la posición i, j de dichas matrices está dada por a+(j-1)b+(i-1)c. De manera que consideremos matrices $M_n(a,b,c)=(m_{ij})$ donde $m_{ij}=a+(j-1)b+(i-1)c$ con i=1,2,…, n, y j=1,2,…, n con n entero positivo impar y a,b,c $\in$ C.

Al conjunto de matrices $M_n(a,b,c)$ lo denotaremos por MC_n en analogía con el caso de la matrices de orden 3. Una vez que tenemos una expresión para las matrices $M_n(a,b,c)$ probaremos que la suma usual de matrices es una ley de composición interna sobre el conjunto MC_n.
A continuación probaremos que sumando los elementos de la matriz $M_n(a,b,c)$ con n entero positivo impar, y dividiendo este resultado entre el cuadrado del orden de la matriz nos da la posición central de ésta. Para la matriz $M_n(a,b,c)$ la posición central esta dada por $m_{\frac{n+1}{2}\frac{n+1}{2}}$.

$$\frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}m_{ij}=\frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}a+(j-1)b+(i-1)c=\frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n}na+\frac{n(n+1)}{2}b-nb+n(i-1)c$$

$$=\frac{1}{n^2}[\ n^2a+\frac{n^2(n+1)}{2}b-n^2b+\frac{n^2(n+1)}{2}c-n^2c\ ]=\frac{1}{n^2}[\ n^2(a+\frac{(n-1)}{2}b+\frac{(n-1)}{2}c)\ ]\ n \text{ es impar}$$

$$=m_{\frac{n+1}{2}\frac{n+1}{2}}$$

Consideremos la matriz $M_n(e,f,h)=(n_{ij})$ donde $n_{ij}=e+(j-1)f+(i-1)h$ con i=1,2,…, n, j=1,2,…, n con n entero positivo impar y e,f,h$\in$ C.

Tenemos que:

$$M_n(a,b,c)+M_n(e,f,h)=(m_{ij})+(n_{ij})=(m_{ij}+n_{ij})=(a+(j-1)b+(i-1)c+e+(j-1)f+(i-1)h)=$$
$$((a+e)+(j-1)(b+f)+(i-1)(c+h))=M_n(a+e,b+f,c+h).$$

Es fácil probar que la matriz $0_n(0,0,0)$ es el elemento neutro de MC_n, y para la matriz $M_n(a,b,c)$ se tiene la matriz $M_n(-a,-b,-c)=-M_n(a,b,c)$ como elemento inverso.

La asociatividad y conmutatividad se siguen de la suma usual de matrices de orden n. De lo que hemos hecho hasta el momento tenemos la siguiente

Proposición 2: Las matrices $M_n(a,b,c)$, n entero positivo impar, con la suma usual de matrices es un grupo abeliano con elemento neutro $0=0_n(0,0,0)$, y para la matriz $M_n(a,b,c)$ se tiene la matriz $M_n(-a,-b,-c)=-M_n(a,b,c)$ como elemento inverso.

El siguiente corolario es inmediato:

Corolario 1: Las matrices $M_n(a,b,c)$, n entero positivo impar, con la suma usual de matrices es un subgrupo del grupo de las matrices de orden n, n entero positivo impar, bajo la suma usual de matrices.

Nota 3: Comenzamos trabajando el caso particular de matrices de ordenes 3, 4 y 5 para luego pasar a generalizar los resultados obtenidos en el caso de matrices de orden n. Este proceso de lo particular a lo general se omite con frecuencia en los libros de texto que involucran el tema de grupos. También suele pasar en los ejemplos y ejercicios aplicados por los docentes en los cursos de álgebra abstracta. Para muchos estudiantes resulta un inconveniente que la mayoría de textos omitan las pruebas en casos particulares que orientarían la prueba en el caso general. Esta es una actividad que debe realizar el docente en su trabajo con los estudiantes y estos a su vez en su trabajo individual con el fin de obtener material concreto que facilite el proceso de generalización tan frecuente en estas asignaturas.

4.5 Multiplicación usual de matrices sobre el conjunto de las matrices MC3

Veamos que sucede en el caso de las matrices MC_3 con la multiplicación usual definida sobre ellas. De álgebra lineal sabemos multiplicar estas matrices. Para tal fin consideremos los siguientes casos particulares

$$M_3(-2,-1,1)=\begin{pmatrix}-2 & -3 & -4\\ -1 & -2 & -3\\ 0 & -1 & -2\end{pmatrix} \text{ y } M_3(3,1,-1)=\begin{pmatrix}3 & 4 & 5\\ 2 & 3 & 4\\ 1 & 2 & 3\end{pmatrix}$$

el producto de estas dos matrices es la matriz

$$\begin{pmatrix}-16 & -25 & -34\\ -10 & -16 & -22\\ -4 & -7 & -10\end{pmatrix}$$

Notamos que:

i) Al sumar los elementos de la matriz no se cumple la propiedad que define las matrices $M_3(a,b,c)$, es decir, las filas y columnas de la matriz no son progresiones aritméticas de una razón dada, ni tampoco la suma de todos sus elementos dividida entre el orden de la matriz al cuadrado es el término central.

ii) Esta matriz no corresponde a la matriz $M_3(-6,-1,-1)$.

Por tanto, bajo el producto usual de matrices dicha operación no es una ley de composición interna en MC_3.

5. Trabajando la noción de grupo con matrices y progresiones geométricas

Ahora estamos interesados en definir una ley de composición relacionada con la multiplicación de números complejos, las progresiones geométricas y las matrices cuadradas de tamaño impar.

En la parte anterior de este escrito vimos que las matrices de la forma $M_3(a,b,c)$ no conservan las propiedades que la definen cuando se considera el producto usual de estas matrices. En lo que sigue introducimos un conjunto de matrices y una operación que preserva las propiedades que lo definen.

p1 Estableciendo el conjunto con el que se va a trabajar:

1. Consideremos las matrices de orden 3:

$$A=\begin{pmatrix} a & ab & ab^2 \\ ac & abc & ab^2c \\ ac^2 & abc^2 & ab^2c^2 \end{pmatrix}$$

es decir, las matrices cuyos elementos en sus filas y columnas siguen progresiones geométricas de razón b y c respectivamente, con elemento a en la posición (1,1), donde $a,b,c \in$ C. A estas matrices las notamos por $P_3(a,b,c)$ ya que estos elementos las caracterizan completamente. Al conjunto de todas las matrices $P_3(a,b,c)$ lo notaremos por P_3, es decir, $P_3=\{P_3(a,b,c) \mid a,b,c \in C\}$.

Ejemplo 6:
1. Considere la matriz $P_3(2,-1,3)$ de manera que

$$P_3(2,-1,3)=\begin{pmatrix} 2 & -2 & 2 \\ 6 & -6 & 6 \\ 18 & -18 & 18 \end{pmatrix}$$

Las matrices $P_3(a,b,c)$ tienen la siguiente propiedad: Si consideramos el producto de los elementos de la matriz $P_3(a,b,c)$ se tiene $a^9b^9c^9=(abc)^9$ donde abc es el elemento de la matriz $P_3(a,b,c)$ en la posición (2,2) después de calcular la raíz novena de este producto.

Consideremos el conjunto PB_3 como el conjunto de las matrices de orden 3 que cumplen que al multiplicar todos sus elementos y calcular su raíz novena da el elemento central..

Se debe tener cuidado en que los conjuntos PB_3 y P_3 son iguales. Podríamos demostrar que el conjunto P_3 esta contenido en PB_3, sin embargo PB_3 no esta contenido en P_3. Veremos a continuación que no toda matriz en la que el elemento de la posición (2,2) sea el resultado de multiplicar todas las entradas de la matriz, sus elementos siguen progresiones geométricas en sus filas y columnas. El siguiente ejemplo nos lo muestra.

Ejemplo 7: La matriz $A=\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 2 & \frac{1}{3} \\ 3 & 1 & \frac{1}{4} \\ 5 & 4 & \frac{1}{5} \end{pmatrix}$ satisface la propiedad anterior, pero A no es una de las matrices $P_3(a,b,c)$ para algunos $a,b,c \in$ C.

p2 y p3 Definiendo la ley de composición y probando que es una ley de composición interna:

Consideremos ahora la matriz

$$P_3(d,e,f)=\begin{pmatrix} d & de & de^2 \\ df & def & de^2 f \\ df^2 & def^2 & de^2 f^2 \end{pmatrix}$$

Definiendo la operación * entre las matrices $P_3(a,b,c)$ y $P_3(d,e,f)$ de la siguiente manera:

$$\begin{pmatrix} a & ab & ab^2 \\ ac & abc & ab^2c \\ ac^2 & abc^2 & ab^2c^2 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} d & de & de^2 \\ df & def & de^2 f \\ df^2 & def^2 & de^2 f^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ad & ad(be) & ad(be)^2 \\ ad(cf) & ad(be)(cf) & ad(be)^2(cf) \\ ad(cf)^2 & ad(be)(cf)^2 & ad(be)^2(cf)^2 \end{pmatrix}$$

De esto queda claro que $P_3(a,b,c)*P_3(d,e,f)=P_3(ad,be,cf)$

p4 Obteniendo el elemento neutro bajo la ley de composición interna definida:

El elemento neutro para esta operación es la matriz de orden 3 donde cada entrada es 1, es decir,

$$1_3 = P_3(1,1,1) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

y satisface la propiedad que $P_3(1,1,1)*P_3(a,b,c)=P_3(a,b,c)=P_3(a,b,c)*P_3(1,1,1)$ para cualquier matriz $P_3(a,b,c)$.

p5 Obteniendo el elemento inverso bajo la ley de composición interna definida:

Para garantizar que la matriz $P_3(a,b,c)$ tenga una matriz $P_3(e,f,g)$ tal que $P_3(a,b,c)*P_3(e,f,g)=P_3(1,1,1)=P_3(e,f,g)*P_3(a,b,c)$ basta imponer la condición $a,b,c \in C^*$. En este caso se tiene además que $P_3(e,f,g)=P_3(a^{-1},b^{-1},c^{-1})$. Como la matriz anterior $P_3(e,f,g)$ es única la notaremos por $P_3^{-1}(a,b,c)$ de donde $P_3^{-1}(a,b,c)=P_3(a^{-1},b^{-1}, c^{-1})$.

La condición colocada anteriormente de que $a,b,c\in C^*$ se debe a que para matrices como

$$P_3(2,0,3) = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 6 & 0 & 0 \\ 18 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

no existe una matriz $P_3(a,b,c)$ con $a,b,c\in C$ tal que $P_3(2,0,3)*P_3(a,b,c)=P_3(1,1,1)$, pues en caso de existir tal matriz al realizar la operación * sobre estas matrices y hacer la igualación elemento a elemento se tendría, 0=1.

En vista de lo presentado, es necesario considerar otro conjunto y en lugar de considerar el conjunto P_3 utilizaremos el conjunto $PC_3= \{P_3(a,b,c) \in Mat_3(C^*)\}$ para asegurar que todo elemento tiene elemento inverso. Además, la ley de composición interna con que se trabaja en este conjunto es la misma de P_3, al igual que el elemento neutro.

p6 y p7 Comprobando las propiedades asociativa y conmutativa para la ley de composición interna definida:

Observe que la ley de composición interna definida depende del producto usual de números complejos del cual sabemos que satisface las propiedades asociativa y conmutativa.

De lo anterior tenemos la siguiente

Proposición 3: Si consideramos el conjunto $PC_3 = \{P_3(a,b,c) \in Mat_3(C^*)\}$ tenemos que PC_3 es un grupo abeliano bajo la operación *, con elemento neutro la matriz $P_3(1,1,1)$ y para la matriz $P_3(a,b,c)$ se tiene $P_3^{-1}(a,b,c)=P_3(a^{-1},b^{-1},c^{-1})$ como elemento inverso.

En álgebra lineal, pudimos calcular el determinante de una matriz cuadrada. ¿Cuál es el determinante de la matriz $P_3(a,b,c)$?

$$\det P_3(a,b,c) = \det\begin{pmatrix} a & ab & ab^2 \\ ac & abc & ab^2c \\ ac^2 & abc^2 & ab^2c^2 \end{pmatrix} = a(ab)(ab)^2 \det\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ c & c & c \\ c^2 & c^2 & c^2 \end{pmatrix} = 0$$

Utilizando propiedades conocidas de los determinantes: i) extraer un escalar de una columna no altera el valor del determinante; ii) el determinante de una matriz con dos columnas iguales es nulo.

Nota 4: Tenemos una matriz que es invertible bajo la ley de composición interna * cuyo determinante es nulo.

A continuación, invitamos a los participantes a comprobar que para las matrices $P_5(a,b,c)$, se satisfacen las propiedades probadas en las matrices $P_3(a,b,c)$.

Podemos afirmar que en las matrices cuadradas cuyos elementos en sus filas y columnas son progresiones geométricas y su orden es par, no se cumplen las propiedades trabajadas en $P_3(a,b,c)$. Sin embargo, para las matrices $P_3(a,b,c)$ y $P_5(a,b,c)$ si se cumplen. Sería conveniente comprobar mediante una generalización, que dichas propiedades están presentes en las matrices $P_n(a,b,c)$ para n impar.

Generalizando:

En lo que sigue haremos la generalización de las anteriores situaciones particulares.

Matrices de la forma Pn(a,b,c), con n impar.

En lo que sigue trabajaremos con la descripción general de las matrices $P_n(a,b,c)$. En vista que las matrices $P_n(a,b,c)$ siguen progresiones geométricas tanto en filas como en columnas, se tiene que la posición i, j de dichas matrices esta dada por $ab^{j-1}c^{i-1}$. De manera que consideremos matrices $P_n(a,b,c)=(m_{ij})$ donde $m_{ij}= ab^{j-1}c^{i-1}$ con $i=1,2,\ldots, n$, y $j=1,2,\ldots, n$ con n entero positivo impar y $a,b,c \in C^*$.

Al conjunto de matrices $P_n(a,b,c)$ lo denotaremos por PC_n en analogía con el caso de la matrices de orden 3. Una vez que tenemos una expresión para las matrices $P_n(a,b,c)$ probaremos que la operación * es una ley de composición interna sobre el conjunto PC_n.

Consideremos la matriz $P_n(e,f,h)=(n_{ij})$ donde $n_{ij}=ef^{j-1}h^{i-1}$ con i=1,2,…, n, j=1,2,…, n con n entero positivo impar y $e,f,h\in C^*$. Tenemos que $P_n(a,b,c)*P_n(e,f,h)=(m_{ij})*(n_{ij})=$ $=(m_{ij}n_{ij})=(ab^{j-1}c^{i-1}ef^{j-1}h^{i-1})=((ae)(bf)^{j-1}(ch)^{i-1})=P_n(ae,bf,ch)$. Es fácil, probar que la matriz $P_n(1,1,1)$ es el elemento neutro de PC_n, y para la matriz $P_n(a,b,c)$ con $a,b,c\in C^*$ se tiene la matriz $P^{-1}_n(a,b,c)=P_n(a^{-1},b^{-1},c^{-1})$ como elemento inverso. La asociatividad y conmutatividad de las matrices $P_n(a,b,c)$ con $a,b,c\in C^*$ se siguen de la asociatividad y conmutatividad del producto de números complejos.

Finalmente, probaremos que la multiplicación de los elementos de la matriz $P_n(a,b,c)$ con n entero positivo impar, es igual a tomar el elemento de la posición central y elevarlo a la n^2. Para la matriz $P_n(a,b,c)$ la posición central esta dada por $m_{\frac{n+1}{2}\frac{n+1}{2}}$.

Multiplicando los elementos de la matriz $P_n(a,b,c)=(m_{ij})$ donde $m_{ij}=ab^{j-1}c^{i-1}$ con i=1,2,…,n, y j=1,2,…,n, n entero positivo impar y $a,b,c\in C^*$ (recuerde que esta condición se considera para garantizar la existencia del elemento inverso) se tiene:

$$\prod_{i=1}^{n}\prod_{j=1}^{n} m_{ij}=\prod_{i=1}^{n}\prod_{j=1}^{n} ab^{j-1}c^{i-1}=\prod_{i=1}^{n} a^n b^{\frac{n(n+1)}{2}} b^{-n} c^{n(i-1)}=a^{n^2} b^{\frac{n^2(n+1)}{2}} b^{-n^2} c^{\frac{n^2(n+1)}{2}} c^{-n^2}$$

$$\prod_{i=1}^{n}\prod_{j=1}^{n} m_{ij}=(ab^{\frac{(n-1)}{2}}c^{\frac{(n-1)}{2}})^{n^2}=(m_{\frac{n+1}{2}\frac{n+1}{2}})^{n^2} \quad \text{n es impar}$$

De lo anteriormente expuesto tenemos la siguiente

Proposición 4: Las matrices $P_n(a,b,c)=(n_{ij})$ donde $n_{ij}=ab^{j-1}c^{i-1}$ con i,j=1,2,…,n, n entero positivo impar y $a,b,c\in C^*$, con la operación * es un grupo abeliano con elemento neutro $1=P_n(1,1,1)$, para la matriz $P_n(a,b,c)$ se tiene $P_n^{-1}(a,b,c)=P_n(a^{-1},b^{-1},c^{-1})$ como elemento inverso.

Nota 5: Las matrices $P_n(a,b,c)$ con $a,b,c\in C^*$ son matrices invertibles bajo la ley de composición interna *, pero su determinante es nulo. Es decir, para las matrices $P_n(a,b,c)$ con $a,b,c\in C^*$ no se tiene la caracterización de matrices invertibles a través del determinante resultado que es válido cuando la ley de composición interna es la multiplicación usual de matrices.

Conclusiones

Basados en la experiencia como docentes de estos cursos, los autores recomiendan la secuencia llevada en el desarrollo de este artículo. Al inicio de este tema tan abstracto como lo es la noción de grupo, el docente puede guiar los pasos que deben cumplir los estudiantes para comprobar que un conjunto con una ley de composición interna definida sobre él, es un grupo.

En este trabajo se va de situaciones particulares a situaciones generales para que los estudiantes puedan ir obteniendo progresivamente el grado de rigurosidad y generalidad que conlleva el álgebra abstracta.

Los autores utilizan las matrices y las progresiones para trabajar el tema de grupos, pues consideran que son nociones que el estudiante ha manejado en cursos anteriores y que no involucran un nivel alto de complejidad, buscando de esta manera introducir el concepto de grupo con elementos que son conocidos para ellos.

Bibliografía

Herstein, I. N. (1976). *Álgebra moderna. Grupos, anillos, campos y teoría de Galois.* Trillas, México.

Bell, E. T. (1996*). Historia de las Matemáticas.* Fondo de Cultura Económica. México.

Fraleigh, J.B. (1987). *Álgebra Abstracta.* Addison-Wesley Iberoamericana. Argentina

Joseph Francisco. Licenciado en Educación Mención Matemática de la Universidad Central de Venezuela. Cursante de la Maestría en Educación mención Enseñanza de la Matemática de la Universidad Pedagógica Experimental Libertador (UPEL). Profesor Instructor Contratado del Departamento de Matemáticas y Física de la UPEL. Área de investigación centrada en Historia de las Matemáticas y de la Educación Matemática**.** **josep.francisco@gmail.com**

Thais Arreaza. Egresada del Instituto Pedagógico de Caracas (IPC) en la especialidad de Matemáticas. Magister en Educación mención Enseñanza de la Matemática, por la Universidad Pedagógica Experimental Libertador (UPEL). Profesora Asistente, Coordinadora del Programa de Matemática y Jefa de la Cátedra de Álgebra del Departamento de Matemáticas y Física, en el IPC. Coordinadora del Programa Cooperativo de Formación Docente, en la Escuela de Matemática de la Universidad Central de Venezuela (UCV). También ha publicado artículos sobre Investigación e Innovación en Educación Matemática**.** **thais_arreaza@yahoo.com**

Edilmo Carvajal. Licenciado en Matemáticas por la Universidad Nacional de Colombia y magíster en Matemáticas por la Universidad Central de Venezuela (UCV). Profesor Instructor Contratado del Departamento de Matemáticas y Física de la Universidad Pedagógica Experimental Libertador. Profesor Instructor del Departamento de Matemáticas y Estadística de la Escuela de Administración y Contaduría (UCV). Ha publicado artículos en álgebra. **qedcarvajal@gmail.com**

REVISTA IBEROAMERICANA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA

www.fisem.org/web/union

ISSN: 1815-0640
Número 37. Marzo de 2014
páginas 71-89

Estratégias de avaliação de relatórios escritos na regulação das aprendizagens em matemática

Maria Gorete Pires Branco, Maria Helena Martinho

Fecha de recepción: 19/7/2012
Fecha de aceptación: 10/06/2013

Resumen	Este artículo intenta comprender cómo una estrategia de evaluación de informes escritos, desarrollado en dos fases, contribuye para la regulación del aprendizaje de los estudiantes en matemáticas. Los participantes fueron tres grupos de estudiantes portugueses del 10º año (en promedio con 15 años de edad). Los datos fueron recolectados por la observación participante, análisis documental y entrevistas. Los resultados sugieren que el recurso guía para la elaboración de los informes y a los criterios de evaluación, proporciona a los estudiantes una percepción más clara de los objetivos de aprendizaje a alcanzar y juntamente con el feedback escrito del tipo interrogativo favorece el aprendizaje en matemáticas. **Palabras clave**: evaluación, regulación del aprendizaje.
Abstract	This article seeks to understand how an assessment strategy of written reports, developed in two phases, contributes to the regulation of the learning student's in mathematics. The participants were three groups of students in a 10th grade class (on average 15 years old). The data was collected through participant observation, documentary analysis and group interviews. The results suggest that the use of the script for the preparation of the reports and evaluation criteria provides students with a clearer perception of the learning objectives to be achieved and with the written feedback of the questioning type promotes learning in mathematics. **Keywords**: evaluation, regulation of the learning.
Resumo	Neste artigo procura-se compreender como é que uma estratégia de avaliação de relatórios escritos, desenvolvidos em duas fases, contribui para a regulação das aprendizagens dos alunos em Matemática. Os participantes foram três grupos de alunos do 10º ano (em média com 15 anos de idade). Os dados foram recolhidos através da observação participante, da análise documental e de entrevistas de grupo. Os resultados sugerem que o recurso ao guião para a elaboração dos relatórios e aos critérios de avaliação, fornece aos alunos uma perceção mais clara sobre os objetivos de aprendizagem a atingir e juntamente com o *feedback* escrito do tipo interrogativo favorece a aprendizagem em Matemática. **Palavras-chave:** avaliação, regulação das aprendizagens.

1. Introdução

As mudanças que se têm verificado na sociedade, resultantes dos avanços tecnológicos, científicos e sociológicos têm exigido, naturalmente mudanças nos sistemas educativos e em particular na educação matemática. As *Normas* do *National Council of Teachers of Mathematics* (NCTM, 1994, 2007) apontam mudanças no ensino e aprendizagem da Matemática, no sentido de levar os alunos a adquirir poder matemático, através da realização de tarefas de investigação, da resolução de problemas que desenvolvam o raciocínio matemático, da formulação de conjeturas e conexões matemáticas, da comunicação e da argumentação. Deixando para trás a centralidade na memorização de técnicas, a procura mecanicista de respostas e o tratamento matemático como um corpo de conceitos e procedimentos isolados. O que representa uma viragem do trabalho mecânico para o trabalho cognitivo, propiciando uma predisposição favorável em relação à Matemática. Estas mudanças pressupõem que o professor, como agente dinamizador e regulador do processo ensino-aprendizagem crie situações motivadoras, que envolvam os alunos na construção do seu conhecimento e na apropriação de novas ideias e conceitos, através de processos de reflexão sobre a atividade que vão desenvolvendo e sobre a sua aprendizagem.

Uma perspetiva de ensino e aprendizagem que permita desenvolver o poder matemático dos alunos não implicará uma nova visão da avaliação? São vários os documentos onde é mencionado que a avaliação deve ser uma ferramenta ao serviço das aprendizagens. O NCTM tem vindo a recomendar que a avaliação deve refletir a visão da reforma da Matemática Escolar e recomenda que a mesma constitua parte integrante do processo ensino-aprendizagem, contribuindo de forma significativa para a aprendizagem de todos os alunos e para informar e orientar os professores nas suas decisões (NCTM, 1999, 2007). Também os atuais programas de Matemática, quer do ensino básico, quer do ensino secundário, preconizam uma avaliação continuada posta ao serviço da gestão curricular de caráter formativo e regulador, visando a melhoria das aprendizagens. E apontam para a utilização de formas e instrumentos de avaliação diversificados, atendendo a que são vários os objetivos curriculares a avaliar e os modos como os alunos podem evidenciar os seus conhecimentos, capacidades e atitudes. O programa de Matemática A, do 10º ano dos cursos Científico-Humanísticos de Ciências e Tecnologias e de Ciências Socioeconómicas, do Departamento do Ensino Secundário (DES, 2001) recomenda que:

> A avaliação não se restrinja a avaliar o produto final, mas também o processo de aprendizagem e permita que o aluno seja um elemento ativo, reflexivo e responsável da sua aprendizagem (…). Que se diversifiquem as formas de avaliação, que em cada período, mais do que um dos elementos de avaliação seja obrigatoriamente uma redação matemática (sob a forma de resolução de problema, demonstrações, composições/reflexões, projetos, relatórios e outras) que reforce a importância da componente da comunicação matemática (pp. 12-13).

A Associação de Professores de Matemática (APM, 1998) aponta também para a diversificação de técnicas e instrumentos na avaliação dos alunos. Segundo o relatório *Matemática 2001* (APM, 1998), o teste escrito revelou-se o principal instrumento que os professores usavam para avaliar a aprendizagem dos alunos. Mais de uma década passada e a realidade é semelhante, “o que é ainda mais habitual é haver um grande enfoque no uso do teste escrito" (Santos, 2009). Os resultados dos testes fornecem alguma informação sobre a aprendizagem tanto a alunos como a professores, contudo, uma avaliação fortemente baseada em testes não é suficiente para dar resposta à variedade de objetivos de aprendizagem que as atuais orientações curriculares recomendam (Ponte, Boavida, Graça & Abrantes, 1997).

Segundo Ponte *et al.* (1997) as produções escritas, nomeadamente relatórios, têm um forte potencial de avaliação de aspetos da aprendizagem matemática particularmente importantes, relacionados com a realização de tarefas de investigação, resolução de problemas ou elaboração de projetos. Estas produções escritas são "suscetíveis de contribuir para desenvolver a autonomia e a reflexão dos alunos relativamente à sua própria aprendizagem" (p. 113). Também Varandas (2000) e Menino e Santos (2004) salientam as potencialidades do relatório escrito no desenvolvimento de competências matemáticas, reflexivas e de autoavaliação.

Os relatórios escritos são fortes indicadores da aprendizagem em Matemática (NCTM, 1999). As evidências dessas aprendizagens podem ser encontradas em atividades desenvolvidas em duas fases, iniciando-se com uma primeira versão, passando a uma outra que reflete a integração de comentários e críticas construtivas feitas pelo professor, culminando com um produto final aperfeiçoado.

Com esta experiência pretende-se compreender como é que uma estratégia de avaliação de relatórios escritos, desenvolvidos em duas fases, pode contribuir para as aprendizagens dos alunos, tendo em vista uma avaliação reguladora dessas aprendizagens. Procurar-se-á dar resposta à seguinte questão: De que forma uma estratégia de avaliação de relatórios escritos, em que é fornecido *feedback* aos alunos e dado conhecimento dos critérios de avaliação contribui para a regulação das suas aprendizagens em Matemática?

2. Enquadramento teórico

2.1. Avaliação reguladora das aprendizagens

O emergir das novas teorias sobre a aprendizagem e de novas ideias educativas tem levado a que o foco da avaliação se desloque da medição de informação para a interpretação da mesma e para o agir pedagogicamente em função dela (Ponte *et al*., 1997). Assim, as tarefas de avaliação:

> Devem fornecer dados significativos a respeito das aptidões, preferências e dificuldades de cada aluno, que ajudem o professor a compreendê-lo enquanto "aluno de Matemática" e constituam uma base para conceber e orientar futuras atividades. Ao mesmo tempo, devem fornecer ao aluno uma informação que o ajude na reflexão e autorregulação relativamente ao seu próprio processo de aprendizagem (Ponte *et al*., 1997, p. 101).

Nesta perspetiva a avaliação assume um caráter regulador das aprendizagens. A regulação das aprendizagens é aqui entendida como "todo o ato intencional que, agindo sobre os mecanismos de aprendizagem, contribua diretamente para a progressão e/ou redirecionamento dessa aprendizagem" (Santos, 2002, p. 77).

Vários estudos têm revelado que regular o progresso dos alunos contribui para uma melhoria das suas aprendizagens (Dias, 2008; Nunes, 2004; Semana, 2008). A regulação das aprendizagens implica necessariamente um papel ativo do aluno que poderá advir, segundo Santos (2002) de uma multiplicidade de processos, tais como: a avaliação formativa; a coavaliação entre pares e a autoavaliação. A autoavaliação é considerada por vários autores como o processo por excelência da regulação, dado ser um processo interno ao próprio aluno. Para Santos (2002) a autoavaliação é "um processo de metacognição, entendido como um processo mental interno através do qual o aluno toma consciência dos diferentes momentos e aspetos da sua atividade cognitiva" (p. 79). Este processo implica em primeiro lugar, que o aluno seja capaz de confrontar o que fez, com o que se esperava que fizesse, percecionando diferenças entre estas duas situações e em segundo lugar que aja de forma a reduzir ou eliminar essas diferenças (Santos, 2008).

Para que o aluno desenvolva capacidades de autoavaliação, é importante que o professor lhe proporcione oportunidades para avaliar, refletir e melhorar o seu trabalho, ajudando-o a tornar-se autónomo na sua aprendizagem (NCTM, 1999). Santos (2002) aponta estratégias que podem ser adotadas pelo professor no sentido de desenvolver a capacidade de autoavaliação dos alunos, como: o questionamento; a abordagem positiva do erro; a explicitação/negociação dos critérios de avaliação; o *feedback* escrito e o recurso a instrumentos alternativos de avaliação.

2.2. O *feedback* escrito dado ao trabalho dos alunos

A escrita avaliativa ou *feedback* é uma "forma possível de criar contextos de aprendizagem que ajudem o aluno a ir desenvolvendo a sua capacidade de autoavaliação" (Santos, 2008, p. 14), na medida em que não só o ajuda a compreender o que sabe, mas também a certificar-se do que ainda tem de aprender. O *feedback* poderá constituir uma estratégia facilitadora para levar o aluno a tomar consciência dos seus erros e de os autocorrigir (Santos, 2008).

Nesta perspetiva, e segundo Santos (2003) uma forma rica de desenvolver uma avaliação reguladora das aprendizagens é dar oportunidade ao aluno de aperfeiçoar uma primeira versão de um trabalho produzido, podendo assim repensar a situação. Neste sentido, é fundamental que o professor comente a primeira versão, de modo a que o aluno melhore o seu trabalho. Santos considera, no entanto, que um *feedback* com funções reguladoras deve: (a) ser claro para poder ser compreendido pelo aluno; (b) fornecer pistas para que o aluno possa prosseguir; (c) incentivar o aluno a analisar de novo a sua resposta; (d) não incluir a correção do erro, dando oportunidade ao aluno para o identificar e corrigir e (e) identificar e elogiar o que está bem, promovendo a autoconfiança do aluno e permitindo que aquele saber seja conscientemente reconhecido (Santos, 2003).

Diversos estudos, como por exemplo os de Dias (2008), Nunes (2004) e Semana e Santos (2009) têm mostrado que uma prática pedagógica em que é dado sistematicamente *feedback* escrito às produções dos alunos contribui para a melhoria das aprendizagens. Semana e Santos no seu estudo com alunos do 8º ano referem que na segunda fase da elaboração do relatório escrito, os alunos em geral, regularam a sua atividade através do *feedback* escrito recebido, procurando dar respostas às questões colocadas e solicitações feitas, o que se traduziu numa melhoria dos relatórios comparativamente à primeira versão. As autoras salientam, porém, que muitas vezes se revelou necessário complementar o *feedback* escrito com o oral. Concluindo, assim, que:

> O *feedback* escrito e oral, numa ação combinada, contribuíram para que os alunos tomassem consciência dos aspetos positivos e dos aspetos passíveis de serem melhorados na primeira versão dos relatórios e, em função disso e das orientações recebidas desenvolvessem a sua atividade de aperfeiçoar a versão inicial. (Semana & Santos, 2009, p. 498)

Alguns estudos têm evidenciado que o *feedback* escrito não ajuda da mesma forma todos os alunos. Salientam a importância de conhecer o aluno e dar o *feedback* de acordo do seu perfil académico (Dias, 2008; Santos & Dias, 2006).

De acordo com Santos (2008) o tipo de *feedback* que é fornecido ao aluno, a quantidade de informação e as situações de ensino mais adequadas para se dar o *feedback* aos alunos são dimensões a ter em conta. Dias (2008) ao estudar a forma como o *feedback* escrito dado às produções dos alunos contribui para as suas aprendizagens, tendo em vista uma avaliação reguladora das mesmas, concluiu que o *feedback* interrogativo com questões simples, diretas e curtas se revelou mais eficaz e que as tarefas abertas potenciam um *feedback* mais regulador das aprendizagens. A autora constatou no seu trabalho, que nas tarefas realizadas em grupo, a segunda fase, que foi elaborada atendendo ao *feedback* fornecido pelo professor, apresentou sempre melhorias em relação à primeira, o que nem sempre se verificou quando as tarefas foram realizadas individualmente.

2.3. O relatório como instrumento regulador das aprendizagens

O relatório é uma produção escrita onde os alunos descrevem, analisam e criticam uma dada situação ou atividade (Varandas, 2000). Vários autores consideram que o relatório, para além de ser um instrumento significativo de avaliação, é também um fator de aprendizagem, ao levar o aluno a descrever o trabalho desenvolvido na realização de uma determinada tarefa, a registar as tentativas feitas, a explicar o seu raciocínio, a criticar os processos utilizados e a identificar as dificuldades e apontar estratégias para melhorar, através da autoavaliação (Menino & Santos, 2004; Nunes, 2004; Semana, 2008).

As professoras que participaram no estudo de Menino e Santos (2004) apontam um conjunto de competências que se conseguem desenvolver e avaliar simultaneamente, através do relatório escrito, tais como: (a) a comunicação; (b) a seleção e organização de ideias matemáticas; (c) as competências associadas ao trabalho de grupo; (d) o espírito investigativo; (e) a integração de interações e *feedback* dos vários intervenientes no processo e (f) a reflexão sobre a investigação e as aprendizagens conseguidas. No entanto, de acordo com Pinto e Santos (2006), para que a elaboração de um relatório constitua um efetivo momento de aprendizagem é conveniente que seja desenvolvida em duas fases, uma primeira versão sujeita ao comentário do professor e uma segunda que é elaborada tendo em conta o *feedback* fornecido.

Segundo Semana e Santos (2009), para além do *feedback* fornecido aos alunos, também a discussão do guião de elaboração do relatório e a negociação dos critérios de avaliação são estratégias que devem ser adotadas no sentido de potenciar a componente reguladora dos relatórios. É importante que os alunos se apropriem dos critérios de avaliação da tarefa. O professor depois de definir os critérios que irá utilizar na avaliação da tarefa, deve partilhá-los com os alunos, optando por envolvê-los no seu melhoramento ou então apresentá-los e explicá-los claramente de modo a que os alunos compreendam o que se espera deles (Santos, 2008). Para Santos e Gomes (2006) a apropriação de critérios de avaliação pelos alunos juntamente com o desenvolvimento da capacidade crítica contribuem para um melhor desempenho, quer da realização das tarefas e dos seus respetivos relatórios, quer da capacidade de comunicação.

3. Metodologia

Opções metodológicas. Atendendo ao objetivo da experiência, optou-se por uma metodologia de natureza qualitativa, pois tal como afirmam Bogdan e Biklen (1994), a investigação qualitativa envolve a obtenção de dados descritivos, obtidos através do contacto direto do investigador com o fenómeno no seu contexto natural. Como *design* de investigação optou-se pelo estudo de caso interpretativo. A opção por estudos de caso prendeu-se com o facto de se tratar de uma investigação de natureza empírica, que se baseou fortemente no trabalho de campo ocorrendo em contexto real e que se preocupou principalmente com as questões do "como" e do "porquê", procurando tirar partido de múltiplas fontes de evidência, como documentos, observação e entrevistas (Ponte, 2006; Yin, 2009).

Participantes. A experiência envolveu uma turma do 10º ano de escolaridade constituída por 27 alunos (com uma média de idades de 15 anos) e incidiu, em particular, em três grupos. O grupo G1 era formado por três alunos que revelam algumas dificuldades na disciplina de Matemática (duas raparigas e um rapaz), dois deles revelam ainda dificuldades ao nível da comunicação matemática. O grupo G2 constituído por três raparigas com um desempenho razoável tanto na disciplina como a nível da comunicação matemática. O grupo G3 era formado por três rapazes, dois com bom desempenho na disciplina e o outro com desempenho razoável, revelando os três bom nível de comunicação matemática.

Contexto pedagógico. Uma vez que os alunos não estavam familiarizados com a elaboração de relatórios na disciplina de Matemática, optou-se por produzir um guião, no sentido de os orientar na elaboração dos relatórios (Anexo I). Os critérios de avaliação foram propostos aos alunos através de uma tabela de descritores (Anexo II), adaptada de Semana e Santos (2008). Estes dois documentos foram entregues aos alunos em simultâneo, foi-lhes pedido para fazerem uma leitura atenta dos mesmos, e de seguida, procedeu-se à discussão. Foram prestados esclarecimentos e solicitadas sugestões, no sentido de completar ou melhorar os documentos.

Na aula seguinte, foi proposta a realização, em grupo, da tarefa de investigação "O triângulo de maior área" (Anexo III), adaptada de Loureiro, Oliveira, Ralha e Bastos (1997), que tinha como objetivo investigar quais as dimensões do triângulo de maior área, formado pelo canto inferior esquerdo de uma folha de papel por efeito da dobragem da mesma, de modo que o canto superior esquerdo toque o lado inferior da folha.

Na aula após a realização da tarefa de investigação, procedeu-se à elaboração do relatório. A introdução do relatório, o seu desenvolvimento e a conclusão foram realizadas em grupo, ficando para trabalho de casa a elaboração da reflexão individual. É de salientar que os relatórios foram elaborados em duas fases. Após a realização da primeira versão, foi dado *feedback* escrito a cada um dos relatórios feitos em grupo e à reflexão individual de cada aluno e na aula seguinte foi proposta aos alunos a realização da segunda versão do relatório atendendo ao *feedback* fornecido pela professora.

Métodos de recolha de dados. A recolha dos dados decorreu durante três aulas, de 90 minutos, da disciplina de Matemática A. Tendo em conta a metodologia adotada e com vista a obter um conjunto significativo de dados, válido e fundamentado (Bogdan & Biklen, 1994), optou-se por três métodos e instrumentos de recolha de dados: (i) a observação participante ativa das aulas em que foi realizada a tarefa de investigação e elaborados os relatórios, efetuada sob a forma de registo de notas; (ii) a análise documental dos relatórios e das reflexões individuais redigidas pelos alunos, que foi um meio para obter dados mais significativos, sobre o desempenho dos alunos, antes e depois de fornecido o *feedback* e (iii) a entrevista semiestruturada realizada no final da experiência a cada um dos grupos-caso, com o objetivo de obter informações sobre a opinião dos alunos em relação à experiência e esclarecer algumas dúvidas que surgiram aquando da avaliação dos relatórios. Esta entrevista, gravada em áudio, embora obedecendo a um guião (Anexo IV) previamente preparado, foi flexível permitindo uma recolha de dados num ambiente natural de conversa, deixando os participantes falar livremente sobre os seus pontos de vista.

Análise de dados. A análise dos dados foi essencialmente descritiva e interpretativa com vista a obter uma caracterização mais completa e uma melhor compreensão das situações. Os registos escritos de notas e os documentos escritos produzidos pelos alunos foram sujeitos a várias leituras e as gravações das entrevistas foram transcritas e depois analisadas várias vezes, de modo a proceder ao registo de possíveis interpretações, destacar os aspetos mais relevantes e mesmo cruzar informação de recolhas diferenciadas. A apresentação dos dados é realizada através de duas categorias definidas durante o processo de análise: o guião para a elaboração do relatório e a apropriação dos critérios de avaliação; o efeito do *feedback* na aprendizagem dos alunos.

4. Apresentação dos Resultados

4.1. O guião e os critérios de avaliação

A discussão e a consulta do *guião para a elaboração do relatório* revelou-se muito útil para os alunos estruturarem o relatório. De um modo geral, os relatórios apresentados respeitavam as indicações dadas no guião. Na introdução os alunos procuraram apresentar o objetivo da tarefa e indicar o material utilizado; no desenvolvimento descreveram e explicitaram os processos e as estratégias usadas, as dificuldades sentidas e como foram ultrapassadas; na conclusão, os alunos apresentaram as conclusões obtidas e na reflexão individual, cada aluno resumiu o que aprendeu, fez um comentário global sobre o trabalho desenvolvido, apontou as dificuldades sentidas e autoavaliou o seu trabalho.

Todos os alunos mencionaram que o recurso ao guião foi fundamental para a elaboração do relatório. Um aluno do grupo G3, na entrevista referiu-se ao guião nos seguintes termos: “Ajuda na estrutura do trabalho, dá-nos dicas sobre os pontos essenciais a pôr no relatório, pois no início não temos a noção de como devemos fazer, sentimo-nos perdidos e o guião orienta-nos” (Entrevista ao grupo 3

[EG3]). Uma aluna do grupo G2 mencionou: "Foi muito importante a consulta do guião para sabermos como devíamos fazer o relatório, ajudou a não esquecermos o que era necessários colocar, as fases que devíamos seguir" (EG2). Claramente estes alunos sentiram-se apoiados e orientados pelo guião. Com estas afirmações revelam também que o facto de não estarem familiarizados com a elaboração de relatórios na disciplina de Matemática contribui para que atribuíssem muita importância à existência de um guião.

Quanto aos *critérios de avaliação*, verificou-se através da análise dos relatórios, e da observação durante a realização dos mesmos, que nem todos os grupos fizeram uso deles. Os alunos do grupo G1, praticamente não recorreram aos critérios de avaliação aquando da elaboração do relatório, o que se refletiu na qualidade do trabalho. Porém, reconheceram a importância da apropriação dos critérios de avaliação. Um dos alunos mencionou não os ter consultado por esquecimento e falta de hábito:

> Considero que é importante conhecer os critérios de avaliação, para sabermos o que vai ser avaliado e como vamos ser avaliados. Assim, focamos os pontos mais importantes. Mas, sinceramente esqueci-me de os consultar quando estávamos a elaborar o relatório, por estar concentrado no trabalho e também por não estar habituado a fazê-lo. Este foi o primeiro ano, que me foram dados os critérios quando realizo uma atividade de avaliação. (EG1)

Já outro aluno do mesmo grupo, ao serem questionados sobre o facto de não terem apresentado as estratégias que não conduziram ao que pretendiam, referiu: "Acho que essas estratégias não interessam, os professores não as costumam contar para nota" (EG1), revelando aqui uma preocupação com a classificação e não com a avaliação reguladora. Verificando-se, assim, algum conflito entre padrões autoimpostos e critérios de avaliação principalmente nas situações em que estes podem, na perspetiva dos alunos, afetar a classificação.

Nas reflexões individuais é mais evidente a consulta dos critérios de avaliação por parte dos alunos, talvez o facto de terem de incluir na reflexão a autoavaliação do seu trabalho, os tenha levado a essa consulta. Contudo, alguns alunos na primeira versão, apenas se autoavaliam em termos de níveis de acordo com a tabela de descritores, sem apresentarem qualquer justificação, como mostra a figura 1.

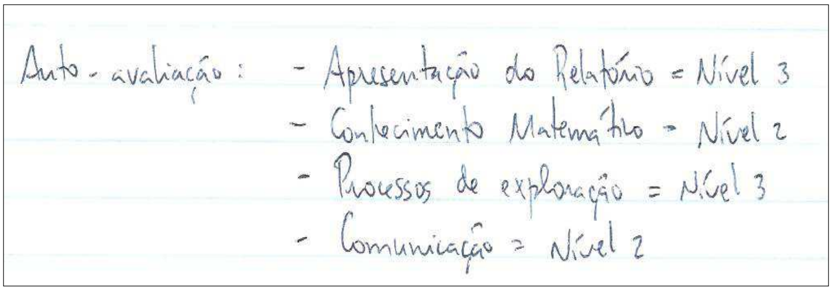


Figura 1. Autoavaliação de um aluno do grupo G3.

Uma aluna do grupo G2 autoavalia o trabalho em termos de grupo, como se pode observar na figura 2. Revela também que o grupo se preocupou por prestar atenção aos critérios de avaliação.

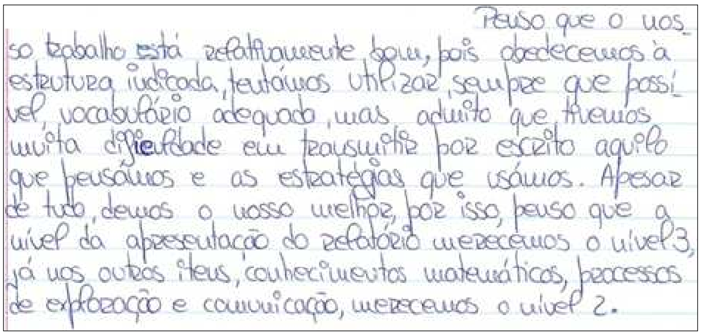

Penso que o nosso trabalho está relativamente bom, pois obedecemos à estrutura indicada, tentámos utilizar, sempre que possível, vocabulário adequado, mas admito que tivemos muita dificuldade em transmitir por escrito aquilo que pensámos e as estratégias que usámos. Apesar de tudo, demos o nosso melhor, por isso, penso que a nível da apresentação do relatório merecemos o nível 3, já nos outros itens, conhecimentos matemáticos, processos de exploração e comunicação, merecemos o nível 2.

Figura 2. Autoavaliação, por uma aluna do grupo G2.

Esta aluna salientou na sua reflexão individual dificuldades sentidas pelo grupo, no entanto não mencionou aspetos a melhorar. Aliás, na primeira versão só um dos alunos do grupo G3 apontou aspetos a melhorar, em particular a organização e interpretação na leitura do enunciado (Figura 3). A pouca preocupação com aspetos a melhorar, pode revelar uma insuficiente apropriação dos critérios de avaliação por parte da maioria dos alunos.

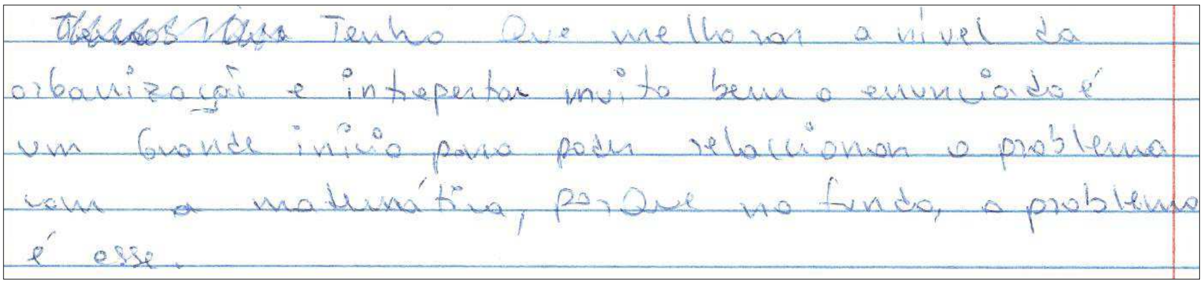

Tenho Que melhorar a nível da organizaçã e intepertar muito bem o enunciado é um Grande início para poder relacionar o problema com a matemática, porQue no fundo, o problema é esse.

Figura 3. Autoavaliação, por um aluno do grupo G3.

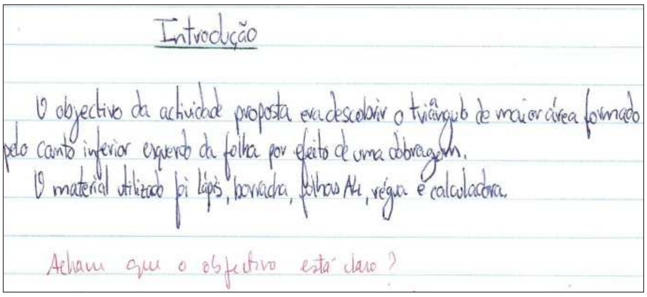
Para alguns alunos fazer a autoavaliação do seu trabalho parece ser uma tarefa difícil, como foi mencionado por uma das alunas do grupo G2:

> Foi difícil fazer a autoavaliação, porque não estamos muito habituados a escrever o que pensamos sobre o nosso trabalho, e é difícil admitir que erramos e que não nos empenhamos, mas penso que ao refletirmos sobre o nosso trabalho tomamos consciência de que temos de melhorar e os erros ajuda-nos a aprender. (EG2)

Mas, apesar da dificuldade, a aluna considera que a autoavaliação contribui para melhorar a aprendizagem, o que também foi referido pelos outros alunos.

4.2. O efeito do *feedback* na aprendizagem dos alunos

Apesar, da primeira versão dos relatórios apresentada pelos alunos, em traços gerais, estar bem estruturada, vários eram os aspetos que podiam ser melhorados. Foi assim, fornecido *feedback* a todos os relatórios, assumindo este quase sempre a forma de questões. As questões colocadas, mais diretas ou menos diretas, procuravam permitir aos alunos corrigir os próprios erros e simultaneamente dar pistas de ações futuras, para que a partir delas soubessem como prosseguir, sem no entanto, dar informações que dispensassem os alunos de refletir sobre a tarefa. Na primeira versão, os grupos G1 e G2 na introdução não descreveram de forma muito clara o objetivo da tarefa. Perante a introdução apresentada pelo grupo G1, foi dado *feedback* no sentido de levar os alunos a clarificar o objetivo, como mostra a figura 4.



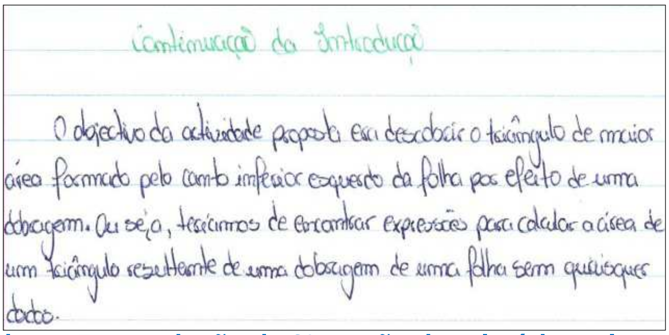
Introdução

O objectivo da actividade proposta era descobrir o triângulo de maior área formado pelo canto inferior esquerdo da folha por efeito de uma dobragem.
O material utilizado foi lápis, borracha, folhas A4, régua e calculadora.

Acham que o objetivo está claro?

Figura 4. Introdução da 1ª versão do relatório, pelo grupo G1, e respetivo *feedback*.

Na segunda versão os alunos deste grupo procuraram melhorar a introdução, como se pode observar na figura 5, porém, continuaram a não explicar o tipo de dobragem a que se referem. O *feedback* dado à introdução apresentada por estes alunos não foi suficiente para eles clarificarem o objetivo da tarefa, precisavam de um *feedback* mais direto.

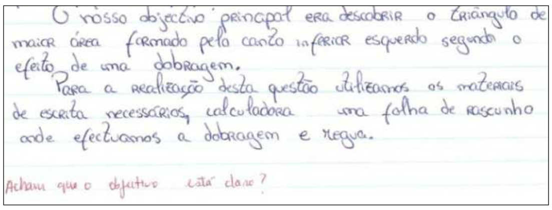


Continuação da Introdução

O objectivo da actividade proposta era descobrir o triângulo de maior área formado pelo canto inferior esquerdo da folha por efeito de uma dobragem. Ou seja, teríamos de encontrar expressões para calcular a área de um triângulo resultante de uma dobragem de uma folha sem quaisquer dados.

Figura 5. Introdução da 2ª versão do relatório, pelo grupo G1.

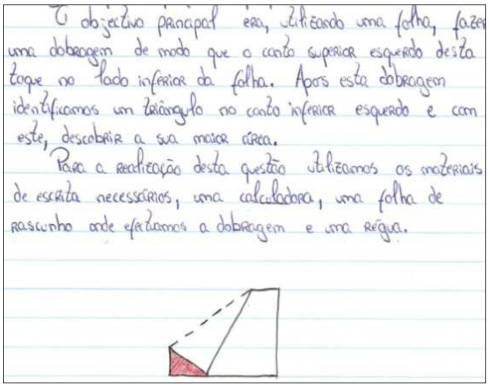
As alunas do grupo G2 receberam exatamente o mesmo *feedback* que os alunos do grupo G1, como mostra a figura 6.



O nosso objectivo principal era descobrir o triângulo de maior área formado pelo canto inferior esquerdo segundo o efeito de uma dobragem.
Para a realização desta questão utilizamos os materiais de escrita necessários, calculadora uma folha de rascunho onde efectuamos a dobragem e regua.

Acham que o objetivo está claro?

Figura 6. Introdução da 1ª versão do relatório pelo grupo G2, e respetivo *feedback*



O objectivo principal era, utilizando uma folha, fazer uma dobragem de modo que o canto superior esquerdo desta toque no lado inferior da folha. Após esta dobragem identificamos um triângulo no canto inferior esquerdo e com este, descobrir a sua maior área.
Para a realização desta questão utilizamos os materiais de escrita necessários, uma calculadora, uma folha de rascunho onde efetuamos a dobragem e uma régua.

Figura 7. Introdução da 2ª versão do relatório, pelo grupo G2.

Na segunda versão (Figura 7) as alunas já apresentaram o objetivo da tarefa de uma forma mais clara e acompanham a sua descrição de uma figura, que segundo uma das alunas: "Ajuda a perceber melhor a dobragem e a identificar o triângulo" (Registo de notas). Os alunos do grupo G1 na primeira versão do relatório afirmaram que o triângulo retângulo de maior área tinha dimensões 7,5 cm por 12 cm. Foi fornecido *feedback* no sentido de os alunos averiguarem a veracidade da sua afirmação: "Tentem averiguar, atendendo às medidas da vossa folha, se é possível as dimensões do triângulo de maior área serem 7, 5 cm de altura e 12 cm de base?" Os alunos aquando da elaboração da segunda versão do relatório solicitaram ajuda e a professora procurou colocar algumas questões e dar algumas pistas, para que os alunos pudessem prosseguir:

Aluno 1: Ó stôra nós não sabemos como podemos ver se está certo?
Professora: Quais as dimensões da vossa folha?
Aluno 1: O comprimento é 29,5 e a altura 21 cm.
Professora: Muito bem, se a altura do triângulo é 7,5 cm quanto mede a hipotenusa?
Aluno 2: Ao 21 retiramos 7,5.
Professora: Então averigúem se o triângulo com as dimensões indicadas é um triângulo retângulo.

O *feedback* escrito juntamente com o *feedback* oral contribuiu para que os alunos, depois de verificarem que o triângulo com as dimensões indicadas não era triângulo retângulo, efetuassem novas medições, apresentassem uma tabela com mais valores do que os que tinham apresentado na primeira versão e concluíssem que a área máxima do triângulo era de 42,6 cm^2, como mostra a figura 8. O que revela alguma melhoria, apesar de não apresentarem os valores das medidas do outro cateto do triângulo retângulo na tabela.

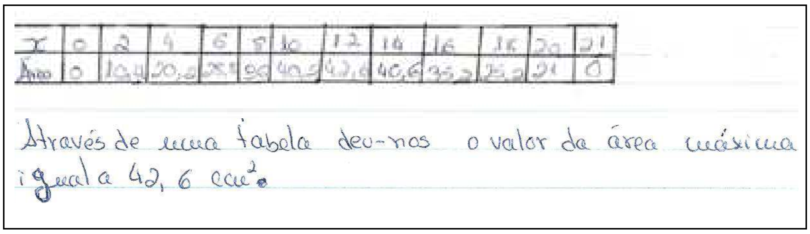


Figura 8. Desenvolvimento da 2ª versão do relatório, pelo grupo G1.

O *feedback* escrito fornece indicações aos alunos sobre o modo como podem aperfeiçoar uma primeira versão do seu trabalho, sem incluir a correção do erro. É importante identificar aspetos positivos, incentivando o aluno a reanalisar a sua resposta (Santos, 2003). Na primeira versão do relatório, as alunas do grupo G2, depois de descreverem as várias tentativas, apresentaram a estratégia para chegarem à área máxima do triângulo, como mostra a figura 9. Embora o raciocínio para chegarem à expressão que dá a área do triângulo em função da altura esteja correto, têm alguns erros e o máximo da função está mal calculado.

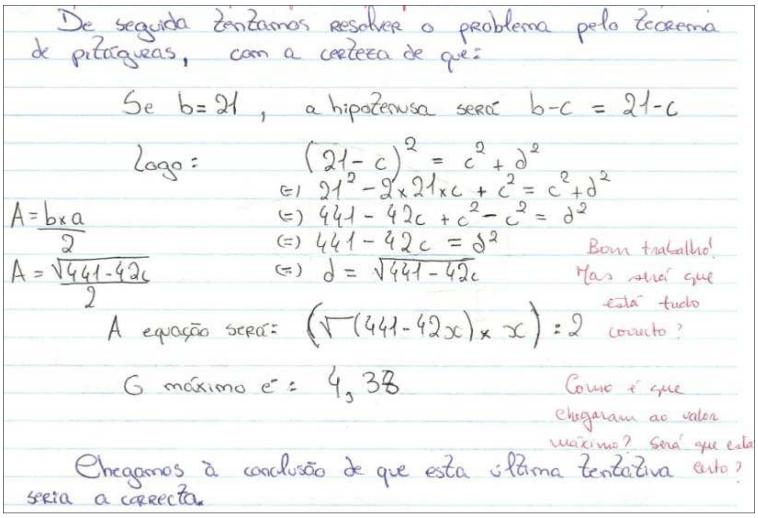
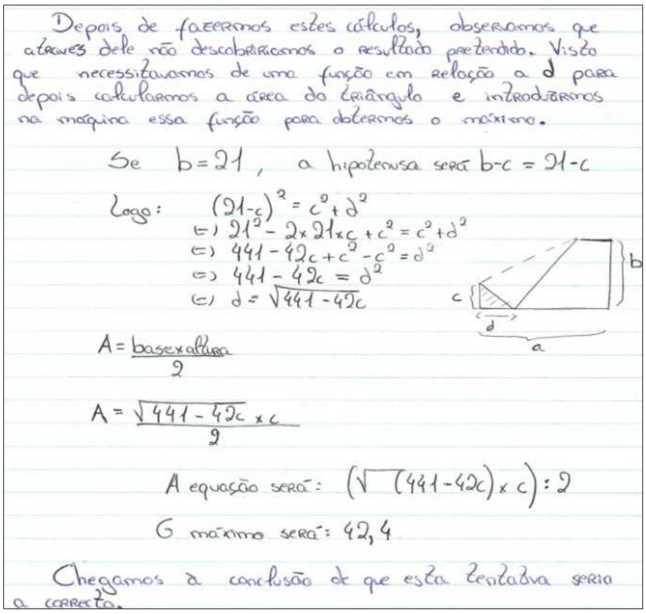


Figura 9. Estratégia apresentada na 1ª versão do relatório para o cálculo da área máxima do triângulo retângulo, pelo grupo G2, e respetivo *feedback*.

É fornecido *feedback* escrito no sentido de elogiar o trabalho das alunas e por outro lado, levá-las a corrigir os erros, sem que tenham sido assinalados.

O *feedback* dado mostrou-se útil, na segunda versão, as alunas passaram de novo o relatório, corrigiram os erros, deixando no entanto, escapar um erro de linguagem e acrescentaram um esquema, que dá para perceber melhor o processo de exploração, como se pode observar pela figura 10.


Depois de fazermos estes cálculos, observamos que através dele não descobriríamos o resultado pretendido. Visto que necessitávamos de uma função em relação a d para depois calcularmos a área do triângulo e introduzirmos na máquina essa função para obtermos o máximo.

Se $b=21$, a hipotenusa será $b-c = 21-c$

Logo: $(21-c)^2 = c^2+d^2$
$\Leftrightarrow 21^2 - 2\times 21\times c + c^2 = c^2+d^2$
$\Leftrightarrow 441-42c+c^2-c^2 = d^2$
$\Leftrightarrow 441-42c = d^2$
$\Leftrightarrow d = \sqrt{441-42c}$

$A = \frac{\text{base}\times\text{altura}}{2}$

$A = \frac{\sqrt{441-42c}\times c}{2}$

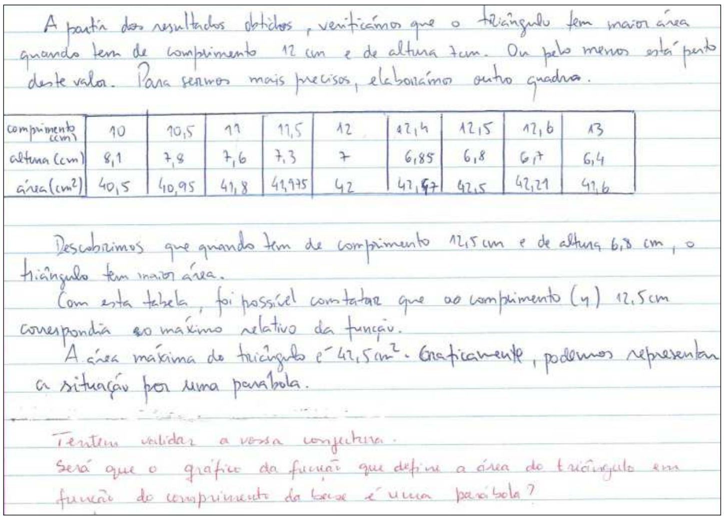
A equação será: $(\sqrt{(441-42c)}\times c):2$

O máximo será: 42,4

Chegamos à conclusão de que esta tentativa seria a correcta.

Figura 10. Estratégia apresentada na 2ª versão do relatório para o cálculo da área máxima do triângulo retângulo, pelo grupo G2.

Os alunos do grupo G3 começaram por dobrar uma folha, conforme descrito no enunciado, fazer medições com uma régua e apresentaram uma exploração em que foram registando os dados numa tabela. Inicialmente elaboraram uma tabela em que as medidas do comprimento da base do triângulo iam aumentando de dois em dois centímetros e depois uma outra, registando valores mais próximos de 12 cm, como se pode observar na figura 11.


A partir dos resultados obtidos, verificámos que o triângulo tem maior área quando tem de comprimento 12 cm e de altura 7cm. Ou pelo menos está perto deste valor. Para sermos mais precisos, elaborámos outro quadro.

comprimento (cm)	10	10,5	11	11,5	12	12,4	12,5	12,6	13
altura (cm)	8,1	7,8	7,6	7,3	7	6,85	6,8	6,7	6,4
área (cm²)	40,5	40,95	41,8	41,975	42	42,47	42,5	42,21	41,6

Descobrimos que quando tem de comprimento 12,5 cm e de altura 6,8 cm, o triângulo tem maior área.

Com esta tabela, foi possível constatar que ao comprimento (y) 12,5 cm correspondia ao máximo relativo da função.

A área máxima do triângulo é ~42,5cm². Graficamente, podemos representar a situação por uma parábola.

Tentem validar a vossa conjectura.
Será que o gráfico da função que define a área do triângulo em função do comprimento da base é uma parábola?

Figura 11. Estratégia para obter a área máxima do triângulo, apresentadana 1ª versão pelo grupo G3, e respetivo *feedback*.

Os alunos indicaram as dimensões do triângulo de área máxima, com base nos dados da tabela, e afirmaram que a situação se pode traduzir graficamente por uma parábola. Na segunda versão experimentaram as regressões quadrática e cúbica e verificaram que a curva se ajusta melhor ao gráfico no caso da regressão cúbica. Calcularam o máximo da função cúbica e verificaram que este é um valor próximo do indicado na primeira versão como se pode observar pela figura 12.

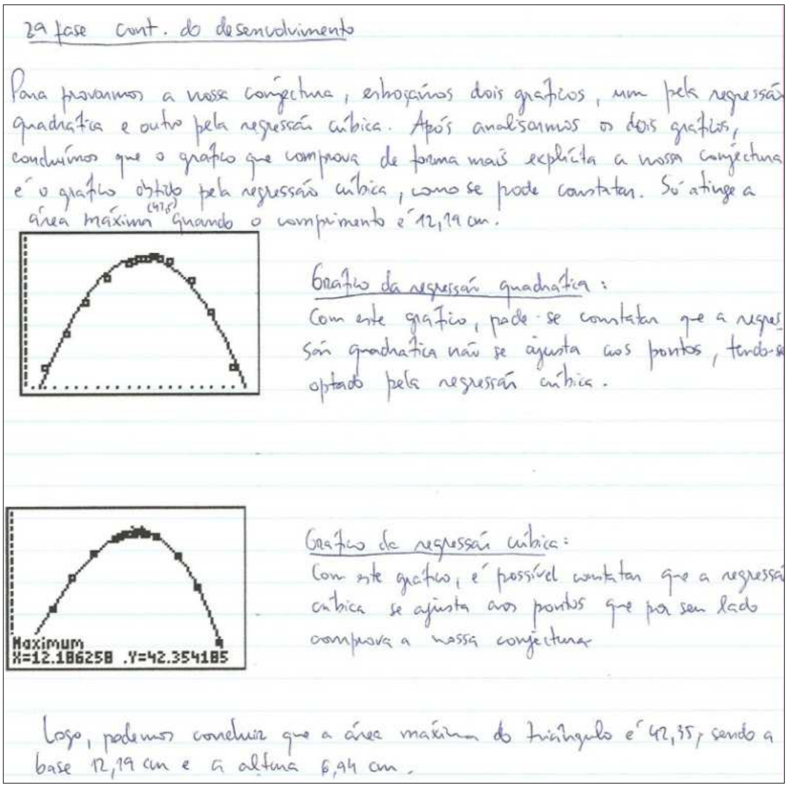


Figura 12. Desenvolvimento da 2ª versão, pelo grupo G3.

Assim o *feedback* fornecido contribuiu para a melhoria da qualidade das aprendizagens dos alunos. Estes consideraram que é muito importante para a sua aprendizagem que o professor forneça *feedback* à atividade desenvolvida por eles. Por exemplo, uma aluna do grupo G2 na entrevista mencionou: "O *feedback* dado pela professora ajudou-nos a perceber onde erramos. As questões feitas ajudaram-nos a completar o nosso trabalho, a melhorar a nossa aprendizagem e a sermos mais autónomas" (EG2). Um aluno do grupo G3 referiu: "Ajuda-nos a melhorar o trabalho, a melhorar a capacidade de explorar, a estar mais atentos, para mais tarde termos menos tendência para errar. Ajuda-nos a aprender" (EG3). A opinião dos restantes alunos aponta no mesmo sentido.

Todos os alunos consideraram que o relatório em duas fases contribuiu para melhorar a sua aprendizagem. Um aluno do grupo G1 referiu: "O relatório em duas fases serve para corrigirmos os erros, sabermos onde falhamos, para tentarmos melhorar e com isso aprender" (EG1). Também um dos alunos do grupo G3 mencionou que: "A segunda fase do relatório permite-nos analisar de novo o nosso trabalho, completá-lo, procurar compreender onde erramos, pensar sobre o erro e aprender com isso" (EG3).

5. Conclusões

O guião para a elaboração do relatório tornou-se fundamental para os alunos estruturarem o relatório, o que confirma resultados do estudo de Semana (2008), a sua consulta contribuiu para que os alunos tomassem consciência dos aspetos a incluir em cada uma das partes do relatório.

O recurso aos critérios de avaliação concorreu para que os alunos tivessem uma perceção mais clara dos objetivos a atingir e para orientar a redação do relatório. Verificou-se que, a consulta atenta dos critérios de avaliação conduziu a uma melhoria global na qualidade das produções dos alunos. É de salientar que o facto de alguns alunos, nomeadamente os alunos do grupo G1, não terem consultado os critérios de avaliação aquando da elaboração do relatório, teve reflexos na qualidade do mesmo. Estes alunos reconhecem a importância da apropriação dos critérios de avaliação e sublinham que o facto de habitualmente não terem conhecimento/acesso aos mesmos, aquando da realização das tarefas de avaliação, terá contribuído para não os terem consultado.

No que se refere à autoavaliação, a maior parte dos alunos não aponta aspetos a melhorar no seu desempenho, o que indica uma insuficiente apropriação dos critérios de avaliação e sugere a necessidade de lhes serem proporcionadas oportunidades para se apropriarem e compreenderem os critérios de avaliação no contexto do seu trabalho (Santos & Gomes, 2006; Semana, 2008). Verificou-se também algum conflito entre padrões autoimpostos e critérios de avaliação principalmente nas situações em que os alunos consideram que estes podem afetar a classificação final, tal como no estudo de Santos e Gomes (2006). Apesar de a autoavaliação ser considerada por alguns alunos uma tarefa difícil, todos reconheceram que contribui para a sua aprendizagem.

O *feedback* escrito fornecido aos relatórios contribuiu para que todos os alunos melhorassem as suas produções da primeira para a segunda fase, ainda que nalguns casos tenham sido pequenas melhorias. Estes resultados são consistentes com os do estudo de Dias (2008). Os alunos na segunda fase procuraram regular a sua atividade, através do *feedback* escrito recebido, respondendo às questões colocadas e às solicitações feitas (Semana & Santos, 2009), o que acabou por orientá-los na resolução e por se traduzir na melhoria das suas produções. Todavia, houve necessidade no caso do grupo G1, de complementar o *feedback* escrito com algum *feedback* oral, colocando algumas questões e fornecendo algumas pistas aos alunos de modo a que estes pudessem prosseguir, o que contribuiu, tal como no estudo de Semana e Santos (2009), para que os alunos desenvolvessem a sua atividade no sentido de aperfeiçoar a primeira versão do relatório.

Os dados sugerem que o mesmo *feedback* não satisfaz de igual forma todos os alunos, o que confirma dados de outras investigações (Dias, 2008; Santos & Dias, 2006). Quando as questões não são diretas, os alunos nem sempre conseguem melhorar, devolvendo o *feedback* da pouca explicitação do que se pretendia. Os alunos com mais dificuldades precisam de um *feedback* mais direto.

Todos os alunos consideraram que este tipo de avaliação é favorável à sua aprendizagem. Assim, as estratégias de avaliação em que é fornecido *feedback* aos relatórios e dado conhecimento aos alunos dos critérios de avaliação revelaram-se eficazes na regulação das aprendizagens dos alunos. No entanto, as dificuldades sentidas pelos alunos, principalmente em termos de autoavaliação, a insuficiente apropriação dos critérios de avaliação por parte destes e a permanência de alguns padrões autoimpostos, apontam para a necessidade de se continuar a trabalhar com os alunos estratégias de avaliação reguladora das aprendizagens.

Bibliografía

APM (1998). *Matemática 2001*- Recomendações para o Ensino e Aprendizagem da Matemática. Consultado em 12 de abril de 2012, em http://www.apm.pt/apm/2001/2001_m2.htm

Bogdan, R. C., & Biklen, S. K. (1994). *Investigação qualitativa em educação: uma introdução à teoria e aos métodos*. Porto: Porto Editora.

DES (2001). *Programa de Matemática A do 10º ano de escolaridade*. Lisboa. Autor.

Dias, S. (2008). *O papel da escrita avaliativa na avaliação reguladora do ensino e das aprendizagens de alunos de 8º ano na disciplina de Matemática*. Dissertação de Mestrado, Universidade de Lisboa, Lisboa.

Loureiro, C., Oliveira, A., Ralha, E., & Bastos, R. (1997). *Funções: Matemática – 10º ano de escolaridade*. Lisboa: Ministério da Educação e Departamento do Ensino Secundário.

Menino, H., & Santos, L. (2004). Instrumentos de avaliação das aprendizagens em matemática. O uso do relatório escrito, do teste em duas fases e do portefólio no 2º ciclo do ensino básico. *Atas do XV SIEM* (Seminário de Investigação em Educação Matemática) (pp. 271-291). Lisboa: APM.

NCTM (1994). *Normas profissionais para o ensino da Matemática*. Lisboa: APM e Instituto de Inovação Educacional. (Original em inglês publicado em 1991).

NCTM (1999). *Normas para a avaliação em Matemática Escolar*. Lisboa: APM e Instituto de Inovação Educacional. (Original em inglês publicado em 1995).

NCTM (2007). *Princípios e normas profissionais para a Matemática Escolar*. Lisboa: APM e Instituto de Inovação Educacional. (Original em inglês publicado em 2000).

Nunes, C. (2004). *A avaliação como regularização do processo de ensino-aprendizagem da Matemática: Um estudo com alunos do 3º ciclo do ensino básico*. Dissertação de Mestrado, Universidade de Lisboa, Lisboa.

Pinto, J., & Santos, L. (2006). *Modelos de avaliação das aprendizagens*. Lisboa: Universidade Aberta.

Ponte, J. P. (2006). Estudos de caso em educação matemática. *Bolema*, *25*, 105-132.

Ponte, J. P., Boavida, A. M., Graça, M., & Abrantes, P. (1997). *Didática da Matemática - Ensino Secundário*. Lisboa: Ministério da Educação e Departamento do Ensino Secundário.

Santos, L. (2002). Autoavaliação regulada: porquê, o quê e como? In P. Abrantes & F. Araújo (Orgs.), *Avaliação das Aprendizagens. Das conceções às práticas* (pp. 75-84). Lisboa: Ministério da educação e Departamento do Ensino Básico.

Santos, L. (2003). Avaliar competências: uma tarefa impossível? *Educação e Matemática*, *74*, 16-21.

Santos, L. (2008). Dilemas e desafios da avaliação reguladora. In L. Menezes; L. Santos; H. Gomes & C. Rodrigues (Eds.), *Avaliação em Matemática: Problemas* *e desafios* (pp. 11-35). Viseu: Secção de Educação Matemática da Sociedade Portuguesa de Ciências de Educação.

Santos, L. (2009). A avaliação das aprendizagens no Novo Programa de Matemática do Ensino Básico. *Educação e Matemática*, 105, 87-90.

Santos, L., & Dias, S. (2006). Como entendem os alunos o que lhes dizem os professores? A complexidade do *feedback*. *Atas do ProfMat2006*. (CD-ROM). Lisboa: APM.

Santos, L., & Gomes, A. (2006). Apropriação de critérios de avaliação: um estudo com alunos do 7º ano de escolaridade. *Revista portuguesa de pedagogia, 40* (3), 11-48.

Semana, S. (2008) *O relatório escrito enquanto instrumento de avaliação reguladora das aprendizagens dos alunos do 8º ano de escolaridade em Matemática*. Dissertação de Mestrado, Universidade de Lisboa. Lisboa.

Semana, S., & Santos, L. (2008). A avaliação e o raciocínio matemático. *Educação e Matemática*, 100, 51-60.

Semana, S., & Santos, L. (2009). Estratégias de avaliação na regulação das aprendizagens em Matemática. *XXSIEM* (CD-ROM). Lisboa: APM.

Varandas, J. (2000). *Avaliação de investigações matemáticas: Uma experiência*. Dissertação de Mestrado, Universidade de Lisboa. Lisboa.

Yin, R. (2009). *Case study research: Design and methods*. Thousand Oaks: Sage

Anexo I - Guião para a elaboração do relatório

Um relatório é um trabalho escrito onde devem descrever, analisar e criticar a atividade desenvolvida na exploração de uma tarefa. Devem apresentá-lo de forma clara e organizada, de modo a que qualquer pessoa que o leia tenha uma visão do trabalho que foi desenvolvido. A primeira parte do relatório é realizada em grupo e a reflexão é individual.

O relatório deve conter:

1ª Parte

Capa

Título, o nome dos elementos do grupo e a data de realização;

Introdução

Objetivo da tarefa e os materiais utilizados.

Desenvolvimento

Descrição pormenorizada dos processos, explicando como pensaram e as estratégias usadas.

As dificuldades sentidas e como as ultrapassaram.

Conclusão

Apresentação das conclusões obtidas, devidamente fundamentadas.

2ª Parte

Reflexão individual

Resumo do que aprendeste.

Apresentação de um comentário global sobre o trabalho desenvolvido (o interesse da tarefa; se contribuiu ou não para uma melhor aprendizagem, de que forma; as dificuldades sentidas a nível pessoal; etc.).

Autoavaliação do teu trabalho.

Observação:

Consultem os critérios de avaliação/autoavaliação do relatório, para poderem perceber o que é esperado que façam.

Anexo II. Tabela de Descritores para Avaliação/Autoavaliação do Relatório

Trabalho de grupo

	Nível 3	Nível 2
Apresentação do Relatório	Bem estruturado, de acordo com o que foi proposto. Sem erros de sintaxe, de pontuação e/ou ortografia, ou com erros esporádicos, cuja gravidade não implique perda de inteligibilidade e/ ou de rigor de sentido. Sem rasuras.	Respeita em grande parte a estrutura proposta. Com alguns erros de sintaxe, de pontuação e/ou ortografia, cuja gravidade não implique perda de inteligibilidade e/ ou de rigor de sentido. Com algumas rasuras.
Conhecimento matemático	Mostra compreender conceitos essenciais à exploração da tarefa e aplica-os adequadamente. Utiliza representações adequadas.	Mostra compreender grande parte dos conceitos essenciais à exploração da tarefa e aplica-os adequadamente.
Processos de exploração	Identifica os elementos importantes da situação mostrando compreensão de relações entre eles. Formula conjeturas. Apresenta um processo de exploração organizado e completo.	Identifica elementos importantes da situação mostrando compreensão de relações entre eles. Apresenta um processo de exploração organizado e quase completo.
Comunicação	Apresenta respostas completas com uma clara e não ambígua descrição ou explicação de todos os passos, incluindo as tentativas feitas e as conclusões obtidas. Apresenta argumentos fortes e lógicos. Utiliza a linguagem matemática corretamente.	Apresenta respostas satisfatórias, mas a descrição ou explicação de todos os passos, incluindo as tentativas e conclusões podem ser por vezes ambígua ou pouco clara. Apresenta argumentos que podem conter pequenas imperfeições. Utiliza linguagem matemática com pequenas incorreções.

Reflexão individual

	Nível 3	Nível 2
Reflexão crítica sobre a atividade desenvolvida	Comenta e resume as ideias centrais da atividade desenvolvida, de forma clara. Avalia o trabalho fazendo uma reflexão crítica sobre o seu desempenho. Explica as dificuldades sentidas e aponta aspetos a melhorar.	Comenta e apresenta as ideias centrais da atividade desenvolvida. Avalia o trabalho fazendo uma reflexão crítica sobre o seu desempenho. Explica as principais dificuldades sentidas.

Trabalho de grupo

	Nível 1	Nível 0
A presentação do Relatório	Não respeita grande parte da estrutura proposta. Com a presença de erros de sintaxe, pontuação e/ou ortografia, cuja gravidade implica perda frequente de inteligibilidade e/ou sentido. Com algumas rasuras.	Não apresenta a estrutura proposta. É pouco claro, dificultando a compreensão do que está escrito, apresenta erros de sintaxe, pontuação e/ou ortografia. Muito rasurado.
Conhecimento matemático	Mostra uma compreensão limitada dos conceitos essenciais à exploração da tarefa e não os aplica corretamente.	Mostra não compreender os conceitos matemáticos essenciais à exploração da tarefa.
Processos de exploração	Não identifica elementos importantes da situação nem relações entre eles. Apresenta um processo de exploração pouco organizado e muito incompleto.	Não apresenta estratégias apropriadas. O processo de exploração é inadequado e/ou irrelevante.
Comunicação	Apresenta alguns elementos satisfatórios omitindo partes significativas da resolução ou contendo incorreções. Descreve as conclusões obtidas, mas não as explica na totalidade. Utiliza a linguagem matemática com incorreções.	Não descreve nem explica os passos do trabalho realizado, as conclusões obtidas, nem as tentativas feitas. Não utiliza linguagem matemática.

Reflexão individual

	Nível 1	Nível 0
Reflexão crítica sobre a atividade desenvolvida	Comenta e apresenta ideias relacionadas com a atividade desenvolvida, mas não destaca as principais. Dá a sua opinião sobre a atividade desenvolvida, mas não a fundamenta. Não avalia o seu trabalho.	Não apresenta as ideias centrais da atividade desenvolvida. Não dá opinião sobre a atividade desenvolvida. Não avalia o seu trabalho.

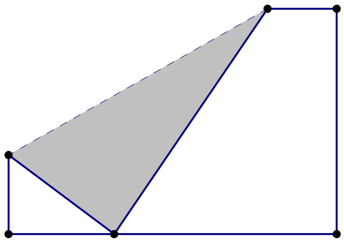
Adaptada de Semana, S., & Santos, L. (2008). A avaliação e o raciocínio matemático. *Educação e Matemática*, 100, 51-60.

Anexo III – Tarefa de investigacão

O triângulo de maior área

Realizem, em grupo, a tarefa de investigação, registem a vossa resolução e todas as tentativas, raciocínios e informações relevantes para depois elaborarem o relatório sobre a tarefa.

Dobrem uma folha de papel de modo que o canto superior esquerdo toque o lado inferior da folha, como mostra a figura.



Investiguem:
Qual é o triângulo de maior área formado pelo canto inferior esquerdo da folha por efeito dessa dobragem?

Bom trabalho!

Adaptada de Loureiro, C., Oliveira, A., Ralha, E., & Bastos, R. (1997). *Funções: Matemática - 10º ano de escolaridade*. Lisboa: Ministério da Educação e Departamento do Ensino Secundário.

Anexo IV - Guião da entrevista semiestruturada

Sendo uma entrevista semiestruturada, não se elaborou um conjunto muito preciso de questões, antes foram definidos alguns tópicos a abordar:

O guião para a elaboração do relatório e critérios de avaliação.

- Consultaram o guião para elaborarem o relatório?

  Mostrou-se útil? De que forma?

- Acham importante conhecer os critérios de avaliação do relatório?

  Porquê?

- Consultaram a tabela de descritores aquando da elaboração do relatório e da reflexão individual?

Feedback dado à 1ª versão do relatório.

- O *feedback* dado pela professora ao relatório contribuiu para a vossa aprendizagem? De que forma?
- Acham importante a realização do relatório em duas fases? Porquê?

Maria Gorete Pires Branco. Mestre em Ciências da Educação, área de especialização em Supervisão Pedagógica na Educação Matemática. Professora de Matemática da Escola Secundária de Caldas das Taipas, Braga, Portugal. **gorete.branco@sapo.pt**

Maria Helena Martinho. Doutorada em Didática da Matemática pela Universidade de Lisboa. Docente no Instituto de Educação da Universidade do Minho. Investigadora do Centro de Investigação em Educação da Universidade do Minho, Braga, Portugal. **mhm@ie.uminho.pt**

REVISTA IBEROAMERICANA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA

www.fisem.org/web/union

ISSN: 1815-0640
Número 37. Marzo de 2014
páginas 91-110

Diseño instruccional para el aprendizaje del concepto de límite: Un estudio de caso en el ITCG, la UJED, la UASLP y la UAN

Rafael Pantoja Rangel, Alicia López Betancourt, Maria Inés Ortega Árcega, José Cesar Hernández García

Fecha de recepción :29/11/2012
Fecha de aceptación: 12/10/2013

Resumen

Se generó y aplicó un Diseño Instruccional (DI), para propiciar que alumnos de cálculo de cuatro instituciones de educación superior, ITCG, UAN, UASLP y UJED aprendieran los temas de límites y continuidad. El DI se apoyó en un cuaderno de trabajo conformado por secuencias didácticas, que incluyen actividades de aprendizaje apoyadas en el *software WinPlot*, videos digitales, una conferencia, un cuestionario basado en el modelo de Felder-Silverman, entrevistas clínicas, un examen de diagnóstico, un examen postest y una encuesta de opinión. Los resultados del postest fueron estadísticamente significativos. En el aspecto cualitativo, los alumnos evaluaron positivamente los medios y los materiales. Las producciones mostraron que pudieron relacionar los acercamientos numéricos, tabulares y gráficos para la comprensión de los temas.
Palabras clave: diseño instruccional, límite, continuidad, *WinPlot*.

Abstract

The Instructional design (ID) was generated and applied to enhance the learning of limits and continuity in the calculus course in four institutions of higher education, ITCG, UAN, UASLP and UJED. The DI was supported with a workbook comprised of didactic sequences, including learning activities supported by the WinPlot software, digital videos, a conference, based on the Felder-Silverman model questionnaire, clinical interviews with students, a review diagnostic test and posttest opinion poll. The results of the posttest were statistically significant. In terms of quality, students evaluated positively the media and materials. The productions of the students showed that they were able to relate the numerical approaches, tabular and graphic for understanding the issues.
Keywords: instructional design, limit, continuity, WinPlot.

Resumo

Foi gerado e aplicado um design instructional (ID), para incentivar os alunos para o cálculo de quatro faculdades, ITCG, UAN, UASLP UJED e aprender os limites es os problemas de continuidade. O DI foi apoiado por um libro composto de seqüências didáticas, incluindo atividades de aprendizagem suportados pelo *software WinPlot*, vídeos digitais, uma conferência, com base no modelo de questionário Felder-Silverman, entrevistas clínicas com os estudantes, um teste de diagnóstico, o exame pós-teste e uma pesquisa de opinião. Os resultados do pós-teste foram estatisticamente significativas. Em termos de qualidade, os alunos avaliaram positivamente os meios e materiaris. As produções dos alunos mostrou que eles foram capazes de relacionar a abordagens numéricas, tabular e gráfica para compeens ão questões.
Palavras-chave: design instructional, limite, continuidade, *WinPlot*.

1. Introducción

La enseñanza y aprendizaje (E-A) de límites ha sido tratado desde diversas perspectivas (Tall, 1978, 1992; Hitt (2003a, b; Hitt y Lara, 1999; Cantoral, 2001, Martínez, 2010; Elia *et al* 2009; Martínez, *et al* 2011; Saucedo, s/f; Fregoso, 2005) como son el acercamiento analítico, numérico, gráfico, mediados por el uso de las TIC o con el simple trabajo a lápiz y papel. Estos estudios reportados se han tomado como eje directriz en algunas instituciones para transformar el proceso E-A, pero su masificación no es una realidad, porque no ha logrado cambiar la forma tradicional de enseñar los contenidos del curso de cálculo diferencial, (porque parece que son secuenciales e invariables), es decir, ignoran las sugerencias que se hacen en el modelo educativo propuesto por la Secretaría de Educación Pública (SEP), que recomienda organizar los contenidos temáticos de forma distinta, incluir el uso de las TIC, el método de resolución de problemas, el trabajo colaborativo y promover la investigación temprana entre otras.

El modelo educativo adoptado por una gran mayoría de instituciones de nivel superior de México, sugiere también tomar en cuenta en el diseño, formas alternativas para valorar el conocimiento aprendido como pueden ser la evaluación formativa, el portafolio o la evaluación sumativa, que por causas como son la pobre formación pedagógica de los profesores de matemáticas o lo numeroso de los grupos o por el tiempo restringido para los extensos contenidos de los curso son soslayados, y por facilidad se recurre al examen de conocimiento orientado hacia lo algorítmico, que se refleja en frases que aparecen continuamente en las evaluaciones: "*Calcula los siguiente límites*", *Factoriza la expresión siguiente"*, "*integra la función"*, "*calcula la derivada de la función"*, entre otros.

En función de tratar de obtener evidencias de aprendizaje y cotejarlas entre sí, en las que se refleje la generación de conocimiento de límites y continuidad, en el estudiante de primer semestre del Instituto Tecnológico de Ciudad Guzmán (ITCG), de la Universidad Juárez del Estado de Durango (UJED), de la Universidad Autónoma de Nayarit (UAN) y de la Universidad Autónoma de San Luís Potosí (UASLP), se planteó elaborar y aplicar un Diseño Instruccional (DI) (Dick y Carey, 2005; Guárdia y Sangrá, 2006).) cuyo contenido fue organizado en ocho secuencias didácticas (Tobón, 2010).

El modelo que se utilizó para la elaboración de las secuencias didácticas, fue el propuesto por Tobón, Pimienta y García (2010), quien lo describe como el conjunto articulado de actividades de aprendizaje y evaluación que, con la mediación de un docente, buscan el logro de determinadas metas educativas, considerando una serie de recursos que para el estudio son las actividades para aprendizaje, los cuestionarios y problemarios, apoyados por videos digitales, el software *WinPlot* y el trabajo a lápiz y papel, proceso que fue valorado mediante examen de conocimientos previos y postest, entrevistas clínicas, encuesta de opinión y observaciones directas en el aula.

Una primera situación a valorar fue el tiempo que cada una de las instituciones dedica al trabajo en el aula para límites y continuidad, debido a que se difiere en los tiempos asignados al tema, lo que originó modificaciones en la forma de trabajar las secuencias, en la selección de los medios y materiales a usar, así como la forma de evaluar, pero sin modificar la esencia del DI propuesto.

Fueron varias las diferencias que se identificaron al discutir los reportes de investigación de cada una de las instituciones participantes en el estudio, pero desde el punto de vista de los investigadores, ninguna fue significativa para desviar los resultados. Algo sustancial fue, por ejemplo, que en la UAN y en la UJED, los alumnos sujetos a la fase experimental están inscritos en grupos únicos, en carreras relacionadas con las matemáticas, *ie*, Aplicada en la UJED y Educativa en la UAN, mientras que en el ITCG y en la UASLP, se seleccionaron dos grupos de alumnos de ingeniería. Esta característica de la muestra tuvo consecuencias sobre la selección de los medios y materiales, porque en la UJED, se orientó más hacia el proceso analítico de límites y el uso de *WinPlot,* y como complemento la consulta de los videos digitales (VD), mientras que en la UAN, los videos fueron el motivo de la interacción alumno-alumno y alumno-profesor en el aula.

En el caso de los alumnos de ingeniería del ITCG y de la UASLP, se propuso que los VD se consultaran cada día antes a la sesión en el aula, por ejemplo, la indicación para la sesión 1, fue: "*Del DVD Teoría previa de límites de funciones reales de una variable real, ver el video V01 en los apartados: introducción al límite, contenidos de límites, procesos infinitos, aproximación del círculo",* porque se pretendió que fungieran como un elemento generador de conocimiento previo del contenido a tratar, que propiciara y enriqueciera la interacción alumno-alumno y alumno-profesor en la sesión de clase, situación que no se cumplió en su totalidad (Martínez, 2010; Hernández 2012), por causas atribuibles a la actitud de los estudiantes que no se acostumbran a ejecutar las actividades extraclase programadas por el profesor, hasta que se les convence (obliga), después de varios intentos, de que el hecho (o al menos intentar) de realizar las tareas, es un paso importante para propiciar una discusión en el aula, que conlleve a que su entendimiento sobre límites y continuidad logre promover en él un aprendizaje duradero.

Cada institución aplicó el DI, de acuerdo a las condiciones de su entorno, como suele suceder en el contexto educativo nacional, en el que cada profesor, cada institución oferta los contenidos matemáticos de acuerdo a las especialidades ofertadas y a sus objetivos. En la Tabla 1 se presentan las decisiones tomadas por los grupos de investigadores de las instituciones, con respecto de la forma de aplicar el DI.

Tabla 1. Elementos del DI en cada institución educativa

Acción	ITCG	UAN	UJED	UASLP
Selección de Grupos	2 experimentales 2 control	Grupo único de matemáticas	Grupo único de matemáticas	2 experimentales 1 Control
Videos digitales	En actividad extraclase y en el aula	En el aula	Como complemento	En actividad extraclase y en el aula
Software	*WinPlot*	*WinPlot*	*WinPlot*	*WinPlot*
Entrevista clínica	No	Si	No	Si
Examen de conocimientos previos	Aplicado	Aplicado	Aplicado	Aplicado en formato electrónico
Postest	Aplicado	Aplicado	Aplicado	Aplicado
Encuesta	Aplicado	Aplicado	Aplicado	Aplicado

2. Diseño Instruccional

El Diseño Instruccional (DI) es un proceso fundamentado en teorías de disciplinas académicas, especialmente en las relativas al aprendizaje humano, que tiene el efecto de maximizar la comprensión, uso y aplicación de la información, a través de estructuras sistemáticas metodológicas y pedagógicas. Una vez diseñada la instrucción deberá probarse, evaluarse y revisarse, atendiéndose de forma efectiva las necesidades específicas del individuo. El DI se centró en el modelo de Dick y Carey (2005), cuyas fases fueron las directrices que guiaron la puesta en escena de la etapa experimental. En la Tabla 2 se presenta la secuencia 2 del DI.

3. Medios y materiales

El DI es una metodología de planificación pedagógica que sirve de referencia para producir una variedad de materiales educativos atemperados a las necesidades estudiantiles, como un elemento preponderante para lograr calidad del aprendizaje (Yukavetsky, 2003) y que para el estudio aquí descrito fueron los siguientes:

3.1 Tutorial de WinPlot para uso específico del estudio de límites*.* Contiene información para su descarga e instalación en su computadora, descripción sobre el uso de comandos y menús para graficar funciones y analizar su comportamiento.

3.2 Tres DVD's con 28 videos digitales con la teoría previa de los contenidos de límite y continuidad. Este objeto para aprendizaje permite al alumno adquirir el conocimiento previo de límite y continuidad, de tal forma que pueda cuestionar, discutir y reflexionar con el profesor y sus compañeros.

3.3. Examen de conocimientos previos. Es un examen elaborado para valorar los conocimientos previos del estudiante antes de aplicar la fase experimental.

3.4 Cuaderno de trabajo. Se integra de ocho secuencias didácticas que el alumno contesta en grupo colaborativo en el aula y fuera de ella, acorde con lo señalado en el cronograma de actividades. En la Tabla 2 se describe la discusión D01.

Tabla 2. Una actividad del diseño instruccional

#	Tema	Actividad para realizar en el aula de clases o en la compuaula:	Actividades extraclase para el alumno
2	Procesos infinitos y concepto de límite. Acercamiento numérico y gráfico.	**Aula** • Discusión de los conceptos vistos en el video V01 y las respuestas al cuestionario C01.	• De DVD V01 analizar la teoría previa de límites de funciones reales de una variable real, en los apartados de acercamiento numérico y gráfico.
		Compuaula • Discusión de los conceptos de acercamiento numérico y gráfico del límite, vistos en el video V01. • Realizar las actividades de aprendizaje A01 sobre los acercamientos numérico y gráfico. • El maestro entrega a cada alumno el cuestionario C02 y problemario P01	• Contestar cuestionario C02 para los contenidos de acercamiento numérico y gráfico en equipo. • Solución del problemario P01 sobre acercamiento numérico y geométrico. • Del DVD V01 estudiar la Teoría previa de límites de funciones reales de una variable real, en la opción de la definición de límite.

3.5 Problemario. Ejercicios y problemas seleccionados de límites. En la Figura 1 se presenta el problema 2 del problemario P01: Aproximaciones numérica, geométrica y analítica y en la figura 2 las instrucciones para los videos de procesos infinitos.

2. Empleando un acercamiento geométrico corrobora los límites siguientes:	
$\lim\limits_{x\to 0}\sqrt{2x^2-x+8}=\sqrt{8}$	$\lim\limits_{x\to 0} e^{\frac{x}{x^2-1}}=1$
$\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\cos(x)}{x^2}=\frac{1}{2}$	$\lim\limits_{x\to 1}\frac{x-1}{x^2-1}$ no existe

Figura1. Acercamiento geométrico de límites.

<u>Discusión</u> (D01) sobre los **videos** de procesos infinitos y aproximación del círculo.

Técnica para el dialogo.

Nombre: Piensa, forma una pareja y comenta.

Tamaño del grupo: 2 alumnos

Tiempo de trabajo: 10 a 12 minutos.

Procedimiento:

1. Al inicio de la clase, pedir a los alumnos que formen parejas para trabajar durante esta sesión. Asignarse de común acuerdo quien será el “alumno A” y “alumno B”
2. Plantear las preguntas a la clase:
   a. ¿En algún momento el área del polígono será igual al área del círculo?
   b. ¿Qué entiendes por la expresión $\left(A_{\text{círculo}}-A_{\text{polígono inscrito}}\right)<\varepsilon$?
3. Dar dos minutos a los alumnos para pensar en ella e idear las respuestas individuales.
4. El alumno A comenta sus respuestas con el alumno B y, después, que el alumno B le comenta las suyas. Si no están de acuerdo, deben clarificar sus ideas, de manera que estén preparados para explicar cómo y por qué discrepan. Posteriormente deben negociar una respuesta conjunta, basándose en las ideas de ambos.
5. Escribir las respuestas, para posteriormente entregarlas.
6. El maestro solicitará un número determinado de respuestas individuales a las parejas procurando que solo participen las parejas que tengan ideas que no sea hayan mencionado.

Figura 2. Instrucciones para los videos de procesos infinitos.

3.6 Cuestionarios. Tienen como finalidad centrar la atención en lo que es más relevante para propiciar la reflexionar y comprensión de los conceptos y se trabajaron en grupo colaborativo y se discutieron con el profesor. En la Figura 3 se presenta el problema 3 del cuestionario C02.

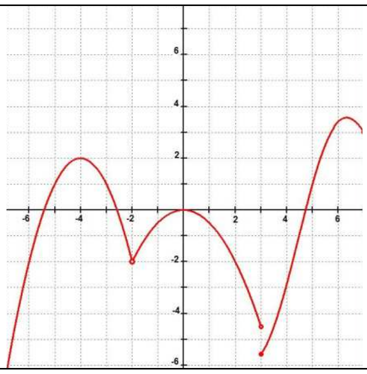
Problema 3. Para la función cuya gráfica se muestra a continuación, identifica cada límite solicitado o establece si el límite no existe.		
	a) $\lim\limits_{x\to -4} f(x)$ b) $\lim\limits_{x\to -2^+} f(x)$ c) $\lim\limits_{x\to 3^-} f(x)$ d) $\lim\limits_{x\to 3} f(x)$ $\lim\limits_{x\to -4^-} f(x)$	e) $\lim\limits_{x\to -2^-} f(x)$ f) $\lim\limits_{x\to -2} f(x)$ g) $\lim\limits_{x\to 3^+} f(x)$ h) $\lim\limits_{x\to -4^+} f(x)$

Figura 3. Cuestionario sobre límites laterales.

3.7 Post-test. Examen de conocimientos que se aplicó al final del trabajo de campo a los grupos experimental y de control.

3.8 Encuestas. Instrumento para evaluar la opinión de los alumnos con respecto a los medios y materiales y a la satisfacción de estudiante por la propuesta didáctica.

3.9 Cuestionario Felder-Silverman. El modelo de Felder y Silverman (AGHARTA, 2006) tiene como función identificar el estilo de aprendizaje y se aplicó a los alumnos de la UASLP, para planear la forma de utilizar los medios y materiales diseñados para la propuesta. El cuestionario se adaptó al formato electrónico (Ver Figura 4) con el software *NeobooK* Ver. 5.5.1 y se integra de 44 preguntas divididas en cuatro bloques con once preguntas cada uno, en el que las respuestas del estudiante se clasifican por cada bloque de manera automática y se guardan en un archivo individual, que se ubica en una espacio del disco local de la computadora en la que se ejecuta. Estos archivos se revisaron y se clasificaron las respuestas de los estudiantes.

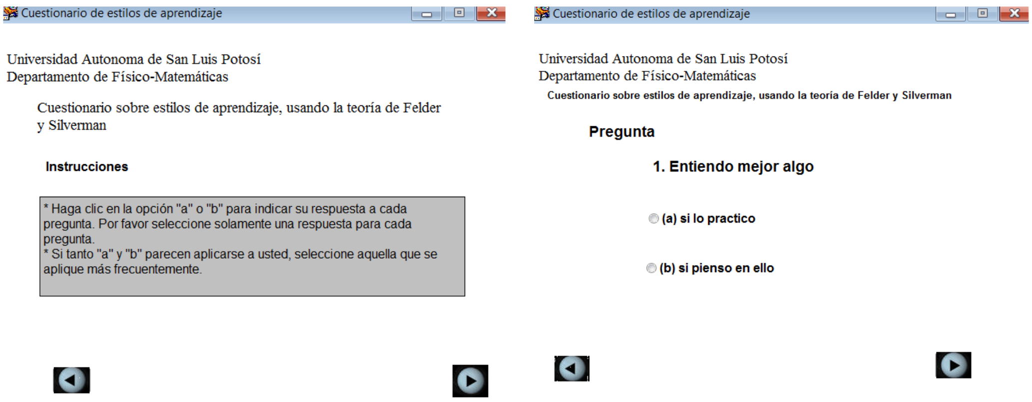


Figura 4. Pregunta 1 del cuestionario Felder-Silverman

De los datos obtenidos de cada uno de los cuestionarios aplicados, se describen las tendencias de los alumnos, respecto de la clasificación de los cuatro bloques: Activo-reflexivo, sensorial-intuitivo, visual-verbal y secuencial-global:

- Bloque Activo-reflexivo. El 54.5% de los alumnos presentan una tendencia hacia el aspecto visual.
- Bloque sensorial-intuitivo. El 68% de los alumnos se mantienen entre lo activo y lo reflexivo.
- Bloque visual-verbal. El 68.2 % de los alumnos se mantiene en el equilibrio entre lo sensorial y lo intuitivo.
- Bloque secuencial-global. El 50% de los alumnos del grupo experimental presentan una tendencia hacia al aspecto secuencial esto significa que aprenden en pequeños incrementos, cuando el siguiente paso está siempre lógicamente relacionado con el anterior.

La mayoría de los alumnos del grupo experimental tienen tendencias hacia un aprendizaje visual a través de gráficas, películas (*DVD*), diagramas, además de actividades de lecturas que ayuden a la discusión y a la reflexión, con respecto a la solución de problemas, requieren de actividades que les permitan seguir procedimientos en pasos lógicos y la habilidad de trabajar en grupo colaborativo.

4. Fase experimental en la UJED

La aplicación de la propuesta en la Escuela de Matemáticas en la UJED derivó en el trabajo de tesis de una egresada, quién en coordinación con el Secretario Académico y la Directora de tesis fueron los que guiaron la fase experimental, cuyo reporte culminó en una exitosa defensa de tesis para obtener el título de Licenciado en Matemática Aplicada.

A continuación se describen de forma general las acciones que se llevaron a cabo en la UJED previo a la aplicación del DI son:

- Una reunión con la maestra responsable del grupo para acordar los temas y la planificación en días y tiempo. También se acordó que la maestra explicaría al grupo acerca de la estrategia didáctica a aplicar. Cabe comentar que ella decidió no estar presente durante la exploración.
- Revisión y discusión del DI: Producción de los *DVD´s*, copias de los problemarios, cuestionarios, actividades de aprendizaje.
- Reunión con el Secretario Académico, la responsable del proyecto y la tesista para acordar el tema para la conferencia introductoria y lo que se espera obtener.
- Solicitud a la Secretaría Administrativa para trabajar en el aula Enseñanza de las Matemáticas con Tecnología (EMAT)

A continuación se discuten dos orientaciones de la fase experimental en la UJED: la interacción alumno-conferencista y el desarrollo, por parte de los estudiantes, de las representaciones gráficas, tabulares y analíticas (Duval, 1998; Luna, 2011).

4.1. Conferencia sobre la evolución histórica del límite

Hitt (2003) menciona que el concepto de límite es de los considerados difíciles en su enseñanza y aprendizaje, además que éste implica el introducir otro concepto delicado como es el de infinito. En López, Espinoza y Alonso (2009) se precisa que los estudiantes de primer semestre de la Licenciatura en Matemáticas Aplicadas de la UJED, manifiestan una tendencia en la conceptualización de infinito potencial, que conforme avanza en sus estudios, se madura y se acerca al logro de la aprehensión o acercamiento de infinito real. Así que para la fase experimental se decide iniciar con una conferencia sobre la evolución histórica del concepto de límite, con la finalidad de promover en los estudiantes el acercamiento al concepto del infinito real.

La conferencia "***Evolución histórica del concepto de límite***" se programó para la tercera sesión y estuvo a cargo del F. M. Isaac Mejía Hernández, quien enfatizó el proceso y el intervalo de tiempo tan extenso que se requirió para lograr la madurez del concepto de límite, acorde con Valdivé (2008), quien señala la importancia de estudiar la evolución histórico-epistemológica del concepto.

Con intención de recuperar impresiones de los estudiantes se les proporcionó, al finalizar la conferencia, un cuestionario con ocho preguntas. Éste cuestionario se resolvió de manera individual, posteriormente compartieron sus respuestas con el grupo. Atención especial se le dio a las pregunta 4 y 5 (Ver Figuras 5 y 7), que generaron una discusión por parte de los estudiantes con el conferencista.

Pregunta 4. Considere los segmentos $\overline{AB}$ y $\overline{CD}$ de la figura. ¿El segmento $\overline{CD}$ tiene más, igual o menos puntos que el segmento $\overline{AB}$?

A ________ B

C___________________D

Figura 5. Pregunta relacionada con el infinito.

Algunos estudiantes consideraron que el segmento $\overline{CD}$ tiene más cantidad de puntos, justificando su respuesta en que es "más grande". Después de unos minutos de debate, el expositor recurrió a una figura ilustrativa de una función que aplica del segmento $\overline{AB}$ al segmento $\overline{CD}$ (ver Figura 6), sin embargo, algunos estudiantes continuaban con incertidumbre y defendían su idea.

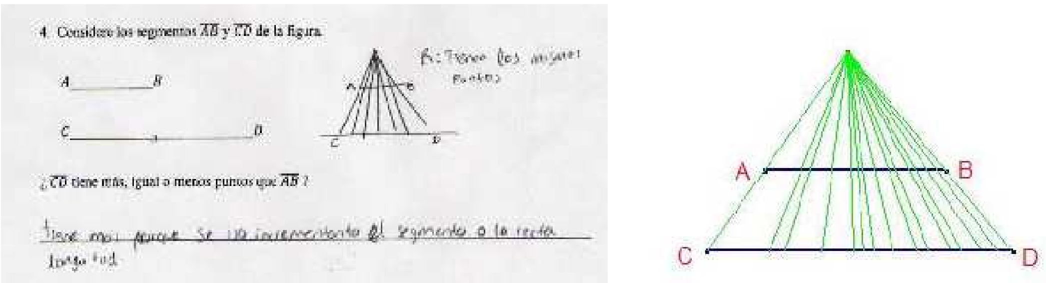


Figura 6. Aplicación del segmento AB al segmento CD

Pregunta 5. *¿Hay igual cantidad de enteros positivos {1,2,3,4,5,6,7,8,9,10,...} que de enteros positivos pares {2,4,6,8,10,...}, o más, o menos?*

Figura 7. Pregunta relacionada con el infinito.

En la siguiente figura se muestra lo expresado por los estudiantes respecto a que el segundo conjunto tenía menos elementos

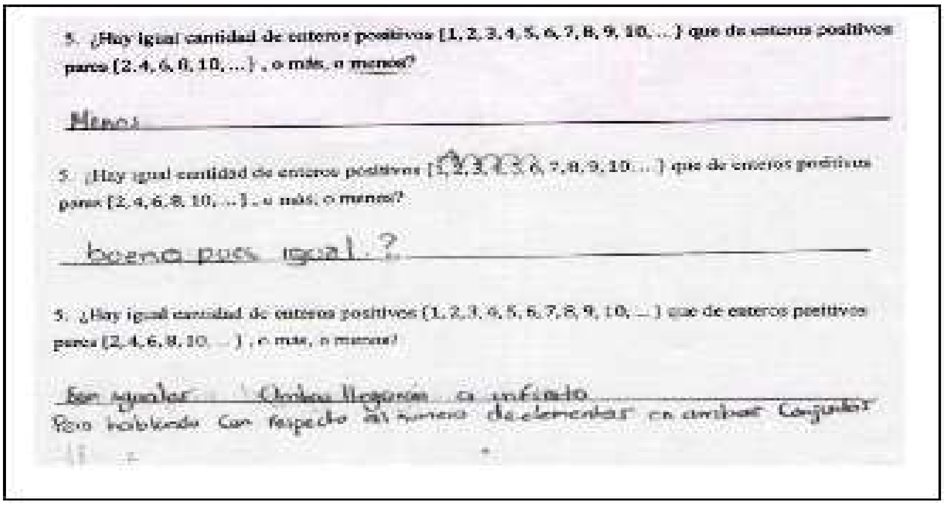


Figura 8. Respuesta de un estudiante a la pregunta 5.

En general, los estudiantes sólo tienen antecedentes del precálculo y la idea intuitiva se inclina hacia el infinito potencial (Hitt, 2009) lo cual crea conflictos cognitivos. Esto motivó una controversia con crítica constructiva de la que se pudo rescatar la distinción entre el infinito potencial y el infinito real. La conferencia provocó en los estudiantes conflictos cognitivos al pensar en estas soluciones. Se apreció que no todos quedaron convencidos, pero si se introdujo incertidumbre de sus respuestas y el repensar de forma distinta.

4.2. Representaciones gráficas, tabulares y analíticas

El segundo eje de análisis corresponde al cuestionamiento ¿cómo los estudiantes desarrollaron las representaciones gráficas, analíticas y tabulares para acercarse al concepto de límite en ambiente *WinPlot*?

Lo primero a comentar es que los problemarios, cuestionarios y las actividades de aprendizaje fueron diseñados para que los estudiantes se apoyen continuamente en las representaciones gráficas, analíticas y tabulares.

A continuación se discuten algunas de sus producciones en las que se evidencian las diferentes representaciones que trabajaron.

En el ejercicio 5 se trata de proponer el acercamiento número y gráfico, para ello se pide emplear un acercamiento geométrico para demostrar un límite, en síntesis este ejercicio, son una serie de pasos para construir la interpretación geométrica de límite, proponiendo un ε, y es aquí donde resulta interesante mencionar que algunos estudiantes proponían para la siguiente instrucción:

“Propón un valor muy pequeño al que llamaremos ε, considerando que ε>0”

Propusieron el valor ε=1, situación que se discutió y se aclaró en su momento, y más aún, al finalizar el ejercicio y llegar a la construcción que se muestra en la figura 4, se enfatizó que ε debe ser muy pequeño, que para cada ε propuesto, existe un δ que forma un intervalo (a+δ , a-δ) de modo que a cada punto de este intervalo le corresponde otro punto dentro del intervalo (L-ε, L+ε), para comprobarlo se proponen x_0, como se muestra en la figura 9 correspondiente a los intervalos que plantearon.

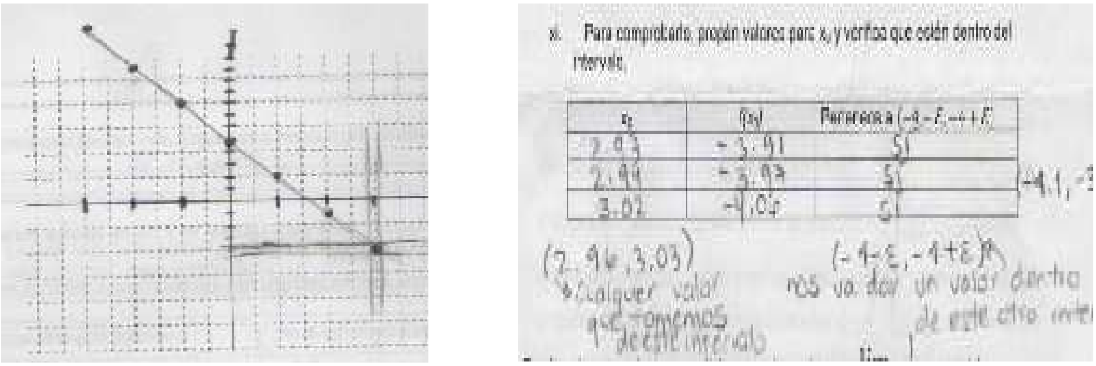
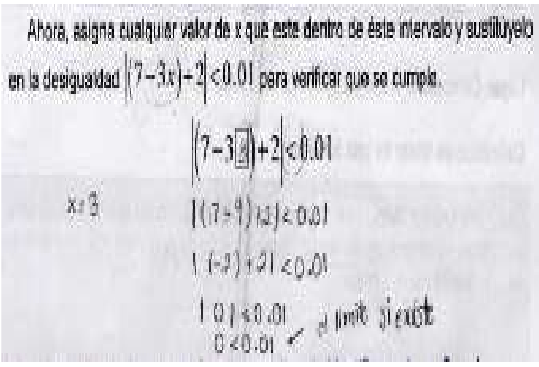


Figura 9. Interpretación gráfica de ε y δ por parte del alumno.

El análisis numérico y geométrico de límite son dos acercamientos al concepto que en el aula no se les da la misma importancia que al proceso algorítmico, situación que se trata de subsanar en el DI planteado, porque son fundamentales para que el alumno se apropie del concepto de límite. Se evidencia que los alumnos al inicio de las actividades tuvieron dificultades en la interpretación de los acercamientos numérico y geométrico, pero finalmente, se logró un análisis enriquecedor y constructivo, lo que coincide con lo expresado por Hitt (2003) en donde expresa que la enseñanza del cálculo ha estado enfatizada a aspectos algebraicos sin atender otras representaciones lo cual limita la comprensión de conceptos del cálculo.

Al elaborar el plan de trabajo para ejecutar el DI pareciera que lo escrito será plasmado en la realidad, sin embargo siempre existirán divergencias, y una de ellas fue la extensión en el número de sesiones, que de once programadas se llegó hasta catorce, aún y cuando se eliminó el tema de continuidad.

El trabajar de forma continua durante catorce sesiones más el trabajo extraclase permitió que la mayoría de los estudiantes pudieran trabajar el razonamiento analítico del límite a partir de la definición formal (Ver figura 10).



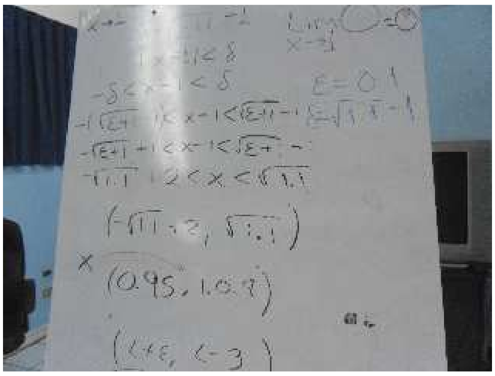


Figura 10. Trabajo con la definición formal de límite

A partir de la sesión 7 se empezó a percibir incomodidad por parte de algunos de los estudiantes ante el hecho de realizar las secuencias didácticas en EMAT, expresando su interés por trabajar en el salón de clase, donde una vez que el maestro explica el tema, se propone realizar ejercicios, es decir, de la forma tradicional.

Ante esto, las responsables del proyecto platican con los estudiantes antes de finalizar esta sesión. Éstos externan haber aprendido a graficar en *WinPlot* pero que les gustaría que la profesora resolviera más ejercicios en pizarrón, que se trabajara más la sección de desigualdades, que efectivamente había sido uno de los temas en que los resultados fueron muy bajos en el examen de diagnóstico. También expresaron que el tiempo estimado para cada sesión debía ser más amplio, dado que se les acumulaba el trabajo extraclase de los problemarios, cuestionarios y los DVD´s además de las actividades de otras materias.

En correspondencia a esta actitud de los estudiantes de la UJED, se encuentran los comentarios de los profesores del ITCG y de la propia UJED, que en sesiones de academia afirman que la actitud de los alumnos actuales dista mucho de la esperada por los profesores, quienes sugieren desde que inicia el curso, se promuevan en el grupo valores como la puntualidad, honestidad, responsabilidad, participación, entre otros, como parte de su actitud para aprender, pero desafortunadamente esta falta de compromiso obstaculiza el avance de la programación de actividades sujetas a metodologías de enseñanza alternativa, como la aquí descrita.

Por fortuna en la UJED, la plática con las responsables ayudó a que los estudiantes hicieran un mayor esfuerzo y comprometerse a cumplir con el resto de las sesiones, sin embargo se eliminó el tema de continuidad.

5. Entrevistas

En la UAN y en la UASLP se incluyó la entrevista clínica con estudiantes, por considerar que la opinión de los estudiantes sobre la alternativa didáctica, es importante. Se transcriben algunas de las opiniones de las grabaciones de las entrevistas con los estudiantes de la UAN y de la UASLP.

5.1. Entrevista al Alumno 1

Entrevistador: Quisiera saber tu opinión acerca del examen, las dificultades que enfrentaste a la hora de resolverlo y como lo hiciste, es decir, ¿Cuál fue tu estrategia? Veo que tienes por escrito todas las estrategias al resolver los límites de la pregunta uno, pero me llama la atención que al llegar al límite trigonométrico, no hayas escrito la estrategia que utilizaste ¿podrías comentarla?

Alumno 1: *Fue por deducción, resolví todo ese bloque de ejercicios sólo me faltó el trigonométrico al ver único inciso que quedaba libre -de relacionarlo con la respuesta correcta- supuse que esa sería la respuesta. No tuve idea de cómo se resolvía.*

Entrevistador: ¿Cuál fue la estrategia para resolver la pregunta 5?, ¿Cómo le hiciste?

Alumno 1. *La estrategia para resolver el problema fue graficando, de acuerdo a las gráficas me daba una idea de donde más o menos se presentaba una discontinuidad*.

Entrevistador: Dime todo lo que viene a tu mente cuando digo límite, asíntotas y continuidad

Alumno 1: Límites; lo primero que se me viene a la cabeza, lo primero que pienso es a lo que se aproxima un valor, lo máximo que se pueda acercar. Asíntotas; lo primero que pienso es la discontinuidad

Entrevistador: Por último, ¿Te gustó la forma de trabajo en equipo, los videos, el *WinPlot*?

Alumno 1: Sí, todo me gustó sobre todo el WinPlot por que a partir de mis respuestas o resultados yo comprobaba con WinPlot para ver si era correcto, comprobaba mis resultados y a partir de eso me daba cuenta si está mal o bien, el trabajo en equipo me ayudó mucho pues también aprendía mucho cuando trataba de explicarles algo.

5.2. Entrevista al Alumno 2

Entrevistador: ¿Qué problema se te complicó más? y ¿Cuál fue la estrategia?

Dulce Lucero: Realmente el ejercicio 5 se me complicó mucho y no haber podido comprobar la respuesta del límite trigonométrico.

Entrevistador: ¿Quisieras agregar algo más?

Alumno 2: Bueno pues, se me hizo muy interesante la clase, así como usted la dio, en un principio yo estuve en contra de los videos porque me dije yo no quiero videos *yo ocupo la explicación de la maestra, pero conforme fue trascurriendo las clases me di cuenta que cuando veía los videos en mi casa y después llagaba a clase entendía mejor al clase. Por los videos me daba noción del tema que veríamos y reafirmaba más mis conocimientos; los videos me hicieron razonar y me hicieron independiente del maestro yo era una chava que dependía mucho de los maestros y ahora ya no, trato de ser más independiente*

Entrevistador: Por ultimo ¿Te gustó la forma de trabajo en equipo?, ¿Los videos?, ¿El WinPlot?

Alumno 2: *Para mí, la vedad me gustó mucho la forma de dar su clase, el WinPlot me ayudó mucho, porque podía ver cómo era el límite, no lo vi como cuentas, como fórmulas, lo vi físicamente, a muchas personas nos ayuda mucho el ver lo que hacemos; con respecto al equipo, también me gustó mucho porque compartimos ideas, conclusiones, a parte nos explicábamos unos con otros, y así como lo hicimos al interior del equipo, también al exterior con otros equipos discutíamos las ideas. Sentí como si todo el grupo fuéramos un equipo me divertí mucho.*

5.3. Entrevista al alumno 3

Entrevistador: Por último, ¿Te gustó la forma de trabajo?, ¿Los videos?, ¿el WinPlot?, ¿En equipo?

Alumno 3**:** *Sí, lo único que no me gustó mucho fueron los videos porque no se entendía, además iba muy rápido, me gustó mucho el trabajo en equipo, porque todos nos ayudamos, porque lo que yo no sabía, algún compañero lo sabía y me lo explicaba, nos ayudamos mucho entre sí, además de que era muy divertido***.**

5.4. Entrevista al alumno 4

Entrevistador**:** Dime todo lo que viene a tu mente cuando digo límite, asíntotas y continuidad.

Alumno 4**:** *limite pues según yo es un punto límite, es una función donde llega a un punto que……… Asíntotas son para dividir regiones, la recta que pasa cerca de una función pero no lo toca. Continuidad son las funciones continuas y las funciones continuas son funciones infinitas.*

Entrevistador**:** Por último ¿Te gustó la forma de trabajo?, ¿Los videos?, ¿El WinPlot?, ¿En equipo?

Alumno 4: *A mí lo que me gusto fue trabajar en el WinPlot y lo que no me gustó fueron los videos porque no les entendía.*

Se nota en la actitud de los alumnos que la propuesta fue de su agrado, que tienen argumentos válidos para defender su conocimiento sobre límites.. Ni que hablar de trigonometría, que aunque está incluida en los cursos de bachillerato, no es tratada con la misma atención que álgebra, que por comentarios de los estudiantes, "*no la entienden porque nunca la vieron en su escuela*", así que no es novedad el hecho de que los alumnos no los puedan solucionar.

Respecto de los videos, algunos alumnos no dispusieron de un lector de DVD en su casa o en su computadora, así que no se cumplía con la tarea de observarlos antes de la sesión en el aula, para tener un conocimiento previo y así enriquecer la interacción alumno-alumno y alumno-profesor.

Por otra parte el video como un precursor de conocimiento siempre ha sido cuestionado, pero la postura en este trabajo, es de apoyo, es de proporcionarle al estudiante una ayuda en la que pueda apoyarse para cumplir con sus tareas, en la que se destaca también su importancia como generador de conocimiento previos al tema que se tratará en el aula, donde con el trabajo colaborativo y las aportaciones del profesor, se fortalece la perspectiva de apropiarse del contenido matemático seleccionado.

Asimismo, el alumno tradicional requiere que el profesor le explique en el pizarrón, se desespera porque no entiende y opta por dejar de lado los videos, ignora las actividades de aprendizaje y se transforma en un ente negativo en las sesiones, de tal forma que intenta bloquear el buen desarrollo del grupo colaborativo, porque está acostumbrado a que el profesor sea e centro de atención en el aula, porque como lo menciona el alumno 2, su participación en el trabajo evolucionó conforme transcurrían las sesiones, no sólo en su grupo, sino con el resto de los grupos de su curso.

6. Encuestas

Con el propósito de indagar la satisfacción por la nueva metodología de enseñanza y los materiales, se aplicaron encuestas a los alumnos sujetos a la investigación, porque se considera que son importantes los aspectos cualitativos, referentes a la actitud de los sujetos sobre la propuesta.

Además de las observaciones realizadas por el profesor en la sesión posterior a la consulta del video y de los cuestionarios, se observó que los motiva en el aprendizaje del nuevo conocimiento, porque se promovieron las actividades extraclase, las discusiones en el aula y el trabajo con la computadora. Se sabe que el uso del software de matemáticas es un buen medio para aprender matemáticas, tal y como sucedió en esta investigación, además de las observaciones realizadas por el profesor en la sesión posterior a la consulta del video y de los cuestionarios, se observó que los motiva en el aprendizaje del nuevo conocimiento.

Después de aplicar la estrategia didáctica a los alumnos del grupo experimental se notó mejoría en aspectos como una mejor visualización de los temas, una mayor actividad en el tratamiento de los temas y un sobresaliente desempeño en la solución de problemas. Paralelamente, los alumnos desarrollaron con esta estrategia, habilidades de trabajar en grupo, visuales, operativas y racionales, ya que la estrategia es más integradora que una enseñanza tradicional.

La encuesta se cuantificó con una escala de Likert, mediante la que se observó la tendencia de opinión por la metodología, por ejemplo, para la evaluación de los materiales el promedio es de 4.22, y siendo superior a 4 cae dentro de la categoría **De acuerdo**. La Figura 11 muestra los porcentajes para cada categoría, y se observa que el 58% de las respuestas caen dentro de la categoría **De acuerdo**, y el 34% caen en la categoría **Completamente de acuerdo**.

Se presentan algunos comentarios de alumnos de la UJED en los que expresan su satisfacción y conformidad a la estrategia aplicada, donde no están de acuerdo en elaborar demasiado trabajo extraclase, otros más hacen referencia al tiempo de aplicación y un sólo alumno expresa que prefiere "la clase tradicional".

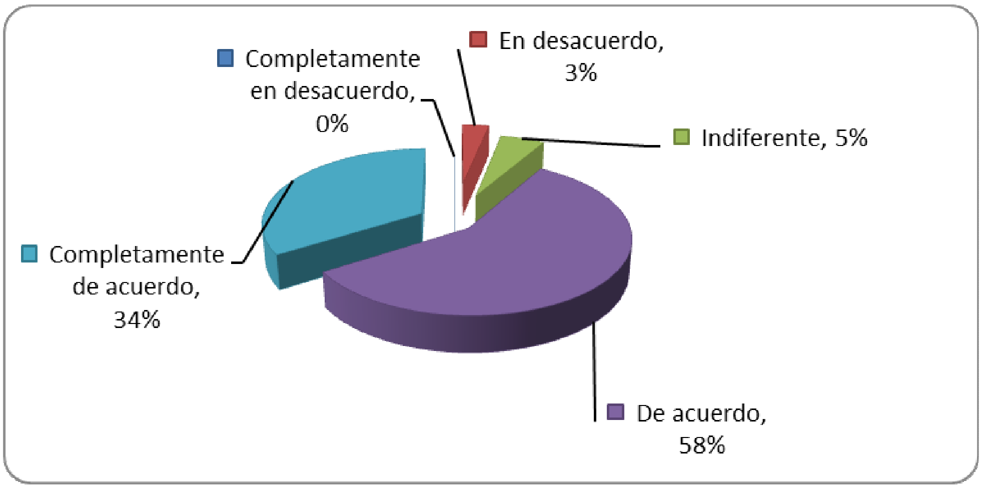


Figura 11. Resultados de la evaluación correspondiente a los materiales.

Estudiante 1: Me pareció una muy buena actividad porque nos damos cuenta qué pasa realmente en la gráfica, además de conocer un modo distinto de aprender el tema.

Estudiante 2: Las actividades de aprendizaje son un buen método de enseñanza ya que se analiza la función.

Estudiante 3: Este curso fue muy bueno porque complementé mi aprendizaje de buena forma.

Estudiante 4. Me gustó mucho la manera de explicar de la profesora lo que me molestaba poco era la carga de tarea.

Estudiante 5. Fue muy rápido el curso y no se tenía el tiempo necesario para resolver los cuestionarios.

Estudiante 6. Yo prefiero la clase tradicional en donde el profesor da la clase completa e interactúa poco con los alumnos, el trabajo en la computadora puede hacerse como un extra, el profe podría recomendar usar el WinPlot de tarea.

La mayoría de los estudiantes mostraron satisfacción sobre el DI aplicado, aunque, algunos estudiantes se mostraron renuentes a la propuesta, cabe mencionar que estos últimos vienen a coincidir con los alumnos que más inasistencias tuvieron durante la fase experimental. Por lo que esta falta de compromiso e inconstancia induce a los mismos a no aprovechar de manera adecuada la metodología planteada.

7. Examen de conocimientos previos

Una de las actividades iniciales, fue solucionar los problemas referentes al contenido de límites y continuidad en los libros más utilizados en las instituciones de educación superior participantes en el estudio, con la finalidad de identificar la matemática que se involucra en la solución de los problemas, para diseñar el examen de conocimientos previos los más apegado a la realidad.

La aplicación del examen de conocimientos previos arroja resultados “esperados” que denotan una pobre preparación algebraica de los estudiantes de las instituciones participantes en el estudio, que evidencian que la preparación académica en función de los resultados, no son satisfactorios para aprender límites y continuidad, pero sí se afirma que los grupos son homogéneos de acuerdo a los promedios arrojados.

Esta situación es preocupante por el bajo nivel académico que muestran los estudiantes pero también es cierto que es un problema a nivel nacional. Como una medida para subsanar esta falta de conocimientos previos para el curso de cálculo en general, límites y continuidad, en particular, en algunas instituciones de nivel superior se ha implantado un curso propedéutico, remedial o de inducción, orientado a la solución de problemas que promuevan habilidades y capacidades de pensamiento avanzado matemático.

8. Postest

Una vez concluidas todas las fases del diseño instruccional en los grupos experimentales, se aplicó el examen postest, con la finalidad de obtener datos, para corroborar, en base a la premisa de que son distintas las condiciones socioculturales de los grupos experimentales, sí los grupos tendrían o no una diferencia significativa respecto del aprovechamiento obtenido. Una vez analizado los datos con la prueba ***t***, realizado dos a dos de las muestras conformadas por las calificaciones del postest, se determina que los alumnos sujetos a la experimentación no difieren significativamente en el aprovechamiento obtenido por la aplicación de la propuesta sobre el aprendizaje de límites y continuidad. En las Tablas 8 y 9 se presentan los estadísticos arrojados por el programa *StatGraphics* sobre los que se tomó la decisión.

Cada institución implantó su sello personal a cada uno de los respectivos estudios, como son la especialidad, edad, semestre, género, instalaciones, y de la interpretación de los datos con las condiciones locales se determina que todos los alumnos se ubican estadísticamente en el mismo nivel de conocimientos, para los contenidos de límites y continuidad.

Tabla 3. Resumen estadístico de las poblaciones

Estadísticos	Instituciones		
	ITCG	UASLP	*UAN*
Frecuencia	72	29	*14*
Media	62.9028	58.4483	*66.5714*
Varianza	302.427	343.97	*509.341*
Desviación típica	17.3904	18.5464	*22.5686*
Mínimo	15.0	13.0	*33.0*
Máximo	85.0	100.0	*100.0*
Rango	70.0	87.0	*67.0*
Asimetría tipi.	-3.81835	-0.898031	*-0.255298*
Curtosis típificada	1.07414	0.446341	*-1.00773*

Tabla 4. Resumen estadístico con la prueba t entre las poblaciones

• *Hipótesis Nula: Media1 = Media2* • *Hipótesis alternative: Media1 ≠ Media2 suponiendo variancias iguales*	
*Valor **t** y **p-valor** en un nivel de confianza con un 95.0 % para el postest del ITCG y UASLP*	*t = 1.14266* *p-value = 0.255936*
*Valor **t** y **p-valor** en un nivel de confianza con un 95.0 % para el postest del UAN y UASLP*	*t = 1.25367* *p-value = 0.217063*
*Valor **t** y **p-valor** en un nivel de confianza con un 95.0 % para los datos del Postest ITCG y UASLP*	*t = 0.686787* *p-Valor = 0.494108*

9. Conclusiones

Se nota que los alumnos sujetos a la fase experimental, desde el punto de vista de los investigadores participantes, lograron un aprendizaje significativo, lo que conlleva a que alcanzaron habilidades como el trabajo colaborativo, la gestión de la información, la mejora de su comunicación y la promoción de valores.

Los valores son aspectos muy importantes cuando se incluye en el DI el trabajo en grupo colaborativo, ya que la socialización del conocimiento es parte de la convivencia diaria en las instituciones educativas; la motivación para aprender es uno de los primeros valores que debemos promover en el aula, al igual que la honestidad, la puntualidad y el respeto, ya que las generaciones actuales de alumnos universitarios tienen tanta distracciones, que resulta casi imposible competir con las actividades planeadas para trabajo en el aula.

Con base en la entrevista y en los resultados de la encuesta, a los alumnos les agradó trabajar con el programa *WinPlot*, que apoyó el desarrollo de las actividades de aprendizaje, como fueron los cuestionarios y los problemarios, desarrolladas en el trabajo colaborativo. Es importante respecto del uso del *software* de matemáticas, resaltar que propició los acercamientos numéricos y gráfico, *ie*, la visualización y comprensión de lo que pasaba con las funciones al responder los cuestionarios y solucionar los problemarios de límites, al observar los distintos tipos de discontinuidades y el comportamiento de las asíntotas verticales, horizontales y oblicuas.

Con respecto a los videos digitales, en un principio les gustaron y se notaban motivados, pero cuando se inició con temas más complicados (Definición de Límite) su consulta extraclase se complicó y argumentaron que no los entienden y hace falta un guía para responder las dudas generadas en ese momento. Lo situación es que los videos se construyeron con la finalidad de que el alumno adquiera conocimientos previos al tema, y así la discusión en clase se enriquezca, porque de los contrario, al inicio de un tema nuevo, el estudiante tiene más dificultades para lograr aprendizaje. Es cierto que el video se debe de ver en conjunto con el especialista de matemáticas, pero también el alumno debe tener la capacidad para, al menos, lograr entender lo mínimo de los contenidos tratados en el video.

Los instrumentos de evaluación se considera que cumplieron con la función encomendada dentro del diseño instruccional, pero son perfectibles, así que en reunión posterior con los investigadores del ITCG, UAN, UJED y UASLP, se analizarán en detalle la información generada respectivamente, tendiente a mejorar el diseño instruccional para los contenidos de límites y continuidad. Estadísticamente la propuesta funcionó, y como una observación de su tutora: "*después de aplicar la propuesta, observo que los estudiantes continúan en sus cursos con el trabajo en grupo colaborativo, utilizan el programa WinPlot y los más fascinante, es que se motivaron a buscar software de matemáticas en el que se apoyen para los siguientes temas o cursos de matemáticas*".

Atención especial merece la participación de los alumnos, quienes fueron el eje central de la propuesta.

Este tipo de trabajos son propuestas didácticas para mejorar el aspecto docente, con la finalidad de que se le dé un cambio sustantivo a la labor que los actores de la enseñanza y aprendizaje desarrollan en el aula, que de la misma forma como se propone que los alumnos trabajen colaborativamente, los profesores agrupados en las academias o en los cuerpos académicos sesionen y propongan alternativas de enseñanza de las matemáticas, para lograr en el estudiante un aprendizaje significativo.

Durante la exploración de esta estrategia, se pudo observar que la clase tradicional fue un obstáculo ya que los alumnos están muy acostumbrados a ésta, sin embargo, al exponer la conferencia sobre el desarrollo histórico del concepto de límite se despierta el interés en los alumno al ver en otro contexto el tema.

Las secuencias didácticas conforman un gran apoyo para que el alumno analice, conjeture y redacte sus propias conclusiones, lo que permite induce al alumno aprender a aprender, y es así que el alumno se deslinda de estas "anclas" con la que venía lidiando.

En este sentido, la estrategia didáctica que se diseñó para abordar el tema de límites en un contexto donde las diferentes representaciones del objeto matemático juega un papel primordial, se puede decir que las herramientas de apoyo propuestas tales como: una conferencia, secuencias didácticas, videos educativos y el *software* graficador *WinPlot*, realmente permitieron al alumno acceder con más representaciones semióticas al concepto de límite.

10. Recomendaciones

El diseño de la estrategia para abordar temas como el de la derivada y la integral de una función, se sugiere incluya: conferencias, esto despierta el interés en los estudiantes; secuencias didácticas que induzcan al alumno al conocimiento; se apoye en tecnología ya que ésta forma parte de un mundo vanguardista y se fortalezca con material como es el caso de los videos educativos.

La selección del *software* que se desee incorporar, debe ser de manera muy selectiva para evitar formar un obstáculo cognitivo entre el concepto y sus representaciones. Además que éste debe ser como apoyo y no como parte central de proceso de enseñanza.

Es importante hacer una planeación para las sesiones de trabajo para la exploración de la estrategia, que permita alcanzar los objetivos, pero a su vez, sea flexible, ya que no se puede determinar un tiempo preciso para que los alumnos terminen las secuencias.

Se recomienda realizar una retroalimentación grupal después de cada secuencia didáctica para fortalecer y complementar con las aportaciones de los alumnos y el profesor. La estrategia debe aplicarse sólo si se cuenta con la infraestructura y el apoyo tecnológico necesario, además de un compromiso de los alumnos por asistir de manera regular, puntualmente y sin distraerse en otras ventanas en el equipo de cómputo.

Bibliografía

Agharta. (2006). *Manual de estilo de aprendizaje.* Material auto-instruccional para docentes orientadores educativos). Programa Nacional de Educación 2001-2006, Gobierno de la Republica. Disponible en línea: http://www.cgms.uady.mx/documentos/Manual-pdf. Recuperado el 22-08-09.

Cantoral, R. y Montiel, E. G. (2001). Funciones: visualización y pensamiento matemático. Pearson Educación: México. 1-4.

Cantoral, Ricardo. (1997). Hacía una didáctica del cálculo basada en la cognición. Serie: antologías, Área de educación superior Departamento de Matemática Educativa, Cinvestav – IPN.

Dick, W., Carey, L. y Carey, J. (2005). *The systematic design of instruction,* 6th Ed. California: Pearson Disponible en línea Recuperado el 24 Noviembre de 2012 de http://www.comp.dit.ie/dgordon/courses/ilt/ilt0004/thesystematicdesignofinstruction.pdf.

Duval, R. (1998). Registros de representación semiótica y funcionamiento cognitivo del pensamiento. Investigaciones en Matemática Educativa II. Grupo Editorial Iberoamérica, México. 173-201.

Elia, I. Gagatsis, A., Panaoura. A., Zachariades, T. y Zoulinaki, F. (2009). Geometric and algebraic approaches, the concept of limit and the impact of the didactic contract. International Journal of Science and Mathematic Education. Vol 7, june, 765-790.

Ferrini-Mundy, J. & Graham, K. (1989). Research in calculus learning: understanding of limits, derivates and integrals. Research issues in undergraduate mathematics learning: Preliminary Analyses and Results. MAA notes number 33. Mathematical Association of America.

Fregoso, J. R. (2005). Aprendizaje de límites de funciones racionales con el empleo de software WinPlot . Tesis de Maestría en Ciencias en la Enseñanza de las Matemáticas no publicada. CUCEI. Universidad de Guadalajara.

Guárdia, L. y Sangrá, A. (2006). Diseño instruccional y objetos de aprendizaje, hacia un modelo para el diseño de actividades de evaluación del aprendizaje on-line. Recuperado el 23/07/2012 de http://www.scribd.com/doc/3938421/lectura2.

Hee - Sun L. & Soo - Young L. (1996). *Dick & Carey Model*. Disponible en línea: Recuperado el 24-07-2012. http://www.umich.edu/~ed626/Dick_Carey/dc.html

Hernández, G. (2006). *Miradas constructivistas en psicología de la educación*. Primera edición. Mexico: Editorial Paidós Mexicana.

Hernández, J. C. (2012). Estrategia didáctica con base en videos explicativos y el WinPlot para el aprendizaje de límites. Tesis de Maestría en Ciencias en la Enseñanza de las Matemáticas no publicada. CUCEI. Universidad de Guadalajara.

Hitt F. & Lara H. (1999). *Limits, Continuity and Discontinuity of Functions from Two Points of View; That of the Teacher and that of the Student*. *British Society for Research into Learning Mathematics.* pp. 49-54. Lancaster, U.K.

Hitt, F (2009). El infinito en matemáticas y el aprendizaje del cálculo: infinito potencial versus infinito real. “Seminario Enseñanza del Cálculo. Un reporte”. Memorias del Primer Encuentro Nacional sobre la Enseñanza del Cálculo. Ed. CINVESTAV. Págs. 21-36. México, D.F.

Hitt, F. (2003). Dificultades en el aprendizaje del cálculo. En L. Guerrero, R. García R, A. Sepúlveda & C. Cortés (Ed.), Memorias de las conferencias plenarias del XI Encuentro de Profesores de Matemáticas. Morelia, Michoacán, pp. 1-26. Obtenido 12/10/2003 en http://www.matedu.cinvestav.mx/librosfernandohitt/Doc-6.doc.

Hitt, F. (2003). *El concepto de infinito*: *Obstáculo en el aprendizaje de límite y continuidad de funciones*. Matemática educativa: aspectos de la investigación, (coordinador, Eugenio Filloy). D.F, México: Fondo de Cultura Económica.

López, A. Espinoza de los M, J. y Alonso, M. E. (2009). Conceptos del cálculo diferencial en los estudiantes de primer año de la UJED: un diagnóstico de sus percepciones. Ponencia presentada en el Tercer Encuentro Internacional sobre la Enseñanza del Cálculo. Saltillo, Coahuila.

Luna, M., (2011). Límite de una función real una estrategia didáctica con WinPlot Tesis S/P. Escuela de Matemáticas. Universidad Juárez del Estado de Durango.

Martínez, R. D., Montero, Y. H. y Pedrosa, M. E. (2001). La computadora y las actividades del aula: Algunas perspectivas en la educación general básica de la provincia de Buenos Aires. Revista Electrónica de Investigación Educativa, 3 (2).

Pantoja, R., Martínez, J. C., Nesterova, E., Castillo, L. (2011). Diseño instruccional con soporte en videos digitales y WinPlot para el aprendizaje de Límites. Memorias de la XX Semana Regional de Investigación y Docencia en Matemáticas. ISBN: 978-607-7782-91-9.

Saucedo, R., Cuevas, F. y Hernández, L. (s/f). Un estudio de límite de funciones racionales: Formas Indeterminadas 0/0. Recuperado el 24 de Noviembre de 2013 en http://www2.uacj.mx/MatematicasTecnologia/Calculo.htm. Matemáticas con Tecnología. Universidad Autónoma de Cd. Juárez.

Tall, D. O. (1992). *The Transition to Advanced Mathematical Thinking*: Functions, Limits, Infinity and Proof. Macmillan.

Tall, D., O. & Schwarzenberger R .L. E. (1978). *Conflicts in the Learning of Real Numbers, and Limits.* Mathematics Teaching. Disponible en línea: http://www.warwick.ac.uk/staff/David:Tall/pdfs/dot1978c-with-rolph.pdf

Tobón, S., Pimienta, J. y García, J. (2010). *Secuencias Didácticas: Aprendizaje y evaluación de competencias.* (1ª Ed.). México: Pearson.

Valdivé. C. y Garbin, S. (2008). Estudio de los esquemas conceptuales epistemológicos asociados a la evaluación histórica de la noción de infinitesimal. Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa. Vol 11, Núm. 3. 413-450.

Yukavetsky, Gloria J. (2003). La elaboración de un módulo instruccional. Preparado para el centro de competencias de la comunicación de la Universidad de Puerto Rico en Humacao. Disponible en línea
http://academic.uprm.edu/~marion/tenofilla2011/files/1277/ccc_LEDUMI.pdf.

Pantoja Rangel Rafael. Doctor en Ciencias. Profesor de la Maestría en Enseñanza de las Matemáticas de la Universidad de Guadalajara. Integrante del Cuerpo Académico Consolidado "Matemática Educativa Avanzada" de la Universidad de Guadalajara. Vicepresidente de la Asociación de Mexicana de Investigadores del Uso de la Tecnología en Educación Matemática (AMIUTEM). **rpantoja@prodigy.net.mx**

López Betancourt Alicia. Doctorado en Educación Internacional con especialidad en Tecnología. Profesora de Tiempo completo en la Facultad de Ciencias Exactas de la Universidad Juárez del Estado de Durango. Incorporada en el Cuerpo Académico de Matemática Educativa. Línea de investigación enseñanza y aprendizaje de las matemáticas en ambientes con tecnología. Centrada en diseño de objetos de aprendizaje así como materiales que incorporen diferentes representaciones semióticas. **ablopez@ujed.mx**

María Inés Ortega Árcega. Doctor en Educación por el Instituto México- Cubano Campus Tepic, Nayarit, México. Profesora de Matemáticas del Área de Ciencias Básicas de la Universidad Autónoma de Nayarit. **Maijua9@hotmail.com**

José César Hernández García. Maestro en Ciencias en la Enseñanza de las Matemáticas de la Universidad de Guadalajara. Profesor de Física y Cálculo en el Departamento de Físico-Matemáticas de la Universidad Autónoma de San Luis Potosí, México. Especialidad en la Enseñanza de las matemáticas en el CINVESTAV y ITSLP en el Programa Nacional de Formación y Actualización de Profesores de Matemáticas**.** **jchenandez@uaslp.mx**

UNIÓN
REVISTA IBEROAMERICANA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA
www.fisem.org/web/union

ISSN: 1815-0640
Número 37. Marzo de 2014
páginas 111-120

Algoritmo para la Resolución de Ecuaciones No Lineales utilizando Deflación

Adair Martins, Claudia Allan, Susana Parra, Roberto Laurent

Fecha de recepción: 12/12/2012
Fecha de aceptación: 11/11/2013

Resumen	La bien conocida deflación de polinomios consiste en disminuir su grado con la obtención de cada nueva raíz. En este trabajo se propone una metodología para la generalización del concepto de deflación para funciones no lineales y su implementación en un software libre de matemática. Una vez obtenida una raíz *r* de multiplicidad *m* con el método iterativo de Newton Raphson la función reducida $F(x) = f(x)/(x-r)^m$ tendrá todas las raíces con excepción de *r*, facilitando la obtención de las restantes en forma análoga a la deflación de polinomios. La multiplicidad se obtiene realizando una predicción numérica en un único proceso iterativo recuperándose la convergencia cuadrática. **Palabras clave:** Deflación, Ecuaciones No Lineales, Algoritmo
Abstract	The well known polynomial deflation is to reduce the degree to obtain each new root. In this work a methodology for the generalization of the concept of deflation for nonlinear functions and their implementation in a free math software is proposed. After obtaining a root *r* of multiplicity *m* with the Newton-Raphson iterative method the reduced function $F(x) = f(x)/(x-r)^m$ have all except the *r* root, making it easier to obtain the remaining roots analogously to deflation of polynomials. The multiplicity is obtained by a numerical prediction in a single iterative process recovering the quadratic convergence. **Keywords:** Deflation, Nonlinear Equations, Algorithm
Resumo	A bem conhecida deflação de polinômios consiste em baixar o seu grau com a obtenção de cada nova raiz. Neste trabalho propõe-se uma metodologia para a generalização do conceito de deflação para funções não lineares e sua implementação em um software livre de matemática. Uma vez obtida uma raiz *r* de multiplicidade *m* com o método iterativo de Newton Raphson a função reduzida $F(x) = f(x)/(x-r)^m$ terá todas as raízes com exceção de *r,* facilitando a obtenção das restantes em forma análoga à deflação de polinômios. A multiplicidade se obtêm realizando uma predição numérica em um único processo iterativo recuperando-se a convergência quadrática. **Palavras-chave:** Deflação, Equação não linear, Algoritmo

1. Introducción

La deflación de polinomios, concepto utilizado y conocido en los cursos de Álgebra de los primeros años de diversas carreras de ciencias e ingeniería, consiste en disminuir el grado del mismo al obtenerse una raíz, de tal forma que el polinomio reducido ya no poseerá esta raíz, facilitando así la obtención progresiva de todas las raíces. El conocimiento de los métodos numéricos iterativos para resolución de ecuaciones no lineales permite aplicar el concepto de deflación en la obtención computacional de todas las raíces de un polinomio utilizando la división sintética con el método de Horner. Una vez que se encuentra una primera raíz, como se muestra mediante un residuo bastante pequeño, normalmente se procede a determinar raíces adicionales a partir del polinomio reducido, cuyos coeficientes están en la tercera fila de la tabla de la división sintética.

Muchos problemas prácticos involucran la resolución mediante métodos numéricos de ecuaciones no lineales que no son polinómicas. Los métodos iterativos como Newton-Raphson, Müller o de la Secante permiten obtener sólo una raíz a la vez (Akai, 1994, pp. 124-132), (Burden y Faires, 2009, pp. 66-88), (Chapra y Canale, 2003, pp.146-165), (Gerald y Wheatley, 2000, pp.48-65). Por lo tanto, es interesante observar que la técnica de la función reducida o deflactada puede utilizarse para todo tipo de función, permitiendo hallar no sólo una raíz sino todas ellas. Después de que se encuentra una raíz r de $f(x) = 0$, la nueva función $F(x) = f(x)/(x-r)$ poseerá todas las raíces de $f(x)$ excepto la raíz r de $f(x)$. Este procedimiento se puede denominar “deflación de funciones” (Gerald y Wheatley, 2000, pp.79-80). Sin embargo, debe observarse que en $x = r$ se ha introducido una discontinuidad. Una dificultad adicional puede ocurrir con las raíces múltiples. Es posible dividir $f(x)$ por $(x-r)$ y deflactar la función, reduciendo la multiplicidad por uno, el problema aquí es que se desconoce r. No obstante, al dividir por $(x-s)$, donde s es una aproximación de r, se obtiene casi lo mismo. Sin embargo, debe observarse que la división crea una forma indeterminada en $x = r$ y una discontinuidad fuerte en $x=s$.

En este trabajo se presenta el desarrollo e implementación de un algoritmo para obtener las raíces de una ecuación no lineal utilizando el método de Newton-Raphson. Se propone un estimador de la multiplicidad de las raíces que permite predecir la misma durante el proceso iterativo. El objetivo de conocer la multiplicidad es neutralizar en gran medida las dificultades inherentes a las raíces múltiples y recuperar la convergencia cuadrática del método de Newton al permitir utilizar su variante acelerada (Gerald y Wheatley, 2000, pp.84-85). La potencialidad y efectividad de la metodología se ilustra mediante dos ejemplos numéricos, el primero se aplica a una función no lineal y el segundo a un polinomio, mostrando que la metodología desarrollada también es válida para funciones polinómicas. La implementación del algoritmo fue realizada utilizando el entorno de programación del software libre Scilab.

2. Multiplicidad y Orden de Convergencia: Método de Newton Acelerado

Una técnica fundamental de los algoritmos numéricos utilizados en computación científica para obtener ceros o raíces de ecuaciones es la de iteración. Como su nombre lo indica, se trata de repetir un proceso hasta que se obtiene un resultado con un error preestablecido. Un método iterativo genera una sucesión $x_0, x_1 \ldots x_n, x_{n+1} \ldots$ que converge a una raíz r de la función $f(x)$. El método iterativo más utilizado para la obtención de raíces de ecuaciones no lineales es el de Newton-Raphson, o simplemente de Newton, debido a su simplicidad y velocidad de convergencia. Está dado por la función de iteración:

$$x_{n+1} = x_n - f(x_n) / f'(x_n). \qquad (1)$$

Cuando el método converge, el error en cada nueva iteración, $e_{n+1} = |\, x_{n+1} - r \,|$, es asintóticamente proporcional al error en la iteración anterior, $e_n = |\, x_n - r \,|$, elevado a una potencia p que se denomina orden de convergencia, o sea:

$$|\, x_{n+1} - r \,| = A \; |\, x_n - r \,|^{p}. \tag{2}$$

Se dice que el método de Newton es de orden 2, $p = 2$, porque converge cuadráticamente a raíces simples, aunque dependiendo de las características de la función podría converger con un orden mayor. En términos prácticos con la convergencia cuadrática se verifica en forma aproximada que el número de dígitos significativos exactos se duplica a cada iteración, lo que hace al método de Newton muy eficiente y explica su gran popularidad. En una raíz de multiplicidad m la convergencia es lineal, $p = 1$, y se verifica asintóticamente que el error en una iteración, $e_{n+1} = |\, x_{n+1} - r \,|$, es proporcional al error en la iteración anterior, $e_n = |\, x_n - r \,|$, de acuerdo a la relación:

$$|\, x_{n+1} - r \,| = (m-1) / m \,|\, x_n - \mathrm{r} \,|. \tag{3}$$

Aparentemente las Ec. (2) y (3) sólo tendrían importancia conceptual porque el error y la multiplicidad no son conocidos de antemano para los problemas prácticos. Sin embargo, como se demuestra más adelante una variante de las mismas puede ser usada para estimar la multiplicidad y el orden de convergencia durante el proceso iterativo. El conocimiento de la multiplicidad permite restablecer la convergencia cuadrática con el algoritmo acelerado de Newton:

$$x_{n+1} = x_n - \; m \;\; f(x_n) / f'(x_n), \tag{4}$$

que obviamente sólo es de aplicación práctica si se conoce la multiplicidad m, que en general no es conocida de antemano.

Se muestra a continuación que a partir de las Ec. (2) y (3) es posible obtener estimadores prácticos tanto para la multiplicidad como para el orden de convergencia. La Ec. (3) puede manipularse despejando la diferencia entre dos iteraciones sucesivas, utilizada normalmente como cota del error verdadero, resultando:

$$|\, x_{n+1} - x_n \,| = |\, r - x_n \,| / m, \tag{5}$$

que indica que la diferencia entre dos estimaciones sucesivas es proporcional al error verdadero en la iteración anterior. Sustituyendo la Ec. (5) en la (2) se deduce una expresión alternativa que relaciona diferencias entre estimativas sucesivas:

$$|\, x_{n+1} - x_n \,| = A^{*} \,|\, x_n - x_{n-1} \,|^{p}, \tag{6}$$

donde $A^* = A \; m^{\,p-1}$. Aplicando la Ec. (6) a dos iteraciones sucesivas es posible eliminar A^* y obtener una expresión para el orden de convergencia p. Haciendo $\Delta x_{n+1} = |\, x_{n+1} - x_n \,|$, para dar un aspecto más compacto a la expresión, se obtiene el estimador para el orden de convergencia dado por:

$$p = \log\left(|\, \Delta x_{n+1} / \Delta \mathrm{x_n} \,|\right) / \log\left(|\, \Delta x_n / \Delta \mathrm{x_{n-1}} \,|\right), \tag{7}$$

que permite estimar p a partir de la tercera iteración. Lógicamente esta estimación vale como las anteriores asintóticamente, o sea p tiende al valor verdadero cuando x tiende a la raíz.

Por otro lado aplicando la Ec. (2) a dos iteraciones sucesivas y restando las dos ecuaciones resultante se demuestra la relación equivalente:

$$|\, x_{n+1} - x_n \,| = (\, m\text{-}1) \,/\, m \,|\, x_n - x_{n\text{-}1}|, \tag{8}$$

de la cual puede despejarse un estimador práctico para la multiplicidad a partir de la segunda iteración dado por:

$$m = 1 + \;(|\,\Delta x_{n+1}|) \,/\, (|\,\Delta x_n \text{ - } \;\Delta x_{n\text{-}1}|). \tag{9}$$

Finalmente, la estimación de la multiplicidad eventualmente confirmada por la estimación del orden de convergencia, permite utilizar el método de Newton acelerado en las raíces múltiples. De esta manera cada raíz múltiple es obtenida en un único proceso iterativo con convergencia cuadrática y se atenúan las dificultades debidas a la indeterminación y discontinuidad que ocurre en las proximidades de estas raíces con la consiguiente mejora de la eficiencia computacional (Martins, Allan, Parra y Laurent, 2009, pp. 2649-2655).

3. Algoritmo Básico

En la Figura 1 se muestra gráficamente el algoritmo representado por un diagrama de llaves para la realización de deflación de funciones no lineales utilizando la metodología desarrollada. En el mismo se implementa el algoritmo de Newton Raphson y se estiman los valores de la multiplicidad *m* y de la velocidad de convergencia *p*, los cuales permiten determinar si se requiere acelerar el método para poder recuperar la convergencia cuadrática. Finalmente se redefine la función utilizando el concepto de deflación descripto anteriormente y se reinicia el proceso de búsqueda de raíces.

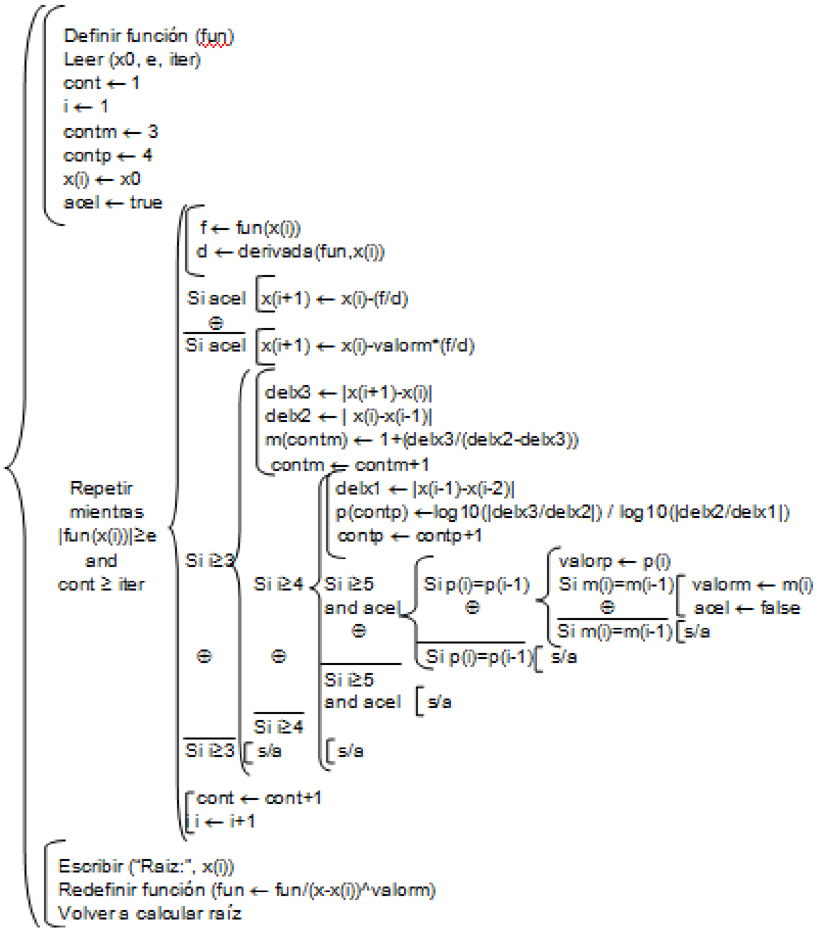


Figura 1: Algoritmo Básico de deflación

4. Ejemplos Numéricos con aplicación de Deflación

Para mostrar el desempeño numérico de la metodología y del algoritmo de deflación de funciones en combinación con los estimadores de multiplicidad y orden de convergencia presentados en la sección anterior se presentan dos casos de aplicación. En el primer caso se aplica el algoritmo implementado para la obtención de las raíces de la siguiente función no lineal:

$$f(x) = cos^2(x) \tag{10}$$

En la Figura 2 se muestra la función original y dos versiones deflactadas o reducidas. La gráfica con línea continua corresponde a la función original. Puede inferirse que posee una raíz doble en $r = 1.5707968$ y otra raíz doble en $r = 4.7121797$.

La gráfica con línea a trazos corresponde a la función reducida, $f(x)/(x-1.5707968)^2$, que como se observa ya no posee la raíz doble en $r = 1.5707968$, y la gráfica punteada muestra la función deflactada nuevamente por la raíz doble en $r = 4.7121797$, $f(x)/[(x-1.5707968)^2(x-4.7121797)^2]$, que como puede verse ya no posee raíces en el intervalo graficado.

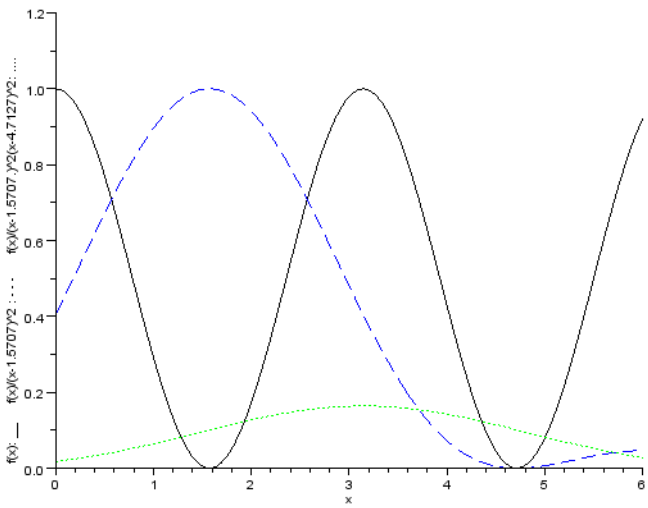


Figura 2: Gráficas de f(x) = cos²(x) y el efecto de la deflación

En la Tabla 1 y la Figura 3 se compara el desempeño de dos variantes del método de Newton y se muestra el funcionamiento de los estimadores de multiplicidad y orden de convergencia utilizando como condición inicial $x_0 = 2.2$ en todos los casos. Adicionalmente la evolución de los estimadores se muestra gráficamente en la Figura 4.

En las dos primeras columnas de la Tabla 1 se observa convergencia a la raíz doble en $r = 1.5707968$ y en la tercera columna a la raíz doble en $r = 4.7121797$. En la Figura 2 se comparan las velocidades de convergencia del error relativo correspondiente a la raíz doble para el método de Newton y el método de Newton acelerado.

Se puede apreciar el cambio brusco de la lenta convergencia lineal a la rápida convergencia cuadrática a partir de la quinta iteración.

Tabla 1. Comparación del desempeño del método de Newton y de los estimadores de multiplicidad y orden de convergencia

Newton				Newton Acelerado		Newton después de la deflación			
n	x	p	m	n	x	n	x	p	m
0	2.20000000			0	2.2000000	0	2.20000000		
1	1.8360521			1	1.8360521	1	4.520308		
2	1.7002235		1.91	2	1.7002235	2	4.6115324		1.04
3	1.6351461	0.95	1.98	3	1.6351461	3	4.6605026	0.19	2.15
4	1.6029267	0.98	1.99	4	1.6029267	4	4.6860398	1.04	2.08
5	1.586856	0.99	1.99	5	1.586856	5	4.6991069	1.02	2.04
6	1.5788255	0.99	1.99	6	1.5707949	6	4.7057203	1.01	2.02
7	1.5748108	0.99	1.99	7	1.5707968	7	4.7090476	1.00	2.01
8	1.5728036	0.99	1.99			8	4.7107165	1.00	2.00
9	1.5717999	0.99	1.99			9	4.7115523	1.00	2.00
10	1.5712981	0.99	1.99			10	4.7119705	1.00	2.00
11	1.5710472	0.99	1.99			11	4.7121797	1.00	2.00
12	1.5709218	0.99	1.99						
13	1.5708591	0.99	2.00						
14	1.5708277	1.00	2.00						
15	1.570812	1.00	2.00						
16	1.5708042	1.00	2.00						
17	1.5708002	1.00	2.00						
18	1.5707983	1.00	2.00						
19	1.5707973	1.00	2.00						
20	1.5707968	1.00	2.00						

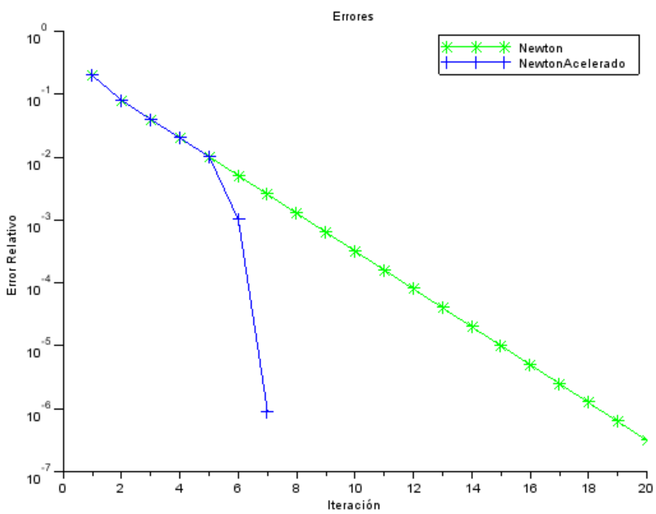


Figura 3: Velocidad de convergencia. Newton y Newton acelerado

En la Figura 4 se encuentran graficadas la estimación de la multiplicidad y el orden de convergencia en función del número de iteraciones para el método de Newton. Para la raíz doble en r = 1.5707968, se observa una rápida convergencia a la multiplicidad m = 2 y al orden de convergencia p = 1.

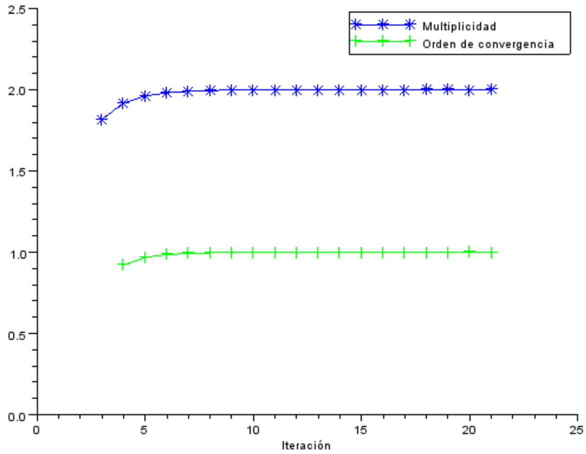


Figura 4: Estimativa de la multiplicidad (*m*) y del orden de convergencia (*p*)

Para el segundo ejemplo de aplicación se aplica la metodología para obtención de las raíces de la función polinómica:

$$f(x)= x^3-4x^2+5x-2 \tag{11}$$

En las gráficas de la Figura 5 se muestra la función original y sus versiones reducidas o deflactadas. Las gráficas con línea continua corresponden a la función original. Puede inferirse que posee una raíz doble en $r = 1$ y una raíz simple en $r = 2$. La gráfica con línea a trazos de la izquierda corresponde a la función reducida, $f(x)/(x-1)^2$, que como se observa ya no posee la raíz doble en $r = 1$, y la gráfica punteada muestra la función deflactada nuevamente por la raíz simple en $r = 2$, $f(x)/[(x-1)^2(x-2)]$, que como puede verse ya no posee raíces en el intervalo. Alternativamente, la gráfica con línea a trazos de la derecha permite observar a la función reducida, $f(x)/(x-2)$, con la raíz simple eliminada y la gráfica con línea a punteada muestra nuevamente la función con las dos raíces eliminadas. Estas gráficas muestran que el método de Newton puede converger a raíces distintas dependiendo de la estimación inicial x_0 por lo que las raíces podrán ser obtenidas en una secuencia diferente pero con el mismo resultado final.

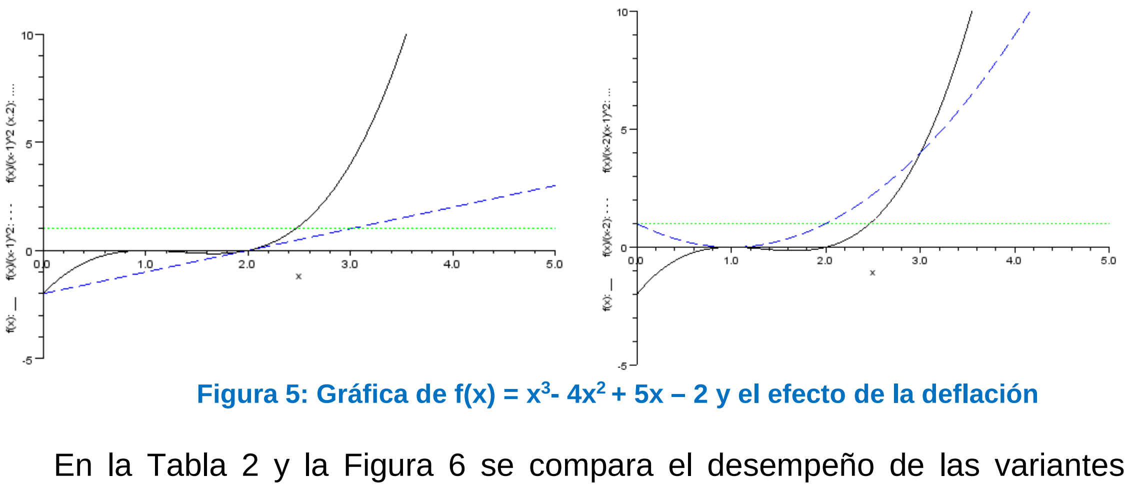


Figura 5: Gráfica de f(x) = x^3- $4x^2$ + 5x – 2 y el efecto de la deflación

En la Tabla 2 y la Figura 6 se compara el desempeño de las variantes del método de Newton y se muestra el funcionamiento de los estimadores de multiplicidad y orden de convergencia utilizando como condición inicial $x_0 = 0$ en todos los casos.

Tabla 2. Comparación del desempeño del método de Newton y de los estimadores de multiplicidad y orden de convergencia

Newton				Newton Acelerado		Newton después de la deflación	
n	x	p	m	n	x	n	x
0	0.0			0	0.0	0	0.0
1	0.4			1	0.4	1	2.0
2	0.6526316		2.55	2	0.6526316		
3	0.8064833	1.09	2.39	3	0.8064833		
4	0.8959857	1.08	2.24	4	0.8959857		
5	0.9456532	1.06	2.14	5	0.9456532		
6	0.9721438	1.04	2.07	6	0.9986345		
7	0.9858857	1.02	2.04	7	0.9999991		
8	0.9928941	1.01	2.02	8	1.0		
9	0.9964346	1.00	2.01				
10	0.9982141	1.00	2.00				
11	0.9991063	1.00	2.00				
12	0.9995529	1.00	2.00				
13	0.9997764	1.00	2.00				
14	0.9998882	1.00	2.00				
15	0.9999441	1.00	2.00				
16	0.9999720	1.00	2.00				
17	0.9999860	1.00	2.00				
18	0.9999930	1.00	2.00				
19	0.9999965	1.00	2.00				
20	0.9999983	1.00	2.00				
21	0.9999991	1.00	2.00				
22	0.9999996	1.00	2.00				

En las dos primeras columnas de la Tabla 2 se observa convergencia a la raíz doble en $r = 1$ y en la tercer columna a la raíz simple en $r = 2$. En la Figura 6 se comparan las velocidades de convergencia del error relativo correspondiente a la raíz doble para el método de Newton y el método de Newton acelerado. Se puede apreciar el cambio brusco de la lenta convergencia lineal a la rápida convergencia cuadrática a partir de la quinta iteración. Como condición de cambio de método se utilizó que los estimadores redondeados al entero más próximo se repitan en dos iteraciones sucesivas y que la solución presente por lo menos dos cifras significativas exactas aproximadamente.

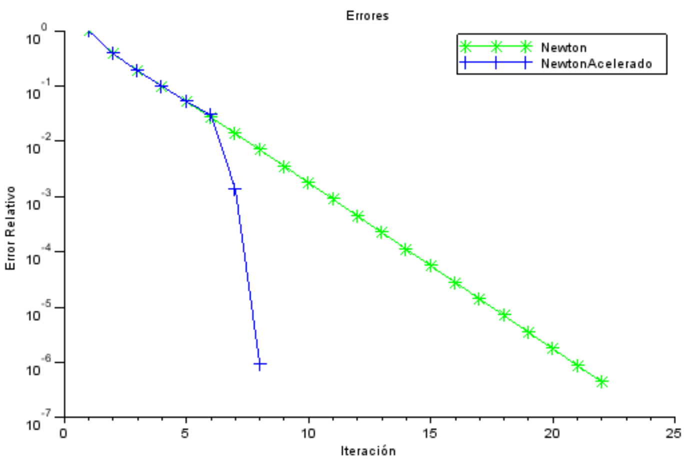


Figura 6. Velocidad de convergencia. Newton y Newton acelerado

5. Conclusiones

Se presentó una metodología para la generalización del concepto de deflación para funciones no lineales utilizando el método de Newton Raphson y el algoritmo básico implementado en el entorno del software matemático Scilab.

El aporte principal de la metodología propuesta consiste en la predicción numérica de la multiplicidad durante el proceso iterativo, lo que permite solucionar los problemas provocados por las raíces múltiples. También se propuso un estimador del orden de convergencia, lo que brinda información complementaria que sirve para confirmar la estimación de la multiplicidad. El funcionamiento del algoritmo fue ilustrado mediante la aplicación de dos ejemplos numéricos.

El conocimiento de la multiplicidad contribuye a potenciar la utilización de deflación permitiendo que el método de Newton recupere su convergencia cuadrática en las raíces múltiples disminuyendo el costo computacional. Además permite que las raíces múltiples puedan obtenerse en un único proceso iterativo en vez de un proceso para cada una de las raíces, disminuyendo todavía más el costo computacional. Finalmente, la técnica de deflación hace que pierda importancia la combinación de indeterminación y discontinuidad que se produce en la cercanía de una raíz múltiple, potenciando la robustez del algoritmo.

Bibliografía

Burden, R. L., Faires, J. D., (2009), Analisis Numérico, Cengage Learning.

Chapra, S. C., Canale, R. P. (2003), *Métodos Numéricos para Ingenieros con Programas* de *Aplicación*, McGraw Hill.

Gerald, C. F., Wheatley, P. O. (2000). *Análisis Numérico con Aplicaciones*, Prentice Hall.

Martins, A., Allan, C., Parra, S., Laurent, R. (2009), *Generalización del Concepto de Deflación en la Resolución de Ecuaciones No Lineales*, Revista Mecánica Computacional, 28, pp. 2649-2655, ISSN 1666-6070.

Scilab (Versión 5.4.0). (2012). Scilab Enterprises. [en línea]. Recuperado el 12 de septiembre de 2012, de www.scilab.org/

Adair Martins es Ingeniera Electricista y Master en Ciencias en Ingeniería por la Universidad Federal de Itajubá (UNIFEI), Brasil. Actualmente es Profesora Asociada y Directora del Departamento de Computación Aplicada de la Facultad de Informática en la Universidad Nacional del Comahue, Argentina. Dirige el proyecto de Investigación: “Simulación y Métodos Computacionales en Ciencias y Educación”.

Claudia Allan es Analista en Computación por la Facultad de Informática de la Universidad Nacional del Comahue (UNCo) y docente del Departamento de Computación Aplicada (UNCo). Actualmente cursa la Maestría en Enseñanza de las Ciencias Exactas y Naturales (UNCo) y participa en el proyecto de Investigación: “Simulación y Métodos Computacionales en Ciencias y Educación”.

Susana Parra es Profesora en Informática por la Facultad de Informática de la Universidad Nacional del Comahue (UNCo) y docente del Departamento de Computación Aplicada (UNCo). Actualmente cursa la Maestría en Informática Aplicada a la Educación en la Universidad Nacional de La Plata. Participa en el proyecto de Investigación: “Simulación y Métodos Computacionales en Ciencias”.

Roberto Laurent es Ingeniero Electricista por la Universidad Nacional del Sur, Argentina, y Master en Ingeniería Eléctrica por la Universidad Federal de Itajubá (UNIFEI), Brasil. Actualmente es Profesor Titular y Director de la carrera de Ingeniería Eléctrica en la Universidad Nacional del Comahue. Dirige el Proyecto de Investigación: "Simulación y Otros Métodos Computacionales en Sistemas de Potencia”.

UNIÓN
REVISTA IBEROAMERICANA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA
www.fisem.org/web/union

ISSN: 1815-0640
Número 37. Marzo de 2014
páginas 121-137

Dinamización Matemática: Multidisciplinariedad en algunas aritméticas españolas del siglo XIX

Vicente Meavilla Seguí; Antonio M. Oller Marcén

Fecha de recepción: 8/02/2013
Fecha de aceptación: 24/10/2013

Resumen

Los problemas matemáticos de enunciado verbal, además de cubrir objetivos específicos de Matemáticas, se pueden utilizar para transmitir conocimientos de otras disciplinas. Acisclo Fernández Vallín y Bustillo (segunda mitad del s. XIX) fue uno de los primeros autores españoles que formuló explícitamente la importancia de esta transmisión a través de los enunciados de problemas aritméticos. En este artículo presentamos algunos *problemas aritméticos multidisciplinares* extraídos de diversas aritméticas españolas del XIX y estudiamos un libro de texto dedicado en exclusiva a la presentación de datos históricos a partir de problemas aritméticos. Además, diseñamos algunas actividades multidisciplinares de enseñanza y aprendizaje.

Palabras clave: Problemas aritméticos, Educación matemática, Multidisciplinariedad, Siglo XIX.

Abstract

In addition to meet the specific objectives of the subject of Mathematics, verbal mathematical problems can be used to transmit contents related to different disciplines. Acisclo Fernández Vallín y Bustillo (second half of the XIX century) was one of the first Spanish authors that explicitly stated the importance of this transmission through the statement of elementary arithmetic problems. In this paper, we present a collection of *multidisciplinary arithmetical problems* coming from several XIX century Spanish arithmetic textbooks and we study a textbook devoted to the introduction of historical data using arithmetical problems. Moreover, we design some multidisciplinary learning and teaching activities.

Keywords: Arithmetical problems, Mathematics education, Multidisciplinarity, XIX century.

Resumo

Além de cumprir os objectivos específicos da disciplina de Matemática, os problemas matemáticos verbais podem ser usados para transmitir conteúdos relacionados a diferentes disciplinas. Acisclo Fernandez Valline Bustillo (segunda metade do s. XIX) foi um dos primeiros autores espanhóis que afirmou expressamente a importância desta transmissão a través de problemas de aritmética. Neste artigo, apresentamos uma coleção de problemas aritméticos verbais multidisciplinares provenientes de vários livros espanhóis aritméticado século XIX e estudamos um livro dedicado a o introdução dedados históricos usando problemas aritméticos. Além disso, criamos algumas atividades multidisciplinares de aprendizagem e ensino.

Palavras-chave: Problemas aritméticos, Educação Matemática, Multidisciplinar, Século XIX

1. Introducción

En el currículo de Educación Infantil (0 a 6 años) de la Comunidad Autónoma de Aragón (Orden del 28 de marzo de 2008) se apunta el siguiente principio metodológico general:

> Los procesos de enseñanza y aprendizaje deben tender a un enfoque globalizador e integrador de las áreas del currículo como principio didáctico de esta etapa (BOA nº 43, p. 4946)

Este principio viene a responder al hecho (pensamos que evidente) de que el mundo que nos rodea no está compartimentado y que, para comprenderlo, necesitamos utilizar simultáneamente conocimientos de muy diversas disciplinas. Sin embargo, esta idea de 'globalizar e integrar' como principio general, desaparece por completo en los niveles educativos posteriores. Aparecen las áreas y asignaturas y dentro de ellas distintos bloques de contenidos cada vez más desconectados entre sí.

En su lugar, y ya desde el segundo ciclo de la Educación Infantil, se establece la contribución de las distintas áreas a las llamadas Competencias Básicas, definidas como aquellas competencias imprescindibles para cualquier persona de cara a un adecuado desempeño de su vida personal y profesional.

Sin embargo, en la práctica, incluso el trabajo de estas competencias básicas se lleva a cabo de forma independiente y con distintos métodos en cada área de conocimiento; de modo que no suele haber espacio en el aula de Lengua para consideraciones matemáticas, ni en el de Matemáticas para hablar de Historia[1].

Nosotros planteamos la posibilidad de presentar a los alumnos conocimientos de otras disciplinas a través de problemas de Matemáticas. Esta idea de presentar lo que llamamos "problemas aritméticos multidisciplinares" va más allá de plantear problemas contextualizados en distintos campos del saber, sino que los propios datos del problema y su contexto sean conocimientos que deseemos que el alumno adquiera.

En este trabajo vamos a mostrar que esta idea ya estaba presente en autores españoles del siglo XIX. Fruto del estudio realizado presentamos una pequeña clasificación y colección de problemas aritméticos multidisciplinares basada en su temática. Además estudiaremos detenidamente el único caso que conocemos de texto dedicado en exclusiva a esta idea, que presenta aspectos de la historia de Grecia y Roma a través de problemas aritméticos elementales. Por último cerramos el trabajo con un ejemplo de actividad multidisciplinar que se inicia con uno de estos problemas.

2. Multidisciplinariedad en el siglo XIX

En los *Elementos de Aritmética, y Álgebra, para la instrucción de la juventud* de Manuel Poy y Comes[2] (1786) se encuentran los dos problemas aritméticos multidisciplinares siguientes[3]:

- Madrid se fundó 3952 años hace, y Barcelona 3460. Se pide, ¿cuánto tiempo adelanta la fundación de Madrid a la de Barcelona? (Poy, 1786, p. 13).

[1] Y nos referimos a Historia en general, no necesariamente a Historia de las Matemáticas.
[2] Desconocemos cualquier dato biográfico de este autor.
[3] En los enunciados de los problemas hemos actualizado la ortografía.

- Son las 4, menos cuarto, y 3 minutos de la tarde del día 1 Abril de 1784. Decidme, ¿cuántos minutos hace que nació el Redentor del mundo? adviértase que Jesucristo nació a las 12 de la noche del día 24 de Diciembre del año 5199 de la creación del mundo. (Poy, 1786, p. 30)[4]

Por otro lado, en los *Elementos de Aritmética numérica y literal al estilo del comercio para instrucción de la juventud* (Poy, 1819) del antedicho autor aparecen los mismos problemas con los datos actualizados y uno nuevo:

- Acaba de espirar el año 7002 de la creación del mundo, y el de 1803 de nuestra era cristiana. Decidme, ¿cuántos años había que el Omnipotente tenía ya criado el mundo, cuando salió a luz nuestro redentor Jesucristo? (Poy, 1819, p. 10)

Más adelante, P. Mimo en su obrita *Las cuatro operaciones simples de la Aritmética para niños y niñas* (Mimo, 1850) propone los tres problemas siguientes:

- De la Creación del mundo al Diluvio se cuentan 1656 años; del Diluvio a la edificación del templo de Jerusalén 1438; de esta época a la venida de Jesucristo 1015 años; y desde J. C. a nuestros días 1850. ¿Cuántos años han transcurrido desde la Creación? (Mimo, 1850, p. 27)
- "La España fue invadida por los moros el año 712 y saliendo de ella en 1492, se pregunta, ¿cuántos años estuvieron los moros en España? (Mino, 1850, p. 35)
- La provincia de Barcelona cuenta 442273 almas, la de Tarragona 233477; la de Lérida 151322 y la de Gerona 214150: contando 957142 almas las de Valencia, Castellón y Alicante reunidas, ¿cuántas más almas cuentan las 4 provincias primeras que forman el principado de Cataluña? (Mimo, 1850, p. 37)

Los ejemplos anteriores ilustran claramente que los autores de los manuales consultados no parecen percibir el interés didáctico potencial de este tipo de problemas, limitándose a incluir unos pocos en sus aritméticas de un modo casi anecdótico.

Tenemos que esperar hasta el año 1861 en el que Acisclo Fernández Vallín y Bustillo[5], en la portada de su *Aritmética para los niños, que concurren a las escuelas de primera enseñanza*[6] (Fernández Vallín, 1861), pone de relieve la importancia pedagógica de los problemas aritméticos multidisciplinares para la formación de los niños y niñas de la primera enseñanza elemental (6 – 9 años) y superior:

> Son tantos y tan variados los problemas y cuestiones prácticas de esta obrita, que por ella no solo se hace agradable a los niños el estudio de la Aritmética,

---

[4] Este tipo de problemas se mantuvo en los libros de enseñanza hasta que la teoría de la evolución de Darwin se admitió entre los científicos españoles.

[5] Acisclo Fernández Vallín y Bustillo nació en Gijón el 17 de noviembre de 1825. Estudió en el Instituto de Jovellanos de dicha ciudad y más tarde ocupó en él una plaza de profesor auxiliar de Matemáticas. A los 22 años ganó la cátedra de Matemáticas del Instituto de Valladolid y en 1850 se trasladó al instituto del Noviciado de Madrid, que estaba agregado a la Universidad Central. En su etapa como director del centro (1877) se cambió el nombre del Instituto por el de "Cardenal Cisneros". En 1877 fue nombrado Consejero de Instrucción Pública, dedicándose a la mejora de la enseñanza y a viajar por el extranjero. Fue secretario de la Comisión de Relaciones Exteriores entre España y las Repúblicas de América, secretario de la Sociedad Geográfica de Madrid, presidente del Centro Asturiano de Madrid (1890), miembro de la Academia Gaditana de Letras y académico de la Real Academia de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales (1893). El Rey Alfonso XII le otorgó la Gran Cruz de Isabel la Católica. Murió en Madrid el año 1896.

[6] Esta obra se reeditó numerosas veces durante el siglo XIX y en 1916 había alcanzado la 63ª edición. No hemos podido consultar la primera edición de la *Aritmética para los niños* (1857). Por consiguiente, desconocemos si su portada coincide con la de 1861.

> sino que se les instruye a la vez en otros ramos tan importantes como la historia, la geografía, la estadística, la cronología, la agricultura, la industria y el comercio. (Fernández Vallín, 1861, portada)

ARITMÉTICA

PARA

LOS NIÑOS,

que concurren á las escuelas de primera enseñanza,

POR

D. ACISCLO F. VALLIN Y BUSTILLO,

Catedrático de la Universidad Central.

ESTÁ DECLARADA DE TEXTO POR EL CONSEJO DE INSTRUCCION PÚBLICA.

Son tantos y tan variados los problemas y cuestiones prácticas de esta obrita, que por ella no solo se hace agradable á los niños el estudio de la Aritmética, sino que se les instruye á la vez en otros ramos tan importantes como la historia, la geografía, la estadística, la cronología, la agricultura, la industria y el comercio.

Figura 1. Aritmética para los niños. Detalle de la portada de la sexta edición (1861)

Por otro lado, en el prólogo de algunas ediciones posteriores[7], encontramos el párrafo siguiente:

> *Los más de los niños de ambos sexos que concurren a las escuelas de primeras letras, no reciben otra enseñanza, ni ven otros libros, que el Catecismo, la Gramática y un cuadernito de Aritmética que en muchísimas escuelas está reducido a las definiciones y ejercicios de las cuatro reglas con los números enteros. La ampliación de estas materias, como todo lo referente a la Geometría, Geografía, Historia de España, etc., tienen que explicarlo los Maestros con harto trabajo y escaso fruto, por falta de libros adecuados al objeto y que abracen, no solamente la respectiva materia con prudente extensión tratada, claridad suma y buen método, sino también que en los ejemplos o ejercicios prácticos se hagan aplicaciones a todos los conocimientos útiles que sea posible. De este modo se hace grato a los niños el estudio, y se les estimula a adquirir mayores conocimientos con la afición que en ellos despiertan las noticias históricas, cronológicas, estadísticas, administrativas, etc., que si son de la mayor utilidad para los que aspiran a superiores estudios, todavía interesan más a los que no reciben otra enseñanza que la de la modestísima escuela de su pueblo.*

Estos fragmentos ponen de manifiesto la importancia otorgada por Fernández Vallín a la incorporación de los problemas aritméticos multidisciplinares en los manuales dedicados a la enseñanza de la aritmética elemental. Encontramos, pues, aquí la génesis de la idea apuntada en la introducción, de que es posible transmitir contenidos no matemáticos a partir de la resolución de cuestiones matemáticas.

[7]El texto que presentamos se encuentra en el prólogo de la trigésima sexta edición (1888).

3. Problemas aritméticos multidisciplinares. Clasificación y algunos ejemplos

Después de que Fernández Vallín tomase partido acerca del valor pedagógico de los PAM, se publicaron diversos manuales que incluyen numerosos problemas aritméticos multidisciplinares intercalados entre otros que no lo son.

Además de la *Aritmética para los niños que concurren a las escuelas de primera enseñanza,* hemos consultado los cuatro textos siguientes (publicados también en la segunda mitad del XIX):

- Ejercicios y problemas de Aritmética: parte originales y parte escogidos de los principales autores que tratan de la materia (Terry, 1880).
- Aritmética (Salinas y Benítez, 1884).
- Elementos de Aritmética (Díaz, 1897).
- Soluciones analíticas de los ejercicios y problemas contenidos en las siguientes obras del autor: Aritmética razonada y nociones de Álgebra. Lecciones de Aritmética, 1ª parte. Lecciones de Aritmética, 2ª parte. Resumen de las lecciones de Aritmética y Rudimentos de Aritmética (Dalmáu, 1898).

Los problemas aritméticos multidisciplinares propuestos por Fernández Vallín, Terry y Rivas[8], Salinas-Benítez[9], Díaz Muñoz[10] y Dalmáu Carles[11], nos han permitido dar una clasificación en cincocategorías de acuerdo con el campo del saber en que se enmarcan: problemas históricos, problemas geográficos, problemas astronómicos, problemas de física y problemas de ciencias de la naturaleza.

En las líneas que siguen, a modo de ejemplo, ofrecemos algunos problemas de cada una de ellas.

3.1. Problemas históricos

Configuran esta clase aquellos problemas aritméticos cuyos enunciados contienen datos biográficos de personajes históricos, fechas de inventos y descubrimientos, duraciones de reinados u ocupaciones, etc. Como ejemplos presentamos los siguientes:

- ¿Cuántos reyes ha habido en España desde Ataulfo hasta Isabel II, sabiendo que hubo 33 godos, 24 de Asturias y León, 25 de Castilla y León, 19 de Aragón, 24 de Navarra, 5 de la casa de Austria y 7 de la de Borbón? (Fernández Vallín, op. cit., p. 23)
- ¿Cuánto tiempo ha reinado Isabel la Católica, sabiendo que ascendió al trono el 13 de Diciembre de 1474 y murió el 26 de Noviembre de 1504? (Fernández Vallín, op. cit., p. 82)
- Luis XIV tenía cinco años cuando subió al trono en 1643: su reinado, uno de los mayores de la monarquía francesa, duró 72 años: ¿a qué edad y en qué año murió Luis XIV? (Terry, op. cit., p. 4)

[8]Antonio Terry y Rivas nació en Cádiz en 1838. A la edad de 14 años ingresó en el Colegio Naval Militar. Tras una dilatada vida militar, en la que alcanzó el grado de contralmirante de la Armada, fue designado como diputado a Cortes por la ciudad de Cádiz (elección general verificada el 30 de abril de 1899) y, posteriormente en ese mismo año, fue nombrado senador por la provincia de Canarias. También fue académico correspondiente de la Real Academia de Ciencias y Artes de Barcelona. Falleció en Madrid el 2 de noviembre de 1900.

[9]Manuel Benítez y Parodi nació en Sevilla el 21 de agosto de 1845 y falleció en Madrid el 28 de noviembre de 1911. Fue general de división, académico de la real Academia de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales, y vicepresidente de la Real Sociedad Matemática Española.

[10]Atendiendo a la información que aparece en la portada de sus *Elementos de Aritmética* (1897), fue Profesor Normal y director de «El faro escolar».

[11]Profesor Normal y director del primer Grupo Escolar de Gerona.

- La primera cruzada se hizo durante el reinado de Felipe I en 1096, y la séptima y última durante el reinado de Luis IX, llamado el Santo en 1270: ¿cuántos años duraron las cruzadas? (Terry, op. cit., p. 7)
- Descartes nació el 3 de Abril de 1596 y murió el 11 de Febrero de 1650; Pascal nació el 19 de Junio de 1623 y murió el 19 de Agosto de 1662; Newton nació el 15 de Diciembre de 1642 y murió el 18 de Mayo de 1727; ¿qué edad alcanzó cada uno de estos insignes matemáticos? (Salinas y Benítez, op. cit., p. 257)
- Cristóbal Colón descubrió América en 1492; ¿cuántos años hace que se hizo el descubrimiento? (Díaz, op. cit., p. 221)
- Si Napoleón invadió la Rusia con 489105 soldados y al regresar de Moscou sólo tenía 53420; ¿cuántos hombres murieron en la retirada? (Díaz, op. cit., p. 221)
- Guttenberg inventó la imprenta en el año 1436, y Colón descubrió la América en 1492. ¿Cuántos años hacía que la humanidad se utilizaba de aquel civilizador invento, al descubrirse las Américas? (Dalmáu, op. cit., p. 52)
- Wat inventó la primera máquina de vapor completa en 1784, y Davy obtuvo la luz eléctrica en 1801. ¿Cuántos años mediaron entre ambas fechas? (Dalmáu, op. cit., p. 53)
- Los navegantes genoveses y catalanes descubrieron las islas Canarias en 1345, y el francés Sebastián Cabot descubrió el famoso Banco de Terranova en 1496. ¿Cuántos años transcurrieron desde el primer descubrimiento hasta la fecha del segundo? (Dalmáu, op. cit., p. 53)

3.2. Problemas geográficos

En esta categoría hemos incluidos los problemas cuyos enunciados contienen información relativa a la geografía física y política. Por ejemplo:

- ¿Cuántos habitantes tiene España con sus posesiones ultramarinas, sabiendo que la Península tiene 14957575; las islas Baleares 262893; las Canarias 234046; los presidios de África 9826; Fernando Pó y Annobón 35000; Cuba 1100000; Puerto Rico 500000 y las Filipinas 6060000? (Fernández Vallín, op. cit., p. 23).
- Si el pico de Muley-Hacen en Sierra Nevada, o sea el punto más alto de la península, se halla elevado 3554 metros sobre el nivel del mar, y el pico de Teide en las islas Canarias se eleva 3715 metros, ¿cuál es la diferencia entre ambos puntos, expresada en varas de Burgos? (Fernández Vallín, op. cit., p. 78).
- El monte Everest (Himalaya) tiene de altura, sobre el nivel del mar, 8840 metros; el Aconcagua (Andes) tiene 1552 menos; el Chimborazo 758 menos que el anterior; el monte Blanco (Saboya) 1730 menos que el anterior; el Mulhacen (Sierra Nevada) 1246 menos que el anterior; el Etna 244 menos que el anterior; los Azulejos (Tenerife) 445 menos que el anterior, y el Vesubio 1670 menos que el anterior: ¿cuál es la altura de las 7 últimas montañas? (Terry, op. cit., p. 10)
- El punto más septentrional de España se halla en latitud de 43º 47’ 29’’ y el más meridional en 35º 59’ 49’’ ambas latitudes Norte: ¿cuánto ocupa la España en latitud geográfica? (Terry, op. cit., p. 112)

- Calcular la población de la tierra, sabiendo que Europa tiene 300 millones de habitantes; Asia, 680 millones; África, 110 millones; América, 809 millones, y la Oceanía, 30 millones. (Salinas y Benítez, op. cit., p. 16)
- La provincia de Barcelona tiene una superficie de 7690 kilómetros cuadrados; la de Gerona 5864; la de Tarragona 6490, y la de Lérida 12150. ¿Cuál es el número de kilómetros cuadrados que tiene la Capitanía General de la cuarta región? (Salinas y Benítez, op. cit., p. 16
- ¿Cuál es el perímetro total de España si ésta tiene 252 leguas de costa en el mar Mediterráneo, 234 en el Atlántico, 187 de frontera portuguesa, 92 de frontera francesa y 1 de inglesa por Gibraltar? (Díaz, op. cit., p. 214)
- ¿Cuál es el curso total de los principales ríos de España, si se tiene en cuenta que el curso del tajo es de 825 kilómetros, el del Duero 776, el del Ebro 725, el del Guadiana 725, el del Guadalquivir 505, el del Miño 233, el del Segura 225, y el del Júcar 370? (Díaz, op. cit., p. 216)
- La distancia que hay desde el cabo de Creus al de Finisterre es, aproximadamente, 198 leguas, y la que media desde el cabo de Peñas a la punta de Tarifa, es de 872 kilómetros. Hállese en Km. la distancia primera y en leguas, la segunda. (Dalmáu, op. cit., p. 125)
- La superficie de América es, aproximadamente, 1400000 leguas cuadradas, y la de Europa, 9259295 kilómetros cuadrados. Dígase la 1ª en Km^2 y la 2ª, en leguas cuadradas. (Dalmáu, op. cit., p. 125)

3.3. Problemas astronómicos

En esta clase se incluyen problemas que contienen datos relativos al sistema solar. Veamos algunos ejemplos:

- Suponiendo 1 el peso de la Tierra, Mercurio pesa 0,175, Venus 0,885, Marte 0,132, Júpiter 338, Saturno 101, Urano 15, Neptuno 25 y todos los demás planetas de segundo orden tanto como dos veces la Tierra, ¿cuál es el peso total del sistema planetario? (Fernández Vallín, op. cit., p. 76)
- Tomando por unidad el radio de la Tierra, el del Sol es 112, el de mercurio 0,39, el de Venus 0,98, el de Marte 0,52, el de Júpiter 0,86, el de Saturno 9, el de Urano 4,3, el de Neptuno 4,7 y el de la Luna 0,26, ¿cuál es el volumen de todos estos astros, considerando como unidad de volumen el de nuestro planeta? (Fernández Vallín, op. cit., p. 98)
- La Tierra, que aproximadamente se halla distante del Sol 153 millones de kilómetros, gira alrededor de este astro en 365 días 5 horas 48 minutos 45 segundos. Marte lo verifica en 686 días 22 horas 14 minutos 27 segundos. Se quiere saber la distancia de Marte al Sol, según la ley de que los cuadrados de los tiempos que emplean los astros en sus revoluciones, son entre sí como los cubos de sus distancias. (Terry, op. cit., p. 98)
- Sabiendo que el Sol ilumina toda la Tierra en 24 horas, que ésta se halla dividida en 360º de longitud y que gira de Oriente a Occidente, se quiere saber, al ser mediodía en parís, qué hora será en Pekín que se halla a 115º de longitud oriental y en Washington que se halla a 80º de longitud occidental. (Terry, op. cit., p. 111)
- Si el planeta Marte verifica su revolución en dos años; ¿cuántos grados recorrerá en un año, y cuánto tardará en recorrer un grado? (Díaz, op. cit., p. 230)

3.4. Problemas de Física

Esta sección contiene problemas concernientes a la velocidad del sonido y de la luz, a la caída libre de los cuerpos, termometría, etc. Algunos ejemplos son:

- ¿Cuántas leguas recorre la luz en un segundo, sabiendo que tarda 8 minutos y 13 segundos, o sean 493 segundos, en llegar desde el Sol a la tierra [distancia del Sol a la Tierra = 27680000 leguas]? (Fernández Vallín, op. cit., p. 44)
- Han transcurrido 18 segundos entre el momento de verse el fogonazo de un cañón de una fragata que se encontraba en una bahía y el de oírse la detonación: se quiere saber a qué distancia se encuentra dicha fragata, sabiendo que para las distancias terrestres la visión es instantánea y que el sonido recorre 340 metros por segundo. (Terry, op. cit., p. 13)
- El sonido recorre 340 metros por segundo. Si encuentra un obstáculo vuelve hacia el punto de emisión: esto es lo que constituye el eco: ¿a qué distancia de un eco se halla el observador que oye al cabo de 3 segundos las palabras que pronuncia? (Terry, op. cit., p. 24)
- Teniendo en cuenta que un cuerpo abandonado en el espacio recorre en el primer segundo 4,904 metros, y que los espacios recorridos guardan con los tiempos empleados en recorrerlos la relación de los cuadrados; averígüese la profundidad de un pozo al que cayó un objeto y en su descenso empleó 9 segundos. (Díaz, op. cit., p. 263)
- Ciento ochenta grados del termómetro Farenheit equivalen a 100 del termómetro centígrado y a 80 del Reaumur. ¿Cuántos grados del termómetro Farenheit equivalen a 46 del centígrado, y a cuántos grados centígrados equivalen 38 del Reaumur? (Dalmáu, op. cit., p. 206)

3.5. Problemas de Ciencias de la naturaleza

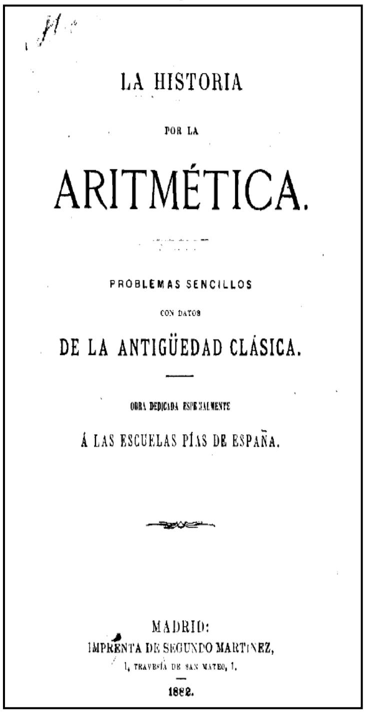
Por último encontramos ejemplos de problemas referentes a aspectos de la biología o la medicina:

- Cada vez que un hombre respira introduce 665 centímetros cúbicos de aire en sus pulmones; respira poco más o menos 18 veces por minuto: ¿qué cantidad de aire introduce en sus pulmones durante una hora? (Terry, op. cit., p. 14)
- Sabiendo que el hombre al respirar vicia diariamente 8 metros cúbicos de aire, averígüese cuántos metros cúbicos viciará en 9 horas. (Díaz, op. cit., p. 267)
- El hombre respira, por término medio, 16 veces por minuto, y en cada inspiración introduce, poco más o menos, en sus pulmones, 135 centímetros cúbicos de oxígeno. En cada espiración, devuelve a la atmósfera 105 centímetros cúbicos de dicho gas. ¿Qué cantidad de oxígeno consume el hombre por hora? (Dalmáu, op. cit., p. 62)

4. Un texto dedicado en exclusiva a los problemas aritméticos multidisciplinares históricos: *La Historia por la Aritmética*

La sección anterior ilustra la cantidad y la variedad de problemas aritméticos multidisciplinares que aparecen en algunos de los manuales más significativos (atendiendo al número de sus ediciones) del siglo XIX dedicados a la enseñanza de la aritmética elemental. Esto no resulta sorprendente a juzgar por los comentarios de Fernández Vallín que hemos presentado en la Sección 2.

Sin embargo, lo que sí resulta algo más sorprendente es encontrar un libro de problemas propuestos en el que todos los enunciados toman los datos de la Historia de la Antigüedad Clásica. Nos referimos al manual *La Historia por la Aritmética*[12] (Menge y Werneburg, 1882), publicado en Madrid en 1882, y dedicado “especialmente a las Escuelas Pías de España”.



LA HISTORIA
POR LA
ARITMÉTICA.
PROBLEMAS SENCILLOS
CON DATOS
DE LA ANTIGÜEDAD CLÁSICA.
OBRA DEDICADA ESPECIALMENTE
Á LAS ESCUELAS PÍAS DE ESPAÑA.
MADRID:
IMPRENTA DE SEGUNDO MARTÍNEZ,
1, TRAVESÍA DE SAN MATEO, 1.
1882.

Figura 2. Portada de *La Historia por la Aritmética*

4.1. Estructura del texto

El texto se desarrolla a lo largo de ciento veintiséis páginas y se estructura en cuatro partes. La primera, dedicada a las cuatro operaciones con números enteros, contiene cuatro capítulos; la segunda se consagra a las cuatro operaciones con quebrados ordinarios; la tercera se ocupa de las cuatro operaciones con fracciones decimales y la cuarta se dedica a la regla de tres, de interés y de compañía.

Antes de desarrollar los contenidos expuestos en el índice de la obra, se presentan diez tablas con información concerniente a monedas, medidas de longitud, medidas de superficie, medidas de capacidad griegas y pesas tanto griegas como romanas. Acto seguido se facilita información acerca de la organización de las legiones romanas y las monedas, medidas y pesas corrientes y usuales entre los antiguos.

En el prólogo de *La Historia por la Aritmética* se descubre la autoría del libro, se intenta ocultar la identidad del traductor, un tal E. J.[13], y se justifica la traducción:

> En las Colecciones de problemas numéricos que se han publicado y nosotros conocemos, procuran sus autores enseñar práctica y detalladamente el uso que puede hacerse de las reglas de la Aritmética, sin tener puestos los ojos en la utilidad y provecho inmediato que en la vida real puede sacarse de tales

[12] Existe versión digital de este manual en la Biblioteca Digital Hispánica (Biblioteca Nacional de España).

[13] Eulogio Jiménez Sánchez (1834 – 1884) nació en Méntrida (Toledo). Se licenció en Derecho y se doctoró en Ciencias Exactas por la Universidad Central. En 1860 obtuvo, por oposición, una plaza en el Observatorio Astronómico de Madrid, permaneciendo es este cargo hasta el 31 de marzo de 1884. Su obra *Tratado elemental de la Teoría de los Números* (Jiménez, 1877) fue premiada, en público certamen, por la Real Academia de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales de Madrid. También publicó *Ejercicios de Matemáticas. Aritmética* (Jiménez, 1868), *Nociones de Química Agrícola* (Jiménez, 1878).

ejercicios. Por lo que se refiere a la Física, la Química, la Mecánica, la Agrimensura u otras ciencias y artes, no carecen del todo aquellos problemas de útiles aplicaciones. Pero, aún en la misma docta Alemania, donde tantos y tan buenos libros se han publicado, no existía ninguno en que, a la vez que se enseñara al niño a manejar el cálculo aritmético para resolver aquellos problemas que más frecuentemente ocurren en la práctica de la vida, se le instruyera con abundante copia de datos relativos a las interesantes relaciones políticas y comerciales de los pueblos de la antigüedad clásica, completando así con mil pormenores y detalles sin que el alumno se aperciba siquiera de ello, el conocimiento de la historia de Grecia y de Roma que adquiere en las aulas. A fines del año último los profesores R. Menge y F. Werneburg llenaron en Alemania este vacío, publicando la obra verdaderamente original[14] que con algunas variaciones de poca monta, las más de ellas necesarias para acomodar el libro a nuestro país, hemos traducido y publicamos, creyendo prestar un servicio importante a la instrucción pública en España y señaladamente a los estudiantes de las asignaturas de Historia, Geografía, Latín y Matemáticas de las escuelas e institutos.

A nosotros no nos toca elogiar la obra: cuantos hayan estudiado con algún detenimiento los idiomas en que dejaron escritos sus memorables hechos griegos y romanos, la habrán echado de menos muchas veces. Nos limitamos, pues, a suplicar a todos los profesores que la lean y hagan de ella el uso que en su inteligente juicio estimen más conveniente para sus alumnos.

E. J.

Fig. 3. Autógrafo de Eulogio Jiménez

Los quinientos sesenta y cinco problemas propuestos a lo largo de la obra corresponden a los tópicos aritméticos que detallamos a continuación[15]:

1. Primera parte: Las cuatro operaciones con números.

   i. Capítulo I. *Sistemas de numeración escrita de los griegos y romanos y problemas diversos.*

      Numeración escrita (6). Adición (8). Sustracción (10). Multiplicación (10). División (12). Problemas diversos (18).

   ii. Capítulo II. *Conversión recíproca de monedas, pesas y medidas antiguas.*

      Monedas antiguas (36). Medidas y pesas antiguas (50).

   iii. Capítulo III. *Conversión de monedas, pesas y medidas antiguas en modernas.*

      Monedas antiguas (55). Medidas y pesas antiguas (104). Problemas diversos con monedas, pesas y medidas antiguas (38).

   iv. Capítulo IV. *Cómputo antiguo del tiempo.*

[14] El libro al que se refiere el traductor es *Antike rechenaufgaben: ein ergänzungsheft zu jedem rechenbuch für gymnasien* publicado en 1881 (Leipzig: B. G. Teubner) y escrito por Rudolf Menge (1854-1912) y Ferdinand Werneburg.

[15] Indicamos entre paréntesis el número de problemas correspondientes a cada tópico.

Cómputo del tiempo por los griegos (20). Cómputo del tiempo por los romanos (25).

2. Segunda parte: Las cuatro operaciones con quebrados ordinarios. Quebrados ordinarios (36).
3. Tercera parte: Las cuatro operaciones con quebrados decimales. Quebrados decimales (32).
4. Cuarta parte: Regla de tres, de interés y de compañía. Regla de tres (15). Porcentajes en general (30). Cálculo del interés (30). Regla de compañía (14). Regla de conjunta (16).

4.2. Una breve antología de problemas

Para dar una somera idea de las cuestiones propuestas en *La Historia por la Aritmética*, hemos seleccionado los problemas siguientes:

- *El ejército que condujo Alejandro de Grecia en el año 334 (a. de J.) contra el rey de Persia, Dario Codomano, constaba de 12000 macedonios, 7000 aliados, 5000 hombres de tropa mercenaria y 6000 de tropas auxiliares. Además llevaba Alejandro cuatro divisiones de caballería, dos de las cuales eran de 1500 caballos cada una, la tercera de 600 y la cuarta de 900 caballos. ¿Cuántos hombres de infantería, cuántos de caballería y cuántos en junto, componían el ejército de Alejandro?*)Adición de números enteros, p. 23)
- *Roma fue fundada por Rómulo y Remo en el año DCCLIII (a. de J.) ¿Cuántos años transcurrieron hasta que fue proclamado emperador Augusto en el XXX (a. de J.)?* (Sustracción de números enteros, p. 25)
- *En el combate naval de Artemisium, que Jerjes libró contra los griegos el año 480 (a. de J.), presentaron los atenienses 127 naves trirremes, 40 los corintios, 10 los lacedemonios y 94 otros Estados. Además la armada contaba con 9 transportes menores. La tripulación de cada nave trirreme era de 200 hombres, y la de cada transporte de 80. ¿Cuál era el número total de tripulantes de la escuadra? ¿Cuántos buques helenos tomaron parte en el combate?* (Multiplicación de números enteros, p. 26)
- *En el tiempo del apogeo y esplendor de Atenas existían en esta ciudad 20000 ciudadanos con derecho electoral. El Consejo ateniense se componía de 500 vocales o miembros. ¿Qué número de electores representaba cada consejero?* (División de números enteros, p. 28)
- *El día de los romanos era el intervalo de tiempo que mediaba entre la salida y la postura del sol, y la noche el tiempo que transcurría desde la postura hasta la nueva aparición del sol en el horizonte. Dividían el día en 12 horas (hore), y la noche en 4 vigilias (vigiliae); y como la duración de los días y de las noches es distinta en las diferentes épocas del año, era también distinta la duración de las horas y de las vigilias; pero el instante del mediodía (meridies), coincidía siempre con el principio de la hora séptima.*

Según el moderno cómputo del tiempo:

¿A qué hora correspondía en las épocas de los equinoccios (en estas épocas los días y las noches son de igual duración), el principio de la hora primera? ¿A qué hora el de la tercera?

¿Cuál era la duración de una vigilia en las épocas de los equinoccios?

¿A qué hora comenzaban la primera, la segunda, la tercera y la cuarta vigilia? (Problemas diversos, p. 35)

- *Por el año 400 (a. de J.), un carpintero, en Atenas, ganaba un jornal de 5 óbolos diarios. En el supuesto de que trabajasen en una casa durante 30 días, 12 carpinteros, ¿a cuántas minas ascendía el importe de sus jornales?*[16] (Monedas antiguas, p. 37)
- *Cuenta Herodoto que en medio del mar de Moris, en Egipto, había dos pirámides, que se elevaban a una altura de 50 orgyias sobre el nivel del agua y profundizaban otro tanto debajo de ella. ¿Cuál era en podes, la altura de estas pirámides?*[17] (Medidas y pesas antiguas, p. 41)
- *Un exómis (jubón de una sola manga) costaba en tiempo de Sócrates en Atenas 10 dracmas: a la misma suma ascendía el salario de un criado. Una clámide (vestimenta de los caballeros y de los criados jóvenes o lacayuelos) costaba 12 dracmas. ¿Cuál era en pesetas el precio de un exómis o el de una clámide?*[18] (Monedas antiguas, p. 46)
- *El escultor Zenodoro, hizo en Roma una estatua colosal de Nerón, de 119 pedes de altura. ¿Cuál era en metros la altura de esta estatua? ¿Cuántos metros más de altura tenía la estatua de Nerón que la de Atenas que existía en el castillo de esta ciudad?*[19] (Medidas y pesas antiguas, p. 55)
- *El legislador Licurgo permitió que se repartiera entre el pueblo toda la fortuna de Diphilo que ascendía a 160 talentos. Correspondieron en el reparto 50 dracmas a cada ciudadano. Estimando en la cuarta parte de la población el número de adultos, cabezas de familia, ¿cuántos eran estos en aquel tiempo?*[20] (Problemas diversos con monedas, pesas y medidas antiguas, p. 65)
- *Venció Epaminondas a los espartanos en la batalla de Leuctra 371 años (a. de J.), y a su vez los espartanos vencieron a Epaminondas en Mantinea en la Ol. CIV,3. ¿Cuántos años transcurrieron entre las dos batallas?*[21] (Cómputo de tiempo por los griegos, p. 78)
- *Destituido Tarquinio el Soberbio, 510 años (a. de J.), se fundó la República romana que subsistió hasta la creación del Imperio en el año 724 (a.u.c.)*[22]*. ¿Cuántos años duró el régimen republicano en Roma?* (Cómputo de tiempo por los romanos, p. 82)
- *Durante la Monarquía, y también hasta los últimos tiempos de la República, el Senado romano se compuso constantemente de 300 miembros. Antes de desaparecer el régimen republicano, este número se elevó en un tercio; y en el curso de la guerra civil tuvo un aumento dos y un cuarto veces mayor que el precedente. Augusto rebajó luego a los dos tercios el número de senadores.*

[16] 1 mina = 600 óbolos.
[17] 1 orgyia = 6 podes.
[18] 1 dracma = 0,94 pesetas.
[19] 1 pes = 0,296 metros.
[20] 1 talento = 6000 dracmas.
[21] Los griegos fijaron el origen del tiempo en el establecimiento de los juegos Olímpicos que se celebraban de cuatro en cuatro años. Este intervalo de cuatro años se llamaba Olimpiada y el cómputo de tiempo se hacía por Olimpiadas y años de Olimpiada. Así, por ejemplo, Ol. XX, 1 significa el primer año de la vigésima Olimpiada.
[22] Los romanos tomaron como origen de su cronología la fundación de Roma, *ad urbe condita* (a.u.c.).

¿De cuántos miembros se componía el Senado al fin de la república, durante la guerra civil y en tiempo de Augusto? (Quebrados ordinarios, p. 88)

- *El acueducto Aqua Marcia, en Roma, construido a la mitad del año 2 (a. de J.), tiene 61710 $\frac{1}{2}$ passus de longitud. Otro acueducto, llamado Anio vetus, hecho el año 3 (a. de J.) que conduce a Roma las aguas de Tibur (Tívoli), tiene 43 milia passuum. ¿Cuál de estos dos acueductos es más largo, y cuál es la diferencia de sus longitudes expresada en metros?*[23] (Quebrados decimales, p. 100)
- *El célebre médico Galeno hizo los viajes marítimos que siguen: de las costas macedónicas a la isla de Taso, 200 estadios; de esta isla a la de Lemmos, 700 estadios; y de aquí a Alejandría en Troas (Asia menor), otros 700 estadios. Navegando a razón de 1500 estadios por día (24 horas), ¿cuántas horas emplearía en los tres viajes?* (Regla de tres, p. 104)
- *Todas las materias, de cualquier clase o especie que fuesen, que entraban o salían de Atenas, estaban sujetas al pago de un impuesto del 2% de su valor. Demóstenes habla de un buque cargado de mercancías por valor de 5500 dracmas. ¿Qué derecho debió satisfacer el armador?* (Percentajes en general, p. 108)
- *Un orador griego afirmó que se había prestado un capital de 40 minas al interés de 9 óbolos. ¿Cuántas dracmas importaban al año los intereses?*[24](Cálculo del interés, p. 112)
- *El panteón de Roma, templo edificado bajo el mando de Augusto, es un edificio en forma de anillo circular terminado por una cúpula semiesférica. La altura total es de 42,70 metros. La altura de la cúpula y la del muro que la sostiene están entre sí como los números 1: 1,17635. ¿Cuántos metros de altura tienen una y otro?* (Regla de compañía, pp. 119-120)
- *Con viento favorable y buena mar andaba por término medio un barco romano 1500 estadios en veinticuatro horas. Los vapores-correos modernos más ligeros andan en una hora 14 millas marinas. ¿Cuánto tiempo emplea uno de estos vapores en recorrer el camino que andaba un barco romano en un día? (1 milla geográfica = 4 millas marinas = 7,4199 kilómetros)*[25]*.*(Regla de conjunta, p. 121)

4.3. Una breve antología de problemas

Desde el punto de vista de las matemáticas, el texto trata aquellos contenidos aritméticos que podríamos llamar básicos y que siguen constituyendo, hoy en día, el núcleo principal de la formación aritmética (y por tanto matemática) de los alumnos: las cuatro operaciones (suma, resta, multiplicación y división) de enteros, fracciones y decimales junto con la proporcionalidad aritmética.

En este sentido el libro tiene el indudable valor de presentar todos los problemas considerados en un contexto definido en que el interés por su resolución es indudable: la solución buscada no es un número fuera de contexto que se obtiene a partir de ciertas operaciones sobre los datos, sino que tiene un significado

[23] 1 mille-passus = 1000 passus.

[24] En Grecia, el interés se refería al mes y no al año, y para fijar las condiciones del préstamo se estipulaba, en óbolos o en dracmas, la cantidad que debía producir cada mina. Así, por ejemplo, un capital prestado al interés de 5 óbolos producía mensualmente 5 óbolos por mina, y 60 óbolos por mina cada año.

[25] 1 estadio romano ≅ 185 metros.

concreto y proporciona una información interesante y útil. Desde el punto de vista de la multidisciplinariedad, este texto es un ejemplo paradigmático de esta idea, puesto que el contexto histórico en que se sitúan no es una mera excusa para plantear los problemas, sino que se pretende que el alumno adquiera ciertos conocimientos de Historia Antigua.

Un ejemplo muy claro de lo anterior lo constituyen los problemas 35 y 36 de las páginas 93 y 94 (correspondientes a la segunda parte):

Problema 35. Sobre los ciudadanos más ricos de Atenas pesaba la carga extraordinaria (leiturgia) de armar un navío trirreme (tripulación y sueldos los pagaba el estado). El entretenimiento de un barco trirreme (Trierarchia) costaba al año 5044 y ¾ dracmas. Repartida esta cantidad por iguales partes entre cuatro ciudadanos, ¿cuántas pesetas correspondía pagar a cada uno?

Problema 36. El armamento de un barco trirreme (Trierarchia) durante siete años costaba a cada uno los triearcas (problema anterior) 6 talentos. ¿A cuánto ascendía el gasto anual de la trirreme, en pesetas?

Resulta claro que los problemas anteriores, pese a su valor matemático, son un pretexto para presentar al alumno un determinado (e interesante) aspecto de la historia griega (Corvisier, 2008).

Por todo esto coincidimos con la apreciación del traductor cuando, en su prólogo, dirige la obra a estudiantes de Matemáticas, pero también de Historia o Geografía. Ignoramos el éxito o la difusión que esta obra pudiera tener en el momento de su edición. Su interés y originalidad nos parecen evidentes y pensamos que deberían existir, aún hoy día, textos de similar inspiración.

5. Problemas aritméticos multidisciplinares y actividades de enseñanza y aprendizaje

A partir del estudio realizado en las secciones anteriores, queda de manifiesto la existencia en textos del siglo XIX de una gran variedad de problemas aritméticos multidisciplinares que se pueden proponer a los alumnos de los niveles educativos elementales. Estos problemas:

a) Pueden interesar a los alumnos en el estudio de la aritmética.

b) Pueden contribuir a que los alumnos aprendan tópicos de otras disciplinas.

En consecuencia, pensamos que tanto los profesores no universitarios como los que se dedican a la formación de los futuros docentes deberían tener en cuenta este tipo de problemas a la hora de diseñar (o enseñar a diseñar) actividades de enseñanza y aprendizaje para sus alumnos.

En esta línea, a modo de ejemplo, presentamos una secuencia de actividades que se puede adaptar o modificar para diseñar una actividad de enseñanza y aprendizaje dirigida a alumnos de distintos niveles.

Actividad 1: El problema.

En un libro de Aritmética del siglo XIX[26] hemos encontrado el problema siguiente:

Napoleón nació el año 1769 y murió el 1821. ¿Cuántos años vivió?

[26]Terry y Rivas, A. (1880). *Ejercicios y problemas de Aritmética: parte originales y parte escogidos de los principales autores que tratan de la materia*.

Resuélvelo y explica cómo lo has hecho.

Actividad 2[27]: La búsqueda.

I. Completa con una palabra o un número cada uno de los espacios del siguiente texto:

   Napoleón Bonaparte nació en________(Córcega) el____de________de 1769 y murió en la isla de_________________el___de________de 1821.
   En_________se convirtió en Primer Cónsul de la República y en________fue coronado emperador de los franceses.
   Se considera a Napoleón como uno de los mayores genios militares de la historia. Llevó a cabo campañas bélicas muy exitosas, aunque con ciertas derrotas igualmente estrepitosas. Sus guerras se convirtieron en las mayores operaciones militares conocidas hasta el momento en Europa, involucrando a un número de soldados jamás visto en los ejércitos de la época.
   Fue derrotado definitivamente en la batalla de Waterloo el 18 de junio de ____ desterrado a una isla del Océano Atlántico, donde murió

II. Localiza en un globo terráqueo los lugares de nacimiento y defunción de Napoleón.

III. Localiza Waterloo en un mapa de Europa

Actividad 3: Más problemas.

Resuelve los problemas siguientes, haciendo uso de la información que has encontrado en el apartado anterior:

I. ¿Cuántos años tenía Napoleón cuando fue coronado emperador?
II. ¿Cuánto duró la Guerra de la Independencia Española contra las tropas napoleónicas?[28]
III. Si Napoleón invadió la Rusia con 489105 soldados y al regresar de Moscú sólo tenía 53420, ¿cuántos hombres murieron en la retirada?[29]
IV. ¿Cuántos años sobrevivió Napoleón a su derrota en Waterloo?
V. La isla de Córcega tiene una superficie aproximada de 8680 km^2 y la de Santa Elena 122. ¿Qué superficie ocupan entre las dos islas?

Actividad 4[30]: Para saber un poco más.

Investiga y responde a las siguientes preguntas:

I. ¿Cuál de los siguientes pintores españoles fue contemporáneo de Napoleón?
   - Diego Velázquez.
   - Francisco de Goya.
   - Francisco de Zurbarán.
II. ¿Cuál de los siguientes matemáticos no fue contemporáneo de Napoleón?
   - Blaise Pascal.

[27] En esta actividad el alumno deberá consultar alguna enciclopedia o alguna página de Internet.
[28] El alumno debe consultar alguna enciclopedia o alguna página de Internet.
[29] Díaz Muñoz, P. (1897). *Elementos de Aritmética*.
[30] En esta actividad el alumno deberá consultar alguna enciclopedia o alguna página de Internet.

- Pierre-Simon Laplace.
- Joseph-Louis Lagrange.

Actividad 5[31]: Un poco de Geometría.

Napoleón es uno de los pocos personajes históricos que ostentan el honor de haber prestado su nombre a un resultado matemático. Hablamos del llamado "Teorema de Napoleón".

I. Busca información y enuncia el Teorema de Napoleón.
II. ¿Dónde apareció ese resultado publicado por primera vez? ¿Es realmente Napoleón su autor?
III. Utiliza el programa GeoGebra para dibujar y comprobar la veracidad del Teorema de Napoleón.

En nuestra opinión esta secuencia de actividades muestra el interés didáctico que puede tener el trabajo con este tipo de problemas: A partir de un sencillo problema aritmético (que nos sirve para trabajar la sustracción de números enteros) presentamos la importante figura de Napoleón Bonaparte y algunos datos biográficos. Esos datos dan pie a nuevos problemas matemáticos y sirven para trabajar aspectos de Geografía física. Se puede aprovechar para presentar personajes contemporáneos de Napoleón y hablar de su actividad profesional y también hemos logrado saltar a la Geometría. Durante todo el proceso el alumno debe consultar diversas fuentes de información e incluso termina por utilizar un software de geometría dinámica.

Evidentemente esta serie de actividades no es más que un ejemplo que podría modificarse (variando la dificultad de los problemas, por ejemplo), extenderse (añadiendo más actividades) o ramificarse (la actividad 4 permite reiterar el proceso tomando como partida cada uno de los personajes).

Bibliografía

Corvisier, J.N. (2008). *Les Grecs et la mer*. Paris: Les Belles Lettres.

Dalmáu Carles, J. (1898). *Soluciones analíticas de los ejercicios y problemas contenidos en las siguientes obras del autor: Aritmética razonada y nociones de Álgebra. Lecciones de Aritmética, 1ª parte. Lecciones de Aritmética, 2ª parte. Resumen de las lecciones de Aritmética y Rudimentos de Aritmética.* Madrid: Hernando y Compª.

Díaz Muñoz, P. (1897). *Elementos de Aritmética*. Pamplona: Imprenta, librería y encuadernación de Nemesio Aramburu.

Fernández Vallín y Bustillo, A. (1861). *Aritmética para los niños, que concurren a las escuelas de primera enseñanza* (Sexta edición. Tirada estereotípica). Madrid: Imprenta de Santiago Aguado.

Jiménez, E. (1868). *Ejercicios de Matemáticas. Aritmética.* Madrid: Imprenta de Segundo Martínez.

Jiménez, E. (1877). «Tratado elemental de la Teoría de los Números»*. Memorias de la Real Academia de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales de Madrid. Tomo VII.* Madrid: Imprenta de la viuda de Aguado e hijo.

[31] En esta actividad el alumno deberá consultar alguna enciclopedia o alguna página de Internet.

Jiménez, E. (1878). *Nociones de Química Agrícola.* Madrid: Imprenta de Segundo Martínez.

Menge, R. y Werneburg, F. (1882). *La Historia por la Aritmética* (Traducción de Eulogio Jiménez). Madrid: Imprenta de Segundo Martínez

Mimo, P. (1850). *Las cuatro operaciones simples de la Aritmética para niños y niñas.* Villanueva: Imprenta de la viuda de Pina y Comp.

Poy Comes, M. (1786). *Elementos de Aritmética, y Álgebra, para la instrucción de la juventud.* Barcelona: Francisco Suria y Burgada, Impresor del Rey N. Sr.

Poy y Comes, M. (1819). *Elementos de Aritmética numérica y literal al estilo del comercio para instrucción de la juventud* (Quinta edición. Tomo I). Barcelona: Oficina de Sierra y Martí.

Salinas y Angulo, I. y Benítez y Parodi, M. (1898). *Aritmética* (Cuarta edición. Corregida y aumentada). Madrid: Imprenta del Depósito de la Guerra.

Terry y Rivas, A. (1880). *Ejercicios y problemas de Aritmética: parte originales y parte escogidos de los principales autores que tratan de la materia* (Primera Parte: Enunciados. Tomo I). Madrid: Pedro Abienzo, Impresor del Ministerio de Marina.

Vicente Meavilla Seguí. Licenciado en Ciencias Matemáticas por la Universidad de Zaragoza (1976) y Doctor en Filosofía y Letras (Pedagogía) por la Universidad Autónoma de Barcelona (1998) con una tesis sobre la influencia de las interacciones verbales sobre el proceso de enseñanza y aprendizaje del álgebra elemental. Ha publicado diversos artículos y libros sobre la influencia de la historia de las matemáticas sobre la enseñanza y el aprendizaje de dicha disciplina. En la actualidad es profesor de la Facultad de Ciencias Sociales y Humanas (Campus de Teruel) y miembro del Departamento de Matemáticas de la Universidad de Zaragoza. **meavilla@unizar.es**

Antonio M. Oller Marcén. Licenciado en Ciencias Matemáticas por la Universidad de Zaragoza (2004) y Doctor por la Universidad de Valladolid (2012) con una tesis sobre la enseñanza de la Proporcionalidad aritmética en Secundaria. Ha publicado diversos trabajos sobre Educación Matemática, Álgebra y Teoría de Números. Actualmente es profesor del Centro Universitario de la Defensa de Zaragoza. **oller@unizar.es**

REVISTA IBEROAMERICANA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA

ISSN: 1815-0640
Número 37. Marzo 2014
páginas 139-145

www.fisem.org/web/union

El rincón de los problemas

Uldarico Malaspina Jurado
Pontificia Universidad Católica del Perú
umalasp@pucp.edu.pe

Oportunidades para estimular el pensamiento matemático. Triángulos de área máxima o de área mínima

Problema

El profesor Huerta entrega a sus alumnos de cuarto año de secundaria cuatro hojas de papel. Cada una tiene dibujado en el centro una circunferencia, cuyo radio mide 3cm. Les pide que en cada hoja dibujen un triángulo, ya sea inscrito o circunscrito en la circunferencia, de modo que su área sea la mayor posible o la menor posible. Deben describir cada triángulo y especificar las dimensiones matemáticas de sus lados. ¿Cuántos triángulos diferentes (no congruentes entre sí), de tales características, se pueden dibujar?

Este problema resulta de uno de los problemas creados por profesores de secundaria en un taller de creación de problemas realizado con 31 participantes y considero que brinda excelentes oportunidades para estimular el pensamiento matemático.

El punto de partida fue el siguiente episodio:

> El profesor Zamora, de cuarto año de media, propone el siguiente problema a sus alumnos:
>
> **Hallar las dimensiones del triángulo rectángulo que tenga la mayor área posible y esté inscrito en una circunferencia cuyo radio mide 8cm.**
>
> Después de unos minutos:
>
> - La mayoría dice que tales dimensiones son: 16cm., $8\sqrt{2}$cm. y $8\sqrt{2}$cm.
> - Algunos tienen dibujado un triángulo isósceles con base en una cuerda y altura correspondiente mayor que 8cm.
> - Teresa tiene dibujado un triángulo que es la solución correcta, pero no se anima a decir su respuesta.

Además de pedir a los participantes que resuelvan el problema, se les pidió que crearan un problema que tenga en cuenta las reacciones de los alumnos del profesor Zamora, de modo que su solución contribuya a que los alumnos que tengan que resolver el problema del episodio, tengan una percepción más clara de él y de su solución (un “Problema Pre”, según lo establecimos en artículos anteriores sobre creación de problemas). Se les pidió escribir el enunciado del problema y explicar cómo ayudaría la solución de este problema creado, a que los alumnos resuelvan correctamente el problema inicial, evitando dudas o inseguridades similares a las de los alumnos del profesor Zamora.

El análisis de las soluciones presentadas por los participantes del taller y de las correspondientes propuestas de problemas o secuencias de tareas, sería materia de un artículo específico. Por ahora, adelantamos que es una muestra evidente de la relación estrecha entre la competencia matemática y la competencia de análisis didáctico en la docencia, y de lo importante que es fortalecer la primera para desarrollar mejor la segunda.

Otra tarea que se pidió a los participantes del taller, fue crear un nuevo problema, cuya solución se facilite habiendo resuelto correctamente el problema del episodio (un “Problema Pos”, según lo establecimos en artículos anteriores sobre creación de problemas). Se les pidió escribir el enunciado y una solución del problema creado.

En este artículo, nos detendremos en esta parte de las tareas encomendadas en el taller. Comentaremos algunos de los problemas creados por los profesores participantes y destacaremos las oportunidades para estimular el pensamiento matemático que se presentan al asumir tareas de creación de problemas.

Ciertamente, es fundamental resolver el problema del episodio para ubicarse bien en el contexto. Algunos profesores resolvieron el problema usando cálculo diferencial, otros usando la desigualdad entre media aritmética y media geométrica, otros usando trigonometría y otros usando un argumento muy sencillo que lleva a la solución. Lo anotamos como nota de pie de página e invitamos al lector a leerla solo después de haber resuelto el problema[1]. En verdad, esperaba que la gran mayoría de participantes en el taller use tal argumento.

A continuación, algunos problemas creados por los profesores participantes en el taller:

Problema 1.

Un triángulo rectángulo inscrito en una circunferencia posee el área máxima posible. Si dicha área es de 100cm^2, hallar la longitud de la circunferencia.

Comentario

El profesor recoge bien la idea de usar una solución correcta del problema del episodio. Aunque no lo dice explícitamente, está usando el hecho que el triángulo rectángulo de área máxima inscrito en una circunferencia de radio dado queda determinado de manera única, salvo la ubicación específica de los vértices. Es parte del pensamiento matemático reconocer o intuir estas situaciones y muy valioso que se las presentemos a los alumnos. Puede percibirse claramente que el autor construye su problema como si partiera de la solución de un problema similar al del episodio; así, ahora el requerimiento es similar a lo que en el problema del episodio era la información y la información es similar a lo que en tal problema era el requerimiento.

[1] Si el triángulo inscrito es rectángulo, su hipotenusa tiene que ser un diámetro. Para que su área sea máxima, es necesario que la altura correspondiente a tal hipotenusa sea máxima, lo cual ocurre cuando esa altura es igual al radio y así el triángulo rectángulo inscrito tiene que ser de catetos iguales. En consecuencia, las longitudes de sus lados son 16cm., $8\sqrt{2}$ cm. y $8\sqrt{2}$ cm.

En la figura 1 presentamos la solución del autor del problema:

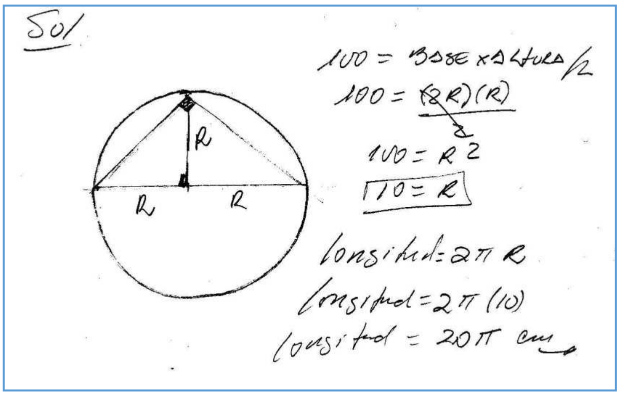


Figura 1

Una manera de resolver el problema, relacionando más explícitamente conceptos matemáticos, es identificar la función biunívoca que hace corresponder el radio R > 0 de cada circunferencia, con el área máxima de los triángulos rectángulos inscritos en la circunferencia. Por el problema del episodio, sabemos que tal función es $f(R) = \frac{2R \times R}{2} = R^2$. Así, según la información del problema, se tiene $f(R) = R^2 = 100$ cm^2 y en consecuencia $R = 10$ cm.

El problema no podría resolverse si se omitiera la información de *área máxima* del triángulo rectángulo inscrito, pues si bien la hipotenusa siempre sería $2R$, la altura correspondiente podría ser cualquier número h entre 0 y R y se tendría la ecuación de dos variables $Rh = 100$ cm^2, con infinitas soluciones. Por ejemplo, una circunferencia de radio 20cm y un triángulo rectángulo de hipotenusa 40cm y altura correspondiente 5 cm; o una circunferencia de radio 30cm y un triángulo rectángulo de hipotenusa 60cm y altura correspondiente $\frac{10}{3}$ cm.

Problema 2.

Determinar las dimensiones de un rectángulo si una de sus diagonales mide 10cm y su área es la mayor posible.

Solución del autor

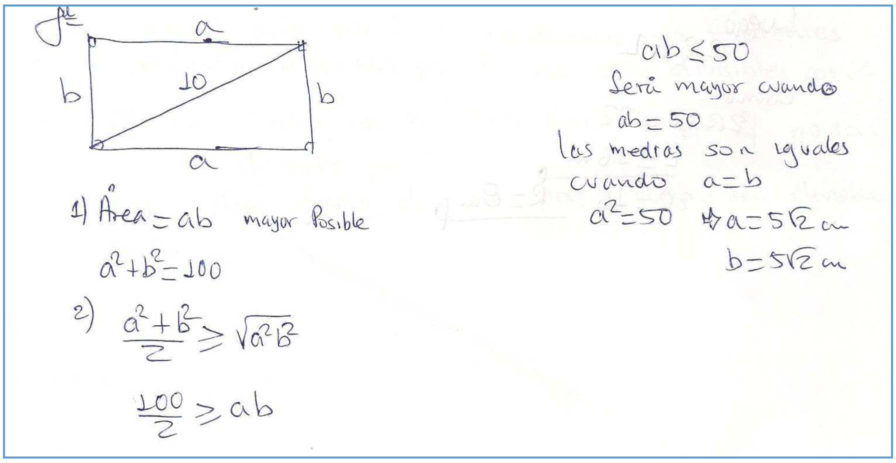


Figura 2

Comentario

La novedad de este problema está en mantener el vínculo con el problema del episodio, pero referirse a un rectángulo y no a un triángulo, y no hacer referencia a una circunferencia. Es claro que las ideas fundamentales en la solución del problema del episodio estuvieron presentes para la formulación de este problema; sin embargo en la solución misma, el autor se deja llevar por la relación entre media aritmética y media geométrica y busca aplicar un teorema según el cual, *si la suma de n números positivos es constante, entonces su producto es máximo cuando tales números son iguales*. Con este criterio resuelve el problema del episodio y lo repite para resolver el problema que propone.

Si bien es correcto repetir un método de solución de un problema anterior, reconociendo que es fundamentalmente el mismo, dado en otro contexto matemático, es importante hacer notar que el problema se puede resolver usando el resultado esencial del problema del episodio, que es caracterizar el triángulo rectángulo de área máxima, inscrito en una circunferencia dada, como un triángulo isósceles (de catetos iguales), cuya hipotenusa es el diámetro de la circunferencia. Así, el problema queda resuelto como un "corolario" de tal resultado, pues basta considerar la diagonal del rectángulo como el diámetro de una circunferencia y así el rectángulo de área máxima y diagonal de longitud 10, será la unión de dos triángulos rectángulos de área máxima, inscritos en tal circunferencia, con hipotenusa común de longitud 10, que son los que tienen catetos de longitud $5\sqrt{2}$.

Otra manera de hacer evidente la relación con el problema del episodio es la siguiente: llamando x, y a las dimensiones del rectángulo de diagonal 10, su área es xy, la cual es máxima si $xy/2$ es máxima, esto último es el área de un triángulo rectángulo de 10 cm. de hipotenusa. Así, el problema es el de hallar las dimensiones de un triángulo rectángulo de área máxima conociendo su hipotenusa, que es esencialmente el problema del episodio y ya se sabe que tal triángulo es de catetos de igual longitud.

Vemos que la creación de este problema, a partir del problema del episodio, brinda la oportunidad de usar criterios propios del pensamiento matemático.

Estas ideas están presentes en algunos problemas creados y resueltos por otros participantes del taller, como podemos ver en el siguiente problema.

Problema 3

Hallar las dimensiones de un rectángulo inscrito en una circunferencia de radio 2 de tal manera que tenga área máxima.

Solución del autor:

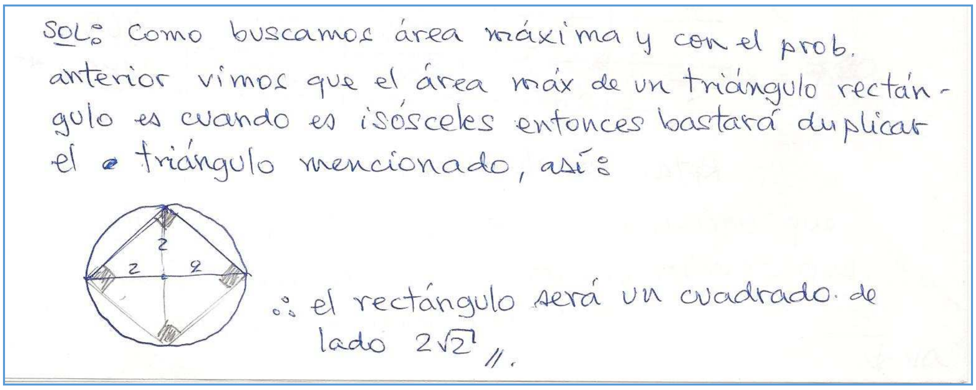


Figura 3

A continuación presentamos el enunciado y el intento de solución de un problema particularmente interesante, propuesto por uno de los profesores participantes:

Problema 4

Determinar las dimensiones de un triángulo rectángulo que tenga la mayor área posible y que esté circunscrito a una circunferencia de radio 8 cm.

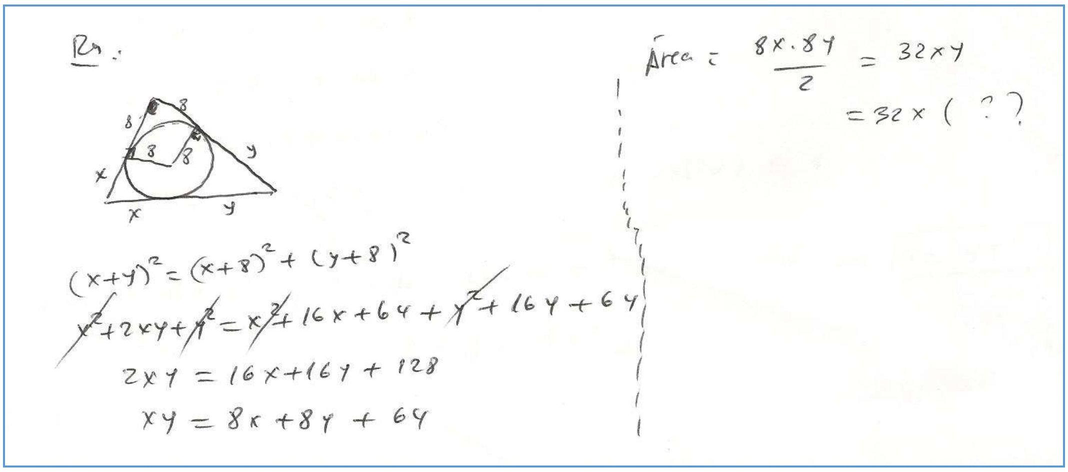


Figura 4

Comentario

Vemos que el autor del problema tiene la interesante idea de considerar triángulos circunscritos a una circunferencia, pero no llega a una respuesta final. No encuentra las dimensiones del triángulo que busca. ¿Existe tal triángulo?

El problema presenta una excelente oportunidad para ejercitar una faceta muy importante del pensamiento matemático: la existencia de una solución; en este caso, la del valor óptimo de una función; y más específicamente, plantearnos la pregunta ¿existe un triángulo rectángulo circunscrito a una circunferencia, que tenga área máxima?

Con una circunferencia dada, digamos de radio 2 cm, podemos construir muchos triángulos rectángulos circunscritos a ella y percibir intuitivamente que el área puede ser tan grande como se desee. Por ejemplo, podemos construir un triángulo rectángulo de área cercana a los 200 cm^2.

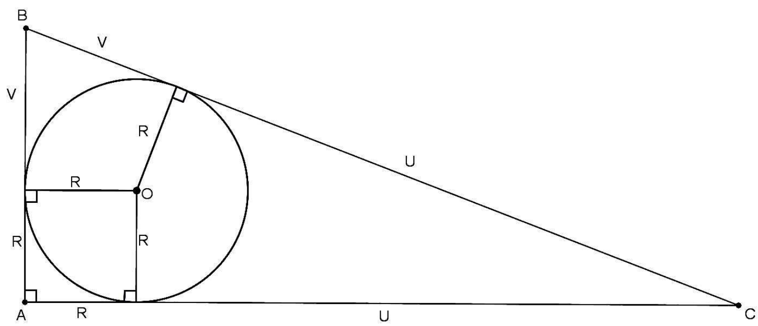


Figura 5

Considerando la figura 5 con el radio de la circunferencia R = 2, planteamos el siguiente sistema de ecuaciones:

$$(2 + u)(2 + v) = 400$$

$$(2 + u)^2 + (2 + v)^2 = (u + v)^2$$

Al resolverlo, obtenemos los valores:

$$u \approx 95{,}91$$

$$v \approx 2{,}09$$

Y en consecuencia las dimensiones del triángulo rectángulo circunscrito a la circunferencia de radio 2 cm, de área cercana a 200 cm^2 son:

Catetos: 97,91 cm. y 4,09 cm.; Hipotenusa; 98 cm.

Es interesante observar cómo a medida que un cateto se hace más grande, el otro se hace más pequeño y que la hipotenusa se aproxima más a una posición paralela al cateto mayor. Ocasiones para examinar ideas de límites de funciones.

Surge entonces la conjetura de la no existencia de un triángulo rectángulo de área máxima, circunscrito a una circunferencia dada. Evidentemente habría que demostrar o rechazar la conjetura, lo cual es propio del pensamiento matemático y esto lleva a considerar funciones, a resolver ecuaciones teniendo como parámetros el área del triángulo y el radio de la circunferencia, a examinar desigualdades, etc. Las diversas formas de examinar esta conjetura, son un desafío muy significativo al pensamiento matemático.

Paralelamente, surge la pregunta sobre la existencia de un triángulo rectángulo circunscrito a una circunferencia de radio dado, cuya área sea mínima. Parece natural conjeturar que sí; más aún, que es isósceles. Su demostración o refutación es otro reto interesante. La optimización usando cálculo diferencial con una función de dos variables y una restricción es un camino, pero queda el reto de seguir un camino sin este poderoso recurso.

Más preguntas y nuevos problemas

Podemos preguntarnos, de manera más general, si existe o no un triángulo circunscrito a una circunferencia dada, que tenga área máxima o área mínima. Una idea interesante a considerar es que dada una circunferencia, se pueden construir triángulos isósceles circunscritos a ella, cuya área sea tan grande como se desee, pues la base opuesta al ángulo formado por los lados congruentes, tendrá longitud necesariamente mayor que la longitud del diámetro de la circunferencia y la altura correspondiente será más grande cuanto más cercana a la longitud del diámetro sea tal base.

Crear “problemas pos” a partir del problema del episodio mostrado, lleva a hacerse preguntas con pensamiento matemático y así resulta natural preguntarse sobre la existencia de triángulos de área máxima o triángulos de área mínima, inscritos en una circunferencia dada. Para hacer más evidentes estos cuestionamientos y los retos de las demostraciones o refutaciones de las conjeturas que surjan, he propuesto la tarea del inicio de este artículo, que además recoge la iniciativa del autor del problema 4, al considerar triángulos circunscritos.

¿Existe un triángulo de área mínima inscrito en una circunferencia de radio 3? Es otra oportunidad para ejercitar la intuición y para buscar una formalización a la

conjetura que surja para responder a la pregunta. El caso particular del triángulo rectángulo permite tener ya fijado un lado (la hipotenusa) y observar que la altura correspondiente puede hacerse tan pequeña como se desee, como se ilustra en la figura 6.

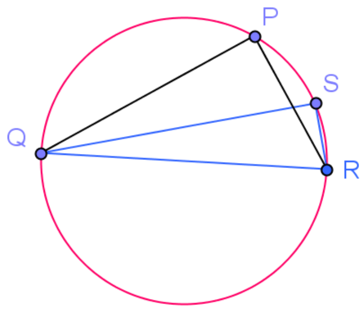


Figura 6

En la figura vemos los triángulos inscritos QPR y QSR, ambos con el diámetro QR como uno de sus lados y en consecuencia rectos en P y en S respectivamente. Es claro que el área del triángulo QSR es menor que el área del triángulo QPR y que es fácil construir otro triángulo rectángulo inscrito, con la misma hipotenusa y área aún menor. El proceso puede repetirse y concluir que es imposible obtener un triángulo rectángulo inscrito en esa circunferencia, que tenga área mínima (obviamente estamos refiriéndonos a triángulos cuyos vértices son tres puntos diferentes en la circunferencia dada).

Algunos elementos de análisis han sido dados, pero cada lector, ejercitando su pensamiento matemático, puede escoger sus propios caminos para demostrar o refutar las conjeturas que haga. Ciertamente, puede ser útil e ilustrativo usar herramientas informáticas como Cabri, GeoGebra, Mathematica o alguna otra

UNIÓN
REVISTA IBEROAMERICANA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA
www.fisem.org/web/union

ISSN: 1815-0640
Número 37. Marzo 2014
páginas 147-160
Coordinado por
Agustín Carrillo de Albornoz

Tecnologías de la Información y la Comunicación (TIC):

Aplicaciones de las derivadas parciales en conceptos económicos utilizando los recursos de la CLASSPAD

Ana María Martín Caraballo; Concepción Paralera Morales

Resumen	En este trabajo se presenta una aplicación de las derivadas parciales para ciertos conceptos económicos como son las marginalidades y elasticidades parciales. Para ello, mediante el uso de la calculadora gráfica “ClassPad 300” se muestra el diseño y desarrollo de una actividad con contenidos tanto teóricos, como con ejemplos y ejercicios prácticos. El objetivo de esta actividad es el de mejorar la comprensión y el uso de los mismos. Esta actividad está dirigida a alumnos de primer curso de diferentes Grados de la facultad de empresa de la Universidad Pablo de Olavide de Sevilla.
Abstract	This paper is to be shown an application of the partial derivatives in certain economic concepts such as marginality and partial elasticity. In order to do this is to have used the graphic calculator “ClassPad 300” showing the design and development of an e-activity with both theoretical content and practical examples and exercises. The main objective of this activity is to improve the understanding and use of those concepts. This activity is focused on undergraduate students in their first year in different degree of Business Faculty in Pablo de Olavide University of Seville
Resumo	Este trabalho apresenta uma aplicação de derivadas parciais de certos conceitos econômicos, como a marginalidade e as elasticidades parciais. Para fazer isso, usando a calculadora gráfica "ClassPad 300" mostra a concepção e desenvolvimento de um e-business com o conteúdo teórico com exemplos práticos e exercícios. O objetivo desta atividade é para melhorar a compreensão e uso. Esta atividade tem como objetivo primeiro ano os alunos de diferentes graus de faculdade de negócios da Universidade Pablo de Olavide de Sevilha.

1. Introducción

La calculadora gráfica “ClassPad 300” puede llegar a ser una herramienta de aprendizaje para la enseñanza de las matemáticas que combina las ventajas y funciones de una calculadora gráfica con las posibilidades de aplicación de un libro de texto. Esta calculadora, nos permite realizar cálculo numérico y algebraico, diseñar “e-actividades”, gráficos y tablas, cálculos estadísticos (basados en listas), cónicas, secuencias numéricas y gráficos en 3D entre otras muchas opciones.

Por todo lo anterior, la calculadora “ClassPad 300” es una herramienta muy útil y además fácil de utilizar. A continuación, citamos algunas de las ventajas que ofrece:

- Permite anticipar conceptos del análisis matemático.

- Se puede utilizar la calculadora de forma autónoma por parte de los alumnos y de esta forma comprobar y corregir los problemas propuestos en clase.
- Permite estudiar y clasificar el funcionamiento de diferentes tipos de funciones.
- Ofrece un apoyo visual a los resultados analíticos obtenidos en el estudio y la representación gráfica de funciones.
- Se puede utilizar la calculadora para conseguir que los alumnos mejoren su actitud hacia las matemáticas.
- Permite aprovechar las conexiones entre representaciones algebraicas, numéricas, por ello, puede resultar una técnica pedagógica muy fructífera cuando es posible alternar la calculadora y el lápiz-papel.

Entre todas las posibilidades que nos ofrece la ClassPad 300, orientamos al alumno en el uso de las e-actividades para la realización del trabajo que se le va a proponer.

Las e-actividades las puede emplear el profesorado como herramientas de documentación, a modo de “cuaderno electrónico” diseñando para ello ejemplos y problemas que aparezcan acompañados de textos, formulaciones matemáticas, distintos tipos de gráficos, tablas, etc. De igual modo el alumno puede emplear la e-actividad como un cuaderno de trabajo, en el que dispondrá de distintos problemas y los pasos necesarios para la resolución de los mismos (incluyendo notas aclaratorias sobre los pasos a seguir).

Esta actividad está dirigida a los alumnos de primer curso del Grado de Administración y Dirección de Empresas y del Grado en Análisis Económico (por tanto son alumnos que se encuentran en su primer año en la universidad). En un trabajo anterior (véase Paralera y Martín, 2009) se les propuso a los alumnos del Grado de Administración y Dirección de Empresas una actividad relacionada con las aplicaciones de las integrales en la Economía, estudiando y desarrollando conceptos y actividades sobre el Excedente del Consumidor y Productor y el Índice de Gini.

2. Contenidos

El tema que se les ha propuesto a los alumnos es una aplicación de las derivadas parciales de una función de varias variables en Economía.

Para ello, es necesario definir los siguientes conceptos:

- Marginalidades parciales.
- Elasticidades parciales.
- Tasa Marginal de Sustitución.

Así, en la actividad propuesta se le pide primero que definan de forma teórica los conceptos anteriores, y algunas actividades y aplicaciones económicas relacionadas con los mismos, como segundo paso, se pide que desarrolle y resuelva los ejemplos dados utilizando la calculadora y por último que elabore un documento de Word donde debe incluir los conceptos teóricos y aplicaciones prácticas y las capturas de pantalla de cómo ha ido realizando todo el proceso con la calculadora gráfica.

3. Desarrollo de la “e-actividad”

Aunque de sobra conocidos, en este apartado vamos a definir, en primer lugar, los conceptos necesarios que se piden en la actividad propuesta y se describirán además los procedimientos que los alumnos deben seguir para realizarla.

3.1 Conceptos

Marginalidades parciales

La marginalidad parcial de la función *f* respecto de la variable x_i representa la variación que experimenta la función *f* cuando la variable x_i se incrementa en una unidad, manteniéndose constantes las demás variables. Dicha marginalidad parcial viene dada, de forma aproximada, por la derivada parcial de *f* respecto de x_i, es decir por $\frac{\partial f}{\partial x_i}$.

Elasticidades parciales

La elasticidad parcial de la función *f* respecto de la variable x_i representa la variación relativa de la función *f* cuando existe un cambio relativo en la variable x_i, y las demás variables permanecen inalteradas. Es decir,

$$\varepsilon(f,x_i) = \frac{\frac{\Delta f}{f}}{\frac{\Delta x_i}{x_i}} = \frac{\frac{\Delta f}{\Delta x_i}}{\frac{f}{x_i}} \cong \frac{\partial f}{\partial x_i}\cdot\frac{x_i}{f}.$$

Por ejemplo, una elasticidad $\varepsilon = 2$ significa que un incremento del 1% en la variable considerada supone un incremento del 2% en la función.

Tasa Marginal de sustitución

Si *f* es una función de producción, la tasa marginal de sustitución del factor x_i por el factor x_j es la disminución que debe producirse en el uso del factor x_i cuando se incrementa en una unidad la cantidad utilizada del factor x_j, de modo que la producción permanece constante.

Se representa por $TMS_{x_i x_j}$ y su valor aproximado se calcula como el cociente entre la productividad marginal del factor x_j y la productividad marginal del factor x_i, es decir,

$$\mathrm{TMS}_{x_i x_j} \cong \frac{\frac{\partial f}{\partial x_j}}{\frac{\partial f}{\partial x_i}}.$$

3.2. Procedimientos

En primer lugar, el alumno debe seleccionar en la calculadora el tipo de operación que desea realizar. En nuestro caso en particular debe hacerlo en el menú principal y seleccionar una e-actividad.

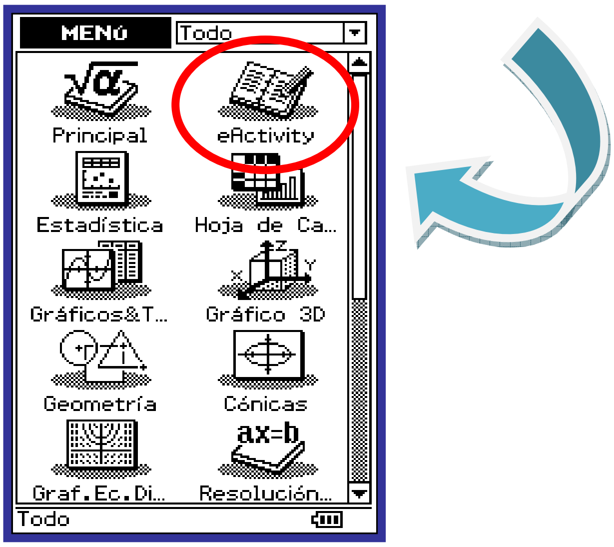


Figura 1

Para comenzar la actividad propuesta, el alumno puede utilizar las líneas de texto, de cálculo, las bandas de datos o de ayuda. Así, las líneas de texto permiten ver y editar el texto directamente en la ventana abierta de la e-actividad. Las de cálculo, permiten realizar los mismos cuando se introducen expresiones matemáticas. Las bandas de datos de una aplicación se usan para insertar datos desde otras aplicaciones de la calculadora y las bandas de ayuda se utilizan para añadir un texto de ayuda a cualquier banda de datos.

En la e-actividad se van a utilizar tanto las líneas de texto y de cálculo como las bandas de datos. En primer lugar se considera una función real de *n* variables reales $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ que se introduce en la calculadora con una línea de texto donde previamente se ha definido la actividad:

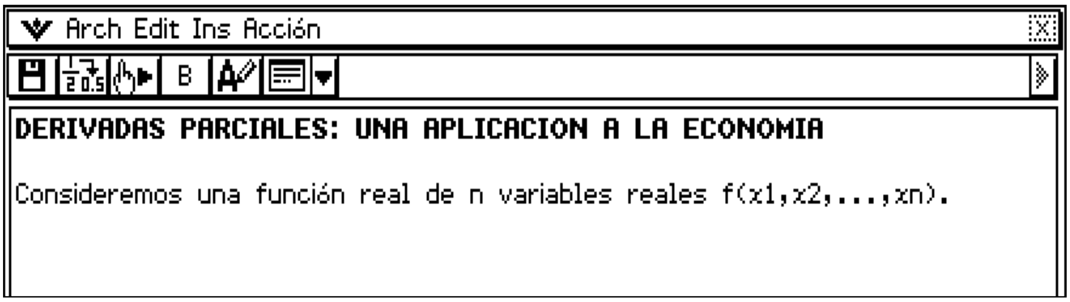


Figura 2

Para incluir las definiciones de los conceptos de marginalidades y elasticidades parciales y tasa marginal de sustitución su utilizan las bandas de datos, éstas contienen un nombre y un botón de expansión para ver los datos en una ventana inferior, tal y como puede observarse en las Figuras 3-9.

Marginalidades parciales

Definición de marginalidad parcial:

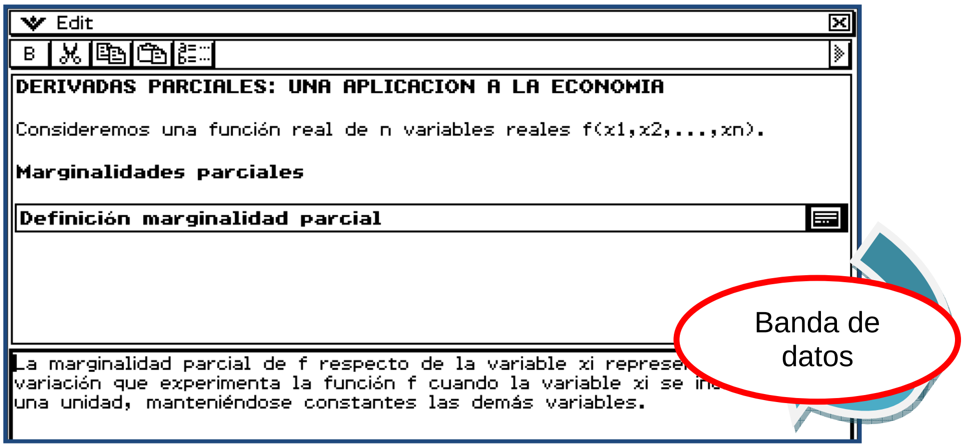


Figura 3

Cálculo de la marginalidad parcial:

Elasticidades parciales

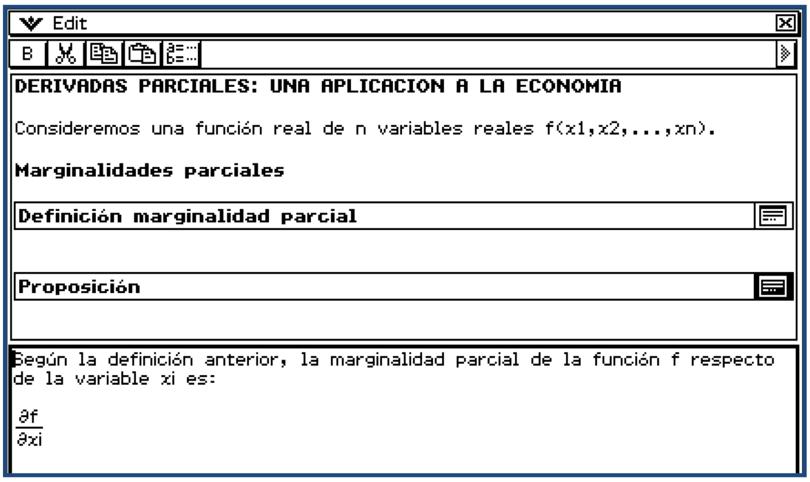


Figura 4

Definición de elasticidad parcial:

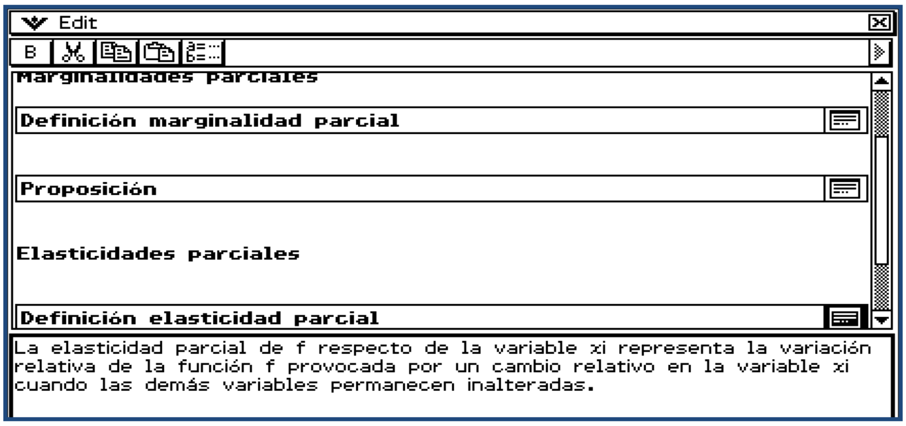


Figura 5

Cálculo de la elasticidad parcial:

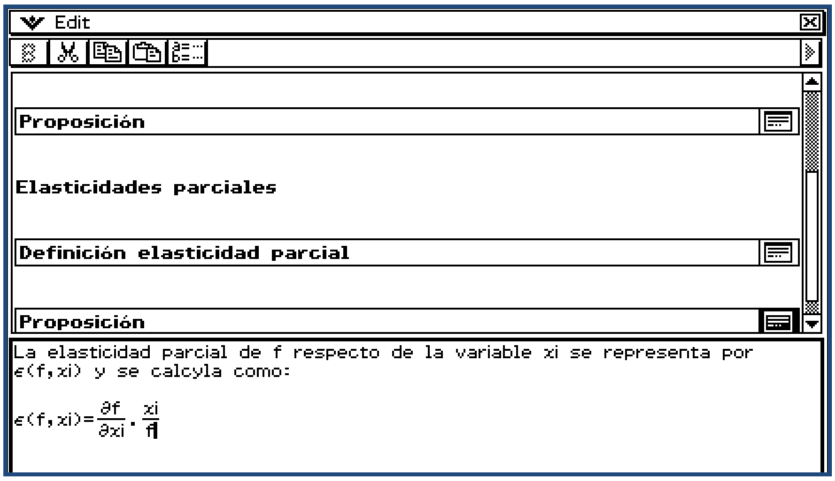


Figura 6

Significado de la elasticidad parcial:

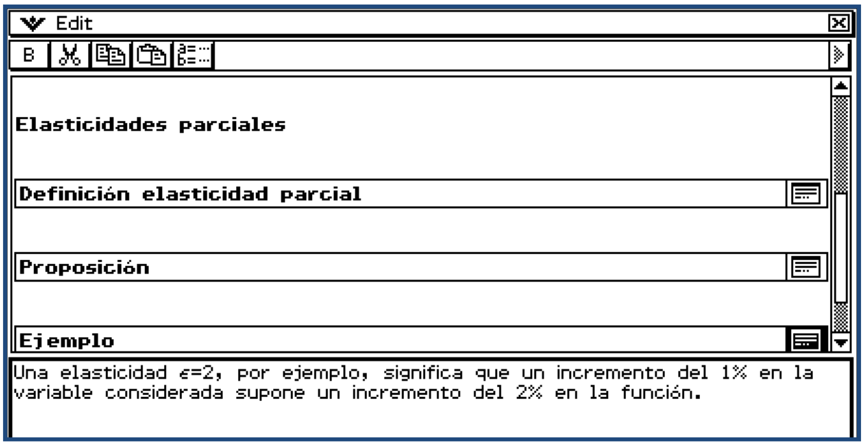


Figura 7

Tasa Marginal de Sustitución

Definición de tasa marginal de sustitución:

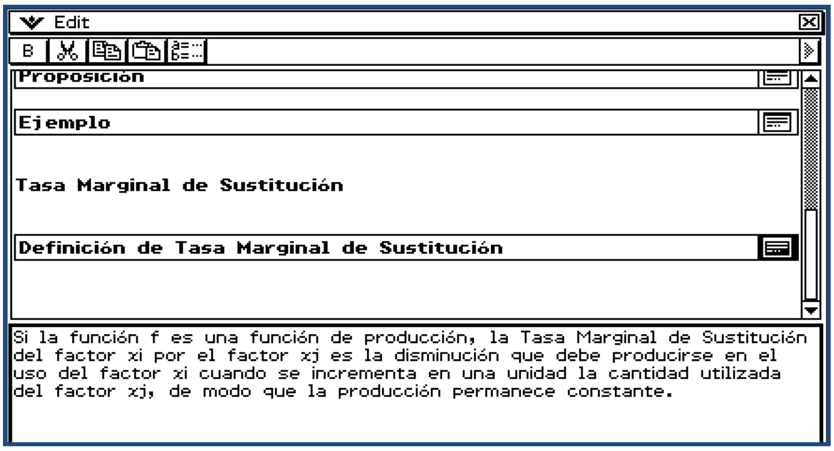


Figura 8

Cálculo de la tasa marginal de sustitución:

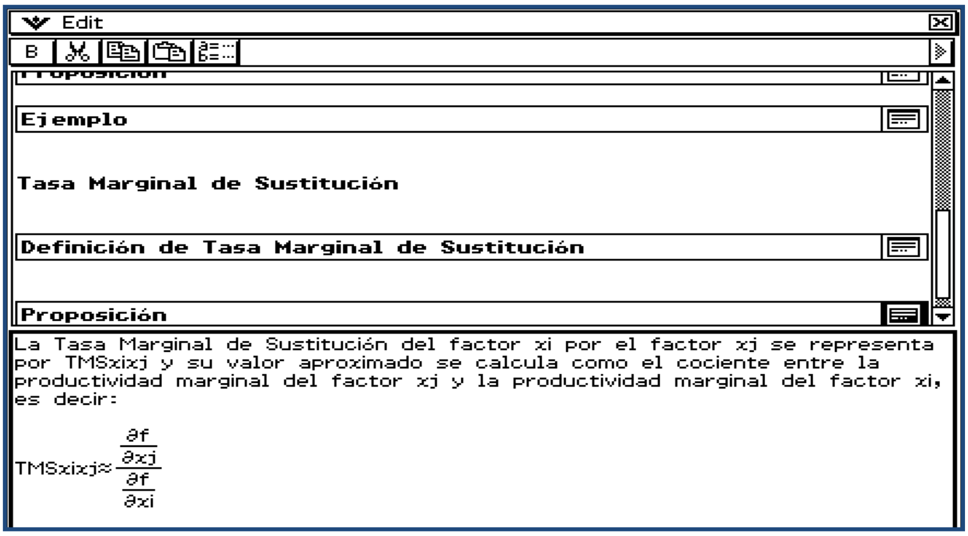


Figura 9

4. Actividades

En este apartado se incluyen las actividades propuestas al alumno para que las realice utilizando la calculadora gráfica ClassPad. Previamente se habrán definido e incluido en la e-actividad los conceptos necesarios para la realización de las mismas, como se ha mostrado en el apartado anterior. Se proponen las siguientes dos actividades:

1. Una empresa produce un bien A a partir de dos factores productivos. Si las cantidades usadas de éstos son x e y, respectivamente, la cantidad obtenida de A se puede calcular a través de la función de producción: $f(x,y)=2x^3y$. Actualmente, la empresa está utilizando en su proceso productivo 1 unidad del primer factor productivo y 3 unidades del segundo. Responde razonadamente a las siguientes cuestiones:
   a. Calcula la productividad marginal respecto del segundo factor productivo. ¿Qué variación se observaría, aproximadamente, en la cantidad producida de A si se usara 1 unidad más del segundo factor productivo?
   b. Calcula la elasticidad parcial de la producción respecto del factor productivo 2. ¿Qué variación aproximada experimenta la producción de A si se usara un 1% más del factor 2?
   c. Calcula la tasa marginal de sustitución de x por y. ¿A qué cantidad del primer factor productivo podría renunciar la empresa a cambio de usar una unidad más del segundo factor, manteniendo su producción constante?
2. La demanda de un bien de pende de su precio p y del nivel de renta media R, según la función $D(p,R)=12+3\sqrt{\frac{R}{p}}$. Se pide:
   a. Calcula las marginalidades parciales de la demanda respecto del precio y de la renta, indicando su significado.
   b. Calcula las elasticidades parciales de la demanda respecto del precio y de la renta, señalando su significado.

En primer lugar el alumno debe introducir las actividades en la ClassPad en una línea de texto y, posteriormente incluir la resolución de cada apartado como línea de cálculo y la interpretación de los mismos en una banda de datos tal y como se muestra en las Figuras 10 y 11.

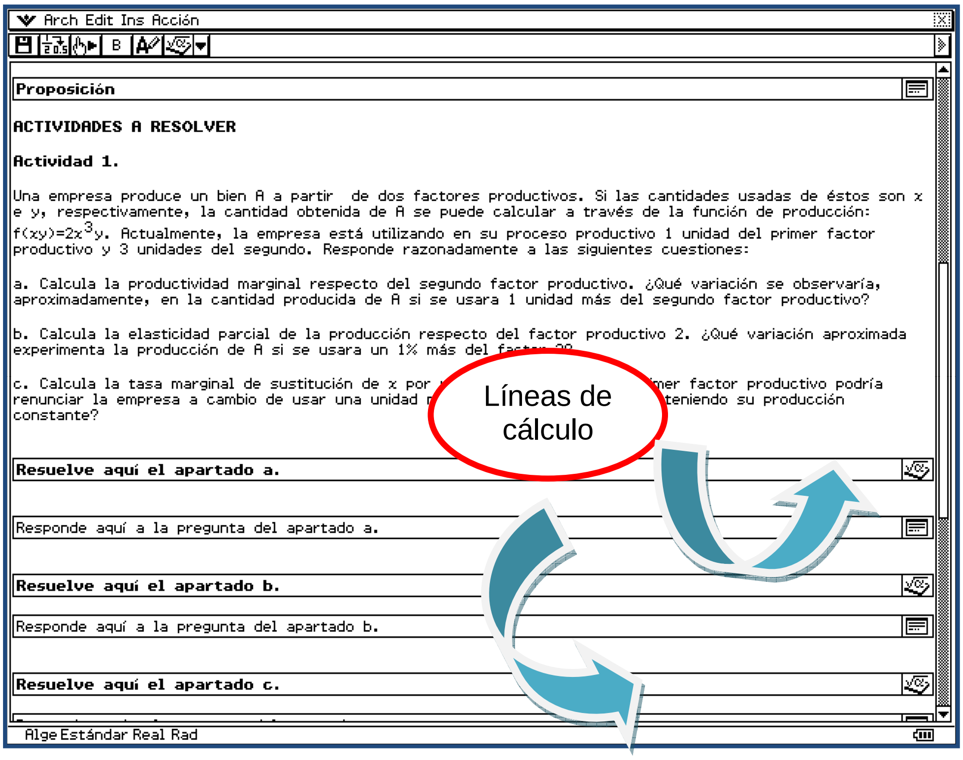


Figura 10

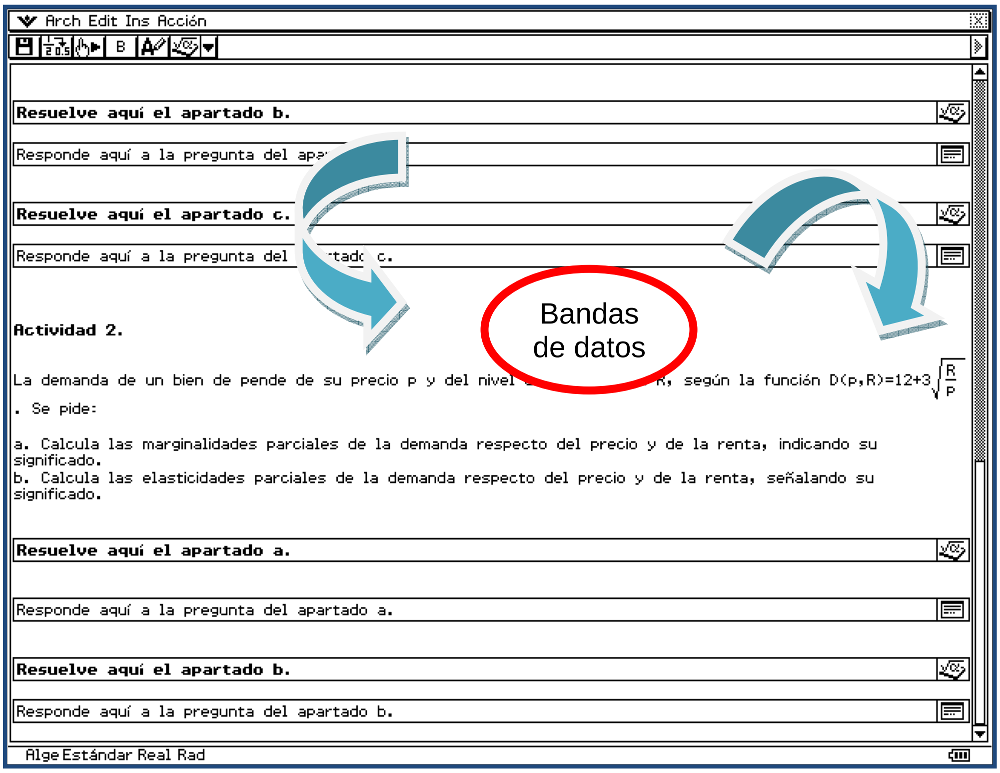


Figura 11

4.1. Solución de la actividad 1 con la ClassPad

Una vez que se han introducido los enunciados de las actividades, definidas las líneas de cálculo y bandas de datos, el alumno las resuelve utilizando las diferentes funciones de la calculadora.

En la Figura 12 se incluye la resolución del apartado a del primer problema propuesto. Primero se define la función de producción mediante la orden ***define (función)***, se calcula la derivada parcial respecto de la variable considerada mediante la orden ***dff(función, variable)*** y luego se sustituye en las cantidades indicadas. El valor resultante, que en este caso es 2, es la marginalidad respecto del segundo factor productivo cuya interpretación económica se incluye en una banda de datos para su posterior exposición en clase.

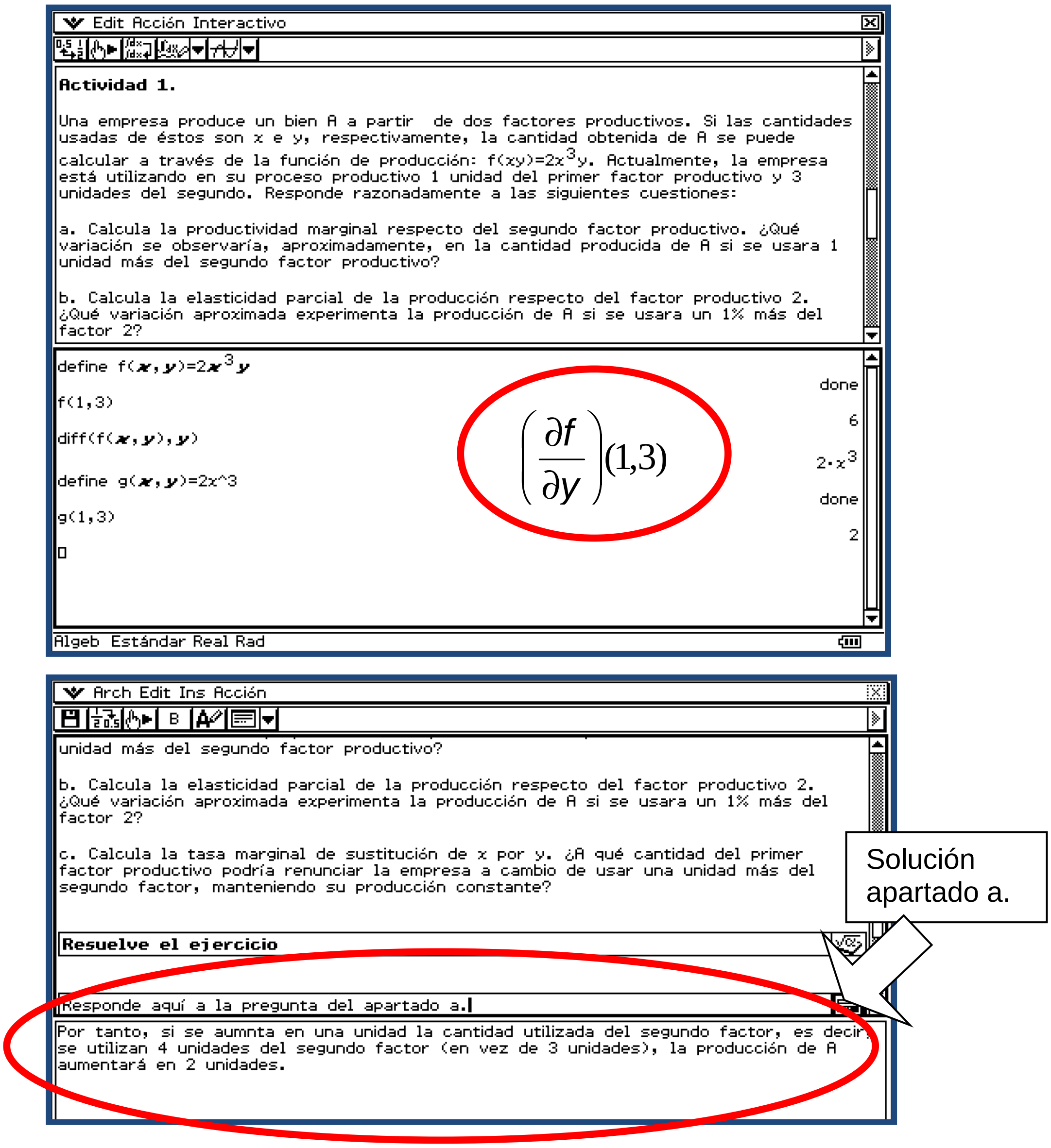


Figura 12

El cálculo de la elasticidad parcial respecto del segundo factor productivo y su variación aproximada al utilizar un 1% más del segundo factor se puede ver en la Figura 13. Que aparece a continuación

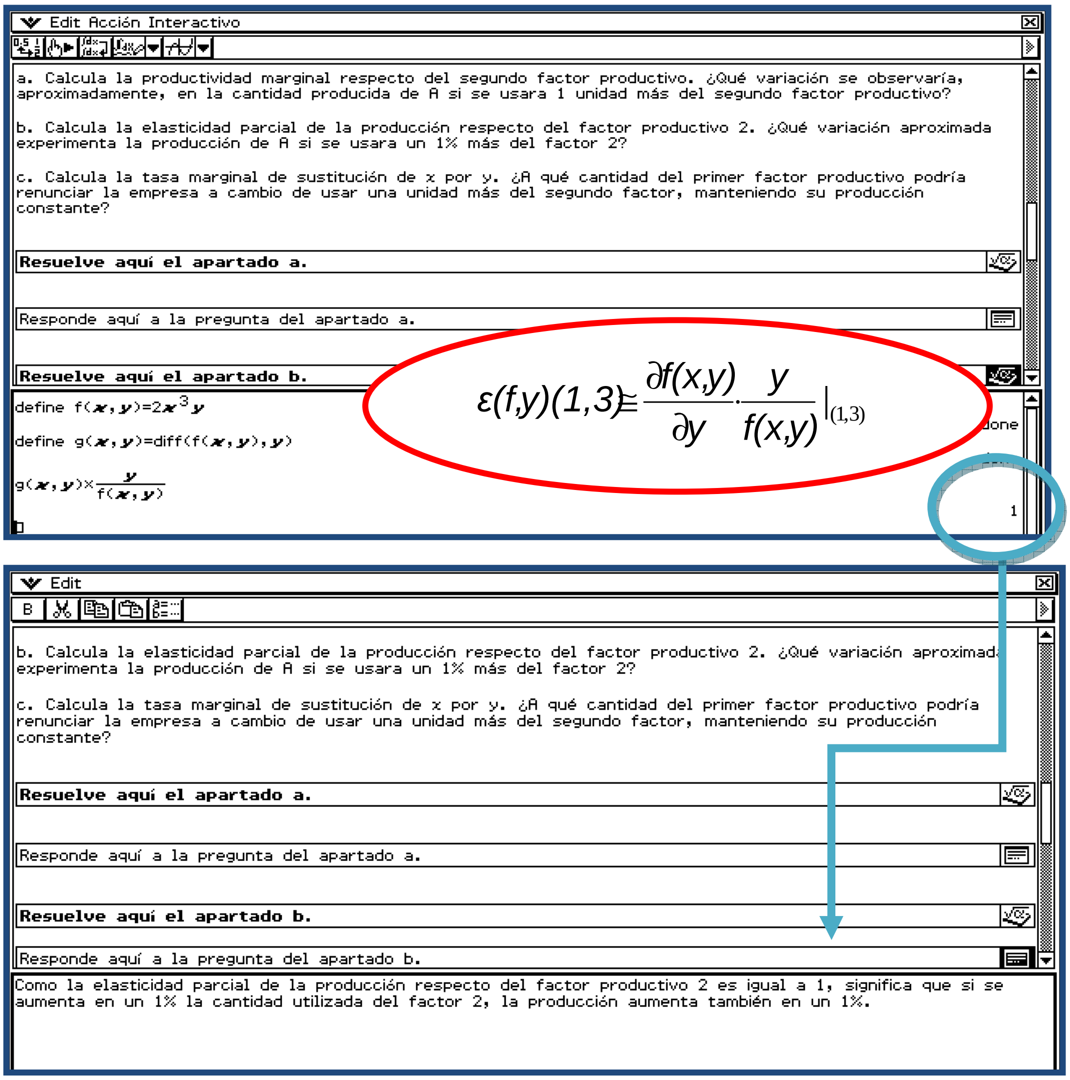


Figura 13

En el tercer apartado del problema se pide calcular la tasa marginal de sustitución de *x* por *y*, y determinar a qué cantidad del primer factor productivo podría renunciar la empresa a cambio de usar una unidad más del segundo factor, manteniendo su producción constante.

La tasa marginal de sustitución de *x* por *y*, se calcula en una línea de cálculo como el cociente entre la productividad marginal del factor *y* la productividad marginal de factor *x.*

Sabiendo que la empresa está utilizando en su proceso productivo 1 unidad del primer factor productivo y 3 unidades del segundo, el valor de dicha tasa es 1/9 (tal y como puede verse en la Figura 14).

En la banda de datos siguiente se muestra la interpretación económica de dicho valor.

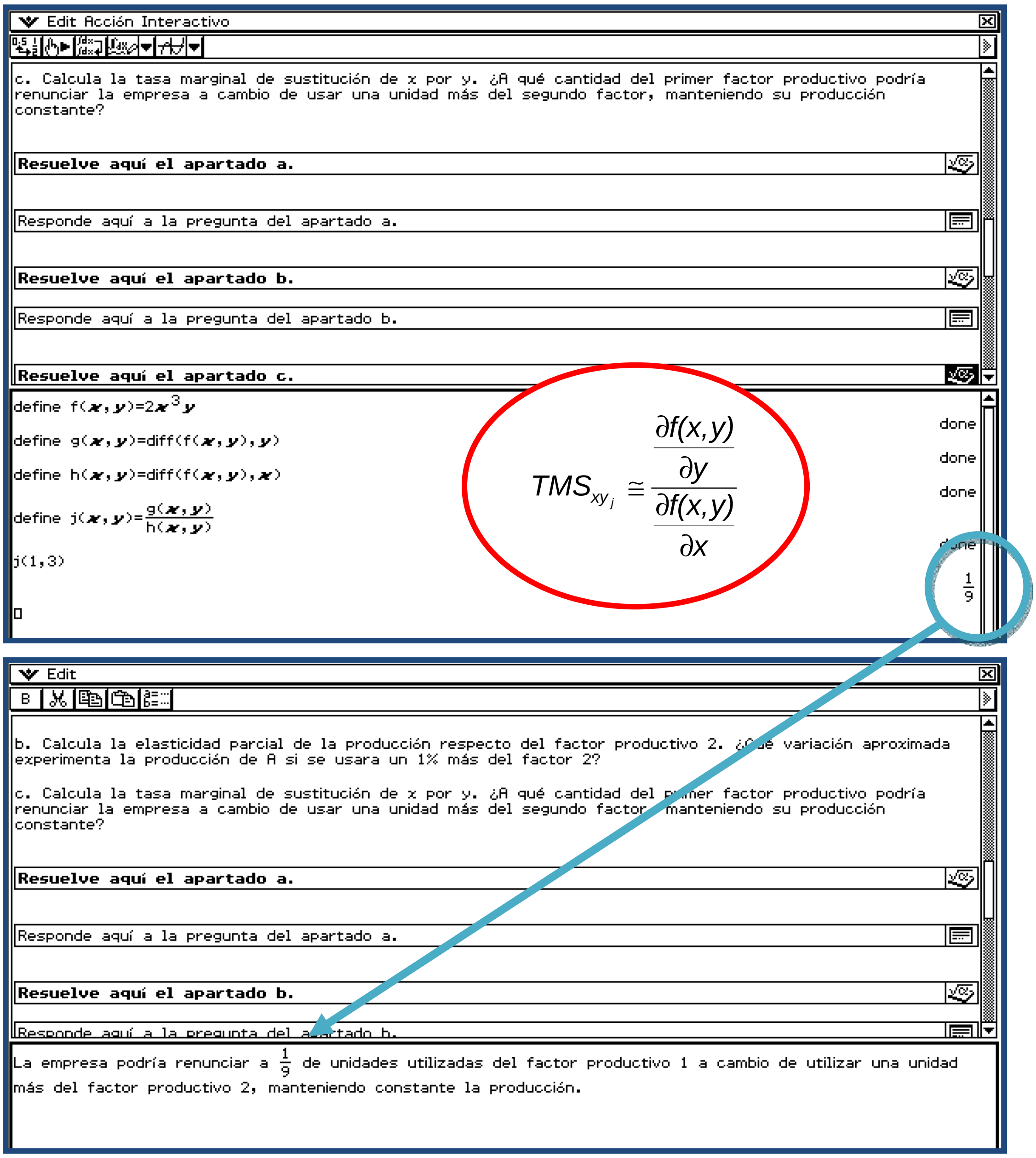


Figura 14

4.2. Solución de la actividad 2 con la ClassPad

En este epígrafe se incluyen las Figuras 15 y 16 donde se pueden ver al cálculo mediante la calculadora ClassPad de las marginalidades de la demanda respecto del precio y la renta (Figura 15) y elasticidades parciales de la demanda respecto del precio y la renta (figura 16). Las interpretaciones económicas de cada una pueden verse en la e-actividad pinchando en la banda de datos correspondiente.

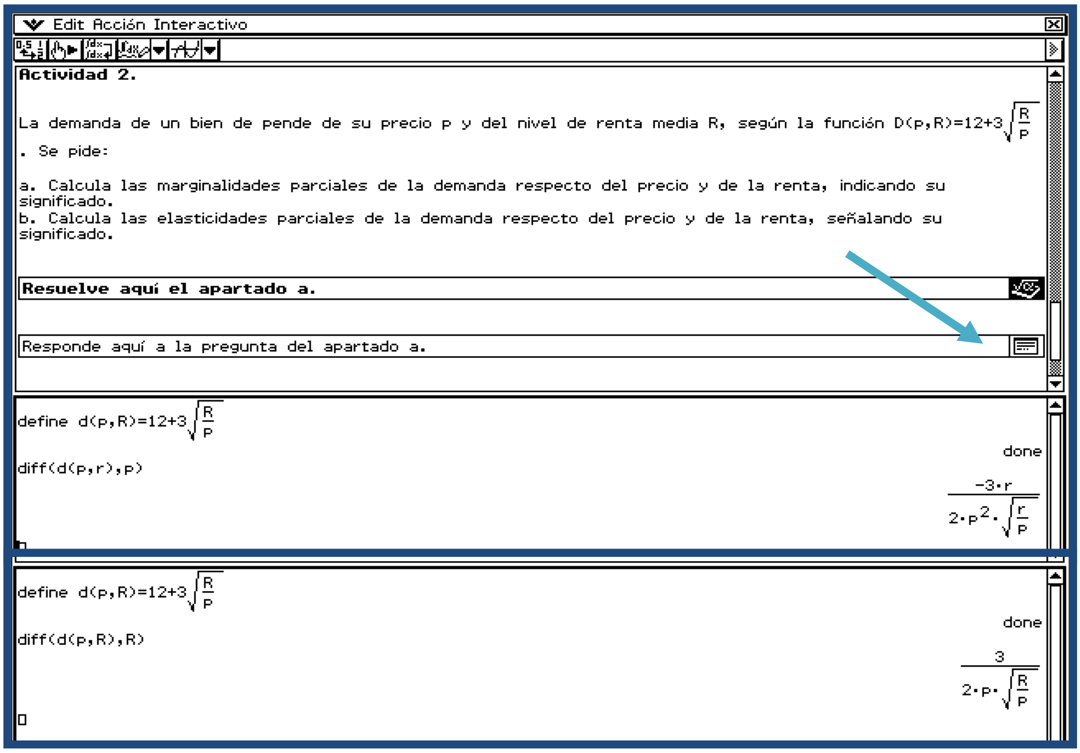


Figura 15

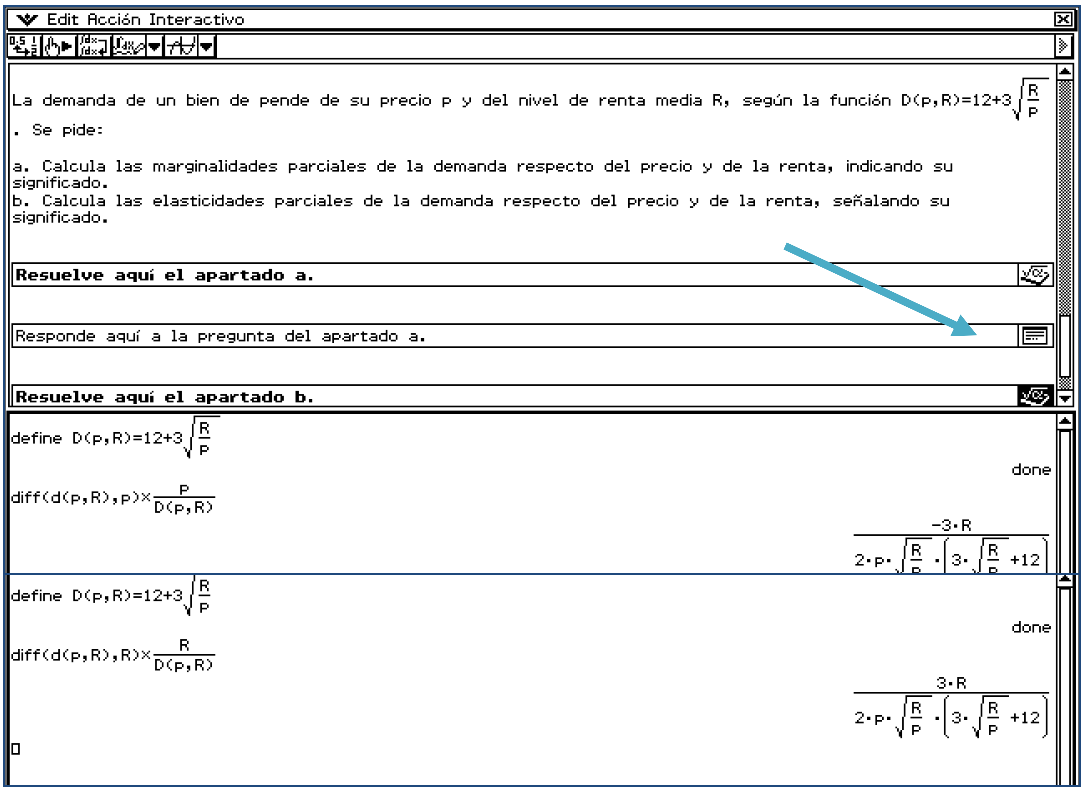


Figura 16

5. Evaluación

En el proceso de evaluación de la actividad presentada por los alumnos se tendrán en cuenta distintos aspectos, tales como el desarrollo exhaustivo de los conceptos propuestos, la variedad de las actividades y la resolución de las mismas mediante el uso de la calculadora. Además, se tendrá en cuenta la exposición del trabajo a los demás compañeros utilizando la herramienta de presentación disponible en el menú de la calculadora tal y como puede observarse en la siguiente figura.

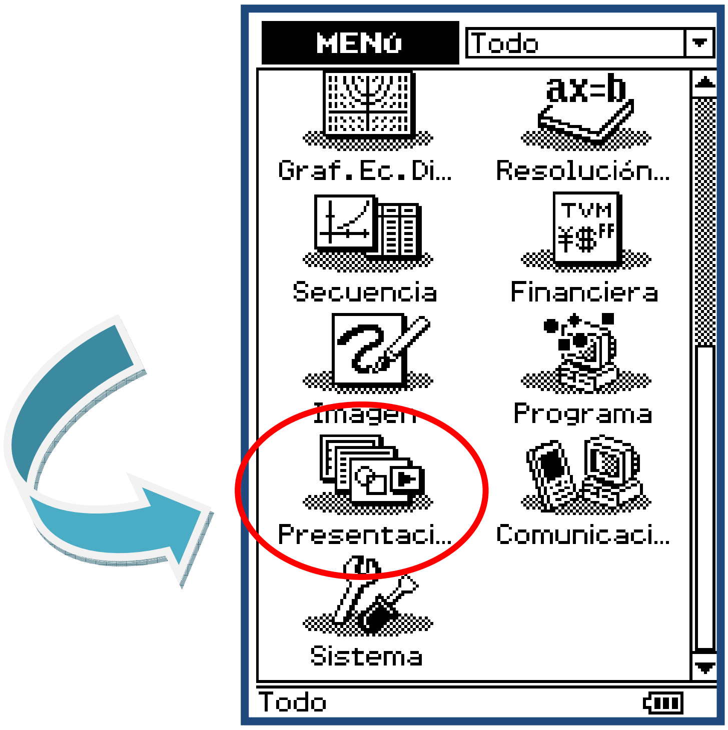


Figura 17

En el cuadro que se presenta a continuación se pueden ver los porcentajes de la calificación total que se le asigna a cada uno de los aspectos a evaluar.

Tabla 1

Aspectos a evaluar	% calificación total
Descripción y rigurosidad de los conceptos expuestos	20
Estructura, calidad y adecuación de las actividades propuestas	20
Utilización de la calculadora para desarrollar los conceptos propuestos	25
Resolución de las actividades propuestas con las calculadora	25
Exposición y presentación de los conceptos al resto de los compañeros	10

Bibliografia

Arya, J.C., Lardner, R.W. (2002): *Matemáticas Aplicadas a la Administración y a la Economía*. Pearson Educación, México.

Haeussler, F., Ernest, JR. (2003): *Matemáticas para la Administración y Economia*. Pearson Educación. Décima edición, México.

Paralera, C., Martín, A.M. (2009): Diseño de una e-actividad sobre aplicaciones de las integrales en Economía como cuaderno de trabajo para el alumno*. Unión, 19, pp. 140-149.*

Ana María Martín Caraballo y Concepción Paralera Morales. Licenciadas en Matemáticas por la Universidad de Sevilla, Doctoras por la Universidad Pablo de Olavide (Doctorado en Administración y Dirección de Empresas) y profesoras enel Departamento de Economía, Métodos Cuantitativos e Historia Económica de la Universidad Pablo de Olavide. **ammarcar@upo.es, cparmor@upo.es**

UNIÓN
REVISTA IBEROAMERICANA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA

ISSN: 1815-0640
Número 37. Marzo 2014
páginas 161-179

www.fisem.org/web/union

Ideas para enseñar:

Vidas de matemáticos que abrazaron la fe religiosa

María Arroyo Castilleja, Juan Núñez Valdés, Silvia Recacha González

Fecha de recepción: 17/07/13
Fecha de aceptación: 5/02/14

Resumen	En este artículo se muestran las biografías de una serie de matemáticos, algunos de ellos muy conocidos por la obra científica que nos han legado, cuyas fuertes vocaciones religiosas los llevaron a ser además sacerdotes, poseyendo por tanto esta doble condición, bastante habitual por otra parte, a pesar de lo que erróneamente pudiera creerse. El objetivo es utilizar este aspecto de la Historia de las Matemáticas para facilitarle nuevos y novedosos recursos al profesor de Matemáticas de Secundaria y Bachillerato en sus clases de la asignatura, así como proporcionarle información para la educación en competencias que debe desarrollar en las mismas. **Palabras clave**: biografías de matemáticos, historia de matemática.
Abstract	In this article a series of biographies of mathematicians, some of them well known to the scientific work that have left us, whose strong religious vocations also taken to be priests, possessing so this double condition is quite common on the other hand despite what you might think wrongly. The goal is to use this aspect of the history of mathematics to provide new and innovative resources Mathematics teacher in Middle and High School classes of the subject and provide information for education competencies to be developed in them. **Keywords**: biographies of mathematicians, mathematics history.
Resumo	Neste artigo de uma série de biografias de matemáticos, alguns deles bem conhecidos do trabalho científico que nos deixaram, cuja forte vocações religiosas também levado para ser sacerdotes, possuindo assim que esta dupla condição é bastante comum, por outro lado apesar do que você pode pensar de forma errada. O objetivo é usar esse aspecto da história da matemática para fornecer professor novo e inovador recursos Matemática nas aulas de ensino fundamental e médio do assunto e fornecer informações para as competências de ensino a serem desenvolvidos nos mesmos. **Palavras-chave:** Biografias de matemáticos, história de matemática.

1. Introducción

Este artículo se ha escrito con el objetivo principal de aprovechar la Historia de las Matemáticas para facilitar nuevos recursos al profesor de Matemáticas de Secundaria y Bachillerato en sus clases de la asignatura. Creemos que el comentario en estas clases de las vidas de algunos matemáticos que tuvieron una fuerte vocación religiosa, abrazando muchos de ellos incluso el sacerdocio, puede serle muy útil al profesor para ponerlos como ejemplo y solicitar de sus alumnos los valores de abnegación que esos matemáticos mostraron a lo largo de sus vidas, entre ellos un mayor esfuerzo e interés para superar cualquier tipo de dificultades.

Aunque pueda parecer lo contrario, el binomio matemático-sacerdote no es tan extraño como a primera vista pudiera parecer. De hecho, en las antiguas civilizaciones, la organización de la sociedad favoreció la coincidencia entre ser matemático y ser sacerdote. Así, en Babilonia, los recursos necesarios para la organización económica, como terreno, animales y grandes rentas, se acumulaban en los templos y eran administrados por los sacerdotes, que eran los encargados de proteger estos bienes y hacerlos crecer. De esta forma, las cuentas del templo dieron origen a la escritura como sistema socialmente reconocido de registro, que al principio fue solamente un sistema de anotación numérica, dándose así los primeros pasos para el nacimiento de la aritmética. Estas cuentas quedaron recogidas en tablillas de barro cocido, lo que hizo que perduraran hasta nuestros días.

Después, los egipcios aprovecharon el legado matemático de los babilonios e hicieron de la Matemática una forma eficaz de resolver problemas, como el de la nueva asignación de tierras a los campesinos que las perdían a causa de las inundaciones periódicas del Nilo.

Pues bien, situándonos ahora no sólo en el presente, sino en los tres últimos siglos de existencia de nuestra era, puede observarse que este anteriormente citado cierto paralelismo entre sacerdotes y matemáticos no se ha perdido del todo, si bien presenta otras connotaciones diferentes. En estos últimos tres siglos, como veremos en este artículo, han seguido existiendo varios matemáticos que se han caracterizado por poseer unas fuertes convicciones religiosas, muchos de los cuales han llegado incluso a ser sacerdotes.

Permítasenos, antes de seguir, precisar de forma clara los conceptos que se van a utilizar repetidas veces en este artículo, al objeto de no incurrir en una manifiesta falta de rigor. Así, por “sacerdotes” designaremos a todas aquellas “personas que dedican su vida a poner de alguna manera en contacto a los fieles de la religión de que se trate con el Dios o dioses a los que éstos adoren, aparte también de encargarse del culto y de los ritos propios de esa religión”. Es indudable, no obstante, que existen diferencias manifiestas entre la labor de los sacerdotes en las culturas antiguas ya referidas y en las actuales, si bien, en todas ellas, los sacerdotes han constituido una clase social, generalmente dominante, asociada o a veces enfrentada al poder civil. A su vez, por “Religión” (del latín religare o re-legere), concepto cuya definición es claramente un motivo de controversia entre los especialistas, nos referiremos “tanto a las creencias y prácticas personales como a ritos y enseñanzas colectivas sobre cuestiones de tipo existencial, moral y sobrenatural”.

Vamos a mostrar entonces en este artículo la vida de una serie de sacerdotes matemáticos (o matemáticos sacerdotes, como se prefiera), muy diferentes entre ellos en lo que se refiere al tiempo en el que vivieron, nacionalidad, prestigio matemático que llegaron a alcanzar, etc. Esta lista no es exhaustiva y por supuesto, existen en la literatura muchos más ejemplos de ellos, si bien como primera aproximación estimamos que la misma es bastante significativa.

Dado que la intención de los autores es tratar de dar también una aplicación práctica del contenido de este artículo a la enseñanza de las Matemáticas en los centros de Secundaria y Bachillerato, a pesar de la dificultad que esto pudiera conllevar, dedicamos una sección del mismo a exponer nuestras ideas al respecto.

Como aclaración para los lectores no españoles, comentar que en el Sistema Educativo Español, la Educación Primaria va dirigida a los alumnos de entre 6 y 12 años. La siguiente etapa es la de Educación Secundaria Obligatoria, que llega hasta los 16 años. Después de esta etapa (aunque actualmente están previstos algunos cambios), el alumno puede elegir entre una Formación Profesional o bien un Bachillerato, ambos con una duración de dos años, concluyendo así sus estudios previos a la universidad a los 18 años.

2.1. Baudhayana (Siglo IX a.C.)

Baudhayana es un matemático indio que vivió, aproximadamente, en el siglo IX antes de Cristo. Como la mayoría de los matemáticos de la India de aquella época, Baudhayana es sobre todo un sacerdote. En aquellos tiempos, la casta de los sacerdotes la formaban los varones más educados, que eran maestros y todos eran brahmanes.

Figura 1. Baudhayana

Como sacerdote, Baudhayana escribió el Sulbasutra, un capítulo dedicado a las Matemáticas del libro de los “Vedas”. Como aclaración, indicar que Los Vedas, que significa “conocimiento”, es un extenso libro escrito en la antigua India. La religión védica puede considerarse como el antepasado del hinduismo. Este libro contiene cuatro capítulos, que son: el Rig-Veda, el Yajur Veda, el Samaveda y el Atharvaveda.

Como matemático, Baudhayana calculó el valor de Pi con una gran precisión y también estudió el actualmente conocido como Teorema de Pitágoras. Él no llegó a probar sus resultados, aunque en la actualidad se ha comprobado que todos ellos eran correctos. En particular, Baudhayana descubrió que el cuadrado de la diagonal de un cuadrado es igual a la suma de los cuadrados de dos lados del mismo.

Baudhayana encontró la manera de dibujar un círculo y un cuadrado que tengan aproximadamente la misma área:

> “dibuja la mitad de la diagonal del cuadrado sobre el centro hacia la línea este-oeste; a continuación, describe un círculo junto con una tercera parte de lo que queda fuera del cuadrado”.

Baudhayana calculó el valor aproximado de Pi con cinco decimales exactos:

$$\sqrt{2} = 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{3\cdot 4} - \frac{1}{3\cdot 4\cdot 34} \approx 1.4142156\ldots$$

Otros resultados descubiertos por Baudhayana son los siguientes:

- Las diagonales de un rectángulo dividen en dos una a la otra.
- Las diagonales del rombo se cortan en ángulo recto.
- El área del cuadrado formado al unir los puntos medios de los lados de otro cuadrado es la mitad del original.
- El área del rombo formado al unir los puntos medios de un rectángulo es la mitad de la del rectángulo, etc.

2.2. Katyayana (Siglo II a.C.)

Katyayana fue un sacerdote matemático y gramático sánscrito que vivió en la India en el siglo segundo antes de Cristo (durante el reinado indo-griego). Perteneció a la escuela Aindra de los gramáticos y pudo haber vivido en la parte noroeste del subcontinente indio.

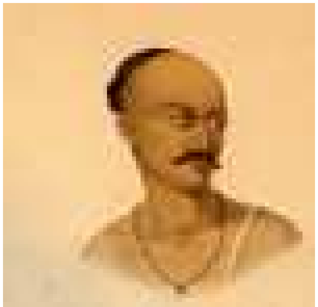


Figura 2. Katyayana

Dos son las obras principales de Katyayana:

- El “Varttika,” que una elaboración sobre la gramática de Panini. Junto con el “Maha-bhasya” de Patanjali, este texto se convirtió en una parte fundamental de la “vyakarana” (gramática canónica). Es uno de los seis Vedangas, y su estudio fue obligatorio en la educación de los estudiantes Brahman en los siguientes doce siglos.

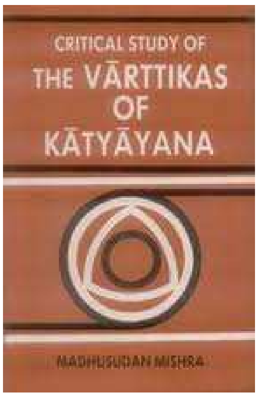


Figura 3. Traducción al inglés del Vartika de Katyayana

- También compuso una de las últimas Sulvasutras, una serie de nueve textos sobre la geometría de las construcciones de los altares, que trata de rectángulos, triángulos, etc.

Siguiendo la tradición de estudiosos como Pingala, Katyayana también se interesó por las Matemáticas. Un texto suyo sobre la Sulvasutras trataba con la geometría y también extendió el tratamiento del teorema de Pitágoras, presentado por primera vez en el año 800 a.C. por Baudhayana.

2.3. Marin Mersenne (1588-1648)

Marin Mersenne nació en Oizé (Maine), en Francia, el 8 de Septiembre de 1588. Tras realizar algunos estudios primarios, entró a los 16 años en el Colegio Jesuita de La Flecha, el mismo en el que ocho años más tarde estudió Descartes, aunque ambos no llegaron a conocerse allí.

El padre de Mersenne, que deseaba para su hijo una educación religiosa, lo envió después a estudiar al convento de los Mínimos a París, donde Mersenne empezó a sentir el gusto por la vida monástica. Así, después de finalizar sus estudios en 1611 en el Collège Royale de Francia, obtuvo el grado de Magister Atrium en Filosofía en la Universidad de La Sorbona, dándose cuenta entonces de que deseaba continuar su vida en un monasterio.

Así, Mersenne ingresó en la Orden de los Mínimos en 1611 y fue ordenado sacerdote en París al año siguiente. Precisamente, se cree que fue en ese período de su vida cuando Mersenne descubrió la curva cicloide. Posteriormente, en 1614, fue elegido Superior del Place Royale Monastery en París, lugar en el que ya permaneció hasta su muerte, en 1648.

Entre 1620 y 1623, Mersenne empezó a escribir sobre temas religiosos, concretamente sobre el ateísmo y el escepticismo en Francia. Defendía fervorosamente la filosofía de Aristóteles y atacaba duramente a Galileo, aunque curiosamente algunos años después, se convirtiese en uno de sus más ardientes defensores. Es famosa su obra “Quaestiones celeberrime en Genesim” en contra de la actuación de los magos en las Sagradas Escrituras.

Mersenne se dio cuenta de que junto a la religión, las Matemáticas era la ciencia que más le interesaba. Tenía la creencia de que sin ellas no hay ciencia posible, por lo que creía que la causa de las ciencias es la causa de Dios. Así, escribió “La vérité des sciences”, en donde demostró, a través de muchos grandes descubrimientos, el valor de la mente humana, y se convirtió en coordinador de todos los estudiantes europeos. Así conoció entre otros, a Descartes, Roberval, Fermat, y Pascal. Organizó reuniones e intercambios entre todos ellos, conocidas como la Académie Parisiensis, o más popularmente, como la Académie Mersenne.

Figura 4. Marin Mersenne

Mersenne ayudó en particular a muchos estudiantes que después fueron científicos famosos, como Huygens y Galileo, al que ayudó a publicar sus escritos.

Después de su muerte, acaecida en 1648, se encontraron en su celda 78 cartas de científicos con los que se escribía, entre ellos Fermat, Huygens, Pell, Galileo y Torricelli, así como varios instrumentos físicos.

Desde el punto de vista matemático, Mersenne es conocido por haber estudiado la cicloide, pero sobre todo, por los números primos que llevan su nombre. El trató de encontrar una fórmula que representase a todos los números primos, pero aunque no lo consiguió, su trabajo sobre los números n de la forma 2 elevado a la potencia de exponente p-1, cuando p es primo, ha resultado de indudable interés en la investigación de los números primos muy grandes. Es fácil demostrar que si n es primo, entonces p debe ser un número primo. En 1644, Mersenne afirmó que *n es primo si p = 2, 3, 5, 7, 13, 17, 19, 31, 67, 127 y 257, pero que sin embargo, n era un número compuesto para los otros 44 números primos p menores que 257*.

Mersenne también aplicó sus conocimientos matemáticos a la Música. Estudió análisis combinatorio (variaciones, permutaciones y combinaciones) para optimizar composiciones musicales, como explica en su libro “The book on the art of singing well” que es el sexto libro de la “Harmonie universelle” (1636). Una biografía completa de Mersenne puede verse en (0’Connor and Robertson, 2005a).

2.4. Andreas Tacquet (1612- 1660)

Andreas Tacquet nació en 1612, en Amberes (Bélgica) y fue educado en el Colegio de los Jesuitas de dicha ciudad, en el que, según la página web del Departamento de Matemáticas de la Universidad de Fairfield (ver referencias):

“se le tenía por un niño prodigio, pero algo delicado”.

Entró en la orden de esa congregación en 1629, y estuvo estudiando Matemáticas, Lógica y Física en Lovaina, hasta 1635, teniendo como profesor de Matemáticas durante sus dos últimos años al famoso matemático Gregory Saint-Vincent.

En 1640, Tacquet empezó a estudiar Teología, al tiempo que daba clases de Matemáticas en el Colegio de los Jesuitas de Lovaina. Precisamente, mientras simultaneaba esta enseñanza en Lovaina con el Colegio de Jesuitas de Amberes, fue ordenado sacerdote jesuita en 1646. En sus clases, era reconocido por su total devoción a la fe católica y por su testimonio cristiano ante sus estudiantes. Desde siempre, pero mucho más tras su ordenación, conjugó perfectamente su dedicación a la Iglesia y a la Orden de los Jesuitas con su gran quehacer matemático, pues fue también un brillante matemático, de gran reputación internacional.

La importancia de sus trabajos radica no tanto en los resultados que obtuvo sino por la claridad de sus escritos y el hecho de que en muchos aspectos, su enfoque era importante en la preparación del camino para la posterior introducción del cálculo diferencial e integral por parte de Newton y Leibniz. Su mejor obra fue “Cylindricorum et Annularium”, de 1651, basada en las Matemáticas de Arquímedes, que tuvo una gran influencia posterior sobre Pascal. Su trabajo titulado “Opera matemática” (publicado en 1669, después de su su fallecimiento) fue descrito por Henry Oldenburg (uno de los editores de los Transactions y secretario de la Royal Society of London) como:

“uno de los mejores libros escritos alguna vez sobre Matemáticas”.

Tacquet escribió también muchos libros de texto elementales de Matemáticas para los colegios de jesuitas. De su obra más popular en este aspecto, los "Elementa Geometriae", escrita en 1654, se hicieron numerosas ediciones durante los siglos XVII y XVIII. La Figura 5 muestra las primeras páginas de estos libros citados.

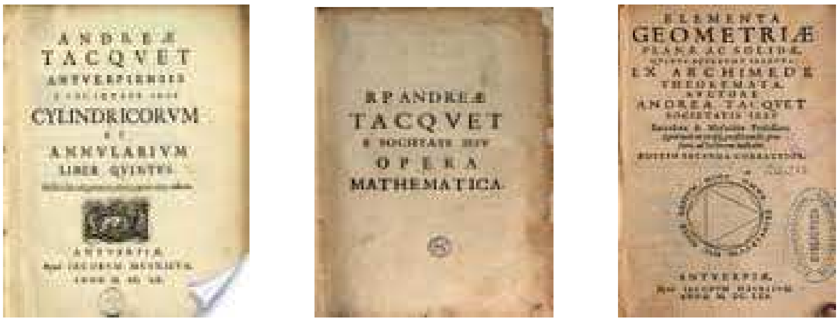


Figura 5. Algunos de los libros escritos por Tacquet

También escribió sobre Astronomía. De ahí que, en su honor, uno de los cráteres de la Luna llevó inicialmente su nombre hasta su nueva denominación de cráter Al-Bakri. Biografías muy completas de este sacerdote matemático pueden verse en (Westfall, 1995) y en las webs de las universidades de Fairfield y Saint Andrews.

2.5. Thomas Chalmers (1780- 1847)

Thomas Chalmers, ministro presbiteriano, teólogo, matemático y escritor, nació en una pequeña casita de East Anstruther, Fifeshire (Escocia), el 17 de marzo de 1780 (véase figura 6), en el seno de una familia de clase media, profesantes del calvinismo más estricto, lo que le influyó grandemente durante sus primeros años.

Figura 6. Fachada de la casa en la que nació Chalmers

A los 11 años de edad, Chalmers ingresó en la universidad de St. Andrews (Figura 7), dirigiendo su atención casi exclusivamente hacia las Matemáticas, aunque sin abandonar su intención original de ser predicador, lo que le llevó a conseguir su licencia para el presbiterio de St. Andrews en enero de 1799. Sin embargo, en lugar de comenzar su trabajo profesional como predicador, continuó estudiando Matemáticas y Ciencias Naturales, ejerciendo durante el invierno de 1802-03 como ayudante del profesor de Matemáticas en St. Andrews. Siempre mostró un extraordinario poder para despertar el entusiasmo en todas las materias que tocaba, aunque eso le llegó a costar su puesto al no gustarles sus métodos novedosos a las autoridades académicas.

Figura 7. Dos vistas de la Universidad de Saint Andrew's, la más antigua de Escocia y una de las más antiguas del Reino Unido

Chalmers se quedó como ministro en Kilmeny, a unos pocos kilómetros de St. Andrews, en mayo de 1803, dando clases voluntarias de Matemáticas en la universidad, al mismo tiempo que predicaba regularmente. Aunque ejerció fielmente su pastoreado en esa localidad (véase la Figura 8), su corazón no estaba del todo en su trabajo. Estaba atrapado por el creciente moderantismo que colocaba a la cultura por encima de la piedad y prefería el apoyo del Estado a la independencia, al tiempo que pensaba que el fin máximo de una persona debería ser satisfacer sus necesidades físicas y sociales. Chalmers expuso estas ideas en 1880 en su obra "Inquiry into the Extent and Stability of National Resources".

Figura 8. Exterior e interior de la Iglesia Parroquial de Kilmeny

Por aquellos tiempos llegó a padecer varias enfermedades más o menos serias, estando a las puertas de la muerte por una de ellas, de la que, afortunadamente, se recuperó un año después. Y fue entonces cuando se inició en la religiosidad. David Brewster, físico británico de origen escocés que había abandonado la teología, a cuyo estudio se había consagrado, para dedicarse plenamente a la física, había sido encargado de la redacción de un magno proyecto, la "Edinburgh Enciclopedia". David le pidió a Chalmers que contribuyera a esa obra. Chalmers aceptó y al principio escogió el tema Trigonometría, pero al final se decidió por Cristianismo. Fue entonces, al examinar las doctrinas de esta religión y profundizar en sus misterios cuando se dio cuenta de su importancia, de manera que estudiando el cristianísmo es como llegó a ser cristiano. Sus feligreses rápidamente se dieron cuenta de que algo le había ocurrido. Su alma estaba encendida y su cultura la usaba ahora para hacer que la verdad salvadora fuera poder salvador. Cortó entonces sus lazos con el moderantismo, haciéndose decididamente evangélico. Su elocuencia ahora la usaba en nuevas formas y con grandes resultados.

En julio de 1815, Chalmers fue formalmente admitido como ministro de la Tron Church, de Glasgow (en la Figura 9), en la que predicó un año después y durante varias semanas la famosa serie de siete sermones "Discourses on the Christian

Revelation, Viewed in Connection with Modern Astonomy". Su hermano menor, Thomas, también fue ministro de la misma en 1819.

Figura 9. Tron Church

En septiembre de 1819, Chalmers se trasladó desde la iglesia de Tron a la de St. John, a fin de poner en práctica en una gran ciudad el antiguo esquema escocés de proveer para los pobres. Para ello, distribuyó a las dos mil familias aproximadamente de la parroquia en veinticinco divisiones y puso al frente de cada distrito a un anciano y a un diácono; el primero para atender las necesidades espirituales de los feligreses y el segundo las temporales. Bajo su dirección se edificaron dos escuelas que emplearon a cuatro maestros competentes para dar clases a unos setecientos niños, mientras que los domingos cuarenta o cincuenta escuelas locales proporcionaban enseñanza espiritual.

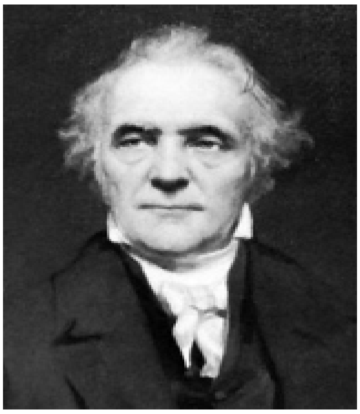


Figura 10. Thomas Chalmers

El Dr. Chalmers, como en aquellos tiempos era conocido, no sólo presidía toda esta tarea sino que estaba al tanto de todos los detalles, visitando cada dos años a cada familia de la parroquia y teniendo reuniones vespertinas. Se preocupó mucho del cuidado de los pobres, sobre todo de los más desfavorecidos, facilitándoles medios económicos procedentes de la reducción que logró realizar de los gastos parroquiales, que pasaron de mil cuatrocientas libras por año a sólo doscientas ochenta, aunque, desafortunadamente, este sistema tan eficaz fue abandonado en 1837 por otro plan inglés de evaluación compulsiva, cuya puesta en práctica era menos trabajosa, pero que, sin embargo, era menos provechoso.

En noviembre de 1823, Chalmers fue profesor de filosofía moral en la universidad de St. Andrews y en noviembre de 1828 de teología en la de Edimburgo. En 1833 editó el primero de los Tratados Bridgewater, titulado "On the Adaptation of

External Nature to the Moral and Intellectual Constitution of Man", que provocó un gran impacto. Al respecto de ese tratado, el biógrafo de Chalmers, el reverendo William Hanna, dijo que a consecuencia de esa obra, Thomas recibió honores literarios tales como nunca había tenido ninguna persona eclesiástica escocesa. Además, en 1834, fue elegido miembro de la Royal Society de Edimburgo, de la que pronto llegó a ser uno de sus vicepresidentes, siendo también hecho miembro del Instituto de Francia. En 1835 la universidad de Oxford (ver Figura 11) le otorgó el grado de D.C.L.

Figura 11. La Universidad de Oxford en el Siglo XIX

Hasta este momento, Chalmers había tenido poca presencia en el gobierno de la iglesia, pero desde entonces en adelante iba a hacer más que cualquier otro hombre de su siglo en ese campo. La fricción entre la Iglesia y el Estado en Escocia estaba produciendo cada vez más problemas. El intento de imponer ministros detestables para las congregaciones era la queja más corriente. El asunto se agravó de tal manera que se convocó una asamblea en noviembre de 1842 para tratarlo, resolviéndose que si no se ponían medidas para aliviar la situación muchos ministros se retirarían del sistema establecido. Como no hubo respuesta, el 18 de mayo de 1843 cuatrocientos setenta pastores se retiraron de la Asamblea General, constituyendo la Iglesia Libre de Escocia, eligiendo al Dr. Chalmers como su primer moderador. Él había previsto la separación y esbozó un esquema para el apoyo de los ministros salientes. Tras pilotar la nueva iglesia en medio de un mar tempestuoso, tuvo que dejarlo para dedicarse exclusivamente a su tarea docente, especialmente en el New College de Edimburgo, del cual era rector, y a la composición de sus "Institutes of Theology". En cualquier caso, Chalmers no tuvo mucho tiempo para ello, pues murió súbitamente en Edimburgo (Escocia) el 30 de mayo de 1847.

Figura 12. En memoria de Chalmers

No obstante, su influencia ha sido poderosa y todas las iglesias de Escocia reconocen su valía y su labor. Fue más grande obrero que escritor, pero más grande todavía lo fue como persona. En su memoria se erigieron algunas estatuas y construcciones (véanse Figuras 12 y 13). Biografías más detalladas y completas de este matemático pueden verse en la página web de la universidad de Saint Andrews y en la de la iglesia Evangélica "Pueblo Nuevo" (ver referencias).

Figura 13. Estatua de Thomas Chalmers en Edimburgo

2.6. Bernard Bolzano (1781-1848)

Bernard Bolzano fue un sacerdote católico, nacido en Praga el 5 de octubre de 1781, que murió en la misma ciudad el 18 de diciembre de 1848.

Bolzano no salió de su país, no tuvo contactos con los científicos de la época, sus trabajos pasaron inadvertidos durante medio siglo, uno de ellos fue descubierto en 1930, y sin embargo, hoy en día el teorema que lleva su nombre es estudiado en cualquier curso básico de Análisis Matemático de estudios superiores de ciencias.

Figura 14. Bernard Bolzano

Bolzano fue lógico, filósofo y teólogo además de matemático, realizando importantes contribuciones no sólo a las Matemáticas sino a la teoría del conocimiento. Con 15 años se inscribió en la Facultad de Filosofía de la Universidad de Praga. Según sus propias palabras:

> *"Mi especial predilección por las Matemáticas se basa de modo particular en sus aspectos especulativos, en otras palabras, aprecio mucho la parte de las Matemáticas que es al mismo tiempo filosofía".*

Cuatro años más tarde empezó a estudiar Teología y a la vez, preparó su tesis doctoral en Geometría, consiguiendo el doctorado en 1804, con veintitrés años. Ese mismo año obtuvo la cátedra de Filosofía y Religión en la Universidad de Praga y, dos años más tarde se ordenó sacerdote. No le fue fácil decidir entre dedicarse a las Matemáticas u ordenarse sacerdote. Finalmente fue su vocación de servicio, especialmente a los jóvenes de su nación, lo que le hizo decidirse por el sacerdocio. Su pensamiento matemático hizo que su profunda fe cristiana estuviera sustentada en brillantes análisis racionales.

La época que le tocó vivir fue de fuertes convulsiones sociales. El entusiasmo provocado por la Revolución Francesa dio lugar a los primeros movimientos políticos para reivindicar la libertad de pensamiento, la independencia nacionalista, el poder de la ciencia y el enaltecimiento de la razón. El poder autoritario de las monarquías absolutas estaba llamado a desaparecer, por lo que el imperio austriaco, al que pertenecía la república checa, estaba seriamente preocupado. Bolzano, en sus clases de religión, enseñaba los valores de justicia social. Como cristiano estaba obligado a denunciar la desigualdad, la pobreza y las duras condiciones de trabajo del pueblo frente a una burguesía cada vez más enriquecida y más poderosa. Su interés principal estaba en los jóvenes, en expandir el conocimiento entre ellos que eran el futuro de la sociedad. Sus conferencias con ellos llegaron a ser tan populares que años después fueron escritas y publicadas por sus estudiantes.

Las denuncias de Bolzano no pasaron desapercibidas por las autoridades civiles que presionaron a sus superiores eclesiásticos para que fuese cesado de su cátedra, lo que ocurrió en 1819. Se le acusó de manifestar opiniones contrarias a las de la Iglesia y de introducir ideas políticas perniciosas entre sus estudiantes. Debía revocar sus opiniones públicamente y por escrito, a lo que Bolzano no sólo se negó sino que hizo una defensa escrita de sus enseñanzas. La intercesión de un famoso científico checo evitó que fuese recluido en un monasterio. En su lugar, fue apartado como párroco en una pequeña aldea, cerca de Praga, se le prohibió enseñar y tener contacto con los estudiantes, sólo pudo continuar su labor científica de forma privada. Es por ello por lo que sus trabajos, todos ellos manuscritos, no fueron casi conocidos en su época.

En Matemáticas, Bolzano consiguió demostrar todo lo que declaraba, adelantándose a los analistas rigurosos del siglo XIX, aunque sus teorías sólo se entendieron después de su muerte. El conocido “teorema de Bolzano” tiene un enunciado que geométricamente es evidente, pero que como él mismo decía, enunciados aparentemente obvios sobre funciones continuas pueden y deben ser demostrados. Este resultado es importante porque asegura la existencia de solución de ecuaciones para las que a primera vista no se sabe si tienen solución o no.

Sin pretenderlo, Bolzano es considerado hoy como uno de los padres del Análisis Matemático, pero también es recordado como aquel sacerdote que siendo fiel a sus principios morales no dejó de trabajar por el conocimiento racional de las cosas y por una sociedad de justicia. Para una visión más completa de su biografía puede consultarse la página web de la Universidad de Saint Andrews.

2.7. Robert Richard Anstice (1813-1853)

Robert Richard Anstice nació el 9 de abril de 1813 in Madeley (Shropshire, Inglaterra). Robert fue el cuarto hijo de la familia que formaban William y Penélope Anstice. Su padre era dueño de una fundición, que pasó después a ser dirigida por

William, el mayor de los hermanos. El segundo de sus hermanos, Joseph, asistió a la Westminster School y luego estudió en el Christ Church de Oxford antes de convertirse en profesor de Literatura Clásica en el King's College de Londres, cuando sólo tenía 22 años. Curiosamente, Robert, el más joven de los hermanos, siguió los mismos estudios que Joseph, asistiendo a la Westminster School antes de entrar en el Christ Church, de Oxford, en 1831. Allí estudió Matemáticas y se graduó con una licenciatura con honores de primera clase en 1835 y una maestría en 1837.

Es conocido que Robert recibió una beca para estudiar Matemáticas después de graduarse en Oxford, pero sin embargo se conoce muy poco de lo que hizo durante los diez años siguientes. Es evidente que decidió unirse a la Iglesia en algún momento, dado que lo siguiente que se sabe de su vida fue su ordenación. Así, se sabe que Robert fue ordenado en 1846 y al año siguiente se convirtió en rector de Wigginton, cerca de Tring, en la diócesis de St Albans (Hertfordshire, Inglaterra).

En los seis años que estuvo como rector en la parroquia de Wigginton (véase Figura 15), Anstice escribió tres artículos matemáticos relacionados con el trabajo matemático de otro rector, Kirkman, que había escrito sobre el tema de los sistemas triples de Steiner (como se les llama actualmente). El primero de esos artículos se titulaba “On the motion of a free pendulum”, pero fueron los otros dos los de mayor interés. Ambos trataban sobre Combinatoria y los dos tuvieron el mismo título: “On a problem in combinations”.

Figura 15. Parroquia de Wigginton

El propio Anstice, sin embargo, parece que no se dio cuenta de la importancia de su propio trabajo al terminar uno de sus artículos con el siguiente comentario:

“Pero demasiado espacio ha sido dedicado a tan poca cosa”.

Sin embargo, Anderson y Griggs comentan de él en 1989 (Anderson, 1989):

“está enterrado junto a sus padres, casi olvidado por la comunidad matemática. Se merece un mayor reconocimiento”.

Anstice murió muy joven, el 17 de diciembre de 1853, en Wigginton, tras solo seis años permaneciendo como ministro de la Iglesia de Inglaterra en su parroquia. El párroco de Wigginton que lo sucedió lo recuerda como:

“un gran predicador filosófico, muy llorado cuando murió”.

2.8. Charles Lutwidge Dodgson (1832-1898)

Muchas personas son las que han oído hablar alguna vez de la obra literaria titulada “Alicia en el País de las Maravillas” (“Alice's adventures in wonderland” en el original en inglés), escrita en 1865. Muchas menos son las que de ellas han leído esa obra y todavía menos las que saben que su autor fue Lewis Carroll. Por otra parte, el nombre del matemático Charles Lutwidge Dodgson es prácticamente desconocido para el ciudadano medio, al igual que, sorprendentemente, para muchos matemáticos. Pocas personas saben entonces que “Lewis Carroll “es el seudónimo que Dodgson usaba para firmar los libros que él escribía para niños, como el anteriormente citado de Alicia o el titulado “A través del espejo” (“Through the looking glass”), escrito siete años más tarde (1872). Él mismo ideó ese seudónimo traduciendo al latín sus dos primeros nombres: “Carolus Lodovicus”, y después utilizando informalmente esa traducción, una vez cambiada de orden.

El padre de Charles, Lutwidge Dodgson estudió Matemáticas en la Universidad de Oxford, donde obtuvo una beca como profesor a la que tuvo que renunciar al casarse con su prima Frances Jane en 1827, con la que tuvo once hijos. Después se hizo sacerdote de la Iglesia de Todos los Santos en la ciudad de Daresbury, pasando a ser el reverendo Charles Dodgson.

Charles hijo, nacido en 1832, fue el primer varón y tercer hijo de ese matrimonio. Fue bautizado en la iglesia de su padre y tuvo, al igual que sus hermanos, una estricta educación cristiana. Su padre también le imbuyó en su amor por las Matemáticas, ya que deseaba que su hijo, al ser su primer varón, siguiese los mismos pasos que él había seguido: estudiar Matemáticas en Oxford, obtener una beca como profesor, casarse y convertirse después en párroco.

No obstante, el padre de Charles pasó a ser vicario de Croft-on-Tees, en Yorkshire, en 1843, donde eligieron vivir de una forma mucho más modesta de la que sus ingresos le permitían. En 1944, Charles entró interno en la Escuela Richmond, En ella recibió una excelente base para su educación, destacando sobremanera en Matemáticas. Más tarde, en 1846, Charles pasó a la Escuela Rugby, una escuela muy famosa en la que sin embargo las cosas no le fueron especialmente bien, a causa de su carecer tímido, sensible e introvertido, unido a su tartamudeo, todo lo cual le hacía sufrir el acoso de sus compañeros mayores.

A pesar de ser profundamente infeliz por todo ello, Charles alcanzó una gran brillantez en sus estudios, llegando a obtener numerosos premios, siendo las Matemáticas su asignatura favorita. No obstante, durante sus estudios, padeció muchas enfermedades, como la tosferina, que le dejó una tos persistente a lo largo de su vida y las paperas, que le dejó un poco sordo del oído derecho. Sobre su tiempo en Rugby, el propio Charles manifestaba estar muy disgustado.

Tras abandonar la Escuela en 1849, Charles se matriculó en la Universidad de Oxford, en el Colegio de la Iglesia Cristiana y pasó a residir con el reverendo Jacob Ley, amigo de su padre, tiempo en el que murió su madre. En Oxford, Charles obtuvo en 1852 una beca vitalicia de 25 libras al año para dar clases de Matemáticas, decidiéndose a tomar las órdenes sagradas y permanecer soltero, lo cual agradó mucho a su padre. Además, empezó a dar clases a alumnos que tomó aún no siendo su tutor oficial, aunque todo ello le impidió obtener el nivel más elevado en Matemáticas

Decepcionado con no haber podido sacar ese título, Charles escribió en su diario:

> *“Es tentador pensar en lo fácil... Yo podría haberlo conseguido, si sólo hubiera trabajado bien durante esta etapa, que me temo que he de considerar como una pérdida de tiempo. Sin embargo, yo tengo ahora un año delante y lo ocurrido antes como una lección. Para la próxima vez, tengo que avanzar en Cálculo Integral, Óptica (y la teoría de la luz), Astronomía, y Dinámica Superior. Yo*

recordaré esta resolución para avergonzarme a mí mismo si en marzo de 1856 me encuentro todavía no preparado, sabiendo cuántos fracasos se han producido ya en mi vida".

Durante el verano de 1855 Charles enseñó en la escuela de su padre en Croft y cuando regresó a Oxford en octubre lo hizo como profesor de Matemáticas, por lo que no necesitó examinarse para ello en 1856, como lo había planeado. Charles se mantuvo en La Iglesia de Cristo en Oxford, dando conferencias de Matemáticas y guiando a los estudiantes hasta 1881. Aunque se ordenó diácono en 1861, Charles no llegó a ordenarse sacerdote, fundamentalmente por el tartamudeo que sufría, que no le facilitaba la predicación. Además no compartía la opinión de que las personas no cristianas fueron condenadas a la hora de su muerte, por lo que pensaba que no iba a poder ser un buen sacerdote.

A Charles le gustaba mucho la fotografía, para la que tenía una gran habilidad, destacando en fotografiar a los niños. Uno de sus modelos fotográficos preferidos fue Alice Liddell, una de las tres hijas de Henry George Liddell, el decano de La Iglesia de Cristo. Alice recordaba en 1932 cómo ella y sus hermanas Lorina y Edith:

"se sentaban en el sofá grande en cada lado de él, mientras nos contaba historias, ilustrándolos con dibujos a lápiz o tinta sobre la marcha. Parecía tener una tienda sin fin de estos cuentos fantásticos. No siempre éstos eran completamente nuevos. A veces eran nuevas versiones de viejas historias, que él convertía en cuentos nuevos, debido a las frecuentes interrupciones que abrían nuevas posibilidades y no soñadas".

Fue en 1862 cuando Charles empezó a redactar esos cuentos, a petición de Alice. Tres años más tarde, después de pulir la redacción y de añadir más material, Charles publicó su primer "Libro de Alice", como Alicia en el País de las Maravillas (la Figura 16 muestra la portada de una de las ediciones en español de ese libro).

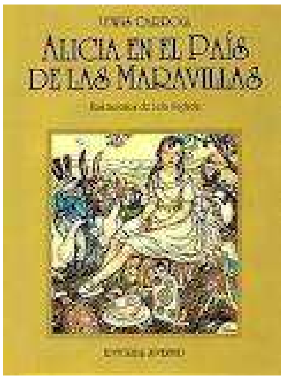


Figura 16. Portada del libro

Como matemático, Charles, que era muy minucioso y exhaustivo, escribió muchos libros de Matemáticas: "Programa de estudios de la geometría plana algebraicos" (1860), dos libros de Euclides (1860), las "Fórmulas de trigonometría plana" (1861), "La condensación de los determinantes" (1866), "Tratado elemental de determinantes" (1867), "Ejemplos de aritmética" (1874), "Euclides y sus rivales modernos" (1879), "Curiosa Mathematica, Parte I: Una Nueva Teoría de Paralelas" (1888), y "Curiosa Mathematica, Parte II: Los problemas de almohadas", pensado en Sleepless Nights (1893). Sin embargo, ninguno de ellos ha sido de importancia, salvo quizás uno sobre "Euclides y sus rivales modernos" (1879), que es de interés histórico por estar escrito en la forma de un juego en el que el fantasma de Euclides defiende sus enseñanzas frente a los geómetras modernos.

Figura 17. Charles L. Dodgson

Como lógico-matemático, Charles deseaba aumentar la comprensión, tratándola como un juego. Publicó "El juego de lógica" en 1887, y la "Parte I de Lógica Simbólica", en 1896. Las partes II y III, de las que Charles hablaba, no han llegado a encontrarse completas en la actualidad. Charles, aprovechando las reformas electorales que se estaban discutiendo en aquellos momentos, también desarrolló y aportó muchas ideas a la teoría del juego, muy anteriores a la década de 1880.

Una de las cosas que más le gustaban a Charles eran los rompecabezas. Sabía una gran cantidad de charadas, chistes, acertijos, juegos, preguntas y respuestas, trucos con números y con palabras y ejercicios mentales, con los que divertía todos los días a su familia y amigos. También jugaba al ajedrez, croquet, billar, cartas, pero lo que más le gustaba era inventar nuevos pasatiempos. En la década de 1870 creó una gran colección de enigmas, desafíos mentales e incluso juegos de magia. Era tan creativo y productivo que sus juegos han llegado a ser muy conocidos.

Como no podía ser de otra manera, a Charles le sobrevino la muerte trabajando en unos nuevos rompecabezas. Su muerte fue muy repentina: un resfriado que contrajo a principios de enero de 1898 se le agravó cada vez más hasta que le produjo el fallecimiento muy pocos días después, en la tarde del 14 de enero. Una biografía muy completa sobre este singular personaje puede verse en (0'Connor, Robertson, 2005b).

3. Algunas aplicaciones a la Educación Secundaria

En principio, puede parecer complicado obtener algunas posibles aplicaciones del contenido de este artículo a la Educación Secundaria y/o Bachillerato. La mera descripción de estas biografías parece ser poco susceptible de ser usada para que el profesor de Matemáticas de estos niveles pueda utilizarla como recurso metodológico, a fin de motivar a sus alumnos y despertar en ellos el interés, gusto y curiosidad por esta disciplina. No obstante, la educación por competencias, vigente actualmente en la Secundaria puede ser una puerta para conseguir este objetivo.

En efecto, de acuerdo con las 8 competencias básicas establecidas por Real Decreto 1631/2006, de 29 de diciembre del Ministerio de Educación y Ciencia de España (BOE del 5 de Enero de 2007), por el que se establecen las enseñanzas mínimas correspondientes a la Educación Secundaria Obligatoria, a saber: competencia en comunicación lingüística, competencia matemática, competencia en el conocimiento y la interacción con el mundo físico, tratamiento de la información y competencia digital, competencia social y ciudadana, competencia cultural y artística, competencia para aprender a aprender y autonomía e iniciativa personal, el conocimiento de estos datos biográficos puede permitirle tanto al profesor de Matemáticas como a los de Religión o Ética (en aquellos centros en los disciplinas de estos tipos se impartan, que serán fundamentalmente concertados para la primera) desarrollar algunas de ellas, en concreto, la quinta anteriormente indicada, en el sentido de las Matemáticas a la Religión o Ética o la tercera, en el contrario.

Así, el profesor de Matemáticas puede hacerles ver a sus alumnos, por ejemplo, que al igual que a los médicos o farmacéuticos o a los sanitarios en general se les puede ver como personas que aprovechan sus conocimientos para ayudar solidaria y desinteresadamente a los demás, también hay personas en el colectivo de los matemáticos que igualmente realizan esta labor, si bien quizás de una forma más callada y anónima. Es cierto que para ejercer esa labor puede servir cualquier matemático, no necesariamente sacerdote al mismo tiempo, pero el profesor puede apoyarse en las biografías antes citadas para hacerles ver a sus alumnos que aquellos matemáticos que también han consagrado su vida a servir a una religión constituyen un ejemplo especialmente significativo de estas personas.

A su vez, los profesores de disciplinas relacionadas con la religión o la ética pueden servirse también de estos matemáticos para comentarles a sus alumnos que las cuestiones trascendentes no están en absoluto desligadas de la realidad y que las personas religiosas persiguen también el conocimiento y la interacción con el mundo físico que les rodea, en su intento de armonizar ambas realidades, la trascendente y la racional. Recuérdese que aunque las Matemáticas son una ciencia en la que todo aserto necesita primero ser probado para ser considerado verdadero, existen sin embargo algunos conceptos en ella que se separan de la intuición natural (sobre todo para los no matemáticos), como pueden ser por ejemplo los llamados "teoremas de inconsistencia", que Gödel demostró desde la Lógica Matemática, que no significan que los conceptos matemáticos deban aceptarse a ciegas, sino que, en determinados contextos, pueden existir proposiciones para las que no es posible demostrar si son verdaderas o falsas.

4. Breves reflexiones de los autores

A la vista de las biografías comentadas en este artículo podemos ver que han existido varios matemáticos a lo largo de la historia que también han sido sacerdotes o, que, al menos, han estado muy volcados en ejercer una labor muy amplia de solidaridad hacia los demás. Además, y en contra de lo que a lo mejor pudiera parecer, puede asegurarse que hay muchos más de los aquí considerados a modo de ejemplo. Así, en (Miller, 2004) puede verse una colección de más de 1600 mini-biografías (recopiladas por W. R. Miller y dispuestas en orden alfabético) de los científicos más relevantes de la fe cristiana, que incluye a académicos, matemáticos y teólogos que promovieron la causa de la ciencia. Todos ellos, pioneros en diferentes disciplinas científicas, como astronomía, geología, biología, física cuántica o genética, por ejemplo, se manifestaron públicamente practicantes de la fe cristiana, siendo muchos de ellos matemáticos, y muchos de éstos, sacerdotes.

Por otra parte, actualmente se están editando muchísimos libros en los que se cuestiona el papel de las ciencias en general, no se olvide que las Matemáticas son una de ellas, y la religión. Véase al respecto el titulado "Mathematics and Religión" (Leach, 2011), cuya portada se muestra en la Figura 18.

Todo ello nos lleva a hacer ver que también los matemáticos y matemáticas podríamos contribuir con nuestro trabajo a alguno de los fines que persigue la Religión, como por ejemplo conseguir la plena solidaridad o un adecuado grado de igualdad entre las naciones del planeta, con particular dedicación al tercer mundo.

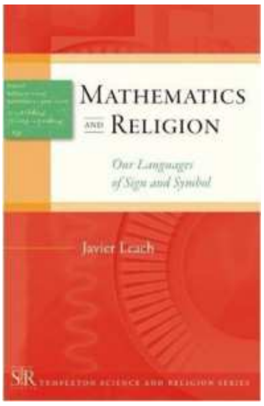


Figura 18. Libro de Javier Leach

Y para terminar, mencionar que algo de esto ya se está haciendo. En 2008, le ha sido concedido el Premio Templeton al filósofo, astrofísico, matemático y sacerdote católico polaco Michael Heller, que desempeña simultáneamente su ministerio pastoral y su labor como docente de filosofía en la Pontificia Academia de Teología de Cracovia desde 1985. Con ello, queda plasmada la complementariedad fe y razón que, en la religión católica, siempre ha sido posible y ha constituido un reflejo fiel de lo que una religión preñada de la verdad es capaz de ofrecer al hombre de hoy (véase (Montserrat, 2011) para mayor información sobre este premio).

Bibliografía

Anderson, I., Griggs, T. (1999). Anstice and Kirkman: Mathematical Clerics. The Mathematical Intelligencer, 21(2), 44-46.

Leach, J. (2011). Matemáticas y Religión: Nuestros lenguajes del signo y el símbolo. Editorial Sal Térrea, Colección: Ciencia Religión. Recuperado de http://www.tendencias21.net/libros/Matematicas-y-Religion-Nuestros-lenguajes-del-signo-y-el-simbolo_a211.html

Miller, W. R. (2004). Scientists of the Christian Faith: A Presentation of the Pioneers, Practitioners and Supporters of Modern Science. Recuperado de http://www.tektonics.org/scim/sciencemony.htm

Montserrat, J. (2011). Premio Templeton a un sacerdote. (s.f.). Recuperado de http://www.tendencias21.net/Michael-Heller-Premio-Templeton-2008-por-sus-investigaciones-sobre-el-Universo_a2153.html

0'Connor, J.J., Robertson, E.F. (2005a). Biografías de Matemáticos de la Universidad de St. Andrews. Recuperado de http://www-history.mcs.st-and.ac.uk/BiogIndex.html

0'Connor, J.J., Robertson, E.F. (2005b). Biografías de Matemáticos de la Universidad de St. Andrews. Recuperado de http://www-gap.dcs.st-and.ac.uk /~history /Mathematicians/Tacquet.html

Westfall, R.S. (1995). Biografía de A. Tacquet. Recuperado de http://galileo.rice.edu/Catalog/NewFiles/tacquet.html

web del Departamento de Matemáticas de la Universidad de Fairfield. Biografía de A. Tacquet. (s.f.). Recuperado de
http://www.faculty.fairfield.edu/jmac/sj/scientists/tacquet.htm

web de la Iglesia Evangélica “Pueblo Nuevo”. Biografía de T. Chalmers. (s.f.). Recuperado de http://www.iglesiapueblonuevo.es/historia.php?pagina=bio_chalmerst

.

María Arroyo Castilleja y Silvia Recacha González, licenciadas en Matemáticas por la Universidad de Sevilla (España), han sido Estudiantes Internas del Departamento de Geometría y Topología de la misma durante su licenciatura, bajo la dirección del profesor **Juan Núñez Valdés,** doctor en Matemáticas y profesor Titular de Universidad de ese Departamento, con el que colaboran asiduamente en artículos de divulgación de las Matemáticas en general**.**
maria_ac_90@hotmail.com, silvia_rg90@hotmail.com, jnvaldes@us.es

UNIÓN
REVISTA IBEROAMERICANA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA
www.fisem.org/web/union

ISSN: 1815-0640
Número 37. Marzo de 2014
páginas 181-198
Coordinada por Fredy González

Historia Social de la Educación Matemática en Iberoamérica:

Consideraciones Históricas y Didácticas Relacionadas con el Símbolo Algebraico de Igualdad

Andrés González Rondell; Fredy González

Resumen	Este trabajo es un estudio del signo de igualdad que valora su génesis, implementación e implantación definitiva como símbolo representativo de la igualdad matemática. Se consideran: sus características específicas como objeto matemático, algunos aspectos renacentistas como momento histórico en el que Robert Recorde lo propuso, los diferentes usos que se le han dado en Matemáticas y otros símbolos que también han servido para la igualdad. Se hacen consideraciones didácticas y de investigación tomando en cuenta los diferentes usos e interpretaciones de los estudiantes así como los distintos errores que su comprensión limitada conlleva. Se asume la concepción del signo de Puig (2003) y Filloy (1993) y se acepta que el signo "=" es un símbolo en el sentido de Charles Pierce. **Palabras Clave**: igualdad matemática, símbolo, álgebra.
Abstract	This work is a study of the equal sign that values its genesis, implementation and final implementation as a representative symbol of mathematical equality. Are considered: their specific characteristics as a mathematical object, some aspects such as Renaissance historical moment in which we proposed Robert Recorde, the different uses that have been given in math and other symbols have also served to equality. Teaching and research considerations are made taking into account the different uses and interpretations of the students and the various errors that your limited understanding entails. Sign conception Puig (2003) and Filloy (1993) is assumed and accepted that the "=" is a symbol in the sense of Pierce. **Keywords:** mathematical equality, symbol, algebra
Resumo	O trabalho apresenta um estudo do signo de igualdade que valoriza sua gênese, construção e implantação definitiva como símbolo representativo da igualdade matemática.São consideradas suas características específicas como objeto matemático; alguns aspectos renascentistas, momento histórico em que Robert Recorde o propôs; os diferentes usos que lhes são dados em Matemáticas; e, por fim, outros símbolos que também têm servido para expressar a igualdade. O trabalho apresenta considerações didáticas e de pesquisas tendo em conta os diferentes usos e interpretações por parte dos estudantes, assim como os distintos erros advindos de sua compreensão limitada. Se assume aqui a concepção de Puig (2003) e Filloy (1993) e se aceita que o signo "=" é um símbolo no sentido de Charles Pierce. **Palavras-chave:** igualdade matemática, símbolo, álgebra.

Introducción

La igualdad es un concepto que nace en el mundo de la percepción sensorial, por lo que no es intrínseca a la Matemática, considerada ésta desde un punto de vista académico-institucional. Desde que se es niño, como afirman Infante y Hurtado (2010), se está sometido a un proceso de comparación para detectar regularidades y poder determinar cosas que son iguales y las que no lo son, sin necesidad de recurrir a un símbolo que permita la representación de dicha comparación.

Desde un punto de vista algebraico, la igualdad matemática puede ser considerada como una relación definida en un determinado conjunto, siendo así goza de las propiedades de reflexividad, simetría y transitividad, lo cual quiere decir que la misma se constituye en una relación de equivalencia, cada clase de equivalencia contendrá todos aquellos elementos del conjunto dado que tienen la condición de ser iguales. Se debe a R. Recorde el uso del símbolo "=" para interpretar la igualdad matemática, que entre los símbolos matemáticos, es uno de los de mayor arraigo en la comunidad de matemáticos y de educadores matemáticos a nivel universal. Este símbolo se usa en todas las ramas de la Matemáticas en todos los niveles de escolaridad y también fue usado mucho antes que R. Recorde le diera su carta aval como signo matemático, pero con otros significados, además se emplearon distintos símbolos para identificar la igualdad. Luego de su aparición formal transcurrió mucho tiempo antes de ser aceptado con la notoriedad e intensidad que hoy en día exhibe.

Sin embargo, desde el punto de vista de la Didáctica de la Matemática, se han detectado algunas interpretaciones insuficientes de este símbolo en los estudiantes que limitan su comprensión del lenguaje algebraico y por ende en el aprendizaje del álgebra. En algunas oportunidades, se convierte en un obstáculo epistemológico, en el sentido de Bachelard (2007), para la comprensión de algunos conceptos algebraicos, entre los que figuran ecuación e identidad, componentes esenciales del álgebra escolar, traduciéndose en dificultades y errores de los estudiantes. Por esta razón, algunos autores han expresado un notable interés en focalizar la mirada en este símbolo desde un punto de vista investigativo en la Educación Matemática, particularmente en estudios relacionados con el pensamiento algebraico, de ello dan cuenta los trabajos llevados adelante por Kieran (1981); Molina (2004); Molina, Castro, y Castro, (2007), e Infante y Hurtado (2010), entre otros.

En este trabajo se hace un recorrido por algunos de los elementos arriba mencionados tomando en cuenta el Sistema Matemático de Signos (SMS) de Puig (2003) y Filloy (1993), en el que los signos no pueden ser considerados de manera aislada, pues en cualquier texto matemático convergen dos subconjuntos de signos: los propiamente matemáticos, y por otro los de la lengua vernácula. En los procesos de significación (aceptando la ambigüedad del término *significado*), de tanto interés para los educadores matemáticos, no tiene sentido esta distinción, pues lo que importa es el sistema en sí mismo, que es lo que debe ser señalado como matemático, y no los signos por separado.

Y para evitar la tediosa repetición de las palabras: "es igual a", pondré, como hago a menudo en el curso de mi trabajo, un par de paralelas o rectas gemelas de la misma longitud, así: ═══, porque no hay dos cosas que puedan ser más iguales.
Robert Recorde

Álgebra y Simbolismo Matemático

Al igual que Esquinas (2009) se asume que “el signo es cualquier objeto que puede ser percibido y que puede ser portador de algún tipo de información para el receptor” (p. 102). Esto significa que lo relacionado con la interpretación es un asunto potencial, no dado ni preestablecido.

Además, en este trabajo los signos son considerados en la misma perspectiva de Puig (2003) quien sigue la misma dirección de Charles Sanders Peirce (1839-1914). Desde esta óptica tres características definen el signo: constituye una entidad triádica (significado, significante y cognición interpretante), no es estático y no es arbitrario (la relación triádica no es arbitraria). Además los signos pueden ser de tres tipos: íconos (del griego *eikon)*, índices (etimológicamente, *dedo que señala*) y símbolos. “Los íconos son signos que tienen alguna semejanza con el objeto y tienen el carácter que los hace significar incluso si el objeto no existiera” (Puig, 2003, p.177). Mientras que “los índices no se parecen a los objetos, sino que los señalan, fuerzan la atención hacia ellos, pero no los describen” (ob.cit). Se puede decir entonces que una diferencia entre estas dos categorías de signos estriba en las sensaciones que activan en el interpretante: por un lado el ícono induce a la reflexión y, por otra parte, el índice hacia la acción.

En el caso del símbolo éste tiene que ver con lo convencional, es decir con lo acordado del signo, el ejemplo más emblemático lo constituye la bandera de un país. Los símbolos no siempre son intuitivos o sobrentendidos para todas las personas, sino que se requiere una preparación previa para su dominio (Mora, 2006), lo cual tiene una enorme significación para el caso de la educación en general y de la enseñanza de la matemática en particular en la que se trata de la comunicar ideas matemáticas. De acuerdo con Pimm (2002) los sonidos hablados, las palabras escritas, entre otros pueden interpretarse como símbolos. Afirma este autor: “Las palabras son símbolos, pero entran en una categoría especial porque nos son tan familiares y corrientes que suplen con eficacia a lo que simbolizan” (p. 196)

Desde el punto de vista de la Didáctica de las Matemáticas existe una relación conflictiva entre simbolismo y objeto matemático, es decir, entre significante y significado, ello obedece a que para comunicar ideas matemáticas el símbolo es insustituible, no es posible hacerlo sin recurrir a él; tal como lo señala Pimm (2002) “*en Matemáticas, el símbolo convencional constituye el único medio de evocar el concepto mismo*” (p. 222), de manera que la práctica es la de manipular y efectuar transformaciones en el signo que representa al objeto, como si éste fuese transformado. De aquí que el signo adquiere una importancia suprema, pareciera que lo es todo, pero la realidad es que el símbolo no sustituye al objeto, el cual existe en la abstracción del pensamiento con entidad propia y con independencia de su imagen concreta representada por su significante. Como se puede colegir, esta situación puede suponer un obstáculo para el estudiante si éste no logra aprehender el objeto matemático que conlleva la simbolización.

Esta situación se manifiesta con mayor nitidez en el contexto de la enseñanza y aprendizaje del álgebra, en virtud de lo cual Pimm (2002) da una señal de alerta al advertir que “*muchos de los errores que se producen en álgebra ocurren precisamente porque ésta suele enfocarse de forma abstracta y manipulativa de símbolos, sin prestar atención a los posibles significados*” (Pimm, 2002: 47).

Sin embargo, es posible afirmar que el desarrollo y crecimiento de los conocimientos matemáticos han estado fuertemente ligados con el desarrollo del simbolismo, por ello afirma Ribnikov (1987) que "*en la historia de las matemáticas, la historia de los símbolos puede compararse con la historia de los instrumentos de trabajo, a través de los cuales es posible reconstruir y comprender mucho*" (p. 132). En ese sentido se le reconoce a Leibniz la conciencia sobre "las potencialidades de un simbolismo racionalmente ideado, y nadie dedicó más laboriosos pensamientos a la 'filosofía' de la notación matemática que él" (Bell, 2002: 136)

Es por ello que desde el punto de vista de la didáctica del álgebra se hace pertinente un acercamiento al estudio del simbolismo matemático que permita su abordaje y comprensión desde el punto de vista de una estructura organizacional interna, en este sentido Pimm (2002) establece una organización de los símbolos matemáticos que comprende cuatro categorías: logogramas, pictogramas, símbolos de puntuación y símbolos alfabéticos.

En el cuadro 1, a continuación, se presenta un resumen de la caracterización que propone este autor.

Cuadro 1. Clasificación de los símbolos matemáticos según Pimm (2002)

Tipo	Definición	Ejemplos y comentarios
Logogramas	Formas inventadas para referirse a conceptos totales, sustituyen palabras completas, no se utilizan fuera de contextos matemáticos.	Dígitos del cero al nueve. +, -, ÷, %, ∧,∨,˚, √, ∩, ∫, =, <, > El símbolo para señalar la igualdad pudo haber tenido un origen icónico y pictográfico. Según Pimm (2002) los logogramas "<" y ">" aun cuando sugieren su significado no son pictográficos en un sentido estricto (no tienen un origen geométrico)
Pictogramas	Íconos geométricos	□, ○, Δ, < (ángulo), Z (ángulos alternos), F (ángulos correspondientes)
Signos de puntuación	: ! [({ * / ' . ,	No siempre tienen el mismo uso que en la escritura normal En algunos casos actúan como modificadores de otros símbolos. Por ejemplo el apóstrofo, como en f', permite distinguir una función de su derivada. Llama la atención que el signo de interrogación es muy poco usado.
Símbolos alfabéticos	Alfabeto romano Alfabeto griego (con sus correspondientes mayúsculas y minúsculas)	Sujetos a una serie de convenciones. Aceptación del sistema Descartes (1637): las letras iniciales se usan para los parámetros y las finales para las variables, contra la propuesta de Viete en la que las vocales fuesen variables mientras que las consonantes representasen los parámetros. Otros ejemplos de convenciones son: Conjunto: mayúscula y elemento del conjunto minúscula. F: Campo (field en español). K: cuerpo (korper en alemán). Letras consecutivas para denotar objetos semejantes. Letra inicial del objeto para denotarlo. Combinación de alfabetos diferentes para establecer categorías, como en m, s para la media y desviación típica de una muestra, mientras que σ y μ para los parámetros de la respectiva población. Inicial de alfabeto diferente para indicar el objeto, por ejemplo, Δ (delta mayúscula) denota el discriminante de una ecuación cuadrática.

Renacimiento: Proposición y consolidación del simbolismo

El período medieval es una larga etapa temporal histórica que acaeció aproximadamente entre los años 473 y 1453, describir lo acontecido en estos mil años requeriría de grandes volúmenes de libros, pero para los propósitos de este artículo se tomarán en cuenta dos personajes junto con sus libros los cuales marcaron hitos históricos para la Matemática.

En este período la enseñanza tenía lugar principalmente en los monasterios, es decir era una enseñanza vinculada a la iglesia, aunque a mediados de este período, surgen las universidades como centros de producción del saber académico; los numerales romanos eran los únicos que se utilizaban ya “que para los problemas que se planteaban, esta forma de representar los números bastaba” (Casalderrey, p.16).

Dentro de esta etapa se ubican dos personajes muy importantes para el desarrollo del álgebra como lo son Leonardo de Pisa (1170-1240) y Muhammad ibn Mûsâ al-Khwârizmî. El primero es mejor conocido como Fibonacci, escribió un libro que intituló Liber abaci con el cual dio origen a las escuelas de ábaco hacia el norte de Italia, con el tiempo los Maestros escribían sus propias obras y a estos autores se les llamaba abacistas (Casalderrey, p.41), aquí las matemáticas se podrían denominar matemáticas del ábaco orientadas al cálculo para el comercio.

El segundo autor es mejor conocido por su nombre latinizado simplemente como Al-Jwarizmi, éste puede ser considerado el “padre del álgebra” (Boyer, 1999, p. 299), escribió un texto que denominó*Libro conciso de cálculo de al-jabr y al-muqâbala —alkitâb al-mukhtasar fî hisâb al-jabr wa'l-muqâbala*. Aun cuando no resulta sencillo realizar una traducción literal del título, dos palabras se han destacado de él: *Al-jabr* y *muqâbala.* La primera significa, aproximadamente, restauración o completación, que en lenguaje actual consiste en la transposición de términos. Mientras que muqâbala hace referencia a la reducción o compensación, que en lenguaje vernáculo consiste en la simplificación de términos semejantes. Además de la palabra*Al-jabr* derivó la actual álgebra.

Es posible que sorprenda que este libro a diferencia del de Euclides o Diofanto “no trata de difíciles problemas de análisis indeterminado, sino la exposición directa y elemental de la resolución de ecuaciones, especialmente las de segundo grado” (Boyer, p.296). Como está escrito en forma retórica, esto es sin símbolos, en él se pueden encontrar algunas palabras, que representan las incógnitas de manera concreta, como *jadhir* para la raíz, *mal* para su cuadrado, *kab* para el cubo, etc. (Boyer, 1999).

El declive de la Matemática del período medieval, según Boyer (1999), ocurre a partir de los trabajos relacionados con la proporcionalidad de Thomas Bradwardine (aprox 1290-1349), filósofo, teólogo y matemático inglés; y Nicole Oresme (1313-1382) matemático francés.

Los procesos históricos son ante todo el resultado de realizaciones humanas, razón por la que no es fácil establecer una ruptura discreta entre una época y otra, sin embargo, se reconoce la caída de Constantinopla (actual Estambul), capital del Imperio Bizantino (parte oriental del imperio romano), en 1453 en manos de los turcos como el evento que marcó el colapso definitivo de este Imperio y con ello la extinción del Medioevo, dando paso así a otro trascendente proceso histórico en Europa conocido como Renacimiento, temporalmente fue más corto que el medieval, pues ocurrió entre los siglos XV y XVI, pero significó un período de grandes y poderosas transformaciones en todos los órdenes de la vida. Dice Casalderrey (2009): "La característica fundamental del Renacimiento es el sentimiento humanista. El hombre pasa a ocupar un lugar central en el universo y con él, el arte, la literatura y el conocimiento de la naturaleza" (p. 13).

Desde el punto de vista matemático durante el Renacimiento se hacen esfuerzos hacia la recuperación de los ideales clásicos y la cultura griega. Esta restauración se hace a través de la matemática árabe, al principio fue Italia la beneficiada de las traducciones de los manuscritos de los tratados griegos y a partir de aquí el resto de Europa llegó a tener contacto con los trabajos de la antigüedad.

Es durante este período en el que se desarrolla la imprenta con tipos móviles (Joannes Gutenberg, hacia 1450) lo cual significó un fuerte espaldarazo a la difusión del conocimiento científico pues permitió que las obras cultas se extendieran y estuviesen más disponibles con mucha más facilidad que nunca hasta entonces (Boyer, 1999), en el caso de las matemáticas también fue así, aun cuando de una forma más lenta.

Además, al hablar del Renacimiento es imposible dejar de mencionar el nombre de Leonardo Da Vinci, hombre de pensamiento audaz, considerado como uno de los más grandes pintores de todos los tiempos y, prototipo de hombre renacentista; sin embargo (Boyer, 1999) afirma que no estuvo en estrecho contacto con el álgebra que era la tendencia dominante de la época.

El Renacimiento permitió, además del desarrollo de grandes ideas matemáticas, la consolidación de un simbolismo que se venía poniendo en práctica de una manera aislada y al servicio de distintos grupos humanos; esta unificación, poco a poco, se fue incorporando como una nueva de forma de hacer matemáticas y sentó las bases para que emergiera el álgebra como área de la matemática independiente de la Aritmética, la Geometría y el Cálculo.

Para las Matemáticas, el Renacimiento fue propicio para que emergiera y se consolidara un sistema representacional matemático que, a la larga, hacia mediados del siglo XIX con los trabajos de Évariste Galois (1811-1832), serviría para fundar el álgebra como una de las ramas de la Matemática. Será interesante entonces, precisar los períodos históricos que se han establecido para la evolución del álgebra a fin de conocer sus antecedentes y ubicar la emergencia del actual sistema matemático de signos (Puig, 2003). En 1842 G. H. F.Nesselmann en un libro intitulado *Die Algebra der Griechen* (El álgebra de los griegos) estableció una periodización en la evolución del álgebra que, pese a algunas críticas[1], se mantiene como "la historia oficial del álgebra" (Puig, 1998); estableció 3 períodos: retórico, sincopado y simbólico los cuales se muestran esquemática y resumidamente en el Cuadro 2.

[1]Algunos autores (Sessa, 2005; Puig, 1998) han hecho críticas interesantes a esta organización histórica del álgebra en virtud del énfasis que pone en el registro escrito, dejando de lado aspectos tales como la naturaleza de los problemas y los métodos de resolución empleados, sin embargo ante el desconocimiento de otra forma de organización se toma ésta como la "*historia oficial*" (Puig, 1998)

Cuadro 2. Síntesis de la evolución histórica del álgebra

Período	Características
Retórico 250 DC	Se usa exclusivamente el lenguaje natural sin recurrir a algún signo. Las cuestiones se plantean siempre en situaciones aritméticas o geométricas concretas, sin ninguna pretensión de generalización ni formalización (Esquinas, 2009). Se ubica en este estadio el álgebra de Al-Khwârizmî, en la que los problemas y su resolución se expresan enteramente en palabras.
Sincopado Época diofántica- finales siglo XVI (finales de 1500)	Los cálculos se desarrollan en lenguaje natural. Se introducen algunas abreviaturas para las incógnitas y las relaciones de uso frecuente Se intenta un proceso de generalización de problemas con un uso mayor o menor, según las épocas, de este incipiente simbolismo (Esquinas, 2009)
Simbólico Francois Viete (1540-1603)	Se usan letras para todas las cantidades y signos para representar las operaciones. Se puede operar con ese sistema de signos sin tener que recurrir a su traducción a la lengua original. Se utiliza el lenguaje simbólico no sólo para resolver ecuaciones sino también para demostrar reglas generales. Germen del Álgebra Moderna.

En esta organización histórica la etapa simbólica coincide temporalmente con el período renacentista. En los tratados árabes, durante el período retórico, se empleaba la palabra árabe *shay* que significa *cosa*[2] para referirse a lo desconocido de una ecuación, lo que se busca, es decir, la incógnita, en latín se dice *res*, en italiano se mantiene *cosa*, mientras que en alemán se denomina *coβ*. Pero, además, también el vocablo *cosa* se emplea para denotar el período en el que se transita de la aritmética al álgebra, caracterizado por el empleo de los primeros símbolos matemáticos y las primeras palabras inventadas (Wussing, 1998).

Además, con el florecimiento de la economía de mercado precapitalista en el Renacimiento surgieron (principalmente en Italia y Francia) los llamados maestros calculistas que eran personas dedicadas a actividades relacionadas con el cálculo del pago de impuestos en los ayuntamientos, desarrollaban algoritmos, trabajaban empíricamente, aún cuando también se constituían en corrientes de maestros calculistas creando sus propias escuela de cálculo (Wussing, 1998). Aparecen los cosistas como trabajadores intelectuales, eran los autores de escritos matemáticos en los que se plasmaban las palabras nuevas y los nuevos símbolos matemáticos. Para Wussing (1998) "*la cosa experimentó un floreciente desarrollo, visible interior y exteriormente en sus símbolos, lo que desembocó en la algebrización*" (p. 111). En este contexto, como se verá más adelante, el papel de las obras de Viete sirvieron para realizar un resumen original de las matemáticas del Renacimiento (Ribnikov, p.135). El período de florecimiento del álgebra en Italia finaliza coincidiendo con la publicación de los trabajos de Bombelli(1526-1572), además significó el traslado geográfico del foco de atención del álgebra. Como se ha visto, entre los siglos XV y XVI Italia se había constituido en epicentro de este vasto proceso de enriquecimiento del quehacer matemático. Sin embargo, como señala Wussing (1998):

> Bombelli fue el último algebrista italiano importante de este período. Con el cambio de gravedad económico y el surgimiento de formas de feudalismo y un clericalismo reaccionario, Italia hubo de ceder en el siglo XVII su posición de líder en el ámbito científico, incluido el matemático. El álgebra continuó su creciente desarrollo, pero a partir de entonces fue obra de autores alemanes, holandeses, ingleses y franceses (pp. 132-133)

[2] La españolización de esta palabra es xai, de ahí que la x como letra inicial de este vocablo pasó a convertirse en el símbolo que representaba a la cosa desconocida o incógnita (Andonegui, 2009)

Francois Viete un algebrista irreverente

El francés Francois Viete (1540-1603) puede considerarse un algebrista rebelde de su tiempo, rechaza de plano el nombre de álgebra por provenir del idioma árabe (Boyer, p 387), por lo que invoca el "*arte analítica*" al tomar en cuenta el tipo de razonamiento que se hace en álgebra cuando se resuelven ecuaciones (trabajar suponiendo que la solución existe, derivar una condición necesaria y luego evaluar). Por otra parte, para el tiempo en que Vieta publica su libro intitulado In artem analyticam Isagoge "Introducción al arte analítico", (1591), ya había sido superado el impasse entre Tartaglia y Cardano, lográndose conocer las soluciones de la ecuación cúbica y la cuártica (Ludovico Ferrari por encargo de Cardano), su mérito radica en que reacciona a la manera de hacer álgebra hasta entonces, pues las demostraciones se hacían sobre casos particulares (considérese por ejemplo, el tratado del álgebra de Al-Khoarizmi, ya descrito, en el que se tratan todos los casos para la resolución de ecuaciones de segundo grado, trabajado sobre ecuaciones particulares, pero en su justificación se invocaba su generalización). Es decir, Viete enfrenta la Logística[3] Numerosa (o numeralis), que supone el trabajo con números concretos, con la Logística Speciosa orientada a la generalización de los métodos. Ahí está su valor: el que por primera vez se considerarán las expresiones algebraicas de una manera que se abarcara cualquier caso de ellas

Es por esto que Viete tiene la gran virtud de contribuir para dar el salto de una matemática orientada hacia el trabajo con casos particulares hacia una matemática fundamentada en la generalización, tal proceso es evaluado por (Bell, 2002) como "uno de los pasos más importantes que jamás haya dado la matemática" (p. 130). La introducción de símbolos para representar objetos matemáticos es de vieja data, por ejemplo en la obra magna de Euclides se usa letras para la representación de los triángulos, sus lados y ángulos, también antes que Viete el portugués Pedro Nunes usó las letras para representar las operaciones; sin embargo es Viete quien realiza un giro extraordinario en su obra, pues por vez primera las ecuaciones se trataban de una forma general. Su trabajo se empezó a publicar por partes en 1591 y continuó luego de su muerte. Según Ribnikov (1987) "el surgimiento del cálculo algebraico literal constituye una de las facetas del fenómeno más general y profundo en la historia de las matemáticas que es el surgimiento del álgebra como una ciencia general de las ecuaciones algebraicas" (p. 133)

Figura 1. Francois Viete (1540-1603)
Imagen tomada de http://en.wikipedia.org/wiki/Fran%C3%A7ois_Vi%C3%A8te

[3] Aquí logística se emplea según la acepción griega

Con el trabajo de Viete todas las magnitudes fueron representadas por letras, las variables (incógnitas más propiamente dicho) con las vocales A, E, I, O, U, así como con la letra Y; mientras que para las cantidades conocidas (los parámetros en las ecuaciones) empleó las consonantes. No es el empleo de letras para designar números lo que se destaca en este autor (pues ya se habían empleado) sino su práctica "*como procedimiento general, tanto para los números conocidos como para las incógnitas*" (Bell, 2002, p. 130). Además, como señala Puig (s/f):

> Lo fundamental de este período no es pues el mero hecho de la existencia de letras para representar las cantidades o de signos ajenos a la lengua vernácula para representar las operaciones, sino el que se pueda operar con ese sistema de signos sin tener que recurrir a su traducción a la lengua vernácula (p.14)

Sin embargo, cabe destacar que ésta es un Álgebra en un estado inicial, muy diferente al Álgebra moderna, en ella se mezclan signos y palabras, con fuerte influencia geométrica lo cual, como señala Ríbnikov (1987), la hace muy engorrosa, imperfecta y con grandes insuficiencias; no obstante, fue el lenguaje usado por Fermat para la construcción de la Geometría Analítica, antes de queDescartes expusiera sus trabajos. Una breve descripción del trabajo de Viete es ofrecido por Wussing (1998):

> Utilizó siempre + y – como símbolos de las operaciones, usó la raya para los quebrados y la palabra in como abreviatura para la multiplicación. Sin embargo, no utilizó todavía el signo para la igualdad introducido por Recorde, sino que expresó la igualdad entre dos términos verbalmente por medio de aequibitur o aequale. Los términos relacionados los escribía Vieta uno debajo de otro y los encerraba entre llaves (p. 113)

Por ejemplo, (tomado de Wussing, 1998, p.114), en el lenguaje de de Viete la expresión $\frac{BA}{D}+\frac{BA-BH}{F}=B$ se escribía en la forma $\frac{B\,in\,A}{\mathrm{D}}+\left\{\begin{matrix} B\,in\,A \\ \dfrac{\mathrm{-\,B\,in\,H}}{\mathrm{F}} \end{matrix}\right\} aequale\ B$.

Como se puede observar Viete en su trabajo no incorpora el signo de igualdad, pese a que, como se verá más adelante, para esta época ya había sido introducido y usado explícitamente por R. Recorde en su obra. Los signos + y – que utiliza ya habían sido creados en Alemania por Widmann en 1489 (Bell, 2002: 107).

Igualdad matemática

Para expresar la igualdad matemática en forma retórica se emplearon palabras en diferentes idiomas tales como *aequales, aequantur, esgale, faciunt, ghelijck,* o*gleich*, y también abreviatura *aeq* de la correspondiente palabra en latín.

Los hindúes y árabes expresaban que dos cosas eran iguales colocando una de esas cosas sobre la otra (Bell, p. 137)

Los egipcios usaron la forma hierática de sus jeroglíficos para igualdad, los griegos las dos primeras letras de la palabra, los árabes la última de la suya, hasta que se volvieron al verbalismo total escribiendo igualdad con todas sus letras.

El primer tratado de álgebra escrito en español, intitulado *Libro de Álgebra en Arithmetica y Geometria* (1564), se debe al matemático portugués Pedro Nunes (1502-1578). ParaPastor y Babini (1997), éste es "el primer y más completo tratado de álgebra en español aparecido en el siglo" (p. 21), en él no adopta un símbolo particular para la igualdad sino que emplea la palabra '*ygual*' tal como se aprecia en la figura 2.

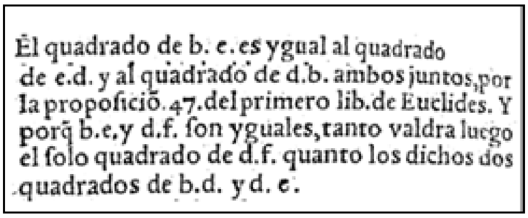

Él quadrado de b. e. es ygual al quadrado de e.d. y al quadrado de d.b. ambos juntos, por la proposició. 47. del primero lib. de Euclides. Y porq̃ b.e. y d.f. son yguales, tanto valdra luego el solo quadrado de d.f. quanto los dichos dos quadrados de b.d. y d. e.

Figura 2. Extracto de la obra de Pedro Nunes
Imagen tomada de http://www.apm.pt/files/177852_C69_4dd7a05861041.pdf

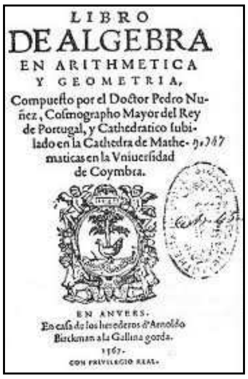


Figura 3. Tratado de Pedro Nunes
Imagen tomada de
http://www.vidaslusofonas.pt/pedro_nunes.htm

Figura 4. Pedro Nunes (1502-1578)
Imagen tomada de:
http://commons.wikimedia.org/wiki/File:Pedro_Nunes_ritratto.jpg

Vasconcelos (2010), basándose en el clásico libro de Historia de las notaciones Matemáticas de Cajori, (1993), realiza un profundo recorrido relacionado con la epistemología del símbolo de igualdad, en éste afirma que en el continente europeo los primeros libros de texto en usar el símbolo "=" fueron los holandeses a través de un libro y un tratado escritos por Stampioen en 1639 y 1640, respectivamente. Luego, *Teutsche Algebra* del suizo Johann Heinrich Rahn (1659) y Leibniz en su *De arte combinatoria* (1666). También, en 1667 Arnauld publica el primer libro parisiense en el que aparece, mientras que en Londres fue Dechales quien lo hizo en 1674.

No obstante, antes de que se generalizase la adopción del actual símbolo de igualdad matemática hubo el desarrollo de algunos otros símbolos para denotarla. En el siguiente cuadro 3 se muestran algunos de estos símbolos matemáticos (Gutiérrez, 2008; Molina y otros, 2007) utilizados para representar la igualdad durante el siglo XV y XVII.

Cuadro 3. Símbolos empleados para representar la igualdad matemática

Símbolo	Representante
[	Johannes Buteo (1492)
||	Whilhelm Holtzmann (1575)
)=(	Leonard y Thomas Digges (1590)
|	Samuel Reyher (1635)
2|2 y ⊔	Pierre Hérigone (1580)
_Λ_	Hugo de Omerique (1634)
—⌒—	Tomás Vicente Tosca (1651)
∝	Francisco Vieta (1540)
ɔo	Rene Descartes (1637)

Como ha quedado en evidencia luego de este breve recorrido,en Matemática el concepto precede al símbolo, es por ello que en el planteamiento de la igualdad, como concepto, se echó mano de la expresión oral y se usaron distintas representaciones hasta que finalmente se convino en usar el símbolo “=”; es posible que este acuerdo, sin decreto oficial, se haya dado por razones prácticas tales como la facilidad de la escritura, ahorro de espacio en el registro escrito, etc.; pero también es posible que fuese el resultado del impacto de algún tipo de liderazgo académico, por ejemplo, para Gutiérrez (2008), la adopción definitiva de este símbolo se debe a que tanto Newton como Leibniz lo usaron en sus trabajos.

La obra de Robert Recorde: oficialización del símbolo de igualdad actual.

Después de la muerte de Bradwardine en 1349 la matemática inglesa no tuvo ningún progreso (Boyer, 1999). Es por ello que a Robert Recorde (1510-1558), matemático y médico inglés puede considerársele como uno de los más importantes cosistas de su época y de su país. En 1557 publica su obra The Whetstone of Witte[4] (La Piedra de afilar el ingenio), según Boyer (1986) “Este título era evidentemente un juego de palabras relativo a la palabra coss, ya que cos es el nombre latino para whetstone o piedra de afilar, y el libro está dedicado a “the cossike practise” es decir al álgebra (p. 369), se convirtió en el primer tratado inglés de álgebra, y en él emplea por primera vez el símbolo de igualdad matemático que, aun cuando las líneas son más largas, es esencialmente el mismo que se usa en la actualidad. Probablemente, el hecho de que Recorde haya escrito en inglés fuese la causa de su poco impacto en el continente (Boyer, 1999) y en consecuencia de la demora para el acogimiento del símbolo de igualdad actual.

De acuerdo con Pimm (2002) la selección del símbolo para denotar la igualdad matemática pudo deberse a razones de tipo icónicas y pictográficas, esto lo dice en función de lo que declara el propio R. Recorde en el epígrafe de este trabajo. Recorde muere en una prisión en 1558 (apenas un año después de la publicación de su libro), no se sabe a ciencia cierta la causa de de su encarcelamiento, pero existen dos hipótesis: razones políticas o religiosas.

Figura 5. Robert Recorde (1510-1558)

Imagen tomada de: http://commons.wikimedia.org/wiki/File:Robert_recorde.jpg

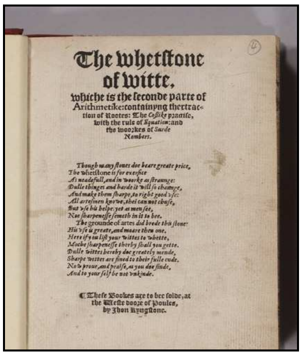
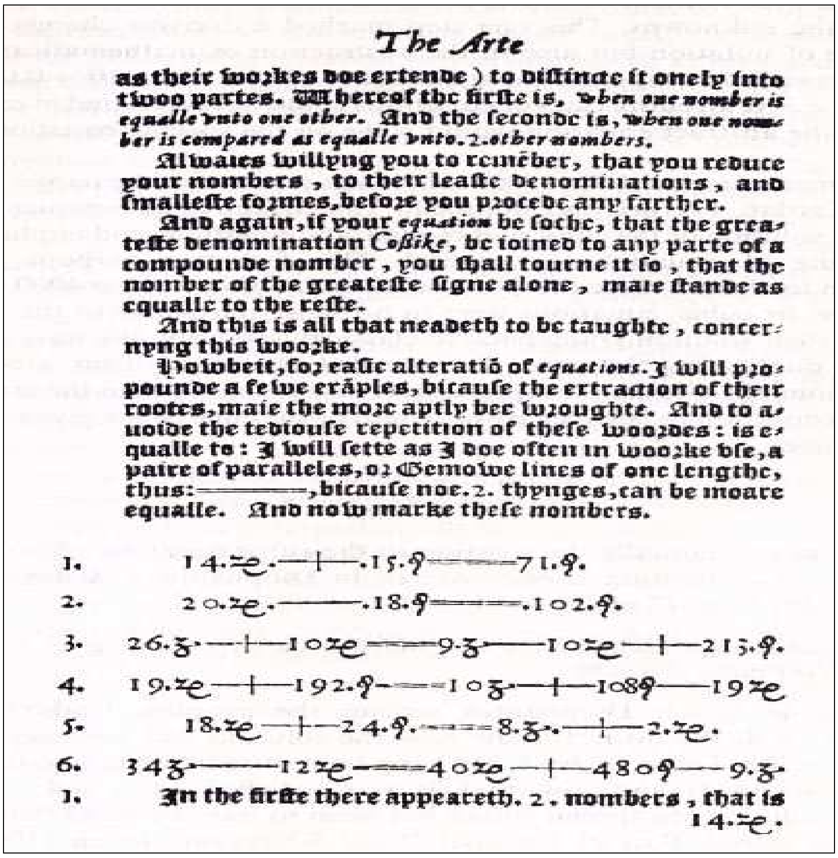


Figura 6. Libro de R. Recorde

Imagen tomada de http://www.maa.org/publications/periodicals/convergence/mathematical-treasures-robert-recordes-whetstone-of-witte

[4]En realidad se trata de una abreviación, el título completo, un poco largo, es: The Whetstone of Witte, whiche is the seconde parte of Arithmeteke: containing the extraction of rootes; the cossike practise, with the rule of equation; and the workes of Surde Nombers

En la siguiente imagen se puede apreciar un fragmento de la obra de Recorde en la que usa el signo de igualdad, obsérvese que los segmentos son de mayor longitud que los correspondientes en la actualidad.


The Arte

as their workes doe extende) to distincte it onely into twoo partes. Whereof the firste is, *when one nomber is equalle unto one other*. And the seconde is, *when one nomber is compared as equalle unto .2. other nombers.*

Alwaies willyng you to remẽber, that you reduce your nombers, to their leaste denominations, and smalleste formes, before you procede any farther.

And again, if your *equation* be soche, that the greateste denomination *Cossike*, be ioined to any parte of a compounde nomber, you shall tourne it so, that the nomber of the greateste signe alone, maie stande as equalle to the reste.

And this is all that neadeth to be taughte, concernyng this woorke.

Howbeit, for easie alteratiõ of *equations*. I will propounde a fewe exãples, bicause the extraction of their rootes, maie the more aptly bee wroughte. And to auoide the tediouse repetition of these woordes: is equalle to: I will sette as I doe often in woorke use, a paire of paralleles, or Gemowe lines of one lengthe, thus: ======, bicause noe .2. thynges, can be moare equalle. And now marke these nombers.

1. 14.ꝛ.—+—.15.ϕ ====== 71.ϕ.
2. 20.ꝛ.——.18.ϕ ====== .102.ϕ.
3. 26.ʒ.—+—10ꝛ ====== 9.ʒ——10ꝛ—+—213.ϕ.
4. 19.ꝛ—+—192.ϕ ====== 10ʒ—+—108ϕ——19ꝛ
5. 18.ꝛ—+—24.ϕ. ====== 8.ʒ.—+—2.ꝛ.
6. 34ʒ——12ꝛ ====== 40ꝛ—+—480ϕ——9.ʒ.

1. In the firste there appeareth. 2. nombers, that is 14.ꝛ.

Fig. 6. Extracto del libro de R. Recorde

Imagen tomada de: http://mathmasterytutoring.wordpress.com/tag/the-whetstone-of-witte/

Otros usos matemáticos del símbolo de igualdad actual

Es interesante saber que el símbolo "=" ya había sido usado, pero con otras interpretaciones muy distintas de la que tiene hoy en día; además de la interpretación dada por Recorde en 1557, según (Gutiérrez, 2008) a este símbolo también se le han asociado los siguientes usos y significados:

- Diferencia aritmética (Francisco Viete, en 1591, en su *In artem analyticen isagoge*)
- Doble signo, más o menos, ±, (Descartes, en 1638)
- Separador de la parte entera y la parte decimal de un número (Johann Caramuel). Por ejemplo, la expresión 34 ═══ 85 significaba lo mismo que el actual 34, 85.
- Indicador del paralelismo entre dos rectas (Dulaurens y S. Reyher)

Además, en la actualidad, es posible agregar el uso dado en informática a través de la escritura, en programación, de sentencias tales como: $x = x + 1$, la cual debe entenderse como la siguiente orden: "*súmele 1 a la antigua variable x y cree una nueva variable x*". En este caso la igualdad sirve para indicar la presencia de un proceso iterativo el cual se cerrará cuando se haya cumplido una determinada condición (por ejemplo que x=1500) o, en todo caso, se mantendrá mientras se cumpla una preestablecida (por ejemplo, x<1500). Como se puede ver esta igualdad tiene la propiedad de ser de asignación, no se trata de una ecuación ni de una identidad, no es reflexiva y es usada para indicar la transición entre una vieja y una nueva condición de la variable x.

Interpretación del Signo de Igualdad

La interpretación del signo de igualdad es un asunto que ha ocupado un lugar importante en los trabajos relacionados con la didáctica del Álgebra y el Pensamiento Algebraico como se desprende del trabajo de Molina (2004), razón que muestra su inseparabilidad y trascendencia al momento de tratar lo concerniente a la enseñanza y el aprendizaje del Álgebra en los primeros niveles de escolaridad.

En el trabajo de González y González (2012) se comprobó, en un contexto de educadores matemáticos en formación inicial, que mayoritariamente prevalecía una visión procedimental del símbolo de igualdad (=) en la cual se enfatiza el aspecto computacional sobre lo estructural (Sfard 1991, en Andonegui, 2009) en el cálculo del resultado de las operaciones. De acuerdo con esto, sería interesante estudiar el papel que, en este sentido, han jugado las calculadoras, pues se cree que el uso convencional de las mismas contribuye a reforzar el signo de igualdad como instrumento para la obtención de una respuesta.

Para Wheeler (1981), citado por Molina, Castro, y Castro (2007) el símbolo de igualdad es uno de los que han sufrido en mayor medida de un mal uso a lo largo de su evolución. A modo de ejemplificación, se ha evidenciado la escritura de “expresiones algebraicas” carentes de sentido matemático como $x + 0 \rightarrow x$ en la cual se confunde el signo de igualdad (=) con el signo de implicación lógica, en otros casos se ha constatado que algunos alumnos frente a una expresión del tipo $x + 6$ escriben $6x$. Este último caso Socas y otros (1998) lo describen como resistencia ante las expresiones abiertas, es decir, la expresión $x + 6$ es vista como incompleta por los estudiantes quienes no aceptan su falta de clausura; el conocimiento adquirido y demostrado aquí, el cual es cierto en contextos numéricos, es que el signo “mas” uniendo dos “cosas” genera una tercera “cosa”; se presenta entonces la necesidad de cerrar la expresión y para ello se recurre al signo de igualdad.

También se ha observado como este símbolo es utilizado para unir partes aisladas de una operación como en $4 + 2 = 6x8 = 48$. En estos casos no se interpreta la equivalencia lógica de este signo, sino como símbolo separador en el proceso de obtención de la respuesta. Esta forma de actuar está en consonancia, según afirma MacGregor (1996), con anteriores aprendizajes escolares consolidados en su estructura cognitiva. Para la autora, ésta y otras dificultades del aprendizaje del Álgebra escolar están relacionadas con conocimientos deficientes de la Aritmética, en este sentido afirman que:

> Los alumnos que no comprenden de modo suficiente las propiedades de los números y las operaciones no reconocen las relaciones y los procedimientos generales. Se les enseña a utilizar el lenguaje algebraico para expresar conceptos que no han desarrollado y relaciones que no comprenden (p. 66).

En relación con estas maneras de proceder de los estudiantes Molina y otros (2007) han clasificado 8 maneras de usar el símbolo de igualdad, las cuales se muestran en el cuadro 4.

Cuadro 4. Diferentes usos dados al símbolo de igualdad

Tipo de uso	Descripción	Ejemplo
Propuesta de actividad de cálculo	Se usa mediante expresiones incompletas que contienen una cadena de números y/o símbolos, junto con símbolos operacionales, seguida a su derecha del signo igual.	$\frac{24}{18}=$ $x(x+1)-2x=$
Operador	Indica la respuesta a un cálculo o simplificación. Predomina una concepción procedimental de los objetos matemáticos (Andonegui, 2009)	$7x3=21$ $x(x+1)=x^2+x$
Separador	Significado otorgado por los alumnos al hacer uso de este signo como separador de los pasos realizados en la resolución de una actividad	$\sqrt{x^2+1}=\sqrt{x}=x^2+1=x=x^2-x+1$ $40+2=42-4=38x2=76$
Expresión de una equivalencia condicional (ecuación)	Equivalencia expresada por medio de este signo, la cual es cierta según el dominio de referencia, es decir puede ser cierta para algún (algunos) valor (valores) de la variable (variables) o ninguno.	$x^3-9=21-4x^2$ $e^x-8=0$
Expresión de una relación funcional o de dependencia	Se refiere al uso del signo para indicar cierta relación de dependencia entre variables o parámetros	$A=\pi.r^2$ $y=-2x+5$
Indicador de cierta conexión o correspondencia	Significado impreciso del signo, que refiere a su uso entre objetos no matemáticos o de distinta naturaleza, como, por ejemplo, entre imágenes o figuras y números, o entre expresiones matemáticas y expresiones no matemáticas	$\Delta = triángulo$ $\propto\propto\propto\propto=4$ $5\,\text{camisas} = \text{Bs}.650$
Aproximación	Corresponde a las situaciones en las que este símbolo relaciona una expresión aritmética y una aproximación de su valor numérico	$\pi=3{,}14$ $\frac{2}{9}=0{,}2$
Definición de un objeto matemático	El signo se utiliza para definir un objeto matemático o asignarle un nombre	$0!=1$ $a^0=1,$ $f(x)=6-x$

Otras dos interpretaciones son reportadas en González y González (2012) referidas a la igualdad como signo de equivalencia entre dos expresiones la cual es cierta para cualquier valor(es) de la(s) letra(s), en este caso se denomina identidad para distinguirla de la ecuación en el cual hay más restricción. Ejemplos de identidad son las siguientes: $(a+b).(a-b)=a^2-b^2$, $Senx.Cosy+Seny.Cosx=Sen(x+y)$.

También desde el punto de vista de los estudiantes, en algunos casos, el signo de igualdad es interpretado como intercambiable o se hace equivalente al signo de implicación lógica; por ejemplo cuando escriben: $8+(2.8)\rightarrow 8+16\rightarrow 24$, o también $8+(2.8)\rightarrow 8+16=24$.

A propósito de este último ejemplo vale la pena señalar otro intercambio entre un símbolo lógico y el signo de igualdad: la suplantación del signo de equivalencia lógica "$\cong$" por el signo de igualdad "=" Esto se ha observado en el proceso de simplificación de fórmulas proposicionales: Por ejemplo, al escribir: $p\rightarrow q=\neg p\vee q$. Tal proceso de simplificación básicamente consiste en realizar un encadenamiento de varias proposiciones lógicamente equivalentes hasta conseguir una proposición “más sencilla” en su escritura. Es probable que esta actividad se confunda con la práctica de resolución de una ecuación en la que se van construyendo ecuaciones equivalentes a la ecuación dada hasta conseguir una del tipo canónica. Se piensa que esto pudiese apuntar a un débil conocimiento en cuanto a la semántica de los signos lógicos más que a un error en el manejo de la sintaxis.

Estos dos últimos ejemplos de reemplazos irregulares de ambos símbolos es evidencia de una notable limitación relacionada con el lenguaje algebraico. En efecto, ambos signos lógicos sirven para enlazar enunciados del tipo proposicional colocados a ambos lados de él, y con esto permiten la construcción de una nueva proposición; mientras que el signo de igualdad adquiere un valor proposicional considerando todo el enlace que el mismo realiza como una totalidad; pero parcialmente, los objetos colocados a sus lados no son proposiciones.

En el caso del cálculo de las derivadas Kieran (1981) provee un ejemplo de un uso irregular del símbolo de igualdad que es muy frecuente en el ámbito universitario:

$$f(x) = \sqrt{x^2+1}$$
$$= (x^2+1)^{1/2}$$
$$= \frac{1}{2}(x^2+1)^{-1/2}D_x(x^2+1)$$
$$= \frac{1}{2}(x^2+1)^{-1/2}(2x)$$
$$= x(x^2+1)^{-1/2}$$
$$= \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$$

Obsérvese como se “enlaza” la función con una derivada parcial y finalmente con su derivada. En función de esta manera de actuar afirma Kieran (1981) que se puede ver como una “tendencia a interpretar el signo igual en términos de un símbolo de operador, aunque a un nivel más sofisticado, más que como un símbolo de una relación de equivalencia” (p, 325). Esta aseveración, realizada hace más de 30 años atrás, pareció constituir una propuesta de investigación para desentrañar ese “nivel más sofisticado”, sería interesante examinarla de acuerdo a los nuevos aportes teóricos de la Educación Matemática para determinar el en qué estado en que se encuentra en la actualidad.

Un caso extraño de confusión en el manejo de signo de igualdad fue proporcionado por un docente amigo. Se planteaba el caso de la resolución de una ecuación de segundo grado, por ejemplo $x^2-5x-14=0$, cuyas soluciones se acostumbra escribirlas como$x=7$ y $x=-2$. Entonces como $7=x$, por transitividad de la igualdad resultaría $7=-2$ lo cual es una contradicción. Obviamente no existe tal contradicción: en primer lugar, debe observarse que no hay un manejo acertado del papel de la letra x[5], que en este caso representa una incógnita, es decir como una letra que representa “uno o varios valores desconocidos que vienen determinados por la imposición de ciertas condiciones” (Esquinas, 2009, p. 144).

[5]En una expresión algebraica, la letra puede jugar distintos papeles: parámetro, incógnita y variable.

Consecuentemente, se trata de un inadecuado manejo de la noción de ecuación: igualdad que es válida sólo para algunos valores de la incógnita que en este caso son 7 y -2, es decir la incógnita puede tener cualquiera de los dos valores, pero una vez que tiene un valor no puede tener el otro simultáneamente. Esquinas (2009) establece una metáfora en la que es posible establecer una correspondencia entre la incógnita de una ecuación y el número(s) solución (o soluciones). En ese sentido plantea que:

> "En el caso de las variables y las incógnitas el signo literal puede representar distintos números, es decir, todo un conjunto de números con una determinada cualidad. Por ello mismo la relación entre el signo y el número no es una aplicación. La variabilidad va asociada a una relación que no es una aplicación, en general, pero una vez restringida a un valor concreto dicha relación es una aplicación inyectiva, como ocurre en el caso del parámetro. En este caso la variabilidad se restringe a una particularización aritmética, aunque sea con un número general" (p. 144)

Pero, aún más, esto se puede revisar desde el punto de vista de la lógica proposicional: en este caso cuando se escribe $x = 7$ y $x = -2$, lo que se quiere decir en realidad es que es verdadera la siguiente proposición: "$x = 7$ es una solución de la ecuación y $x = -2$ es una solución de la ecuación", en razón de lo cual no es legítimo sacar conclusiones operando con contenidos aislados de las proposiciones (en realidad, de forma aislada estas igualdades carecen de sentido). Finalmente, obsérvese que también es verdadera la siguiente proposición: "Si $x = 9$ es solución de la ecuación, entonces $x = 7$ no es solución de la ecuación", sin que de ello se pueda derivar que $x = 7$ no es una solución de la ecuación.

Comentarios finales

A la luz del análisis planteado ha quedado claro el aspecto profundamente humano del proceso de construcción tanto de los objetos algebraicos como su simbolización; y en consecuencia del camino recorrido en el desarrollo del álgebra, esto tiene un significado relevante en la consideración de la trayectoria seguida por la matemática como ciencia, no ha tenido un único sentido, han habido momentos de avances y de retrocesos, e incluso de parálisis. Esto no puede ser descuidado en cualquier discusión didáctica en la Educación Matemática.

Particularmente, en torno al símbolo algebraico de igualdad quedaron en evidencia, por lo menos, cuatro cosas: (1) Luego de ser expresada la igualdad matemática en forma retórica a través de distintas palabras, usando incluso la sincopación de dichas palabras, se recurrió también a distintos símbolos para denotarla, (2) el registro escrito de este símbolo, tal como se conoce actualmente, ya había sido empleado para significar otros objetos matemáticos, (3) luego de la publicación de Recorde hubo algunos usos aislados de este símbolo, pero también hubo que transcurrir aproximadamente 100 años antes de que se lograse su implantación total en el sistema matemáticos de signos, lo cual fue posible debido a distintas razones, entre ellas, por haber sido empleado por connotados matemáticos de la época, como Leibniz y Newton, y (4) jamás pensó Recorde ni quienes lo siguieron que alrededor de este símbolo se acumularan tantas interpretaciones escolares y que fuese motivo de interés para los investigadores dentro del campo de la Educación Matemática, específicamente en lo relacionado con el pensamiento algebraico.

Referencias

Andonegui, M. (2009). *La Matemática de primer año de bachillerato.* XIII Escuela Venezolana para la Enseñanza de la matemática.

Bachelard, G. (2007). *La formación del espíritu científico. Contribución a un psicoanálisis del conocimiento objetivo.* México: Siglo veintiuno editores.

Bell, E. T. (2002). *Historia de las matemáticas* (R. Ortiz, Trad.) (6ª Edición). México: Fondo de cultura económica.

Boyer, C. B. (1999). *Historia de la matemática*. Madrid: Alianza editorial.

Cajori, F. (1993). *A history of mathematical notations.* New York: Dover Publications.

Casalderrey, F. (2009). *Cardano y Tartaglia. La aventura de la ecuación cúbica*. Madrid: Nivola

Esquinas, A. (2009). *Dificultades de aprendizaje del lenguaje algebraico: del símbolo a la formalización algebraica. Aplicación a la práctica docente*. Memoria de tesis doctoral (Director: Félix E. González J), Madrid, España.

Filloy, E. (1993). Tendencias cognitivas y procesos de abstracción en el aprendizaje del álgebra y de la Geometría. *Enseñanza de las Ciencias*, 11, 2, pp.160-166.

González, A. y González F. (2012). Exploración del Pensamiento Algebraico de Profesores de Matemática en Formación. La Prueba EVAPAL". *Scientiae*. [Revista en línea]. Disponible en: http://www.ulbra.br/actascientiae/edicoesanteriores/acta_scientiae_v.13_%20n1_2011.pdf , [Consulta, 2014, enero, 10].

Gutiérrez, V. (2008). *Robert Recorde: el creador del signo igual.* [Artículo en línea], disponible en. http://revistasuma.es/revistas/57-febrero-2008/robert-recorde-el-creador-del.html, [Consulta, 2014, enero 11].

Infante, L. y Hurtado, C. (2010). *Significados del signo igual en la resolución de ecuaciones de primer grado.*Trabajo de grado, Universidad del Valle, Colombia.

Kieran, C. (1981). Concepts associated with the equality symbol.*Educational Studes in Mathematics.* Num. 12, pp. 317-326.

MacGregor, M. (1996). Aspectos curriculares en las materias aritmética y álgebra. Monográfico: El futuro del álgebra y la aritmética, *UNO*, (9), pp. 65-69.

Molina, M. (2004).*Resolución de igualdades numéricas por estudiantes de tercer grado. Un estudio sobre la comprensión del signo igual y el desarrollo del pensamiento relacional*. Trabajo de Investigación tutelada, España.

Molina, M., Castro, E. y Castro, E. (2007). Historia del signo igual. En M. Guzmán, *Humanidades y Ciencias. Aspectos Disciplinares y Didácticos. Homenaje a la Profesora Ana Vilches Benavides* (pp. 249-261). Granada: Editorial Atrio.

Nesselman, G. H. F. 1842. *Versuch einer Kritischen Geschichte der Algebra, 1. Teil. Die Algebra der Griechen*. Berlin: G. Reimer.

Pastor, J. R. y Babini, J. (1997). *Historia de la Matemática Volumen II. Del renacimiento a la actualidad* (3ª edición). Barcelona: Editorial Gedisa

Pierce, C.S. (1987). *Obra lógico-semiótica* [Edición de Armando Sercovich]. Madrid: Taurus.

Pimm, D. (2002) *El lenguaje matemático en el aula*. (3era ed) Madrid: Ediciones Morata

Puig L. (s/f). Historia de las ideas algebraicas: componentes y preguntas de investigación desde el punto de vista de la matemática educativa.

Puig, L. (1998). Componentes de una historia del álgebra. El texto de Al-Khwârizmî restaurado. En Hitt (ed.), *Investigaciones en Matemática Educativa II*, México, Iberoamérica.

Puig, L. (2003). Signos, textos y sistemas matemáticos de signos. En: Filloy, E. (Coord.) *Matemática educativa. Aspectos de la investigación actual*. México: Fondo de Cultura Económica.

Ríbnikov, K. (1987). Historia de las Matemáticas. Moscú: Mir

Sessa, C. (2005). Iniciación al estudio didáctico del álgebra. Orígenes y perspectivas. Buenos Aires: Libros del Zorzal

Sfard, A. (1991). On the dual nature of mathematical conceptions: reflections on processes and objects as different sides of the same coin. *Educational Studies in Mathematics, 22*, 1-36.

Socas, M., Camacho, M. y Hernández, J. (1998). Análisis didáctico del lenguaje algebraico en la enseñanza secundaria. *Revista Universitaria de formación del profesorado, nº 32*, mayo/agosto 1998, pp.73-86. [Documento en línea].Disponible en http://documat.unirioja.es/servlet/articulo?codigo=117980. [Consulta, 2014, enero, 10]

Vasconcelos, V. (2010). Um passeio pela historia de simbolos que representaram igualdade Matemática. *Revista brasileira de Historia da Matemática*, vol 10, N° 19, 75-87

Vergnaud, G.; Cortes, A.; Artigue, F. (1987). Introduction l'algebre aupres de debutants faibles. Problemes epistemologiques et didactiques. Actes du colloque de Sevres. Didactique et acquisition des connaissances scientifiques

Wussing, H. (1998). Lecciones de historia de las Matemáticas. España: Siglo veintiuno editores, S.A.

Andrés González Rondelles es MSc. en Educación, Mención Enseñanza de la Matemática. Egresado de la Universidad Pedagógica Experimental Libertador (UPEL, Núcleo Maracay, Estado Aragua, Venezuela); sus asuntos de interés indagatorio se ubican en el campo del Álgebra y su Didáctica; es Doctorante del Doctorado en Educación de la Universidad Central de Venezuela. **agorondell@yahoo.es**

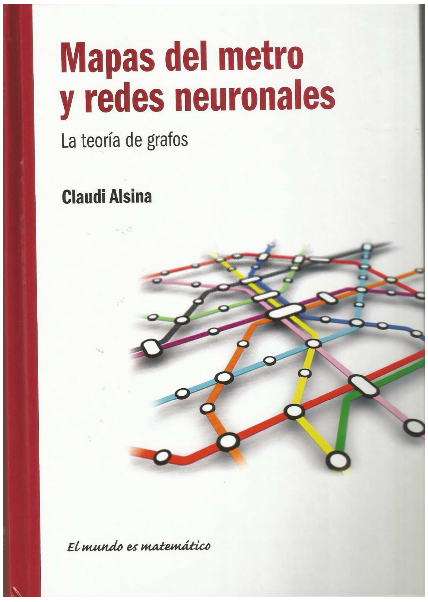
Fredy Enrique González es Doctor en Educación; se desempeña como formador de profesores de Matemática en la Universidad Pedagógica Experimental Libertador (UPEL, Núcleo Maracay, Estado Aragua, Venezuela); es Coordinador Fundador del Núcleo de Investigación en Educación Matemática “Dr. Emilio Medina” (NIEM); además coordina el Proyecto de Reconstrucción Histórica de la Educación Matemática en Venezuela, el cual forma parte de una indagación de más largo alcance intitulada Historia Social de la Educación Matemática en América Latina (HISOEM-AL). **fredygonzalez1950@gmail.com**

UNIÓN
REVISTA IBEROAMERICANA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA

www.fisem.org/web/union

ISSN: 1815-0640
Número 37. Marzo de 2014
páginas 199-200

Libros



Mapas del metro y redes neuronales. La teoría de grafos.

Autor:
Claudi Alsina.

Editorial:
Printed Industria Gráfica Newco.

ISBN: 978-84-473-6960-7

Edición: 2010.

Páginas: 143

Transcribo parte del prefacio de este interesante libro: "*Le invitamos a descubrir que estos grafos son potentes por su extraordinaria sencillez, que son esquemas que permiten resolver muchos problemas interesantes y forman ya parte, con luz propia, de las matemáticas actuales*". El autor menciona la importancia de los grafos y dice que aún está pendiente el aprovechamiento de los grafos en los distintos niveles educativos, ya que promueven el aprendizaje de formas de razonamiento que son genuinamente matemáticas y tienen un alto valor formativo.

El libro se compone de 5 capítulos, un epílogo y un anexo, a continuación y de manera sucinta los presento:

<u>Capítulo 1</u>: Invitación a los grafos.

Inicia el capítulo con el Problema de Königsberg, primero en orden cronológico dentro de esta teoría. Se presentan conceptos básicos de esta teoría, entre otros, árboles y grafos planos.

<u>Capítulo 2</u>: Grafos y colores.

Trabaja con el coloreo de mapas y en particular presenta el desarrollo histórico de esta cuestión.

<u>Capítulo 3</u>: Grafos, circuitos y optimización.

Muestra lo importante que es esta teoría para optimizar rutas, planificar tiempos y evaluar costos.

Capítulo 4: Grafos y geometría.

Presenta relaciones entre distintos objetos geométricos y los grafos

Capítulo 5: Aplicaciones sorprendentes de los grafos.

Presenta algunas de las aplicaciones de los grafos, por ejemplo, en internet, en química y física, en arquitectura y urbanismo, enredes sociales

En el epílogo se hace hincapié en la simplicidad que implica el trabajar con grafos y menciona lo gratificante que sería que quién lea este libro se sienta motivado a buscar más sobre este apasionante tema de la matemática.

Anexo: Grafos, conjuntos y relaciones.

Se dan relaciones de equivalencia, de orden, aplicaciones y finaliza con conjuntos y grafos borrosos.

Concluyo esta breve reseña citando textualmente lo escrito por el autor en la página 115 de este apasionante libro, el que los invito a leer:

> “El camino de la educación debe permitir una formación de calidad para todos y asegurar también la actualidad de todo lo que se explica y aplica. No es posible que los currículos oficiales queden anclados en temas milenarios o de hace siglos y que no sean permeables a temáticas que siendo formativas tratan problemas de la máxima actualidad”.

Prof. Claudia Reyes.
Dpto. de Matemática.
Universidad Nacional del Comahue.
Argentina.

REVISTA IBEROAMERICANA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA
www.fisem.org/web/union

ISSN: 1815-0640
Número 37. Marzo de 2014
páginas 201-202

Educación en la Red:

Matemática en la Escuela Primaria

http://mariamatica.blogspot.com.ar

Comienzo una breve reseña de esta interesante página transcribiendo a continuación y de manera textual la frase con la que se presenta a la misma.

"Cuando enseñar es una aventura que se planifica y se sueña de antemano para que sea fructífera, el aula se torna en un espacio para compartir con alegría lo que se va descubriendo con asombro"

Elegí este comienzo porque considero que en esta frase se pone de manifiesto un atrayente modo de hacer matemática en todos los niveles educativos.

En la página principal se encuentran, entre otros, algunos temas centrales, que haciendo click en cada uno de ellos, nos permite acceder a los distintos links que nos ofrecen distinto tipo de actividades. Dentro de los que se puede citar:

- Cálculo mental reflexivo con naturales.
- Los algoritmos de las operaciones.
- Construcción del sentido de las operaciones.
- Divisibilidad
- El proyecto cifras de España. Recursos TIC
- La enseñanza de la geometría.

A continuación de los anteriores se encuentran los siguientes links:

- Matechavos. Sitio web interactivo de México dirigido a niños entre 6 y 12 años desarrollada por el Instituto de Matemática y la Dirección General de Servicios de Cómputo Académico de la Universidad Autónoma de México. Forma parte del programa Universitario de Matemática Asistida por Computadora (PUEMAC) y proporciona un espacio de Internet donde los niños pueden hacer matemática, enfrentar desafíos, tomar decisiones, reflexionar sobre ellas y desarrollar nuevas estrategias.
- Un acceso a libros que se pueden descargar de manera gratuita que, según se indica, contienen desafíos para los distintos cursos de escolaridad primaria. La descarga se realiza desde el blog *La Caricia de las Letras*, cuyo link lo encontramos en la página.

En la derecha de la página se encuentran los siguientes blogs:

- Blog para la enseñanza de la Matemática en el nivel inicial. Se presentan distintas actividades bajo el título *Un universo de números donde habitan los peques*.
- Blog para enseñar creativamente matemática en el nivel medio. Al acceder a este link se encuentran las evaluaciones PISA, se puede acceder a las secuencias didácticas del portal EDUC-AR y también a los libros de la Serie Propuestas de Enseñanza de UNICEF.

Debajo de los blogs anteriores se indican una serie de accesos bajo el nombre de *entradas populares*, algunos de ellos son:

- Cuadernos para el aula: es un complemento de la propuesta curricular y los NAP (Núcleo de Aprendizajes Prioritarios) en la Enseñanza Primaria Argentina.
- Jugando con dobles y mitades. Esto se plantea a partir de juegos y otras actividades.
- La banda numérica de primer grado: portador numérico que permite que los alumnos establezcan relaciones entre los números, encuentran regularidades y realicen cálculos.
- Método Singapur. Todos pueden aprender matemática. Esta basado en habilidades y resolución de problemas.
- La enseñanza de la división. Se encuentran orientaciones didácticas y la construcción del sentido de esta operación.
- La lotería para aprender los números. Es una secuencia didáctica que gira en torno a este juego.
- Los números decimales están en lo cotidiano. Muestran los primeros acercamientos a este campo numérico.
- Banco de recursos y problemas para enseñanza de matemática seleccionados por escuelas de España. Hay enlaces de la Web de Colegios de España que permiten acceder a muchos recursos para explorar y seguramente encontrar algo para llevar la diversidad necesaria a las aulas como propuesta que estimule el pensamiento reflexivo y la acción de nuestros alumnos.

Los invito a explorar esta página ya que es muy poco lo que yo he mencionado en esta reseña con respecto a todo lo que allí se puede encontrar y disfrutar.

Prof. Lorena Alfonso.
Dpto. de Matemática.
Universidad Nacional del Comahue.
Argentina.

UNIÓN
REVISTA IBEROAMERICANA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA

ISSN: 1815-0640
Número 37. Marzo de 2014
páginas 203-208

www.fisem.org/web/union

La Fundación Canaria Carlos Salvador y Beatriz ha concedido 94 ayudas a estudiantes de las Islas

Siguen las buenas noticias de la Fundación Canaria Carlos Salvador y Beatriz: ha concedido 94 ayudas a estudiantes de las Islas

- **Con un presupuesto de 23.800 € aportado sin contar con ayudas institucionales.**
- **Se desbordaron las solicitudes: 624.**

Sin duda ha sido el asunto principal de la Fundación durante el 2013: ayudar, en la medida de sus posibilidades, a los alumnos/as de las Islas Canarias cuyas familias están seriamente afectadas por la crisis económica que nos azota desde hace años.

Los altos índices de paro y los menores recursos dedicados a la enseñanza pública son dos de sus efectos más notables. Por ello, y para el curso 2013-2014, el Patronato de la Fundación aprobó destinar a ayudas una partida de 23.800 € (lo que representa un incremento de 4.400 € con relación a la convocatoria anterior). Ello ha permitido adjudicar un número de ayudas que ha llegado a un total de 94 repartidas en seis de las siete islas, lo que representa un incremento de 22 ayudas.

Se presentaron 624 solicitudes y se asignó a cada una de las islas un número de ayudas que está relacionado con el número de solicitudes presentadas en ella.

Las solicitudes por islas fueron:

Isla	Solicitudes	Asignación	Variación
Tenerife	369	57	+ 12
Gran Canaria	138	22	+ 11
La Palma	64	10	-2
Fuerteventura	15	3	+ 3
Lanzarote	3	1	-2
El Hierro	4	1	0

En cuanto a los criterios de valoración, se ha tenido en cuenta el expediente académico, el número de miembros de la familia, los hermanos que estudian, la distancia del domicilio al centro de estudios, el número de miembros de la familia que trabajan, la ayuda concedida el curso anterior y la valoración de la propia Fundación hace a través de la información aportada por los centros. Toda esa información se ha introducido en una Base de Datos para designar a los más necesitados y con mayores merecimientos.

Salvador Pérez explica el proyecto de la Fundación en Televisión

La mayoría de las solicitudes reunían las condiciones de la convocatoria: dificultades económicas y buena trayectoria académica. La comisión encargada de la selección, informó al Patronato de la Fundación de la gran cantidad de situaciones de extrema necesidad que no pudieron ser atendidas.

Las ayudas se distribuyeron en 39 de los 88 municipios de las islas así como en 42 centros educativos. Las cuantías se cifraron en 400, 300 y 200 € según los casos.

La Fundación Canaria Carlos Salvador y Beatriz que parte de la tragedia (la muerte, en accidente de tráfico con 27 y 25 años, de los únicos hijos de Salvador Pérez y Aurora Estévez, profesores canarios con amplia trayectoria) y llega a la esperanza de un mundo mejor por medio de los necesarios caminos de la Educación y la Cultura. La misma fue aprobada el 24 de febrero de 2006 con el Nº 225 y es una "entidad sin fines lucrativos" con el CIF -38837589. Sus ingresos provienen de las aportaciones voluntarias de sus socios y que puede ser utilizada como desgravación en el IRPF (Impuesto de la Renta de las Personas Físicas) en la declaración de Hacienda.

Las frases de que "*Con poco se puede hacer mucho*", "*Contigo sumar es multiplicar*" y "*Tu ayuda llega*" son el mejor resumen de una actividad entusiasta y laboriosa: no recibe ninguna ayuda, ni subvención oficial, ni tiene empleados, ni local social. Todo el trabajo lo realizan las gentes de su Patronato de forma altruista.

Material escolar entregado en una escuela carenciada

Aunque la Fundación, visto el cariz de los acontecimientos de la crisis en Canarias y España ha decidido dedicar sus esfuerzos a la Educación y Cultura en las islas, hay que resaltar que en sus ocho años de actividades ha trabajado en varios países de América con la construcción de escuelas en Paraguay con presupuesto de 14.400 € y otra, en Perú, con presupuesto de 7.500 €, además de 68 envíos de material escolar a lugares recónditos de cuatro países sudamericanos, la creación de una línea de becas a indígenas de Paraguay por un montante de 7.245 € y tres años de duración, Jornadas Médicas en Conchud (Perú), publicación de libros, mobiliario a dos escuelas, subvención a la revista digital UNIÓN que edita la Federación Iberoamericana de Sociedades de Educación Matemática (FISEM) y otras muchas actividades educativas y culturales.

Nuestros objetivos se van cumpliendo y en esa dirección seguiremos con la ayuda de las personas que han decidido aportar su contribución económica para compartirlos con nosotros. A todos ellos, gracias en nombre de cuantos han sido beneficiados.

A Fundação Canaria Carlos Salvador e Beatriz tem concedido 94 ajudas a estudantes das Ilhas

Seguem as boas notícias da Fundação Canaria Carlos Salvador e Beatriz: tem concedido 94 ajudas a estudantes das Ilhas.

- **Com um orçamento de 23.800 € contribuído sem contar com ajudas institucionais.**
- **Se desbordaron as solicitações: 624.**

Sem dúvida tem sido o assunto principal da Fundação durante o 2013: ajudar, na medida de suas possibilidades, aos alunos/as das Ilhas Canárias cujas famílias estão seriamente afectadas pela crise económica que nos açoita desde faz anos.

Os altos índices de desemprego e os menores recursos dedicados ao ensino público são dois de seus efeitos mais notáveis. Por isso, e para o curso 2013-2014, o Patronato da Fundação aprovou destinar a ajudas uma partida de 23.800 € (o que representa um incremento de 4.400 € com relação à convocação anterior). Isso tem permitido adjudicar um número de ajudas que tem chegado a um total de 94 repartidas em seis das sete ilhas, o que representa um incremento de 22 ajudas.

Apresentaram-se 624 solicitações e atribuiu-se à cada uma das ilhas um número de ajudas que está relacionado com o número de solicitações apresentadas nela.

As solicitações por ilhas foram:

Ilha	Solicitações	Atribuição	Variação
Tenerife	369	57	+ 12
Gran Canaria	138	22	+ 11
La Palma	64	10	-2
Fuerteventura	15	3	+ 3
Lanzarote	3	1	-2
El Hierro	4	1	0

Quanto aos critérios de valoração, teve-se em conta o expediente académico, o número de membros da família, os irmãos que estudam, a distância do domicílio ao centro de estudos, o número de membros da família que trabalham, la ayuda concedida el curso anterior y la valoración de la propia Fundación hace a través de la información aportada por los centros. Toda esa información se ha introducido en una Base de Datos para designar a los más necesitados y con mayores merecimientos.

Salvador Pérez explica o projecto da Fundação em Televisão

A maioria das solicitações reuniam as condições da convocação: dificuldades económicas e boa trajectória académica. A comissão encarregada da selecção, informou ao Patronato da Fundação da grande quantidade de situações de extrema necessidade que não puderam ser atendidas.

As ajudas distribuíram-se em 39 dos 88 municípios das ilhas bem como em 42 centros educativos. As quantias se cifraron em 400, 300 e 200 € segundo os casos.

A Fundação Canaria Carlos Salvador e Beatriz que parte da tragédia (a morte, em acidente de tráfico com 27 e 25 anos, dos únicos filhos de Salvador Pérez e Aurora Estévez, professores canarios com ampla trajectória) e chega à esperança de um mundo melhor por médio dos necessários caminhos da Educação e a Cultura. A mesma foi aprovada o 24 de fevereiro de 2006 com o Nº 225 e é uma “entidade sem fins lucrativos” com o CIF -38837589. Seus rendimentos provem das contribuições voluntárias de seus sócios e que pode ser utilizada como desgravación no IRPF (Imposto da Renda das Pessoas Físicas) na declaração de Fazenda.

As frases de que “Com pouco pode-se fazer muito”, “Contigo somar é multiplicar” e “Tua ajuda chega” são o melhor resumem de uma actividade entusiasta e laboriosa: não recebe nenhuma ajuda, nem subvenção oficial, nem tem empregados, nem local social. Todo o trabalho o realizam as gentes de sua Patronato de forma aaltruista.

Material escolar entregado numa escola carenciada

Ainda que a Fundação, visto o cariz dos acontecimentos da crise em Canárias e Espanha tem decidido dedicar seus esforços à Educação e Cultura nas ilhas, há que realçar que em seus oito anos de actividades tem trabalhado em vários países de América com a construção de escolas em Paraguai com orçamento de 14.400 € e outra, em Peru, com orçamento de 7.500 €, além de 68 envios de material escolar a lugares recónditos de quatro países sudamericanos, a criação de uma linha de bolsas a indígenas de Paraguai por um montante de 7.245 € e três anos de duração, Jornadas Médicas em Conchud (Peru), publicação de livros, mobiliário a duas escolas, subvenção à revista digital UNIÃO que edita a Federação Iberoamericana de Sociedades de Educação Matemática (FISEM) e outras muitas actividades educativas e culturais.

Nossos objectivos vão-se cumprindo e nessa direcção seguiremos com a ajuda das pessoas que têm decidido contribuir sua contribuição económica para os compartilhar conosco. A todos eles, obrigado em nome de quantos têm sido beneficiados.

REVISTA IBEROAMERICANA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA

www.fisem.org/web/union

ISSN: 1815-0640
Número 37. Marzo de 2014
página 209

Convocatoria

Dirección de la Revista Digital Unión

Período 2015-2017

La Dirección de la revista UNION, que avala y nombra la Junta de Gobierno de la Federación Iberoamericana de Sociedades de Educación Matemática (FISEM), ha de convocarse cada tres años.

La actual dirección ejercida por Norma Susana Cotic y Teresa Claudia Braicovich de Argentina, finaliza su mandato en diciembre de 2014, por lo que se realiza la convocatoria de candidaturas para el periodo 2015-2017.

Los profesores o profesoras interesados en participar en esta convocatoria deberán enviar una solicitud a la Presidenta de la FISEM, con copia a la Secretaría General de la FISEM, **antes del 30 de septiembre de 2014**.

El procedimiento y los documentos que deben presentarse son los siguientes:

- Solicitud dirigida a la Presidenta de la FISEM en la que consten al menos estos datos: apellidos y nombres completos, domicilio, Sociedad federada a la que pertenece, E-mail, situación profesional y lugar de trabajo.
- Certificado del Secretario de su Sociedad en el que conste su condición de socio activo así como su antigüedad como tal que debe ser superior o igual a cinco años.
- Una memoria de un máximo de diez folios (tamaño A4) en la que exponga la orientación que desea dar a la revista así como las secciones fijas que va a crear y otros datos que aclaren la línea que tiene previsto aplicar.
- Currículum vítae (Breve resumen con un máximo de tres folios A4).

La dirección de la revista UNIÓN estará limitada a dos periodos, ejercidos de forma continuada.

Las solicitudes y la documentación se enviarán por e-mail a la Presidenta de la FISEM a la dirección crccrespo@gmail.com, con copia al Secretario General de la FISEM a la dirección sg@fisem.org

Todas las solicitudes recibidas serán posteriormente enviadas a la Junta de Gobierno de la FISEM para que decida cuál es la candidatura que presenta el programa más adecuado a los fines de la Federación.

UNIÓN
REVISTA IBEROAMERICANA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA
www.fisem.org/web/union

ISSN: 1815-0640
Número 37. Marzo de 2014
páginas 211-214

Convocatorias y eventos

XXVII Jornada de Matemática de la Zona Sur

UNIVERSIDAD CATÓLICA DE TEMUCO

Organiza: Universidad Católica de Temuco.
Lugar: Centro de Eventos Trailanqui, Temuco, Chile.
Fecha: 23 al 25 abril de 2014.
Información: **http://www.uct.cl/jmzs2014**

SBEM-SP Sociedade Brasileira de Educação Matemática Regional São Paulo

XII ENCONTRO PAULISTA DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA - XII EPEM
V FÓRUM PAULISTA DAS LICENCIATURAS EM MATEMÁTICA – V FPLM

Organiza: Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia de São Paulo-
Lugar: Campus Birigui. San Pablo.
Fecha: 1 al 3 de mayo de 2014.
Información: **http://bri.ifsp.edu.br/portal/**

V Jornada Nacional de Educación Matemática
XVIII Jornada Regional de Educación Matemática

Convoca: Universidad de Passo Fundo
Lugar: Passo Fundo. RS.
Fecha: 5 al 7 de mayo de 2014.
Información: **http://www.upf.br/jem**

INTERNATIONAL CONFERENCE ON EDUCATION IN MATHEMATICS, SCIENCE & TECHNOLOGY
ICEMST2014
MAY 16 - 18, 2014
KONYA / TURKEY

Organiza: Necmettin Erbakan University
Lugar: Konya. Turquía.
Fecha: 16 al 18 de mayo de 12014.
Información: **http://www.icemst.com/**

V Reunión Pampeana de Educación Matemática

Organiza: Universidad Nacional de La Pampa.
Lugar: Santa Rosa, La Pampa. Argentina.
Fecha: 20 al 22 de agosto de 2014.
Información: **http://repem.exactas.unlpam.edu.ar**

Lugar**:** Campus Campo Mourão.
Convoca**:** Universidade Estadual do Paraná - Campus Campo Mourão
Fecha: 4 al 6 de septiembre de 2014.
Información: **http://www.fecilcam.br/eventos/index.php/eprem/xiieprem**

PRIMER ENCUENTRO COLOMBIANO DE EDUCACIÓN ESTOCÁSTICA

Convoca: Universidad Pedagógica Nacional
Lugar: Bogotá. Colômbia
Fecha: 10 a 12 de septiembre de 2014
Información: **http://www.encoedest.org/**

Organiza: Sociedade Brasileira de Educação Matemática. Regional DF.
Lugar: Brasilia.
Fecha: 19 al 21 de setiembre de 2014.
Información: **http://www.sbemdf.com/index.php/home/viebrem/**

XI Congreso Argentino de Educación Matemática

Lugar**:** Universidad Nacional de San Juan. Argentina.
Convoca**:** Sociedad Argentina de Educación Matemática.
Fecha: 2 al 4 de octubre de 2014.
Información: **www.soarem.org.ar**

7º ENCONTRO LUSO-BRASILEIRO DE HISTÓRIA DA MATEMÁTICA

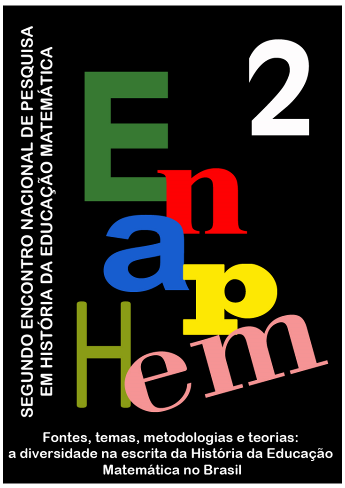
Convoca**:** Sociedade Portuguesa de Matemática. Seminário Nacional de História da Matemática Sociedade Brasileira de História da Matemática.
Lugar: Óbidos. Portugal.
Fecha: 15 a 19 de octubre de 2014
Informació**:** **http://www.spm.pt/arquivo/1105**

MATEMÁTICA NA ESCOLA

10 ANOS DO PPGEMAT - UFRGS

20 A 22 DE OUTUBRO DE 2014 - PORTO ALEGRE/RS

Lugar: Puerto Alegre. Brasil.
Convoca: Programa de Pós-Graduação em Ensino de Matemática da UFRGS
Fecha: 20 al 22 de octubre de 2014
Información: **http://www.mat.ufrgs.br/~ppgem/10anos**



II ENCONTRO NACIONAL DE PESQUISA EM HISTÓRIA DA EDUCAÇÃO MATEMÁTICA II ENAPHEM

Lugar: Universidade Estadual Paulista (UNESP). Bauru. SP
Fecha: 31 de octubre al 2 de noviembre de 2014.
Información: **http://www2.fc.unesp.br/enaphem/index.php**

"Avanzando juntos hacia las Metas Educativas Iberoamericanas 2021"
Lugar**:** Buenos Aires. Argentina.
Convoca**:** Organización de Estados Iberoamericanos (OEI).
Fecha: 12 al 14 de noviembre de 2014.
Información: **http://www.oei.es/congreso2014**

AÑO 2015

AÑO 2017

En el mes de julio en Madrid:

VIII CIBEM

Convoca la Federación Iberoamericana de Sociedades de Educación Matemática (FISEM)
www.fisem.org

REVISTA IBEROAMERICANA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA

www.fisem.org/web/union

ISSN: 1815-0640
Número 37. Marzo de 2014
páginas 215-216

Normas para publicar en Unión

1. Los trabajos para publicar se deben enviar a **union.fisem@sinewton.org** con copia a **revistaunion@fisem.org**. Deben ser originales y no estar en proceso de publicación en ninguna otra revista. Los artículos recibidos serán sometidos a un proceso de evaluación, en función de los resultados de la misma el Comité Editorial decidirá que el trabajo se publique, con modificaciones o sin ellas, o que no se publique.
2. Los artículos remitidos para publicación deben ser escritos en Word, preferentemente usando la plantilla establecida al efecto (descargar plantilla) y, en todo caso, cumpliendo las siguientes normas: letra tipo **arial**, tamaño **12 puntos**, interlineado simple, los cuatro márgenes de 2,5 cm., tamaño DIN A-4. La extensión no debe ser superior a las 25 páginas, incluyendo figuras, que deben estar situadas en el lugar del texto donde deben ser publicadas. La simbología matemática necesaria deberá ser escrita con el editor de ecuaciones de Word, se insertará como una imagen o se realizarán utilizando los símbolos disponibles en el juego de caracteres “Arial”. Es importante no cambiar el juego de caracteres, especialmente **evitar el uso del tipo “Symbol”** u otros similares.
3. Las **ilustraciones y fotografías** deben estar situadas en el lugar del texto donde deben ser publicadas. Si es posible, los “pie de foto” se escribirán dentro de un “cuadro de texto” de Word (con o sin bordes) que estará “agrupado” con la imagen de referencia. Se deben numerar usando: **Figura 1, Figura 2,… Tabla 1, Tabla 2,…(Arial, negrita, tamaño 10)**
4. El artículo debe tener un **resumen en español, en portugués y en inglés**, cada uno de los cuales tendrá una longitud máxima de 10 líneas.
5. Teniendo en cuenta el carácter internacional de la revista, se hace indispensable que cuando los autores se refieran a un determinado sistema educativo nacional lo hagan constar expresamente y que siempre que se trate de un nivel educativo se indique la edad normal de los alumnos, lo que permitirá la comparación con el sistema educativo nacional del lector.
6. Los datos de identificación de los autores deben figurar solamente en la última página con el fin de garantizar el anonimato en el proceso de evaluación, deben constar los siguientes datos:
    - **De contacto**: nombre, dirección electrónica, dirección postal, teléfono.
    - **Para la publicación**: título o títulos, institución o instituciones a las que pertenece, lugar de residencia, títulos, publicaciones, así como una breve reseña biográfica de no más de ocho líneas.
7. Las referencias bibliográficas se incluirán al final del trabajo (y antes de la hoja de datos de autor) y deben seguir los formatos que se indican a continuación:

Para libro:

Bourbaki, N. (1972). *Elementos de historia de las matemáticas*. Madrid: Alianza.

Para capítulo de libro, actas de congreso o similar:

Fuson, K. (1992). Research on whole number addition and subtraction. En Grouws, D. (ed.) *Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning*, 243-275. MacMillan Publishing Company: New York.

Para artículo de revista:

Otte, M. (2003). Complementarity, sets and numbers. *Educational Studies in Mathematics*, 53, 203–228.

Para artículo de revista electrónica o información en Internet:

Guzmán Retamal, I. (2009). *Actividades Geométricas en la enseñanza. Análisis desde el punto de vista cognitivo.* UNIÓN [en línea], 19. Recuperado el 15 de octubre de 2009, de **http://www.fisem.org/paginas/union/revista.php**

Las referencias bibliográficas dentro del texto deben señalarse indicando, entre paréntesis, el autor, año de la publicación y página o páginas, por ejemplo (Godino, 1991, p. 14-18)

NOTA: Las normas que se indican en los puntos 2, 3 y 7 pretenden dar uniformidad en la redacción a los trabajos recibidos y simplificar así el trabajo de composición y maquetación de la revista. Si alguien tiene dudas sobre su aplicación, puede dirigir sus preguntas (lo más concretas posible) a **revistaunion@fisem.org**