UNIÓN

REVISTA IBEROAMERICANA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA

Año XI – Número 41 – Marzo 2015

Monográfico: FISEM y Sociedades que la integran

ÍNDICE

CRÉDITOS Pág. 3

EDITORIAL Pág. 5

Firma Invitada: La lectura literaria en la enseñanza de la matemática en el nivel secundario: vínculos entre campos, canon de lecturas posibles
Cristina Ochoviet Pág. 9

ARTÍCULOS

Dificultades de los alumnos para articular representaciones gráficas y algebraicas de funciones lineales y cuadráticas

María E. Díaz Lozano, Egle E. Haye, Fabiana Montenegro, Luis M. Córdoba Pág. 20

Saberes matemáticos na ação cidadã: conhecimento de números decimais de jovens e adultos

Valdenice Leitão da Silva,Rute Elizabete de Souza Rosa Borba,

Carlos Eduardo Ferreira Monteiro Pág. 39

Génesis Instrumental: el caso de la función cuadrática

Jesús Victoria Flores Salazar Pág. 57

Projeto “Ensinar e Aprender” em São Paulo: formação continuada em debate

Sandra de Fátima Tavares Rodrigues Tonon, Ana Lúcia Manrique Pág. 68

Resolução de problemas – um exemplo de formação de professores e aplicação com alunos

Patrícia Sampaio Pág. 87

Modelos de crescimento populacional: um olhar à luz de uma socioepistemologia

Lourdes Maria Werle de Almeida, Camila Fogaça de Oliveira Pág. 107

Reseña: GeoGebra en la Producción del Conocimiento Matemático
Agustín Carrillo de Albornoz Torres Pág. 134

Problema deste número

La función cuadrática. Una experiencia didáctica en la perspectiva de la creación de problemas
Uldarico Malaspina Jurado Pág. 136

UNIÓN
REVISTA IBEROAMERICANA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA

www.fisem.org/web/union

ISSN: 1815-0640
Número 41. Marzo de 2015
páginas 3-4

Unión. Revista Iberoamericana de Educación Matemática es una publicación de la Federación Iberoamericana de Sociedades de Educación Matemática **(FISEM).** Tiene una periodicidad trimestral, de modo que se publican cuatro números al año, en los meses de marzo, junio, septiembre y diciembre. Es recensionada en ***Mathematics Education Database*** y está incluida en el catálogo ***Latindex*.**

Evaluadores

Pilar Acosta Sosa
María Mercedes Aravena Díaz
Lorenzo J Blanco Nieto
Alicia Bruno
Natael Cabral
María Luz Callejo de la Vega
Matías Camacho Machín
Agustín Carrillo de Albornoz
Silvia Caronia
Eva Cid Castro
Carlos Correia de Sá
Cecilia Rita Crespo Crespo
Miguel Chaquiam
María Mercedes Colombo
Patricia Detzel
Dolores de la Coba
José Ángel Dorta Díaz
Rafael Escolano Vizcarra
Isabel Escudero Pérez
María Candelaria Espinel Febles
Alicia Fort
Carmen Galván Fernández
María Carmen García González
María Mercedes García Blanco
José María Gavilán Izquierdo
Margarita González Hernández
María Soledad González
Nelson Hein
Josefa Hernández Domínguez
Rosa Martinez
José Manuel Matos
José Muñoz Santonja
Raimundo Ángel Olfos Ayarza
Luiz Otavio.
Manuel Pazos Crespo
María Carmen Peñalva Martínez
Inés del Carmen Plasencia
María Encarnación Reyes Iglesias
Natahali Martín Rodríguez
María Elena Ruiz
Victoria Sánchez García
Leonor Santos
Maria de Lurdes Serrazina
Martín M. Socas Robayna
María Dolores Suescun Batista
Ana Tadea Aragón
Mónica Ester Villarreal
Antonino Viviano Di Stefano

Diseño y maquetación

Diseño web: Daniel García Asensio

Logotipo de Unión: Eudaldo Lorenzo

Colaboran

UNIÓN
REVISTA IBEROAMERICANA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA

ISSN: 1815-0640
Número 41. Marzo de 2015
páginas 5-8

www.fisem.org/web/union

Editorial

Estimados colegas y amigos:

Este número de Unión es la responsabilidad de la nueva dirección. Esperamos para que coincida con la confianza que pusimos en esta condición, y nos declaramos nuestro compromiso de dar continuidad al trabajo realizado por aquellos que vinieron antes que nosotros y hacer todo lo posible para asegurar que los objetivos de la revista siempre se ven afectados.

En este volumen tenemos el honor de contar como invitada Cristina Ochoviet, PhD en Mathematics Education (CICATA-IPN, México). Experto en Lectura, Escritura y Educación (FLACSO, Argentina) y profesora de Matemáticas (IPA, Uruguay). Apreciamos enormemente su importante colaboración con esta revista.

Como es habitual en esta Revista, tenemos artículos de presentación de experiencias y reflexiones teóricas de investigadores y de profesores de matemáticas. La publicación, representa, a los editores, una manera proficua de promover la investigación en Educación Matemática y fortalecer el intercambio de información.

En esta edición se discuten: por María E. Díaz Lozano, Egle E. Haye, Fabiana Montenegro, Luis M. Córdoba "Dificultades de los alumnos para articular representaciones gráficas y algebraicas de funciones lineales y cuadráticas"; por Valdenice Leitão da Silva, Rute Elizabete de Souza Rosa Borba, Carlos Eduardo Ferreira Monteiro, "Saberes matemáticos na ação cidadã: conhecimento de números decimais de jovens e adultos"; Jesús Victoria Flores Salazar aborda el tema: "Génesis Instrumental: el caso de la función cuadrática "; Sandra de Fátima Tavares Rodrigues Tonon y Ana Lúcia Manrique, presentam los resultados de "Projeto “Ensinar e Aprender” em São Paulo: formação continuada em debate". “Resolução de problemas – um exemplo de formação de professores e aplicação com alunos" es el tema del artículo de Patricia Sampaio y, finalmente, Lourdes Maria Werle de

Almeida, Camila Fogaça de Oliveira analizam “Modelos de crescimento populacional: um olhar à luz de uma socioepistemologia”.

En este número también encontraréis la reseña redactada por Agustín Carrillo de Albornoz Torres sobre el libro: "GeoGebra en la Producción de Conocimiento Matemático" de las autoras Norma S. Cotic y Celina A. A. P. Abar.

Finalizando las contribuciones, Uldarico Malaspina Jurado trae una propuesta de problema "La función cuadrática. Una experiencia didáctica en la perspectiva de la creación de problemas " desarrollada para los profesores de secundaria.

Agradecemos a todos quienes hicieron posible este número de la revista, dejando en claro nuestro juicio acerca de su importancia para el desarrollo de la Educación Matemática como una área de investigación.

Ana Tosetti

Celina Abar

Etda Rodríguez

Gustavo Bermúdez

Sonia Igliori

Estimados colegas e amigos*:*

Este número de UNION é de responsabilidade de nova direção. Nessa condição esperamos corresponder à confiança a nós depositada, e declaramos nosso compromisso em dar continuidade ao trabalho desenvolvido pelos que nos antecederam e em envidar todos os esforços para que os objetivos da Revista sejam sempre atingidos.

Neste volume temos a enorme honra de contar como convidada **Cristina Ochoviet,** Doutora em Matemática Educativa (CICATA-IPN, México). Especialista en Lectura, Escritura y Educación (FLACSO, Argentina) e Professora de Matemática (IPA, Uruguay). Agradecemos-lhe enormemente sua importante colaboração com esta Revista.

Como é habitual nesta Revista, os artigos apresentam experiências e reflexões teóricas de pesquisadores e professores de matemática. A publicação dos mesmos, representa, a seus editores, uma forma proficua de promover a investigação em Educação Matemática e fortalecer o intercâmbio de informação.

Neste número são discutidos: por María E. Díaz Lozano, Egle E. Haye, Fabiana Montenegro, Luis M. Córdoba "Dificultades de los alumnos para articular representaciones gráficas y algebraicas de funciones lineales y cuadráticas"; por Valdenice Leitão da Silva, Rute Elizabete de Souza Rosa Borba, Carlos Eduardo Ferreira Monteiro, "Saberes matemáticos na ação cidadã: conhecimento de números decimais de jovens e adultos"; Jesús Victoria Flores Salazar trata do tema: "Génesis Instrumental: el caso de la función cuadrática"; Sandra de Fátima Tavares Rodrigues Tonon e Ana Lúcia Manrique, apresentam os resultados de um "Projeto "Ensinar e Aprender" em São Paulo: formação continuada em debate". "Resolução de problemas – um exemplo de formação de professores e aplicação com alunos" é o tema do artigo de Patrícia Sampaio, e, por fim, Lourdes Maria Werle de Almeida, Camila Fogaça de Oliveira analisam "Modelos de crescimento populacional: um olhar à luz de uma socioepistemologia".

Neste número pode-se também encontrar a resenha elaborada por Agustín Carrillo de Albornoz Torres sobre o livro: "GeoGebra na Produção do Conhecimento Matemático" das autoras Norma S. Cotic e Celina A. A. P. Abar.

Finalizando as contribuições, Uldarico Malaspina Jurado traz uma proposta de problema “La función cuadrática. Una experiencia didáctica en la perspectiva de la creación de problemas” desenvolvida para professores do Ensino Médio.

Agradecemos a todos aqueles que tornaram possível este número da Revista, deixando claro nosso julgamento sobre sua importância para o desenvolvimento da Educação Matemática como área de investigação.

Ana Tosetti

Celina Abar

Etda Rodríguez

Gustavo Bermúdez

Sonia Igliori

UNIÓN
REVISTA IBEROAMERICANA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA

ISSN: 1815-0640
Número 41. Marzo de 2015
páginas 09-19

www.fisem.org/web/union

Firma Invitada:

La lectura literaria en la enseñanza de la matemática en el nivel secundario: vínculos entre campos, canon de lecturas posibles

Cristina Ochoviet

Resumen	En este ensayo se presentan algunas ideas para la reflexión de los docentes sobre la lectura de textos literarios en la clase de matemática. La intención es posibilitar un cruce entre campos que decante tanto en nuevas lecturas de los textos como en aprendizajes matemáticos. Se presenta el terreno literario como ámbito para la creación de problemas que serán pasibles de un abordaje matemático. Este posibilitará lecturas del texto desde nuevos puntos de vista dando lugar a preguntas sobre lo literario o sobre aspectos matemáticos a develar. Se ejemplifica con textos de César Aira, Mario Benedetti, Mario Levrero y David Lodge. **Palabras clave**: literatura, matemática, lectura, resolución de problemas.
Abstract	In this essay some ideas for teacher reflection on the reading of literary texts in math class are presented. The intention is to enable a cross between fields that results in new interpretations of the texts and mathematical learning. The literary field is presented as a source of problems that will be subject to a mathematical approach. This will allow readings of the text from new perspectives leading to questions about the literary or mathematical aspects to reveal. The ideas are exemplified with texts written by César Aira, Mario Benedetti, Mario Levrero and David Lodge. **Keywords**: literature, mathematics, reading, problem solving.
Resumo	No presente ensaio apresentam-se algumas idéias para a reflexão dos professores sobre a leitura de textos literários nas aulas de matemática. A intenção é permitir um entrecruzamento entre campos que acabe em novas leituras dos textos e em apredizagem matemática. Apresenta o espaço literário como ambiente para a criação de problemas que possam ser abordados matemáticamente. Essa abordagem vai permitir leituras do texto desde novos pontos de vista deixando lugar para perguntas sobre aspectos literários ou sobre aspectos matemáticos. Vai se exemplificar com textos de César Aira, Mario Benedetti, Mario Levrero e David Lodge. **Palavras-chave:** literatura, matemática, leitura, resolução de problemas.

1. Introducción

Si consideramos el lenguaje como un área a desarrollar en conjunto desde las distintas asignaturas que componen el currículo, vale preguntarse qué papel podrían jugar los textos literarios en la clase de matemática o, de otra manera, por qué valdría la pena abrir un espacio para la lectura literaria en una clase que habitualmente no destina tiempo a ello. Este punto de partida nos conduce a una reflexión sobre otros dos aspectos: de qué textos estaríamos hablando y con qué propósito los abordaríamos en los procesos de enseñanza de la matemática.

Como afirma Montes (s/f: 4): "Cada nueva lectura va a suponer una reestructuración de ese espacio simbólico, va a suponer una relectura de lo ya leído… Habrá cruces, evocaciones, contradicciones, ecos…". Entonces, ¿qué nuevas lecturas podríamos formularnos desde lo matemático? Si evocamos el conocimiento matemático disponible, si damos pie a que este aparezca, ¿contribuiremos a nuevas formas de entender los textos literarios? ¿Aportarán estos textos al aprendizaje de la matemática? Intentaré el desafío de establecer una relación entre matemática y textos literarios que resulte, sobre todas las cosas, genuina.

2. Cruces entre matemática y textos literarios

En esta sección explicitaré qué entiendo por *encontrar matemática en un texto literario*. Encuentro matemática en un texto cuando su autor utiliza ideas, objetos matemáticos o vocabulario propio de la disciplina con el objetivo de formular metáforas, proponer imágenes, plantear problemas cotidianos resolubles matemáticamente o problemas de naturaleza propiamente matemática. También cuando el autor crea historias en mundos matemáticos con personajes (matemáticos o no) que deben deambular y sostener sus vidas en estos. Asimismo cuando lo matemático es el tema. Esta lista no agota los posibles cruces entre dos campos como la literatura y la matemática, pero me permite ejemplificar con algunos casos para orientar a aquellos lectores que todavía no han observado estos cruces o, al decir de Montes (s/f), dan pistas para volver más astuto al lector en la búsqueda de estos indicios.

Pero estos cruces también tratan de una relación personal del lector con el texto. Cada lector puede realizar una lectura matemática de un texto dependiendo de su experiencia previa tanto con la matemática como con los textos. Vale entonces preguntarse si es posible la transferencia de este tipo de experiencia lectora a los estudiantes de una clase de matemática. Abrir el texto al encuentro con la matemática: ¿es posible desde el bagaje de conocimientos de un alumno de enseñanza secundaria? ¿Sería imponer sentidos? ¿Forma parte de un proceso de desarrollo personal de la lectura que se genera por evocaciones espontáneas al conocimiento matemático adquirido a lo largo de la vida o es oportuno que sea favorecido por el docente desde edades tempranas? ¿Cómo navegar en la delgada línea que separa la libertad del lector para construir su lectura y la que el docente puede invitar a realizar a partir de lo matemático?

Gaspar (2005) reflexiona acerca de la inclusión de la lectura y la escritura en las diferentes áreas disciplinares del currículo escolar. El adecuado manejo del lenguaje aparece habitualmente como una habilidad que debe ser adquirida previamente y en el área de lengua, a los efectos de estar disponible para permitir la mediación con los distintos contenidos disciplinares. Es así que el lenguaje es visto desde las distintas áreas como un instrumento a ser utilizado más que un área a desarrollar en conjunto desde las distintas asignaturas que componen el currículo. Esta autora sostiene que enseñar a comprender textos es una tarea que compete a todos los docentes, tanto de las distintas áreas como de los distintos niveles del sistema educativo, con el objetivo de contribuir a la formación de lectores autónomos. Enfatiza en que el interés no solo radica en poder abordar textos propios de cada disciplina sino textos de circulación social. Esto ofrece la posibilidad de que los estudiantes vayan configurando sus “familias espirituales” -al decir de Abelardo Castillo (s/f), refiriéndose a aquellos autores que por elección personal, nos acompañan desde la literatura durante toda la vida-.

Incluir la lectura de textos literarios en la clase de matemática parecería estar en consonancia con la propuesta de Gaspar. Por un lado, porque permite atender la recomendación de que la enseñanza de un contenido incluye enseñar a comprender los diversos textos desde donde este es abordado. En segundo lugar, porque es posible utilizar diversos textos literarios donde es mencionado un concepto matemático, para contribuir a la enseñanza de ese concepto. Y en tercer lugar, porque la comprensión de una metáfora que utiliza a la matemática puede contribuir a una lectura más profunda de un texto.

3. ¿Qué textos literarios?

Al momento de decidir qué textos literarios llevar a la clase de matemática, surge la reflexión acerca de los criterios de elección que podrían tenerse en cuenta. Repasaré dos enfoques interesantes para los docentes: el de Martin Kohan y el de Josefina Ludmer. El primero, más apegado al rol del docente como aquel que debe transmitir una buena literatura y el segundo, porque ofrece una mayor libertad al profesor para la selección de los textos literarios yendo más allá de las consideraciones tradicionales de buena o mala literatura.

La revolución tecnológica de los años 90 generó cambios sustanciales en la expresión artística y particularmente en la producción literaria. Esto dio lugar a un intenso debate acerca de qué es considerado valioso en literatura y con ello a reconsideraciones de lo canónico o –yéndonos a una posición más extrema- si tal categoría tiene hoy un lugar –y en caso afirmativo cuál- en el ámbito de lo que Ludmer (2009) denomina literaturas postautónomas 2.0. Tal como ella misma lo afirma: “[…] o se ve el cambio en el estatuto de la literatura, y entonces aparece otra episteme y otros modos de leer. O no se lo ve o se lo niega, y entonces seguiría habiendo literatura y no literatura, o mala y buena literatura” (Ludmer, 2009:45).

Kohan (2011) plantea dos criterios desde los cuales entender el concepto de canon literario. El primer criterio, propuesto por Harold Bloom, considera que el canon debe medirse mediante valores específicamente literarios sin admitir la injerencia de factores externos a la literatura. Kohan señala que la historia de la literatura debe verse como una historia de las relaciones entre escritores: “De acuerdo con este enfoque, todo poeta está en relación dialéctica con otros poetas, ya que ninguno puede hablar una lengua que esté libre de lo que antes forjaron sus precursores” (Kohan, 2011:4). Este criterio permite definir, al interior del campo, lo que es buena literatura, considerando su fuerza estética y la relación con sus precursores de peso. El punto de vista de Bloom es criticado por otros que sostienen que no existe de hecho una norma estética dada y objetiva que permita definir lo que es bueno o malo sino que los valores literarios se modifican históricamente y en esto incide –en forma determinante- la institución literaria en sus diversas manifestaciones. Kohan va un poco más allá en esta segunda postura, agregando que la institución literaria no solo percibe y caracteriza un canon sino que interviene: “Nuestro presente literario no es tan sólo un campo de observación: es un campo de intervención” (Kohan, 2011:8).

Con esto se refiere a que críticos, educadores, periodistas, jurados, editores, deben producir un canon, definiendo criterios de lectura y de valor en el presente.

La mirada de Ludmer (2007) permite trascender ese lugar que Kohan describe para la institución literaria y sus integrantes. Josefina Ludmer dice: “Leo la literatura como si fuera un tarot, como borra de café, como instrumento para ver el mundo”. Parecería que la literatura le brinda a Ludmer una herramienta para comprender el mundo -y con él, lo político, lo económico, lo social, lo cultural, lo artístico- reconociendo que existen escrituras que no admiten lecturas literarias, lecturas que se inscriben en lo que ella denomina diáspora literaria: lecturas que han traspasado los límites del campo y que han contribuido a romper con la autorreferencialidad de la literatura.

En este marco, en el que lo literario ha ampliado sus territorios, visiones distintas acerca del valor de los textos literarios continúan conviviendo. Kohan (2008) sostiene que desde la institución literaria debe incidirse en la construcción de un canon:

> Yo creo que la escuela tiene que formar un lector que rechace un libro cuando está mal escrito; como pasa con la música, cuando uno "pone cara" si algo suena desafinado. Y hay libros que desafinan de punta a punta, y no me parece que la escuela deba avalar que alguien lea eso como bueno.

En cambio, Ludmer (2007) sostiene que la cuestión del valor de los textos literarios debe ser dejada entre paréntesis o, en todo caso, debe ser reconceptualizada.

A la hora de pensar la posibilidad de definir un canon literario para las elecciones que llevamos a la clase de matemática, la propuesta de Kohan (2008) del educador como agente de intervención parece muy atendible; él dice: “La escuela tiene que administrar un canon, separar buena literatura de mala literatura sin ningún remordimiento”. Ahora bien, teniendo en cuenta el amplio abanico de textos que son posibles para una clase de matemática –desde la divulgación científica hasta los grandes escritores-, entiendo que el punto de vista de Ludmer (2007, 2009) permite una mayor libertad para experimentar sin que el docente sienta la necesidad de ceñirse al concepto de buena literatura.

Podemos transitar desde propuestas que pueden ser consideradas clásicas tales como *El hombre que calculaba* de Malba Tahan o *Matemáticas recreativas* de Yakov Perelman hasta obras literarias como *Los viajes de Gulliver* de Jonathan Swift, *La fórmula preferida del profesor* de Yoko Ogawa, *Genealogía* de Felisberto Hernández o *El puente romano* de Héctor Galmés, en las que es posible encontrar una relación con la matemática por mención explícita en el texto o porque en este aparecen situaciones que pueden ser pensadas desde la matemática.

Es así que para elegir un texto literario para la clase de matemática el docente puede seleccionar una obra que se ubica dentro del canon o simplemente dejar abierta la posibilidad de que se aborden todo tipo de autores. Hay algo que es ineludible a esta propuesta que es la presencia de un docente lector. Más allá del tipo de literatura que se seleccione, es el docente que a priori vive el cruce entre los dos campos, el que podrá luego sugerir a sus alumnos la búsqueda de ese encuentro.

4. Los encuentros de los estudiantes con el texto: ¿de qué tipo?

Como esta propuesta se sustenta en un docente de matemática lector que invita a sus alumnos a la lectura literaria, el tipo de textos quedará necesariamente atado a la subjetividad del docente y a la significación que este construye en su relación con el texto. A modo de ejemplo, presentaré un caso tomado de mi experiencia como docente, que ilustra el tipo de encuentro que intento sugerir en este trabajo.

A un grupo de estudiantes de segundo año de enseñanza secundaria les propuse que realizaran una entrega quincenal que diera cuenta de la presencia de la matemática en la vida. Un estudiante de 13 años eligió, en una de las ocasiones, la poesía Cero de Mario Benedetti y debajo explicó por qué la había seleccionado. Presento a continuación su trabajo.

> Mi saldo disminuye cada día/ qué digo cada día/ cada minuto cada/ bocanada de aire/ muevo mis dedos como si pudieran/ atrapar o atraparme/ pero mi saldo disminuye/ muevo mis ojos como si pudieran/ entender o entenderme/ pero mi saldo disminuye/ muevo mis pies cual si pudieran /acarrear o acarrearme/ pero mi saldo disminuye/ mi saldo disminuye cada día/ qué digo cada día/ cada minuto cada/ bocanada de aire/ y todo porque ese/ compinche de la muerte/ el cero/ está esperando/
>
> *Cero* de Mario Benedetti

> Este poema en primer lugar menciona a la operación tan común y conocida: la resta. La menciona diciendo que se haga lo que se haga el saldo, el resto del total que hay por hacer entre lo que ya está hecho, disminuye.
>
> Pero además menciona al cero, neutro de la suma, absorbente en la multiplicación. Hace referencia a él porque dice que va a llegar un día que lo hecho y el total por hacer sean el mismo número y la resta nos dé por resultado cero.
>
> Lucas (13 años)

Este encuentro entre texto y lector, le permitió al estudiante reflexionar acerca de ese saldo que para el autor disminuye. Esto es, ¿cuál es ese saldo que disminuye? ¿A qué se refiere el autor? Para el estudiante parecería referirse a lo que resta por hacer. Concibe la vida como un trayecto que tiene un claro final. En cada momento de nuestras vidas nos ubicamos a una cierta distancia de ese final y ese tramo es el que nos impone cosas por hacer, el que nos muestra qué nos queda todavía por hacer.

El caso presentado nos muestra un cruce entre campos que aporta a una lectura del texto literario a partir de la evocación de la resta y el caso particular en el que la diferencia es cero. Asimismo, durante la elaboración de la reflexión, el estudiante vuelve a pensar en asuntos matemáticos que estudió en clase. El alumno fue astuto frente a la búsqueda de lo matemático y pudo dar un sentido al texto desde ese campo.

5. Los textos literarios como ámbito para la creación de problemas

Uno de los cruces que más me interesa proponer es el texto literario como problema. Camps (2009) sugiere que en la escuela deben habilitarse distintos ámbitos donde la lengua escrita se utilice como instrumento de reflexión y de comunicación en relación con todas las actividades. Ofrece varias recomendaciones para el trabajo de la escritura que pueden resultar de utilidad para el diseño de actividades de lectura. Entre las que sugiere consideraré, en particular, las actividades referidas a problemas.

Existe bastante acuerdo en la comunidad de educadores en que aprender matemática es aprender a resolver problemas. Entonces lo que propongo es utilizar a los textos literarios como terreno en el que germinan problemas que pueden ser resueltos con el uso de la matemática. Desde este enfoque el docente se concibe como un gran lector que a partir de su experiencia lectora crea problemas que son susceptibles de ser abordados desde la matemática. Literatura y matemática se conjugan para dar lugar a problemas que permiten por un lado, desplegar las herramientas matemáticas que el alumno posee y por otro, a partir de la situación que demanda una resolución, introducirnos, más en profundidad, en el propio texto.

Veamos un primer ejemplo a partir de un texto del ensayo autobiográfico *Cumpleaños* de César Aira (p. 52):

> Dejé subir a la superficie de mi mente algunos modestos enigmas clásicos, al azar, sin elegirlos. El primero fue éste: si un círculo gira, ¿es cierto que el punto central se mantiene inmóvil?

El problema lo propone el propio autor. Vuelve sobre él en varios momentos de su ensayo. Ha quedado planteada una pregunta. ¿Hay una sola respuesta? ¿Qué elementos debería considerar el estudiante para poder analizar matemáticamente este problema? Luego de su abordaje y de compartir puntos de vista con los estudiantes podríamos volver a la respuesta que el propio hijo le da al autor y compararla con las que hayan surgido en el debate de la clase.

Vayamos a otro ejemplo tomado de la novela *Trapos sucios* de David Lodge (pp. 14-15):

> -¿Sabías –dijo Adrian mientras leía la caja de cartón- que los cornflakes tienen un ochenta y cuatro por ciento de hidratos de carbono, del que el ocho por ciento son azúcares?
>
> Eleanor, absorta con el periódico, no respondió. Adrian cogió otro paquete y lo escudriño.
>
> -Los All-Bran tienen sólo cuarenta y seis por ciento de hidratos de carbono, pero el dieciocho por ciento de ellos son azúcares –dijo-. El dieciocho por ciento de cuarenta y seis, ¿es mejor o peor que el ocho por ciento de ochenta y cuatro?

Al igual que en el caso anterior, el problema lo propone el propio autor. ¿Podrán los estudiantes dar respuesta a la pregunta planteada? Seguramente sí y a partir de ello, quizás, puedan también ver por qué tiene sentido la pregunta planteada, es decir, por qué es un verdadero asunto a develar.

Podemos agregar ahora más texto de la novela de Lodge que sigue al fragmento anterior (p. 15):

> Eleanor tampoco respondió. Adrian no parecía sorprendido ni enfadado. Cogió otro paquete.
> -Los Shredded Wheat parecen los mejores. El sesenta y siete por ciento de hidratos de carbono, de los cuales menos del uno por ciento son azúcares. Y no tienen sal. Supongo que por eso no saben a nada.

Ahora no hay pregunta, pero bien puede formularla el docente: ¿es cierto que estos últimos cereales son los mejores?

Si bien develar este asunto no es esencial para la lectura de la novela, sí permite apreciar por qué tienen sentido las preguntas que el personaje hace.

Leamos ahora un texto tomado de *El discurso vacío* de Mario Levrero (pp. 74-75):

> Acabo de leer de un tirón todo lo que llevo escrito hasta el momento, y la lectura ha desatado una cantidad de asociaciones y de emociones, al punto de que me vuelvo a sentir paralizado, como en el cruce de varios caminos y sin saber qué dirección tomar -por más que sepa que cualquier dirección será tan buena o tan mala como las otras, ya que mi propósito inicial sigue siendo el mismo: capturar los contenidos ocultos tras el aparente vacío del discurso, y para ello no tengo apuro, o no debería tener apuro-. Pero cada día que pasa siento cómo crece mi ansiedad, e incluso puedo representar gráficamente esa ansiedad, mediante el dibujo de la curva de la cantidad de cigarrillos que fumo cada día. La clave de la ansiedad se halla probablemente en el hecho de que el tiempo nunca alcanza […]

Aquí el docente podría agregar preguntas como: ¿a qué curva se refiere el personaje? ¿Podrías esbozarla? ¿Por qué el personaje dice que puede representar su ansiedad mediante esa curva? ¿Qué quiere decir con ello? Estas preguntas contribuyen a una lectura del texto y sobre todo a comprender por qué el autor elige hablar de esa curva y qué énfasis está planteando con ello.

Los ejemplos anteriores permiten al lector hacerse una idea acerca de qué puede significar considerar a los textos literarios como terreno para la creación de problemas matemáticos.

6. Una novela y muchas preguntas (matemáticas)

La siguiente actividad para el nivel secundario, propuesta en Ochoviet (2013), se desarrolla a partir de los capítulos 13 y 14 de la novela *La ciudad* de Mario Levrero. Este autor nos sumerge en una atmósfera onírica donde las cosas pueden ser y no ser a la vez o donde lo que es con absoluta certeza pierde esta condición pocas páginas más adelante. Esta lectura puede ser apropiada para vivenciar situaciones que no son pasibles de ser aceptadas desde la racionalidad pero que pueden derivar en situaciones analizables desde lo matemático.

Para abordar la siguiente actividad se requiere la lectura previa del capítulo 13. En la clase de matemática se puede dialogar sobre el escenario que plantea el texto leído para luego trabajar sobre una consigna que dé lugar a procesos de creación de situaciones y que podría ser capitalizable para proponer actividades de escritura:

> *Frente al panel de llaves, Giménez dice que hay una que no debe tocarse en absoluto porque podría ocurrir un desastre. ¿Qué desastre te parece que podría ocurrir si se cambia la posición de esa llave? En primer lugar indica si crees que esa llave está en posición de encendido o de*

> *apagado y luego explica cuál sería el desastre que se provocaría al cambiarla de posición.*

La actividad anterior nos llevará a centrarnos en el panel de llaves. Este es el contexto que se utilizará para una mirada matemática del asunto en el que se ve involucrado el personaje de la novela al tener que memorizar la ubicación de una llave particular que no puede tocarse pues de hacerlo ocasionaría un desastre. Se planteará a continuación la siguiente cuestión:

> *El panel tiene un montón de llaves en hileras, formando un triángulo, según lo describe el personaje. Al indicársele lo que debe hacer (apagar todas las que están prendidas y encender todas las que están apagadas, a excepción de una llave que no debe tocarse) intenta memorizar la ubicación de la llave peligrosa. Luego decide hacer un croquis.*
> *a) Realiza un croquis del panel de la manera que te lo imaginas, ¿cómo harías para memorizar la posición de una llave en particular?*
> *b) Compara tu croquis con el de un compañero, ¿los dos pensaron en una estructura similar para las hileras que forman el triángulo? Comenten diferencias y semejanzas.*
> *c) El sistema que inventaste para recordar la ubicación de una llave, ¿coincide con el que inventó tu compañero?*

Esta actividad permitirá discutir distintos sistemas para ubicar un punto en el plano a partir de las creaciones de los alumnos. Luego se podrán comparar con las que el personaje pone en juego en el capítulo 14 cuando describe con mayor precisión la estructura del panel. Estas ideas serán importantes para reflexionar más adelante sobre la noción de sistema cartesiano y ubicación de puntos en el plano a partir de sus coordenadas.

Para continuar con el trabajo en una clase posterior, se solicitará la lectura domiciliaria del capítulo 14 de la novela *La ciudad*. En este capítulo vuelve a aparecer el panel de llaves. El personaje debe ahora concretar el encargo que le hizo Giménez y para ello debe recordar con precisión la ubicación de la llave que no debe tocarse. Se presentará la siguiente consigna:

> *a) Realiza un croquis del panel de 36 llaves, según se describe en este capítulo.*
> *b) Lee el siguiente texto extraído del capítulo 14 (pp. 98-99):*

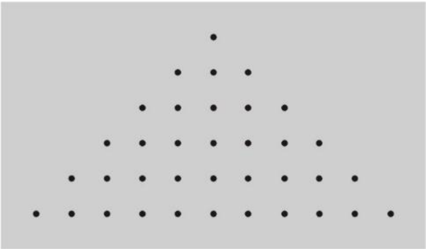
> […] quise comprobar el estado de mis facultades mnemotécnicas, que nunca habían sido del todo malas.
>
> Mi fuerte era la memoria visual; observé el tablero en su conjunto y señalé una llave; luego la ubiqué, contando el número de hileras verticales y horizontales (pero en sentido contrario al que lo había hecho cuando Giménez me pidió que lo hiciera). Anoté la coordenada de las filas, al dorso del papel; luego recordé la coordenada que había memorizado hacía unas

horas; la llave debía ser la quinta de la cuarta hilera, contando de arriba hacia abajo y de izquierda a derecha. Y esto coincidía con la anotación al dorso del papel, que señalaba la tercera llave de la tercera fila, contando de abajo hacia arriba y de derecha a izquierda.

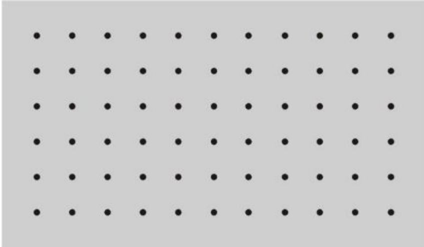
El personaje numera las hileras en cierto sentido con el objetivo de ubicar la llave, luego le asigna lo que él llama una coordenada a su ubicación.
- ¿Podrías explicar en qué consiste esta coordenada?
- Cuando dice "quinta de la cuarta hilera", ¿se refiere a una hilera vertical u horizontal?
- Si conocemos la coordenada de una llave, ¿qué es imprescindible recordar además para poder ubicarla en el panel? (Giménez y el personaje lo hicieron de distinta manera)
- ¿Por qué coinciden las llaves si en un caso es "quinta de la cuarta hilera" y en el otro "tercera llave de la tercera fila"?
c) Avancemos un poco más en la página 99 del capítulo 14. Allí dice:

Satisfecho, y más que nada por hacer tiempo -aún quedaban unos minutos- comparé mi cálculo con el croquis: una sorpresa desagradable fue encontrar que la llave que yo había marcado con una cruz, era la séptima de la quinta hilera -de arriba hacia abajo y de izquierda a derecha- y la tercera de la segunda fila, en sentido inverso.

- "la séptima de la quinta hilera -de arriba hacia abajo y de izquierda a derecha- y la tercera de la segunda fila, en sentido inverso", ¿refieren a la misma llave?
- Utiliza el panel que tienes dibujado y verifica si efectivamente la coordenada memorizada conduce a una llave distinta a la marcada con una cruz.
d) Si estuvieras en la situación del personaje, ¿qué sistema utilizarías tú para recordar, sin fallos, la ubicación exacta de la llave que no puede tocarse? Puedes ayudarte del siguiente croquis y realizar las anotaciones que consideres necesarias. Las llaves se indican con puntos negros.



e) Trabajen ahora en parejas. Utilicen el siguiente panel de llaves para idear un sistema que les permita recordar la ubicación exacta de cualquiera de sus llaves.



f) Con tu compañero elige una de las llaves y márcala por detrás del papel de forma que no se pueda detectar, a simple vista, la llave seleccionada. Inviten a otro compañero cuya misión será ubicar la llave seleccionada por ustedes previamente. ¿Qué información es necesario dar a este compañero para que pueda ubicarla en el panel sin problema?

Las actividades planteadas se conversarán con los estudiantes antes de su abordaje tal como lo sugiere Finocchio (2011), con el objetivo de ayudar a los alumnos a comprender las consignas. Para responder será necesario utilizar el lenguaje escrito combinándolo, en ocasiones, con el lenguaje simbólico matemático.

El estudiante podrá acercarse a la complejidad que implica establecer un sistema coordenado y las convenciones que es necesario realizar para poder recordar con la menor dificultad posible la ubicación de un punto. El análisis sugerido permite realizar una lectura del texto que entreteje lo literario, lo numérico y lo geométrico, planteando al estudiante desafíos similares a los que experimenta el personaje de la novela.

7. A manera de cierre

Quedan planteadas en este trayecto algunas inquietudes y también algunas ideas para introducir la lectura de textos literarios en la clase de matemática. El desafío es grande porque no es posible emprenderlo sin un docente lector y atento. Y también porque los cruces que establezcamos entre los dos campos no pueden ser triviales; la forma en que se entrelazan debería contribuir a la construcción de relaciones genuinas y significativas para ambos.

Bibliografía

Aira, C. (2013). *Cumpleaños*. Buenos Aires: Debolsillo.

Benedetti, M. (1993). *Inventario Dos*. Buenos Aires: Editorial Sudamericana.

Camps, A. (2009). *Siete principios en que basar la enseñanza de la escritura en primaria y secundaria*. Recuperado el 26 de agosto de 2014 desde http://docentes.leer.es/2009/05/27/siete-principios-en-que-basar-la-ensenanza-de-la-escritura-en-primaria-y-secundariaanna-camps/

Castillo, A. (s/f). *Libros preferidos*. Entrevista a Abelardo Castillo. Recuperado el 2 de octubre de 2014 desde

http://www.audiovideotecaba.gob.ar/areas/com_social/audiovideoteca/literatura/video/biblioteca/castillo_bib.mov
Finocchio, A. (2011). *Cuando las consignas invitan a escribir*. En Diploma Superior en Lectura, escritura y educación. Buenos Aires: FLACSO Virtual.
Gaspar, M. (2005). *La lectura y la escritura en el proyecto escolar (o de cómo la lectura y la escritura no son patrimonio de un área*. En Diploma Superior en Lectura, escritura y educación. Buenos Aires: FLACSO Virtual.
Kohan, M. (2008). La escuela tiene que separar la buena de la mala literatura, sin remordimientos. *El Monitor de la educación*, 16. Recuperado el 28 de agosto de 2014 desde http://www.me.gov.ar/monitor/nro16/conversaciones.htm
Kohan, M. (2011). *Notas sobre el canon*. En Diploma Superior en Lectura, escritura y educación. Buenos Aires: FLACSO Virtual.
Levrero, M. (2010). *La ciudad*. Barcelona: Ediciones de Bolsillo.
Levrero, M. (2011). *El discurso vacío*. Buenos Aires: Literatura Mondadori.
Lodge, D. (2006). *Trapos sucios*. Barcelona: Compactos Anagrama.
Ludmer, J. (2007). Elogio de la literatura mala. *Suplemento Cultural Ñ*,
Diario Clarín, Buenos Aires, 1 de diciembre de 2007. Recuperado el 2 de marzo de 2015 desde http://edant.clarin.com/suplementos/cultura/2007/12/01/u-00611.htm
Ludmer, J. (2009). Literaturas postautónomas 2.0. *Propuesta Educativa*, 32, 32-45.
Montes, G. (s/f). *La gran ocasión, la escuela como sociedad de lectura*. Recuperado el 26 de agosto de 2014 desde http://planlectura.educ.ar/pdf/La_gran_ocasion.pdf
Ochoviet, C. (2013). La lectura de textos literarios en la clase de matemática. *Convocación*, 12-13, 18-24.
Ogawa, Y. (2011). *La fórmula preferida del profesor*. Editorial Funambulista: Madrid.
Perelman, Y. (1959). *Matemáticas recreativas. Cuentos y rompecabezas de matemáticas*. Ediciones en Lenguas Extranjeras: Moscú.
Tahan, M. (1995). *El hombre que calculaba*. Verón Editor: Barcelona.
Swift, J. (2011). *Los viajes de Gulliver*. Editorial Losada: Buenos Aires.
Hernández, F. (2010). *Genealogía*. Recuperado el 2 de marzo de 2015 desde http://bibliotecaignoria.blogspot.com/2010/06/felisberto-hernandez-genealogia.html
Galmés, H. (2011). *Narraciones completas*. Ediciones de la Banda Oriental: Montevideo.

Cristina Ochoviet
Doctora en Matemática Educativa (CICATA-IPN, México). Especialista en Lectura, Escritura y Educación (FLACSO, Argentina). Profesora de Matemática (IPA, Uruguay). Se ha desempeñado como docente en el Instituto de Profesores Artigas, en el Profesorado Semipresencial, y como docente de posgrado e investigadora en el Instituto de Perfeccionamiento y Estudios Superiores (Uruguay). **cristinaochoviet@gmail.com**

UNIÓN
REVISTA IBEROAMERICANA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA

ISSN: 1815-0640
Número 41. Marzo 2015
Páginas 20-38

Dificultades de los alumnos para articular representaciones gráficas y algebraicas de funciones lineales y cuadráticas

María E. Díaz Lozano, Egle E. Haye, Fabiana Montenegro, Luis M. Córdoba

Fecha de recepción: 10/02/2012
Fecha de aceptación: 7/02/2013

Resumen	Este trabajo forma parte de una investigación destinada a estudiar la incidencia de las representaciones de los conceptos en el aprendizaje de matemática. Se reportan los resultados de un estudio exploratorio sobre las dificultades en la articulación de registros gráficos y algebraicos que se observaron en 109 ingresantes a carreras de ingeniería. Sobre las actividades de conversión propuestas, se presenta el análisis de los resultados, realizado sobre cada una de las variables de los dos sistemas de representación. Los datos revelan que, en funciones lineales y cuadráticas, una considerable proporción de los estudiantes no logró establecer una articulación exenta de errores. **Palabras clave**: **funciones lineales y cuadráticas; registros gráficos y algebraicos; estudiantes de ingeniería**
Abstract	This work is an, were we study the incidence of concepts represented visually during the mathematical learning process at the university. This work shows the results of an exploratory study perfomed over 109 studens from the firths year of engineering degree. The study was designed to analyse the students´s difficulties in articulate the algebraic representation of a mathematical function with its graphical form. The paper describes the activities proposed to the students and the analysis of the results. Data reveals that the students have more difficulties to articulate lineal and quadratic functions without errors. **Keywords**: **lineal and quadratics functions; graphical and algebraic representation; student of engineering**
Resumo	Este trabalho é parte de uma investigação, destinada a estudar a incidência de representações de conceitos na aprendizagem de matemática. Aqui são relatados os resultados de um estudo exploratório sobre as dificuldades na articulação de registros algébricos e gráficos que foram observadas em 109 estudantes iniciantes na engenharia. Descreve as atividades de conversão propostas e apresenta a análise dos resultados realizada sobre cada uma das variáveis dos sistemas de representação. Os dados revelam que, no que se refere às funções lineares e quadráticas, uma percentagem considerável de alunos não estabeleceu uma articulação isenta de erros. **Palavras-chave: funções lineares e quadráticas; registros gráficos/algébricos; estudantes de engenharia**

1. Introducción

El estudio que aquí se presenta es parte de una propuesta más amplia, tendiente a buscar alternativas de solución a problemas detectados en la enseñanza de matemática en el primer año de las carreras de ingeniería de la Facultad de Ingeniería y Ciencias Hídricas de la Universidad Nacional del Litoral (Argentina).

Aunque las causas que originan tal situación obedecen, sin dudas, a aspectos sociales y económicos diversos, es una cuestión de larga data la preocupación sobres la relación entre las dificultades de adaptación de los alumnos a los estudios de matemática en el nivel superior y sus condiciones previas, referidas a las competencias cognitivas en matemática con las que inician su vida universitaria.

Una de las observaciones más frecuentes que realizamos los docentes de matemática al analizar las evaluaciones parciales o finales de las asignaturas es la incidencia que tienen en los resultados negativos, los errores provenientes de etapas anteriores y atribuibles a deficiencias de aprendizaje no relacionadas directamente con los temas propios de la materia.

Las encuestas y pruebas diagnósticas realizadas todos los años a los ingresantes, indican que los mismos comparten un marcado déficit en su formación matemática.

Teniendo en cuenta la problemática antedicha, el análisis de los errores de los estudiantes y el estudio de posibles causas y alternativas de prevención constituyen actividades cuyo desarrollo puede representar un aporte para acotar las dificultades que se generan en el tránsito del nivel medio al superior.

Referido a ello, uno de los aspectos a ser considerado es la posible ausencia de articulación entre distintos registros de representación de los conceptos.

Para determinar condiciones previas en ese sentido, se realizó una prueba, pensando en que los problemas de coordinación entre las diversas representaciones de los objetos matemáticos podían verse reflejado en los resultados de la misma.

Mediante la administración de cuestionarios destinados a alumnos que iniciaban su carrera universitaria en nuestra Facultad, que incluían cuestiones relacionadas con conjuntos del plano y de la recta real, se pudieron registrar muchas de las dificultades relacionadas con la problemática planteada. En este artículo se analizan los ítems referidos a rectas y parábolas.

En el punto 2 a continuación, se presentan los lineamientos teóricos sobre los que se apoyó el trabajo. En el punto 3 se describen y fundamentan las actividades propuestas a los estudiantes, cuyas respuestas se analizan en el punto 4.

Finalmente se exponen algunas reflexiones y primeras conclusiones.

2. Lineamientos teóricos

Este trabajo se encuadra en la Teoría sobre registros de representación semiótica de Duval, a los cuales el autor define por medio de las tres actividades cognitivas que se pueden realizar en ellos:

> 1) La *formación* de una representación identificable como una representación de un registro dado...
>
> 2) El *tratamiento* de una representación es la transformación de esta representación en el registro mismo donde ha sido formada. El tratamiento es una transformación interna a un registro...
>
> 3) La *conversión* de una representación es la transformación de esta representación en una representación de otro registro conservando la totalidad o solamente una parte del contenido de la representación inicial. (Duval, 1998, pp. 177-178).

Desde un punto de vista ontológico, la particularidad de los objetos matemáticos, carentes de una existencia física o material, da lugar a que sólo sea posible su conceptualización y alguna actividad sobre ellos a través de sus representaciones semióticas y las actividades de conversión entre ellas (Duval, 1998).

> Sobre la construcción de los conceptos matemáticos Duval establece que, dado que cada representación es parcial con respecto al concepto que representa, debemos considerar como absolutamente necesaria la interacción entre diferentes representaciones del objeto matemático para su formación. (Hitt, 2003, p. 214)

En ese marco, el nivel de conceptualización de un objeto se analiza en base a las posibilidades de articulación de las diferentes representaciones del mismo, por lo que las dificultades para convertir una representación en otra pueden interpretarse como resultado de una conceptualización deficiente, ya que, como lo afirman Blázquez y Ortega:

> …la diversificación de representaciones de un mismo objeto o concepto aumenta la capacidad cognitiva de los sujetos sobre ese objeto o concepto (Blázquez y Ortega, 2001, p. 221).

En los últimos años, muchas investigaciones en educación matemática pusieron el acento en la valoración de estrategias para el aprendizaje basadas en la coordinación y tránsito entre los diferentes contextos en los cuales los conceptos son presentados (Cantoral y Farfán, 1998; Blázquez, S. y Ortega, 2001; Hitt, 2003).

Las nociones de registros de representación, tratamiento y conversión de representaciones y la tesis que sostiene que las diferentes representaciones de los conceptos son fundamentales para su comprensión (Duval, 1998 y 1999), han sido objeto de estudio por numerosos investigadores que sostienen, como puede apreciarse en Lupiañez y Moreno (2001), para el caso particular de la matemática, que no existe actividad cognitiva al margen de la actividad representacional.

En distintos trabajos (véase, por ejemplo, Castro y Castro, 1997), se señala el tema de la pluralidad de sistemas de representación para un mismo concepto, enumerando los diversos sistemas de representación mediante los cuales los objetos matemáticos pueden expresarse. Así, se mencionan representaciones verbales, numéricas, algebraicas, tabulares, gráficas, geométricas y, últimamente, representaciones ejecutables, en referencia a las posibilidades de procesar y manipular las representaciones de los objetos matemáticos sobre la pantalla de la computadora.

De entre las distintas posibilidades de representación de los conceptos referidos a funciones lineales y cuadráticas, es tradicional que las algebraicas y las gráficas sean de las más usadas en las clases de matemática.

Como se dijo anteriormente, cada tipo de representación evidencia ciertas propiedades de los objetos que representa, al mismo tiempo que deja de lado otras. Ello ocasiona que las características de cada sistema de representación guarden relación con las posibilidades que ofrecen para las actividades cognitivas en matemática en general, lo que involucra, en particular, a los temas abordados en este trabajo.

En lo que se refiere al sistema algebraico, el mismo muestra un aspecto formal, que ofrece un alto grado de precisión en los procedimientos. Sin embargo, puede pensarse que el nivel de abstracción que lo caracteriza puede ser un inconveniente en la comprensión de los conceptos.

Por su parte, el sistema gráfico, aún cuando limitado ya que sólo permite visualizar una parte de lo expresado en el algebraico, posibilita la formación de representaciones con una apariencia menos formal, más atractiva y posiblemente más amigable para los alumnos.

En relación con ello, la representación visual de las nociones ha sido muchas veces jerarquizada como herramienta para la construcción de significados en el proceso de aprendizaje y recibió tratamiento desde diversos enfoques.

Al respecto, se analizaron, entre otros aspectos, su relación con las representaciones internas y modelos mentales (Johnson Laird, 1996; Nersessian, 2007), las limitaciones y beneficios de la enseñanza por medio de lo visual y sus posibilidades en la enseñanza de Matemática (Castro y Castro, 1997; Davis, 1993; Dreyfus, 1994; Duval, 1999), propuestas y experiencias en la aplicación de estrategias didácticas con el uso de recursos visuales, tales como, por ejemplo, las que se detallan en Hitt, 2001; Buteler y Gangoso, 2001; Díaz Lozano, Haye y Macías, 2012; Otero, Greca y Silveira, 2003.

Pese a ello, varias investigaciones en Educación Matemática señalan que en general el sistema algebraico es el privilegiado por los profesores de matemática en su práctica docente:

> …en la enseñanza tradicional se ha abusado del registro algebraico… (Blázquez y Ortega, 2001, p. 231).

Tal vez debido a eso, como se expresa en el trabajo de González-Martín y Camacho:

> …se observa la preponderancia del pensamiento algebraico en los alumnos. Aunque el registro algebraico ocasiona grandes dificultades a veces, es el que están acostumbrados a trabajar. (González-Martín y Camacho, 2005, p. 91).

Una conclusión similar es manifestada por Ismenia (1998), en un estudio referido a funciones en general realizado sobre alumnos de primer año con conocimientos elementales de Cálculo.

En el caso de las funciones lineales y cuadráticas, lo anterior se manifiesta usualmente en el aula por medio de la preeminencia de actividades de tratamiento en el contexto algebraico, mientras que las representaciones gráficas se presentan como complemento de las anteriores. Sin embargo, la teoría de Duval postula que para propiciar la construcción de los conceptos no resulta suficiente el trabajo dentro de un solo sistema de representación, sino que es necesario inducir a los estudiantes a realizar las actividades de conversión de una representación a otra, en ambos sentidos.

Tal como lo manifiestan Castro y Castro: (1997)

> Consideramos que la comprensión alcanzada mediante procesamiento de información visual y la que se consigue por procedimientos analíticos se complementan, por lo que el aprendizaje debe lograrse integrando ambos tipos de códigos. (Castro y Castro, 1997, p. 100)

Teniendo en cuenta los lineamientos expresados precedentemente, resultó de interés averiguar si los alumnos que ingresan a los estudios universitarios en nuestra facultad, pueden, al momento de iniciar dichos estudios, realizar sin problemas tareas de conversión de representaciones entre registros gráficos y analíticos. Y en caso de no ser así, conocer las dificultades que se manifiesten.

Con ese objetivo general, se llevó a cabo la experiencia que se describe en el punto siguiente.

3. Metodología

El estudio respondió a un enfoque descriptivo y exploratorio. Con el fin de obtener elementos de juicio sobre los posibles logros y dificultades de los estudiantes en la articulación de los sistemas algebraico y gráfico, se elaboró una prueba que se administró a 109 alumnos, de entre 17 y 20 años, de reciente ingreso en las distintas carreras de ingeniería, en la primera clase de matemática de sus carreras.

El instrumento a utilizar fue sometido a diversas instancias de evaluación, tanto por integrantes del equipo de investigación como por especialistas a cargo de investigaciones relacionadas. El resultado de las reestructuraciones y reformulaciones de diseño fue la versión final del cuestionario aplicado a los alumnos.

3.1. El cuestionario

Las tareas cuya ejecución se solicitó a los estudiantes se referían a temas de nivel secundario, que los alumnos, además, habían revisado en el curso introductorio que la universidad organiza previo al comienzo del año académico.

Se elaboraron 12 ejercicios alrededor de conceptos relacionados con conjuntos del plano y de la recta: intervalos, rectas, parábolas, figuras y regiones.

La prueba se centró en la conversión entre distintos sistemas de representación, si bien algunas actividades apuntaban también a la tarea de transformación en el interior de un registro determinado.

En este reporte se describen cuatro de las actividades propuestas: las relativas a la articulación de representaciones de conceptos relacionados con las funciones lineal y cuadrática. Para su resolución, los alumnos debían realizar procesos de conversión en los que debían poner en juego el cambio, en ambos sentidos, entre dos representaciones de dichos conceptos: gráfica y algebraica.

El orden en el que se presentan los ejercicios en este trabajo se eligió a los fines de una mejor organización conceptual del mismo y no necesariamente coincide con el de la prueba.

3.2. Las actividades propuestas

Las actividades se estructuraron en el seno de un plano determinado por dos ejes, que se denominaron *eje conceptual* y *eje contextual*, los cuales establecían las perspectivas desde las que se desarrolló el estudio.

Según el primero, se trabajó sobre las nociones de función lineal (L) y función cuadrática (C). Siguiendo el segundo, las acciones estuvieron dirigidas a inscribir las cuestiones en los dos contextos sobre los cuales se llevó a cabo el estudio: el algebraico (A) y el gráfico (G).

Según los cruzamientos de ambos ejes, las actividades se denominaron según lo indica Tabla 1.

		Eje Contextual: orientación	
		Algebraico a gráfico	Gráfico a algebraico
Eje conceptual	Función lineal	**A→G (L)**	**G→A (L)**
	Función cuadrática	**A→G(C)**	**G→A (C)**

Tabla 1. Denominación de las actividades

3.2.1. Actividades de conversión del registro algebraico al gráfico (A → G)

Ejercicio A→G (L)

Realiza una gráfica que represente a una función de ecuación $y = ax + b$, en donde $a > 0$ y $b < 0$, sin dar valores numéricos a *a* *y* *b*.

Ejercicio A→G (C)

Realiza una gráfica que represente a una función de ecuación $y = ax^2 + bx + c$, en donde $a > 0; c < 0\ y\ b \neq 0$, sin dar valores numéricos a *a, b* y *c*.

Figura 1. Ejercicios de conversión del registro algebraico al registro gráfico

En estos dos primeros ejercicios, se buscó saber si el alumno puede interpretar geométricamente los signos de los parámetros que intervienen en ecuaciones lineales y cuadráticas.

A tal fin, las ecuaciones propuestas se presentaron en forma totalmente literal: $y = ax + b$; $y = ax^2 + bx + c$, agregándose, en cada caso, las condiciones sobre el signo de los coeficientes que los estudiantes debían considerar.

Previendo que una posible manera de encarar el ejercicio por parte de los alumnos fuera reemplazar los parámetros literales por números concretos, se les indicó expresamente que no asignaran valores numéricos a los literales *a, b* y *c.* Con ello se buscó conocer si los alumnos podían establecer una relación directa entre las variables intervinientes en los registros gráfico y algebraico, evitándose la mediación del registro tabular. Al respecto, refiriéndose a la regla que asocia puntos y pares de números, Duval (2006) afirma que:

> usar esta regla para trazar cualquier representación gráfica no puede llevar a notar las características visuales que corresponden a las características de la ecuación algebraica convertida, porque estas características visuales son cualitativas y globales y no numéricas y locales. (Duval, 2006, p. 150).

Dado que en la escuela secundaria la función $y = ax + b$ es trabajada en varios aspectos, se esperaba que los alumnos no tuvieran mayores dificultades en vincular la ecuación con la gráfica de una línea recta e identificar sus elementos *a* y *b* como pendiente y ordenada al origen respectivamente. Sin embargo, era de interés conocer hasta qué punto los estudiantes evidenciarían interpretar gráficamente, de acuerdo con los signos estipulados, cuál puede ser la inclinación de la recta y en dónde puede encontrarse la intersección con el eje *y*.

Análogamente, para la función $y = ax^2 + bx + c$ se deseaba indagar, en principio, si los alumnos identificaban la ecuación con la gráfica de una parábola, y por otro lado, si podían establecer correctamente las relaciones de los signos del coeficiente cuadrático y del término independiente con la concavidad y la ordenada al origen, respectivamente, de la parábola, como así también interpretar gráficamente la condición $b \neq 0$.

Se previó que las tareas de conversión al sistema gráfico serían realizadas con mejores resultados en el caso de los coeficientes *a* y *c* que en el caso del parámetro *b*, teniendo en cuenta la frecuente focalización de la enseñanza previa en parábolas con eje de simetría en el eje *y*.

3.2.2. Actividades de conversión del registro gráfico al algebraico (G → A)

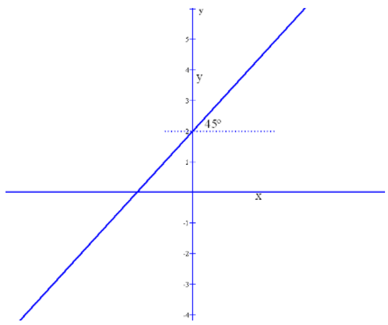
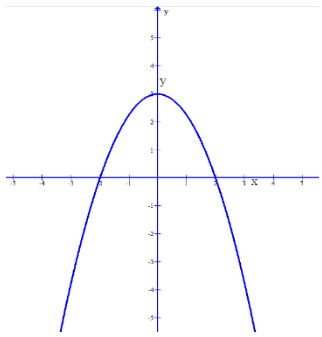
Ejercicio G→A (L). Escribe la ecuación explícita de la función cuya representación gráfica es la siguiente:	
Ejercicio G→A (C). Escribe la ecuación de la función cuadrática cuya representación gráfica es la siguiente:	

Figura 2. Ejercicios de conversión del registro gráfico al registro algebraico.

En estos ejercicios, se presentaron las gráficas de una recta y una parábola que contenían los datos suficientes para que las correspondientes expresiones algebraicas pudieran ser determinadas.

En el caso de la recta, se proporcionaron como datos el punto de intersección de la misma con el eje vertical y el ángulo que la recta determina con el semieje positivo de las x.Es posible que la relación de la pendiente de una recta con la tangente trigonométrica del ángulo mencionado sea uno de los aspectos más dificultosos al intentar determinar la expresión algebraica de la función. Por ello, en este ejercicio, se pretendió averiguar si los estudiantes relacionaban el valor de la pendiente con la posición relativa de la recta con respecto al eje horizontal.

Respecto de la obtención del parámetro *b*, se esperaba que las dificultades fueran menores, dado que la asociación de *ordenada del punto de intersección con el eje vertical – ordenada al origen* es un aspecto más trabajado (o trabajado con mejores resultados) en la escuela secundaria.

En el caso de la parábola también se apeló a pares ordenados de la gráfica que usualmente los alumnos no logran relacionar con los parámetros de la ecuación.El objetivo era ver si el alumno, a partir de un gráfico en el que se indican los valores de las intersecciones con los ejes, podía interpretar y extraer los datos que le servirían para determinar los parámetros en la construcción de la ecuación algebraica correspondiente.

En este ejercicio, se previó que la mayor dificultad estribaría en el reconocimiento del coeficiente del término cuadrático, dado que para ello los alumnos deberían realizar un procedimiento que haga uso de la conversión *punto de la gráfica – par ordenado que verifica la ecuación*. Pese al carácter congruente de esa conversión, se pensó como posible que los alumnos no tuvieran claro el sentido y posibilidades de dicha congruencia.

4. Análisis de las respuestas

El análisis fue realizado según los siguientes pasos:

a. Especificación de los valores (o rango de valores) de las variables incluidas en las representaciones propuestas en el registro en el que fue formulado el ejercicio.

b. Determinación de los valores (o rango de valores) de las variables del registro de llegada, correspondientes a cada una de las variables anteriores.

c. Determinación de las respuestas correctas de los alumnos para cada una de las conversiones involucradas.

d. Organización de las respuestas.

e. Elaboración de conclusiones parciales en referencia a los elementos del análisis a priori.

f. Formulación de conjeturas sobre las posibles causas de dificultades observadas.

g. Comparación de resultados según la dimensión temática.

h. Comparación de resultados según el tipo de conversión.

Los puntos a.-d. se presentan en tablas, diseñadas para exponer las respuestas de los estudiantes. A continuación de cada tabla, se presentan los puntos restantes.La primera columna de cada tabla refiere al registro de representación de partida, es decir, el registro en el que fue enunciado el ejercicio. En ella se distinguieron las variables correspondientes a la pregunta formulada en cada caso.

La segunda columna corresponde al registro de llegada; en ella están especificadas las respuestas expertas para cada una de las conversiones solicitadas.

En la última columna se muestran las cantidades de respuestas correctas obtenidas de los estudiantes para cada uno de los aspectos parciales que fueron analizados, aunque las respuestas no fueran necesariamente correctas en su totalidad. Por ejemplo, en el primer renglón de la Tabla 2 se presenta la cantidad de alumnos (68), sobre el total de los 109 encuestados, que propusieron el trazado de una línea recta en correspondencia a la ecuación dada, independientemente de que la gráfica realizada estuviera o no en consonancia con las condiciones de los parámetros dadas en la consigna del ejercicio. En los renglones siguientes, se consignan el número de respuestas correctas para cada una de las asociaciones entre variables algebraicas y variables visuales. Los datos que se presentan en las tablas restantes deben interpretarse de forma similar.

4.1. Resultados de actividades de conversión del registro algebraico al gráfico (A → G)4.1.1. Ejercicio A→G (L)

Registro de partida (algebraico)		Registro de llegada (gráfico)		Número de aciertos
Representación: $y = ax + b$		Representación: una recta		68
Valores de las variables algebraicas	$a > 0$	ángulo agudo con el eje x	Valores de las variables visuales	35
	$b < 0$	intersección con la rama negativa del eje y		38

Tabla 2. Respuestas al ejercicio A → G (L)

Resulta significativo que casi el 40% de los estudiantes no reconoció a $y = ax + b$ como la expresión algebraica de una recta. Por otra parte, el porcentaje de aciertos en la correspondencia de las variables visuales con las condiciones de los parámetros dadas no superó el 35%.

En términos absolutos, sobre el total de los 109 alumnos interrogados, sólo 35 relacionaron la condición $a > 0$ con un ángulo agudo con el eje x.

En lo que se refiere a la relación de la condición $b < 0$ con la intersección de la recta con el semieje negativo de y, casi las dos terceras partes del total de alumnos dio una respuesta equivocada o no respondió.

Se observaron así dificultades que se presuponía no se harían tan presentes en la noción de ordenada al origen. Casi un 45% de las respuestas erróneas propusieron intersecciones con el semieje positivo de y o confundieron a con b.

En varios casos se observó que los alumnos interpretaron los parámetros a y b como las intersecciones con los ejes, dado que marcaban a en el semieje x positivo y b en el semieje y negativo, para luego trazar la recta uniendo estas dos marcas

4.1.2. Ejercicio A→G (C)

Registro de partida (algebraico)		Registro de llegada (gráfico)		Número de aciertos
Representación: $y = ax^2 + bx + c$		Representación: una parábola		76
Valores de las	$a > 0$	Concavidad hacia arriba		47

variables algebraicas	$b \neq 0$	eje de la parábola distinto del eje y	Valores de las variables visuales	22
	$c < 0$	intersección con la rama negativa del eje y		46

Tabla 3. Respuestas al ejercicio A → G (C)

Se observa que aproximadamente el 70% de los alumnos asoció la gráfica de una parábola con la ecuación $y = ax^2 + bx + c$, aunque las características de la gráfica dibujada no estuvieron, en la mayoría de los casos, de acuerdo con el signo de los coeficientes de la expresión algebraica de la función.

En relación con ello, el 43% de los alumnos pareció conocer que el signo del coeficiente cuadrático indica el sentido de la concavidad de la curva. Los mayores desaciertos se produjeron en relación a la condición $b \neq 0$ pues la mayoría graficó parábolas con eje de simetría en el eje y. Si bien es de suponer que los alumnos habían aprendido a calcular las coordenadas del vértice dada la ecuación de una función de la forma $y = ax^2 + bx + c$, no vincularon este conocimiento con la ubicación del vértice y con las condiciones $b = 0$ o $b \neq 0$

Del cotejo de las tablas 2 y 3, puede pensarse que el concepto de ordenada al origen de una función está más arraigado en lo alumnos en relación a funciones cuadráticas que a funciones lineales.

4.2. Resultados de actividades de conversión del registro gráfico al algebraico (G → A)

4.2.1. Ejercicio G→A (L)

Registro de partida (gráfico)		Registro de llegada (algebraico)		Número de aciertos
Representación: una recta		Representación: $y = ax + b$		50
Valores de las variables visuales	intersección con el eje y en $(0,2)$	$b = 2$	Valores de las variables algebraicas	18
	Ángulo con el eje x: 45°	$a = 1$		9

Tabla 4. Respuestas al ejercicio G → A (L)

Todos los alumnos que lograron expresar la representación algebraica de una recta (45,9% del total), lo hicieron usando la forma explícita solicitada $y = ax + b$.

Aún cuando es posible que el término “ecuación explícita” no les fuera familiar a algunos, el porcentaje de error refiere a que más de la mitad de los alumnos no logró escribir la ecuación de una recta en ninguna de sus formas. Sólo el 8,3% del total de alumnos relacionó el ángulo señalado en la gráfica dada con el parámetro correspondiente a la pendiente de la recta. En términos relativos al total de aquéllos que sí escribieron la ecuación en la forma $y = ax + b$, únicamente la quinta parte logró obtener el valor del coeficiente *a*.

Podría conjeturarse que esto se debe a que en la enseñanza usual, el énfasis puede estar puesto en saber cómo calcular el valor de la pendiente, relegando la interpretación de los distintos significados que aquélla posee.

También se detectaron dificultades, aunque en menor medida, en la actividad de conversión en lo que refiere a la relación entre el punto en el que la recta interseca al eje y con el valor de b en la ecuación, ya que el 64% de los alumnos que propuso la ecuación en la forma solicitada no pudo estimarlo correctamente.

4.2.2. Ejercicio G→A (C)

El 62.8% de los alumnos propuso la ecuación de una función cuadrática como representación algebraica de la parábola.

En este caso, los alumnos recurrieron a diferentes formas de la ecuación: general ($y = ax^2 + bx + c$), factorizada ($y = a\,(x - r_1).(x - r_2)$) o canónica ($y = a(x-h)^2 + k$), por lo que se vuelcan los resultados obtenidos en tres tablas, distinguiendo el pasaje del registro gráfico al algebraico en tres casos según el tipo de representación elegido: Caso I (ecuación general), Caso II (ecuación factorizada) y Caso III (ecuación canónica). En cada caso se contabilizó el número de quienes pudieron establecer la relación entre el dato otorgado por la gráfica (valor de la variable visual) y el parámetro (valor de la variable algebraica) correspondiente en la ecuación escogida.

<table>
<tr><th colspan="5">Caso I</th></tr>
<tr><th colspan="2">Registro de partida (gráfico)</th><th colspan="2">Registro de llegada (algebraico)</th><th>Número de aciertos</th></tr>
<tr><td colspan="2">Representación: una parábola</td><td colspan="2">Representación: $y = ax^2 + bx + c$</td><td>56</td></tr>
<tr><td>Valores de las variables visuales</td><td>intersección con el eje y en $(0,3)$</td><td>$c = 3$</td><td>Valores de las variables algebraicas</td><td>48</td></tr>
</table>

	eje de simetría el eje y	$b = 0$		33
	puntos sobre la gráfica: $(-2,0)$ y $(2,0)$	pares (x, y) que verifican la ecuación		3
	concavidad hacia abajo	$a < 0$		40

Tabla 5. Respuestas al ejercicio G → A (C) Caso I

El 51.4% de los alumnos vinculó la representación de la curva en forma de parábola con la representación algebraica $y = ax^2 + bx + c$

Para obtener el valor de c, se esperaba que el alumno observe del gráfico el valor de la intersección con el eje y asignándole dicho valor. Para obtener el valor de b, se pretendió que observe que, dado que las raíces de la parábola son números opuestos, el eje de simetría es el eje y, en consecuencia, $b = 0$. Los aciertos de estas correspondencias fueron del 85.7 % en la obtención de c y del 58.9 % en la de b. La concavidad hacia abajo de la parábola indicando que el coeficiente a es negativo, resultó en que el 71.4 % hiciera esta correspondencia. Aquí se buscó que el alumno determine un valor para este coeficiente recurriendo a la búsqueda de un punto (x, y) que verifique la ecuación, siendo los más evidentes las intersecciones con el eje x o con el eje y. En las respuestas se observó que este parámetro fue el que más costó determinar y se evidencia ello en el escaso porcentaje de aciertos (5.4%). La mayoría de los alumnos dentro de este caso mostró la ecuación general de la parábola tomando $a = 1$ y algunos otros dejaron indicado con la letra "*a*".

Es de hacer notar que estos porcentajes corresponden al total de alumnos que propusieron la forma $y = ax^2 + bx + c$ de la expresión algebraica de la parábola y no referido a la totalidad de los alumnos que realizó la prueba.

Caso II		
Registro de partida (gráfico)	**Registro de llegada (algebraico)**	**Número de aciertos**
Representación: una parábola	Representación: $y = a\,(x - r_1).(x - r_2)$	10

Valores de las variables visuales	intersecciones con el eje x en $(-2,0)$ y $(2,0)$	$r_1 = -2$ y $r_2 = 2$	Valores de las variables algebraicas	10
	Punto sobre la gráfica: $(0,3)$	pares (x, y) que verifican la ecuación		1
	concavidad hacia abajo	$a < 0$		3

Tabla 6. Respuestas al ejercicio G → A (C) Caso II

En este caso, sólo el 9.2 % de los alumnos representaron algebraicamente con la ecuación $y = a\,(x - r_1).(x - r_2)$ a la parábola dada en el gráfico.

Todos esos alumnos acertaron en asignar a los parámetros r_1 y r_2 los valores de los puntos donde la parábola interseca al eje x.

La determinación del parámetro a presentó mayor dificultad. El 30 % interpretó que el signo de a es negativo ya que la concavidad de la parábola es hacia abajo pero sólo el 10 % pudo determinar un valor específico utilizando un punto (x, y) que verifique la ecuación; por ejemplo, se esperaba que se utilice el punto de intersección con el eje y, ya que conducía a cuentas más sencillas para hallar a.

Aquí, la mayoría de los alumnos que no escribieron correctamente el valor de *a*, mostraron la ecuación factorizada de la parábola con un valor de *a* arbitrario pero negativo y otros lo dejaron indicado con las expresiones literales *"-a"* o *"a "*.

Caso III				
Registro de partida (gráfico)		**Registro de llegada (algebraico)**		**Número de aciertos**
Representación: una parábola		Representación: $y = a\,(x - h)^2 + k$		2
Valores de las variables visuales	vértice de la parábola: $(0,3)$	$h = 0$ $k = 3$	Valores de las variables algebraicas	2

	Punto sobre la gráfica: $(0,3)$	pares (x,y) que verifican la ecuación		1
	concavidad hacia abajo	$a<0$		2

Tabla 7. Respuestas al ejercicio G → A (C) Caso III

Sólo 2 alumnos vincularon la representación de la curva en forma de parábola con la representación algebraica $y = a\,(x-h)^2 + k$. Ambos asignaron los valores de la abscisa y ordenada del vértice a los parámetros h y k respectivamente, como también expresaron que el parámetro *a* debe ser negativo por observación de la concavidad hacia abajo de la parábola, pero sólo uno de ellos pudo determinar un valor, utilizando como ayuda las coordenadas de las dos raíces como puntos que verifican la ecuación. El otro alumno propuso la ecuación canónica de la parábola con un valor de *a* arbitrario aunque negativo.

4.3. Resumen General

En la Figura 3 que sigue se resumen los resultados de los cuatro ejercicios de conversión considerados. En este caso, los porcentajes se refieren a la respuesta dada en su totalidad.

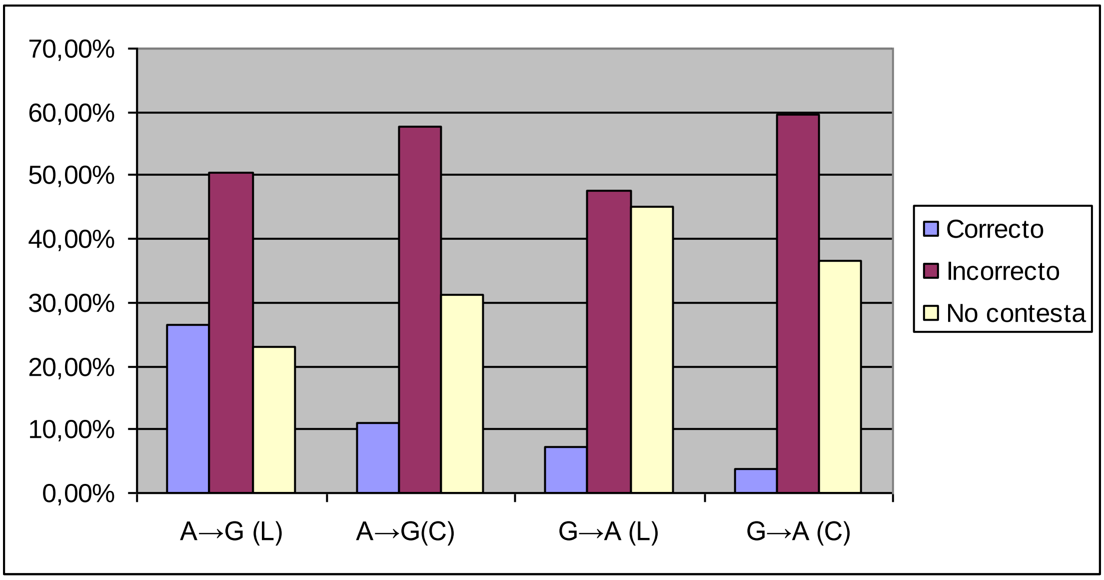


Figura 3. Resultados referidos a las respuestas en su totalidad

Teniendo en cuenta el eje conceptual, puede advertirse que el trabajo sobre la función lineal tuvo mejores resultados que el correspondiente a la función cuadrática.

Por otra parte, en lo que refiere a las conversiones en uno y otro sentido, es claro que el mayor número de respuestas correctas se dio en las actividades de pasaje del registro algebraico al gráfico.

En todos los casos, la suma de los ejercicios contestados incorrectamente con los no respondidos superó ampliamente a las respuestas correctas.

4. Conclusiones y reflexiones

Los datos obtenidos en este estudio revelan que, en lo que se refiere a las funciones lineales y cuadráticas, una considerable proporción de los estudiantes encuestados no logró establecer una articulación espontánea y exenta de errores de sus representaciones, lo cual proporciona indicadores de la ausencia de una aprehensión conceptual de los objetos en estudio considerados.

En lo que se refiere a la función lineal, los errores en la coordinación de los registros se observan tanto en la noción de pendiente como en la de ordenada al origen. Si bien se había previsto la dificultad de los alumnos en conectar el parámetro a de la expresión $y = ax + b$ con la inclinación de la recta, resultó un tanto sorpresivo que los problemas de articulación se manifestaran también, en un porcentaje similar, con respecto al concepto de ordenada al origen.

Respecto de las dificultades en articular representaciones en el caso de la función cuadrática, también es claro que se manifiestan en todas las variables en juego. Una de las más notorias resultó la relación entre el coeficiente del término lineal con la posición del eje de la parábola. También fue claro que los alumnos no acertaron a establecer el coeficiente del término cuadrático mediante la información visual contenida en la gráfica.

Los problemas se revelan con mayor fuerza cuando el registro de partida es el gráfico. Aparecen manifiestos los inconvenientes que habitualmente también se observan en el trabajo de los alumnos en el aula y que es posible que les dificulten el realizar generalizaciones, formalizaciones y abstracciones.

En ese sentido, es notoria la diferencia que existe, tanto en el caso de la función lineal como de la cuadrática, entre el número de respuestas correctas en la conversión del registro algebraico al gráfico con la cantidad de aciertos cuando se trata de realizar la conversión en sentido contrario.

Por ejemplo, llama la atención que el porcentaje de alumnos que en el registro algebraico reconocieron que el signo de la ordenada al origen de una función lineal refiere a que ésta interseca al semieje y positivo o negativo (aproximadamente el 34,8%), duplica con creces al que representa a los estudiantes que en el registro gráfico identificaron el valor 2 dado en el eje y con el valor del parámetro b en la ecuación de la función (aproximadamente el 16,5%).

Es posible que las diferencias observadas se deban al desigual abordaje que se realiza en la enseñanza entre las formas en que se expresan en ambos registros las funciones polinómicas de primer y segundo grado.

A pesar de que existe abundante investigación y resultados en Educación Matemática sobre el tema expuesto, que expresan la potencialidad de pensar e implementar acciones en torno a las bondades del cambio de registros como una competencia a desarrollar, pareciera que, en el marco contextual en el que se desarrolló este estudio, aún es insuficiente la presencia de esos procedimientos tanto en las actividades áulicas como en los materiales de enseñanza utilizados.

Los datos obtenidos y las observaciones y conclusiones que pueden derivarse de los mismos, permiten formular interrogantes acerca del grado de incidencia de los errores provenientes de conocimientos previos, en los resultados conseguidos por los alumnos en el primer año de su vida universitaria. En este sentido, se prevé continuar el estudio con el análisis de la persistencia de los distintos tipos de errores en la primera materia de matemática de la carrera, relacionando la información obtenida en este trabajo con los resultados de los estudiantes en evaluaciones que incluyan la propuesta de problemas en los que se inserten posibles fuentes de error proveniente de dificultades de articulación de representaciones.

Bibliografía

Blázquez, S. y Ortega, T. (2001). *Los sistemas de representación en la enseñanza del límite. Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa.* (4), 3, 219-236.

Buteler, L. y Gangoso, Z. (2001). *Diferentes enunciados del mismo problema: problemas diferentes?. Investigações em Ensino de Ciências*. (6)3, 269-283.

Cantoral, R. y Farfán, R. (1998). *Pensamiento y lenguaje variacional en la introducción al análisis. Épsilon,* 42,353-369.

Castro E. y Castro E. (1997). *Representaciones y modelización*. En Rico, L. (comp.) *La educación matemática en la enseñanza secundaria*, 95-124. Horsori, Barcelona, España.

Davis, P. J. (1993). *Visual theorems*. *Educational Studies in Mathematics* 24, 333-334.

Díaz Lozano, M., Haye, E., Macías, M. (2012). *Estrategias didácticas en la elaboración de un módulo destinado a la enseñanza a distancia de Trigonometría. Revista de Educación Matemática de la Unión Matemática Argentina*. (27),nro.1.

Dreyfus T. (1992) *Imagery and Reasoning in Mathematics and Mathematics. Education. ICME-7 Selected Lectures*, Les Presses de l'Université Laval, 107-123

Duval, R. (1998). *Registros de representación semiótica y funcionamiento cognitivo del pensamiento.* En Hitt, F. (Ed), *Investigaciones en Matemática Educativa II*. Grupo Editorial Iberoamérica, México. 173-201

Duval, R. (1999). *Representation, vision and visualization: cognitive functions in mathematical thinking, basic issues for learning*. *Actas del PME, 23*, 3-26.

Duval, R. (2006). *Un tema crucial en la educación matemática: la habilidad para cambiar el registro de representación*. *La Gaceta de la RSME*, (9),1, 143-168.

González-Martín, A. y Camacho, M. (2005). *Sobre la comprensión en estudiantes de matemáticas del concepto de integral impropia. Algunas dificultades, obstáculos y errores. Enseñanza de las Ciencias*, 23(1), 81-94.

Hitt, F. (2001). *El papel de los esquemas, las conexiones y las representaciones internas y externas dentro de un Proyecto de Investigación en Educación Matemática.* En P. Gómez y L. Rico (Eds.), *Iniciación a la Investigación en Didáctica de la Matemática*, Universidad de Granada. 165-178.

Hitt, F. (2003) *Una Reflexión Sobre la Construcción de Conceptos Matemáticos en Ambientes con Tecnología*. *Boletín de la Asociación Matemática Venezolana*, (X), 2, 213- 223.

Ismenia Guzmán, R. (1998). *Registros de representación, el aprendizaje de nociones relativas a funciones: voces de estudiantes*. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa.* (1), 1, 5-21. México, D.F.

Johnson-Laird, P. N. (1996). *Images, Models and Propositional Representations*. 90-127. En De Vega, M; Intons-Peterson, M. J.; Johnson-Laird, P. N.; Denis, M. y Marschark, M. *Models of Visuospatial Cognition*. Oxford. University Press. 230.

Lupiañez, J. y Moreno, L. (2001). *Tecnología y Representaciones Semióticas en el Aprendizaje de las Matemáticas*. En Gómez, P., y Rico, L. (Eds.). *Iniciación a la investigación en didáctica de la matemática .Homenaje al profesor Mauricio Castro*. Granada: Editorial Universidad de Granada. 291-300.

Nersessian, N. (2007) *Razonamiento basado en modelos y cambio conceptual*. *Rev. Eureka sobre Enseñanza y Divulgación de las Ciencias.* (4), 3, 563-570.

Otero, M. R., Greca, I. M., Silveira, F. L. (2003). Imágenes visuales en el aula y rendimiento escolar en Física: un estudio comparativo. *Revista Electrónica de Enseñanza de las Ciencias*, (2), 1, 1-30.

Autores

Maria Elina Díaz Lozano. Licenciada en matemática. Profesora Titular de la Universidad Nacional de Litoral. (Argentina). Desde 1994 dirige proyectos de investigación sobre temas de matemática y enseñanza de matemática. Líneas de investigación: inversas generalizadas; factores que inciden en el bajo rendimiento en el aprendizaje de matemática. mdiazlo@gmail.com

Egle Elisabet Haye. Licenciada en Matemática Aplicada y en el 2009 finalizó la Maestría en Matemática (Universidad Nacional del Litoral) en el área del Análisis Numérico. Desde 2007 es Profesora Adjunta Exclusiva en la Facultad de Ingeniería y Ciencias Hídricas donde se desempeña como docente en las áreas de Algebra Lineal y Ecuaciones Diferenciales. elihaye@gmail.com

Fabiana Montenegro.Profesora en Matemática, Licenciada en Matemática Aplicada y Magíster en Matemática. Actualmente se desempeña como Jefe de Trabajos Prácticos de la Facultad de Ingeniería y Cs Hídricas de la Universidad Nacional del Litoral. Desde 2006 es integrante de proyectos de investigación en el área de Educación Matemática. montenegrofabina@yahoo.com.ar

Luis María Córdoba. Profesor en Matemáticas. Cursó sus estudios de grado y posgrado en la Universidad Nacional del Litoral, Jefe de Trabajos Prácticos en la Facultad de Ciencias Económicas y en la cátedra de Cálculo y Geometría Analítica en la Facultad de Ingeniería y Ciencias Hídricas. lmcordoba@hotmail.com

UNIÓN
REVISTA IBEROAMERICANA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA

ISSN: 1815-0640
Número 41. Marzo 2015
Páginas 39-56

Saberes matemáticos na ação cidadã: conhecimento de números decimais de jovens e adultos

Valdenice Leitão da Silva,Rute Elizabete de Souza Rosa Borba,
Carlos Eduardo Ferreira Monteiro

Fecha de recepción:18/01/2011
Fecha de aceptación: 20/06/2013

Resumen

En ese artículo, se presentan dos estudios realizados en la Educación de Jóvenes y Adultos (EJA). El primero trata de una experiencia de dinamización curricular, en la que se buscó abarcar los contenidos matemáticos a partir de su utilidad para los estudiantes, que mencionan los decimales como siendo esenciales en su vida cotidiana. El segundo, focaliza los conocimientos, con variación de contexto, significado, propiedad y representación simbólica en la presentación de los números decimales. Los resultados indican que los conocimientos obtenidos fuera de la escuela afectan el desempeño de los adultos cuando son comparados al de los niños en edad escolar.
Palabras-clave: números decimales, educación matemática, educación de jóvenes y adultos.

Abstract

This paper presents two studies that involved adults in initial stages of schooling. The first study was an investigation into dynamic curricular design, which examined the relevance of mathematics to students that mentioned decimals as essential in their everyday lives. The second study focused on knowledge – varying contexts, meanings, properties and symbolic representations in the presentation of decimal numbers, observing how out of school knowledge affects adult performance, when compared with schooled children. The results indicate that encouraging students' development of decimal understanding is an important school role that favours active citizenship.
Keywords: **decimal numbers, mathematics education, youth and adult education.**

Resumo

Neste artigo apresentam-se dois estudos realizados na Educação de Jovens e Adultos (EJA). O primeiro trata de uma experiência de dinamização curricular, no qual se buscou abordar os conteúdos matemáticos a partir da sua utilidade para os estudantes, os quais mencionam os decimais como essenciais nos seus cotidianos. No segundo focalizaram-se saberes – variando contexto, significado, propriedade e representação simbólica na apresentação dos números decimais. Os resultados obtidos indicam que os saberes extra-escolares de decimais afetam desempenhos de adultos quando comparados com o de crianças escolarizadas.
Palavras-chave: números decimais, educação matemática, educação de jovens e adultos.

1. Introdução

O reconhecimento de que a escola constitui lócus colaborativo para a formação na perspectiva de preparar os estudantes para o exercício da cidadania parece ser consensual, tanto na expressão dos documentos oficiais, quanto nas proposições pedagógicas institucionais. No entanto, a efetivação de tal premissa, não é tarefa simples tornando-se, assim, necessária a atenção a diversos aspectos, em particular contemplando ações de resgate dos direitos, sobretudo quando se refere ao desenvolvimento de projetos voltados para a Educação de Jovens, Adultos. Nestes projetos a responsabilidade no direcionamento da ação pedagógica ocupa dimensões vastas, visto que esta modalidade de ensino é constituída por um público escolar com amplas experiências da práxis social.

Neste artigo defende-se a importância a ser atribuída aos conteúdos matemáticos, particularmente do domínio dos números decimais, enquanto construto favorecedor do exercício da cidadania. Nele, apresentam-se estudos de Silva e Monteiro (2000) e Silva e Borba (2006), realizados na Educação de Jovens e Adultos (EJA). No primeiro, levantam-se situações nas quais os alunos sentiram-se “lesados” na condição cidadã, pelo não domínio do saber matemático; e no segundo estudo, focalizam-se saberes de adultos no campo dos números decimais – sendo extra-escolares ou da escolarização, a partir da realização de um estudo comparativo, nesse campo numérico, dos desempenhos de estudantes adultos e crianças.

Fonseca (2002, pp. 26-32), afirma que buscar aprender Matemática tem sido um forte componente gerador da necessidade do aluno da EJA voltar ou começar a estudar, tendo em vista a consciência do valor do domínio dos conteúdos para atuação em diversos contextos da vida. Nos nossos estudos, baseados em dados empíricos de pesquisa, nós destacamos a relevância da compreensão dos conceitos matemáticos relacionados aos números decimais para a ação eficaz de estudantes em transações comerciais e/ou profissionais.

Alunos da EJA exercem atividades profissionais diversas tais como: costureiras, domésticas, feirantes, marceneiros, pedreiros, serventes etc. Desta maneira, eles têm conhecimentos matemáticos que são frutos das suas vivências. Para o exercício das suas atividades profissionais, estes sujeitos criam seu próprio sistema de comunicação matemática, estabelecendo relações quantitativas e explorando formas espaciais do mundo físico em níveis diversos de complexidade, generalidade e sistematização, que precisam ser considerados nos processos de ensino, favorecendo novas construções conceituais.

Embora seja reconhecida a importância dos conhecimentos prévios dos quais jovens e adultos possuem – saberes construídos ao longo da vida – sabe-se que esses saberes não são suficientes para o enfrentamento de todas as situações vivenciadas por eles. Na escola, os alunos devem participar de processos de ensino e de aprendizagem que (re) signifiquem seus conhecimentos adquiridos a partir de experiências vivenciadas em situações não formais ou informais. Esse é um desafio para educadores que precisam propor situações de ensino que contribuam para que o aluno tenha perspectivas de seus conhecimentos a partir de modelos formais, ou seja, que o aluno reconheça que já possui saberes dos conteúdos escolares abordados, mas que há, ainda, aspectos dos mesmos que precisam ser desenvolvidos.

Fonseca (2002, pp. 73-86) admite que a aprendizagem da Matemática na EJA deva justificar-se com oportunidades de fazer emergir uma emoção que co-move os sujeitos enquanto resgata (e atualiza) vivências, sentimentos, cultura e, num processo de confronto e reorganização, acrescenta mais um elo à história dos seus conhecimentos matemáticos.

Os estudos de Silva e Monteiro (2000) e de Silva e Borba (2006) apontam para a necessidade de considerar que esses cidadãos detêm muitos conhecimentos matemáticos, em particular sobre números decimais, mas precisam ampliar suas competências na escola, para melhor atuação de cidadão, tanto no campo profissional, quanto de consumidor e de outros papéis exercidos na sociedade.

No artigo em tela, discutimos, ao apresentar o primeiro estudo (SILVA e MONTEIRO, 2000), situações vivenciadas por estudantes em início de escolarização no campo da matemática que envolvem números decimais, objetivando focalizar a percepção de que o domínio conceitual deste conceito pode favorecer o enfrentamento destas e de outras situações com as quais os estudantes possam se deparar. No segundo estudo (SILVA e BORBA, 2006), discute-se a relevância de se considerar os saberes dos estudantes, sendo adultos ou crianças, em números decimais, construídos em espaços extra-escolares, oportunizando qualificar a condução de processos de aprendizagem na escola para as distintas modalidades de ensino.

Acredita-se que a relevância de tais estudos apresenta-se na complementaridade das informações que apresentam, sobretudo no nível de implicações para a escola, visto que no primeiro estudo espontaneamente foram se apresentando situações que exigiam abordar números decimais e o enfrentamento delas, evidenciando o quanto este conceito precisa ser compreendido, devido à freqüência de situações vividas pelos estudantes (que a escola não pode desconsiderar) nas quais o domínio apenas dos números inteiros é insuficiente para enfrentá-las e que os próprios estudantes revelavam-se incapacitados nos seus discursos. Já o segundo estudo, ao investigar saberes de adultos e crianças deste conceito, oportunizou confirmar o quanto diferem saberes em números decimais, de acordo com o engajamento em práticas sociais (mundo de trabalho, atuação enquanto consumidor, dentre outras). Variações de contexto de apresentação dos números decimais, de significados, de propriedades e de representações simbólicas dos números decimais, oportunizaram avaliar a compreensão do número decimal entre estudantes adultos e crianças.

2. Discutindo a Matemática na ação cidadã

A necessidade do domínio conceitual nos diversos campos do saber justifica a frequência de estudantes noite a noite nas salas de aula da EJA, motivados pelas possíveis aprendizagens e enfrentando o cansaço da luta diária. Estes estudantes vão à escola porque, enquanto cidadãos, muitos se reconhecem *impotentes* pelo não domínio do saber escolarizado. Já sabem muita Matemática, no entanto, como suas estratégias de cálculo diferem das convencionais (e já são críticos o suficiente para perceber), reconhecem que muitas vezes, estas são insuficientes para resolver problemas impostos pelas vivências sociais, desqualificando o exercício da cidadania na sua plenitude.

Silva e Monteiro (2000) investigaram quais as repercussões de um projeto didático intitulado *Cidadania: que bicho é esse?* junto a um grupo de 34 estudantes de Módulo I de EJA, numa escola da zona oeste da Rede Municipal de Ensino de Recife. A motivação para esse estudo vinculou-se à necessidade de investigar o desenvolvimento de uma experiência de dinamização curricular, abordando como eixo articulador a cidadania, na perspectiva da orientação para o desenvolvimento integral do ser humano.

A produção dos dados de pesquisa foi desenvolvida em situações didáticas com os alunos e foram utilizados diversos instrumentos de coleta de dados. Inicialmente, foi proposta aos alunos a elaboração (registro) de um *projeto de vida*, buscando responder as questões: *O que não quero? O que quero? Como penso em fazer?* Estas perguntas referiam-se às ações dos (as) estudantes no âmbito da família, da escola e nos momentos de lazer.

Após analisar as ações e registros dos alunos frente a esse primeiro momento, foi proposta uma segunda situação na qual os estudantes foram indagados acerca do que seria cidadania. Essa situação de pesquisa foi videogravada, objetivando documentar os relatos e/ou atitudes dos estudantes frente à temática em tela. Inicialmente foram apresentadas três questões básicas para que os jovens, adultos e idosos, ao responderem os questionamentos, apresentassem suas prévias concepções acerca do tema em estudo, sendo elas:

1. O que você entende por ser cidadão?
2. O que é necessário para exercer a cidadania?
3. Você já se sentiu lesado na condição de cidadão? Quando? Onde? Como?

As respostas para as questões foram diversas, no entanto, um aspecto pareceu evidenciar-se na percepção de cidadania por esse grupo de estudantes: seus reconhecimentos como partícipes de uma *cidadania parcial*. O Quadro 1, apresenta as categorias das respostas dadas à pergunta *O que você entende por ser cidadão?*

Respostas	Frequência (%)
“Ser uma pessoa de posses”	**18 (53)**
“Ser uma pessoa conhecida”	**08 (23)**
“Ser um bom caráter”	**06 (18)**
“Ser um homem de bem”	**02 (06)**

Quadro 1. Respostas dos participantes à pergunta: ‘O que você entende por se cidadão?’

Percebia-se, ao explorar as concepções dos estudantes, que eles pouco se reconheciam cidadãos, uma vez que atrelavam a condição cidadã ao aspecto material – condição financeira. Por isso, afirmavam, majoritariamente, como atributo de cidadania *ter posses*, e quando indagados sobre o que entendiam por posses, reafirmavam: é ter dinheiro, imóveis, propriedades, porque só assim a pessoa se torna conhecida no lugar e é respeitada. O depoimento que segue de um estudante parece resumir a opinião dos colegas ao final da conversa desta aula.

> “Professora! [exclama a aluna]... se você chegar em qualquer interior desses de Pernambuco e perguntar quem é o homem mais conhecido daquele lugar, todo mundo vai dizer que é seu fulano... o que é político, o grande fazendeiro, ou

grande comerciante. As pessoas que têm mais posses é as que são conhecidas no lugar por todo mundo! O pobre, professora, ninguém conhece, a não ser que ele faça uma coisa errada [faz careta], aí as pessoas passam a comentar, principalmente em lugar pequeno, ficam procurando saber quem é... Mas será que o rico não erra? [sorri com sarcasmo], mas isso quase não se comenta! Então, é como tá sendo dito aqui: o negócio é ter posses prá ser conhecido. Ser de bem e bom caráter é importante, mas o respeito é pouco...[faz uma pausa, pensativa] nossos pais, davam valor a isso, eram todos pobres e ensinavam a gente ser bom caráter, mas principalmente hoje, não é suficiente pra viver e ser respeitado [dizendo de maneira enfática]. É por isso que temos que estudar, porque vamos ser mais respeitados, menos enganados" (J. A. S., 54 anos).

Nesse trecho do protocolo, a estudante associa o exercício da cidadania apenas àquelas pessoas favorecidas economicamente, considerando que a sociedade privilegia mais o aspecto do ter que do ser. Além disso, a fala dessa estudante também denuncia as desigualdades sociais quanto à punição pelo não cumprimento dos deveres por parte dos *ricos*. Dessa maneira, ela denuncia que, em geral, apenas as populações em sócio-economicamente desfavorecidas são punidas.

Ainda pode ser evidenciado nesse trecho do protocolo, que a estudante enfatiza o papel da escolarização como uma maneira de empoderamento das classes populares no enfrentamento das situações da vida. Esse aspecto do discurso da aluna está relacionado à idéia de que a aprendizagem formal da Língua Portuguesa e da Matemática, mesmo não constituindo condição imediata para melhoria da qualidade de vida dessas pessoas, constitui valia para diálogos mais competentes e atitudes mais convictas.

As falas dos demais participantes se aproximaram daquela explicitada no extrato de protocolo acima, uma vez que durante a situação de pesquisa, quando indagados acerca do *que seria necessário para exercer cidadania*, os estudantes mencionaram como condições indispensáveis: *saber ler e escrever*; *ter um trabalho* e *possuir conhecimento com pessoas de influência*.

A importância da escolarização para a formação na identidade cidadã foi também explicitada no depoimento de outra aluna, a qual foi aplaudida por seus colegas quando trouxe numa frase do seu depoimento: "ter estudo: porque sem estudo ninguém é nada!" (M.E.S., 46 anos). O sentimento de auto-desvalia em relação à sua atuação de cidadã, encontra-se explícito nesse *desabafo* e é revelador de que, certamente, essa estudante e outros – os que aplaudiram – em momentos do exercício de sua práxis de cidadão trabalhador, consumidor e de outras naturezas, já devam ter vivenciado situações nas quais o desrespeito marcou suas vidas.

Buscando identificar referências explícitas dessas situações vivenciadas pelos estudantes em suas práticas cotidianas, foi que se propôs uma terceira questão ao grupo de participantes do estudo: *Você já se sentiu lesado na sua condição de cidadão/cidadã – quando, onde, como?* Ao responderem a terceira questão, alunos jovens, adultos e idosos do grupo, foram pontuando as mais diversas situações que constituem parte de suas vivências, ora marcadas por *má fé* de quem interagia com eles, ora pelos seus despreparos para lidar com a situação, dentre outros fatores. Ao debaterem essa terceira questão, a maioria dos casos citados nas falas dos participantes, relacionava-se ao não domínio do saber matemático, como forte componente de, no dizer deles, *se dar mal* na situação.

A partir das análises dos dados de nossa pesquisa, ficou evidenciado que nas falas dos alunos participantes, eles atribuíam uma importância à aprendizagem da Matemática escolar. De uma maneira implícita, identificamos que os estudantes percebiam que seus conhecimentos matemáticos não-escolares eram inferiores. As dificuldades que enfrentaram ao estudarem Matemática na escola reforçaram o mito de que esta disciplina é difícil e por isso os alunos não aprendem. O seguinte extrato de protocolo ilustra essa problemática:

> "Eu fui contratar um serviço de aplicação de cerâmica na casa de uma cliente, e foi muito complicado combinar o valor do trabalho porque eu sei fazer todo cálculo na mente, mas a cliente não entendia como eu explicava. Como eu não sei fazer a conta certinha no papel, ela – que era estudada – fez umas contas lá e tentou me convencer. Acabei aceitando a conversa dela, mas eu vi que não foi negócio pra mim, ela é que não sabia fazer a conta certa! Não adianta professora, a gente precisa saber fazer a conta e mostrar no papel porque não dão valor ao nosso pensamento, só se provar com os números, as contas do jeito que eles entende..." (M. F. L., 39anos).

Na fala desse estudante adulto, trabalhador, está explicito o valor que atribui ao conhecimento matemático para lidar com situações que exigem cálculo e conferência de valores, garantindo a segurança de que não se está sendo enganado. Segundo Fonseca (2002, pp. 32-40), estudos indicam o anseio por dominar conceitos e procedimentos da Matemática, como forte componente da geração da necessidade do aluno da EJA voltar ou começar a estudar. No entanto, não se trata de buscar na escola apenas a aquisição de um instrumental para uso imediato na vida diária, pois grande parte das noções e habilidades matemáticas que frequentemente utilizam no dia-dia, eles já dominam razoavelmente bem, como afirmam Carraher; Carraher e Schliemann (1988, p. 179). No seguinte extrato de protocolo, a fala de um dos participantes da pesquisa exemplifica essa questão a partir de uma situação vivenciada:

> "Eu me lembro de uma vez que fui comprar uma televisão que tenho lá em casa. Comprei a crediário, no carnê. O valor da televisão era trezentos e sessenta reais [R$360,00] na compra a prazo, e à vista a loja dava 20% de desconto... Eu nem sabia quanto ficava mesmo com esse desconto... mas eu sei que eles não saem perdendo... Já botam um desconto que faz parte do preço que querem cobrar... Só sei que eu combinei de dividir em seis parcelas, porque o vendedor disse que ficava sem juros e eu não tinha o dinheiro pra pagar à vista. Ficava seis de sessenta reais [6xR$60,00]... mas acontece que fiquei desempregado e atrasei o pagamento. Sabe quanto veio o valor da parcela? Subiu pra noventa e cinco reais [R$95,00]. Que juro foi esse? Mostrei o papel da compra a um colega que lê bem... pra ele ver se encontrava o valor da cobrança de juros se atrasasse... eu não entendo essas coisas, mas sabia que tava demais! A sorte é que eu esperei receber meu seguro desemprego e fui lá negociar o resto da minha dívida, meu amigo orientou pra eu levar minha carteira profissional e mostrar que estava desempregado na época do vencimento da parcela... então, me livrei dessa... mas, se não tivesse recurso nenhum? E se não tivesse quem orientasse? Quem não sabe calcular, pode ser enganado o tempo todo professora! Eu quero aprender todas essas contas pra não ser enganado, mostrar que sei, pra exigir meus direitos, deixar os ladrões desmascarados!" (S. J. S., 54 anos).

Esse depoimento, dentre outros, é revelador de que atender ao desejo de aprendizagem matemática de tantos jovens, adultos e idosos é pensar no uso da Matemática nos contextos não escolares e desenvolver práticas docentes que confrontam os conhecimentos adquiridos nesses contextos com a versão escolar. Exige reconhecer que adultos são portadores de experiências de vida que precisam ser valorizadas: modos de pensar, de sentir, de observar, de interpretar e de julgar, que produzem conhecimentos os quais são mobilizados na resolução de problemas do cotidiano. Esses alunos precisam ser atendidos nos anseios de aprender a Matemática escolar que instrumentalize-os para o fortalecimento da sua identidade cidadã, através do enfretamento de situações problemas nas suas vidas, tal como o exemplo a seguir, requerendo apoiá-los no avanço em seus conhecimentos.

> “Passei mais de seis meses sem receber meu dinheiro certo... eu sou pensionista e sabia que recebi o direito do auxílio alimentação no meu dinheiro, mas como eu não calculei quanto seria mesmo, eu fiquei recebendo o que mandavam. Um dia encontrei minha colega, também pensionista, e recebia do esposo que era colega de trabalho do meu marido. Ela mostrou o contracheque a mim e eu vi que o valor era maior mesmo... aí tomei minhas providências: fui na firma...reclamei pra corrigir...”(J. M. C., 68 anos).

Para essa estudante da EJA, aprender a fazer interpretações dos registros matemáticos que se apresentam em documentos tais como contracheques, parece constituir um importante papel no exercício de sua cidadania ativa. Portanto, nas aulas de Matemática, estudantes como os que deram os depoimentos aqui relatados, esperam que o currículo escolar atenda a essa demanda de necessidade e, assim, apresente-se como fator importante na atenção às questões que estão postas na sua vida. Dessa maneira, o ensino de Matemática na EJA deve considerar as motivações dos estudantes e buscar ampliar a perspectiva da Matemática por via de conhecimentos diversos (GARCIA, 1999, p. 16).

Neste artigo optamos por abordar especificamente um tópico matemático vinculado à maior parte das queixas dos participantes, as dificuldades com os números decimais. Apresentamos a seguir situações descritas pelos participantes deste estudo, reveladoras da necessidade desse conhecimento matemático específico para exigir seus direitos como cidadãos.

3. Números decimais no exercício da cidadania

O não domínio do código escrito para a representação matemática, sobretudo no que se refere à notação monetária decimal, apresentou-se como ponto crucial nas transações comerciais ou profissionais mencionadas nas falas dos participantes do primeiro estudo, em especial em ocasiões de pagamento nas quais sentiam-se *lesados*, sobretudo nas seguintes situações: (1) na impossibilidade de conferência do cálculo de valores monetários; (2) na cobrança de juros abusivos; (3) em situações de trabalho; (4) no entendimento dos seus direitos de percepção de vencimentos.

Num primeiro exemplo, podemos identificar um relato bastante comum entre estudantes da Educação de Jovens e Adultos, a dificuldade de realizar operações por escrito como impedimento para certificação de resultados de cálculos. Respondendo a questão: *Você já se sentiu lesado na sua condição de cidadão/cidadã – quando, onde, como?*

> “Professora, quando a gente vai fazer compra em barraca... e não sabe fazer conta no papel... em feira livre, é a mesma coisa! Não tem condição de saber se está pagando o preço justo do que traz. O comerciante não quer saber de perder um centavo... aí sempre arredonda as contas prá ter lucro, né? Comprar em barraca tem isso! No supermercado é mais fácil... porque eu não sei ler, mas dá pra entender os valores [a escrita numérica dos preços]. Uma vez fui comprar charque na barraca perto de casa e pedi um quilo e meio... repare: um quilo custava quatro reais e cinqüenta centavos [R$ 4,50], me lembro como se fosse hoje, que o vendedor cobrou sete reais [R$ 7,00]. Eu paguei pensando que era... desconfiei porque deu um valor tão exato! Mas, como já disse, não sabia fazer a conta... voltei pra casa, perguntei a meu marido e ele na hora falou: seu Manoel não sai perdendo... meu marido sabe fazer conta de cabeça, e disse que era só pra eu acrescentar mais a metade do valor de um quilo, que é dois reais e vinte e cinco [R$ 2,25]. Juntando, João [marido] falou: ele roubou vinte e cinco centavos teu... mas, eu?... eu nunca ia perceber professora, conta com esse dinheiro pequeno, eu não sei fazer” (M. J. S., 32 anos).

O depoimento dessa estudante exemplifica o que muitos jovens e adultos vivenciam por não dominar o conhecimento de números decimais, os quais possibilitam estabelecer relações entre quantidades medidas e os valores monetários correspondentes. Dessa maneira, para esses cidadãos, quando os números inteiros são insuficientes para abordar a situação que vivenciam, acabam tratando superficialmente o problema, arredondando valores para mais (FANTINATO, 2004, p. 120) ou sempre na dependência da realização do cálculo por outros, via de regra pelo próprio comerciante. Isso denota o quanto os estudantes de EJA são detentores de saberes experienciais, mas que ainda necessitam aprender mais para melhor enfrentamento de situações do seu dia-dia.

4. Em que diferem os saberes de adultos e crianças sobre números decimais?

Silva e Borba (2006) investigaram os saberes em números decimais de 32 adultos e 32 crianças de uma escola da Rede Municipal de Ensino de Recife. Esse estudo experimental constituiu-se de quatro grupos de estudantes, conforme a caracterização apresentada no Quadro 2.

GRUPOS	CARACTERIZAÇÃO DOS ESTUDANTES
GI (16crianças)	Alunos do 2º ano do 2º ciclo do Ensino Fundamental com pouca experiência da prática social no uso dos números decimais e sem terem tido aprendizagem formal com números decimais.
GII (16 crianças)	Alunos do 2º ano do 3º ciclo do Ensino Fundamental com pouca experiência da prática social no uso dos números decimais, mas com experiência formal na escola com decimais.
GIII (16 adultos)	Alunos do Módulo I da EJA com ampla experiência da prática social com números decimais, mas sem escolarização no conteúdo.

GIV (16 adultos)	Alunos do Módulo IV da EJA com experiência prática com uso dos números decimais e com escolarização no conteúdo.

Quadro 2: Caracterização dos participantes.

A situação de coleta de dados foi constituída por uma entrevista individual. Num primeiro momento, os participantes respondiam a quatro questões relacionadas a seus conhecimentos sobre números decimais:

1. *Você conhece números assim: 2,55 e 49,3? (os números eram apresentados em cartelas)*
2. *Em que situações você já encontrou números com vírgula?*
3. *O que significam estes números?*
4. *Dê exemplo do que estes números significam.*

Num segundo momento da entrevista, era solicitado aos alunos que resolvessem dezesseis problemas, sendo eles elaborados com base na *Teoria dos Campos Conceituais* (VERGNAUD, 1993, p. 1-26), abordando diferentes *significados, representações simbólicas, propriedades e contextos* do número decimal. Os problemas variavam quanto ao *significado* do número decimal (8 problemas como *parte fracionária* e 8 como *divisão de um todo*) ao *tipo de representação* (8 problemas eram respondidos oralmente e 8 *por escrito*); quanto às *propriedades associadas ao número decimal* (8 problemas de *comparação* e 8 de *conversão* de decimal); em relação ao *contexto* (8 questões envolvendo o número decimal como *valores discretos monetários* e 8 como *valores contínuos métricos*).

Para cada um dos alunos, a pesquisadora fazia a leitura dos enunciados, sendo que para evitar o efeito de ordem na apresentação dos tipos de problemas, a abordagem das dezesseis questões apresentou-se de maneira variada.

As entrevistas foram sistematizadas de maneira que se pudesse acompanhar os raciocínios utilizados pelos participantes ao resolverem as questões propostas e as respostas foram audiogravadas, possibilitando posterior transcrição em forma de protocolos.

Mesmo antes das análises dos protocolos, identificou-se, a partir das questões iniciais da entrevista, que existiam elementos diferenciadores de como adultos e crianças concebiam os números decimais. As entrevistas possibilitaram um contato no qual se percebeu que as experiências, sobretudo das crianças, com números decimais, majoritariamente referem-se ao uso do dinheiro. Nas respostas às quatro questões iniciais, observou-se que os estudantes adultos detinham conhecimentos mais amplos que os de crianças, uma vez que, os adultos e idosos explicitaram outras situações de uso em contexto de medição utilizando unidades convencionais tais como metro e quilograma.

As crianças associaram os números decimais aos valores monetários em situações de compra e venda. De maneira diferente, os adultos exemplificaram associações entre peso e valor monetário ou comprimento em metros e custo por maior ou menor quantidade. Assim, os adultos participantes do estudo, demonstraram conhecimento de variadas situações, o que pode sinalizar que os ensinos do conteúdo às pessoas adultas não podem ser realizados da forma como se ensina a crianças e vice-versa.

Seguem-se alguns dos problemas apresentados aos estudantes e comentários acerca dos resultados encontrados na pesquisa:

4.1 Questão: Oral, fracionário, comparação, contexto monetário.

Seis jovens voluntários moram numa comunidade onde se situa a instituição *Criança Feliz* e resolveram fazer uma campanha junto aos amigos para ajudar às crianças. Eles conseguiram arrecadar R$ 61,90. Observe a quantia que cada um deles conseguiu:

Abel - R$ 10,01

Bete - R$ 10,9

Carlos - R$ 10,15

Daiane - R$ 10,5

Ernesto-R$ 10,25

Flávia - R$ 10,09

- Coloque em ordem do maior ao menor valor arrecadado.

- Quem arrecadou mais?

- Quem arrecadou menos?

Figura 1. Tarefa Oral, fracionário, comparação, contexto monetário**.**
Fonte: arquivos da pesquisa.

O problema mostrado na Figura 1 solicitava uma resposta oral e que não requeria computar dados, tratando-se de uma questão de comparação de decimais, sendo para a abordagem oral supostamente *mais fácil*. No entanto, muitas crianças não compreendiam o papel do zero na representação decimal, por isso consideravam que *Bete* e *Flávia* arrecadaram a mesma quantidade. Outras crianças, levadas pela observação do número de casas decimais no julgamento da ordem, consideravam que *Ernesto* havia arrecadado mais que *Bete* e *Daiane*. Observou-se, ainda, a reprodução de regras incorretas tal como aconteceu por participantes de estudos anteriores (SACKUR-GRISVARD e LEONARD, 1985, pp. 170-174):

- O número maior é o que tem a parte decimal com o maior número de dígitos, portanto *Flávia* teria arrecadado mais que *Bete* (10,09 > 10,9).
- *O número é maior quando tem mais zeros depois da vírgula (10,09 >10,9)*
- *Regra dos números inteiros:* 10,25 é maior que 10,5 porque 25 é maior que 5.
- *Regra da fração*: 10,9 é maior que 10,25 porque 9 é décimo e 25 são centésimos. Embora o julgamento seja correto, pois 10,9 de fato é maior que 10,25 a justificativa dada é incorreta, pois dever-se-ia comparar décimos com décimos e centésimos com centésimos. Assim 9 décimos é maior que 2 décimos ou 90 centésimos é maior que 25 centésimos.

Comparar números decimais não constituiu tarefa fácil nem para adultos, nem para crianças, sendo que as dificuldades apresentadas por adultos eram menor que as reveladas por crianças. Adultos, conseguiam ler números decimais corretamente e assim comparar valores, sobretudo quando referiam-se ao contexto monetário. Portanto, o significado apresentado na representação decimal e o contexto ao qual se vinculava a questão favorecia a abordagem, como o exemplo mostrado na Fig 2.

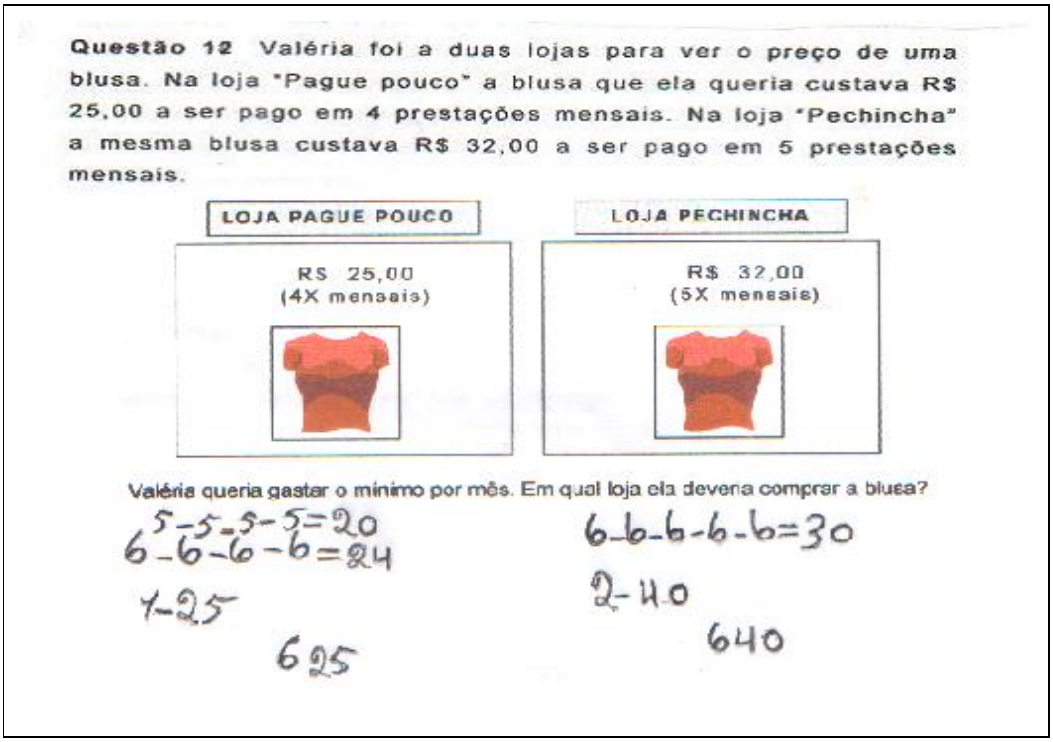
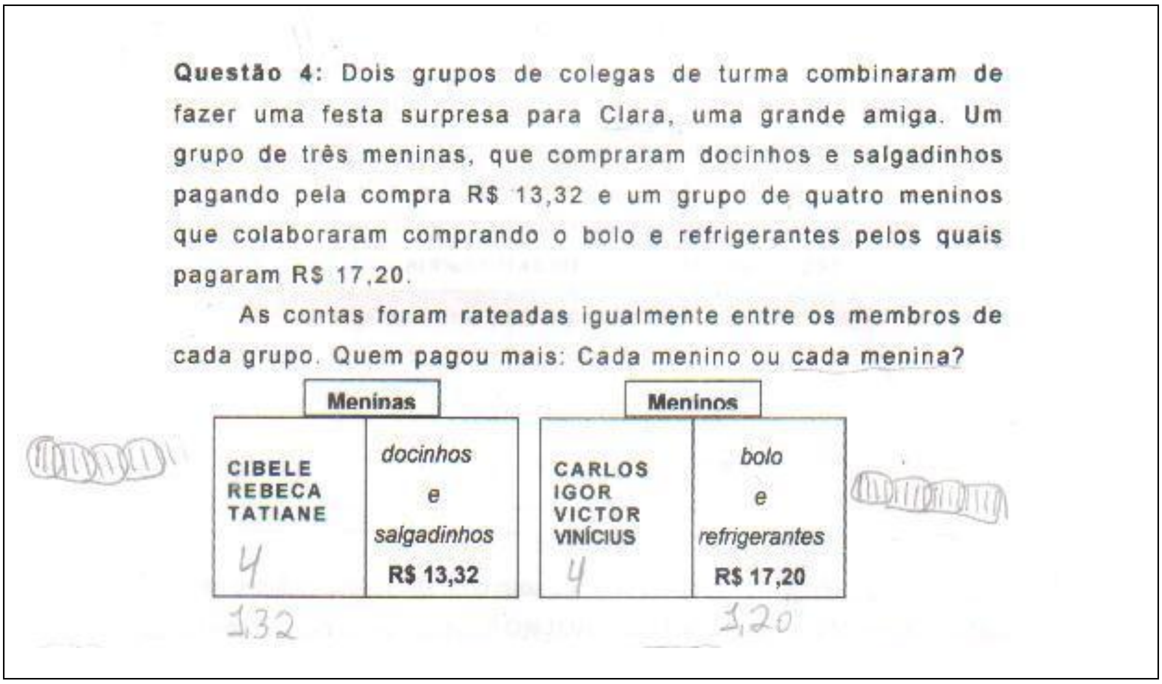


Figura 2. Exemplo de problema de comparação em contexto monetário resolvido por escrito por uma estudante adulta.
Fonte: arquivos da pesquisa.

Rosa, participante do GIII resolveu o problema por escrito, mas sem uso de algoritmos convencionais. Inicialmente, ela testou adições sucessivas de cinco reais. Todavia, verificou que essa operação resultaria em vinte reais, distante ainda dos vinte e cinco do custo total. Nova tentativa foi efetuada pela adição sucessiva de quatro parcelas de seis reais por prestação, perfazendo um total de 24 reais e, dessa maneira, faltaria ainda 1 real. Suas respostas foram registradas sem vírgulas, mas corretamente interpretadas oralmente quando verbalizou que na primeira loja seriam quatro parcelas de seis reais e vinte e cinco centavos e na segunda loja ficariam cinco parcelas de seis reais e quarenta centavos. A entrevistada reconheceu ser *mais vantajoso* comprar na loja *Pague Pouco*, justificando: “porque as parcelas são mais baratas e são menos parcelas”.

Merece destaque na apresentação do estudo em tela que em diversos casos os estudantes crianças não conseguirem finalizar o cálculo, ou seja, alcançar a resposta apontando a parte decimal nos cálculos, pela própria dificuldade de tratar o resto nos seus cálculos de divisão, como se pode conferir na resposta dada por Paulo do GII (aluno do 2º ano do 3º ciclo) para a questão apresentada na Figura 3.



Questão 4: Dois grupos de colegas de turma combinaram de fazer uma festa surpresa para Clara, uma grande amiga. Um grupo de três meninas, que compraram docinhos e salgadinhos pagando pela compra R$ 13,32 e um grupo de quatro meninos que colaboraram comprando o bolo e refrigerantes pelos quais pagaram R$ 17,20.

As contas foram rateadas igualmente entre os membros de cada grupo. Quem pagou mais: Cada menino ou cada menina?

Meninas		Meninos	
CIBELE REBECA TATIANE 4	docinhos e salgadinhos R$ 13,32	CARLOS IGOR VICTOR VINÍCIUS 4	bolo e refrigerantes R$ 17,20

1,32 1,20

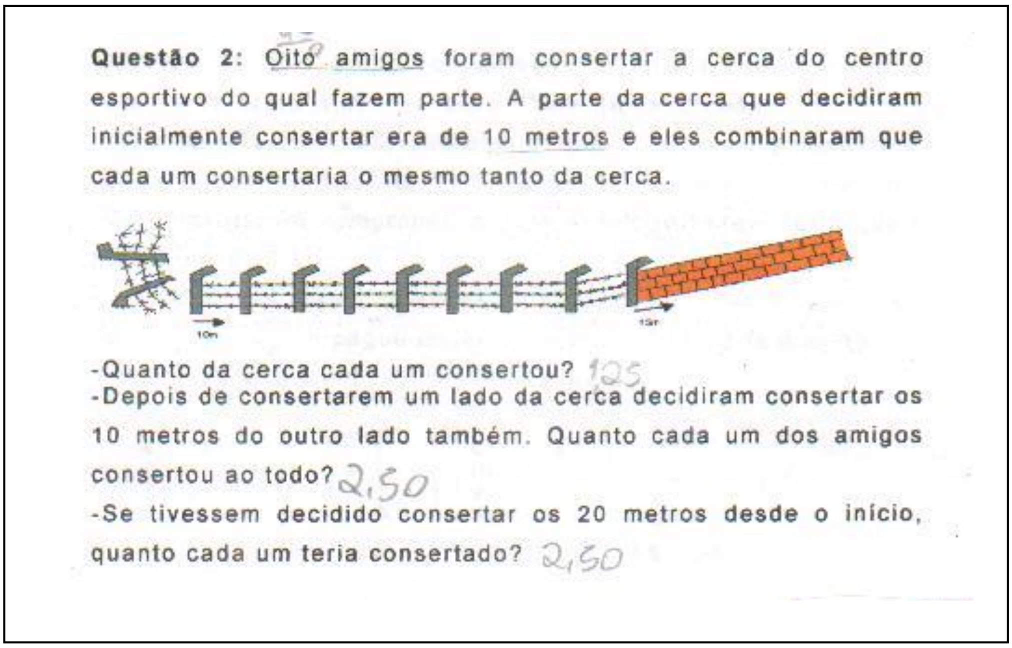
Figura 3. Exemplo de problema de comparação em contexto monetário resolvido por escrito por uma estudante adulta.
Fonte: arquivos da pesquisa.

Sobre essa questão, a criança do grupo GII não conseguindo tratar o resto da divisão, disse que sobrava um e vinte, mas que não sabia quanto dava exatamente. A criança desistiu de chegar a um valor final na questão, dizendo: "cada um vai pagar quatro reais, mas no das meninas tem que dar mais porque ainda tem um real e trinta e dois pra dividir para elas e os meninos só tem pra dividir um e vinte e tem quatro pra pagar, menos do que o valor delas pra só três pagar..." Apesar do argumento convencer, o alcance do valor exato esperado como solução para a questão, não foi possível ser alcançado, pela dificuldade na finalização do cálculo.

Outro estudo, realizado por Borba e Selva (2005), também revelou que alunos da 3ª a 5ª séries tratam o resto inadequadamente, o que, na visão das pesquisadoras, evidencia que a escola pouco tem trabalhado esse aspecto da divisão. Esta é a queixa de muitos estudantes, inclusive os da EJA que buscam atuar com maior competência diante de situações como esta, porque, de fato, as mesmas exigem domínio do saber tratar números decimais, para enfretamento dos problemas postos no seu dia-dia.

Na segunda investigação relatada, Silva e Borba (2006) observaram que adultos, mesmo sem escolaridade em números decimais foram capazes de resolver problemas envolvendo este conceito, utilizando os saberes das suas práxis, contribuindo para que resolvessem maior quantidade de problemas do que crianças nos diversos contextos nos quais são encontrados números decimais. Percebeu-se, ainda, a influência da aprendizagem escolar, capacitando este aluno adulto a amplificar suas competências, chegando a concluir cálculos e/ou validar resultados na direção de processos metacognitivos – referentes à abordagem do problema, seguida de reflexão sobre o resultado encontrado com base nos seus conhecimentos prévios, possibilitando rever (corrigindo, se considera necessário). A representação decimal formal e o domínio do algoritmo possibilitam melhor desempenho destes adultos na resolução de problemas e favorece, assim, o exercício de cidadania ativa.

Observou-se que adultos escolarizados em números decimais, apresentam melhores desempenhos em questões nas quais a forma de representação é escrita, o que atesta o quanto experiências da práxis em interação com a aprendizagem escolar, favorece a emergência de processos cognitivos, conduzindo à resolução dos problemas com eficiência, sobretudo justificando-se pela emergência de processos metacognitivos, como mostra o exemplo a seguir, na Figura 4, abordado por um estudante adulto do GIV.



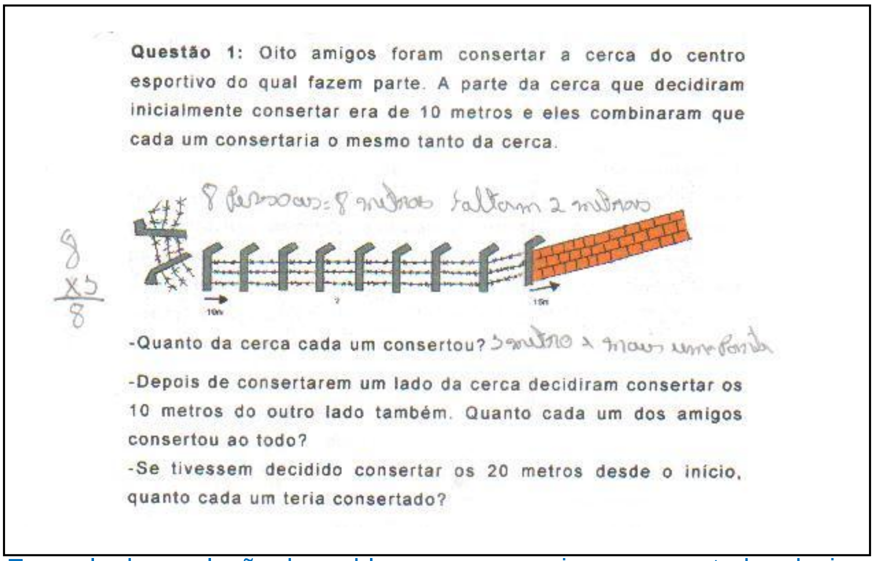
Questão 2: Oito amigos foram consertar a cerca do centro esportivo do qual fazem parte. A parte da cerca que decidiram inicialmente consertar era de 10 metros e eles combinaram que cada um consertaria o mesmo tanto da cerca.

-Quanto da cerca cada um consertou? 1,25
-Depois de consertarem um lado da cerca decidiram consertar os 10 metros do outro lado também. Quanto cada um dos amigos consertou ao todo? 2,50
-Se tivessem decidido consertar os 20 metros desde o início, quanto cada um teria consertado? 2,50

Figura 4. Exemplo da resolução de um problema por uma adulto que estudou números decimais na escola.
Fonte: arquivos da pesquisa.

Na questão em pauta o aluno inicia a abordagem realizando operações mentais e comenta: “cada um dos amigos consertará mais de 1 metro”. Como se tratava de uma questão cuja representação deveria ser escrita, e este aluno dominava essa forma de calcular, o mesmo teve a possibilidade de testar seu raciocínio. Quando iniciou a operação da divisão, ele logo percebeu que o percurso que utilizava não possibilitaria acesso à resposta correta e fala: “Não é pra dividir 8 por 10 e sim 10 por 8 porque são 10m pra dividir o trabalho com 8 amigos... eu estava colocando aqui como se fosse 8m de cerca pra 10 pessoas consertarem, daria menos de 1m pra cada, não pode porque a questão não é essa!”. O fato de esse aluno ter usado previamente seus conhecimentos, favoreceu acesso à operação correta para resolução da questão. Facilmente realiza o cálculo por via da escrita, revelando a influência dos conhecimentos da práxis aliados ao conhecimento escolar (uso do cálculo escrito), mobilizados para acerto da questão.

Comparando-se o desempenho deste adulto com o de uma criança na resolução da mesma questão, apresenta-se na Figura 5, a resposta de um estudante do GII.



Questão 1: Oito amigos foram consertar a cerca do centro esportivo do qual fazem parte. A parte da cerca que decidiram inicialmente consertar era de 10 metros e eles combinaram que cada um consertaria o mesmo tanto da cerca.

8 Pessoas = 8 metros faltam 2 metros

8
x5
8

10m

15m

-Quanto da cerca cada um consertou? 1 metro a mais uma ponta

-Depois de consertarem um lado da cerca decidiram consertar os 10 metros do outro lado também. Quanto cada um dos amigos consertou ao todo?

-Se tivessem decidido consertar os 20 metros desde o início, quanto cada um teria consertado?

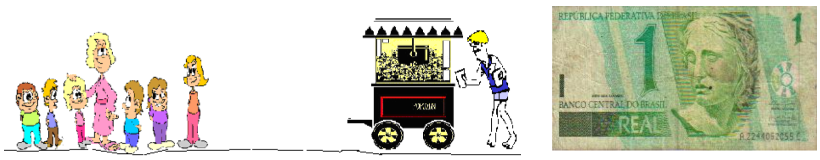
Figura 5: Exemplo da resolução do problema por uma criança que estudou decimais na escola.
Fonte: arquivos da pesquisa.

Observa-se que apesar do estudo do conteúdo na escola, este aluno criança ainda apresenta dificuldade no cálculo escrito com os dados da questão, evidenciando a necessidade de apropriação da notação escrita para registro de processos cognitivos mais elaborados, apoiando na obtenção do resultado final da questão. O não domínio do algoritmo da divisão, neste caso, torna-se impedimento para o acerto da questão, para alcance do valor exato do resultado, o que está em evidência na sua fala: “Cada um consertou mais de 1m, uma ponta... eu não sei dizer exatamente quanto”.

Quando se tratava de um contexto familiar, os pesquisados conseguiam facilmente alcançar a resposta exata para o problema, influenciados pela prática social, como no exemplo que segue (Figura 6), no qual todos os estudantes responderam corretamente a questão.

4.2 Questão: Oral, divisão, conversão, contexto monetário.

Júlia tem cinco filhos. Ao sair para a escola as crianças pediram à mãe dinheiro para comprar bombons. Júlia só tinha R$ 2,00 e então teve que trocar o dinheiro com o pipoqueiro que passava próximo a casa dela.



Para distribuir igualmente o dinheiro entre os filhos, quanto cada um recebeu?

Figura 6. Tarefa Oral, divisão, conversão, contexto monetário**.**
Fonte: arquivos da pesquisa.

Em relação a esta questão mostrada pela Figura 6, apresenta-se, no Quadro 3, abordagens realizadas por alunos de cada um dos grupos. Salienta-se que são percursos diferentes, mas corretos.

GI	GII	GIII	GIV
- 2 reais pra dividir com 5 pessoas? Pega 1 real e troca em moedas de 10 centavos, aí cada filho recebe 20 centavos; depois troca o outro real e dá mais 20 centavos pra cada um, cada filho fica com 40 centavos. * Ao realizar as operações, calcula com auxílio dos dedos.	- Essa é mais fácil!... 2 reais pra dividir com 5 filhos... vai dar 50 centavos? ...Não! dá 2,50. Passa! Então...40 centavos (40-80-1 real e 20, 1 real e 60, 2 reais). É! 40 centavos pra cada filho. * Apóia-se no desenho para realizar o cálculo.	- É fácil resolver! Se fosse 1 real pra dividir com 5 filhos, daria 20 centavos, mas são 2 reais, acrescenta mais 20 centavos pra cada um deles e cada um fica com 40 centavos.	- É muito simples! Ela destroca o dinheiro e dá 40 centavos pra cada um totalizando 2 reais. Pode dar: 4 moedas de 10 centavos, 8 moedas de 5 centavos, uma moeda de 25 centavos mais uma de 5 centavos e mais uma de 10 centavos...como quiser contanto que dê 40 centavos para ninguém se sentir prejudicado.

Quadro 3. Exemplos de abordagens a questão em contexto monetário com 100% de acerto dos quatro grupos do estudo.

Observou-se que em contextos próximos à prática social, como no exemplo citado acima, possibilita-se a compreensão, facilitando a abordagem do problema pelo estudante. No entanto, para o enfrentamento de problemas que não são familiares aos contextos de vivência dos estudantes, a escola pode capacitá-los para compreendê-los. Aí reside a importância política da ação educativa, na conscientização do exercício do direito que pode ser viabilizado no caso do uso do conhecimento matemático, quando se compreende os signos específicos na linguagem matemática. Favorecer a amplificação das competências dos estudantes, abordando os números decimais nos diversos contextos, é tarefa da escola que se compromete com a formação de um sujeito socialmente ativo em defesa e cumprimento dos seus direitos.

Freire (2001, p. 22) lembra da necessidade da vivência de uma pedagogia que se aprende na escuta, no diálogo e no mergulho na trama social. Numa perspectiva sócio-cultural da educação escolar faz-se necessário quebrar o olhar demasiado conteudista, formal, e voltar-se para experiências diversas que tem sido desenvolvidas na educação. Devem-se observar políticas que afirmem a cidadania, nas quais os sujeitos reencontrem vínculos educativos e culturais na escola, com docentes e discentes juntos na luta pela inclusão social.

Enfatiza-se a necessidade de abordagem dos números decimais na escola, por se tratar de um conteúdo útil, uma vez que, ao lidar com os diversos contextos na vida, crianças, jovens e adultos deparam-se diversas vezes com situações em cujo enfrentamento o domínio dos números inteiros é insuficiente. Observa-se que apesar do contato cotidiano com números decimais, nas atividades diárias, alguns alunos crianças e adultos lêem decimais estabelecendo estreita concordância entre o que dizem e o que observam nos escritos. Em relação à escrita decimal, alguns escrevem como se fossem números inteiros, desconhecendo a função da vírgula. Precisam, portanto de oportunidade de ensino que favoreça conectar saberes extra-escolares relativos a decimais com o saber acadêmico, oportunizando, a leitura, a escrita e cálculo com números decimais de forma sistematicamente convencional.

É importante considerar que a valorização social do saber escolar hegemônico, legitimado socialmente, leva os jovens e adultos a procurar ter acesso a ele por meio de reingresso na escolarização, portanto reconhecer saberes dos alunos, em particular dos adultos, nos campos conceituais e favorecer avanços na conceitualização contribui para o fortalecimento da identidade cidadã deles.

5. Conhecimento matemático contribuindo para o exercício da cidadania

Os estudos aqui relatados indicam a necessidade de mudanças em sala de aula, em particular no ensino a adultos, em respeito aos saberes extra-escolares deste público escolar e em atenção ao favorecimento do acesso a conhecimentos significativos para o aprendiz. O ensino e a aprendizagem da Matemática, na direção da construção da cidadania, requerem a existência de um educador consciente de que esta é a disciplina que mais tem excluído alunos no processo educativo, negando o direito ao exercício da cidadania, o que tem sido denunciado visivelmente pelos índices de reprovação nessa disciplina.

Arroyo (1987, p. 36) ressalta que a vinculação entre cidadania e educação é marcada pela necessidade do homem de se educar para se tornar mais humano. Partindo desse pressuposto, o ensino e a aprendizagem da Matemática precisam ser concebidos como processos não como produtos, de modo que a Educação Matemática oportunize a vivência do sujeito na condição de membro ativo nas suas práticas sociais.

A formação para o exercício da cidadania do aluno passa por recriar a Matemática pela sua intuição, pela sua lógica, no processo da construção de competências. Esta disciplina não deve ser apresentada como disciplina infalível, absoluta, mas deve-se trabalhar a mesma na perspectiva construtivista, aproximando cada vez mais a relação entre Matemática e sociedade, inclusive em respeito ao aprendizado não acadêmico do cidadão.

Em geral, é consenso entre educadores e educandos a necessidade do domínio do saber matemático enquanto condição necessária para o exercício da cidadania na sociedade em que vivemos. Portanto, é preciso ter clareza das competências necessárias para satisfazer as necessidades básicas de jovens e adultos. Schmelkes (1996, p. 16) destaca que as competências (ou necessidade básicas) abarcam quatro componentes: informação, conhecimentos, habilidades e valores. Na visão desta autora, o educador comprometido com um trabalho eficaz precisa elaborar projetos didáticos para a formação do cidadão com competências nos diversos contextos de vivências. Dessa forma, está-se contribuindo para a formação cidadã em atenção ao direito a uma educação com qualidade social, bem como para motivar o aluno na busca da construção de novas competências, tornando-o cidadão ativo, ao adquirir ferramentas que possibilitem melhor atuação nas suas atividades.

6. Considerações Conclusivas

Estudos relacionados aos saberes ou a processos de ensino e aprendizagem de conteúdos curriculares da Educação de Jovens e Adultos específicos da área de Matemática ainda são escassos e insipientes. São necessárias mais pesquisas que venham contribuir com o ensino da Matemática, que possam capacitar o professor para uma intimidade maior com o conhecimento, possibilitando viabilizar a construção de conceitos alicerçados nos saberes dos educandos sobre cada conteúdo em pauta. Dessa forma, a partir desses saberes, os conceitos podem ser ampliados e cristalizados, possibilitando subsidiar a compreensão de outros conceitos que se filiam àquele em estudo. Isto colabora para formação de cidadãos capacitados a interagir com problemas matemáticos com competência para resolvê-los.

Dar voz aos alunos da EJA para que expressem suas concepções matemáticas, enriquece o trabalho com jovens e adultos, sobretudo pela emergência da heterogeneidade de experiências, possibilitando o diálogo entre colegas e a exposição dos seus saberes. A habilidade que grande parte dos adultos tem de realizar cálculo mental precisa ser mais valorizada na EJA. É também fundamental, para estimular a formação do espírito matemático, validar tentativas de registro escrito, trabalhar paralelamente diversas formas de calcular e acolher outras formas de representação do pensamento, para além do cálculo mental e escrito, incentivando a estimativa e o palpite. O reconhecimento dos contextos de conhecimento dos estudantes e a visão da necessidade de ampliar as situações nas quais os mesmos reconhecem conceitos e os aplicam corretamente, é outra necessidade no ensino da Matemática, em particular na EJA. Assim, estará o educador contribuindo para o ensino da Matemática de forma dinâmica, estimulante e proveitosa, na medida em que desperta a necessidade de buscar a forma padrão de representação, não chegando a ela de forma mecânica, mas refletida.

Práticas de Educação de Jovens e Adultos em Educação Matemática, na perspectiva anteriormente mencionada, fortalece a auto-estima do aluno, bem como a construção da identidade dos sujeitos que dela participam. Isto se dará especialmente para os alunos jovens cuja experiência na educação regular foi negada ou frustrada por sucessivas reprovações e evasões. Assim, o processo de escolarização de jovens e adultos deve representar uma contribuição para o resgate da dignidade e para a construção da cidadania crítica e participativa.

Bibliografia

Arroyo, M. (1987). *Educação e exclusão da cidadania. Educação e cidadania: Quem educa o cidadão?* Cortez: São Paulo. Brasil.

Borba, R., Selva, A. (2005). *Como alunos de 5ª série resolvem problemas de divisão e como lidam com o resto.* In: Anais do XVII Encontro de Pesquisa Educacional do Norte e Nordeste. UFPA: Belém. Brasil.

Carraher, T., Carraher, D., Schliemann, A. (1988) *Na Vida dez, na escola zero*. Cortez: São Paulo. Brasil.

Fantinato, M. C. D. C. B. (2004). A construção de saberes matemáticos entre jovens e adultos do Morro de São Carlos. *Revista Brasileira de Educação*, *27*, 109-124.

Fonseca, M. C. F. R. (2002) *Educação Matemática na Educação de Jovens e Adultos: Especificidades, Desafios e Contribuições*. Autêntica, Belo Horizonte. Brasil.

Garcia, L. A. (1999) *Educação de Jovens e Adultos: caminhos para o fazer matemático. Salto para o Futuro – ensino fundamental, série de estudos*, MEC/Seed, Brasília. Brasil.

Sackur-Grisvard, C., Leonard, F. (1985) Intermediate cognitive organizations in the process of learning a mathematical concept: the order of positive decimal numbers. *Cognition and Instruction*, 2(2), 157-174.

Schmelkes, S. (1996) Las necessidades básicas de aprendizaje de los jóvenes y adultos América Latina., UNESCO/TAREA-CEAAL, Lima. Peru.

Silva, V. L., Monteiro, C. (2000) Currículo na Educação de Jovens e Adultos: Abordando a Cidadania. In. Anais da 23ª Reunião Anual da ANPEd – Caxambu/Minas Gerais.

Silva, V. L.; Borba, R. (2006) Números decimais: No que os saberes de adultos diferem dos de crianças? In. 29ª Reunião Anual da ANPEd – Caxambu/Minas Gerais.

Vergnaud, G. (1993) Teoria dos Campos Conceituais. In: Anais do 1º Seminário Internacional de Educação Matemática do Rio de Janeiro. Projeto Fundão.

Valdenice Leitão da Silva. Doutora em Educação pela UFMG e Mestre em Educação pela UFPE. Professora da Educação de Jovens e Adultos da Equipe Pedagógica da Unidade de EJA na Secretaria de Educação de Pernambuco. Membro dos Grupos de Pesquisas em Educação Matemática nos contextos de Educação do Campo (GPEMCE) e em Numeramento (GEN). valdeniceleitaodasilva@gmail.com

Rute Elizabete de Souza Rosa Borba. Doutora pela Oxford Brookes University e Mestre em Psicologia Cognitiva pela UFPE. Professora do Dep. de Métodos e Técnicas de Ensino e do Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática e Tecnológica (EDUMATEC) da UFPE. Líder do Grupo de Estudos em Raciocínio Combinatório do Centro de Educação da UFPE - GERAÇÃO. resrborba@gmail.com

Carlos Eduardo Ferreira Monteiro. Doutor pela University of Warwick e Mestre em Psicologia Cognitiva pela UFPE. Professor do Departamento de Psicologia e Orientação Educacionais e do Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática e Tecnológica da UFPE (EDUMATEC). Líder do Grupo de Pesquisa em Educação Matemática nos contextos de Educação do Campo – GPEMCE. cefmonteiro@gmail.com

UNIÓN
REVISTA IBEROAMERICANA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA

ISSN: 1815-0640
Número 41. Marzo 2015
Páginas 57-67

Génesis Instrumental: el caso de la función cuadrática

Jesús Victoria Flores Salazar[1]

Fecha de recepción: 30/12/2013
Fecha de aceptación: 17/10/2014

Resumen	El presente artículo analiza como sucede la génesis instrumental, de estudiantes de primer ciclo en el curso de matemáticas, respecto a la función cuadrática cuando utilizan el GeoGebra. Para el análisis se consideraron algunos elementos teóricos del Enfoque Instrumental de Rabardel. El poder identificar tanto la traslación horizontal como la vertical de la función cuadrática, usando este ambiente de geometría dinámica, favoreció los procesos de génesis instrumental de los estudiantes respecto al objeto matemático abordado. Además, este software permitió que los estudiantes verifiquen y/o validen sus conjeturas. **Palabras-clave: Función cuadrática; Génesis instrumental; GeoGebra.**
Abstract	This article analyzes the instrumental genesis in university-level students, about the quadratic function using the GeoGebra software. Some theoretical elements of Rabardel Instrumental Approach were considered for the analysis. Being able to identify both the horizontal and vertical translation of the quadratic function, using the dynamic geometry environment favored the process of instrumental genesis of the students regarding mathematical object dealt. In addition, this software allowed students verify and/or validate their conjectures. **Key words: quadratic function; instrumental genesis; GeoGebra.**
Resumo	O presente artigo analisa como acontece a gênese instrumental de estudantes iniciantes de licenciatura em Matemática, com respeito à função quadrática quando utilizam o GeoGebra. Para a análise foram considerados alguns elementos teóricos da Abordagem Instrumental de Rabardel. A possibilidade de identificar tanto a translação horizontal e a vertical de uma função quadrática usando este ambiente de geometria dinâmica favoreceu os processos de gênese instrumental dos estudantes com respeito ao objeto matemático abordado. Além disso, este software permitiu que os estudantes validassem suas conjeturas. **Palavras-chave: função quadrática; gênese instrumental; GeoGebra.**

[1] Estudios de Pos-doctorado en el Programa de Estudios Pos-graduados en Educación Matemática de la Pontificia Universidad Católica de Sao Paulo. PDJ-CNPq/Brasil.

1. Introducción

Señalamos que investigaciones en el área de Educación Matemática como las de Salazar et al. (2013), Salazar et al. (2012a; 2012b) y Silva et al. (2012) muestran los procesos de enseñanza y aprendizaje de contenidos matemáticos cambia se trabajan en ambientes tecnológicos, especialmente en ambientes de geometría dinámica.

Los investigadores afirman que al analizar las potencialidades del uso de los ambientes de geometría dinámica, se debe tomar en cuenta su impacto en la enseñanza y se deben establecer relaciones recíprocas entre el uso de estos ambientes y el desarrollo del pensamiento matemático de los estudiantes.

En ese mismo sentido, Artigue (2002) señala que los ambientes tecnológicos utilizados estratégicamente pueden ser de gran utilidad para que los estudiantes comprueben resultados, refuercen conceptos; o puedan usarlos como herramientas para elaborar conjeturas e inferencias sobre las propiedades de objetos matemáticos y; en el caso de los profesores los puedan manejar como recursos para el desarrollo de su clase.

En el presente artículo investigamos específicamente como sucede el proceso de génesis instrumental en estudiantes de un primer curso de matemáticas de nivel universitario cuando consideran la traslación horizontal y vertical de la función cuadrática al utilizar el GeoGebra.

2. Enfoque instrumental

Para analizar el proceso de génesis instrumental de los estudiantes, utilizamos como base teórica el Enfoque Instrumental de Rabardel (1995).

De acuerdo con Artigue (2007), el surgimiento del enfoque instrumental se basa en la Teoría Antropológica de lo Didáctico (TAD), como marco macro-teórico y, en la ergonomía cognitiva que se refiere a los procesos mentales tales como percepción, memoria, raciocinio y respuesta motora y como estas afectan las interacciones entre seres humanos y otros elementos de un sistema. Por ejemplo, interacción hombre-computadora.

Este enfoque, de acuerdo con Rabardel (1995), estudia la transformación de artefacto a instrumento y los procesos que envuelven esa transformación progresiva. Además, el autor muestra que en toda situación de actividad o de utilización de artefactos, instrumentos, existe siempre una tríada de elementos relacionados de manera explícita o implícita, formada por el sujeto, el instrumento y el objeto, siendo el instrumento un intermediario entre el sujeto y el objeto. Así el autor señala que:

- Sujeto: se refiere a un individuo o grupo de individuos que desarrollan una acción y/o son elegidos para el estudio y el desarrollo de sus posibles esquemas de utilización. Utiliza este término adoptando la posición de Vergnaud (1996, p.23), "un esquema es una organización invariante de comportamientos para clases de situaciones".
- Artefacto: puede entenderse como una cosa susceptible de su uso, elaborada para inscribirse en actividades intencionales. Puede ser, por ejemplo: un medio material como un computador. También puede ser un medio simbólico como

el código Morse, la iconografía inca, el lenguaje algebraico, un gráfico en un sistema de coordenadas.

- Instrumento: se entiende como un artefacto en situación de uso. La noción de instrumento involucra tanto al artefacto como a los esquemas mentales (esquemas de utilización) desarrollados por el sujeto cuando realiza una clase de tareas.

En cuanto a los esquemas de utilización que el sujeto moviliza o desarrolla, el autor los categoriza de la siguiente manera:

- Esquemas de uso: relativos a unas operaciones, es decir a la manipulación técnica del artefacto.
- Esquemas de acción instrumental: relativos a la utilización de un artefacto en vista de realizar una acción.

También, de acuerdo con Rabardel (1995) la utilización de un artefacto no es neutral para el sujeto. Introduce en este una actividad cognitiva de construcción o de evolución de esquemas de utilización y llama instrumento al conjunto artefacto y esquemas de utilización relacionados con el artefacto (ver figura 1).

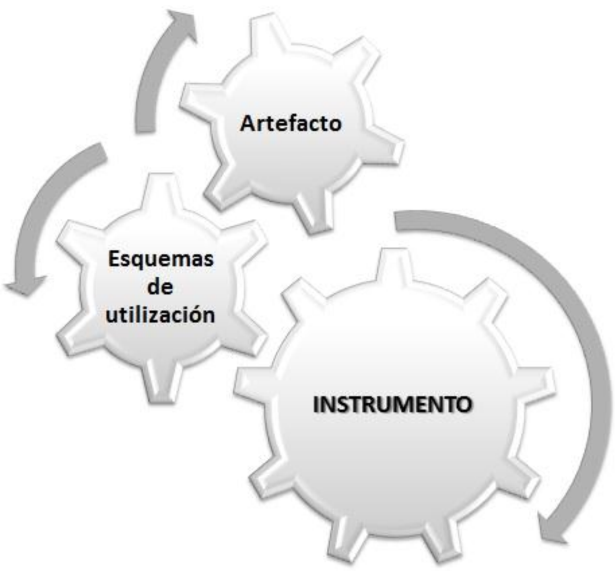


Figura 1. Instrumento
Fuente: elaborado por el autor

El instrumento es específico a un sujeto por que los esquemas correspondientes dependen de sus conocimientos. Evoluciona por consiguiente con el sujeto, durante el curso de una acción de dos maneras: o sea volviendo a invertir esquemas de utilización familiares ya constituidos o sea produciendo nuevos esquemas de uso que le permiten alcanzar los objetivos contemplados. Se trata del proceso de **Génesis Instrumental**.

Durante este proceso, de acuerdo con el autor, el sujeto se apropia los instrumentos, confiriéndoles funciones que van más allá de sus funciones constitutivas. El sujeto puede elaborar sus instrumentos utilizando las potencialidades del artefacto. Así pues, la génesis instrumental es consustancial al tema ya que depende del artefacto, y también de la utilización que hace el sujeto. Este proceso tiene dos dimensiones:

- Instrumentalización: se refiere a la aparición y a la evolución de los componentes artefacto del instrumento. El usuario, por su actividad, asigna funciones al artefacto, estas funciones pueden por consiguiente ser integradas al artefacto a continuación integrarse al artefacto.
- Instrumentación: se refiere a la adaptación del sujeto a las dificultades que constituyen el artefacto y sus funciones constitutivas. Es relativa a la aparición y a la evolución de los esquemas de utilización.

Asimismo, Rabardel (1995) explica que la combinación de estos dos procesos conduce a la reorganización de los esquemas de utilización y en consecuencia a la modificación del instrumento. En base a este enfoque, analizaremos la génesis instrumental de un estudiante del primer curso de matemáticas a nivel universitario cuando estudia la traslación horizontal y vertical de la función cuadrática.

3. La actividad

En esta investigación participaron quince estudiantes de primer ciclo del curso de matemáticas de la Facultad de Artes Escénicas de la Pontificia Universidad Católica del Perú (18 - 20 años de edad). Para el presente artículo analizaremos las acciones de un estudiante al que la llamaremos Luis.

El trabajo se desarrolló en el laboratorio de cómputo dentro del desarrollo habitual de clases y consistió en una secuencia de actividades en las que se movilizaron las nociones de traslación horizontal y vertical de la función cuadrática. La secuencia diseñada estuvo estructurada de la siguiente manera: seis actividades organizadas fueron entregadas en una ficha de trabajo.

Las tres primeras actividades fueron preparadas para movilizar en los estudiantes algunas características intrínsecas de la función cuadrática. En relación a la actividad 4, motivo del presente artículo, contiene cuatro ítems y su desarrollo se realizó utilizando un archivo previamente creado en el ambiente de geometría dinámica GeoGebra.

En esta actividad los estudiantes deben representar gráficamente funciones cuadráticas dadas en su forma canónica $f(x) = a(x-h)^2 + k$ a partir de la función cuadrática "base" $f(x) = x^2$. Es decir, nos interesa observar en esta actividad el proceso de génesis instrumental cuando se estudia la traslación horizontal y vertical de la función cuadrática.

3.1. Aplicación de la actividad

En seguida presentamos la actividad que es objeto de análisis en el presente artículo. En cuanto al análisis presentaremos una visión global de lo realizado por los estudiantes y en especial analizaremos las acciones del estudiante Luis.

Abra el archivo **Tecnicas.ggb** y en la vista gráfica observará la representación de las funciones $f(x)=x^2$ y $g(x)=a(x-h)^2+k$ en negro y rojo respectivamente. Como muestra la figura 2.

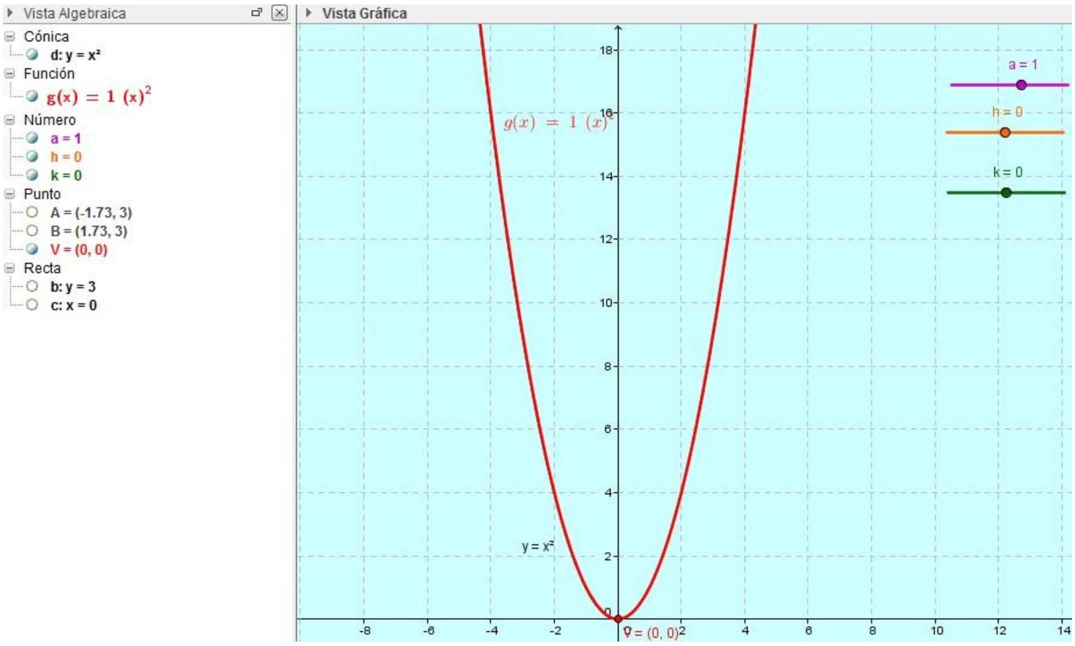


Figura 2. Archivo Técnicas
Fuente: elaborado por el autor

Complete y justifique cada uno de los siguientes ítems.

i. Arrastre el punto h del deslizador y colóquelo en $h=-1$, entonces ¿qué sucede con la función $g(x)$? Explique.

ii. A continuación, arrastre el punto a del deslizador y colóquelo en $a=2$, ¿qué relación hay entre la nueva representación gráfica de $g(x)$ con respecto a la del item anterior? Explique.

iii. Por último, arrastre el punto k del deslizador y colóquelo en $k=-3$, entonces ¿qué relación hay entre la nueva representación gráfica de $g(x)$ con respecto a la del item i)?

iv. ¿Qué relación hay entre la gráfica de $g(x)=2(x+1)^2-3$ con respecto a la gráfica de $g(x)$?

Esperamos en el ítem i) los estudiantes observen que al arrastrar el deslizador *h* hasta -1, la nueva función generada es $g(x)=(x+1)^2$ y que la representación gráfica de esta función, se ha traslado horizontalmente 1 unidad hacia la izquierda, como muestra la figura 3.

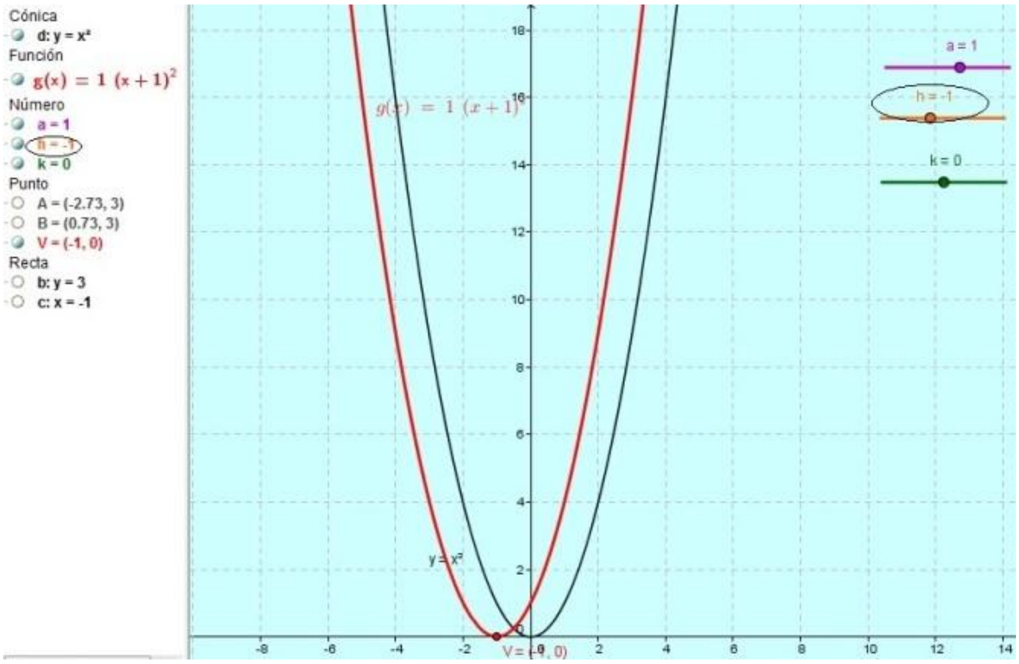


Figura 3. Item (i)
Fuente: elaborado por el autor

Observamos que doce de los quince estudiantes señalaron que la nueva función $g(x)=(x+1)^2$ con respecto a la función $f(x)=x^2$ se había trasladado 1 unidad hacia la izquierda.

El estudiante Luis después de arrastrar el selector de *h* a -1, escribe lo siguiente:

Arrastre el punto h del deslizador y colóquelo en $h=-1$, entonces ¿qué sucede con la función $g(x)$? Explique

Que la gráfica de g(x), se desplaza en horizontal en el eje x. para la izquierda cuando h = -1.

En este ítem el estudiante, al igual que sus compañeros, explica lo que habíamos supuesto inicialmente, esto nos hace pensar que Luis podría estar instrumentalizado localmente, en lo referente a la herramienta de “arrastre” del GeoGebra ya que la manipula sin dificultad, además podemos percibir que al observar cambio de la representación gráfica ha movilizado sus conocimientos previos sobre función y translación.

En cuanto al ítem ii) de la actividad, esperamos que los estudiantes observen que al arrastrar el deslizador *a* hasta 2, la nueva función es $g(x)=2(x+1)^2$ y que la curva que representa a esta función es “más cerrada” en relación a la curva de la función $g(x)=(x+1)^2$.

Además, esperamos que los estudiantes perciban que el vértice y el sentido de abertura de la parábola se mantienen como muestra la figura 4.

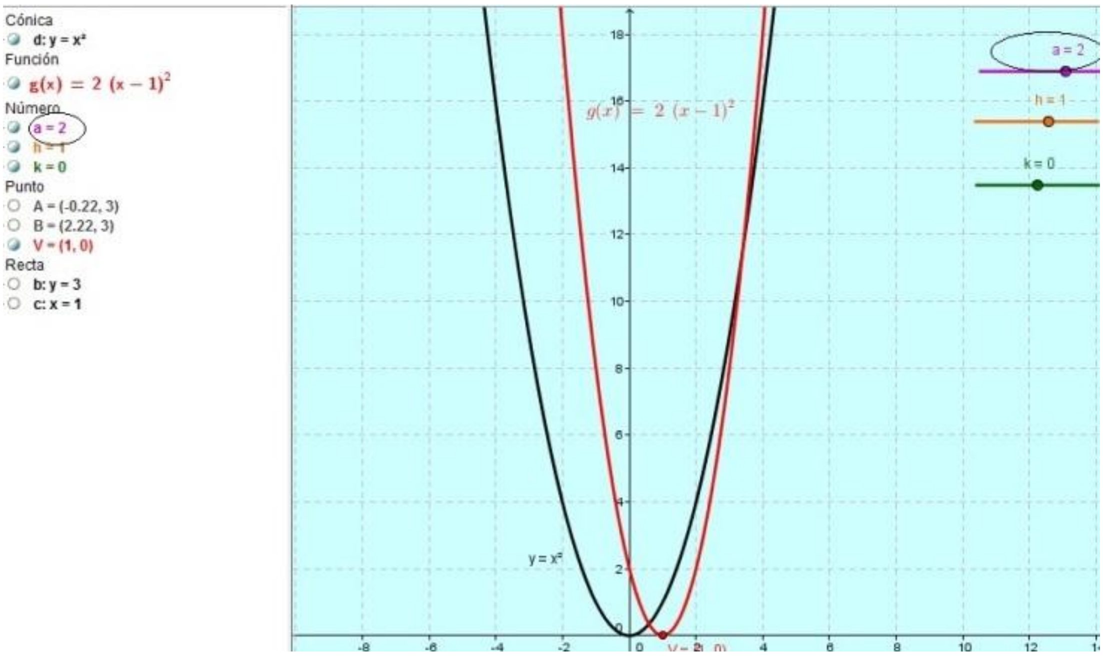


Figura 4. Item (ii)
Fuente: elaborado por el autor

Al igual que en el caso anterior, los estudiantes se señalaron que la nueva función $g(x)=2(x+1)^2$ con respecto a la $g(x)=(x+1)^2$ es más "cerrada" pero tienen el mismo vértice. Es decir, que sus observaciones coinciden con lo que habíamos previsto para este ítem.

En cuanto a las acciones del estudiante Luis, respondió esta parte como muestra a continuación:

ii. A continuación, arrastre el punto del deslizador y colóquelo en, ¿qué relación hay entre la nueva representación gráfica de con respecto a la del item anterior? Explique.

La parábola se acerca al eje y, manteniendo el vértice (-1,0) por encima de 0, es decir, sobre el tramo positivo de y

Lo explicado por el estudiante Luis es una muestra de que, al igual que sus compañeros, observó lo que advertimos anteriormente.

Asimismo, es importante notar que el estudiante, mediante sus acciones, muestra indicios de instrumentación de las características, es decir del coeficiente "a" ya que la estudiante señala que la abertura de la gráfica de la función cuadrática ha variado con respecto de la anterior.

Esto nos hace ver que percibe que cuando el coeficiente es mayor, la abertura de parábola es menor.

En relación al ítem iii) esperamos que los estudiantes luego de arrastrar el deslizador *k* al valor -3, perciban que la nueva función $g(x) = 2(x+1)^2 - 3$ y que la curva que la representa se ha trasladado verticalmente 3 unidades hacia abajo en relación a la curva $g(x) = 2(x+1)^2$ y que el sentido de abertura de la parábola es el mismo, pero la posición de su vértice ha cambiado (ver figura 5).

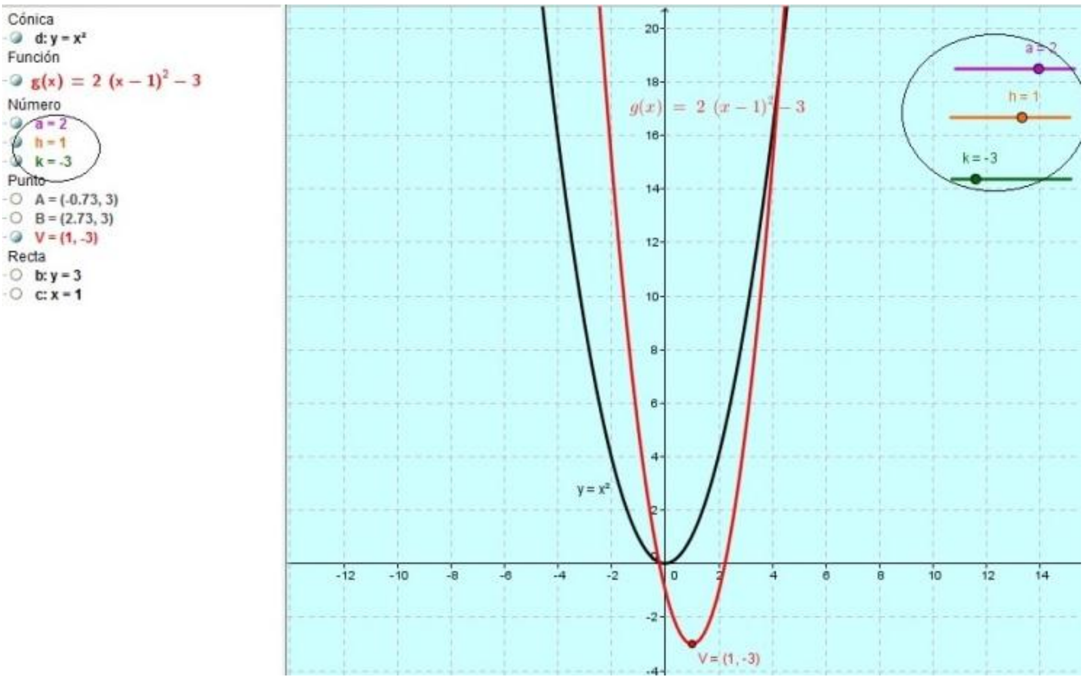


Figura 5. Item (iii)
Fuente: elaborado por el autor

En cuanto al grupo de estudiantes, cinco de ellos percibieron que la nueva función $g(x) = 2(x+1)^2 - 3$ con respecto a la $g(x) = 2(x+1)^2$ se ha trasladado verticalmente 3 unidades hacia abajo, como lo habíamos señalado.

Por su parte Luis respondió de la siguiente manera:

iii. iii. Por último, arrastre el punto k del deslizador y colóquelo en $k = -3$, entonces ¿qué relación hay entre la nueva representación gráfica de $g(x)$ con respecto a la del item i)?

la parábola mantiene su forma, pero cambia su vértice (-1, -3), movilizándose hacia abajo sobre el eje y, hacia el tramo negativo

iv.

Observamos que al igual que el ítem anterior, Las acciones de Luis muestran que está instrumentado con las nociones movilizadas e instrumentalizada, quizás localmente, con el arrastre del software GeoGebra. Es decir, que en él el proceso de génesis instrumental está aconteciendo.

En el último ítem de esta actividad, al preguntarse qué relación hay entre las funciones $g(x)=2(x+1)^2-3$ y $f(x)=x^2$ esperamos que los estudiantes digan las dos funciones son diferentes, es decir que no tienen la misma forma ya que la nueva función es más "cerrada" y que se ha trasladado horizontalmente 1 unidad hacia la izquierda y tres unidades hacia abajo.

Al analizar el trabajo de los estudiantes notamos que solo tres de ellos observaron los que señalamos anteriormente y que no explicitan que la nueva función $g(x)=2(x+1)^2-3$ con respecto a la función $f(x)=x^2$ no tiene la misma forma, que la curva de la nueva función es más "cerrada" y se ha trasladado horizontalmente 1 unidad hacia la izquierda y tres unidades hacia abajo. En cuanto a lo respondido por Luis:

iv. ¿Qué relación hay entre la gráfica de $g(x)=2(x+1)^2-3$ con respecto a la gráfica de $g(x)$?

Las dos gráficas tienen un punto mínimo positivo, por lo tanto son hacia arriba, están en distintos vértices; (0) (-1, -3) y g es más alargada por esta última razón.

Percibimos que el estudiante señala una semejanza entre ambas funciones cuando afirma que las dos tienen un punto mínimo común. Sin embargo, notamos que cuando escribe los vértices se equivoca al escribir el vértice (0,0).

Además, Luis señala una diferencia entre ambas. Lo descrito por el estudiante es semejante a lo que pensamos que podían responder los estudiantes. Además, observamos que al igual que el ítem anterior, las acciones de Luis muestran que está instrumentado con las nociones movilizadas en la actividad.

3. Reflexiones finales

Observamos que, en general, el software GeoGebra posee ventajas debido a su dinamismo (arrastre) para explorar propiedades de objetos matemáticos.

Podemos concluir que el uso del aspecto dinámico del GeoGebra, en la secuencia de actividades que trabajamos con los estudiantes en particular cuando diseñamos actividades, auxilió a los estudiantes a movilizar las nociones de traslación horizontal y vertical de la función cuadrática.

Sin embargo, con la variedad de posibilidades del aspecto gráfico de esta función dejamos abierta la posibilidad de diseñar una secuencia de actividades con un determinado conjunto de restricciones que hagan menos complicado su aprendizaje en los cursos de matemáticas básicas a nivel superior.

En general, las actividades trabajadas y en particular la actividad analizada en el presente artículo, en la que se hizo uso del GeoGebra favorecieron la transformación de artefacto a instrumento. Es decir, que la posibilidad de observar la representación gráfica de función cuadrática en este ambiente de geometría dinámica permitió, de cierta forma, validar los conocimientos previos de los estudiantes que con el ambiente de lápiz y papel hubiese sido más costoso.

En cuanto al proceso de génesis instrumental podemos afirmar que en la actividad analizada se desarrolló este proceso en Luis, porque observamos en varios momentos la instrumentación e instrumentalización de las nociones de traslación horizontal y vertical de la función cuadrática en las acciones del estudiante.

Mencionamos además que el GeoGebra fue un software integrador en la movilización de las nociones de traslación horizontal y vertical de la función cuadrática. El conocimiento progresivo de las herramientas y comandos, en cuanto a sus potencialidades, permitieron que los estudiantes conjeturen las características de estas traslaciones.

Referencias

Artigue, M. (2002). *Learning Mathematics in a CAS environment: the genesis of a reflection about instrumentation and the dialectics between technical and conceptual work. International Journal of Computers for Mathematical Learning.* 7, 245-274.

Artigue, M. (2007).Tecnología y enseñanza de las matemáticas: desarrollo y aportaciones de la aproximación instrumental Investigación. En: *XII Conferencia Interamericana de Educación Matemática México: XII CIAEM*, pp. 25-37.

Rabardel, P. (1995). *Les hommes et les technologies: approche cognitive des instruments contemporains*. Paris: Armand Colin.

Salazar, J. V. F.; Chumpitaz, L. D. (2013). Genésis instrumental: un estudio del proceso de instrumentalización de la función definida por tramos. *VII Congreso Iberoamericano de Educacion Matematica. Montevideo: VII CIBEM*. 1, pp. 7165-7162.

Salazar, J. V. F.; Malaspina, U. J.; Gaita, C.; Ugarte, F. (2012a). Three-Dimensional Geometric Transformations Using Dynamic Geometry: A View from the Instrumental Genesis. *12th International Congress on Mathematical Education. Korea: ICME 12*. 1, pp. 2435-2443.

Salazar, J. V. F.; Gaita, C.; Malaspina, U. J.; Ugarte, F. (2012b). The Use of Technology and Teacher Training: An Alternative for the Teaching of Spatial Geometry. *12th International Congress on Mathematical Education. Korea: ICME 12.* 1, pp. 3774-3781.

Silva, M. J. F.; Salazar, J. V. F. (2012). Cabri 3D na sala de aula. *VI Congresso Ibero-americano de Cabri, 2012.* Lima: Editorial Hozlo S.R.L. 101-107.

Vergnaud, G. (1996). *A teoria dos campos conceptuais*. Jean Brun (Ed.). Didáctica das Matemáticas. Lisboa: Instituto Piaget.

Jesús Victoria Flores Salazar. Pontificia Universidad Católica del Perú. Directora de la Maestría en Enseñanza de las Matemáticas de la Pontificia Universidad Católica del Perú. Miembro de los grupos de Investigación Didáctica de las Matemáticas DIMAT/PUCP y *Processo de Ensino e Aprendizagem em Matemática* PEAMAT/PUC-SP. jvflores@pucp.pe

UNIÓN
REVISTA IBEROAMERICANA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA

ISSN: 1815-0640
Número 41. Marzo 2015
Páginas 68-86

Projeto “Ensinar e Aprender” em São Paulo: formação continuada em debate

Sandra de Fátima Tavares Rodrigues Tonon, Ana Lúcia Manrique

Fecha de recepción:14/10/13
Fecha de aceptación: 22/07/2014

Resumen	La formación continua de los docentes es el tema del presente artículo, desarrollado a partir del estudio del Proyecto “Enseñanza y el Aprendizaje” - Fijación del flujo del Ciclo II, conocido como proyecto de aprendizaje acelerado para los estudiantes de primaria, implementado por el Departamento de Educación del Estado de São Paulo, en 2001/2002. La investigación tiene un carácter cualitativo, desarrollado a partir del análisis de los documentos del proyecto y entrevistas con tres participantes del proyecto. El análisis se basan en los estudios de Pierre Bourdieu y se restringen las formas de mediación, la organización de la materia, la capital cultural institucionalizado y el reconocimiento del proceso de la reproducción y la violencia simbólica ejercida por la escuela y la ruptura de este proceso. **Palabras clave: Educación Continua. Aprendizaje. Reproducción. La violencia simbólica**.
Abstract	La formación continua de los docentes es el tema del presente artículo, desarrollado a partir del estudio del Proyecto “Enseñanza y el Aprendizaje” - Fijación del flujo del Ciclo II, conocido como proyecto de aprendizaje acelerado para los estudiantes de primaria, implementado por el Departamento de Educación del Estado de São Paulo, en 2001/2002. La investigación tiene un carácter cualitativo, desarrollado a partir del análisis de los documentos del proyecto y entrevistas con tres participantes del proyecto. El análisis se basan en los estudios de Pierre Bourdieu y se restringen las formas de mediación, la organización de la materia, la capital cultural institucionalizado y el reconocimiento del proceso de la reproducción y la violencia simbólica ejercida por la escuela y la ruptura de este proceso. **Palabras clave: Educación Continua. Aprendizaje. Reproducción. La violencia simbólica.**
Resumo	A formação continuada de professores é o tema deste artigo, desenvolvido a partir do estudo do Projeto Ensinar e Aprender conhecido como projeto de aceleração da aprendizagem para alunos do Ensino Fundamental, implementado pela Secretaria da Educação do Estado de São Paulo nos anos de 2001/2002. A investigação de caráter qualitativa foi desenvolvida a partir da análise de documentos do projeto e de entrevistas realizadas com três profissionais participantes do projeto. As análises foram realizadas com base nos estudos de Pierre Bourdieu e restringiram-se as formas de mediação, a organização do campo, o capital cultural institucionalizado e o reconhecimento do processo de reprodução e de violência simbólica exercido pela escola e a ruptura desse processo.

Palavras-chave: Formação Continuada. Aprendizagem. Reprodução. Violência Simbólica.

1. Introdução

A busca pela qualidade do ensino no Brasil e por uma escola básica comprometida com a cidadania têm exigido repensar a formação de professores, tanto a inicial quanto a continuada. Nas últimas décadas, a formação continuada oferecida teve como propósitos a atualização e o aprofundamento dos conhecimentos dos professores. Nos diversos programas implementados pelos governos estaduais e federais, percebe-se uma formação continuada assumindo um caráter compensatório com o propósito de preencher lacunas deixadas pela formação inicial. Entre os aspectos limitantes encontrados nestes programas apontamos: a formação em grande escala, a brevidade dos cursos, os limites dos recursos financeiros e, ainda, o nível de preparação dos formadores e das instituições. A necessidade de cuidar da formação continuada dos docentes, não como proposta esporádica, mas como programa contínuo, é indicada por Gatti (2001). Além disso, apontamos que o foco da formação deveria ser redirecionado, sendo oferecido ao conjunto da equipe escolar e não apenas ao grupo de professores, visando assim, atender questões curriculares, de aprendizagem e do cotidiano da escola.

Segundo Gatti e Barreto (2009), podemos perceber um movimento de reconceituação da formação continuada. As propostas inspiradas no conceito de capacitação cedem lugar ao conceito de autoconhecimento do professor e no reconhecimento dos conhecimentos já existentes no cabedal de recursos profissionais. As representações, atitudes, motivações dos professores passam a ser vistas como fatores importantes na implementação de mudanças e de inovações na prática educativa, ocupando o centro de atenções e intenções em projetos de formação continuada.

Muitos trabalhos sobre a formação em serviço e desempenho desses profissionais têm analisado as dificuldades de mudanças nas concepções e práticas educacionais desses profissionais em seu cotidiano escolar (Gatti, 2003; Manrique, Andre, 2009; Manrique, Tinti, Lima, 2011). Muitos programas de formação oferecem informações e conteúdos, trabalhando a racionalidade desses profissionais a partir do domínio de novos conhecimentos, acreditando que com isso eles produzirão mudanças em suas práticas e modos de agir. Entretanto, pesquisas, principalmente na área da psicologia social, chamam a atenção para o fato de que esses profissionais estão integrados a grupos sociais, possuem representações e valores que filtram os conhecimentos que lhes chegam.

Como seres sociais, segundo Gatti (2009), os professores possuem identidades pessoais e profissionais. Imersos num grupo social, partilham eventos culturais, sociais, políticos e econômicos, produzem conhecimentos e possuem valores e atitudes. Essa interação influencia o modo de ser e agir dos sujeitos. As intervenções socioeducacionais que contemplam as condições mencionadas por Gatti em seus diversos estudos, e seus entrelaçamentos, podem torná-las mais significativas e com maiores possibilidades de aplicação.

Desse modo, este texto busca refletir, dentre os programas de formação oferecidos pela Secretaria da Educação do Estado de São Paulo (SEE/SP), nos últimos 15 anos, sobre o Projeto Ensinar e Aprender – Corrigindo o Fluxo do Ciclo II, focando os anos de 2000 a 2002. Essa reflexão busca identificar condições proporcionadas pelo Projeto que permitiram, facilitaram e/ou contribuíram para as mudanças dos profissionais participantes. Optamos estudar este Projeto por ter proporcionado uma formação totalmente presencial e oferecido uma carga horária expressiva, além de envolver um grande número de educadores e atingir todas as Diretorias de Ensino do Estado de São Paulo.

Este Projeto, também conhecido como aceleração da aprendizagem, doravante será denominado Projeto Ensinar e Aprender. Ele foi implantado em um contexto de políticas públicas educacionais, cujo principal objetivo era combater o fracasso escolar, reconduzindo os alunos à trajetória regular dos estudos.

Projetos como este foram implantados no ensino público fundamental em vários estados do Brasil, na segunda metade da década de 90, como previa a recém-promulgada Lei de Diretrizes e Bases da Educação Nacional 9394/96 no seu art. 24, inciso V, alínea b, “possibilidade de aceleração de estudos para alunos com atraso escolar”. Este Projeto buscava resolver, de um lado um problema de ordem social, pois envolvia crianças multirrepetentes em defasagem idade/ano escolar; de outro um problema de ordem econômica, pois desobstruiria o fluxo do sistema escolar.

2. Metodologia

Inicialmente, realizamos uma análise documental dos materiais referentes ao projeto, que permitiram compreender o desenho de formação proposto e as ações realizadas no âmbito do Projeto.

O Projeto Ensinar e Aprender envolveu um grande número de formadores e educadores de todo o Estado de São Paulo. Além disso, os encontros de formação obedeceram a um cronograma pré-determinado com uma carga horária de aproximadamente 160 horas/anuais por dois anos, totalizando 320 horas.

Os encontros de formação aconteceram em dois momentos simultâneos: o centralizado e o descentralizado. Os encontros centralizados envolveram os formadores do Centro de Estudos e Pesquisas em Educação, Cultura e Ação Comunitária – CENPEC e os formadores das Diretorias de Ensino – DE, enquanto que os encontros descentralizados envolveram os formadores das Diretorias de Ensino e os educadores das unidades escolares, que apresentavam turmas de aceleração da aprendizagem.

Realizamos, também, entrevistas junto a pessoas que participaram do projeto: uma professora de Matemática, uma professora Coordenadora Pedagógica e uma Diretora de Escola. As entrevistas, que foram gravadas e transcritas, tinham como objetivo a obtenção de dados referentes a trajetória profissional das três participantes e aos aspectos metodológicos do processo de formação.

Com os dados obtidos, foram realizadas análises de conteúdo para a obtenção das categorias, por meio da pré-análise dos dados, da exploração do material e do tratamento dos dados, envolvendo a inferência e a interpretação (BARDIN, 1997).

Optamos por convidar a participar de nossa investigação pessoas provenientes de escolas diferentes. Isso por entendermos que proporcionaria uma maior riqueza de informações e detalhes, pois contaríamos com espaços escolares distintos. Ademais, escolhemos a Diretoria de Ensino – Região de Piraju que jurisdicionava diversos municípios do Estado de São Paulo, dentre os quais Avaré, Cerqueira César e Piraju, para realizar nossa investigação por termos contato com algumas pessoas que participaram do Projeto Ensinar e Aprender.

Em nosso trabalho optamos por priorizar os educadores titulares de cargo, pois as chances de eles continuarem nas mesmas escolas pelas quais participaram da formação eram maiores que as dos professores não titulares, sendo que estes últimos estão sujeitos às mudanças de unidades escolares todos os anos. Ademais, com a permanência dos educadores nas mesmas escolas, poderíamos investigar sobre possíveis mudanças ao longo do tempo.

Sujeitos*	Função	Cidade	Data
Profa. Fátima	Diretora de Escola	Piraju	11/ago/09
Profa. Sílvia	Professora Coordenadora	Avaré	15/ago/09
Profa. Lúcia	Professora de Matemática	Cerqueira César	17/set/09

Tabela I – Participantes da pesquisa, função na escola, localidade da escola e data da entrevista.
Fonte: Dados do projeto fornecidos pela participante.
*Utilizamos nomes fictícios.

A profa. Fátima era Diretora de Escola no período do Projeto Ensinar e Aprender. Foi convidada a participar de nosso trabalho por estar alocada na cidade de Piraju e continuar exercendo a função de Diretora de Escola desde 2001.

Essa professora tem 45 anos de idade e 23 anos de serviços prestados à educação, no ciclo I (1º ao 5º ano – 6 a 10 anos) e ciclo II (6º ao 9º ano – 11 a 14 anos), como Coordenadora, Vice-Diretora e Diretora de Escola, além de Supervisora de ensino. Destes 23 anos, nove deles foram como Diretora de Escola. Atualmente é Diretora titular de cargo na cidade de Piraju.

Possui como formação inicial o curso do magistério, concluído em 1983. Além desse, concluiu o curso de Pedagogia em 1985, Ciências em 1987, Supervisão Escolar em 1997 e Pós-Graduação Lato Sensu em Gestão Educacional em 2007.

Durante esses anos, participou de vários cursos de formação continuada, entre eles destacam-se três: o Progestão - Programa de Capacitação a Distância para Gestores Escolares; o Circuito Gestão e o TIC – Tecnologia de Informação e Comunicação.

A profa. Sílvia era professora Coordenadora Pedagógica de uma das escolas da cidade de Avaré, cidade na qual a demanda por classes de aceleração foi muito grande. Optamos por convidá-la, para representar este segmento, por ter sido uma das professoras coordenadora que permaneceu mais tempo na mesma unidade escolar exercendo essa função.

Essa professora tem 48 anos de idade e 28 anos de serviços como educadora. No período compreendido entre 2001 e 2005 exerceu a função de professora coordenadora numa das escolas, na cidade de Avaré. Em 2006 foi convidada a ocupar a função de Assistente do Dirigente de Ensino, numa das Diretorias de Ensino do Estado de São Paulo.

Possui como formação inicial o curso de licenciatura curta em Ciências Biológicas, concluído em 1982, complementado no ano de 1983. Além desse, concluiu o curso de Pedagogia em 1986, Supervisão Escolar em 1987 e Pós-Graduação Lato Sensu em Metodologia de Ciências em 1999.

Enquanto atuava como professora de Ciências, participou do PEC – Programa de Educação Continuada. Na função de professora coordenadora participou de vários cursos de formação continuada, entre eles destacam-se: o Progestão - Programa de Capacitação a Distância para Gestores Escolares; TIC – Tecnologia de Informação e Comunicação; EMR – Ensino Médio em Rede; Programa Letra e Vida e Educação Especial.

A profa. Lúcia é professora titular de cargo de Matemática de uma escola localizada na cidade de Cerqueira César. Essa professora tem 43 anos de idade e 18 anos de serviços. Desde 2001 atua como professora de Matemática nesta mesma unidade escolar.

Possui como formação inicial o curso de Licenciatura em Matemática, concluído em 1991. Antes de participar do Projeto Ensinar e Aprender, como professora regente de classe de aceleração do ciclo II, participou de cursos de curta duração, além do PEC – Programa de Educação Continuada, oferecido pela SEE/SP em parceria com universidades.

Além dos cursos citados, participou do Construindo Sempre Matemática, EMR – Ensino Médio em Rede e Teia do Saber. Mais recentemente, participou dos cursos: A Rede aprende com a Rede e DAC – Disciplina de Apoio Curricular, todos eles oferecidos pela SEE/SP.

As entrevistas realizadas possibilitaram investigar condições proporcionadas pelo Projeto Ensinar e Aprender sob a ótica de cada uma das profissionais dos diferentes segmentos de educadores envolvidos, representados na pessoa da Profa. Diretora Fátima, da Profa. Coordenadora Pedagógica Sílvia e da Profa. de Matemática Lúcia.

O Projeto Ensinar e Aprender

Com o aumento da oferta de vagas na Educação Básica na década de 1970, os alunos oriundos de famílias econômica e socialmente desfavorecidas passaram a ter acesso ao ensino público no Brasil. Contudo, essa ampliação de vagas não foi acompanhada de investimentos que tornassem efetiva a democratização do ensino. A escola recebeu os alunos mais pobres, mas continuou organizada para atender aqueles que já possuíam certo capital cultural, proporcionado pelo acompanhamento dos pais, pelos recursos culturais, tempo e espaços para estudar em casa, propiciando que a escola reproduzisse e legitimasse as desigualdades sociais.

Os fatores de exclusão, permanência e qualidade de ensino no Brasil nos reportam para o processo de reprodução das desigualdades sociais legitimadas pelo sistema de ensino estudados por Bourdieu (1983a, b). A partir do momento que a instituição escolar passa a ser reconhecida como legítima, neutra e não arbitrária passa a exercer suas funções de reprodução e legitimação das desigualdades sociais. Paradoxalmente, as funções de reprodução e legitimação se concretizam por meio de um discurso de equidade formal entre os alunos.

> Para que sejam favorecidos os mais favorecidos e desfavorecidos os mais desfavorecidos, é necessário e suficiente que a escola ignore, no âmbito dos conteúdos do ensino que transmite, dos métodos e técnicas de transmissão e dos critérios de avaliação, as desigualdades culturais entre as crianças das diferentes classes sociais (Bourdieu, 2007, p.53).

Utilizando um atendimento padronizado, proposto para grupos numerosos e pautado em um programa que prevê um ponto arbitrário de partida e outro de chegada, independente do conhecimento que o aluno traz consigo e de seu aproveitamento, a escola ainda hoje não consegue atender a nova clientela que traz outros saberes, próprios de seu universo cultural. Assim, a escola passa a deixar marcas nas relações de ensino, culpabilizando o aluno por não atingir o ponto desejado, por meio de uma ou mais reprovações, levando-o a imagens negativas de si mesmo e a incapacidade para o trabalho escolar.

Se a escola tem a função de formar o cidadão, ensinando-lhe e garantindo-lhe a aprendizagem de habilidades e conteúdos indispensáveis para uma vida em sociedade e se, muitas vezes, é o principal e único meio de acesso ao conhecimento da maioria da população, então existe urgência de a escola encontrar um caminho para cumprir sua função social.

Para contornar a situação atual da educação escolar no Brasil torna-se necessário melhorar a escola, propiciando distribuição do conhecimento e combate ao fracasso escolar. Nesse sentido, são importantes as iniciativas que fortalecem o trabalho docente e favorecem a aprendizagem dos alunos, principalmente dos que estão em situação de defasagem escolar.

Visando a reversão desse quadro caótico e procurando criar condições para que a escola pudesse cumprir sua função social, na década de 1990, administrações de vários pontos do Brasil iniciaram atividades que propiciavam a melhoria da qualidade do ensino e da aprendizagem, como a Secretaria de Estado da Educação de São Paulo (1998, p.11), "redirecionando recursos públicos, criando contextos especiais para atender alunos atingidos por várias repetências".

Essas atividades receberam a denominação de projetos de aceleração de aprendizagem e foram implantados no ensino público fundamental em vários pontos do país, num contexto de políticas educacionais de combate ao fracasso escolar na segunda metade da década de 1990.

A tabela II organizada a partir de informações colhidas do site do Ministério da Educação – MEC.

http://www.inep.gov.br/basica/censo/Escolar/Sinopse/sinopse.asp) traz o panorama geral do Brasil quanto ao número de matrículas em classe de aceleração no ano de 2000.

Podemos obter, pela análise da tabela II, um panorama do número de alunos matriculados nas classes de aceleração em todo o país. Em destaque, podemos verificar que um total de 54.588 alunos estavam matriculados no ano 2.000 no Estado de São Paulo, sendo que, deste total, 27.275 alunos estavam no 7º ano do Ensino Fundamental (acima dos 12 anos), ou seja, quase metade dos alunos matriculados em classes de aceleração do Estado.

Região	Matrículas em Classes de Aceleração por Ano de Ingresso					
	Total	Anos iniciais	6º ano	7º ano	8º ano	9º.
Brasil	1.203.506	660.460	197.119	80.342	195.074	70.511
Norte	50.610	40.862	4.063	756	4.494	435
Nordeste	717.125	435.608	143.900	13.419	108.220	15.978
Sudeste	274.751	116.914	16.555	41.984	61.558	37.740
S. Paulo	54.588	22.779	2.913	27.275	1.000	621
Sul	77.154	17.691	19.906	16.026	11.411	12.120
Centro Oeste	83.866	49.385	12.695	8.157	9.391	4.238

Tabela II - Número de Matrículas em Classes de Aceleração no Ensino Fundamental por Ano de Ingresso, segundo a Região Geográfica em 29/03/2000. Fonte: MEC - Ministério da Educação.

Tomamos como base o documento da Secretaria de Estado da Educação de São Paulo (2008, p.8) para elaborarmos a tabela III. A partir dela, podemos observar a evolução das matrículas em classes de aceleração no Ensino Fundamental – anos finais entre os anos de 2000 e 2007, bem como a quem coube a responsabilidade da formação. As formações ficaram sempre sob responsabilidade das Diretorias de Ensino – DE e Escolas, apenas entre os anos de 2000 e 2002 a Coordenadoria de Estudos e Normas Pedagógicas – CENP esteve presente a estas formações.

Ano	Nº de escolas	Nº de classes	Nº de alunos	Responsáveis pela Formação
2000	368	988	34.580	CENP/DE/ESCOLAS
2001	904	1.698	57.222	CENP/DE/ESCOLAS
2002	979	1.469	44.070	CENP/DE/ESCOLAS
2003	475	701	16.812	DE/ESCOLAS

2004	335	481	11.692	DE/ESCOLAS
2005	217	308	8.029	DE/ESCOLAS
2006	98	123	3075	DE/ESCOLAS
2007	35	47	1.105	DE/ESCOLAS

Tabela III – Evolução do atendimento das classes de aceleração da SEE/SP.

Fonte: Secretaria de Estado da Educação de São Paulo (2008).

Analisando a evolução do atendimento, conforme a tabela III, verificamos que os maiores valores se encontravam entre os anos de 2000 e 2002. É importante salientar que foi nesse período que os encontros de formação do Projeto Ensinar e Aprender aconteceram de forma sistemática tanto em nível centralizado, coordenados pela Secretaria da Educação do Estado de São Paulo – SEE/SP e pelo CENPEC, quanto em nível descentralizado, coordenados pelas Diretorias de Ensino de todo o Estado de São Paulo. Nos anos subsequentes, os encontros de formação ficaram sob a responsabilidade das Diretorias de Ensino e das Escolas, caso achassem necessário fazê-los.

O modelo de formação do Projeto Ensinar e Aprender foi pensado e desenhado buscando substituir os cursos pontuais, fragmentados, restritos a itens específicos de cada disciplina e excessivamente teóricos. Segundo documento da Secretaria de Estado da Educação de São Paulo (2008, p.3), a formação foi orientada pelos princípios:

- Ações voltadas para o conjunto dos educadores, organizando alternadamente momentos presenciais para análise do cotidiano e ampliação da fundamentação teórica, com momentos de implementação e desenvolvimento de atividades no local de trabalho integrando teoria e prática.

- Consideração da realidade emergente da prática dos educadores e dos indicadores de resultados educacionais como foco de demanda para discussões, reflexões e propostas de ação.

- Integração da vivência e do conhecimento dos profissionais visando à construção de um trabalho coletivo, responsável e autônomo na escola, para melhorias das práticas docentes.

- Acompanhamento contínuo das ações de capacitação, cujo resultado deve sempre evidenciar a melhoria da aprendizagem dos alunos, para seu redirecionamento quando necessário.

Além disso, segundo o mesmo documento (2008, p.6), o Projeto previa como perfil docente apropriado ao trabalho com as turmas de aceleração, professores que apresentassem:

- sensibilidade para a adoção da proposta do trabalho de aceleração da aprendizagem;

- interesse em novas perspectivas de atuação em sala de aula;

- flexibilidade para mudanças na orientação de sua prática;

- adoção de práticas pedagógicas diferenciadas e significativas;

- interesse e disponibilidade em socializar e potencializar a capacitação no âmbito da escola;

- disponibilidade para participar das ações de formação.

Dessa maneira, as escolas buscavam contemplar esse perfil de professor regente nas turmas de aceleração e no encaminhamento para participação no Projeto Ensinar e Aprender.

Cada encontro centralizado de formação desencadeava um encontro descentralizado. Nos encontros centralizados, a equipe do CENPEC, responsável pela elaboração do material e pela formação, capacitava as equipes das Diretorias de Ensino, formadas pelos Assistentes Técnico-Pedagógicos – ATP de Língua Portuguesa, Matemática, Ciências, História, Geografia, Educação Física, Arte e Aceleração e por um Supervisor de Ensino. A formação aconteceu, na maioria das vezes, na cidade de São Paulo e algumas vezes na cidade de Serra Negra, pois necessitava de amplo espaço físico por envolver um grande número de pessoas.

Nos encontros descentralizados, as equipes das Diretorias de Ensino, já capacitadas, retornavam à sua regional e capacitavam as equipes escolares que atuariam com os alunos das classes de aceleração. A equipe escolar era composta por dois professores de cada disciplina, um professor regente da classe de aceleração e um professor convidado, todos indicados pelas escolas. Além deles, a equipe escolar era formada pelo Diretor e um professor Coordenador Pedagógico; algumas Diretorias de Ensino incluíram nesse grupo o Vice-Diretor da Escola.

No que tange ao aspecto irradiação da metodologia do Projeto, as Diretorias de Ensino receberam, incluindo no grupo de gestores, os gestores das outras escolas que não contavam com classes de aceleração, afim de que estes também conhecessem a metodologia utilizada pelo Projeto e viessem, futuramente, a organizar em suas unidades escolares classes de aceleração, como é o caso da nossa participante a Profa. Diretora Fátima.

Nos dois tipos de formação ocorridos no Projeto Ensinar e Aprender, os grupos de professores foram organizados de acordo com suas especialidades, ou seja, de acordo com as disciplinas das quais eram responsáveis, tanto para a formação centralizada (os ATP das disciplinas), quanto para a formação descentralizada (os professores das disciplinas).

Na organização dos educadores em grupos pode ser percebido o papel exercido pelo *habitus* de classe, por meio da função de cada um e de sua atuação no interior dos espaços social e escolar, e pelo capital cultural institucionalizado do qual são detentores, pois para Bourdieu apud Silva (2008, p.102):

> [...] todo agente social, que age no interior de um campo específico, procura ajustar o seu esquema de pensamento, percepção e ação às exigências objetivas daquele espaço social. Para ele, o motor da ação repousa na relação entre o *habitus* e o campo. Assim, num processo de ajustes, transformações e adequações dentro do campo específico, o agente social vai construindo sua prática.

Assim, quando verificamos que os grupos foram organizados segundo a especialidade dos professores (de matemática, de ciências, gestores escolares, entre outros), podemos estabelecer uma associação entre o *habitus* de classe e a forma de organização das turmas para o desenvolvimento das atividades do Projeto.

Bourdieu (1983b, p.105) define que:

> *Habitus* é um produto dos condicionamentos que tende a reproduzir a lógica objetiva dos condicionamentos, mas introduzindo neles uma transformação; é uma espécie de máquina transformadora que faz com que reproduzamos as condições sociais de nossa própria produção, mas de maneira relativamente imprevisível, de uma maneira tal que não se pode passar simplesmente e mecanicamente do conhecimento das condições de produção ao conhecimento dos produtos.

O *habitus* está relacionado ao produto da experiência biográfica de cada sujeito. Entretanto, existem classes de experiências semelhantes e, portanto, classes de *habitus*.

> Para explicar a diversidade na homogeneidade que caracteriza os *habitus* singulares dos diferentes membros de uma mesma classe e que reflete a diversidade na homogeneidade característica das condições sociais de produção desses *habitus*, basta perceber a relação fundamental de homologia que se estabelece entre os *habitus* dos membros de um mesmo grupo ou de uma mesma classe enquanto eles são o produto da interiorização das mesmas estruturas fundamentais. (Bourdieu, 1983a, p.80).

Ora, os professores de uma mesma disciplina possuem um conjunto de tendências, de comportamentos que foram adquiridos por meio das experiências práticas e das condições materiais dessas experiências. Entendemos que tais características, embora sejam singulares a cada ser social, também são muito próximas, apresentando certa regularidade entre os sujeitos da mesma classe.

Organizamos a tabela IV, a partir de dados de documento da Secretaria de Estado da Educação de São Paulo (2002, p.5) e dos encontros realizados com o grupo de professores de Matemática, a fim de explicitar os estudos realizados nos encontros que contemplavam quatro dias de formação. E, analisando-a, podemos verificar que houve necessidade de os grupos terem duas formas de organização. Uma contemplava as especificidades de cada uma das disciplinas na qual eram desenvolvidas atividades referentes à proposta pedagógica do Projeto e questões específicas de cada disciplina. Vale ressaltar que a organização dos grupos, de acordo com a especificidade das disciplinas, acontecia tanto na formação centralizada quanto na formação descentralizada.

Carga horária* (em %)	Carga horária* (em horas)	Estudos realizados
60	19	Proposta pedagógica do projeto; Questões específicas da Matemática.

15	5	Questões relativas ao planejamento; Trabalho coletivo, gestão e integração da equipe da DE e da escola.
25	8	Questões relativas ao acompanhamento e avaliação do projeto nas escolas e na DE.

Tabela IV – Distribuição da carga horária segundo os estudos realizados pelos professores de Matemática. Fonte: Secretaria de Estado da Educação de São Paulo (2002).

*carga horária aproximada.

Outra forma de organização previu que os educadores estivessem agrupados para atender necessidades do coletivo da Diretoria de Ensino (em nível de capacitação centralizada) e também para atender o coletivo da Escola (em nível de capacitação descentralizada). Pela análise da tabela IV podemos verificar que essa forma de organização visou atender tanto as Diretorias de Ensino como as unidades escolares quanto as necessidades do trabalho coletivo; a gestão e integração das equipes; e as questões relativas ao planejamento das ações, acompanhamento e avaliação. Dentre os quatro dias previstos para a formação, um dia era totalmente voltado ao desenvolvimento de ações coletivas envolvendo Diretorias de Ensino e unidades escolares.

Analisando a organização desses grupos, reportamo-nos novamente aos conceitos de *habitus* e de campo, estudados por Bourdieu. Apesar de sabermos que não existem duas histórias individuais iguais, sabemos que existem classes de experiências semelhantes ou, até mesmo, muito próximas e isto faz com que a análise do *habitus* de classe no Projeto Ensinar e Aprender seja significativa para nossos estudos.

Aspectos da Formação e Reflexos na Escola

No início desse texto apontamos que o Projeto Ensinar e Aprender teve como um dos objetivos reconduzir os alunos defasados em idade/ano escolar à trajetória regular dos estudos e houve uma formação para os professores que atuariam junto a esses alunos. Entendendo que investigamos questões sociais, optamos por utilizar alguns conceitos estudados por Pierre Bourdieu, tais como: violência simbólica, *habitus*, campo e capital cultural.

Ao tentarmos organizar os documentos e depoimentos referentes à formação, percebemos que estes trazem informações acerca da formação proporcionada pelo Projeto Ensinar e Aprender e poderiam ser divididos em duas categorias, de acordo com o grau de recorrência dentre os depoimentos: a forma de organização dos grupos para a realização das atividades e as mediações, e ambas relacionadas aos procedimentos metodológicos de formação.

Em relação à forma de organização dos grupos, entendemos que todo ser humano é um ser social que sofre influências do meio social no qual está inserido e das relações humanas que estabelece. Podemos classificar esses espaços sociais dependendo das relações que se estabelecem em seu interior, como o espaço social chamado família, escola, trabalho, igreja, etc.

Além disso, cada um desses espaços sociais é regido por regras específicas e por disputas internas determinadas pelas relações que se estabelecem entre seus integrantes. Esses espaços sociais Bourdieu chamou de campo.

Segundo Bourdieu (1983a, p.89), campo

> [...] são espaços estruturados de posições (ou de postos) cujas propriedades dependem das posições nestes espaços, podendo ser analisadas independentemente das características de seus ocupantes (em parte determinadas por elas). [...] Há diferentes campos; cada um se define através da definição dos objetos de disputa e dos interesses específicos que são irredutíveis aos objetos de disputa e aos interesses próprios de outros campos e que não são percebidos por quem não foi formado para entrar neste campo.

Uma característica menos visível de um campo diz respeito às pessoas engajadas nele. Elas possuem certos interesses comuns que estão ligados à própria existência do campo. A disputa desses interesses pressupõe um acordo entre os adversários, os pressupostos estão tacitamente aceitos pelo simples fato de se entrar no jogo, na disputa. Aqueles que participam do jogo contribuem para a reprodução do jogo, reforçando a crença no valor do que está sendo disputado.

Dessa maneira, a primeira forma de organização dos grupos a ser analisada diz respeito à organização dos alunos nas turmas de aceleração e sua aceitação pelos envolvidos no projeto.

> O problema maior que eu tive nessa escola foi o problema da aceitação dessa classe pelos outros professores. Porque muitos dos professores achavam que nós estávamos discriminando esses alunos, por colocarmos todos numa só sala. Nós fomos estudando com eles, mas mesmo assim a conscientização foi muito difícil (Profa. Diretora Fátima, 2009).

Neste depoimento percebemos que os educadores, ao agruparem os alunos defasados em uma turma específica e realizarem um trabalho diferenciado com eles, tinham receios de estarem discriminando-os.

O fato de a equipe escolar tratar de modo igual todos os alunos, mesmo aqueles que se encontram em situações diferenciadas, como no caso, os alunos da classe de aceleração (defasados em idade/ano escolar e conhecimentos), aceitando esta situação como “natural”, pode ser caracterizado como privilegiar, mesmo que de maneira dissimulada, quem já é privilegiado.

A este mecanismo de dissimulação, Bourdieu (1983a) deu o nome de violência simbólica, desvendando o mecanismo que faz com que os indivíduos vejam como “naturais” as representações e as ideias das classes dominantes. Aliado a isso, Bourdieu mostra que esse conceito está associado à incapacidade das pessoas de reconhecer o caráter arbitrário das representações e das ideias determinadas pelas classes dominantes.

Os professores reconhecem que os alunos das classes de aceleração ao receberem um atendimento diferenciado se desenvolvem mais do que se estivessem em classes regulares, recebendo um ensino padronizado para a maioria já "privilegiada".

Além da violência simbólica, encontramos em alguns depoimentos indícios da necessidade de mudança das concepções e crenças dos professores, principalmente relacionados ao trabalho com as turmas de aceleração.

> É interessante você falar porque no primeiro momento, quando chegou a correção de fluxo, no primeiro HTPC [Horário de Trabalho Pedagógico Coletivo], foi um susto. Era um projeto novo, alunos com defasagem idade/ano escolar, como nós vamos trabalhar isto? (Profa. Coordenadora Sílvia, 2009).

Embora, a priori, a violência simbólica se fazia presente entre os educadores, parece-nos que a formação proporcionada pelo projeto tenha contribuído no sentido de sua conscientização, pois "conhecendo as leis da reprodução é que temos alguma chance de minimizar a ação reprodutora da instituição escolar" (Bourdieu apud Catani, 2007, p. 24).

> Nós tivemos um respaldo muito grande. Nós fomos preparados para isso, foi um curso que preparou, que deu oportunidade pra você conhecer o projeto, trabalhar o projeto e desenvolver o projeto na sala de aula. No começo assustou e depois só deu alegria para a gente (Profa. Coordenadora Sílvia, 2009).

Outro aspecto associado ao conceito de violência simbólica diz respeito ao fato de os professores associarem a repetência, a evasão e a indisciplina dos alunos das classes de aceleração a problemas familiares, como se estes problemas fossem inerentes apenas aos alunos das classes de aceleração. Podemos observar esta concepção em alguns depoimentos.

> E não é novidade pra ninguém que o aluno repetente, evadido, tem problema de disciplina, porque a autoestima é baixa, tem problemas familiares (Profa. Diretora Fátima, 2009).

> Os alunos da correção de fluxo tinham grandes problemas sociais. Uma vez eu chamei uma mãe na escola para conversar e ela chegou às sete horas da manhã, cheirando a bebida. Alguns já estavam envolvidos com drogas, roubavam, outros tinham passagem pela FEBEM [Fundação Estadual do Bem-Estar do Menor]. Então quando esses alunos não queriam fazer as atividades eu ia obrigar, enfrentar? Não. Eles faziam quando queriam (Profa. de Matemática Lúcia, 2009).

Entretanto, a formação proporcionada pelo Projeto Ensinar e Aprender parece ter contribuído, de maneira positiva, nas relações interpessoais entre alunos, professores e gestores.

> E nas últimas reuniões nossas, nas avaliações, no HTPC, você percebia que o professor gostava muito dessa classe. Porque os alunos passaram a ter um carinho e respeito muito grande. Era trabalhada muito a autoestima do aluno e, consequentemente, do professor; era um trabalho de muita interação (Profa. Coordenadora Sílvia, 2009).

Enquanto que os professores foram organizados em grupo, segundo a disciplina de sua especialidade, os gestores das escolas (Diretores, Vice-Diretores e professores Coordenadores Pedagógicos) formaram um único grupo chamado de grupo dos técnicos.

Essa organização do grupo dos técnicos talvez possa ser explicada pelo fato de que os gestores eram responsáveis pelo acompanhamento do projeto em termos pedagógicos, além de serem os responsáveis pelas questões de cunho administrativo e burocrático. Para Bourdieu (1983a, p.79), essa organização se justifica pelo fato de que:

> [...] é certo que todo membro de uma mesma classe tem maiores chances do que qualquer membro de outra classe de ter-se defrontado, enquanto ator ou enquanto testemunha, com as situações mais frequentes para membros dessa classe.

Além da organização dos grupos segundo a especialidade de seus sujeitos, o projeto previu momentos de interação entre os dois segmentos, dos professores das disciplinas e dos gestores.

> Eu me lembro de que em 2002 nós trabalhamos com o grupo escola. Porque às vezes a gente se sente inseguro, lá na escola, sozinho. Então nas capacitações de formação continuada vinha o grupo todo: o diretor, o vice, o coordenador e todos os professores que lecionavam nessa classe. Trocávamos experiências com outras escolas. Então, nós víamos que as mesmas angústias que nós tínhamos, todos tinham; então nós voltávamos, para a escola, mais fortalecidos (Profa. Diretora Fátima, 2009).

Segundo a Profa. Diretora Fátima, essa nova forma de agrupamento recebeu o nome de grupo escola e tinha por objetivos discutir e resolver as questões de âmbito pedagógico e administrativo.

Percebemos, pelos depoimentos, que a alteração do campo possibilitou a incorporação de novos saberes que, por sua vez, passaram a fazer parte do capital cultural dos participantes, o que pode propiciar alterações de *habitus*.

Em relação à mediação, conseguimos perceber a importância dada às mediações ocorridas durante as capacitações dos professores e dos gestores, tanto por meio de relatos da época do desenvolvimento do Projeto, quanto por meio de relatos que colhemos durante nossas entrevistas.

> Fomos fazer o curso para trabalhar com o material. [...] Na capacitação nós fazíamos as atividades, líamos, marcávamos o que era importante [...] muitas das atividades nós aprendíamos como trabalhar (Profa. de Matemática Lúcia, 2009).

> Através das capacitações que nós tínhamos com os ATP da Diretoria de Ensino foi possível desenvolver habilidades que nos tornaram mais profissionais [...] em nossos encontros, nós éramos muito bem trabalhados [...] Sem as orientações, os estudos com os ATP, onde nós iríamos buscar tudo isso? Tinha que ter alguém que nos orientasse para que a gente pudesse trabalhar (Profa. Coordenadora Sílvia, 2009).

Entretanto, as mudanças não foram sentidas e realizadas por todos de mesma maneira, alguns problemas persistiam.

> Alguns voltavam seguros, alguns voltavam com muitas dúvidas [...] não podemos falar que o professor vinha pronto; ele vinha, estava preparado, mas tivemos alguns problemas (Profa. Diretora Fátima, 2009).

Outra forma de mediação por parte dos formadores, que se mostrou importante, foi à proporcionada por ocasião dos acompanhamentos junto às escolas e às salas de aula realizadas pela equipe da Diretoria de Ensino.

> O acompanhamento ajudava. Por mais que nós possamos falar que precisa conscientização, precisa de acompanhamento para ver onde está trabalhando certo ou errado (Profa. Diretora Fátima, 2009).

> [os formadores] eram bem recebidos, traziam para a gente, corrigiam na medida do possível, naquilo que era necessário, mas uma correção com progresso, com sucesso, fazendo que a gente entendesse o que era certo, o que era errado, mas de forma muito carinhosa; nunca como fiscal e sim como companheiros (Profa. Coordenadora Sílvia, 2009).

> Alguns professores não gostavam porque achavam que o trabalho estava sendo vigiado. Eu nunca liguei, não faço conta que assistam a minha aula, porque o trabalho será o mesmo. [...] Vigiada entre aspas, não no sentido de cobrança, mas como estava indo o trabalho em si, na sala de aula. Era neste sentido, e tinha que ser, afinal, como que iria dar o retorno? (Profa. Matemática Lúcia, 2009).

Podemos observar pelos depoimentos que o acompanhamento não era tido como uma forma de vigilância por estas professoras, mas uma forma de verificar a incorporação dos conhecimentos e habilidades trabalhados nos encontros do Projeto Ensinar e Aprender pelos participantes.

Uma forma de mediação importante citada muitas vezes pelos participantes foi à mediação proporcionada pelas interações entre os pares, fato já analisado nas formas de organização dos grupos para a realização das atividades previstas pelo Projeto. Mesmo assim, gostaríamos de trazer alguns depoimentos que explicitam esta forma de mediação.

> O curso era muito importante porque lá a gente trocava muitas idéias. A gente levava o trabalho dos nossos alunos para os colegas verem [...] a gente fazia a atividade, discutia como tinha que ser. [...] essa troca era muito importante (Profa. Matemática Lúcia, 2009).

> Não adianta nada você entregar a apostila, alguma coisa pronta, mas se você não tem uma troca de idéias, troca de experiências [...] ao ouvir o colega, você passa a aprender com ele, você refletia sobre a sua prática, então você cresce (Profa. Coordenadora Sílvia, 2009).

Pelo depoimento da Profa. Coordenadora Sílvia percebe-se o reconhecimento que as mediações entre os pares proporcionaram à reflexão da prática e, por conseguinte, ao crescimento profissional. Dessa forma, entendemos que as mediações realizadas no Projeto Ensinar e Aprender facilitaram a incorporação de novos aspectos ao capital cultural.

Considerações Finais

Uma das intenções do Projeto Ensinar e Aprender era que a metodologia desenvolvida por ele não ficasse restrita apenas às classes de aceleração, mas fosse aplicada também junto às classes regulares e, principalmente, fosse incorporada às práticas dos professores. Isto porque os problemas estavam também na escola e na forma de ensinar e não somente nas dificuldades de aprendizagem dos alunos. Ou seja, tinha-se consciência de que o fracasso destes alunos estava muito mais relacionado à reprodução das condições sociais do que a problemas de aprendizagem.

Buscamos, assim, neste trabalho analisar o Projeto Ensinar e Aprender considerando os procedimentos metodológicos de formação utilizados durante a execução do projeto e tomando os conceitos de reprodução, violência simbólica, *habitus*, campo e capital cultural de Bourdieu.

No caso da Profa. Diretora Fátima é notado que ela como Diretora não se percebeu em processo de formação, mas como alguém responsável por acompanhar aqueles professores da escola que dirigia. A participação dessa professora explicitou aspectos importantes relacionados à violência simbólica e ao campo por apresentar questões referentes ao relacionamento com outros professores na escola.

Quanto à Profa. Coordenadora Sílvia, esta afirma utilizar a metodologia aprendida com o Projeto Ensinar e Aprender nas reuniões que realiza nos dias atuais, ou seja, parece-nos que a metodologia passou a integrar o seu capital cultural e *habitus*.

> Tanto que, em nosso HTPC nós continuamos, até o último HTPC que eu fiquei na escola, nós trabalhamos o tempo inteirinho com dinâmicas, reflexões, interação; com música para poder trabalhar a parte humana, aprendemos a trabalhar com a legislação de uma forma não cansativa. Independente do projeto ou não, continuamos a trabalhar dessa maneira (Profa. Coordenadora Sílvia, 2009).

Já a Profa. de Matemática Lúcia afirma utilizar algumas atividades aprendidas com o Projeto Ensinar e Aprender até nos dias de hoje. Para ela, o Projeto ofereceu um rol de atividades novas que se encontram presentes em suas aulas.

> Tinha uma ficha, com uma cena para descobrir que horas era o filme; essa ficha é muito legal, eles adoravam; os problemas de lógica dos triângulos; as atividades em si são muito legais, tanto que eu deixo esse material lá no meu armário, na escola. Acrescenta muito para os alunos. (Profa. de Matemática Lúcia, 2009).

Assim, os materiais utilizados no Projeto Ensinar e Aprender propiciaram, juntamente com os encontros de formação, que mudanças no *habitus* e do campo ocorressem.

Em decorrência da aceitação do material produzido, este passou a integrar o cabedal de recursos pedagógicos do professor, ou seja, passou a compor o material de trabalho junto às classes do ensino regular.

> Nisso a correção foi legal, porque nós conseguimos muito material para trabalhar também nas classes do regular (Profa. de Matemática Lúcia, 2009).

Em relação às condições proporcionadas pelo Projeto Ensinar e Aprender que permitiram, facilitaram e/ou contribuíram para mudanças nas práticas pedagógicas dos professores, apontamos três fatores:

1. A formação continuada foi realizada por meio de convocações pelo Diário Oficial do Estado de São Paulo, com dispensa de ponto na escola, para que os professores pudessem participar da formação em serviço por dois anos consecutivos,

com encontros sistemáticos, totalizando 320 horas de formação. Desta forma, podemos identificar a aquisição de capital cultural institucionalizado.

2. O envolvimento, a participação e o compromisso das pessoas de vários níveis hierárquicos, como os técnicos da SEE/SP (nível central), os técnicos das Diretorias de Ensino (nível regional), os professores e gestores das unidades escolares (nível local). Nesse aspecto, podemos apontar que a reorganização do campo e do *habitus* de classe foram fatores que contribuíram para possíveis processos de mudanças dos professores.

3. As mediações proporcionadas pelos formadores e entre os pares nos momentos da formação centralizado e descentralizado, além das mediações proporcionadas por ocasião dos acompanhamentos nas escolas e nas salas de aula possibilitaram alterações do *habitus* dos professores e da percepção de violências simbólicas presentes em suas escolas.

Percebemos a relevância dada ao material produzido e à metodologia utilizada, que priorizava as interações e as mediações durante os encontros de formação e nos acompanhamentos realizados nas escolas, além do compromisso e envolvimento dos participantes em seus diferentes níveis hierárquicos.

Confirmamos, também, o quão importante foi apontar aspectos da violência simbólica e da reprodução existentes na escola para as mudanças. Para Bourdieu, só assim é possível romper com uma situação imperante na escola, ou seja, por meio das mediações adequadas, da organização dos campos, do investimento no capital cultural e, conseqüentemente, da incorporação e das mudanças no *habitus* dos envolvidos.

Referências

Bardin, L. (1997). *Análise de conteúdo*. Lisboa: Edições 70.

Bourdieu, P. (2008). *A Economia das Trocas Lingüísticas*: o que falar quer dizer. São Paulo: Editora Universidade de São Paulo.

_______. (2007). Os três estados do capital cultural. In: Nogueira, M.A. e Catani, A. (Org.) *Escritos da Educação*. 9 ed. Petrópolis, RJ: Vozes, 71-79.

_______. (1983a). Esboço de uma teoria da prática. In: Ortiz, R. (Org.) *Sociologia*. São Paulo: Ática, 46-81.

_______. (1983b). *Questões de Sociologia*. Rio de Janeiro: Editora Marco Zero Limitada.

Manrique, A. L., André, Marli. (2009). Concepções, sentimentos e emoções de professores participantes de um processo de formação continuada em geometria. *Educação Matemática Pesquisa* (Online), 11.1, 165-185.

Manrique, A. L., Tinti, D.S., Lima, M.A.M. (2011). Formação inicial e continuada: contribuições para o desenvolvimento profissional de professores de matemática. Praxis & Saber - Revista de Investigación en Educación *y*

Pedagogía, 2, 87-102.

Ministério da Educação. (1996). Lei nº 9394 – Estabelece as diretrizes e bases da educação nacional. Brasília: Diário Oficial da União.

Catani, D.B. (2007). A educação como ela é. *Revista Educação Especial*, 5, 16-25.

Gatti, B.A., Barreto, E.S.S. (2009). *Professores do Brasil*: impasses e desafios. Brasília: UNESCO.

Gatti, B.A. (2009). A formação de professores: condições e problemas atuais. *Revista Brasileira de Formação de Professores*, 1, 90-102.

_______. (2003). Formação continuada de professores: a questão psicossocial. *Cadernos de Pesquisa*, 119, 191-204.

_______. (2001). A new model for teachers training. In: Ministério das Relações Exteriores. *Texts from Brazil*. Brasília: Ministério das Relações Exteriores, 39-43.

Secretaria de Estado da Educação de São Paulo. (2008). *Projeto de Reorganização da Trajetória Escolar do Ensino Fundamental*: Classes de Aceleração. São Paulo: SEE/SP-CENP.

_______. (2002). *Programa de Melhoria da Qualidade do Ensino de São Paulo*, Projeto Ensinar e Aprender – Corrigindo o Fluxo do Ciclo II: Documento de Implantação. São Paulo: SEE/SP.

_______. (1998). *Ensinar e Aprender*: construindo uma proposta. São Paulo: SEE/SP, Impulso Inicial.

Silva, M.A.S. (2008). A utilização do conceito de habitus em Pierre Bourdieu para a compreensão da formação docente. *Extra-classe*, 2, 1, 90-105.

Sandra de Fátima Tavares Rodrigues Tonon. Mestre em Educação Matemática pela PUC/SP e Professora da Secretaria Estadual de Educação do Estado de São Paulo – Brasil. Trabalhou como Assistente Técnico Pedagógica de Matemática e como formadora de professores entre os anos de 2001-2008 na Diretoria de Ensino de Piraju. Atualmente é Supervisora de Ensino na Diretoria de Ensino de Piraju. Possui experiência na formação de professores e de gestores. Possui artigos publicados na área de Educação Matemática. E-mail: sandraftrtonon@gmail.com.

Ana Lúcia Manrique. Doutora em Educação: Psicologia da Educação pela PUC/SP e Professora do Programa de Estudos Pós-Graduados em Educação Matemática da PUC/SP. Atualmente coordena projeto de pesquisa aprovado no Programa Observatório da Educação da CAPES. Os interesses de pesquisa centram-se na formação de professores que ensinam matemática, na educação matemática inclusiva e na utilização de mapas conceituais. analuciamanrique@hotmail.com.

UNIÓN
REVISTA IBEROAMERICANA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA

ISSN: 1815-0640
Número 41. Marzo 2015
Páginas 87-106

Resolução de problemas – um exemplo de formação de professores e aplicação com alunos

Patrícia Sampaio

Fecha de recepción: 19/12/2013
Fecha de aceptación:16/06/2014

Resumen	El nuevo programa de matemática de la enseñanza básica aún está siendo apropiado por los maestros, que necesitan tener una formación específica sobre las nuevas metodologías de enseñanza, hacer experiencias y construir nuevas tareas. Este reajuste incluye, para cada uno de los ciclos de la enseñanza, los objetivos, los temas matemáticos, las orientaciones metodológicas, aspectos ligados a la gestión curricular y a la evaluación. El Portugués Ministerio de la Educación ha proporcionado locales específicos de formación para los formadores de Algebra para promover el desarrollo profesional de los profesores. Se presenta la aplicación y la reflexión de una tarea que resulta de esta formación, que está dividida en dos partes, siendo la primera aplicable en cualquier ciclo y la segunda, con la explotación del Geogebra, más indicada para el 3º ciclo, sobre proporcionalidad directa
Abstract	The new compulsory education program of mathematics is still being appropriate by teachers who need specific training on new teaching methods, to share experiences and build new tasks. This adjustment includes, for each of the cycles of compulsory education, goals, mathematical topics, methodological guidelines, aspects related to curriculum management and assessment. Thus, the Portuguese Ministry of Education provided training workshops for teachers' trainers to promote professional development. We present the application and reflection of a task resulting from this training, about Algebra, which is divided into two parts, the first can be applied in any cycle and the second, with Geogebra's exploitation, most suitable for 3.º cycle, about functions of direct proportionality.
Resumo	O novo programa de Matemática do ensino básico ainda está a ser apropriado pelos professores, que necessitam de formação específica sobre as novas metodologias de ensino, de trocar experiências e construir novas tarefas. Este reajustamento engloba, para cada um dos ciclos do ensino básico, os objetivos, os temas matemáticos, as orientações metodológicas, aspectos ligados à gestão curricular e à avaliação. Deste modo, o Ministério da Educação Português forneceu oficinas de formação de formadores para se promover o desenvolvimento profissional dos professores. Apresenta-se a aplicação e a reflexão de uma tarefa resultante desta formação no âmbito da Álgebra, que está dividida em duas partes, sendo a primeira aplicável em qualquer ciclo e a segunda, com a exploração do *Geogebra*, mais indicada para o 3.º ciclo, sobre funções de proporcionalidade direta.

1. Introdução

As oficinas de formação promovidas pela Direção Geral de Inovação e Desenvolvimento Curricular (DGIDC) Portuguesa no âmbito do Programa de Matemática do Ensino Básico (PMEB) visaram preparar os docentes para a lecionação da disciplina, tendo em conta as orientações curriculares do programa.

Focaram as alterações em termos de conceitos lecionados, as orientações programáticas (das finalidades aos objetivos gerais e específicos), materiais recomendados, reforçando as capacidades transversais. Pela formação de formadores, a DGIDC tentou proporcionar uma perspetiva sobre as orientações curriculares atuais para o ensino da Matemática no ensino básico (9 anos de escolaridade, alunos com uma idade compreendida entre os 6 e os 15 anos), fomentar estratégias de trabalho colaborativo, habilitar os professores a planificar e concretizar tarefas matemáticas, proporcionar a capacidade de delinear, realizar e divulgar projetos de intervenção no campo do ensino/aprendizagem da Matemática. Deste modo, visava-se a reflexão da prática docente e o desenvolvimento profissional dos professores de Matemática.

Pela diversificação de tarefas matemáticas, pretendem-se atingir diferentes objetivos e pela discussão dos raciocínios promovidos na sua realização, há uma efetiva reflexão sobre como se alcançaram certas conclusões, promovendo o pensamento matemático. O ensino da Matemática pela resolução de problemas deve contribuir para a formação de alunos reflexivos.

Apresenta-se uma revisão de literatura sobre as tarefas matemáticas e a resolução de problemas, a importância do desenvolvimento profissional dos professores, a utilização de *software* de geometria dinâmica nas aulas de Matemática para finalmente se explorar uma tarefa aplicada em contexto de sala de aula.

O objetivo deste trabalho de pesquisa é apresentar um estudo de caso, realizado no âmbito da formação contínua de formadores de professores de Matemática, promovida pela DGIDC, visando contribuir para o desenvolvimento profissional dos mesmos no sentido da promoção de alterações nas metodologias de ensino adotadas pelos docentes em contexto de sala de aula.

2. Tarefas matemáticas e resolução de problemas

Uma tarefa matemática pode assumir diferentes naturezas e, deste modo, apelar a diferentes níveis cognitivos (Felício & Rodrigues, 2010), salientando-se a pertinência de todos os tipos de tarefas nas aulas de Matemática (explorações, investigações, problemas, exercícios, projetos …), mas reforçando-se a importância, em particular, de tarefas mais desafiantes, devendo ocupar um espaço significativo no trabalho quotidiano dos alunos. As diferentes tarefas usadas pelos professores representam diferentes tipos de pensamento por parte dos alunos, de acordo com o nível de exigência concetual das mesmas e da forma como são implementadas (Stein & Smith, 1998). A este respeito consideram Ponte e Sousa (2010, p. 35) que, e passamos a citar,

> A selecção das tarefas a propor aos alunos constitui um dos aspectos essenciais do trabalho do professor. Mais do que descobrir uma ou outra tarefa motivante para "amenizar" uma sequência de aulas mais "árida", o professor tem de considerar todo o conjunto das tarefas a propor na unidade, incluindo

> naturalmente a sua diversidade (em termos de complexidade, nível de desafio e contexto matemático/não matemático), tempo de realização e representações e materiais a utilizar.

As recomendações atuais resultantes da investigação em educação Matemática apontam para que o docente diversifique as tarefas que propõe aos alunos, dando grande importância à atividade dos alunos no processo de ensino/aprendizagem, desempenhando cada tipo de tarefa um papel específico na concretização dos objetivos propostos (NCTM, 2007).

Os alunos devem ter oportunidades para discutir as tarefas com os colegas e com o professor, de argumentar, criticar e interagir nas atividades propostas, para uma efetiva partilha de ideias, estratégias, raciocínios e pensamentos matemáticos, desenvolvendo-se ainda a capacidade de comunicação dos mesmos. Não são "as tarefas que só por si irão alterar a aprendizagem. É de realçar a grande importância da acção do professor nas questões que coloca, nas interacções que promove, em especial encorajando os alunos a discutir e a explicar a Matemática que desenvolvem" (Oliveira, Segurado & Ponte, 1998, p. 108).

> O professor que proporciona aos alunos tarefas desafiantes e apropriadas ao seu conhecimento, está a proporcionar o estabelecimento de conexões entre vários tópicos dentro e fora da Matemática e a estimular a argumentação e a comunicação recorrendo a diferentes representações. Em suma, está a contribuir para o desenvolvimento do pensamento independente e crítico, tão essencial a várias facetas da vida. (Boavida, Paiva, Cebola, Vale & Pimentel, 2008, p. 33).

Polya, em 1945, foi o primeiro a abordar, de forma consistente, a questão da resolução de problemas em contexto de sala de aula, considerando que as atividades propostas pelo docente devem fazer o aluno pensar, construindo ele próprio o seu conhecimento, mas só nos anos 80 esta questão se tornou mais pertinente para a NCTM. Em Portugal, os programas de Matemática começaram a considerar a resolução de problemas como um objetivo prioritário no ensino desta disciplina a partir dos anos 90 e, neste momento, o PMEB "assume para além dos temas principais, três capacidades transversais a toda a aprendizagem da Matemática – a Resolução de problemas, o Raciocínio matemático e a Comunicação matemática" (Ponte et al., 2007, p. 1). "A resolução de problemas não só é um importante objectivo de aprendizagem em si mesmo, como constitui uma actividade fundamental para a aprendizagem dos diversos conceitos, representações e procedimentos matemáticos" (*ibidem*, p. 8).

O PMEB contempla a existência de diferentes estratégias de resolução de problemas a serem trabalhadas pelos professores com os alunos, ao longo dos vários ciclos, como a utilização de esquemas/diagramas/tabelas/gráficos, trabalhar do fim para o princípio, a simulação/simplificação do problema, a descoberta de regularidade/regras, a organização de uma sequência de passos, por tentativa e erro, a procura de um problema análogo mais simples, o desdobramento de um problema complexo em questões mais simples, a criação de um problema equivalente, a exploração de casos particulares…

Através da resolução de problemas, o aluno averigua a validade de conceitos matemáticos, estimula procedimentos num contexto significativo, relaciona conceitos, realiza conjeturas, generaliza, toma uma atitude reflexiva, desenvolve a capacidade de raciocínio e o pensamento matemático. Segundo Boavida et al. (2008, p. 14), a resolução de problemas:

- proporciona o recurso a diferentes representações e incentiva a comunicação;
- fomenta o raciocínio e a justificação;
- permite estabelecer conexões entre vários temas matemáticos e entre a Matemática e outras áreas curriculares;
- apresenta a Matemática como uma disciplina útil na vida quotidiana.

"Numa perspectiva educacional, formular e resolver problemas é uma componente essencial de fazer Matemática e permite o contacto com ideias matemáticas significativas" (Boavida *et al.*, 2008, p. 14). Os problemas propostos em contexto de sala de aula devem relacionar diferentes conceitos, estendendo-se às relações entre eles (Onuchic, 1999). Um problema é uma "situação em que, para o indivíduo ou para o grupo em questão, uma ou mais soluções apropriadas precisam ainda de ser encontradas. A situação deve ser suficientemente complicada para constituir um desafio, mas não tão complexa que surja como insolúvel" (NCTM, 1991, p.11). Ponte (2005) considera quatro tipos essenciais de tarefas matemáticas: exercício (estrutura fechada e desafio reduzido), problema (estrutura fechada e desafio elevado), exploração (estrutura aberta e desafio reduzido) e investigação (estrutura aberta e desafio elevado). Estamos perante um problema quando o aluno necessita de encontrar um caminho para chegar à solução através de estratégias. O aluno deve procurar regularidades, formular, testar, justificar e provar conjeturas, refletir e generalizar, não estando imediatamente acessíveis nem o processo de resolução nem a solução do problema, mostrando-se como desafiador para o aluno. Segundo Polya (2003), a resolução de um problema consiste de quatro fases: entender o problema, formular um plano de resolução, executá-lo e verificá-lo.

Dante (2003) define alguns objetivos para a resolução de problemas matemáticos: fazer o aluno pensar produtivamente, desenvolver o raciocínio do aluno, ensinar o aluno a enfrentar situações novas, dar ao aluno a oportunidade de se envolver com as aplicações da Matemática, tornar as aulas de Matemática mais interessantes e desafiadoras, equipar o aluno com estratégias para resolver problemas, dar uma boa base matemática às pessoas.

Pela resolução de problemas, os alunos podem descobrir factos novos, o que os motiva a encontrarem novas formas de resolverem o mesmo problema, despertando-lhes a curiosidade para conhecimentos matemáticos e desenvolverem a capacidade de solucionar as situações que lhes são propostas. "Na abordagem de Resolução de Problemas como uma metodologia de ensino, o aluno tanto aprende matemática resolvendo problemas como aprende matemática para resolver problemas" (Andrade, 1998, p. 7) e desta forma, a resolução de problemas passa de um processo para uma metodologia de ensino. Huete e Bravo (2006, p. 118-119) reforçam esta ideia:

A resolução de problemas tem a ver com a produção de conhecimentos significativos para aquele que aprende. O conhecimento que se valoriza pela sua significação não é o conhecimento transmitido, mas o conhecimento produzido por quem está em situação de aprender. Assim, se a resolução de problemas deve ser o lugar da produção do conhecimento, a tarefa de resolver problemas é uma tarefa privilegiada para a aprendizagem.

O ensino da Matemática pela resolução de problemas deve contribuir para a formação de alunos reflexivos, autónomos e participativos, capazes de compreender e transformar a realidade, não se limitando à aplicação de regras e definições.

3. Desenvolvimento profissional

O desenvolvimento profissional dos professores envolve um processo contínuo de melhoria de práticas com o intuito de se promoverem mudanças educativas que visem a melhoria da qualidade de ensino, através de reflexões constantes sobre a prática docente, e "concretiza-se com uma atitude permanente de pesquisa, de questionamento e de busca de soluções" (Garcia, 1999, p. 137). "O professor tem de ser capaz de apreender intuitivamente as situações, articulando pensamento e acção e gerindo dinamicamente relações sociais; tem de ter autoconfiança e capacidade de improvisação perante situações novas" (Ponte, Oliveira, Brunheira, Varandas & Ferreira, 1998, p. 43). Sendo a formação uma parte integrante do desenvolvimento profissional de professores, é a formação que "lhes permite intervir profissionalmente no desenvolvimento do seu ensino, do currículo e da escola, com o objectivo de melhorar na qualidade do ensino que os alunos recebem" (Garcia, 1999, p. 26). Nóvoa (1992, p. 28) acrescenta que "a formação passa pela experimentação, pela inovação, pelo ensaio de novos modos de trabalho pedagógico e por uma reflexão crítica sobre a sua utilização. A formação passa por processos de investigação, directamente articulados com as práticas educativas". O desenvolvimento profissional dos professores, é pois um processo que, na perspetiva de alguns dos autores consultados,

> Implica adaptação à mudança com o fim de modificar as actividades de ensino-aprendizagem, alterar as atitudes dos professores e melhorar os resultados escolares dos alunos. (Heideman, 1990, p. 4)

> Inclui todas as experiências de aprendizagem natural e aquelas que, planificadas e conscientes, tentam, directa ou indirectamente, beneficiar os indivíduos, grupos ou escolas e que contribuem para a melhoria da qualidade da educação nas salas de aula. (Day, 1999, p. 4)

> [É] um *processo*, que pode ser individual ou colectivo, mas que se deve contextualizar no local de trabalho do docente – a escola – e que contribui para o desenvolvimento das suas competências profissionais através de experiências de diferente índole, tanto formais como informais. (Marcelo, 2009, p. 10)

O conceito de desenvolvimento profissional de professores associa-se ao de formação contínua e de aprendizagem ao longo da vida (Bolam & McMahon, 2004; Terigi, 2007). Qualquer que seja o conceito adotado, o objetivo é a promoção de mudança nos professores, para que estes possam crescer enquanto profissionais e indivíduos. Segundo Day (2007), o desenvolvimento profissional sempre foi essencial para os professores que trabalham numa escola, colocadas todas as mudanças que ocorrem no currículo, nas metodologias de ensino e nas próprias condições de trabalho.

O PMEB ainda está a ser apropriado pelos professores de Matemática, necessitando, estes, de frequentarem formações, neste âmbito, cooperar com outros colegas na planificação das aulas, partilhar experiências e materiais, construir tarefas matemáticas desafiantes e inovadoras … "Relativamente às necessidades futuras evidenciadas pelos professores de formação contínua, a maioria considera como prioritárias a formação em didática e/ou temas do grupo disciplinar e a formação ao nível das TIC" (Sampaio & Coutinho, 2011, p. 149-150). Neste âmbito, a DGIDC promoveu oficinas de formação de formadores sobre o PMEB, por todo o país, para se promoverem metodologias em consonância com o programa.

4. Matemática e *software* de geometria dinâmica

As TIC estão presentes nos programas oficiais de Matemática, devendo, por isso, o professor de Matemática integrar efetivamente as tecnologias nas suas aulas em todos os níveis de ensino. As orientações metodológicas do PMEB são bastante claras. O PMEB salienta que "os alunos devem conhecer os factos e procedimentos básicos da Matemática. Isto é, devem ser capazes de (…) usar instrumentos matemáticos tais como réguas, esquadros, compassos, transferidores, e também calculadoras e computadores" (Ponte *et al.*, 2007, p. 4), assim como usarem origens diversas (livros, manuais, jornais, Internet …) para o desenvolvimento da comunicação matemática, e tirarem partido das TIC na resolução de problemas. Pela resolução de problemas associada à utilização das TIC, os alunos devem explorar atividades investigativas para a promoção do pensamento matemático, conforme o PMEB explicita, "a utilização adequada de recursos tecnológicos como apoio à resolução de problemas e à realização de atividades de investigação permite que os alunos se concentrem nos aspetos estratégicos do pensamento matemático" (*ibidem*, p. 62-63). A investigação tem vindo a reconhecer que a tecnologia pode facilitar abordagens dinâmicas de variados conceitos da Álgebra, pelas múltiplas representações, interativas, que poderão permitir a construção de significados, mais relevantes do que os aspetos manipulativos (Ferrara, Pratt & Robutti, 2006), ideia reforçada por Ponte, Oliveira e Varandas (2003, p. 160):

> Estas tecnologias permitem perspectivar o ensino da matemática de modo profundamente inovador, reforçando o papel da linguagem gráfica e de novas formas de representação e relativizando a importância do cálculo e da manipulação simbólica. (...) Deste modo, as TIC podem favorecer o desenvolvimento nos alunos de importantes competências, bem como de

atitudes mais positivas em relação à matemática e estimular uma visão mais completa sobre a natureza desta ciência.

Na Internet estão disponíveis materiais educativos que podem ser usados para o ensino da Matemática como a mais variada informação de natureza científica, problemas e desafios, jogos educativos, *software* específico (por exemplo, o *Geogebra*), planos de aula, *applets* … Assim como diversos espaços de comunicação e colaboração como *blogues* e plataformas de gestão de aprendizagem. Silva *et al*. (2001) salientam que como as escolas de hoje estão ligadas à Internet, o professor de Matemática não deve desperdiçar este meio de comunicação.

O PMEB sugere a utilização de computadores na representação de objetos geométricos, na resolução de problemas e na exploração de situações, referindo que “os alunos devem recorrer a *software* de geometria dinâmica, sobretudo na realização de tarefas exploratórias e de investigação” (Ponte *et al.*, 2007, p. 51). Relativamente às capacidades transversais, o PMEB também aponta como recurso o computador, a ser usado em diferentes domínios: geométrico, numérico e tratamento de dados, de modo a se tirar proveito em contexto de sala de aula da experimentação, apoiando a resolução de problemas e as atividades de investigação.

Um exemplo, bastante utilizado pelos professores de Matemática, de *software* livre de geometria dinâmica, é o *Geogebra* que proporciona uma abordagem inovadora da geometria, permitindo a construção de figuras geométricas e auxiliando assim a compreensão de conceitos e propriedades. Caldas (2011) elaborou um estudo sobre o desempenho dos alunos no 7.º ano pela utilização do *GeoGebra* na abordagem do tema ”Triângulos e Quadriláteros”, tendo concluído que “o *software* de matemática dinâmica é um recurso muito eficaz, ao nível da formulação de teorias, à investigação, à exploração e ao aumento da motivação para a aprendizagem da disciplina de matemática” (p. 151). “Nesta perspetiva, as atividades propostas, com recurso ao *GeoGebra*, permitem, “dar vida” às figuras geométricas planas imóveis, contidas nos manuais de segundo e terceiro ciclos” (p. 87). Fernandes (2011) procurou analisar o contributo do *GeoGebra* para potenciar a capacidade de argumentação em alunos do 9.º ano no estudo da geometria e “em praticamente todas as tarefas, os alunos foram conduzidos a explorar uma determinada construção e, através da sua manipulação, procurar estabelecer relações e propriedades geométricas” (p. 141), tendo os estudantes acabado por autonomamente e, sem dificuldade, procederem à manipulação de objetos para explorarem, testarem e validarem propriedades e relações. Verificou-se uma mudança nas perspetivas dos alunos sobre a argumentação e sobre a aprendizagem do tema da geometria com recurso a um ambiente de geometria dinâmica e a tarefas de natureza exploratória e investigativa.

Piteira (2000) elaborou um estudo com recurso ao ambiente de geometria dinâmico *Sketchpad*, em duas turmas, uma do 8.º e outra do 9.º ano de escolaridade, tendo verificado que os próprios menus deste *software* facilitaram o entendimento, pelos alunos, das construções geométricas, *obrigando-os* a pensar como deveriam construir novas figuras, avaliando o que já tinham construído e permitindo-lhes assim tirar conclusões sobre as suas propriedades e relações geométricas. De forma semelhante, Mota (2004) desenvolveu um estudo com recurso ao *Sketchpad*, em duas turmas do 9.º ano de escolaridade, sobre o tópico "Circunferência e Polígonos. Rotações", tendo concluído que este *software* permitiu aos alunos desenvolverem a capacidade de formularem conjeturas e realizarem as respetivas provas.

> O ensino com as tecnologias de informação e comunicação tem de ser uma acção planeada, que assume os alunos como seres activos, isto é, inserida numa estratégia educativa centrada no estudante, oferecendo, deste modo, novas formas de aprendizagem. Estas práticas pedagógicas utilizadas de uma forma coerente, harmoniosa e sistemática contribuem para o desenvolvimento de um trabalho mais autónomo pelos nossos alunos, capazes de analisar, reflectir, verificar, organizar, seleccionar e estruturar as informações provenientes de diversas fontes. (Sampaio, 2006, p. 60)

5. Exploração de uma tarefa matemática

O programa de formação de formadores da DGIDC, em Álgebra, no âmbito do PMEB, consistiu em formações contínuas, segundo a metodologia de oficina de formação, desenvolvidas ao longo de três meses com a duração de cinquenta horas: vinte e cinco presenciais e vinte e cinco de trabalho autónomo. Neste caso, os formandos são professores de Matemática do 3.º ciclo do ensino básico (alunos com uma idade compreendida entre os 12 e os 15 anos) que também são formadores de professores de Matemática. A sua frequência neste tipo de formações promovidas pela DGIDC prende-se com a obrigatoriedade de replicação nas escolas onde lecionam.

Nesta pesquisa, apresenta-se um estudo de caso em que o procedimento adotado foi a recolha de dados pelo professor através de observação direta e materiais elaborados pelos alunos. Como se tratou de uma oficina de formação, todos os formandos teriam de criar tarefas matemáticas a aplica-las aos seus alunos. Assim, através deste programa de formação foram criadas diversas tarefas matemáticas, que foram aplicadas e exploradas, em contexto de sala de aula, assim como discutidos os resultados obtidos, em plenário, na formação. Através da reflexão destas experiências visou-se entender melhor o papel do professor como construtor de tarefas matemáticas, orientador da aplicação e discussão das mesmas, em contexto de sala de aula, e que alterações devem ser introduzidas nas metodologias adotadas pelo professor para maximizar os resultados. As metodologias de ensino usadas pelo professor podem ser caraterizadas segundo três papéis: desafiar, apoiar e avaliar, já que o docente necessita de desafiar os alunos para a concretização de tarefas investigativas através de diferentes situações e questões, por outro lado, o docente necessita de apoiar o trabalho desenvolvido pelos alunos através de perguntas, comentários e sugestões e, por fim, o docente necessita de avaliar os progressos dos alunos, assim como as dificuldades sentidas, para prosseguir com o planeado ou efetuar alterações necessárias (Ponte *et al.*, 1998, p. 24).

Apresenta-se uma tarefa matemática constituída por duas partes resultante desta formação, que foi aplicada em 3 turmas, uma do 7.º ano de escolaridade, outra do 8.º e outra do 9.º. A primeira parte (figura 1) foi pensada para qualquer ciclo do ensino básico, dependendo da forma como é explorada pelo docente, e refere-se à área de um quadrado, no âmbito do desenvolvimento das capacidades transversais. A tarefa foi elaborada para ser executada em trabalho de grupo com a duração prevista de 45 minutos, divididos em dois momentos: primeiro, exploração da tarefa e segundo, apresentação oral e discussão em grande grupo das conclusões. No primeiro momento, o professor deverá assumir uma postura de orientador, permitindo que os alunos tenham tempo e liberdade para refletirem sobre o problema e descobrirem as suas próprias estratégias. No segundo momento, o docente deverá orientar a discussão, mas permitindo sempre que os alunos apresentem e expliquem as estratégias utilizadas.

Figura 1: Tarefa apresentada na oficina de formação de formadores do novo PMEB 3.º ciclo – Álgebra, proposta pela DGIDC.

1. O seguinte diálogo passou-se numa aula de matemática.

Professor: - Se aumentarmos a medida do lado de um quadrado o que acontece à área?

Henrique: - Também aumenta.

Professor: - Aumenta de que forma?

Henrique: - É fácil. Se o lado duplica, a área duplica. Se o lado triplica, a área triplica ...

Matilde: - Acho que isso não é verdade!

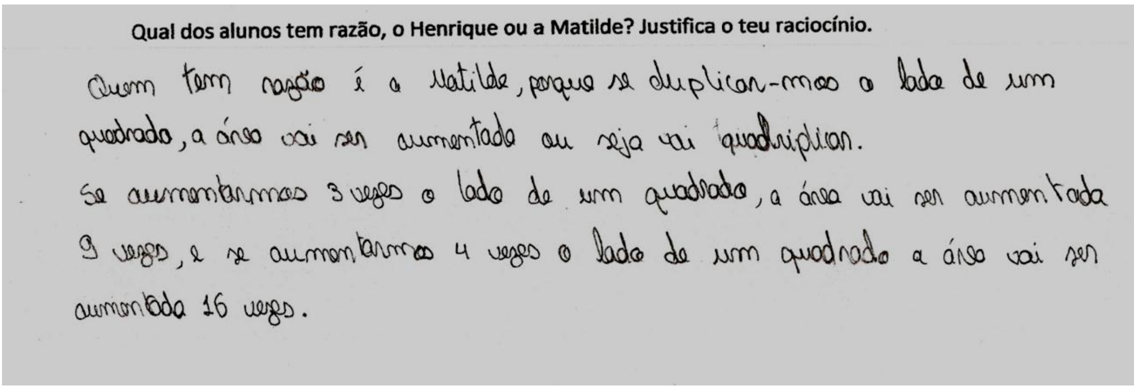
Porque se pensarmos num quadrado em que o comprimento do lado é o dobro do outro, o espaço que fica lá dentro é maior que o dobro ....

Qual dos alunos tem razão, o Henrique ou a Matilde? Justifica o teu raciocínio.

Esperava-se, pela exploração desta tarefa, que os alunos compreendessem que a duplicação da medida do lado de um quadrado não duplica a sua área, estabelecendo uma relação entre o aumento da medida do lado e o aumento da área (por palavras, esquemas, cálculos …), assim como a superação de algumas dificuldades a nível da expressão escrita, rigorosa e clara, e o desenvolvimento da comunicação matemática.

A tarefa foi aplicada nos três anos de escolaridade do 3.º ciclo do ensino básico, com bastante sucesso, apresentando-se alguns exemplos de raciocínios obtidos pelos alunos, salientando-se a construção de figuras, a determinação numérica da área através de exemplos concretos, o recurso a quadrados perfeitos e às noções de quadrado e de retângulo.

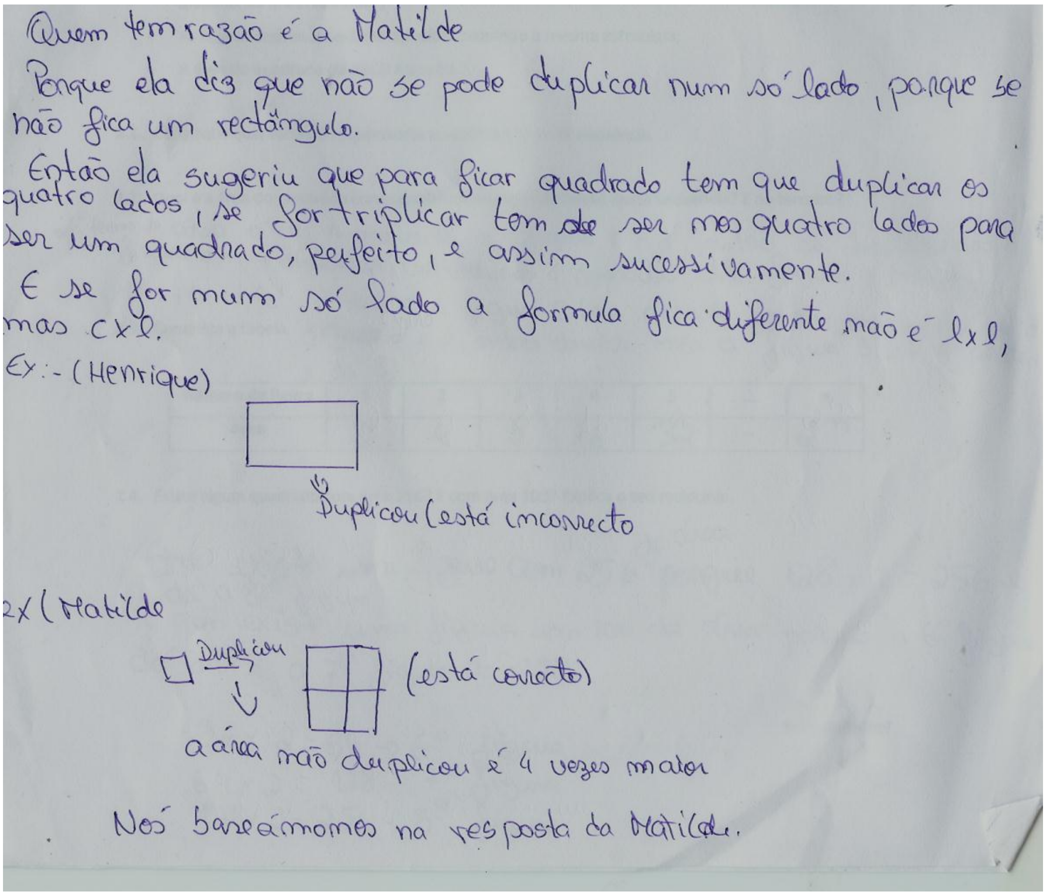
Figura 2: Aluno do 7.º ano de escolaridade.



Qual dos alunos tem razão, o Henrique ou a Matilde? Justifica o teu raciocínio.

Quem tem razão é a Matilde, porque se duplicar-mos o lado de um quadrado, a área vai ser aumentada ou seja vai quadruplicar.
Se aumentarmos 3 vezes o lado de um quadrado, a área vai ser aumentada 9 vezes, e se aumentarmos 4 vezes o lado de um quadrado a área vai ser aumentada 16 vezes.

Figura 3: Aluno do 7.º ano de escolaridade.



Quem tem razão é a Matilde
Porque ela diz que não se pode duplicar num só lado, porque se não fica um rectângulo.
Então ela sugeriu que para ficar quadrado tem que duplicar os quatro lados, se for triplicar tem de ser nos quatro lados para ser um quadrado perfeito, e assim sucessivamente.
E se for num só lado a formula fica diferente não é l×l, mas c×l.
Ex:- (Henrique)

Duplicou (está incorrecto

2x (Matilde

Duplicou

(está correcto)

a área não duplicou é 4 vezes maior

Nós baseámos na resposta da Matilde.

Figura 4: Aluno do 8.º ano de escolaridade.

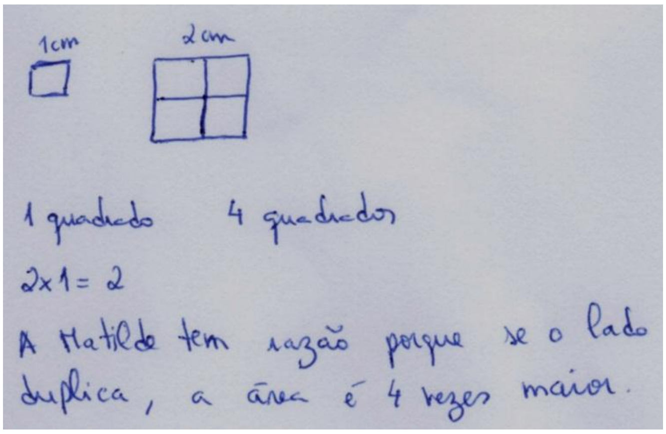


Figura 5: Aluno do 8.º ano de escolaridade.

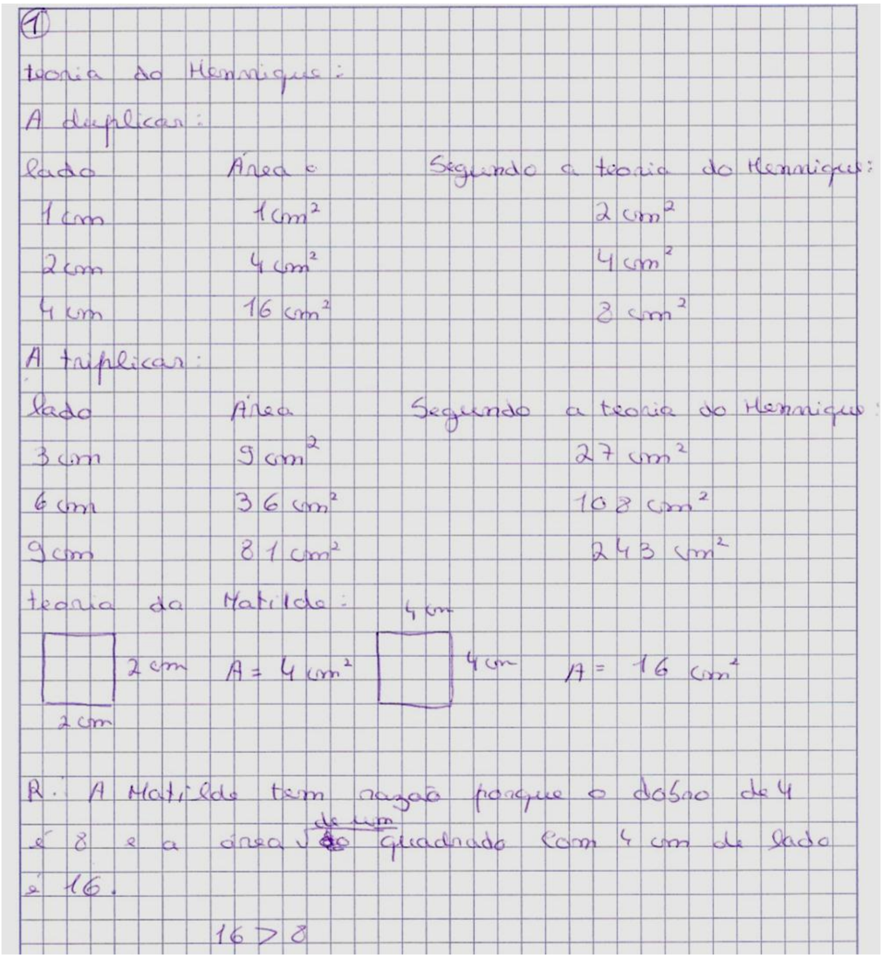


Figura 6: Aluno do 9.º ano de escolaridade.

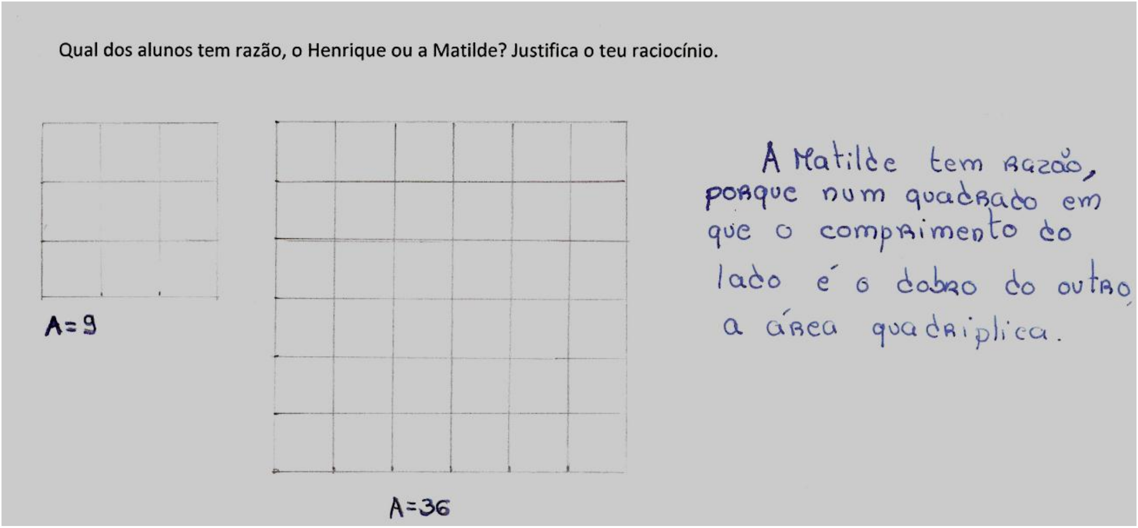
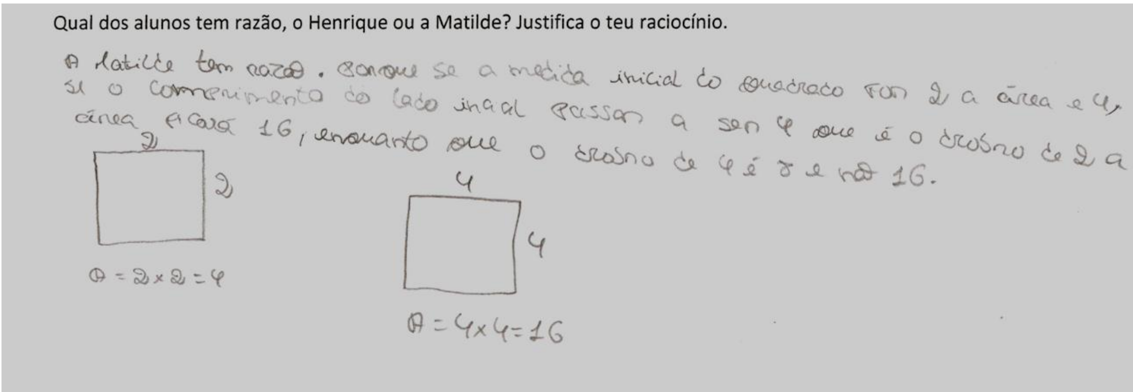


Figura 7: Aluno do 9.º ano de escolaridade.



No entanto, nenhum grupo de alunos, em qualquer dos anos de escolaridade, apresentou um raciocínio sem recurso a exemplos concretos, salientando-se o papel fundamental do professor na discussão e exploração da tarefa. A argumentação é uma parte integrante do raciocínio, essencial à construção do pensamento matemático. É durante a discussão, em plenário, que o docente tem a oportunidade de se colocar no lugar do aluno e entender as suas estratégias. Para além de procurar saber as conclusões, devidamente justificadas, a que os alunos chegaram, deve conduzir a discussão coletiva para a turma conseguir tirar implicações interessantes ainda não mencionadas. A prova matemática é um dos processos que os alunos manifestam maior dificuldade, não sentindo frequentemente a necessidade de provar uma ideia. A prova é uma sequência de ideias e de conhecimentos que visam alcançar a compreensão matemática (Hanna 2000), ou seja, é mais do que uma sequência de passos corretos. Os alunos devem saber se uma afirmação é verdadeira, mas também o motivo dessa veracidade. A prova matemática deve ser promovida pelo professor.

A segunda parte da tarefa (figura 8) foi desenhada para o 3.º ciclo do ensino básico com a duração de 45 minutos, sobre proporcionalidade direta. Neste caso, recorreu-se ao *software* de geometria dinâmica *Geogebra* e dividiram-se os alunos em pares, de modo a que cada par tivesse acesso a um computador. De forma semelhante à primeira, a segunda parte foi dividida em dois momentos: primeiro, exploração da tarefa com recurso ao *Geogebra* e segundo, apresentação oral e discussão em grande grupo das conclusões. A tarefa consistia na construção de um quadrado [ABCD] e na criação de um ponto E pela relação *(a, 4a)*, em que *a* correspondia à medida do comprimento do lado do quadrado. Depois os alunos deveriam alterar o comprimento do lado e registar os dados numa tabela, obtendo uma representação gráfica desta relação.

Figura 8: Parte da tarefa apresentada na oficina de formação de formadores do novo PMEB 3.º ciclo – Álgebra, proposta pela DGIDC.

II Parte

1.

1.1. Abre o GeoGebra e, no menu Exibir, faz aparecer na janela de visualização os eixos coordenados e o quadriculado.

1.2. No quinto ícone da barra de ferramentas selecciona a opção Polígono Regular

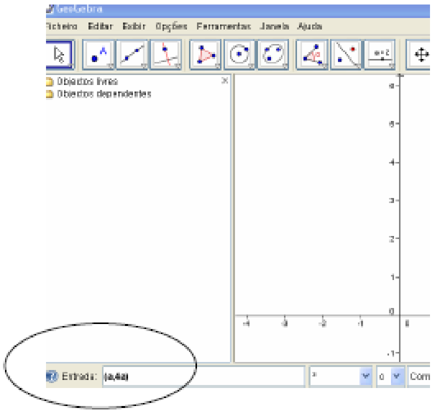
1.3. Desenha um lado, seleccionando dois vértices à tua escolha, e confirma que o número de lados do polígono regular é 4.

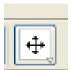
O GeoGebra cria o quadrado ABCD, cujos lados são os segmentos de recta a, b, c e d.

1.5. Dado que se trata de um quadrado, indica a relação entre a, b, c e d.

1.6. Já estudaste na primeira parte a relação entre o perímetro (y) de um quadrado e o comprimento do seu lado (x). Se o comprimento do lado é **a**, qual será o perímetro desse quadrado?

1.7. Escreve no campo de entrada (a, 4a).



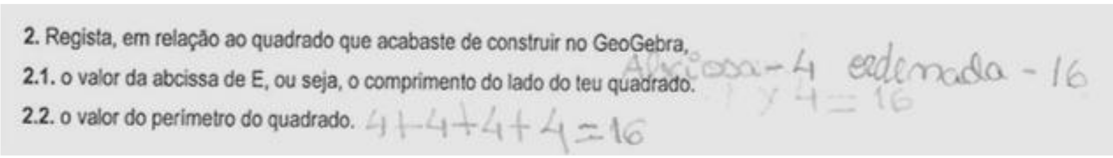
O GeoGebra cria um ponto E (para o visualizares podes ter de utilizar o ícone  *e arrastar a folha do desenho)*

Esperava-se, pela exploração desta tarefa, que os alunos determinassem o perímetro de polígonos regulares, identificassem e assinalassem pares ordenados no plano cartesiano, analisassem situações de proporcionalidade direta como funções do tipo $y = kx$, com $k \neq 0$, compreendessem o conceito de função como relação entre variáveis, desenvolvessem as capacidades transversais.

A tarefa foi aplicada nos três anos de escolaridade do 3.º ciclo do ensino básico. Todos os alunos estiveram envolvidos, demonstrando interesse durante a realização da tarefa, menos saliente nos alunos do 9.º ano de escolaridade, evidenciando-se ainda alguma facilidade para os alunos trabalharem com o programa de geometria dinâmica. Das dúvidas levantadas pelos alunos, salientam-se as dificuldades sentidas na compreensão de expressões com variáveis, mais pertinente no 7.º ano de escolaridade, alguma confusão entre as noções de perímetro e área, e dificuldades em compreender o significado do ponto E. Apresenta-se um exemplo de um diálogo entre a professora (P) e um par de alunos (A e B) sobre o ponto E, assim como a resposta que este par deu à questão 2. (figura 9)

A — O ponto E onde está?
B — Aumenta o zoom.
A — Não tem nada …
P — Já criaram o ponto E? Ah! Está aqui. (pausa) Afinal ainda não o criaram. Têm de fazer *Enter*. Já têm o ponto E.
(Os alunos ficaram calados a olhar para a professora)
P — Onde estará o ponto E? Quais são as suas coordenadas? (pausa) Ora lê aqui. Quais são as suas coordenadas?
A — 4 … 16.
B — O ponto E está lá para cima.
P — Exatamente. Vês o que ele está a fazer.
A — Está ali! Já o vi!
P — Vamos deslocar para aqui. Com esta tecla deslocas …
(Os alunos leem a questão 2)
P — Qual é a abcissa do ponto E?
A — É 4.
P — Se a abcissa do ponto E é 4 qual terá de ser a ordenada? (pausa) Como construíram o ponto E? O que escreveram no campo de entrada?
A — (a, 4a).
P — Se a é igual a 4 então qual é o valor da ordenada?
A — 16 porque 4x4 é 16.
(O aluno B fica pensativo)
B — Que corresponde ao perímetro (responde euforicamente).

Figura 9: Exemplo de uma resposta dada pelos alunos.


2. Regista, em relação ao quadrado que acabaste de construir no GeoGebra,
2.1. o valor da abcissa de E, ou seja, o comprimento do lado do teu quadrado. Abcissa - 4 ordenada - 16
2.2. o valor do perímetro do quadrado. 4+4+4+4=16

Após a compreensão do que era o ponto E, os alunos deveriam alterar o comprimento do lado do quadrado, arrastando um dos vértices na base da construção do quadrado inicial, fazendo surgir novos quadrados e os respetivos pontos no gráfico, obtendo assim uma representação gráfica desta relação através do *Geogebra*. A forma como o ponto E foi construído permitiu que os alunos visualizassem, de uma forma dinâmica, que o gráfico que representa a relação entre as variáveis é um conjunto de pontos que se situa sobre uma reta que passa na origem do referencial, confirmado por eles ao introduzirem a expressão algébrica *y=4x* no campo de entrada deste *software*. A representação gráfica desta função sobrepõe-se assim aos pontos assinalados pelo rasto da deslocação do ponto E. Verificando que numa situação de proporcionalidade direta, a função correspondente apresenta uma representação gráfica de uma reta que passa na origem do referencial.

Após os diferentes registos, os alunos deveriam refletir sobre o gráfico que tinham acabado de construir. Através desta tarefa procurou-se que os alunos reforçassem a compreensão do conceito de função como relação entre variáveis e como correspondência entre dois conjuntos, a capacidade de utilizar a notação apropriada, representassem algebricamente situações de proporcionalidade direta, relacionassem uma função linear com a proporcionalidade direta, traduzissem relações de linguagem natural para linguagem matemática e vice-versa.

Esta tarefa poderia ser resolvida sem recurso a um programa de geometria dinâmica, usando apenas papel e lápis, mas esta ferramenta educativa contribuiu para uma construção de uma visão mais dinâmica do gráfico de uma função linear, num contexto de inter-relação entre a Geometria e a Álgebra.

6. Discussão dos resultados

O professor deve proporcionar tarefas matemáticas apropriadas ao conhecimento dos alunos de acordo com a faixa etária, o nível de escolaridade e os pré-requisitos necessários à sua resolução, mas estas tarefas devem ser mais que simples resoluções de exercícios, devem ser desafiantes de forma a promoverem a capacidade de comunicação e argumentação dos alunos (Boavida, Paiva, Cebola, Vale & Pimentel, 2008). Deste modo, na formação de formadores de Matemática, promovida pela DGIDC, os professores tiveram de elaborar tarefas matemáticas que foram analisadas e discutidas por um conjunto de especialistas na área (20 professores de Matemática do 3.º ciclo – formandos – e 2 professores de Educação Matemática do ensino superior – formadores). No entanto, apesar de importantes, não são as tarefas por si só que produzem alterações na aprendizagem dos alunos. A ação do professor de Matemática pode encorajar ou inibir os alunos a desenvolverem a comunicação matemática, fomentando ou não uma discussão rica e argumentativa dos raciocínios de cada um (Oliveira, Segurado & Ponte, 1998). Deste modo, a aplicação da tarefa apresentada nesta pesquisa implicou sempre uma alternância entre a apresentação da tarefa por parte do professor, o trabalho de grupo desenvolvido pelos alunos, a apresentação oral dos raciocínios elaborados por cada grupo de alunos e a sua discussão em plenário, já com orientações específicas do professor.

A resolução de problemas é uma das capacidades transversais explícitas no PMEB, devendo ser explorada pelo professor nas suas aulas. Este processo de fazer Matemática pode ser assumido ainda como uma metodologia de ensino, contribuindo para a criação de alunos reflexivos. Esta metodologia de trabalho pode incentivar o raciocínio, a comunicação e a justificação (Boavida, 2008). Neste caso, "o problema é o ponto de partida e, na sala de aula, através da resolução de problemas, os alunos devem fazer conexões entre diferentes ramos da Matemática, gerando novos conceitos e novos conteúdos" (Onuchic & Allevato, 2011, p. 81).

Em traços gerais, os objetivos desta formação prendiam-se com a criação de tarefas matemáticas desafiantes por parte dos professores, a sua aplicação em contexto de sala de aula segundo uma metodologia de trabalho mais centrada na exploração das ideias desenvolvidas pelos alunos, no sentido de se promoverem alterações nas práticas letivas dos docentes. O desenvolvimento profissional docente é um processo contínuo que envolve reflexão da prática. Este processo deve ser contextualizado e contribuir para o desenvolvimento das competências profissionais dos professores através das suas experiências (Marcelo, 2009). Há uma ligação forte entre o desenvolvimento profissional e a formação contínua dos professores (Bolam & McMahon, 2004; Terigi, 2007) e, neste sentido, através desta formação pretendia-se que os professores assumissem a resolução de problemas como uma metodologia. Pela criação e adaptação de diversos problemas, resolução e discussão em plenário, sua aplicação em contexto de sala de aula, reflexão da sua aplicação e propostas de melhoria, a formação visava consciencializar os professores das potencialidades da resolução de problemas e, neste caso, como estes docentes também teriam de replicar esta formação nas suas escolas, através das suas experiências, esta formação ganhava um poder de atuação nos professores muito maior que apenas os que estavam diretamente envolvidos.

O PMEB reforça a ideia de resolução de problemas associada às TIC, já que a utilização de recursos tecnológicos que favoreçam/facilitem a resolução de problemas poderá promover o pensamento matemático. Neste sentido, os professores foram induzidos a integrarem as TIC nas suas aulas. Na tarefa apresentada uma parte recorreu à exploração do *Geogebra*. O uso de programas de geometria dinâmica permite estimular a descoberta pela experiência, apresentando-se como um meio de verificação de conjeturas e de construção de contraexemplos para conjeturas falsas (De Villiers, 2003). A descoberta de forma autónoma é reforçada pelo uso destes ambientes de geometria dinâmica porque permite aos alunos que constatem um facto antes da sua demonstração (Keyton, 2003). A utilização destes *softwares* com tarefas adequadas, previamente construídas e/ou selecionadas pelos professores, encorajam os alunos a formular conjeturas, podendo constituir uma oportunidade para estes apreciarem a natureza e a finalidade da prova matemática.

7. Considerações finais

Os professores de Matemática devem refletir constantemente sobre a sua prática docente e, neste sentido, a formação contínua desempenha um papel de destaque. Pela partilha de experiências, abertura a novas metodologias, tornando a atividade prática compreensiva pela visualização de possibilidades e limitações dos conteúdos que são explorados em contexto de sala de aula. Através da criação de tarefas matemáticas e sua aplicação, pretendeu-se refletir sobre as capacidades transversais, tão fundamentais no PMEB, tentando promover o desenvolvimento do pensamento matemático nos alunos e simultaneamente o desenvolvimento profissional dos professores.

Apresenta-se uma reflexão sobre uma tarefa matemática criada e aplicada no âmbito da formação contínua de professores de Matemática segundo o tema Álgebra, dando bastante relevo à resolução de problemas, capacidade transversal do PMEB, e integração da tecnologia no processo de ensino/aprendizagem. Trata-se de uma experiência de formação bastante rica pela partilha de experiências e criação de materiais para a sala de aula.

Espera-se que a resolução de problemas venha a incorporar a prática docente dos professores que frequentaram a formação assim como, através da replicação da formação por estes, na prática letiva de muitos outros professores.

Referências

Andrade, S. (1998*). Ensino-aprendizagem de matemática via resolução, exploração, codificação e descodificação de problemas e a multicontextualidade da sala de aula*. Rio Claro: IGCE, UNESP.

Boavida, A. (Coord.), Paiva, A., Cebola, G., Vale, I., & Pimentel, T. (2008). *A Experiência Matemática no Ensino Básico. Programa de Formação Contínua em Matemática para Professores dos 1.º e 2.º Ciclos do Ensino Básico*. Lisboa: ME, DGIDC.

Bolam, R., & McMahon, A. (2004). Literature, definitions and model: towards a conceptual map. In C. Day (Ed.), *International Handbook on the Continuing Professional Development of Teachers* (pp. 33-60). Berkshire: McGraw-Hill Education.

Caldas, M. (2011). *A Integração Curricular das TIC: Estudo de Caso tomando como exemplo a Geometria no Ensino Básico*. (Tese de Mestrado, Universidade do Minho, Braga).

Dante, L. (2003*). Didática da resolução de problemas de matemática.* São Paulo: Atlas.

Day, C. (1999). *Developing Teachers. The Challenges of Lifelong Learning*. London: Falmer Press.

Day, C. (2007). A Liderança e o impacto do Desenvolvimento Profissional Contínuo de professores. In J. Morgado & M. Reis (Org.), *Formação e Desenvolvimento Profissional Docente: Perspectivas Europeia* (pp. 30-39). Braga: Universidade do Minho*,* Cadernos CIED.

De Villiers, M. (2003). *Rethinking proof with geometer's sketchpad*. Emeryville, CA: Key Curriculum Press.

Felício, C., & Rodrigues, M. (2010). A natureza da tarefa e os desafios da gestão curricular. In *ProfMat 2010*. Lisboa: APM.

Fernandes, A. (2011). *As TIC no desenvolvimento da capacidade de argumentação dos alunos do 9.º ano na aprendizagem de Geometria*. (Tese de mestrado, Universidade do Minho, Braga)

Ferrara, F., Pratt, D., & Robutti O. (2006). The role and uses of Technologies for the teaching of algebra and calculus. In A. Gutiérrez & P. Boero (Orgs), *Handbook of Research on the Psychology of Mathematics Education: past, present and future* (pp. 237–273). Roterdão: Sense.

Garcia, C. (1999). *Formação de professores – para uma mudança educativa*. Porto: Porto Editora.

Hanna, G. (2000). Proof and its classroom role: A survey. In M. Saraiva *et al.* (Eds.), *IX Encontro de Investigação em Educação Matemática – IX EIEM* (pp. 75-104). Fundão: SPCESEM,

Heideman, C. (1990). Introduction to staff development. In P. Burke *et al.* (Eds.), *Programming for staff development* (pp. 3-9). London: Falmer Press.

Huete, J., & Bravo, J. (2006). *O ensino da matemática: fundamentos teóricos e bases psicopedagógicas*. Porto Alegre: Artmed.

Keyton, M. (2003). Alunos descobrem a geometria usando software de geometria dinâmica. In E. Veloso & N. Candeias (Orgs.), *Geometria dinâmica: selecção de textos do livro Geometry turned on!* (pp. 79-86). Lisboa: APM.

Marcelo, C. (2009). Desenvolvimento Profissional Docente: passado e futuro. *Sísifo – Revista de Ciências da Educação*, 8, 7-22. Disponível em http://sisifo.fpce.ul.pt (consultado a 02/02/2013).

Mota, J. (2004). *O Geometer´s Sketchpad e o ensino/aprendizagem da geometria: Um estudo em duas turmas do 9º ano de escolaridade numa escola dos Açores*. (Tese de Mestrado, Universidade dos Açores).

NCTM (1991 [1989]). *Normas para o Currículo e a Avaliação em Matemática Escolar* (tradução portuguesa). Lisboa: APM & IIE.

NCTM (2007). *Principios e Normas para a Matemática escolar* (tradução portuguesa). Lisboa: APM.

Nóvoa, A. (1992). O passado e o presente dos professores. In A. Nóvoa (Org.). *Profissão Professor*. Porto: Porto Editora.

Oliveira, H., Segurado, M. & Ponte, J. (1998). Tarefas de Investigação em Matemática: Histórias da Sala de Aula. In *VI Encontro de Investigação em Educação Matemática*, (pp. 107-125). Portalegre: SPCE-SEM.

Onuchic, L. (1999). Ensino-aprendizagem de Matemática através da Resolução de Problemas. In M. Bicudo (Org.), *Pesquisa em Educação Matemática: concepções e perspectivas*. São Paulo: Editora UNESP.

Onuchic, L., & Allevato, N. (2011). Pesquisa em resolução de Problemas: caminhos, avanços e novas perspectivas. *Boletim de Educação Matemática* (BOLEMA), 5 (41), 73-98.

Piteira, G. (2000). *Actividade matemática emergente com os ambientes dinâmicos de geometria dinâmica*. (Tese de Mestrado, Universidade de Lisboa).

Polya, G. (2003 [1945]). *Como resolver problemas* (tradução portuguesa). Lisboa: Gradiva.

Ponte, J. (2005). Gestão curricular em Matemática. Em GTI (Ed.), *O professor e o desenvolvimento curricular* (pp. 11-34). Lisboa: APM.

Ponte, J., Oliveira, H., Brunheira, L., Varandas, J., & Ferreira, C. (1998). O trabalho do professor numa aula de investigação matemática. *Quadrante, 7*(2), 41-70.

Ponte, J., Oliveira, H., & Varandas, J. (2003). O contributo das tecnologias de informação e comunicação para o desenvolvimento do conhecimento e da identidade profissional. In D. Fiorentini (Ed.), *Formação de professores de Matemática: Explorando novos caminhos com outros olhares* (pp. 159-192). Campinas: Mercado de Letras.

Ponte, J., Serrazina, L., Guimarães, H., Breda, A., Guimarães, F., Sousa, H., Menezes, L., Martins, M., & Oliveira, P. (2007). *Programa de Matemática do Ensino Básico*. Lisboa: ME, DGIDC.

Ponte, J., & Sousa, H. (2010). Uma oportunidade de mudança na Matemática do ensino básico. In GTI (Org.), *O professor e o programa de Matemática do ensino básico* (pp. 11-41). Lisboa: APM.

Sampaio, P. (2006). *Concepções de infinito dos alunos do ensino secundário: contributo da webquest "Escher e a procura do infinito"*. (Tese de mestrado, Universidade do Minho, Braga)

Sampaio, P., & Coutinho, C. (2011). Formação contínua de professores: integração das TIC. *FAED – Revista da Faculdade de Educação*, 9(15), 139-151.

Silva, J. (Coord.), Fonseca, M., Martins, A., Fonseca, C., & Lopes, I. (2001). *MATEMÁTICA A 10.º ANO*. Lisboa: ME, DES.

Stein, M., & Smith, M. (1998). Mathematical tasks as a framework for reflection: From research to practice. *Mathematics Teaching in the Middle School, 3*(4), 268-275.

Terigi, F. (2007). Desarrollo profesional continuo y carrera docente en América Latina. In *Desarrollo profesional docente en América Latina*. Lima.

Patrícia Sampaio: Licenciada em Matemática e mestre em Tecnologia Educativa pela Universidade do Minho (Portugal). Formadora reconhecida pelo Conselho Científico-Pedagógico da Formação Contínua. Colaborou nos projetos de investigação CIEd: "Aprendizagem, formação e investigação na Web" e "Aprender em ambientes emergentes". Atualmente é bolseira da Fundação para a Ciência e Tecnologia com um projeto sobre a integração da tecnologia no ensino da Matemática.

Contato:
Patrícia Sampaio
patisampaio@gmail.com

Av. Con de Margaride, 690
4835-073 Guimarães
Portugal

Tel: 967449703

Autor:
Patrícia Alexandra da Silva Ribeiro Sampaio
patisampaio@gmail.com
Instituto de Educação, Universidade do Minho
Bolseira da Fundação para a Ciência e Tecnologia

UNIÓN
REVISTA IBEROAMERICANA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA

ISSN: 1815-0640
Número 41. Marzo 2015
Páginas 107 - 133

Modelos de crescimento populacional: um olhar à luz de uma socioepistemologia

Lourdes Maria Werle de Almeida, Camila Fogaça de Oliveira

Fecha de recepción: 17/04/2012
Fecha de aceptación:22/02/2014

Resumen	En este artículo, alineó con la relevancia que los contextos sociales, culturales e históricos tienen para la construcción del conocimiento, nosotros tratamos del desarrollo de algunos modelos de crecimiento de la población en la luz de Socioepistemología. Se presenta el desarrollo de modelos de Thomas Robert Malthus, Pierre-François Verhulst y Benjamín Gompertz y hacemos un análisis de las prácticas sociales y de las prácticas matemáticas relacionadas con el desarrollo de estos modelos. **Palabras clave**: Modelos; Practicas; Socioepistemologia.
Abstract	In this article, aligned with the relevance that social, cultural and historical contexts have for the construction of the knowledge, we treated of the development of some models of population growth in the light of Socioepistemology. We present the development of models of Thomas Robert Malthus, Pierre-Francois Verhulst and Benjamin Gompertz and do an analysis of social practices and mathematical practices related to the development of these models. **Keywords**: Models; Practices; Socioepistemology.
Resumo	Neste trabalho, alinhados com a relevância que contextos sociais, culturais e históricos têm para a construção do conhecimento, tratamos do desenvolvimento de alguns modelos de crescimento populacional à luz da Socioepistemologia. Mais especificamente, apresentamos o desenvolvimento dos modelos de Thomas Robert Malthus, Pierre-François Verhulst e Benjamin Gompertz e fazemos uma análise de práticas sociais e práticas matemáticas relacionadas ao desenvolvimento destes modelos. **Palavras-chave:** Modelos; Práticas**;** Socioepistemologia.

1. Introducción

A natureza contextual do conhecimento tem sido discutida em diferentes pesquisas da área de Educação Matemática e tem sido orientada por diferentes perspectivas teóricas. Ainda que as discussões tomem encaminhamentos diversos, não há contrapontos no que se refere à importância de aspectos sociais para a estruturação do conhecimento.

Neste trabalho, também alinhados com a relevância que contextos sociais, culturais e históricos têm para esta estruturação, nos referimos a socioepistemologia como perspectiva teórica sob a qual traçamos nossos argumentos. E é a luz dessa perspectiva que falamos da natureza sistêmica do conhecimento e nos referimos a práticas associadas à sua construção, em sintonia com o questionamento já apresentado por filósofos como Gaston Bachelard, da objetividade do fenômeno e da neutralidade do sujeito no ato de conhecer.

Trazendo essas discussões para o âmbito da matemática, tratamos de práticas sociais e matemáticas associadas ao desenvolvimento de modelos de crescimento populacional de tal forma a considerar o contexto de distintas épocas e culturas em que se deu este desenvolvimento.

Assim na estrutura do texto, inicialmente apresentamos uma caracterização da Socioepistemologia e, tratamos de práticas sociais e práticas matemáticas. A seguir, identificamos práticas sociais e matemáticas associadas ao desenvolvimento dos modelos de Thomas Robert Malthus, Pierre-François Verhulst e Benjamin Gompertz considerando o espaço histórico, cultural e as estruturas matemáticas do final do século XVIII e início do século XIX usadas por estes autores.

2. Socioepistemologia

A socioepistemologia pode ser considerada uma perspectiva teórica que trata do conhecimento social, histórico e culturalmente situado, envolvendo os fenômenos de construção e difusão do conhecimento (Cantoral 2003). As discussões sobre esta perspectiva têm sua origem associada a dois eventos científico-acadêmicos realizados no mês de setembro de 1997 (Seminario de Investigación en Matemática Educativa – México e Conference on Research in Mathematics Education - EUA) e ao educador matemático mexicano Ricardo Cantoral Uriza. A sua disseminação, entretanto, tem se intensificado na última década entre educadores matemáticos de diferentes países, especialmente da América Central e da América do Sul.

Segundo Cantoral (2004),

> a *socioepistemologia*, ou epistemologia das práticas sociais relativas ao conhecimento, é uma aproximação teórica de natureza sistêmica que permite tratar dos fenômenos de produção e difusão do conhecimento considerando uma perspectiva múltipla, pois articula em uma mesma unidade de análise as interações entre a epistemologia do conhecimento, sua dimensão sociocultural, os processos cognitivos que lhe são associados e os mecanismos de sua institucionalização via ensino (Cantoral, 2004, p.1, tradução nossa).

A esta natureza sistêmica do conhecimento estão associadas, portanto, diferentes componentes: a componente epistemológica, a componente cognitiva, a componente didática e a componente social exercendo influências sobre as demais.

Martínez (2005) apresenta uma explicação a respeito das componentes, escrevendo:

> A didática é aquela própria da configuração dos diferentes sistemas didáticos, a cognitiva é própria do funcionamento mental, a epistemológica é próprias da natureza e significados do conhecimento matemático (Martínez, 2005, p.198, tradução nossa).

A ênfase nas práticas sociais, na busca por compreender a construção do conhecimento, faz com que, ao intervir no sistema, a componente social, ao mesmo tempo em que influencia as demais, podendo mesmo modificá-las, também sofre influências destas.

Neste sentido Espinosa (2006) argumenta que:

> La incorporación de la práctica social modifica el centro de atención de la componente epistemológica, lo desvía de los conceptos u objetos matemáticos preestablecidos a la identificación de prácticas de referencia y actividades, ubicando a estas en contextos particulares. La componente cognitiva asume entonces al conocimiento como una serie de procesos sustentados por mecanismos cognitivos que se han desarrollado socialmente y la componente didáctica, finalmente se ocupa de explicar la difusión del conocimiento a través del discurso matemático escolar y examina sus efectos e implicaciones didáctica (ESPINOSA , 2006, p.818).

Assim, a componente social atua como um "pano de fundo" em que as demais estão apoiadas e, em situações de ensino e aprendizagem, o conhecimento é produzido na interação entre a epistemologia, os aspectos didáticos, os processos cognitivos e os fatores sociais associados.

De acordo com Arrieta et al (2004), ainda que a caracterização do que vem a ser uma 'perspectiva socioepistemológica' esteja sendo estruturada, é possível identificar características fundamentais desta perspectiva: i) a superioridade das práticas sobre os objetos; ii) o caráter situado destas práticas, isto é, o contexto é inseparável das práticas e iii)o caráter discursivo da construção social do conhecimento associado a interações. No encaminhamento dos autores, no âmbito da Educação Matemática, a perspectiva permite conceber a matemática como um conhecimento com significados próprios, que se constroem e se reconstroem no contexto da atividade que se realiza e considera as práticas sociais como geradoras do conhecimento (matemático).

2.1 Práticas sociais e práticas matemáticas

De acordo com Covián (2005), a prática social não é o que faz em si o indivíduo ou o grupo, mas aquilo que o faz fazer o que faz. Arrieta (2003, p.24) defende que o "conceito de prática conota fazer algo, mas não simplesmente fazer algo em si mesmo e por si mesmo; é algo que em um contexto histórico e social outorga uma estrutura e um significado ao que fazemos. Nesse sentido a prática sempre é uma prática social".

De modo geral, podem-se entender as práticas sociais como

> toda ação ou conjunto intencional e organizado de ações físico-afetivo-intelectuais realizadas, em um tempo e espaço determinados, por um conjunto de indivíduos, sobre o mundo material e/ou humano e/ou institucional e/ou cultural, ações essas que, por serem sempre, em certa medida e por um certo período de tempo, valorizadas por determinados segmentos sociais, adquirem uma certa estabilidade e realizam-se com certa regularidade. [...] (Miguel, 2003, p.27).

As práticas sociais constituem o elemento central nesta perspectiva socioepistemológica para a construção do conhecimento e, segundo Cantoral e Farfán (2008), a relação entre práticas sociais e a construção de conhecimento desloca o foco do próprio objeto de conhecimento para as práticas sociais associadas a esta construção. O que interessa não é somente como é construído o conhecimento associado a uma estrutura formal, mas, sobretudo, como ele se constrói com relação às intencionalidades humanas, determinadas pelas interações com os sujeitos e com o contexto.

Considerando o âmbito da Educação Matemática, interessam-nos práticas que requerem ou utilizam conhecimentos matemáticos e que se realizam em comunidades não necessariamente científicas, mas que, em certa medida, são influenciadas também por estas comunidades. Assim, podemos nos remeter a práticas matemáticas.

Segundo Vilela (2009), as práticas matemáticas constituem um conjunto de práticas sociais identificadas com alguma intencionalidade, em situações e contextos específicos, determinados pela força normativa das formulações de determinados grupos. Para a autora as práticas matemáticas constituem

> realizações humanas, mas não simplesmente como práticas intencionais, e sim condicionadas pela própria estrutura da linguagem, que limita e regula as possibilidades de desenvolvimento da matemática nas práticas específicas (Vilela, 2009, p.209).

Exemplos de práticas matemáticas são as denominadas práticas matemáticas científicas e práticas matemáticas escolares. A prática matemática científica pode ser vista como o conjunto de práticas sociais associadas ao desenvolvimento da matemática e suas aplicações nas academias, como os centros de pesquisas, as universidades ou as faculdades. Ela está “voltada à produção matemática em estado nascente” (Oliveira, 2008, p.54), tendo como intenção fazer, reproduzir e comunicar o conhecimento matemático científico (Arrieta, 2003). A prática matemática escolar, por sua vez, pode ser entendida como o conjunto de práticas sociais realizado sob os condicionamentos da situação escolar (Vilela, 2007), que de alguma maneira, se relaciona com a prática matemática científica. Contudo, tal prática matemática possui regras próprias e diferentes interesses quando em relação à prática matemática escolar.

Não se trata de pensar a prática matemática científica como uma construção autônoma e/ou autossuficiente na construção do conhecimento científico, nem tampouco se trata de pensar a matemática escolar como uma versão didatizada da matemática científica. Mas trata-se de reconhecer “uma tensão, e não identidade, entre educação (escolar) e ensino (da matemática científica)”, onde os métodos, técnicas, valores e resultados da matemática científica serão filtrados, adaptados, retraduzidos e revalorizados, tendo como referência — implícita ou explícita — o ambiente educativo em que essas operações se realizam. (Moreira; David, 2003, p.76).

Numa perspectiva socioepistemológica as práticas matemáticas estão sintonizadas com aspectos ainda mais gerais tais como a atividade humana, a ressignificação e as práticas sociais. A atividade humana neste contexto tem a intenção de contrastar com a noção da atividade matemática por si só, em convergência com o questionamento, já apresentado por filósofos como Gaston Bachelard, da objetividade do fenômeno e da neutralidade do sujeito no ato de conhecer. A ressignificação diz respeito à possibilidade de que significados próprios podem emergir para o conhecimento em função do contexto histórico e/ou cultural. As práticas sociais, vistas como o cerne da socioepsitemologia, são constituídas, como já caracterizamos em linhas anteriores deste texto, por ações intencionais de indivíduos ou grupos humanos para agir sobre a realidade que os cerca.

Considerando estas diferentes práticas matemáticas e suas relações com práticas sociais, diversos autores argumentam que estas práticas podem ser observadas considerando ‘unidades de análise’ ou ‘marcos de referência’ (Buendia, 2006; Martinez, 2005; Farfán, 2008). Assim, o conceito de derivada, o conceito de integral, a ideia de indução, a construção das funções trigonométricas, são exemplos de unidades de análise. Nesta perspectiva, neste trabalho concentramos nossos esforços na identificação da produção de conhecimento em relação ao desenvolvimento de modelos de crescimento populacional e, neste sentido, estamos interessados nas práticas sociais e matemáticas associadas a este desenvolvimento. Não nos referimos, entretanto, à integração destes modelos nos currículos escolares e na análise da construção de conhecimento em ambientes escolares.

Neste encaminhamento, apresentamos a construção de modelos de crescimento populacional e de práticas sociais e matemáticas associadas a esta construção, considerando circunstâncias histórico-sociais e epistemológicas associadas a este desenvolvimento.

3. Modelos de crescimento populacional

O rápido crescimento das principais cidades da Europa e o aumento da população pobre nas regiões urbanas a partir dos anos de 1950 contribuiu para o interesse em desenvolver métodos ou modelos capazes de estimar a população mundial. Neste contexto, estudiosos de diferentes áreas iniciaram seus estudos com a intenção de realizar estas estimativas. Embora houvesse ensaios de diferentes especialistas, alguns deles tiveram importância fundamental e os modelos por eles desenvolvidos sustentariam a análise do crescimento populacional por muitos e muitos anos: os ingleses Thomas Robert Malthus e Benjamin Gompertz; e o francês Pierre-François Verhulst.

3.1 O modelo de Thomas Robert Malthus

Thomas Robert Malthus nasceu no ano de 1766, no condado de Surrey, na Inglaterra. Em 1784, com dezoito anos de idade, começou a estudar na Universidade de Cambridge, formando-se em Matemática quatro anos mais tarde. Ele teve a oportunidade de estudar a física newtoniana e recebeu uma boa formação humanística, tornando-se versado em História e em Letras clássicas (grego, latim) e modernas (inglês, francês). Em 1793, com vinte e sete anos de idade, foi admitido como pesquisador na Universidade de Cambridge. Em 1798 publicou sua obra *An Essay on the principle of population* (O Ensaio sobre o Princípio da População) e em 1805, foi nomeado professor de História Moderna e Economia Política no East India College. Segundo Szmrecsányi (1982), as atribuições deste posto, que foi conservado até a morte em 1834, deram origem a todos seus demais trabalhos[1].

Segundo Silva (2005), as ideias de Malthus tiveram influência tanto das leituras dos trabalhos de Adam Smith, Condorcet ou Godwin, quanto do meio e das circunstâncias de sua época.

> O rápido crescimento das cidades européias depois de 1500, devido à concentração urbana de populações pobres, conduziu a uma força de trabalho com dimensões elevadas depois de 1750. As pequenas manufaturas que existiam nas cidades desde a Idade Média tinham agora mão-de-obra barata em abundância, do que se aproveitaram os proprietários

---

[1] Nosso foco está na obra *Ensaio*, em particular nos postulados a que se refere sua teoria da população e não nas demais obras publicadas por Malthus.

> de muitas delas para expandir seus negócios. Embora a jornada de trabalho dos operários atingisse oitenta horas semanais, os salários eram muito baixos. Empregavam-se mulheres e crianças porque elas podiam fazer o mesmo trabalho que os homens, mas recebiam salário muito inferior. As condições de trabalho eram horríveis e acidentes sérios eram comuns. Os trabalhadores viviam em guetos imundos, insalubres, muitas vezes em famílias grandes que se comprimiam em habitações minúsculas e sem aquecimento (Silva, 2005, p.277).

O texto de Silva (2005) revela que a industrialização requeria, além de uma força de trabalho disponível, uma classe empreendedora com acesso a capitais e investida de autoridade. Foi nesse contexto que se iniciou a Revolução Industrial, por volta de 1750 na Inglaterra, se difundindo por outras partes da Europa e pela América, fazendo emergir a burguesia no final do século XVIII.

A obra “O Ensaio sobre o Princípio da População”, como expressa o próprio prefácio, foi sugerida por uma conversa com Godwin[2]. “A discussão iniciou com a questão geral sobre o futuro progresso da sociedade” (Malthus, 1798, p.vii, tradução nossa).

> O tema central do *Ensaio* era o crescimento da população e da pobreza, problemas reais e concretos que não podiam ser ignorados por quem quer que acompanhasse mais de perto as circunstâncias em que estava se processando a Revolução Industrial, então em pleno curso na Grã-Bretanha (Meek *apud* Szmrecsányi, 1982 p.13).

Em 1798, as aglomerações industriais começavam a crescer, o proletariado da fábrica surgia, e ao mesmo tempo, o país atravessava uma crise das mais graves. O agravamento da miséria se deu pelo aumento dos impostos para os pobres. Malthus escreveu seu Ensaio em meio ao aumento rápido da população e a essa penúria, relativa mais à má distribuição de riqueza do que ao grande número de seus habitantes (Mantoux, sd).

Sua teoria sobre o crescimento populacional humano está baseada em dois postulados: 1. “O alimento é necessário para a subsistência do homem”. 2. “A paixão entre os sexos é necessária e deve permanecer praticamente em seu estado permanente”. (Malthus, 1798, p.4, tradução nossa).

Segundo Malthus (1798), tais postulados parecem ter sido fixados pelas leis da natureza, desde que teve qualquer conhecimento sobre a humanidade. Assumindo como garantidos, com vistas a fazer previsões sobre a situação em estudo e tentar intervir nos acontecimentos e na política de seu tempo, Malthus estabelece que “a capacidade de reprodução da população é superior à capacidade da terra para produzir meios de subsistência para o homem”. E, por isso, quando não controlada, a população aumenta em proporção geométrica, enquanto os meios de subsistência aumentam em progressão aritmética (Malthus, 1798, p.4, tradução nossa).

Em seu Ensaio, Malthus tomou como regra que a população, quando não controlada, cresce dobrando a si mesma, a cada vinte e cinco anos, ou aumentando em uma progressão geométrica. Considerando um estado onde prevalecem costumes puros e simples e onde os meios de subsistência são suficientes para constituir uma família, deixando-se capacidade de crescimento da população se

---

[2] William Godwin (1756-1836), partidário da Revolução Francesa; seu trabalho mais famoso, *Enquiry concerning political justice*, foi publicado pela primeira vez em 1793.

exercer sem obstáculos, o aumento da espécie humana seria evidentemente muito maior do que qualquer aumento conhecido até o momento (Szmrecsányi, 1982).

Os postulados de Malthus conduziram a argumentações sobre as relações entre o crescimento da população. O que se pode observar em seus trabalhos é que seu modelo não foi escrito em termos de uma linguagem matemática.

Esta opção de Malthus de não apresentar em seus textos formulações matemáticas não está justificada nestes textos. Considerando o momento histórico da evolução do Cálculo Diferencial e Integral, entretanto, é possivel observar que já eram conhecidos trabalhos com resultados que poderiam subsidiar, do ponto de vista matemático, as hipóteses apresentadas por Malthus.

De fato, em 1691, Leibniz já havia estruturado a técnica de separação de variáveis e a comunicou em uma carta a Huygens, resolvendo uma equação diferencial do tipo

$$y\left(\frac{dx}{dy}\right)=\frac{f(x)}{g(y)}$$

embora não tenha, naquele momento, formulado um método geral para a resolução de equações deste tipo.

Em 1690, John Bernoulli havia apresentado o processo conhecido como separatio indeterminatarum (separação de variáveis) e em 1692, o método da “multiplicação por um fator integrante”, para resolver equações nas quais a separação de variáveis não se podia aplicar. Resolveu então

$$\alpha x dy - y dx = 0$$

em que, mesmo sendo possível separar as variáveis, ainda não era conhecido o logaritmo $\int \frac{dx}{x} = \ln x$ necessário para a resolução. (Nápoles e Negrón, 2002). Já em 1697, a equação com a, b constantes,

$$ady = yp(x)dx + by^n q(x)dx$$

foi transformada em uma equação diferencial linear de primeira ordem, mediante a substituição $y^{1-n} = v$ por John Bernoulli, passando a equação a chamar-se equação de Bernoulli.

Contudo, com os métodos apresentados até então, a teoria geral das equações diferenciais não podia ser proposta. Resultados de caráter mais geral começaram a se apresentar a partir de meados dos anos 20 do século XVIII. Em 1724, o matemático italiano Jacopo Francesco Riccati (1676-1754) teve sucesso na integração de alguns casos especiais da equação diferencial

$$\frac{dy}{dx} + ay^2 = bx^{\alpha},$$

com α, a, b constantes. John Bernoulli muito tempo antes tinha tentado resolvê-la, mas sem sucesso. Tal equação também foi ocupação de outros matemáticos como Leibniz e Daniel Bernoulli (Nápoles e Negrón, 2002).

Uma teoria mais geral para a resolução de equações diferenciais aparece exposta pela primeira vez nas *Institutiones Calculi Integralis* de Leonhard Euler (1707-1783), obra que consta de três volumes que vieram à luz sucessivamente nos anos 1768, 1769 e 1770 com um suplemento em 1794. Contudo, o século XVIII consistiu na solução de equações particulares específicas. Foi a partir dos casos específicos que uma teoria mais geral foi sendo estruturada.

Diante da necessidade de repensar e estruturar o Cálculo Diferencial e Integral, Cauchy (1789-1857) começou a escritura sistemática de suas notas de classe. Com o objetivo da investigação científica, sua obra ressalta o pensamento conceitual e a eliminação do pensamento algorítmico presente até o momento. Segundo Nápoles e Negrón (2002), o discurso sustentado pelo Cours Inédit de Cauchy, agrega a derivada à concepção Euleriana de equação diferencial.

Considerando este momento histórico do desenvolvimento do Cálculo Diferencial e Integral e de algumas equações diferenciais, a opção de Malthus de não escrever um modelo matemático para as suas conjecturas, talvez possa ser pelo modo como elaborou seus trabalhos, dirigindo-os, essencialmente, às autoridades e aos idealizadores da Revolução Industrial.

Atualmente, o que se convencionou chamar de modelo de Malthus, assume que a variação do crescimento de uma população é proporcional à população em cada instante, o que significa dizer que a população aumenta em progressão geométrica ou em crescimento exponencial.

Em termos de linguagem matemática, considerando P_t o número de pessoas de uma população (em milhões) no ano *t*, uma constante α que pode ser descrita como $\alpha = n - m$, onde n representa a taxa de natalidade e m representa a taxa de mortalidade, e P_0 uma população inicial, a equação $P_{t+1} - P_t = (n-m)P_t = \alpha P_t$, para $t = 0, 1, 2, \ldots$, e usando a recursividade pode ser escrita como

$$P_t = (\alpha + 1)^t P_0 , \tag{1}$$

foi a primeira expressão associada às ideias de Malthus sobre o crescimento da população. Usando a relação entre função exponencial e logaritmo e fazendo $k = \ln(\alpha + 1)$ temos:

$$P_t = P_0 e^{kt} , \tag{2}$$

Para encontrar a taxa da progressão geométrica α, consideramos um trabalho independente de Malthus, publicado em 1824, cujo título é *População,* no suplemento à quinta edição da Enciclopedia Britannica. Essa obra tem o mérito de mostrar, em forma condensada, o pensamento de Malthus sobre a temática populacional (Szmrecsányi, 1982). Malthus, nesta publicação, usou dados dos censos de 1790 a 1820 da população branca dos Estados Unidos.

> De acordo com um censo regular, realizado por ordem do Congresso em 1790, o qual por todas as razões deve ser considerado essencialmente correto, a população branca dos Estados Unidos era de 3 164 148 habitantes. Um censo similar, feito em 1800, mostrou que ela tinha aumentado para 4 312 841. Portanto, ela crescera durante os dez anos a uma taxa de 36,3%, a qual, se mantida, dobraria a população em cerca de 22 anos e 4 meses e meio. De acordo com um terceiro censo, de 1810, a população branca era de 5 862 092, a qual, comparada com aquela de 1800, mostra, na segunda década, um aumento de cerca de 36%, que, se mantido, dobraria a população em cerca de 22 anos e meio. (Estes números são tomados dos *Statistical Annals*, de Seybert, p.230.) De acordo com o censo de 1820, a população branca era de 7 861 710, que, comparada com a de 1810, mostra um aumento, na terceira década, de 34,1%, que, se mantido,

> dobraria a população em 23 anos e 7 meses. (O número é tirado do *National Calendar* americano de 1822 e desde então tem sido comparado com o censo original, tal como foi publicado para uso dos membros do Congresso.) Se compararmos com vinte e cinco anos o período que a população leva para dobrar estando submetida à taxa de aumento da década mais desfavorável, encontraremos uma diferença que cobre completamente todo o aumento da população atribuível à imigração ou afluxo de estrangeiros. (Malthus *apud* Szmrecsányi, 1982, p.153)

Deste modo, considerando P_0=3 164 148, P_{10}= 4 312 841 e substituindo em (2), segue que $4\,312\,841 = 3\,164\,148 \cdot e^{10k}$. Como $k = \ln(\alpha + 1)$ segue que $\alpha = 0{,}03$.

Isto significa que Malthus tinha em mente em suas publicações uma taxa de crescimento demográfico de 3% ao ano, capaz de dobrar a população a períodos de 25 anos, como pode ser observado pelo cálculo acima. As diferenças de cálculo, Malthus atribuía à imigração ou afluxo de estrangeiros.

Portanto, seu modelo matemático pode ser descrito da seguinte forma:

$$P_t = P_0 \cdot 1{,}03^t \text{ ou } P_t = P_0 e^{0{,}03t} \quad ($$

Segundo Szmrecsányi (1982), Malthus publicou seus trabalhos de uma maneira favorável aos interesses das classes dominantes, uma vez que associou a expansão da miséria com um fenômeno tão natural como o crescimento da população, e não a causas econômicas e sociais. O caráter ideológico de suas publicações, incluindo ideias sustentadas por um grupo social, o qual reflete, racionaliza e defende seus interesses, gerou polêmica entre aqueles que estavam a favor e aqueles que eram contrários às suas publicações.

Neste sentido, as práticas sociais que podem ter influenciado Malthus na elaboração de suas publicações estão relacionadas às relações de poder da classe dominante, as ideias utópicas oriundas da Revolução Francesa e/ou a própria necessidade de chamar a atenção para o crescimento da população e ao aumento da pobreza, consequências da Revolução Industrial.

Condicionadas pelo próprio contexto e estrutura da época, as práticas matemáticas relacionadas à Malthus limitam e regulam as possibilidades de desenvolvimento das matemáticas nas práticas específicas.

Comparando a população observada com a população calculada para os anos de 1790, 1800, 1810 e 1820, segue que o modelo matemático associado às ideias de Malthus, em um pequeno intervalo de tempo, pode ser considerado adequado para descrever e estimar o crescimento população(Tabela 1).

t	anos	População Observada	População Calculada
0	1790	3 164 148	3 164 148
10	1800	4 312 841	4 252 350
20	1810	5 862 092	5 714 803
30	1820	7 861 710	7 680 218

Tabela 1: Comparação entre a população observada e a população calculada para o Modelo de Malthus

Para o crescimento da população, em períodos curtos de tempo, os modelos (1) e (2) podem ser razoavelmente precisos. Contudo, tais modelos podem descrever, de maneira equivocada, o comportamento da situação-problema, visto que segundo Malthus, a variação da população seria orientada essencialmente pela variação entre nascimentos e mortes. Para o controle de nascimentos e mortes é que suas publicações eram direcionadas. Além disso, a realização de estimativas visando uma perspectiva preditiva para os modelos de crescimento populacional viria a ser uma limitação de sua formulação apresentada.

Atualmente, o que se convencionou chamar de modelo de Malthus, assume que a variação do crescimento de uma população é proporcional à população em cada instante, o que significa dizer que a população aumenta em progressão geométrica ou em crescimento exponencial. Associa-se às hipóteses de Malthus uma linguagem matemática em termos da solução de uma equação diferencial de primeira ordem separável juntamente com uma condição inicial, e costuma se escrever:

$$\begin{cases} \dfrac{dP}{dt} = kP \\ P(0) = P_0 \end{cases}$$

onde *t* é o tempo, P(t) é população no tempo *t* e P_0 é a população inicial e k é a constante de proporcionalidade.

Considerando necessário ponderar a existência de algum fator que deve reduzir a taxa de crescimento e inibir o crescimento exponencial, o modelo matemático associado às ideias de Malthus pode ser considerado como não válido para fazer previsões sobre o crescimento populacional para períodos mais prolongados de tempo. Devido a esta limitação, Benjamin Gompertz e Pierre-François Verhulst propuseram hipóteses complementares às enunciações apresentadas por Malthus.

3.3 O modelo de Benjamin Gompertz

Benjamin Gompertz nasceu em Londres em 1779 e mostrou, desde cedo uma habilidade prodigiosa em matemática. Todavia, sua família era judia, e deste modo foi-lhe negado o acesso à universidade. Gompertz começou aprendeu matemática por meio do estudo de trabalhos de Newton e Maclaurin. (Norton, 2005, p.379)

Embora ainda tivesse estruturado suas ideias em um contexto de pouco desenvolvimento matemático, Gompertz já era influenciado pela notação de Newton. Iniciou suas publicações ainda jovem e não muito tempo depois de Malthus. O seu avanço principal em relação ao modelo proposto por Malthus reside justamente no fato de considerar que a população humana é limitada e não cresce exponencialmente.

Para estruturar sua primeira publicação no que se refere à mortalidade humana em 1825, Gompertz foi influenciado por Newton. Segundo Urban (1865, p.262, tradução nossa), "sua recusa em mudar sua linguagem foi ditada por respeito à memória de Newton". A sua publicação de 1825 foi denominada *On the Nature of the Function Expressive of the Law of Human Mortality, and on a New Mode of Determining the Value of Life Contingencies* (Sobre a natureza da função expressiva da lei de mortalidade humana, e sobre um novo modo de determinação do valor das contingências da vida).

Segundo Gompertz, a intensidade da mortalidade é descrita pela expressão

$$aq^x$$

onde a e q são quantidades constantes e x a idade em anos. Deste modo, a intensidade da mortalidade aumenta exponencialmente com a idade do indivíduo.

Considerando L_x a população no instante x e a, b e q quantidades constantes, usando a notação newtoniana, Gompertz (1825, p.518) escreveu a equação

$$abq^x = -\frac{\dot{L}_x}{L_x} \qquad (3)$$

cuja solução é dada por

$$L_x = dg^{q^x} \qquad (4)$$

com d, g parâmetros a ser determinados.

Com o intuito de considerar algumas propriedades matemáticas, em relação à modelagem de Gompertz, vamos nos apropriar da releitura de Winsor (1932) para a equação (3).

Considerando a solução $L_x = dg^{q^x}$ indicada por Gompertz, segue que

$$\log L_x = \log dg^{q^x}$$

$$\log L_x = \log d + \log g^{q^x}$$

o que conduz a

$$\log L_x - \log d = q^x \cdot c\,,$$

onde $c = \log g$.

Escrevendo de outra maneira, temos que

$$q^x = \frac{\log L_x - \log d}{c}. \qquad (5)$$

Considerando a equação de Gompertz (3), usando linguagem de Leibniz, podemos escrever

$$\frac{dL_x}{dx} = -L_x abq^x \qquad (6)$$

Substituindo (5) em (6) segue que

$$\frac{dL_x}{dx} = kL_x(\log d - \log L_x)$$

onde $k = \dfrac{ab}{c}$.

Como a equação diferencial encontrada é separável é possível escrever

$$\frac{dL_x}{L_x(\log d - \log L_x)} = kdx \qquad (7)$$

Resolvendo a integral de (7) por substituição de variáveis sendo $u = \log d - \log L_x$ e usando logaritmo neperiano temos que

$$-\ln 10 \int \frac{du}{u} = \int k dx$$
$$\ln 10 \cdot \ln u = w - kx \ ,$$

sendo w uma constante a ser determinada. Tal equação nos faz concluir, mudando novamente para a variável x, que

$$\ln 10 \cdot \ln[\log d - \log L_x] = w - kx,$$
$$\ln 10 \cdot \ln\left[\log\left(\frac{d}{L_x}\right)\right] = w - kx$$

Transformando o logaritmo decimal em logaritmo natural (ou neperiano), segue que

$$\ln\left[\ln\left(\frac{d}{L_x}\right)\right] = w - kx,$$

e considerando as propriedades inversas para a função logarítmica temos

$$\ln\left(\frac{L_x}{d}\right) = -e^{w-kx}$$
$$\exp\left(\ln\left(\frac{L_x}{d}\right)\right) = \exp(-\exp(w-kx)),$$

e, portanto,

$$L_x = d\exp(-\exp(w-kx)) \qquad (8)$$

onde d e k são quantidades positivas.

Com o intuito de analisar o comportamento de um crescimento descrito pela expressão (8), é adequado encontrar o ponto de inflexão, ou seja, encontrar o ponto em que ocorre a mudança de concavidade da curva (8). Com essa finalidade, Winsor (1932) analisou a primeira e a segunda derivada da função (8).

> De (8), na medida em que x se aproxima do infinito negativo, L_x se aproxima de zero; quando x se aproxima do infinito positivo, L_x se aproxima de d. Derivando (8) temos
>
> $$\frac{dL_x}{dx} = dk \cdot \exp(w-kx) \cdot \exp(-\exp(w-kx)) = kL_x e^{w-kx}$$
>
> e é evidente que a inclinação é sempre positiva para os valores finitos de x, e se aproxima de zero para valores infinitos de x. Derivando novamente temos
>
> $$\frac{d^2L_x}{dx^2} = k^2 L_x e^{w-kx}\left(e^{w-kx} - 1\right), \qquad (9)$$
>
> De (9) vemos que haverá um ponto de inflexão quando $x = \frac{w}{k}$. A ordenada do ponto de inflexão é $L_x = \frac{d}{e}$, ou aproximadamente, quando 37% da população final foi alcançada. (Winsor, 1932, p.2)

O modelo de Gompertz estruturado em termos da linguagem de Leibniz, é ainda hoje um modelo matemático usado em diferentes áreas do conhecimento, embora publicado em 1825. Deste modo, quando o conjunto de dados apresentar um ponto de inflexão em aproximadamente 35% a 40% do crescimento total estimado, pode-se utilizar o modelo matemático de Gompertz com uma boa expectativa de ajuste dos dados e com boas expectativas para a realização de estimativas para tempos futuros.

As práticas matemáticas relacionadas à Gompertz são condicionadas pelo próprio contexto e estrutura da época. Isso se justifica pelo Cálculo Diferencial e Integral que, nesta época, ainda não estava estabelecido por Cauchy e pelas influências dos trabalhos de Newton. Tais práticas limitam e regulam as possibilidades de desenvolvimento das matemáticas em situações específicas.

3.3 O modelo de Pierre-François Verhulst

Pierre-François Verhulst nasceu em Bruxelas no ano de 1804, obtendo o grau de doutor em Matemática pela Universidade de Ghent no ano de 1825. Depois da Revolução de 1830 e da independência da Bélgica, ele se tornou professor de Matemática na Universidade Livre de Bruxelas. Verhulst se tornou presidente da Academia Real da Bélgica em 1848, mas morreu no ano seguinte, em Bruxelas, provavelmente de tuberculose (Bacaër, 2011).

Os resultados das investigações de Verhulst sobre o crescimento populacional vieram à luz por meio de várias publicações no período de 1838 até 1847 e as quais orientaram nossas afirmações neste trabalho sobre suas formulações em relação ao desenvolvimento de modelos de crescimento populacional.

- 1838 - *Notice sur la loi que la population suit dans son accroissement* (Nota sobre a lei que a população segue em seu crescimento), um texto de 9 páginas;
- 1845 - *Recherches mathématiques sur la loi d'accroissement de la population* (Investigações matemáticas sobre a lei de crescimento da população), uma primeira memória de 41 páginas;
- 1846 - *Note sur la loi d'accroissement de la population* (Nota sobre a lei do crescimento da população), um texto de 2 páginas;
- 1847 - *Deuxième mémoire sur la loi d'accroissement de la population* (Segunda memória sobre a lei do crescimento populacional), uma segunda memória de 32 páginas.

O interesse de Verhulst em estudar o crescimento demográfico, teve influência, provavelmente, de suas relações com Quetelet[3], e/ou o interesse em responder à problemática do crescimento exponencial de Malthus. Estas se apresentaram como práticas sociais, que em um contexto histórico e social outorgaram uma estrutura e um significado às próprias práticas de Verhulst.

O trabalho de Verhulst '*Nota sobre a lei que a população segue em seu crescimento* foi publicado em 1838 no Correspondance Mathématique et Physique', editado por Alfhonse Quetelet. Nesta publicação, Verhulst expôs a essência de sua teoria e comparou os dados obtidos pelo seu modelo com alguns valores

[3] Em 1835, Alfhonse Quetelet publicou A Treatise on Man and the Development of his Faculties (Um tratado sobre o homem e o Desenvolvimento de suas faculdades). Quetelet foi um dos primeiros a considerar que o modelo exponencial de crescimento de Malthus não era adequado para explicar a expansão demográfica de um país. Ele estava convencido de que uma população não poderia crescer indefinidamente, mas que existiam forças, tanto externas como internas, que limitavam esse crescimento.

populacionais. Verhulst (1838) defende que o crescimento populacional tem necessariamente um limite e não cresce indefinidamente como Malthus propôs em seu modelo. Adotando as hipóteses de Quetelet, ele assumiu que a resistência ao crescimento humano é proporcional ao quadrado da velocidade com que a população tende a crescer.

> Seja p a população. Representamos por dp o crescimento infinitamente pequeno durante um tempo infinitamente pequeno dt. Se a população crescesse em progressão geométrica, teríamos a equação $\frac{dp}{dt} = mp$. Mas como a velocidade de crescimento da população é retardada pelo aumento do número de pessoas, devemos subtrair de mp uma função desconhecida de p, $\varphi(p)$, de modo que o modelo é dado por:
>
> $$\frac{dp}{dt} = mp - \varphi(p). \qquad (10)$$
>
> A hipótese mais simples que pode ser feita sobre a forma da função φ, é assumir $\varphi(p) = np^2$. Considerando esta função, e integrando a expressão (10) temos que
>
> $$t = \frac{1}{m}\left[\log p - \log(m - np)\right] + \text{const.}$$
>
> e bastam três pares de dados observados para determinar os coeficientes m e n constantes e a constante arbitrária.
> Isolando p na expressão anterior segue que
>
> $$p = \frac{mp' e^{mt}}{np' e^{mt} + m - np'}, \qquad (11)$$
>
> onde p' é a população que corresponde a $t = 0$, e e a base dos logaritmos naturais. Se $t = \infty$, vemos que o valor de p corresponde a $p = \frac{m}{n}$. Este é, portanto, o limite superior da população. (Verhulst, 1838, p.115, tradução nossa).

Contudo, Verhulst (1838) não apresenta detalhes sobre a formulação do modelo (11) nem tampouco se referiu a ele como curva logística.

Em 1845, Verhulst publicou '*Investigações matemáticas sobre a lei de crescimento da população* em Nouveaux Mémoires de l'Académie Royale des Sciences'. Nesta segunda publicação, mais completa do que a primeira, Verhulst introduziu o termo 'logístico' para referir-se a equação de crescimento populacional, forneceu mais detalhes sobre suas propriedades, estimou os parâmetros da equação, o que permitiu realizar uma estimativa para o tamanho máximo da população da Bélgica e da França. No início de sua publicação, Verhulst colocou que são muitas as causas que impedem e promovem o crescimento humano, e que em toda a sua generalidade, o problema é claramente insolúvel.

> De todos os problemas que a economia oferece para meditações dos filósofos, um dos mais interessantes é, sem dúvida, o conhecimento da lei que regula o crescimento da população. Para resolvê-lo com precisão, deve-se ser capaz de avaliar a influência de muitas causas que impedem ou promovem a multiplicação da espécie humana. E uma vez que muitas dessas causas são variáveis, por sua natureza e modo de ação, o problema

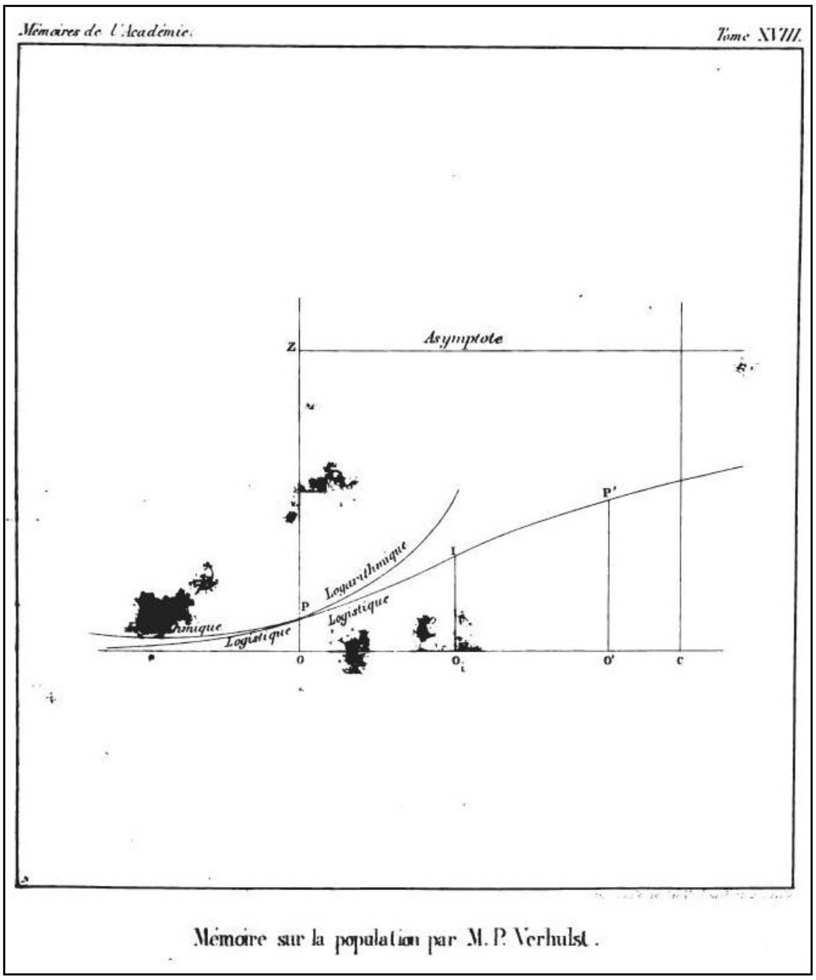
> considerado em toda a sua generalidade, é claramente insolúvel. (Verhulst, 1845, p.3, tradução nossa)

Para a formulação de seu modelo, Verhulst (1845) explicitou que a lei de crescimento geométrico proposta por Malthus é viável apenas em circunstâncias muito excepcionais, como por exemplo, quando um território fértil e ilimitado, é habitado por um povo de uma civilização muito avançada como a dos primeiros colonos dos Estados Unidos. Assim, seus investimentos seriam para buscar elementos da matemática para determinar um limite para uma população que não atende a estas circuntâncias.

Assim, designando por *p* a população, *t* o tempo, *s* e *n* constantes indeterminadas, *b* a população normal e tendo denotado *M* como o módulo pelo qual é necessário multiplicar o logaritmo natural para convertê-lo em logaritmo decimal,

> Substituímos a equação diferencial $\frac{Mdp}{pdt} = s$, relativa a progressão geométrica por
>
> $$\frac{Mdp}{pdt} = s - n(p - b), \qquad (12)$$
>
> Portanto, denominando, para encurtar, $m = s + nb$, temos
>
> $$dt = \frac{Mdp}{mp - np^2} .$$
>
> Resolvendo esta equação e considerando que $t = 0$ corresponde a $p = b$, resulta
>
> $$t = \frac{1}{m}\log\left[\frac{p(m - nb)}{b(m - np)}\right]. \qquad (13)$$
>
> (Verhulst, 1845, p.8, tradução nossa)

Verhulst (1845) deu o nome de curva logística à curva associada à equação (13) (Figura 4.3).



Fonte: Verhulst (1845, p.41).

Figura 2 Curva logística representada por Verhulst em 1845

Dentre as características da curva logística, Verhulst (1845) explicitou que ela tem uma assíntota paralela ao eixo das abscissas, a uma distância $\frac{m}{n}$ da origem, porque $p = \frac{m}{n}$ corresponde ao limite da população quando $t \to \infty$.

Por meio da diferenciação da equação (12), colocou que a curva tem um ponto de inflexão I, correspondente à $p = \frac{1}{2}\frac{m}{n}$ e, que neste ponto, ocorre a mudança de concavidade da curva, indicando que o crescimento da população é mais rápido até o instante em que metade do limite da população é atingida. A partir desse instante, o crescimento da população é mais lento. Deste modo, quando o conjunto de dados apresentar um ponto de inflexão em aproximadamente 50% do crescimento total estimado, pode-se utilizar o modelo matemático de Verhulst com uma boa expectativa de ajuste dos dados.

Com o intuito de obter uma lei de crescimento da população, Verhulst modificou o eixo das ordenadas, e como a fórmula (13) estava em função de três parâmetros desconhecidos, concluiu que bastaria conhecer o número da população em três épocas diferentes.

> Mantendo o mesmo eixo das abscissas, transportando agora a origem das coordenadas em um ponto C, cuja distância do ponto O_i será denotada por i. Mudando, t para $t+i$, para a equação geral da logística relatada em relação a uma ordenada qualquer, temos
>
> $$t+i=\frac{1}{m}\log\left[\frac{p}{\frac{m}{n}-p}\right] \tag{14}$$
>
> em que a abscissa do ponto de inflexão é $-i$. Se quiser obter o valor de p em relação a t, pode-se representar, para simplificar a notação,
>
> $$10^{(t+i)m}=z,$$
>
> e se obtém
>
> $$p=\frac{m}{n}\cdot\frac{z}{1+z}.$$
>
> Esta expressão contém três parâmetros desconhecidos; assim, é suficiente conhecer o número da população em três épocas diferentes, para se obter a lei de seu crescimento. São, portanto, p_0, p_1, p_2 as ordenadas correspondentes às abscissas 0, t_1, t_2, respectivamente e, assumindo que $t_2=2t_1$, resulta
>
> $$i=\frac{1}{m}\log\left[\frac{p_0}{\frac{m}{n}-p_0}\right],$$
>
> $$t_1+i=\frac{1}{m}\log\left[\frac{p_1}{\frac{m}{n}-p_1}\right],$$
>
> $$t_2+i=\frac{1}{m}\log\left[\frac{p_2}{\frac{m}{n}-p_2}\right];$$
>
> a partir do qual se conclui, subtraindo a primeira equação da segunda e a segunda da terceira, que
>
> $$\frac{p_1\left(\frac{m}{n}-p_0\right)}{p_0\left(\frac{m}{n}-p_1\right)}=\frac{p_2\left(\frac{m}{n}-p_1\right)}{p_1\left(\frac{m}{n}-p_2\right)},$$
>
> $$\left(p_1{}^2-p_0p_2\right)\frac{m^2}{n^2}-\left(p_0p_1{}^2+p_2p_1{}^2-2p_0p_1p_2\right)\frac{m}{n}=0,$$
>
> e finalmente,
>
> $$\frac{m}{n}=\frac{p_1\left(p_0p_1+p_1p_2-2p_0p_2\right)}{p_1{}^2-p_0p_2}.$$
>
> Este valor de $\frac{m}{n}$ será finito e positivo, se
>
> $$p(t)=\frac{m}{n}\cdot\frac{e^{\ln 10(t+i)m}}{1+e^{\ln 10(t+i)m}},\ p_0p_1+p_1p_2>2p_0p_2.$$
>
> [...] Conhecendo $\frac{m}{n}$, se determina o coeficiente m pela equação
>
> $$m=\frac{1}{t_1}\log\left\{\frac{p_1\left(\frac{m}{n}-p_0\right)}{p_0\left(\frac{m}{n}-p_1\right)}\right\},$$
>
> e i pela equação

$$i = \frac{1}{m}\log\left[\frac{p_0}{\frac{m}{n} - p_0}\right].$$

Podemos dar o valor de $\frac{m}{n}$ de uma forma mais favorável ao cálculo logarítmico, denominando

$$p_1 - p_0 = u\ ,\ p_2 - p_1 = v\ ,\ \frac{uv}{p_1} = w\ ,\ \frac{u+w-v}{w} = q\ ,$$

que torna-se

$$\frac{m}{n} = p_1 + \frac{p_1}{q}\ .$$

Se agora,

$$\frac{p_0}{\frac{m}{n} - p_0} = r\ ,$$

teremos para m e i as expressões mais simples

$$m = \frac{1}{t_1}(\log q - \log r),$$

$$i = \frac{1}{m}\log r\ .$$

(Verhulst, 1845, p.11-13, tradução nossa).

Usando esta formulação, Verhulst (1845) realizou uma estimativa para o tamanho máximo da população da Bélgica. Explicou que as tabelas que forneceram os dados necessários, para que ele pudesse encontrar a lei da população, foram retiradas das seguintes obras: 1) *Recherches sur la reproduction et la mortalité de l'homme aux différents ages, et sur la population de la Belgique* por MM. A. Quetelet e Ed. Smits, 1832. 2) *Bulletin de la commission centrale de statistique*, v.1, 1843. 3) *Annuaire de l'observatoire de Bruxelles* para 1844. Segundo Verhulst, essas tabelas podem ser consideradas como oficiais, mas para que possam ser encaixadas ao seu objetivo, teriam que ser submetidas às diversas preparações e correções.

De acordo com as observações, e após correções, Verhulst denominou as datas que correspondem às populações denotadas por $p_0 = 3.627253$, $p_1 = 4.247113$, $p_2 = 4.800861$, como respectivamente 1 de janeiro de 1815, 1 de janeiro de 1830 e 1 de janeiro de 1845.

Para aplicar as fórmulas à população da Bélgica, escrevemos […]

$$u = p_1 - p_0 = 0.619860\ ,$$

$$v = p_2 - p_1 = 0.553748\ ,$$

$$w = \frac{uv}{p_1} = 0.080876\ \cdot$$

que nos dá

$$\frac{m}{n} = 6.5837\ ,$$

e, observando que $t_1 = 1.5$,

$$m = 0.113785$$

,

$$i = 0.78060\ .$$

Assim, para a população da Bélgica tem-se $\log z = 0.113785(t + 0.78060)$,

$$p = 6.5837 \frac{z}{1+z}.$$

(Verhulst, 1845, p.31)

Segundo Verhulst, estes resultados numéricos dizem que, se as leis e costumes da Bélgica não tiverem mudanças significativas, esta população, embora crescente, não atingiria a 6,6 milhões de pessoas.

Considerando as fórmulas para a população indicadas por Verhulst, podemos transformar o logaritmo decimal em logaritmo natural como segue

$$p(t) = \frac{m}{n} \cdot \frac{e^{\ln 10 (t+i) m}}{1 + e^{\ln 10 (t+i) m}},$$

onde $\frac{m}{n}$ representa a população máxima. Particularmente, no caso da Bélgica, a população em cada ano *t* pode ser escrita como:

$$p(t) = 6.5837 \frac{e^{0.262t + 0.2045}}{1 + e^{0.262t + 0.2045}}.$$

Comparando a população observada com a população calculada para os anos de 1815, 1830 e 1845, segue que os valores calculados se aproximam daqueles apresentados nos documentos oficiais (Tabela 2).

t	Anos	População Observada	População Calculada
0	1815	3.027253	3.627274
1,5	1830	4.247113	4.247040
3	1845	4.800861	4.800746

Tabela 2 Comparação entre a população observada e a população calculada para o modelo de Verhulst

Verhulst (1845) também fez um estudo da lei da população da França e conclui seu artigo com as seguintes palavras:

> A lei da população é desconhecida, porque é desconhecida a natureza da função utilizada para medir obstáculos, tanto preventivos quanto destrutivos, que se opõe ao crescimento indefinido da espécie humana.No entanto, se assumirmos que estes obstáculos crescem exatamente na mesma proporção que a população superabundante, obtemos uma solução completa do problema sob o ponto de vista matemático. Descobrimos então, fazendo uso de documentos estatísticos emitidos pelos governos belga e francês, que o limite extremo da população é de quarenta milhões na França, e de seis milhões e seiscentos mil na Bélgica.
>
> (Verhulst, 1845, p.38, tradução nossa).

A publicação de 1838, embora menos extensa, apresenta a equação diferencial ordinária para o crescimento populacional e sua solução, enquanto que a publicação de 1845 fornece mais detalhes às ideias de Verhulst, no que se referem os parâmetros da equação, permitindo realizar uma estimativa para o tamanho máximo da população da Bélgica e da França. Os próprios resultados destas publicações serviram de prática social para que nas publicações de 1846 e 1847 apresentasse conclusões sensivelmente diferentes, no que se refere às análises e previsões do crescimento populacional.

Em 1846, Verhulst publicou o texto *Nota sobre a lei do crescimento da população* em Bulletins de l'Académie Royale des Sciences, des Lettres et des Beaux-Arts de Belgique. Nesta terceira publicação, ele anunciou, depois de retomar a sua pesquisa sobre a lei de crescimento da população, por meio de um exame mais detalhado, que a condição que serve de obstáculo ao crescimento da população, não é proporcional à população supérflua.

Em 1847, Verhulst publicou o que chamou de '*Segunda memória sobre a lei do crescimento populacional* em Nouveaux Mémoires de l'Académie Royale des Sciences, des Lettres et des Beaux-Arts de Belgique'. Nesta quarta publicação, Verhulst forneceu com mais detalhes as conclusões da nota de 1846, cujas conclusões são sensivelmente diferentes dos textos anteriores, o que o levou a uma revisão do modelo original e permitiu uma nova estimativa do nível máximo da população da Bélgica.

Verhulst, nesta publicação, modificou suas hipóteses, sendo este o motivo de publicar esta segunda memória, assumindo que

> os obstáculos ao crescimento da população aumentam em proporção à razão entre a população superabundante e a população total,
> $$\frac{Mdp}{pdt} = s - \frac{n(p-b)}{p}.$$
> Colocando
> $$n - s = m$$
> ,
> $$\frac{nb}{m} = P$$
> ,
> se deduz da equação anterior que
> $$dt = -\frac{1}{m}\frac{Mdp}{(p-P)},$$
> e integrando,
> $$t + const. = -\frac{1}{m}\log(p-P),$$
> com $\log$ designando um logaritmo decimal.
> Supondo que $t = 0$, quando $p = p_0$, vem
> $$const. = -\frac{1}{m}\log(p_0 - P),$$
> e, por consequência,
> $$t = \frac{1}{m}\log\left(\frac{P - p_0}{P - p}\right),$$
> que escrito de outra forma,
> $$\log(P-p) = \log(P-p_0) - mt. \qquad (15)$$
> (Verhulst, 1847, p.6, tradução nossa)

Para determinar as três constantes m, P e p_0, Verhulst assumiu que a curva representada pela equação (15) passa por três pontos, que têm, respectivamente, as abscissas 0, t_1, t_2 e as ordenadas p_0, p_1, p_2; daí deduziu, pelo método seguido na primeira memória e na hipótese de $t_2 = 2t_1$, que

$$P = \frac{{p_1}^2 - p_0 p_2}{2p_1 - (p_0 + p_2)}, \tag{16}$$

$$m = \frac{1}{t_1}\log\left(\frac{P - p_0}{P - p_1}\right). \tag{17}$$

As três fórmulas (15), (16) e (17) dão a solução do problema que se propõe determinar. Para fazer a aplicação à Bélgica, Verhulst utilizou em seus cálculos os mesmos elementos que na sua primeira memória, isto é, assumiu que

$$p_0 = 3.627253,$$
$$p_1 = 4.247113,$$
$$p_2 = 4.800861,$$
$$t_1 = 1.5;$$

onde obteve

$$P = 9.4390, \quad m = 0.0326563,$$
$$\log(P - p) = 0.7643107 - 0.0326563t.$$

Assim, o valor máximo da população belga seria cerca de nove milhões e quatrocentas mil pessoas.

Considerando a fórmula para a população indicada por Verhulst $t = \frac{1}{m}\log\left(\frac{P - p_0}{P - p}\right)$, podemos transformar o logaritmo decimal em logaritmo natural como segue

$$p(t) = P - \frac{P - p_0}{e^{\ln 10 \cdot tm}},$$

e, particularmente no caso belga o número de habitantes no ano *t* seria dado por:

$$p(t) = 9.4390 - \frac{5.81174}{e^{0.0751939t}}.$$

Verhulst (1847) fez a validação de seu modelo encontrado, por meio da comparação dos dados de observação com os dados obtidos por seu modelo (Figura 4.5).

TABLEAU

Des progrès de la population en Belgique, depuis le 1er janvier 1815 jusqu'au 1er janvier 1845.

ANNÉES.	POPULATION observée.	POPULATION calculée.	ANNÉES.	POPULATION observée.	POPULATION calculée.
1815..........	3,627,253	3,627,300	1835..........	4,404,220	4,438,600
à	397,602	420,900		44,549	37,400
1825..........	4,024,855	4,048,200	1836..........	4,448,769	4,476,000
	48,896	40,400		45,919	37,100
1826..........	4,073,751	4,088,600	1837..........	4,494.688	4,513,100
	45,089	40,000		30,999	36,800
1827..........	4,118,840	4,128,600	1838..........	4,525,687	4,549,900
	41.439	39,900		45,021	36,500
1828..........	4,160,279	4,168,500	1839..........	4,570,708	4,586,400
	49,849	39,400		38,068	36,200
1829..........	4,210,128	4,207,900	1840..........	4,608,776	4,622,600
	36,985	39,200		41,624	35,900
1830..........	4,247,113	4,247,100	1841..........	4,650,400	4,658,500
	*38.856	38,900		42,790	35,600
1831..........	4,285,969	4,286,000	1842..........	4.693,190	4,694,100
	40,728	38,600		34,201	35,300
1832..........	4,326,697	4,324,600	1843..........	4.727,391	4,729,400
	19,243	38,300		35,855	35,000
1833..........	4,345,940	4,362,900	1844..........	4,763,246	4,764,400
	30,274	38,000		*37,615	34,700
1834..........	4,376,214	4,400,900	1845..........	4,800,861	4,799,100
	28,006	37,700			

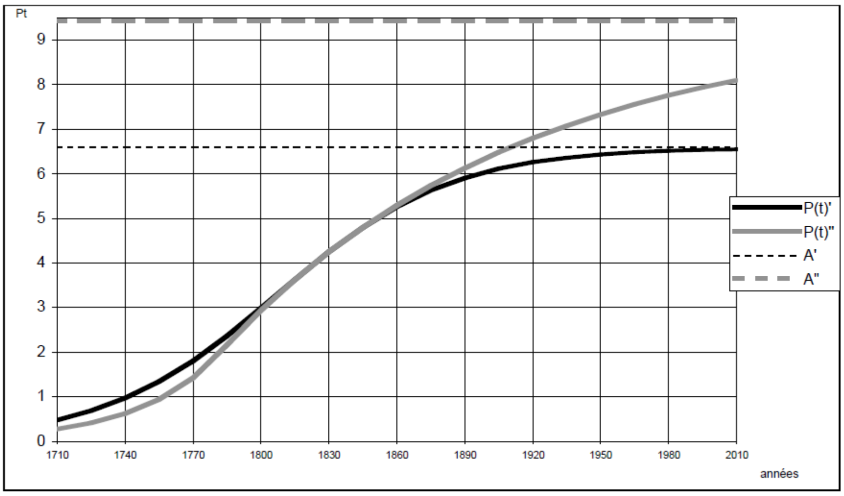
NB. Les nombres marqués d'un astérisque sont hypothétiques.

Fonte: Verhulst (1847, p.8)

Figura 3 O crescimento da população, na Bélgica, de 1 de janeiro de 1815 até 1 de janeiro de 1845

Pode-se perceber nas publicações de Verhulst uma mudança nas hipóteses e consequentemente em seu modelo matemático. Como podemos observar, embora o confronto com os dados observados tenha mostrado uma boa aproximação com o modelo matemático apresentado na publicação de 1845, Verhulst optou por não aceitar seu modelo, como descrito em sua publicação de 1846. Segundo Verhulst (1846, p.226), "estes resultados não devem ser considerados como definitivos". Ainda, segundo o autor, "a comparação dos resultados da observação com os calculados, durante um longo período de tempo, só pode dissipar as dúvidas" (Verhulst, 1846, p.227). Isso demonstra que o problema de aceitação ou não de um modelo depende muito mais de fatores que condicionam o modelador, como o contexto histórico, seus objetivos e recursos disponíveis.

A Figura 4.7 foi construída, a partir das hipóteses de Verhulst (1845) e Verhulst (1847), para comparar os dois padrões de evolução.



Fonte: Delmas (2004, p.75)

Figura 4 Comparação da evolução da população belga na primeira memória (p(t)', assíntota A'=6.6) e na segunda memória (p(t)", assíntota A"=9.44).

Podemos inferir que os modelos de Verhulst se mostram adequados na medida em que o crescimento da população é controlado quando t se torna grande. O que se pode notar é que, embora o máximo das populações seja diferente, devido às diferentes hipóteses assumidas nas duas memórias, a tendência geral é a mesma.

A literatura do último século, convencionou chamar o modelo de Vehulst de modelo logístico e com a linguagem matemática usual é a solução do problema

$\begin{cases} \dfrac{dP}{dt} = kP(L-P) \\ P(0) = P_0 \end{cases}$ onde t é o tempo, P(t) é população no tempo t e P_0 é a população inicial, k é constante de proporcionalide e L é o limite da população a que se referia Verhulst.

4. Para finalizar

A análise da produção de conhecimento tem sido encaminhada, também na área de Educação Matemática, sob diferentes perspectivas. Uma destas diz respeito à consideração do papel que cenários históricos, culturais, institucionais e sociais desempenham na construção de conhecimento.

Neste sentido, o presente trabalho sinaliza que a configuração de modelos de crescimento populacional, considerados fundamentais até hoje, são associados a processos de construção e de criação humana os quais, por sua vez, são processos de síntese também de objetos e ferramentas sociais, culturais e matemáticas de um grupo específico e de um tempo determinado. Ou seja, práticas sociais e práticas matemáticas, conjuntamente, conferiram a esses modelos uma estrutura e uma importância.

No que se refere ao desenvolvimento de modelos de crescimento populacional, uma das primeiras ideias se deve a Thomas Robert Malthus, sugerindo o crescimento exponencial, em 1798. Benjamin Gompertz surge em 1825 contrapondo, em termos gerais, essa ideia de Malthus e sugerindo que a população não cresce infinitamente como sugeriam os postulados de Malthus. Posteriormente, Pierre-François Verhulst sugeriu a curva logística em 1838 com modificações de seu modelo matemático em trabalhos posteriores. Isso indica o caráter evolutivo dos modelos de crescimento populacional.

Os trabalhos de Malthus e Gompertz foram influenciados pelo contexto em que se inseriam. A época em que tais trabalhos foram publicados consistia na solução de situações específicas, ligadas à explicação ou às relações causadas por fenômenos sociais.

O modelo de crescimento populacional de Malthus, em 1798, foi influenciado pelas circunstâncias de sua época, tentando explicar, por meio de uma linguagem matemática, o agravamento da miséria e o crescimento da população. Por sua vez, o modelo de crescimento populacional de Gompertz, apresentado em 1825, já sinaliza que as práticas matemáticas, especialmente no que se refere às equações diferenciais ordinárias, eram difundidas na comunidade, embora as notações usadas por Gompertz ainda se limitassem àquelas apresentadas por Newton em seus trabalhos.

O trabalho de Verhulst, apresentado pela primeira vez em 1838, reflete uma maior preocupação em apresentar um modelo de crescimento populacional robusto e capaz de realizar estimativas confiáveis para o crescimento da população. Percebe-se em seus escritos uma linguagem matemática muito próxima daquela que atualmente é usada e já incorporando práticas matemáticas associadas às ideias de Cauchy. Sua preocupação em mostrar a consistência de seu modelo matemático por meio de sua validação e refutação, para além de encontrar um modelo matemático que possa descrever a situação, também é revelada em seus textos publicados.

Em termos gerais, podemos inferir que as formulações para os modelos de crescimento populacional que apresentamos foram influenciadas pelos momentos históricos, tanto do ponto de vista social como do ponto de vista matemático: 1) Final do século XVIII e início do século XIX (com Malthus e Gompertz); 2) após década de 30 do século XIX (com Verhulst). Esta divisão pode ser justificada pelos trabalhos de Cauchy, que por delimitar o Cálculo Diferencial e Integral, acabou influenciando no desenvolvimento dos modelos de crescimento populacional.

È neste sentido que a superioridade das práticas sobre os objetos, o caráter situado destas práticas e o caráter discursivo da construção social do conhecimento, aspectos a que se referem Arieta at al (2004), caracterizam a perspectiva socioepistemológica da construção de modelos de crescimento populacional.

Mesmo que o foco deste trabalho esteja em modelos apresentados no final do século XVIII e início do século XIX, vale indicar que a dinâmica do crescimento populacional tem sido investigada também mais recentemente. Podemos citar, por exemplo, o modelo de Montroll em 1971 e o modelo de Smith em 1963 (Bassanezi, 2002). Atualmente, as projeções demográficas não se fazem como um mero exercício técnico para tentar compreender um fenômeno, mas passaram a ser de fundamental importância para o planejamento social e econômico de um país.

Neste sentido, este olhar socioepistemológico a que nos referimos sobre a configuração da construção de conhecimento no que se refere ao desenvolvimento de modelos de crescimento populacional, também não se contrapõe às ideias de Gaston Bachelard de que

> A história da humanidade bem pode, em suas paixões, em seus preconceitos, em tudo o que revela dos impulsos imediatos, ser ter um eterno recomeço; mas há pensamentos que não recomeçam; são os pensamentos que foram retificados, alargados, completados (BACHELARD, 1995, p 147).

É justamente sob este olhar que podemos considerar que a evolução dos modelos de crescimento populacional envolve práticas sociais na medida em que os modelos como o de Malthus, Verhulst, Gompertz influenciaram (e influenciam) modelos mais atuais de projeção demográfica. E também envolvem práticas matemáticas na medida em que condicionaram a estrutura matemática destes modelos.

Assim, a ideia de que as práticas sociais não são constituídas exatamente pelo que as pessoas fazem em si, mas por aquilo que as faz fazerem o que fazem parece também se configurar em relação à modelagem do crescimento populacional ao longo do tempo.

Bibliografia

Arrieta, J. L. (2003). *Las prácticas de modelación como proceso de matematización en el aula*. México, Tese (Doutorado em Educação Matemática) – Instituto Politécnico Nacional, Centro de Investigação e Estudos Avançados, México.

Bacaër, N. (2011). *A Short History of Mathematical Population Dynamics*. New York: Springer.

Bachelard, G. O novo espírito científico. 2 ed. Rio de janeiro,Tempo Brasileiro, 1995.

Bassalo, J. M. F. (1996a). A Crônica do Cálculo: II. Na época de Newton e Leibniz. *Revista Brasileira de Física*, 18, 181-190.

Bassalo, J. M. F. (1996b). A Crônica do Cálculo: III. Contemporâneos de Newton e Leibniz. *Revista Brasileira de Física*, 18, 328-336.

Bassanezi, R. C. (2010). *Ensino-aprendizagem com modelagem matemática: uma nova estratégia.*

Cantoral, R. (2003) La aproximación socioepistemológica a la investigación en matemática educativa: una mirada emergente. [CD-ROM] XI Conferencia Interamericana de Educação Matemática. Tema: Educación Matemática & Desafíos y Perspectivas. Blumenau, Brazil: Universidade Regional de Blumenau, 2003. Disponível em http://cimate.uagro.mx/cantoral.

Cantoral, R. (2004). Desarrollo del pensamiento y lenguaje variacional, una mirada socioepistemológica. *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa*, 17, 1-9.

Cantoral, R.; Farfán, R. M. (2008). Socioepistemología y Matemáticas. *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa*, 21, 740-753.

Covián, O. N. (2005). *El papel del conocimiento matemático en la construcción de la vivienda tradicional: El caso de la Cultura Maya*. Dissertação (Mestrado de Ciências na especialidade da Educação Matemática) - CICATA-IPN, México.

Delmas, B. (2004). Pierre-François Verhulst et la loi logistique de la population. *Math. & Sci. hum. / Mathematics and Social Sciences*, 42, 51-81.

Espinosa, G.M. (2006) Construcción social de la función trigonométrica. In: Acta Latinoamericana de Matemática Educativa, v.19 , pp-818-823, México.

Gompertz, B. (1825). On the nature of the function expressive of the law of human mortality, and on a new mode of determining the value of Life Contingencies. *Philosophical Transactions of the Royal Society of London*, 115, 513-583.

Urban, S. (1865). Obituary. *The Gentleman's Magazine*, 219, 238-400.

Hernández, M. Á.; Arrieta, J. L. (2005). Las Prácticas Sociales de Modelación y la Emergencia de lo Exponencial. *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa*, 18, 537-542.

Malthus, T. R. (1798). *An Essay on the principle of population*. London: J. Johnson. Acesso em 17 de dezembro de 2010, de <http://www.esp.org/books/malthus/population/malthus.pdf>.

Mantoux, P. (sd). *A Revolução Industrial no Século XVIII*. São Paulo: Editora Hucitec, tradução da edição de 1927.

Martínez, G. (2005). Los procesos de convención matemática como generadores de conocimiento. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, 8, 195-218.

Miguel, A. (2003) Formas de ver e conceber o campo de interações entre filosofia e educação matemática. In: BICUDO, M. A. V (org). Filosofia da Educação Matemática:concepções e movimentos. Brasília: Plano.

Montiel, G. (2005). *Estudio Socioepistemológico de la Función Trigonométrica*. México, Tese (Doutorado Educação Matemática) – Instituto Politécnico Nacional, Centro de Investigação em Ciência Aplicada e Tecnologia Avançada, México.

Moreira, P.; David, M. M. (2003). Matemática escolar, matemática científica, saber docente e formação de professores. *Zetetiké,* 11, 57-80.

Nápoles V. J. E.; Negrón S. C. (2002). La historia de las ecuaciones diferenciales ordinarias contadas por sus libros de texto. *Xixím: Revista electrónica de didáctica de las matemáticas*, 3, 33-57.

Norton, L. (2005). Conceptual and Practical Implications of Breast Tissue Geometry: Toward a More Effective, Less Toxic Therapy. *The Oncologist*, 10, 370-381.

Oliveira, F. D. (2008). *Análise de textos didáticos: três estudos*. Rio Claro, Dissertação (Mestrado em Ensino e Aprendizagem de Matemática e seus Fundamentos Filosófico-Científicos) – UNESP, São Paulo.

Oliveira, C. F. (2011). *Modelagem Matemática do Crescimento Populacional: Um olhar à luz da Socioepistemologia*. Dissertação (Mestrado em Ensino de Ciências e Educação Matemática) – Universidade Estadual de Londrina, Londrina.

Silva, C. A. (2005). Malthus volta à aula de matemática. *Famat em Revista*, n.5, 277-282.

Szmrecsányi, T. (1982). *Thomas Robert Malthus: economia*. São Paulo: Editora Ática.

Verhulst, P. F. (1838). Notice sur la loi que la population suit dans son accroissement. *Correspondance Mathématique et Physique*, 10, 113-121.

Verhulst, P. F. (1845). Recherches mathématiques sur la loi d'accroissement de la population. *Nouveaux mémoires de l'Académie Royale des Sciences et Belles-Lettres de Bruxelles*, 18, 1-41.

Verhulst, P. F. (1846). Note sur la loi d'accroissement de la population. *Bulletins de l'Académie Royale des Sciences, des Lettres et des Beaux-Arts de Belgique*, 13, 226-227.

Verhulst, P. F. (1847). Deuxième mémoire sur la loi d'accroissement de la population. *Mémoires de l'Académie Royale des Sciences des Lettres et des Beaux-Arts de Belgique*, 20, 1-32.

Vilela, D. S. (2007). *Matemáticas nos usos e jogo de linguagem: ampliando concepções na Educação Matemática*. Campinas, Tese (Doutorado em Educação) — Faculdade de Educação, Unicamp, São Paulo.

Vilela, D. S. (2009). Práticas matemáticas: contribuições sóciofilosóficas para a Educação Matemática. *Zetetiké*, 17, 191-212.

Winsor, C. P. (1932). The Gompertz Curve as a Growth Curve. *Proceedings of the National Academy of Sciences,* 18, 1-8.

LOURDES MARIA WERLE DE ALMEIDA
Universidade Estadual de Londrina – UEL – Londrina – Paraná - Brasil
lourdes@uel.br;
endereço eletrônico:
http://buscatextual.cnpq.br/buscatextual/visualizacv.jsp?id=K4707324P8

Licenciada em Matemática, Mestre em Matemática e Doutora em Engenharia de Produção. Professora da Universidade Estadual de Londrina desde 1985, atua no curso de graduação em Matemática e no Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Educação Matemática. Tem experiência na área de Matemática, com ênfase em Educação Matemática, atuando principalmente nos seguintes temas: modelagem matemática, formação de professores de matemática sendo coordenadora do GRUPEMAT Grupo de Pesquisas sobre Modelagem e Educação Matemática.

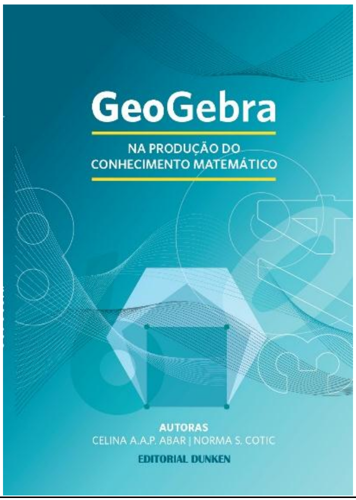
CAMILA FOGAÇA DE OLIVEIRA
ca_fogaca@yahoo.com.br
http://buscatextual.cnpq.br/buscatextual/visualizacv.do?id=K4233662H0

Possui graduação em Matemática pela Universidade Estadual de Londrina (2008), e Mestrado em Ensino de Ciências e Educação Matemática também pela Universidade Estadual de Londrina (2011). É professora do SENAI- Serviço Nacional de Aprendizagem Industrial em Londrina – PR.

UNIÓN
REVISTA IBEROAMERICANA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA

ISSN: 1815-0640
Número 41. Marzo 2015
Páginas 134-135

<table>
<tr>
<td>GEOGEBRA EN LA PRODUCCIÓN DEL CONOCIMIENTO MATEMÁTICO
AUTORES:
Celina Abar e Norma Cotic
EDITORIAL: DUNKEN
ISBN: 978-987-02-7647-0
EDICIÓN: 2014
PÁGINAS: 152

</td>
<td>GEOGEBRA NA PRODUÇÃO DO CONHECIMENTO MATEMÁTICO
AUTORES:
Celina Abar e Norma Cotic
IGLÚ EDITORA
ISBN: 978-85-7494-213-1
EDICIÓN: 2014
PÁGINAS: 143

</td>
</tr>
</table>

Aunque GeoGebra se está convirtiendo en un software casi imprescindible para todo el profesorado que desea incorporar las TIC al aula, lo que supone que se está utilizando por la amplía comunidad de usuarios, que se está creando a su alrededor, generando actividades y recursos, casi todos disponibles en Internet a través de GeoGebratube; lo que supone que sean pocos los materiales disponibles en otros formatos que hacen que echemos de menos algunas publicaciones.

Por este motivo, hay que felicitar a Norma Cotic y a Celina Abar por asumir la edición de este libro sobre GeoGebra en la producción del conocimiento matemático.

Hay que destacar que las autoras, aunque no olvidan reflejar los aspectos técnicos necesarios para realizar cada propuesta utilizando GeoGebra, dedican esta publicación a los aspectos didácticos que muchas veces olvidamos.

Al trabajar con GeoGebra en el aula lo más importante no es lo que se pueda hacer con este software sino lo que seamos capaces de transmitir para que los alumnos adquieran los conocimientos y por tanto, aprendan matemáticas.

ISSN: 1815-0640
Número 41. Marzo 2015
Páginas…….

Los seis temas que componen el libro van desde números a funciones, pasando por geometría y ecuaciones. Estos temas son Exploración de Números y Operaciones, Exploración de temas de Geometría y Medida en el plano y Exploración de Ecuaciones y Funciones.

Es evidente que no están completos todos los bloques de contenidos de matemáticas, por lo que, como reflejan las autoras en la introducción, han dejado temas como estadística y geometría en 3D para una posterior publicación.

Cada uno de los temas ofrece al lector los contenidos necesarios y sobre todo, le brida estrategias didácticas con diferente grado de dificultad para que pueda adaptarlas a las necesidades de sus alumnos.

Además, en el desarrollo de los contenidos y propuestas didácticas se ve reflejada la experiencia en formación docente y capacitación continua que Norma y Celina han atesorado durante su carrera profesional; lo que hace que afronten la exposición desde su propia práctica que les ha permitido detectar necesidades y sobre todo diseñar cómo se debe afrontar la incorporación de las TIC para aprovechar todas las posibilidades que ofrecen.

Animamos al lector a que se adentre en este libro que le ayudará para cambiar la metodología tradicional de trabajo en el aula, para incorporar y sobre todo, para trabajar con un programa como GeoGebra que en cada nueva versión que aparece, amplía sus posibilidades y por tantos las opciones que ofrece para cambiar, de una vez, la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas.

Agustín Carrillo de Albornoz Torres
Secretario general FISEM
Instituto GeoGebra de Andalucía

UNIÓN
REVISTA IBEROAMERICANA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA

ISSN: 1815-0640
Número 41. Marzo 2015
Páginas 136-141

El rincón de los problemas

La función cuadrática. Una experiencia didáctica en la perspectiva de la creación de problemas

Uldarico Malaspina Jurado
Pontificia Universidad Católica del Perú – IREM
umalasp@pucp.edu.pe

Tarea

Crear un problema de contexto extra matemático en cuya solución se emplee la función f, dada por $f(x) = x^2 + 2x - 15$, $x \in R$.

Decidí proponer esta tarea, en un taller con profesores de secundaria, preparando sesiones de trabajo – en la perspectiva de creación de problemas – para introducir el tema de la función cuadrática, luego de haber trabajado con ellos problemas y gráficos de las funciones afines (funciones cuya expresión general es $g(x) = ax + b$, para $x \in R$, con a y b parámetros también en R.)

Los participantes del taller, primero individualmente y luego en parejas, dedicaron varios minutos para crear un problema como el pedido y su dificultad mayor era la condición de ser un problema de contexto extra matemático (los que usualmente se llaman “contextualizados”, o “vinculados a situaciones reales”).

Algunos intentaron construir un problema recordando aquellos problemas de optimización que consideran precios de pasajes que aumentan determinado porcentaje en el precio por cada cierto número de pasajeros que disminuye, pero no llegaron a una propuesta concreta. Además, comentamos el carácter un tanto forzado de tales enunciados, en el intento de proponer “contextos reales”.

Mi propósito era que los esfuerzos de crear tal problema los lleve a vincular las funciones cuadráticas con las funciones afines y finalmente se logró al sugerirles que busquen ideas para crear problemas escribiendo la expresión funcional de otra manera. Un grupo factorizó la expresión dada:

$$f(x) = x^2 + 2x - 15 = (x + 5)(x - 3);$$

y otro grupo escribió:

$$f(x) = x^2 + 2x - 15 = x(x+2) - 15$$

Con la expresión factorizada, un grupo propuso el siguiente problema:

Problema 1

Si multiplicamos la edad que tuvo Carlos hace 3 años por la edad que tendrá Carlos dentro de 5 años, obtenemos 48. ¿Qué edad tiene Carlos actualmente?

Con la otra expresión, otro grupo propuso el siguiente problema:

Problema 2

¿Cuáles pueden ser las dimensiones de una habitación rectangular si su área debe ser como máximo 15 metros cuadrados y su largo debe ser dos metros más que su ancho?

Los grupos socializaron sus problemas y sus soluciones.

Para el Problema 1, se resolvió la ecuación

$$(x + 5)(x - 3) = 48.$$

Ciertamente, se tuvo que volver a la expresión no factorizada

$$x^2 + 2x - 15 = 48.$$

Como ésta es equivalente a

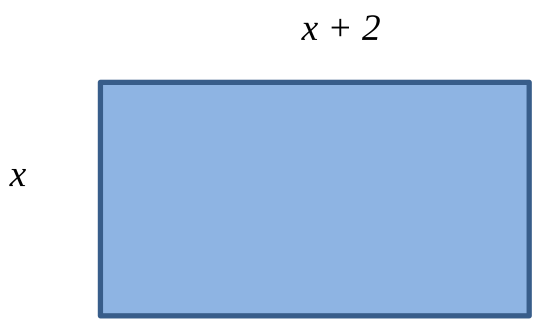
$$x^2 + 2x - 15 - 48 = 0$$

y a

$$(x + 9)(x - 7) = 0,$$

finalmente, se obtuvo $x = 7$ ó $x = -9$ y se concluyó que la edad actual de Carlos es 7 años.

Para el Problema 2, se mostró la siguiente figura:



Y se planteó la siguiente inecuación:

$$x(x+2) \leq 15,$$

que luego se afinó a

$$x(x+2) \leq 15, \quad x \in R, \quad x > 0.$$

Para resolver esta inecuación se pasó a

$$x^2 + 2x - 15 \leq 0;$$

$$(x + 5)(x - 3) \leq 0.$$

De aquí, empleando los llamados “puntos críticos para resolver una inecuación”, se llegó a

$$-5 \leq x \leq 3.$$

Finalmente, teniendo en cuenta la restricción $x > 0$, se concluyó que los posibles valores de x son todos los números reales del intervalo]0 ; 3].

Comentarios y avances

En ambos problemas creados se utilizó la expresión algebraica que define la función f dada en la tarea inicial; en el primero, lo esencial fue resolver una ecuación cuadrática y en el segundo una inecuación cuadrática.

Hice el comentario anterior y pedí a los participantes en el taller que traten de hacer más explícita la vinculación de las soluciones de los problemas con la función f dada, es decir, que destaquen algo que sea propio de la función, más allá de problemas algebraicos sobre ecuaciones o inecuaciones cuadráticas.

Luego de algunos minutos de desconcierto y reflexión de los participantes, sugerí que se tuviera en cuenta otra forma de representar la función dada; es decir, no quedarse solo en el "registro de representación algebraico". Inmediatamente mencionaron el "registro gráfico", lo cual aplaudí e incentivé su uso, ya sea para hacer alguna variación en los problemas creados o para elaborar un nuevo problema.

Así, surgió una variación del Problema 2:

Problema 2'

¿Cuáles pueden ser las dimensiones de una habitación rectangular si su área debe ser como máximo 15 metros cuadrados y su largo debe ser dos metros más que su ancho? Ilustrar la solución empleando el gráfico de una función cuadrática.

Al Problema 1 podía hacerse una variación similar, pero insistí en crear un problema en el marco de los registros gráficos, usando la factorización de la expresión algebraica de la función f ; es decir, usando

$$f(x) = x^2 + 2x - 15 = (x + 5)(x - 3).$$

Pedí que crearan un problema usando las gráficas de las funciones afines presentes en la factorización. Indiqué que el contexto podría ser intra matemático.

Así surgió el problema al que pretendía que llegaran los participantes:

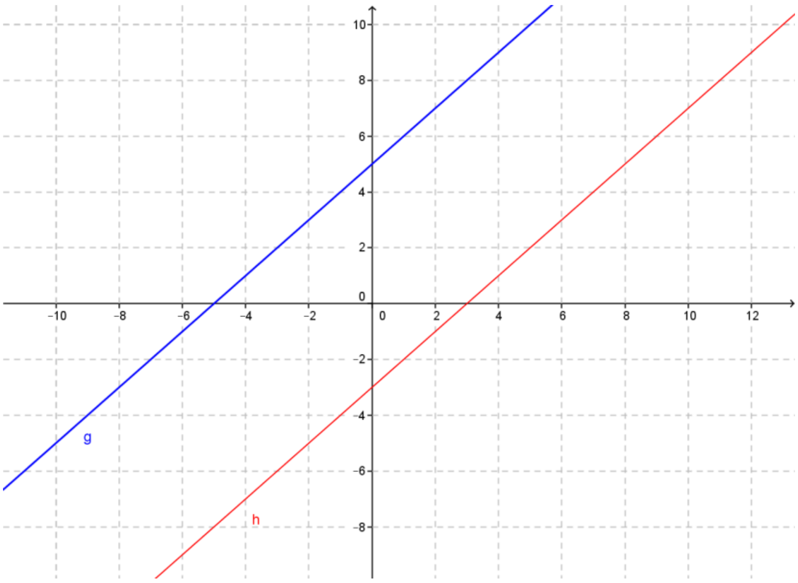
Problema 3

Esbozar el gráfico de la función f, dada por $f(x) = x^2 + 2x - 15$, empleando los gráficos de dos funciones afines.

Ciertamente, lo primero que se hizo fue graficar las funciones afines, que llamamos g y h, definidas por

$$g(x) = x + 5 \quad \text{y} \quad h(x) = x - 3.$$

Indiqué la conveniencia de hacer ambos gráficos en un mismo sistema de coordenadas. Se obtuvo así, gráficos como los que se muestran a continuación:



Una primera reacción fue obtener puntos del gráfico de f multiplicando las ordenadas correspondientes de los puntos de los gráficos de g y de h; sin embargo, sugerí que hiciéramos un análisis más global, más cualitativo, apoyándonos en algunos "puntos clave". Pedí que encuentren puntos del gráfico de g y del gráfico de h por los cuales tendría que pasar el gráfico de f. Fue natural pensar en los puntos de intersección con los ejes coordenados y pronto se llegó a la conclusión que el gráfico de f debe pasar por los puntos (-5 ; 0), que es el punto de intersección del gráfico de g con el eje X y por el punto (3 ; 0) que es el punto de intersección del gráfico de h con el eje X. En el primero se tiene que $g(-5) = 0$ y en consecuencia el producto con el valor que tome h, sin importar cuál sea, será 0. Análogamente con el segundo punto y así tenemos, en clara coherencia con el registro algebraico, que $f(-5) = 0$ y $f(3) = 0$.

Propuse entonces la tarea de determinar, examinando los gráficos de g y h, qué signos tienen las ordenadas de los puntos del gráfico de f, para $x \neq -5$ y para $x \neq 3$.

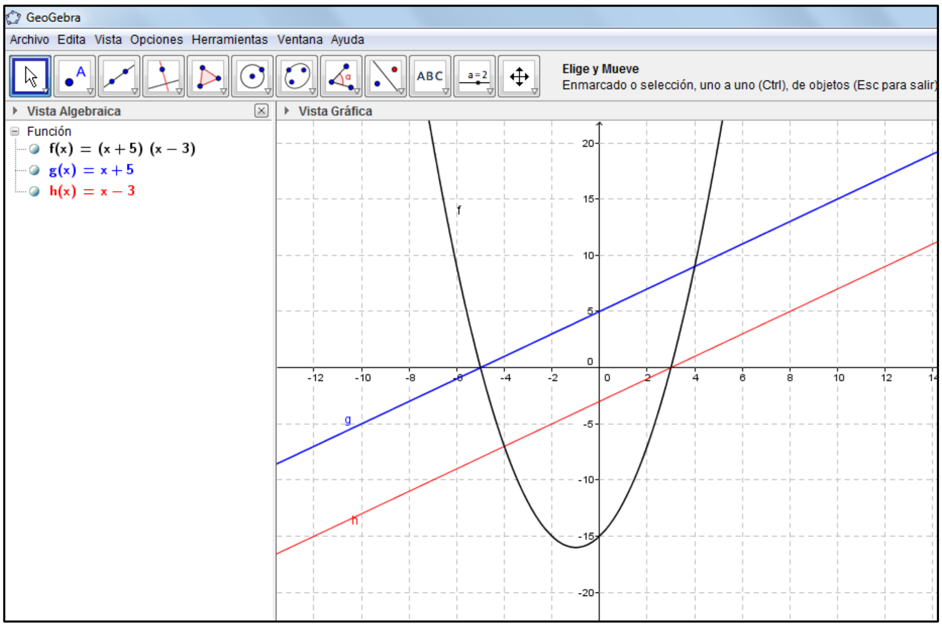
En los grupos de trabajo se encontró – y luego se expuso en la pizarra – que:

Cuando x < -5, los gráficos de g y h están debajo del eje X y en consecuencia son de ordenadas negativas. Esto lleva a que el producto sea positivo; es decir, los puntos del gráfico de f tienen ordenada positiva y el gráfico de f, para x < -5, estará por encima del eje X.

Análisis similar llevó a la conclusión que para -5 < x < 3 el gráfico de f estará por debajo del eje X y para x > 3, el gráfico de f estará por encima del eje X.

Con ideas intuitivas sobre continuidad de la función f, se llegó a la idea que su gráfico es una curva con puntos cuyas ordenadas toman valores positivos y decrecientes hasta llegar al punto (-5 ; 0). Como pasa también por el punto (3 ; 0), una posibilidad es que los valores negativos que toman las ordenadas para x en el intervalo]-5 ; 3[son decrecientes en un subintervalo de la izquierda y luego crecientes en un subintervalo de la derecha. El gráfico continuaría, para x > 3, con puntos cuyas ordenadas toman valores positivos y crecientes. En resumen, observando los gráficos de g y h, se intuye que la gráfica de f es una curva que pasa por los puntos (-5; 0) y (3 ; 0); que es decreciente hasta cierto punto del intervalo]-5 ; 3[; y luego creciente.

Luego del convencimiento de esta percepción intuitiva del gráfico de f, usamos GeoGebra para comparar con lo intuido y se celebró con entusiasmo al observar en la pantalla lo que se muestra a continuación:



Esto dio lugar, además, a una digresión sobre resolución de inecuaciones cuadráticas vinculándolas con el gráfico de la función cuadrática correspondiente, teniendo en cuenta sus puntos de intersección con el eje X y la ubicación de sus puntos en el plano cartesiano para valores de x diferentes de las abscisas de los puntos de intersección con el eje X. Con este enfoque, se resolvió en detalle la ecuación del problema y la inecuación del problema 2.

Comentarios finales

1. Lo desarrollado es solo un punto de partida para plantearse nuevas preguntas y crear nuevos problemas que contribuyan a establecer conexiones intra matemáticas y con la realidad.

Algunas de tales preguntas-problema son: Si tenemos los gráficos de dos funciones afines, sin conocer sus expresiones algebraicas

¿Cómo sería el gráfico de la función cuadrática cuyos factores son tales funciones afines?

¿Cómo sería tal gráfico si las rectas no son paralelas y ambas crecientes?

¿Qué pasaría si las rectas son no paralelas y ambas decrecientes?

¿Qué pasaría si una recta es creciente y la otra decreciente?

2. Otra pregunta relacionada con funciones cuadráticas y afines:

Dada una parábola cualquiera, con eje de simetría vertical, ¿siempre existe un par de rectas tales que el producto de las funciones afines correspondientes tenga como gráfico la parábola dada? ¿La respuesta se puede justificar con argumentos gráficos?

3. El enfoque presentado, mediante creación de problemas, contribuye a pasar de manera natural de funciones afines a funciones cuadráticas, reforzando conceptos y criterios matemáticos involucrados, como funciones crecientes, funciones decrecientes, puntos de intersección con el eje de abscisas, factorización, teorema fundamental del álgebra, producto de funciones, relación entre el signo de un producto y los signos de sus factores, etc.

   Trabajando de manera similar con estudiantes de secundaria, no resultará como "mágico" o impuesto, que el gráfico de una función cuadrática "es una parábola".

4. Notemos que en nuestro desarrollo no hemos usado la palabra parábola, pues es otro problema relacionar la función cuadrática con la definición de parábola, como lugar geométrico de los puntos que equidistan de un punto fijo y de una recta dada.

5. Otros problemas creados ante la tarea propuesta, fueron:

   a) Esbozar el gráfico de la función f, dada por $f(x) = x^2 + 2x - 15,\ x \in R$, empleando traslaciones del gráfico de la función $w(x) = x^2,\ x \in R$.

   b) ¿Qué longitud podría tener el lado de un terreno de forma cuadrada si al añadir 5 metros a uno de sus lados y disminuir 3 metros al otro, se obtiene un terreno rectangular cuya área es a lo más de 65 m^2?

6. Una ventaja de usar la creación de problemas es involucrar a los participantes en la búsqueda de relaciones intra matemáticas y extra matemáticas y afrontar el reto de resolver problemas creados por ellos mismos o por sus co participantes. Esto fue evidente en el taller realizado, pues las socializaciones de problemas y sus soluciones contribuyeron a crear nuevos problemas a partir de los problemas que se socializaba. Una muestra de ello es el problema enunciado en (b) del comentario 5, que recoge ideas de los problemas 1, 2 y 3.

7. Cabe destacar que en este enfoque es muy importante preparar adecuadamente las tareas y orientar cuidadosamente su desarrollo para que la creación de problemas fluya respetando las iniciativas de los participantes. Varios artículos relacionados con diseño de tareas pueden encontrarse en Watson y Ohtani (2013).

Referencia

Watson, A. & Ohtani, M. (Eds)(2013) *ICMI Study 22: Task Design.* United Kingdom: University of Oxford.