UNIÓN
REVISTA IBEROAMERICANA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA
Año XII – Número 45 – Marzo 2016

ÍNDICE

UNIÓN
REVISTA IBEROAMERICANA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA
www.fisem.org/web/union
http://asenmacformacion.com/ojs/index.php/union/index

ISSN: 1815-0640
Número 45. Marzo 2016
Páginas 1

Unión. Revista Iberoamericana de Educación Matemática es una publicación de la Federación Iberoamericana de Sociedades de Educación Matemática **(FISEM)**. Tiene una periodicidad trimestral, de modo que se publican cuatro números al año, en los meses de marzo, junio, septiembre y diciembre. Es recensionada en ***Mathematics Education Database*** y está incluida en el catálogo ***Latindex***.

REVISTA IBEROAMERICANA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA

ISSN: 1815-0640
Número 45. Marzo 2016
Página 02-05

www.fisem.org/web/union
http://asenmacformacion.com/ojs/index.php/union/index

EDITORIAL

Estimados colegas y amigos:

Siempre es motivo de gran satisfacción para nosotros el poder completar otro de los números de nuestra revista. Eso es lo que sentimos en el momento en que proporcionamos a la comunidad Iberoamericana este número 45. Esperamos con él, contemplar las diversas líneas de investigación de nuestros lectores, buscando así ser fieles a los objetivos de Unión.

Al igual que en los números anteriores, la primera sección corresponde siempre a la firma invitada, que presenta un artículo de un invitado especial. En este volumen contamos con la participación de Luc Trouche, investigador de la didáctica de las matemáticas francesas, muy productivas. Es profesor en el Institut Français de l'Éducation, Escuela Normal Superior de Lyon. Es autor de muchos libros y artículos científicos. El artículo que Trouche escribe en este número de UNIÓN lleva por título "*Prendre en compte les métamorphoses du Numérique vers une approche documentaire du didactique*" y está incluido en uno de los temas de investigación de Trouche, que es la del estudio del trabajo documental de profesores, en particular, sus aspectos colectivos. Estudio de los procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas en entornos de computación. Le agradecemos la oportunidad que nos ofrece para difundir en nuestra comunidad un artículo no publicado.

Además del artículo de Trouche, esta edición cuenta con más de trece artículos y un relato de experiencia. El primer artículo de Padrón, presenta un examen de lo que piensan y observan algunos maestros que enseñan matemáticas en Paraguay, en relación con el afecto de sus estudiantes a las matemáticas. El segundo, "*Estrategia para ampliar la visión de las matemáticas y suscitar el Interés por la Investigación*" es un artículo de Cruz-Huertas. Vargas, presenta los resultados de una prueba en dos diferentes grupos de estudiantes del curso de farmacología, área de la salud, con el fin de evaluar las fortalezas y debilidades de las matemáticas básicas. Rosa, Damazio y Dorigon reflejan, en base a los supuestos de la teoría histórico-cultural, "*Propuesta de Davydov y colaboradores para la introducción en la enseñanza del concepto de ecuación*". "*A resistência à transformação do texto* *pedagógico do planejamento do ambiente de modelagem matemática na prática pedagógica escolar*", es el tema del artículo de Silva y Oliveira; Rodríguez presenta una introducción histórica a las matemáticas, y una breve introducción a la biomatemática. "*Cartografía como propuesta metodológica en la educación matemática"* es el título del artículo de Ruidiaz. Larraín discute cómo el análisis del error matemático ayuda a los maestros a incrementar y profundizar en el conocimiento y la comprensión del pensamiento matemático de sus estudiantes. "*Secuencia didáctica para el autoaprendizaje de la Simplificación de Fracciones con el uso de la tecnología en estudiantes universitarios*" es el título del artículo de Salazar, Lagarda, Sánchez y Luque. Además, incluimos un artículo de Baldini y Cyrino que trata sobre "*Elementos de la práctica de un profesor de matemáticas sobre el uso del software GeoGebra*". Y también incluimos, "*Un estudio sobre el uso de las tecnologías digitales en el proceso de visualización y representación geométrica para la comprensión y resolución fotoproblemas con los estudiantes de la escuela primaria*", presentado por Borges y Sales Oliveira. Meneghetti y Bega investigan cómo actualmente los materiales didácticos manipulables (MDM) se utilizan en las clases de matemáticas en la Educación Básica. Por último Martínez-Pañeda nos presenta el artículo con el título: "*MATLAB: Una herramienta para la didáctica del método de elementos finitos*".

El número 45 presenta en su sección "Relato de experiencias", el trabajo de Arnal-Bailera titulado "*Investigación de la construcción de polígonos regulares por doblado de papel*".

En la sección de problemas, los valiosos aportes del profesor Uldarico Malaspina Jurado, están publicados en este volumen, con el título "*Estímulo del Pensamiento matemático. Una experiencia didáctica con profesores usando un acertijo*".

La Reseña foi elaborada por Serapio García Cuesta del libro "*Textos del profesor Luis Rico*". En esta obra se han seleccionado trabajos que representan y reconocen la relevante trayectoria profesional e investigadora del profesor Luis Rico.

Gracias a todos los que contribuyeron de manera directa o indirectamente con este número de la Revista. Buena lectura!

Celina Abar

Sonia Igliori

Estimados colegas e amigos:

Sempre é motivo de muita satisfação, para nós, poder completar mais um número dessa nossa Revista. É assim que sentimos neste momento quando colocamos à disposição da comunidade espano americana esse número 45. Esperamos com ele contemplar os diversos interesses de pesquisa de nosso leitores, buscando dessa forma sermos fiéis aos propositos da UNIÓN.

Como nos demais números nossa primiera seção é sempre aquela da firma invitada, na qual se divulga um artigo de um convidado especial. Neste volume temos a hora de contar com a participação de Luc Trouche, um pesquisador da didática da matemática francesa, muito produtivo. Ele é professor do Institut français de l'Éducation, École Normale Supérieure de Lyon. É autor de livros e de muitos artigos científicos. O artigo que Trouche apresenta neste número da UNIÓN intitula-se: "*Prendre en compte les métamorphoses du Numérique vers une approche documentaire du didactique*" e se insere em uma das temáticas de pesquisa de Trouche, qual seja aquela do "Estudo do trabalho documental dos professores, en particular de seus aspectos coletivos. Estudo dos processos de ensino e da aprendizagem das matemáticas nos ambientes informatizados". Agradecemos a ele a oportunidade que nos ofereceu de divulgar em nossa comunidade um artigo inédito.

Além do artigo de Trouche essa edição conta com mais 13 artigos e um relato de experiência. O primeiro artigo, de Padrón, apresenta um exame do que pensam e observam alguns professores que lecionam Matemática no Paraguai, em ligação com ao afeto de seus alunos à Matemática. O segundo, **"***Estrategia para ampliar la visión de las matemáticas y suscitar el interés por la investigación*" é o artigo de Cruz-Huertas. Vargas apresenta resultados de um teste em dois grupos diferentes de alunos do curso de farmacología, área da saúde, com vistas a avaliar os pontos fortes e fracos em matemática básica. Rosa, Damazio e Dorigon refletem, com base nos pressupostos da Teoria Histórico-Cultural, "*Proposição de Davýdov e colaboradores para introdução ao ensino do conceito de equação*". "*A resistência a transformação do texto pedagógico do planejamento do ambiente de modelagem matemática na prática pedagógica escolar*" é a temática do artigo de Silva e Oliveira; Rodríguez apresenta uma introdução histórica à matemática, e uma breve introdução à biomatemática. "*Cartografia como proposta metodológica na Educação*

Matemática” é o título do artigo de Ruidiaz. Já Larrain discute como a análise de erros matemáticos ajuda os professores a aumentar e aprofundar seu conhecimento e compreensão do pensamento matemático dos seus alunos. *“Secuencia didáctica para el autoaprendizaje de la simplificación de fracciones con uso de tecnología en estudiantes universitários*” é o título do artigo de Salazar, Lagarda, Sánchez, e Luque. Temos ainda o estudo de Baldini e Cyrino que trata de “*Elementos da prática de uma Comunidade de Prática de professores de Matemática na utilização do Software GeoGebra*”. E também “*Um estudo sobre o uso das tecnologias digitais no processo de visualização e representação geométrica para a compreensão e a resolução de fotoproblemas, com alunos do Ensino Fundamental*” foi apresentado por Borges, e Sales Oliveira. Meneghetti e Bega investigaram como atualmente os Materiais Didáticos Maninupáveis (MDM) têm sido utilizados nas aulas de matemática da Educação Básica. E por fim é apresentado o artigo de Martínez-Pañeda com o título: “*MATLAB: Una herramienta para la didáctica del Método de los Elementos Finitos*”

O número 45 reapresenta a seção “Relato de experiência” com o trabalho de Arnal-Bailera intitulado “*Investigando la construcción de polígonos regulares mediante doblado de papel*”.

Na seção de problemas, contribuições preciosas de Uldarico Malaspina Jurado, temos em volumen 45 "*El rincón de los problemas. Estímulo del pensamiento matemático. Una experiencia didáctica con profesores, usando un acertijo*.”

A resenha foi elaborada por Serapio García Cuesta sobre o livro “*Textos del profesor Luis Rico*”. Nesta obra foram selecionados trabalhos que representam e reconhecem a relevante trajetória profissional e investigadora do professor Luis Rico.

Muito obrigada a todos que contribuiram direta o indiretamente com este número da Revista e boa leitura!

Celina Abar

Sonia Igliori

UNIÓN
REVISTA IBEROAMERICANA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA
www.fisem.org/web/union
http://asenmacformacion.com/ojs/index.php/union/index

ISSN: 1815-0640
Número 45. Marzo 2016
Página 06

Firma Invitada: *LUC TROUCHE*

In previous years my research has been dedicated to the study of ICT integration in Mathematics Education. In particular, I have studied the interplay between instrumentation processes and conceptualization processes. This work inspired me to study in particular the teacher's role, introducing the notion of orchestration to model the management of available artefacts (for teaching a particular mathematical topic) in the classroom, and developing this concept in a joint work with Paul Drijvers. Now my focus is resource design and teacher professional development in the time of digitalization. This has led me to introduce, in a joint work with Ghislaine Gueudet, the documentary approach of didactics. With this frame I analyse teacher learning through the 'lens of resources'. In this perspective, the notion of teacher resource system appears crucial in order to understand teacher (developing) knowledge and the coherence of teacher activity.

Breve CV

Luc Trouche est professeur de didactique des mathématiques à l'Institut Français de l'Éducation (Ecole Normale Supérieure de Lyon, France). Il s'est intéressé aux processus d'intégration des technologies dans l'enseignement des mathématiques avant de se consacrer à l'étude des interactions entre les professeurs et les ressources de leur enseignement.

Institut français de l'Éducation, École Normale Supérieure de Lyon, 15 parvis René-Descartes, BP 7000, 69342 Lyon cedex 07
Tel : 00 33 (6) 728 823 75 luc.trouche@ens-lyon.fr
http://ens-lyon.academia.edu/LucTrouche

UNIÓN
REVISTA IBEROAMERICANA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA
www.fisem.org/web/union
http://asenmacformacion.com/ojs/index.php/union/index

ISSN: 1815-0640
Número 45. Marzo 2016
Página 07-23

Prendre en compte les métamorphoses du Numérique : vers une approche documentaire du didactique

Luc Trouche

Resumen	La metamorfosis digital de las condiciones de enseñanza y aprendizaje conduce a un cambio de paradigma. En lugar de pensar en la integración de nuevas herramientas en los procesos de enseñanza, la cuestión es analizar la inmersión de estos procesos en nuevos entornos, ofreciendo así nuevas oportunidades para la búsqueda de recursos y el desarrollo de trabajo colectivo. Este artículo propone un nuevo enfoque teórico para analizar cómo los maestros hacen frente a estas oportunidades, y utiliza este enfoque para describir un proyecto de investigación nacional francés, el cual estudia el trabajo de los profesores con/para los recursos, teniendo en cuenta tanto los componentes individuales y colectivos. El artículo concluye poniendo en evidencia nuevos aspectos que la debe tener en cuenta. **Palabras clave: Enfoque documental didáctico, trabajo colectivo de los profesores, recursos didácticos, instrumentación, instrumentalización**
Abstract	The digital metamorphosis of teaching and learning conditions leads to a change of paradigm. Instead of thinking the integration of new tools in teaching processes, the issue is to analyze the immersion of these processes in new environments, offering new opportunities for searching resources and developing collective work. This paper proposes a new theoretical approach for analyzing how teachers are dealing with these opportunities, and uses this approach for describing a national French research project, studying teachers' work with/for resources, taking into account both individual and collective components. The paper concludes in evidencing new issues the research has to face. **Keywords**: **Documentational approach to didactics, teachers collective work, teaching resources, instrumentation, instrumentalisation**
Resumo	A metamorfose digital, das condições de ensino e aprendizagem, acarreta uma mudança de paradigma. Não se trata mais de pensar em integração de novas ferramentas nos processos de ensino, mas de analisar a imersão desses processos em novos ambientes, oferecendo-se assim novas oportunidades para a busca de recursos e o desenvolvimento do trabalho coletivo. Este artigo propõe um novo enfoque teórico para analisar como os professores estão lidando com essas oportunidades, e utiliza este enfoque para descrever um projeto de investigação nacional francês, o qual estuda o trabalho dos professores com/para os recursos, levando-se em conta os componentes individuais e coletivos. O artigo finaliza evidenciando novas direções que a pesquisa deve enfrentar. **Palavras-chave: Abordagem documental para a didática; trabalho coletivo de professores; instrumentação; instrumentalização.**

1. Introduction

La pratique, l'enseignement et l'apprentissage des mathématiques ont toujours été inséparables des artefacts qui les outillent, depuis les tablettes d'argile des écoles de scribe jusqu'aux tablettes digitales, en passant par les calculatrices. L'influence de ces artefacts sur les formes de l'activité et sur les processus de conceptualisation a été l'objet de nombreuses études et a suscité l'émergence d'approches théoriques spécifiques. Ce sont ces approches théoriques que nous considérerons dans cet article, en montrant comment les métamorphoses du numérique ont conduit à un changement de paradigme dans les recherches du domaine. Dans la deuxième section, nous nous intéresserons à l'évolution des questionnements. Nous proposerons, dans une troisième section, une approche théorique prenant en compte ces évolutions. Dans une quatrième section, nous présenterons un programme national de recherche, en cours, qui exploite cette approche. La cinquième section mettra en évidence les nombreuses pistes de recherche, au niveau international, que ce programme ouvre désormais[1].

2. L'évolution des questionnements

Je montrerai cette évolution de deux façons. D'abord en m'appuyant sur la littérature de recherche internationale, ensuite en considérant mon expérience propre de chercheur.

2.1. D'un Handbook à l'autre

Pour décrire cette évolution, je me baserai d'abord sur les « Handbooks of Mathematics Education », qui, édités tous les dix ans, sont un bon baromètre des recherches du domaine. En 2003 et 2013, ce sont les mêmes éditeurs (A.J. Bishop, M.A. Clements, C. Keitel, J. Kilpatrick, & F.K.S. Leung) qui ont coordonné cet ouvrage. J'ai participé, dans chacun de ces ouvrages, à l'écriture d'un article de synthèse sur les technologies dans l'enseignement des mathématiques (Lagrange *et al.*, 2003; Trouche *et al.,* 2013). Relisant, avec un peu de recul, ces articles, je réalise l'ampleur des évolutions entre ces deux dates.

En 2003, l'article de Lagrange *et al*., basé sur une vaste revue de la littérature de recherche, au niveau international de 1992 à 1998, met en évidence une prise de conscience de : la *complexité* des processus d'intégration de la technologie dans l'enseignement des mathématiques ; de la *nécessité du temps* pour réaliser cette intégration ; de la nécessité de prendre en compte le *potentiel*, mais aussi les *contraintes* des outils ; de l'importance de *repenser les situations mathématiques* pour prendre en compte ce potentiel et ces contraintes ; de l'importance cruciale du *rôle du maître* pour *orchestrer* ces situations au profit des apprentissages mathématiques des élèves. On peut dire que cet article témoigne de la fin d'une certaine naïveté, portée par beaucoup d'enseignants pionniers, mettant dans la technologie l'espoir d'un enseignement et d'un apprentissage des mathématiques plus facile.

[1] Cet article est écrit en français. Nous nous en excusons pour les lecteurs de la revue, et nous espérons que cette langue ne sera pas un obstacle à la compréhension : le portuguais et le français sont des langues si proches! Pour des éclairages complémentaires, les lecteurs pourront se référer à deux articles se situant dans le m^me cadre conceptuel, et publiés récemment en portugais (Gueudet & Trouche, 2016; Rocha & Trouche, 2016).

En 2013, dix ans plus tard, l'article que j'ai coordonné était basé sur une étude des curricula de mathématiques dans des contextes culturels et sociaux variés. Les différences entre les deux articles sont flagrantes. Ces différences apparaissent déjà dans le vocabulaire : en 2003 les mots « ressource » et « collectif » ou « communauté » n'apparaissent pas. En 2013, le mots « ressource », « collectif » et « communauté » apparaissent respectivement 40, 15 et 20 fois. Le contexte a clairement changé, marqué désormais par l'essor d'Internet, des ressources en ligne et des nouvelles formes de communication et de partage. L'article lui-même souligne trois évolutions majeures dans les études sur les technologies dans l'enseignement : de l'étude de l'intégration des technologies à l'étude de l'accompagnement des usages ; de l'étude de la diffusion des ressources (du haut vers le bas) à l'étude de la circulation des ressources (prenant en compte la créativité des acteurs) ; de l'étude des processus individuels à l'étude des processus collectifs.

2.2. La dynamique des orchestrations instrumentales

Cette évolution, je la réalise aussi, rétrospectivement, à travers mon expérience de chercheur.

D'abord du point de vue des concepts que j'ai été amenés à travailler. Pour prendre en compte la responsabilité du maître dans la gestion didactique des outils mathématiques pour résoudre un problème mathématiques donné, j'ai proposé (Trouche, 2004) la notion *d'orchestration instrumentale*. Cette notion, décrivant les configurations didactiques pensées par le maître *avant* la classe, puis exploitées *dans* la classe, a été enrichie par Drijvers (Trouche & Drijvers, 2010) avec la notion de « performance didactique », décrivant les ajustements que je maître fait, en interaction avec ses élèves, quand surgissent dans la classe des éléments imprévus. L'analyse du travail du maître conduit alors à prendre en compte un ensemble d'éléments hétérogènes : un répertoire de situations mathématiques déjà appropriées, un ensemble d'artefacts disponibles dans l'environnement de la classe, et un répertoire d'orchestrations déjà expérimentées. Ce point de vue rompt avec une conception linéaire (le professeur a un objectif didactique, il choisit alors une situation mathématique – un problème – adapté à cet objectif, puis il choisit des artefacts pertinents pour soutenir la résolution du problème, et il décide enfin une orchestration de la situation prenant en compte ces artefacts). Le point de vue naturel est alors beaucoup plus ouvert, et conduit à l'utilisation de la notion large de ressources : le professeur à un ensemble de ressources à sa disposition (certaines déjà intégrées, d'autres qu'il va rechercher pour atteindre ses objectifs). C'est alors cet ensemble de ressources, très ouvert, que le professeur va mettre au travail pour construire la matière de son enseignement.

C'est ensuite, et *en même temps* devrait-on dire, l'expérience des dispositifs de recherche dans lesquels j'ai été impliqué. Parmi ceux-ci, l'expérience du SFoDEM[2] a été certainement critique. Le SFoDEM (Guin & Trouche, 2008) a rassemblé, de 2000 à 2006, une centaine d'enseignants de mathématiques du second degré, avec une

[2] Suivi de Formation à Distance des Enseignants de Mathématiques, http://www.math.univ-montp2.fr/sfodem

vingtaine de formateurs, répartis dans 4 groupes de formation sur des thèmes variés (renouvellement de l'enseignement de l'analyse avec des calculatrices graphiques, transition entre l'arithmétique et l'algèbre avec des tableurs, statistique et logiciels de simulation, géométrie place et logiciels de géométrie dynamique). L'objectif était d'aider les enseignants à franchir le pas, entre une appropriation personnelle des technologies et leur utilisation dans le cadre de la classe. Pour atteindre cet objectif, trois hypothèses étaient faites : les enseignants ont besoin de ressources adaptées, qui sont pour le moment manquantes ; la réalisation de telles ressources suppose un travail collaboratif entre enseignants, et un aller-retour entre une conception a priori et des expérimentations en classe ; l'exploitation de telles ressources suppose aussi un modèle commun, qui puisse faciliter aussi bien leur conception que leur appropriation. C'est finalement la recherche de ce modèle de ressources (Figura 1) qui a tiré le développement du SFoDEM.

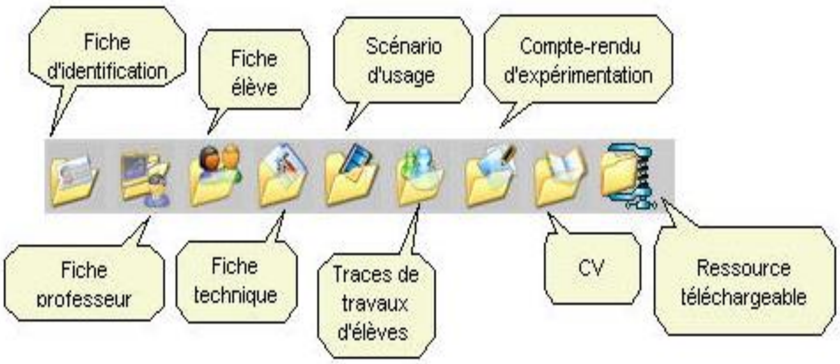


Figura 1. Le modèle de ressources du SFoDEM.

Ce modèle prend en compte les orchestrations à travers la notion de scénario d'usage, mais il fait apparaître plus *qu'une* ressource. Il s'agit bien d'un système articulé de ressources, dont la structure répond à un ensemble d'exigences :

- Permettre le repérage de cette ressource dans un vaste répertoire d'objets pédagogiques grâce à des métadonnées qui sont rassemblées dans une fiche d'identification ;
- prendre en compte les besoins du professeur et ceux des élèves (à travers la fiche élève et la fiche professeur) ;
- séparer les aspects techniques des aspects pédagogiques, en donnant, dans une fiche technique, des éléments permettant de mettre en œuvre cette ressource dans une variété d'environnements technologiques ;
- transmettre l'expérience, aussi des professeurs (grâce aux comptes rendus d'expérimentation) que des élèves (en récupérant des traces critiques de leurs travaux) ;
- inscrire enfin chaque ressource comme élément d'un processus vivant (c'est le rôle du CV, *curriculum vitae*, de la ressource, situant chaque nouvel utilisateur comme co-concepteur d'une œuvre commune).

On le voit bien, à travers l'histoire de ce dispositif, comme à travers l'évolution des problématiques de recherche, c'est, pour l'étude du travail du professeur, un nouveau paysage conceptuel qui se dessine : un professeur utilisateur, créateur et partageur de ressources. L'approche théorique que nous allons présenter maintenant propose une modélisation de ce nouveau paysage.

3. Une approche documentaire du didactique

Présenter une approche théorique suppose de donner à la fois les concepts sur lesquels elle repose, de montrer leur opérationnalité et les outils méthodologiques permettant de la développer, ce que nous allons faire dans les trois paragraphes qui suivent.

3.1. Une dialectique essentielle entre *ressources* et *document*

Aucune théorisation de peut naître du vide : elle se nourrit nécessairement de théorisations antérieures. L'approche documentaire est née de l'approche instrumentale (Rabardel, 1999), intégrée en didactique des mathématiques (Guin & Trouche, 1999) pour analyser le développement *d'instruments* à partir de l'utilisation d'artefacts dans le travail mathématique. Ce développement était vu à travers l'imbrication de deux processus, *instrumentation* (tout artefact ouvre de nouvelles possibilités, et oppose de nouvelles contraintes, à l'action d'un individu), et *instrumentalisation* (tout processus *d'adoption* d'un nouvel artefact est aussi un processus *d'adaptation* de celui-ci). L'instrument est alors défini comme une entité hybride, composée à la fois de l'artefact, ou de la partie de cet artefact mobilisée dans une activité finalisée, et du *schème* qui permet l'organisation de cette activité. La notion de schème est reprise de Vergnaud (1996), qui le définit comme *l'organisation invariante de l'activité* pour résoudre un type de problème ou réaliser un type de tâche. Un élève développe ainsi par exemple, à partir d'une calculatrice, un instrument pour l'étude des variations d'une fonction numérique, ou un instrument pour calculer des limites de fonction.

L'approche documentaire (Figura 2) va travailler ce modèle en l'étendant, pour prendre en compte le nouveau paradigme 'ressources' dont nous avons mis en évidence la pertinence. Au lieu d'artefacts dont il faudrait penser l'intégration, nous nous intéressons aux 'ressources' déjà là, en donnant à ce terme le sens général proposé par Adler (2000), de tout ce qui *re-source*, ou est susceptible de *re-sourcer* l'activité du professeur[3] : un manuel scolaire, les traces d'une interaction avec un collègue ou un élève, un site web, une vidéo, bref, un ensemble de choses de granularités différentes, qui vont être organisées par l'activité finalisée du professeur.

[3] No texto original consta *re-source*, esse jogo de palavras fica bem claro na língua francesa, pois *source* significa *fonte*. Na palavra *ressource* o prefixo *re* tem o sentido de repetição de tornar de novo fonte, ou seja, de reabastecer a atividade do professor (note de la traductrice de l'article Gueudet et Trouche 2016).

Figura 2. Une représentation d'une genèse documentaire (Gueudet & Trouche, 2016).

Cet ensemble de ressources va donc être mis au travail par le professeur pour constituer la matière de son enseignement. Ce travail est finalisé (préparer une leçon donnée par exemple). Ce n'est jamais un travail isolé : tout professeur est pris dans un jeu institutionnel (dans une école) et dans un jeu d'interaction (avec des collègues, des élèves), qui sont, d'une certaine façon, co-auteurs de l'œuvre du professeur. Ce travail est la résultante des processus croisés d'instrumentalisation et d'instrumentation, qui traduisent les influences réciproques des ressources et du professeur. Il donne naissance à ce que nous avons appelé un *document*, pour reprendre un terme central de *l'architecture de l'information* (Pédauque, 2006).

L'architecture de l'information est un nouveau champ scientifique issu du monde digital qui constitue l'environnement de notre conceptualisation : dans ce domaine, un document est une entité développée avec une *intention* et pour un *usage* donné. Nous avons précisé cette notion de document en la définissant comme une entité hybride, composée à la fois *des ressources* qui ont été rassemblées, adaptées, restructurées, et d'un *schème* d'utilisation. Il s'agit ainsi de désigner une nouvelle dialectique : l'approche instrumentale considère la dialectique artefact/instrument, l'approche documentaire considère la dialectique ressources/document. Dans la pratique, nous repérons les schèmes à travers la régularité des usages que le professeur fait des ressources pour résoudre un problème d'enseignement. Ces régularités nous permettent d'inférer les *invariants opératoires* qui pilotent ces usages. Un exemple, dans le paragraphe suivant, va nous permettre de préciser les éléments structurants de cette approche.

3.2. Une illustration de l'opérationnalité de cette approche

Nous avons suivi le travail de Sophie, professeur au collège. Elle veut introduire, après une leçon sur le périmètre du cercle, une leçon sur l'aire d'un disque. Elle dispose d'un ensemble de ressources de différents niveaux : un tableau blanc interactif dans sa classe, son manuel scolaire, des anciennes leçons, un répertoire de sites web qu'elle connaît bien…

Elle commence par une recherche sur Google, avec les mots clés « aire du disque - géométrie dynamique » qui sont, pour elle, caractéristiques de la leçon qu'elle a l'habitude de faire. Elle obtient un ensemble de résultats (Figura 3), qui correspondent, pour les deux premiers, à des sites des IREM (Instituts de recherche sur l'enseignement des mathématiques, voir § 5.2), à qui elle fait confiance, car elle les connaît bien.


Environ 117 000 résultats (0,55 secondes)

Aire du disque - IREM de Lille
irem.univ-lille1.fr › Accueil du site › Collège › Sixième › Géométrie
2 juin 2012 - but de l'activité : découvrir la formule de l'**aire** d'un **disque** ... Initiation à un logiciel de **géométrie dynamique**, ici GeoGebra; Savoir déplacer un ...
Vous avez consulté cette page 3 fois. Dernière visite : 08/12/15

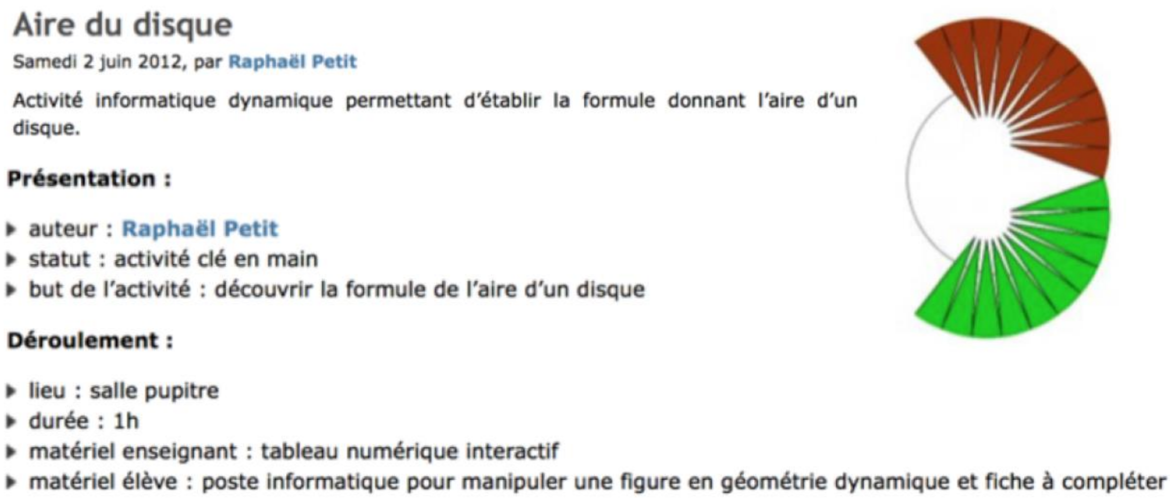
Le pari de la géométrie dynamique pour changer notre ...
www.**irem**.ups-tlse.fr/dahan/
Le pari de la **géométrie dynamique** pour changer notre manière d'enseigner ..... 2 . **AIRE**. 2.1. **Aire du disque** (Figure 11 et Figure 11 bis : Lien_vers_Figure_11).

Aires de disques - XMaths - Calculatrices et logiciels ...
xmaths.free.fr/tice/**geometrie**/geogebra_**aire**d.htm
Logiciels de **géométrie dynamique** ... Faire afficher la somme des **aires** des deux **disques**. ... La construction géométrique ne pose pas de problème.

La géométrie dynamique au collège
debart.pagesperso-orange.fr/college/
La géométrie au collège avec GéoPlan et GéoSpace. ... mathématiques du passé, qui grâce au logiciel de **géométrie dynamique**, reprennent le goût du futur . Descartes et les ... Calculs d'**aire** - Théorème de Pick ... triangle, **disque**.

Figura 3. Les premiers résultats d'une recherche sur Internet.

Elle ouvre donc le premier site, qui propose un ensemble d'éléments pour organiser la leçon visée (Figura 4) : une description générale de la leçon, des idées pour la mise en œuvre, une idée d'animation, des fichiers informatiques… On retrouve en fait l'idée du SFoDEM (Figura 1) de penser l'ensemble des aspects du travail du professeur.


Aire du disque
Samedi 2 juin 2012, par Raphaël Petit
Activité informatique dynamique permettant d'établir la formule donnant l'aire d'un disque.

Présentation :

- auteur : Raphaël Petit
- statut : activité clé en main
- but de l'activité : découvrir la formule de l'aire d'un disque

Déroulement :

- lieu : salle pupitre
- durée : 1h
- matériel enseignant : tableau numérique interactif
- matériel élève : poste informatique pour manipuler une figure en géométrie dynamique et fiche à compléter

Figura 4. Un ensemble de ressources pour soutenir le travail du professeur.

Ce site, en fait, ne lui donne rien de nouveau par rapport à ce qu'elle connaissait déjà. Elle retourne alors sur un site web qu'elle connaît bien, réalisé par une collègue pleine d'imagination[4].

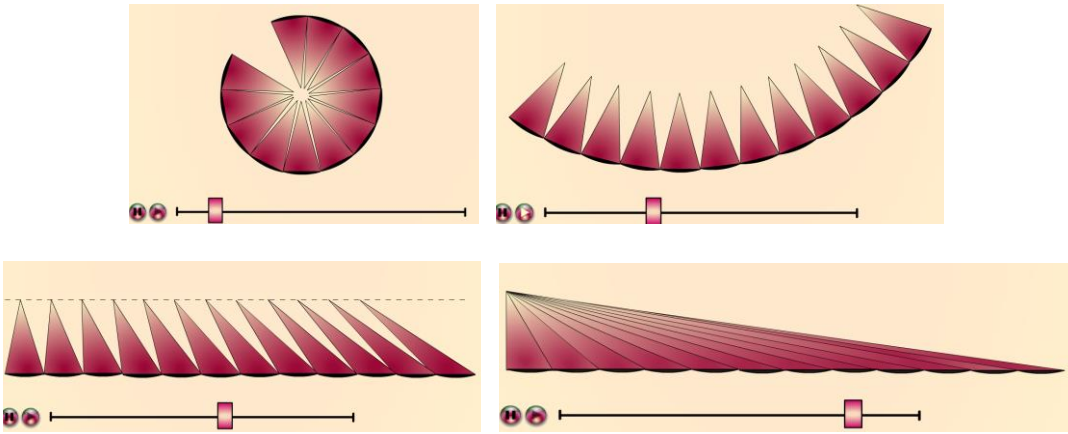


Figura 5. Une animation pour retrouver l'aire d'un disque à partir de l'aire d'un périmètre.

Elle retrouve alors l'animation que le site de l'IREM (Figura 4) exploitait aussi, mais ici dans un contexte familier (Figura 5), avec une présentation et des explications dont elle est familière : l'animation fait voir le découpage d'un disque en triangles de même aire, puis l'ouverture du disque, et le basculement de tous les triangles (sans changer leur hauteur, donc en conservant des triangles de même aire) pour obtenir un seul triangle, qui a donc pour aire le produit de la hauteur (qui est le rayon du cercle) par la base du grand triangle (qui a pour valeur approchée le périmètre du cercle, soit 2 π), divisé par 2 : on trouve bien πR^2.

La leçon de Sophie va être structurée autour de cette animation. Elle la laisse se dérouler en continu au tableau blanc interactif, sollicite l'observation des élèves, fait passer des élèves au tableau pour qu'ils gèrent eux-mêmes le déroulement de l'animation : ils la stoppent aux moments critiques pour proposer des résultats partiels (le fait que le site permette de stopper l'animation et de suivre son déroulement grâce à un curseur qui se déplace sur l'axe du temps est une fonctionnalité précieuse). Le résultat cherché apparaît alors comme le résultat de tâtonnements collectifs et de partages de conjectures.

On voit bien, à travers cet exemple, les *ressources* que le professeur a mobilisées pour sa leçon. Mais ce n'est pas seulement à partir de cette séance qu'on pourra inférer des éléments structurants du *document* que le professeur a développé. Pour pouvoir les inférer, on aura besoin de suivre le travail du professeur quand il reproduira la même leçon ou des leçons sur un sujet proche. On pourra alors inférer, à partir des invariants qui apparaîtront, des éléments du schème qui organisent son action : des invariants mathématiques (« pour démontrer des formules d'aire, on procède par découpages de surface en surfaces élémentaires dont on connaît les aires »), des invariants didactiques (« appuyer les raisonnements

[4] "Mathématiques magiques" http://therese.eveilleau.pagesperso-orange.fr

sur des animations qui mettent en évidence le passage d'un état 1 à un état 2, en montrant bien toutes les étapes intermédiaires »). Bref : l'analyse de la préparation de la leçon (le choix des ressources et la structuration de la progression) et l'analyse de la mise en œuvre (le choix et le contrôle du scénario) fournissent des informations complémentaires pour comprendre la genèse du document et les connaissances du professeur qui pilotent son travail documentaire. Ce suivi pose cependant de délicates questions méthodologiques que nous allons aborder dans la section suivante.

3.3. Un appareillage méthodologique en construction

Il s'agit en effet de suivre l'activité du professeur, à la fois en classe (ce qui n'est déjà pas si simple) et hors de la classe, dans une grande variété de lieux et de moments où se déploie son travail documentaire. Nous avons développé (Gueudet & Trouche), dans cette perspective, une méthodologie d'investigation réflexive qui consiste à mobiliser le propre regard du professeur pour rassembler les informations nécessaires sur son travail documentaire. Cette méthodologie combine un ensemble d'outils, qui sont adaptés en fonction des contextes et des objectifs particuliers de la recherche : une *visite guidée* des ressources du professeur ; un *journal de bord* dans lequel il consigne les informations concernant la préparation d'un cours particulier, pendant la période précédant le cours ; une « instruction au sosie », dans laquelle il transmet, avant son cours, toutes les informations nécessaires à quelqu'un qui aurait à faire le cours à sa place « sans que les élèves ne se rendent compte de la substitution ».

Pour repérer les éléments structurants du travail du professeur, il est nécessaire de réaliser un suivi sur la durée, permettant de voir la mise en œuvre répétée de la même leçon, ou de leçons proches. On a alors accès au cycle de vie d'une ressource, depuis son appropriation jusqu'à ses adaptations et peut-être un jour son abandon. Il est aussi nécessaire de ne pas considérer les ressources du professeur, et les documents qu'il développe, comme des éléments isolés, mais de les appréhender dans leur cohérence et leurs articulations. C'est l'intérêt de la notion de *système de ressources*, défini comme l'ensemble des ressources que le professeur s'est approprié dans le cadre de son activité finalisée. Ces ressources sont hautement structurées : par niveau de classe, par type d'activité, par ancienneté ou familiarité, par domaine mathématiques… Cette structure est explicite (par dossier, dans l'ordinateur ; sur les étagères, dans la bibliothèque…) ou implicite, dans la conscience du professeur.

Pour avoir accès à cette structure, le chercheur croise ce que lui-même peut analyser « de l'extérieur » et les représentations que le professeur donne à voir lui-même, des cartes réflexives de son système de ressource (Figura 6). Bien sûr, la carte n'est pas le territoire, et il y a sans doute un grand écart entre ce que le professeur choisit de dévoiler de ses ressources, et la réalité de son système de ressources. Mais il s'agit bien d'un élément, à prendre en compte, et à croiser avec ce que donnent les autres outils méthodologiques (visite guidée du système de ressources, suivi du cycle de vie des ressources). Cette carte elle-même doit être considérée comme un outil évolutif, le professeur pouvant la compléter ou la rectifier au fur et à mesure du suivi de son travail.

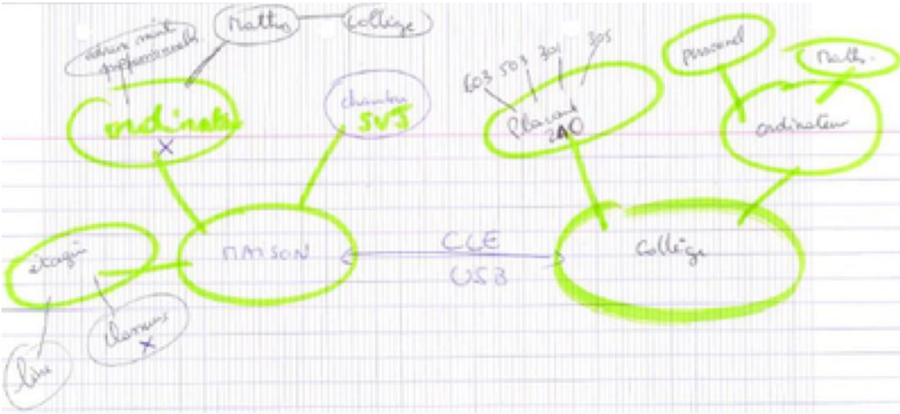


Figura 6. La carte des ressources du professeur, représentée par lui-même.

Ces outils méthodologiques ont été rassemblés, à titre expérimental, dans une « valise documentaire », donnant à voir un ensemble d'éléments que le professeur rassemble pour organiser son enseignement[5]. Cette méthodologie est actuellement mise en œuvre dans le cadre d'un projet national de recherche, que nous présentons dans la section suivante.

4. Le projet ReVEA (Ressources vivantes pour l'enseignement et l'apprentissage)

Le projet ReVEA[6] est un programme de recherche national français, financé par l'ANR (Agence nationale de la recherche). Nous en présentons les grandes lignes ci-dessous, puis proposons un focus sur l'un de ses objets, avant de souligner les nouvelles questions que ce programme de recherche ouvre.

4.1. Comprendre le travail des enseignants dans un moment de transition

Le projet ReVEA rassemble cinq structures de recherche, dont l'Institut français de l'éducation, dans le domaine de la didactique des disciplines, des sciences de l'information et de la communication, et des sciences de l'éducation. Le projet part du constat que le travail que les enseignants font réellement avec les ressources disponibles est fort peu connu. Il s'agit, sur une durée assez longue (de 2013 à 2018) de suivre le travail des enseignants avec les ressources, dans quatre disciplines : anglais, mathématiques, sciences physiques et chimiques (enseignées en France par le même professeur) et enfin technologie. Les hypothèses du projet est que ce travail documentaire des enseignants, va, dans cette période, subir des évolutions fortes, du fait des métamorphoses numériques, que ces évolutions

---

[5] http://educmath.ens-lyon.fr/Educmath/recherche/approche_documentaire/documentation-valise
[6] https://www.anr-revea.fr

devraient être différenciées suivant les disciplines, et que le repérage de ces variables et de ces invariants devrait permettre de mieux conceptualiser ce qu'est une ressource éducative. Une attention particulière est aussi portée, au cœur de ce projet, aux dimensions collectives du travail des enseignants.

Les analyses reposent sur le croisement de deux recueils de données : celles qui découlent de l'étude de *l'offre de ressources*, et celles qui découlent de l'étude *des usages réels*. L'offre de ressources a été étudiée à partir de l'interrogation des enseignants, formateurs, inspecteurs et chercheurs : quelles sont les ressources (manuels scolaires, logiciels, sites) qui apparaissent cruciales pour l'enseignement de la discipline en question. Les usages réels ont été étudiés à partir du suivi d'enseignants, individuellement ou collectivement, dans les quatre disciplines du projet. Le projet a développé des méthodologies propres, combinant des études quantitatives (concernant par exemple le nombre de photocopies réalisées par les enseignants dans un échantillon très vaste d'établissements scolaires) et des études qualitatives, dans la durée, d'enseignants et de collectifs d'enseignants. Pour ces suivis individuels, les éléments de méthodologie d'investigation réflexive (cf. § 3.3) ont été mis en œuvre, et transposés autant que possible aux suivis de collectifs.

Nous n'en sommes qu'au milieu du projet, mais déjà ressortent certaines tendances. Des différences fortes (elles ne sont pas nouvelles) apparaissent entre les disciplines : en anglais, les professeurs sont à la recherche de « ressources authentiques », faiblement didactisées, permettant aux élèves de pratiquer la langue au plus près de ses usages actuels, et sur des questions d'actualité (dans ces conditions, le manuel scolaire est très marginal) ; en mathématiques, le manuel scolaire reste très présent. Les ressources vidéos (par exemple le répertoire de You tube) sont de plus en plus mobilisées par les enseignants d'anglais ; les animations, par exemple en géométrie, sont de plus en plus sollicitées par les professeurs de mathématiques. Dans toutes les disciplines, le recours aux ressources d'Internet se généralise, à travers des formes de recherche et d'intégration dans les systèmes propres de ressources, très diversifiées, suivant les individus. Mais c'est probablement sur les modes collectifs de travail documentaire que les évolutions sont les plus fortes, ce que nous allons voir dans le paragraphe suivant.

4.2. Sésamath, un cas emblématique des évolutions en cours

Une des branches du programme ReVEA s'intéresse plus particulièrement au travail collectif des enseignants, dans les établissements scolaires, mais aussi en dehors, dans le cadre de dispositifs très divers permis par Internet (listes de diffusion, associations d'enseignants, sites collaboratifs…). C'est dans ce domaine que les évolutions apparaissent les plus significatives. Nous étudions plus particulièrement l'association Sésamath, dont le développement apparaît emblématique des évolutions en cours (Rocha & Trouche 2016).

L'association Sésamath[7] a été créée en 2001. Composée uniquement *d'enseignants* de mathématiques, elle a pour objectif de promouvoir les *mathématiques pour tous*, à partir d'un processus de conception collaborative de ressources pédagogiques (Figura 7).

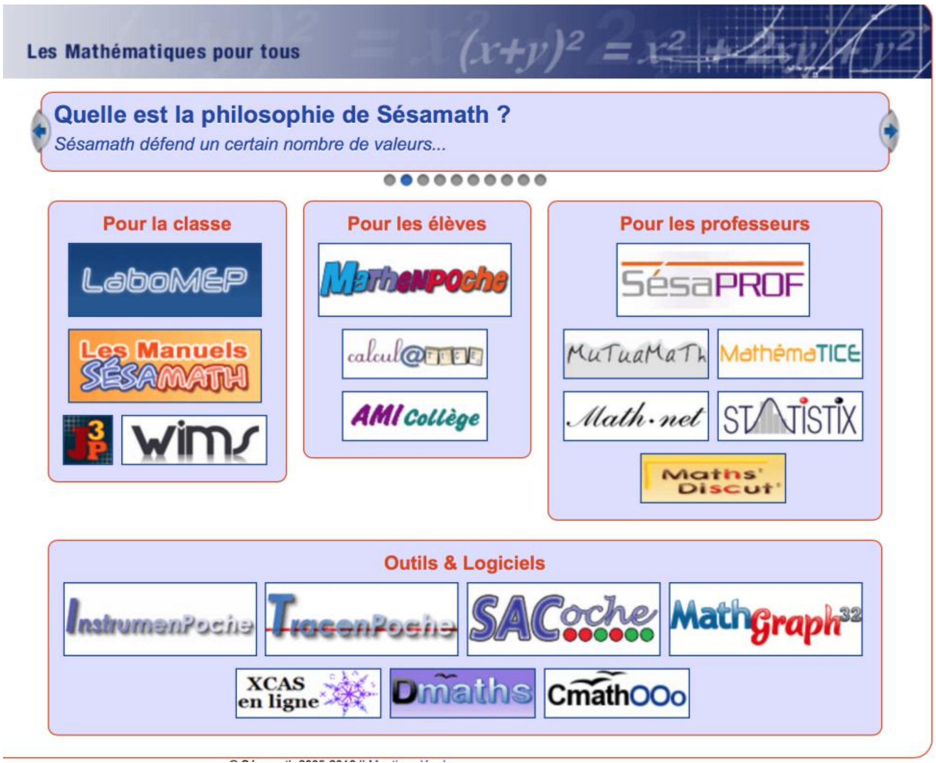


Figura 7. Le site Sésamath, porte ouverte vers un ensemble de ressources.

Sésamath a commencé, sur la base d'un petit groupe très militant, à concevoir une base d'exercices interactifs en ligne (Mathenpoche). Puis elle a agrégé de nombreux enseignants en constituant des groupes de conception de ressources sur des thèmes donnés, correspondant à des besoins réels des enseignants. Ce sont ensuite des manuels scolaires complets qui ont été développés, inter-reliés avec les bases d'exercices en ligne. Finalement, c'est tout un système de ressources (Figure 7) qui a été proposé, permettant aux enseignants de développer eux-mêmes leurs propres « petits fabriques » de ressources : c'est l'objectif de l'application LaboMep, qui permet, au niveau d'un établissement, ou d'un réseau d'enseignants, de personnaliser à partir des ressources de l'association, des recueils de ressources propres. Cela permet par exemple au professeur d'adapter des listes d'exercices aux difficultés propres de tel ou tel élève.

Dans le cadre d'une thèse de doctorat (Rocha 2016), nous suivons actuellement la conception d'un manuel de Sésamath pour le cycle 4 (classes de 5ème, 4ème, et 3ème françaises, c'est-à-dire 7ème, 8ème et 9ème grade), adapté à la

---

[7] Sésamath reprend l'expression des Contes des Mille et une Nuits: Sésame, ouvre-toi! Pour les mathématiques, une intention d'ouverture d'une univers pour sous… http://www.sesamath.net

réforme curriculaire qui devrait se mettre en place en septembre 2016. Une vingtaine d'enseignants sont à l'œuvre pour concevoir ce manuel : certains sont membres de Sésamath, d'autres non ; certains sont des concepteurs novices, d'autre non. La conception de ce manuel les met en face de difficultés inédites :

- pour la première fois, il s'agit de faire, non pas un manuel scolaire pour un niveau scolaire (un an d'enseignement), mais un manuel pour trois niveaux scolaires successifs ; pour éviter de faire des manuels trop lourds, il faut alors nécessairement penser conjointement des éléments « sur papier », et des éléments en ligne ;

- le programme à enseigner intègre des notions nouvelles pour les professeurs, en particulier des éléments d'algorithmique et de programmation. Les professeurs doivent donc concevoir des ressources pour enseigner… des notions qu'ils n'ont pas apprises eux-mêmes.

Dans cette situation, les concepteurs du manuel doivent donc mobiliser beaucoup de ressources nouvelles pour faire face à ces difficultés. Ils doivent, de plus, concevoir simultanément une œuvre commune – un manuel – et leur propre enseignement pour l'année à venir. Il y a donc un jeu entre le système de ressources collectif, qui se construit, et les systèmes individuels de ressources, qui se réorganisent. C'est ce qu'analysent actuellement les chercheurs ReVEA, et qui donne de nouvelles informations sur les systèmes de ressources, leurs structures, et la nature de leurs éléments, qui peuvent jouer des rôles critiques (ressources *génératrices* ou encore ressources *pivots*).

4.3. ReVEA, un incubateur de concepts

A travers le suivi des ressources de Sésamath, comme à travers les autres suivis de ressources, d'enseignants et de collectifs en cours dans le projet, ce sont de nouveaux outils méthodologiques qui sont éprouvés, et de nouveaux concepts qui sont travaillés. Deux d'entre eux apparaissent, aujourd'hui, particulièrement productifs, celui de *trajectoire documentaire*, et celui *d'expertise documentaire*.

Par trajectoire documentaire (Rocha 2016), nous entendons un développement conjoint : le développement professionnel de l'enseignant, et le développement de son système de ressources. L'étude des trajectoires documentaires pourrait permettre de comprendre les choix qu'un enseignant fait pour telle ou telle ressource, et les éléments structurants de son système de ressource.

Par expertise documentaire (Wang 2016), nous entendons les compétences que le professeur construit pour développer son propre système de ressources en interaction avec les systèmes de ressources de ses collègues, en rapport avec les institutions dans lesquelles il organise son enseignement. Dans cette expertise, qu'est-ce qui est spécifique de la discipline enseignée ? Dans cette expertise, qu'est-ce qui est spécifique du travail collectif des enseignants ?

A cette étape du projet, il ne s'agit que de premières ébauches conceptuelles, que le développement de ReVEA devrait permettre de préciser, et d'opérationnaliser.

5. Ouvertures internationales

Un programme de recherche national, ce sont aussi de nouvelles opportunités de collaborations internationales. Dans le cadre du projet ReVEA, par le biais de thèses, ce sont deux collaborations internationales qui se sont dessinées, la première avec le Brésil, la deuxième avec la Chine.

5.1. Le Brésil, une relation particulière des institutions avec les manuels scolaires

Invité par l'UFPE dans le cadre d'une École des hautes études de la CAPES[8], j'ai eu l'occasion de découvrir le programme PNLD[9] qui n'a pas son équivalent en France. Il s'agit d'un programme national d'évaluation des manuels scolaires, et plus généralement des ressources didactiques pour l'enseignement, évaluation d'un point de vue éthique, ergonomique et didactique. Cette évaluation est liée à une perspective d'accompagnement du travail *documentaire des enseignants, se traduisant par exemple par la conception d'un guide* méthodologique pour l'utilisation de ce matériel didactique.

Ce programme ouvre de nombreuses questions : comment les commissions PNLD travaillent-elles dans les différentes disciplines ? Quel est l'usage réel des propositions PNLD par les enseignants ? Quelle est l'influence des travaux du PNLD sur les éditeurs scolaires, et, plus généralement, sur l'offre de ressources pédagogiques ? Une réponse à l'appel d'offres CAPES-COFECUB a été proposée[10], pour traiter ces questions en relation avec le projet ReVEA. Il s'agit à la fois d'analyser les décisions didactiques que les enseignants sont amenés à prendre pour choisir et mettre en œuvre des ressources, et de développer de nouveaux moyens pour structurer cette analyse.

D'ors et déjà un étudiante brésilienne réalise sa thèse dans le cadre du projet ReVEA (Rocha, 2016), et son sujet concerne la conception du manuel Sésamath. Il y aura donc, sur ce point, matière à comparaison de deux processus de conception de manuels scolaires très différents, le premier (au Brésil) soumis à des contraintes institutionnelles fortes, le deuxième (en France) lié aux nouvelles dynamiques du travail collectif des enseignants.

---

[8] http://www.capes.gov.br/component/content/article?id=7337:ufpe-oferece-escola-de-altos-estudos-voltada-a-area-de-matematica
[9] http://portal.mec.gov.br/pnld/apresentacao
[10] Le projet PREM(Professeurs et ressources pour l'enseignement des mathématiques) est porté par l'Université fédérale du Pernambuc au Brésil, et par l'Ecole Normale Supérieure de Lyon en France). Il rassemble des didacticiens des mathématiques et des informaticiens.

5.2. En Chine, le rôle critique du travail collectif des enseignants

Une deuxième thèse (Wang, 2016), celle-ci en co-tutelle entre la Chine et la France, est intégrée dans le programme ReVEA. Il s'agit, dans ce cadre, de comparer les formes collectives du travail des enseignants autour de la conception de ressources.

Ce travail collectif, en France, existe dans des cadres particuliers. Les IREM (Instituts de recherche sur l'enseignement des mathématiques), dont nous avons déjà parlé (§ 3.2), rassemblent ainsi, depuis 1970, dans chaque université, des équipes d'enseignants d'écoles primaires, de collèges, de lycées et d'universités (Trouche 2016). Dans un cadre non hiérarchique, ils conçoivent ensemble des ressources rendues nécessaires par les changements de programme, ou pour rendre les mathématiques plus vivantes. Il s'agit de professeurs volontaires, souvent pionniers pour l'intégration de nouvelles technologies ou pour l'expérimentation de nouveaux dispositifs d'enseignement. Même si cette implication d'enseignants reste minoritaire, elle a une certaine influence dans le milieu à travers les dispositifs de formation continue. D'autres cadres de travail collectif émergent dans le fil du numérique (Sésamath par exemple, § 4.2).

En Chine, le travail collectif est une réalité, depuis de nombreuses années, reconnue institutionnellement comme une partie intégrante du travail des enseignants[11]. Les enseignants travaillent en classe devant leurs élèves moins de 10 heures par semaine, le reste du temps est essentiellement consacré à un travail sur les ressources de leur enseignement. Ce travail prend différentes formes (Pepin *et al.,* soumis) : participation, à l'intérieur de l'établissement scolaire, à des « Groupes de recherche sur l'enseignement » ou à des « Groupes de préparation des leçons », suivi, par tous les professeurs de mathématiques d'une école, d'une leçon d'un de leurs collègues. Il s'agit donc d'un cadre très privilégié pour analyser les interactions entre travail documentaire individuel et collectif, qui n'est pas propre au développement du numérique, mais qui se nourrit aussi de ce développement : le développement de petites communautés de professeurs, hors établissements scolaires, sur des thèmes particuliers, utilisant des applications de partage de vidéos, croise désormais le développement de collectifs à l'intérieur des établissements.

6. Conclusion

Les évolutions des environnements technologiques suscitent de nouveaux questionnements pour l'enseignement des mathématiques, très sensibles aux outils qu'il mobilise. Les métamorphoses numériques constituent un bouleversement complet des formes scolaires, des formes de communication et d'information, et, au-delà des formes mêmes de la connaissance. De nombreux phénomènes apparaissent, en particulier au niveau du travail documentaire des professeurs,

[11] Voir une description dans le bulletin de la CFEM, pp. 10-12 http://www.cfem.asso.fr/liaison-cfem/lettre-cfem-decembre%202015

c'est-à-dire dans leur façon de rassembler, de composer, de partager les ressources de leur enseignement.

L'approche documentaire décrite dans cet article se fixe pour objectif l'analyse de ce travail des enseignants. Elle ne prétend pas se substituer aux théories didactiques qui structurent ce champ scientifique, mais apporter un éclairage complémentaire, et développer des méthodologies qui permettent d'outiller le travail des chercheurs : suivre, dans la durée et au delà de l'espace de la classe, le travail des enseignants, dans ses composantes individuelles et collectives, suppose des outils spécifiques.

Les projets de recherche actuellement en cours dans ce domaine, au niveau national et au niveau international, mettent en évidence la complexité des problèmes et l'intérêt de leur étude. Structure des systèmes de ressources des professeurs, ressources critiques, interactions entre systèmes individuels et collectifs, schèmes de conception et d'utilisation des ressources, trajectoires documentaires, développement de l'expertise documentaire… Un vaste continent de recherche s'ouvre, nous ne sommes qu'au début de son exploration.

Bibliografía

Adler, J. (2000). Conceptualising resources as a theme for teacher education. *Journal of Mathematics Teacher Éducation*, *3*(3), 205-224.

Guin, D., & Trouche, L. (1999). The Complex Process of Converting Tools into Mathematical Instruments. The Case of Calculators, *The International Journal of Computers for Mathematical Learning*, *3*(3), 195-227.

Gueudet, G., & Trouche, L. (2016). Do trabalho documental dos professores : gênesis, coletivos, comunidades. O caso da Matemática (tradução K. Rocha), *EMTEIA*.

Guin D., & Trouche, L. (2008). Un assistant méthodologique pour étayer le travail documentaire des professeurs : le cédérom SFoDEM 2006, *Repères-IREM, 72*, 5-24.

Lagrange, J.-B., Artigue, M., Laborde, C., & Trouche, L. (2003). Technology and Mathematics Education: a Multidimensional Study of the Evolution of Research and Innovation, in A.J. Bishop, M.A. Clements, C. Keitel, J. Kilpatrick, & F.K.S. Leung (eds.). *Second International Handbook of Mathematics Education* 239-271, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht

Monaghan, J., Trouche, L., & Borwein, J. (2016). *Tools and Mathematics: Instruments for Learning*. Springer. New York.

Pédauque, R. T. (coll.) (2006). *Le document à la lumière du numérique*. C & F éditions. Caen.

Pepin, B., Xu, B., Trouche, L., & Wang, C. (soumis). Developing a deeper understanding of *mathematics teaching expertise:* Chinese mathematics teachers' resource systems as windows into their work and expertise. *Educational studies in Mathematics*.

Rabardel, P. (1999). Éléments pour une approche instrumentale en didactique des mathématiques. Actes de la Xe École d'été de didactique des mathématiques. Caen : IUFM. 202-213.

Rocha, K. (2016). Uses of online resources and documentational trajectories: the cases of Sésamath. *13th International Congress on Mathematical Education, Hamburg*, 24-31 July 2016

Rocha, K., & Trouche, L. (2016). Da produção coletiva de livros didáticos digitais aos usos feitos por professores de Matemática: o caso do grupo francês Sésamath. *EMTEIA*.

Trouche, L. (2004). Managing the complexity of human/machine interactions in computerized learning environments: guiding students' command process through instrumental orchestrations. *International Journal of Computers for Mathematical Learning,* 9, 281-307.

Trouche, L., & Drijvers, P. (2010). Handheld technology for mathematics education, flashback to the future, *ZDM, The International Journal on Mathematics Education*, 42(7), 667-681

Trouche, L., Drijvers, P., Gueudet, G., & Sacristan, A. I. (2013). Technology-Driven Developments and Policy Implications for Mathematics Education, in A.J. Bishop, M.A. Clements, C. Keitel, J. Kilpatrick, & F.K.S. Leung (eds.), *Third International Handbook of Mathematics Education* 753-790. Springer.

Trouche, L. (2016). Didactics of Mathematics: Concepts, Roots, Interactions and Dynamics from France, in J. Monaghan, L. Trouche, & J. Borwein, *Tools and mathematics, instruments for learning* (pp. 219-256). Springer

Vergnaud, G. (1996). Au fond de l'apprentissage, la conceptualisation. Actes de la 8ème Ecole d'Eté de Didactique des Mathématiques. Clermont-Ferrand : IREM (Université Clermont-Ferrand 2). 174-185.

Wang, C. (2016). Analysing teachers' expertise, Resources and Collective Work throughout Chinese and French windows. *13th International Congress on Mathematical Education, Hamburg*, 24-31 July 2016

Wenger, E. (1998). *Communities of practice. Learning, meaning, identity*. Cambridge University Press.

Luc Trouche est professeur de didactique des mathématiques à l'Institut Français de l'Éducation (Ecole Normale Supérieure de Lyon, France). Il s'est intéressé aux processus d'intégration des technologies dans l'enseignement des mathématiques avant de se consacrer à l'étude des interactions entre les professeurs et les ressources de leur enseignement.

Institut français de l'Éducation, École Normale Supérieure de Lyon, 15 parvis René-Descartes, BP 7000, 69342 Lyon cedex 07
Tel : 00 33 (6) 728 823 75 luc.trouche@ens-lyon.fr
http://ens-lyon.academia.edu/LucTrouche

REVISTA IBEROAMERICANA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA
www.fisem.org/web/union
http://asenmacformacion.com/ojs/index.php/union/index

ISSN: 1815-0640
Número 45. Marzo 2016
Página 24-43

¿Qué dicen los docentes paraguayos en cuanto al afecto en el aprendizaje de la Matemática?: Una mirada desde el Curso Ñanduti

Oswaldo Jesús Martínez Padrón

Fecha de recepción: 29/10/2012
Fecha de aceptación: 04/01/2016

Resumen	En esta investigación se analiza lo que opinaron y observaron algunos docentes que enseñan Matemática en Paraguay, en relación con el afecto que tienen sus estudiantes hacia la Matemática. Los insumos fueron sometidos a un análisis de contenido y, entre los hallazgos, los docentes reportaron tener estudiantes que se muestran contrariados en la clase de Matemática. Constantemente se quejan de que es difícil, por eso la repudian y no les gusta como asignatura. También informan sobre la presencia de actitudes adversas y de representaciones sociales ligadas al fracaso. Igual, evitan resolver los problemas que se le plantean por sentir aversión hacia esta asignatura. **Palabras clave**: Afecto hacia la Matemática, Curso Ñanduti, Emociones.
Abstract	This research analyses the remarks and opinions expressed by a group of teachers of mathematics in Paraguay concerning their students' affection for this subject. The inputs were subjected to rigorous content analysis and, between the findings, the teachers reported having students who were discontented in class. They complain constantly that mathematics is a very hard subject and, in consequence, they reject it. Also, these students show a negative attitude in class and social representations linked to academic failure. As a result, they avoid solving the problems proposed in class because of their aversion towards the subject. **Keywords**: Affection towards Mathematics, Ñanduti Course, Emotions.
Resumo	Esta pesquisa examina o que pensam e observam alguns professores que lecionam Matemática no Paraguai, em ligação com ao afeto de seus alunos à Matemática. As informações recolhidas foram submetidas a um estudo de conteúdo e, entre as conclusões, os professores relataram ter estudantes que estavam descontentes na sala aula de Matemática. Eles se queixam de que a Matemática é uma matéria muito difícil é, em consequência, eles a rejeitam. Além disso, estes alunos mostram uma atitude negativa em classe e também exibem representações sociais ligadas ao fracasso escolar. Da mesma forma, eles evitam resolver os problemas propostos na classe devido à sua aversão à matéria. **Palavras-chave**: Afeição em relação à Matemática, Curso Ñanduti, Emoções.

1. Introducción

Este trabajo es una ampliación de otro publicado por Martínez Padrón (2014) donde reportó un avance sobre una experiencia enmarcada en lo que dice un grupo de docentes que laboran en la Educación Secundaria de la República de Paraguay, respecto al afecto hacia el aprendizaje de la Matemática.

Los insumos analizados emergieron de lo reportado por dichos docentes cuando participaron en un curso Iberoamericano de Formación de Profesores de Secundaria, en el área de Matemática, organizado por el Centro de Altos Estudios Universitarios (CEAU) de la Organización de Estados Iberoamericanos para la Educación, la Ciencia y la Cultura (OEI) y apoyado por la Agencia Española de Cooperación Internacional para el Desarrollo, la Federación Iberoamericana de Sociedades de Profesores de Matemáticas (FISEM), la Sociedad Canaria de Profesores de Matemáticas “Isaac Newton” y la Sociedad Andaluza de Educación Matemática “Thales”.

La dirección y diseño de este curso de formación, denominado Ñanduti, fue encomendada al Dr. Luis Balbuena Castellano, de España, quien contó con un amplio equipo de investigadores y docentes encargados de elaborar los materiales para los participantes. En la estructura del Curso Ñanduti existen varios temas y entre ellos uno denominado Afecto hacia la Matemática que, junto con los otros temas constitutivos, se crearon para atender la formación permanente de unos 40.000 docentes mediante el mejoramiento de las competencias científicas, técnicas y didácticas del profesorado de Matemática de toda Iberoamérica. Para lograrlo prevé la muestra de nuevos materiales y recursos a ser utilizados en el aula donde se enseña dicha asignatura. También destaca la necesidad de fomentar el uso de las TIC en los procesos de enseñanza y aprendizaje de contenidos matemáticos, proporcionando ideas para la dinamización de los centros educativos, y procurando, con apoyo de vías educativas no habituales, el acercamiento de los estudiantes hacia la asignatura (Balbuena y Carrillo, 2011).

La investigación que se reporta es de tipo documental, apoyada con un análisis de contenidos, y el objetivo fue analizar lo que observaron y opinaron los docentes participantes del curso respecto al afecto que tienen sus estudiantes en relación con la Matemática que aprenden. Los insumos emergieron de las entrevistas que los docentes respondieron durante el desarrollo del curso, a distancia y en referencia, como parte del Proyecto de Formación Permanente dirigido al profesorado de secundaria de Iberoamérica.

Desde el primer reporte publicado por Martínez Padrón (2014), en relación con lo que dicen los docentes paraguayos respecto al afecto que tienen sus estudiantes cuando aprenden Matemática, se indicó que el número de investigaciones que tocan ese tema y son presentadas en eventos sobre Educación Matemática parece crecer en progresión geométrica. Sin embargo, su impacto en el aprendizaje de la Matemática deja mucho que desear.

En ese documento primer, el autor presentó varios ejemplos tomados de las Reuniones Latinoamericanas de Matemática Educativa (RELME´S) y publicados en las Actas Latinoamericanas de Matemática Educativa (ALME´S). En ALME 25, autores como Rodríguez (2012) y Müller, Engler y Vrancken (2012) aseguraron que aún prevalece el fracaso en el aprendizaje de la Matemática, indicando que quienes estudian esta asignatura continúan desmotivados para aprenderla. Igualmente hizo mención a otros trabajos publicados ALME 26, destacando el de González de

Hernández (2013) y el de Paulino y Marmolejos (2013) quienes insisten en mencionar las continuas fallas que aún existen en el proceso de formación de los docentes que enseñan esta área del saber, acotando que el problema de bajo rendimiento en Matemática no siempre es culpa de los estudiantes. En relación con la RELME 27, celebrada en el año 2014, Martínez Padrón (2014) también mencionó trabajos tales como los de Parra (2013) y Camacho (2013), quienes aludieron, en sus resúmenes, cuestiones concretas que aún no logran impactar, de manera relevante, el mejoramiento del aprendizaje de la Matemática, destacando el fracaso en la formación de los docentes, la desmotivación y el escaso afecto hacia la Matemática.

También destacó que Veiga (2012), quien hace la introducción al capítulo sobre los trabajos publicados sobre la Enseñanza de las Matemática, en el ALME 25, reporta que abundan las propuestas que permiten detectar, prevenir y afrontar los obstáculos a los que se enfrentan los estudiantes en las clases de Matemática. No obstante, acota que aún prevalece el fracaso en el aprendizaje de la Matemática e indica la existencia de estudiantes que continúan desmotivados para aprenderla. La invitación es a que se siga revisando la actuación no sólo de quienes la aprenden sino de quienes la enseñan.

Problemáticas equivalentes siguen presentándose en otras RELME´S y en otros eventos tales como el Congreso Internacional de Educación Matemática (ICME), el Congreso Iberoamericano de Educación Matemática (CIBEM) y el Congreso Interamericano de Educación Matemática (CIAEM). Por tanto, se hace mención a algunos trabajos presentados en sus últimos eventos, para la fecha de esta publicación.

En relación con el ICME 12, Pepin y Son (2012) indican que, desde hace más de 30 años, el afecto ha sido un tema de interés en la investigación de la Educación Matemática y que en el informe correspondiente al ICME 11 se concluyó que el tema pasó de oculto a visible, en vista de que los factores correspondientes al dominio afectivo (motivación, valores, creencias, actitudes y otros) influyen, explícitamente, en el aprendizaje de la Matemática, dando cuenta de diferentes perspectivas de investigación utilizadas en los estudios, los cuales incluyen aspectos psicológicos, sociales, filosóficos y lingüísticos.

En el último CIBEM celebrado en Uruguay, los investigadores Flores, Medina, Peralta y Rodríguez González (2013) relacionaron emociones con el aprendizaje de la Matemática, haciendo hincapié en la necesidad de considerar los efectos de las emociones en la capacidad cognitiva de los estudiantes de bachillerato debido a que favorecen su éxito o fracaso al momento de aprender. No obstante, indican que es un aspecto poco atendido a pesar de que continúan las angustias que no terminan de ayudar en el aprendizaje de la Matemática.

Este tema también ha sido abordado desde el CIAEM. En el recién celebrado en México, en el año 2015, Ávila (2015) reportó una mirada de la investigación en Educación Matemática en México, mencionando que varios autores indican que la exploración de las cuestiones afectivas, vinculadas con la Matemática, es una cuestión reconocida como muy importante por los que enseñan, pero olvidada “conforme se avanza en los niveles escolares, porque la prioridad está en el “aprendizaje efectivo de las matemáticas”” (p. 9). Dicha autora asevera que cuando se habla de mejora del sistema educativo, es probable que los enfoques más comprehensivos requieran incorporar lo cultural, lo social y lo afectivo. Con estos acercamientos se prevé comprender mejor los fenómenos asociados a la clase de Matemática.

Puede corroborarse, en el texto, que aunque el tema de lo afectivo y el aprendizaje de la Matemática se viene desarrollando, con fuerza, desde hace unas cuatro décadas, aún existen muchas situaciones por aclarar y resolver sobre esta problemática. Por tanto, queda en entredicho asegurar que el tema sea parte de una tradición investigativa en vista de que, al parecer, se ha avanzado poco, a pesar de las abundantes investigaciones. Aún pueden concretarse muchas otras contribuciones que también dan a entender que el tema continúa vigente, dado que se eterniza el fracaso en Matemática, tanto de quienes no adquieren las competencias deseadas, como por los que no llegan a enseñarla de manera adecuada. Con frecuencia, se sigue alumbrando que el éxito en el aprendizaje de la Matemática está supeditado al buen manejo de la terna cognitivo-afectivo-social. Siendo las cosas así, se obliga a realizar abordajes más formales, profundos y multi-referenciales que tomen en cuenta la interacción de todos esos dominios y pongan en juego varios tipos de inteligencia tales como la racional, la afectiva/emocional y la social.

En Martínez Padrón (2008b) se indica que el éxito, o el fracaso, en Matemática y en procesos asociados a ella, están supeditados a muchos factores. Se reporta que lo afectivo tiene responsabilidades directas en el proceso de enseñanza-aprendizaje-evaluación de la Matemática, aludiendo a investigaciones que aseguran que su contribución, en el aprendizaje, es mucho mayor que la de otros factores tales como el cognitivo. En ese trabajo se dan evidencias para asegurar que existen creencias que, por ejemplo, pueden ser causantes de aversiones, casi colectivas, hacia la asignatura, hacia quien la enseña y hacia otros procesos concomitantes. Tales creencias, de talante negativo, tienen relación directa con la falta de empatía, las reacciones emocionales en contra de la Matemática y con las actitudes de rechazo que los sujetos expresan hacia dicha asignatura.

En este orden de ideas, Vila y Callejo (2004), Maaß y Schlöglmann (2009) y Martínez Padrón (2011b) también reportan el impacto que tienen las creencias y las actitudes en el aprendizaje de la Matemática, destacando este último que los estudiantes pierden el interés y el gusto por dicha asignatura al notar que sus bases no son suficientes para enfrentar los retos y superar algunos obstáculos que suelen presentarse en su trayectoria escolar, lo cual suele ocurrir cuando no le es posible utilizarla como herramienta para identificar, describir, explicar, contrastar, evaluar, conjeturar y predecir hechos y situaciones en diferentes momentos y contextos.

Otros factores también están presentes en el éxito, o en el fracaso, de los docentes y sus estudiantes, en relación con la Matemática que se enseña, se aprende o se evalúa, y en este documento se abordan algunos, marcando atención desde lo afectivo. A tal efecto, este manuscrito reporta un análisis de lo que observaron y opinaron los docentes participantes del Curso Ñanduti organizado por el CAEU, en relación con el afecto de sus estudiantes respecto al aprendizaje de la Matemática.

2. Metodología

2.1 Para el desarrollo del Curso:

Balbuena y Carrillo (2011) reportan que el Curso Ñanduti es un Proyecto de Formación Permanente dirigido al profesorado de secundaria de Iberoamérica. Se despliega desde una plataforma de formación a distancia y contempla actividades que abordan temas que se desarrollan en foros. Cada tema es presentado en dos fases: **una primera** apoyada en un documento (corto) elaborado por un ponente quien hace la exposición del tema y propone interrogantes a ser respondidas por los participantes, según pautas explícitas en cada caso. **Una segunda**, luego de cerrado el foro, sustentada en otro documento que amplía y profundiza la temática. Este último es entregado al cierre de cada tema del bloque en referencia y forma parte del centro virtual de recursos. Los organizadores advierten que, para efectos de la evaluación, cada participante tiene la obligación de responder las interrogantes de cada tema, lo cual puede hacerlo apoyado en actividades o experiencias.

2.2 Para la construcción del Material:

El primer documento (el corto), sobre el afecto en el aprendizaje de la Matemática, se derivó de una investigación documental que se materializó haciendo un análisis de contenido de lo propuesto sobre el tema por autores tales como Polya (1965), Schoenfeld (1992), McLeod (1992), Ponte (1994; 1999), Gardner (1998), Cooney (1999), Pehkonen (1999), Gómez Chacón (2000), Callejo y Vila (2003), Goleman (1996; 2006), Martínez Padrón (2005; 2008a; 2008b; 2009), Albrecht (2006), Vivas y Gallego (2008) y Maaß y Schlöglmann (2009). De aquí surgió una síntesis de los aspectos teórico-referenciales más relevantes, así como las actividades contentivas de interrogantes relacionadas con el tema.

Con las aportaciones de los docentes participantes del Curso desarrollado en Paraguay, se elaboró un segundo documento, ampliado, que profundizó los referentes mencionados en el primero. Entre otras cosas, se construyó considerando algunos episodios críticos reportados por los participantes, resaltando aquellos conectados con el afecto y el aprendizaje de la Matemática, sin descuidar los que tienen que ver con el dominio cognitivo y el social.

Por cuestiones de espacio no se presenta el documento completo y descrito en Martínez Padrón (2011b). No obstante, se muestran algunos segmentos de episodios críticos generados por las actividades utilizadas para la obtención de insumos analizados e interpretados en esta oportunidad.

2.3 Para el análisis de los contenidos

La consideración de toda la constelación de aspectos, previamente señalados, obliga al docente a tener claridad sobre qué, cómo y para qué procesar y analizar la gran cantidad de aspectos relativos a la Matemática que se enseña y se aprende, por el hecho de ser el responsable directo de los procesos de planificación, desarrollo y evaluación de los contenidos matemáticos que selecciona y moviliza en el aula de clases. En tal sentido, debe concentrar su atención, por ejemplo, en cómo se sienten los sujetos al momento de aprender Matemática, qué dicen, qué hacen, cómo lo hacen, por qué lo hacen o qué piensan, emergiendo de allí una robusta cantidad de datos útiles para describir, comprender o explicar tanto el proceso de aprendizaje como el de enseñanza o evaluación de los contenidos matemáticos. Otros elementos que pertenecen al mundo exterior e interior de los sujetos también son preponderantes al momento del análisis, sobre todo cuando interesa hablar del éxito, o del fracaso, de los estudiantes, de los docentes, de la escuela o del discurso utilizado en la clase.

A pesar de las consideraciones anteriores, no existió la pretensión de abordar todas esas interacciones; tampoco se exigió informaciones que den detalles sobre los tipos de inteligencia involucrados en los procesos ya mencionados. Sin embargo, se solicitó el reporte de algunos aspectos observados y de opiniones que tienen que ver con el papel que juega el afecto de los estudiantes en el aprendizaje de la Matemática, destacando que su tratamiento formal es relativamente reciente, según lo señalado por Schoenfeld (1992), McLeod (1992), Gómez Chacón (2000), Vila y Callejo (2004), Martínez Padrón (2008b; 2014) y Ávila (2015).

3. El Dominio Afectivo en la Educación Matemática

Abordar detalles en relación con el dominio afectivo obliga a revisar sus factores característicos. Bloom y otros (1977), McLeod (1992), Gómez Chacón (2000) y Martínez Padrón (2005) hacen mención de concepciones, ideas, sentimientos, apreciaciones, preferencias, valores, atribuciones, motivaciones, creencias, emociones y actitudes. Sin embargo, este documento centra su atención en los tres últimos, por configurar el conjunto básico de este dominio.

3.1 Las creencias

Cuando el objeto concreto es la Matemática, es común encontrar estudiantes, docentes y otros miembros de la sociedad que le atribuyen propiedades que, por ejemplo, la califican como difícil, aburrida o compleja. Tales calificaciones pueden generarse por impulsos a consecuencia de conocer, vivir o compartir experiencias, positivas o negativas, tanto dentro como fuera del aula donde se desarrolla la clase y confluyen diferentes fuentes que proporcionan elementos para la construcción, desarrollo, fortalecimiento, cambio, disminución o desaparición de creencias en relación con la escuela, con los docentes o con la Matemática y los procesos ligados a ella. En este sentido, están implícitas en lo que se enseña, se aprende o se evalúa, y en lo que es factible, útil o importante para los docentes o para los estudiantes

Según Quintana (2001), las creencias constituyen un elemento de conocimiento y no sólo responden a la razón, sino que también dimanan de otras fuentes tales como: (a) los sentimientos y los deseos: incluyen necesidades y conveniencias al momento de surgir el impulso interior de creer en algo o en alguien; (b) la sociedad y la cultura ambiental, estando mediado por la aculturación o la enculturación y (c) la propia voluntad de creer: los sujetos son influenciables pero poseen decisiones preferenciales en función de su personalidad y de su libertad.

Ponte (1999) agrega que las creencias proporcionan puntos de vista del mundo del sujeto, formando un substrato conceptual de vital importancia en sus pensamientos y en sus acciones. Callejo y Vila (2003) señalan que son conocimientos subjetivos referidos a contenidos concretos sobre los cuales versan; “están ligadas a las situaciones [y] se van construyendo y transformando a lo largo de toda la vida” (pp. 180-181) como producto de experiencias, informaciones y percepciones, desprendiéndose de allí unas prácticas que no siempre son fruto de un consenso, por lo que no requieren satisfacer criterios de verdad. En este sentido, Martínez Padrón (2008b) señala que se comportan como los axiomas en Matemática, por no requerir demostración alguna. La Figura 1 representa una síntesis de su conceptualización.

Creencias

Principios rectores que forman parte del conocimiento adquirido por los sujetos sobre la base de sus experiencias de vida. Tienen un carácter intersubjetivo y representan construcciones que, implícitamente, están presentes al momento de actuar ante el objeto o sujeto que las motivan.

Figura 1. Conceptualización de las creencias

3.2 Las emociones

En la Educación Matemática, el tema de las emociones ya ha sido mencionado desde hace algunas décadas. Polya (1965) venía advirtiendo que la solución de un problema de Matemática es cuestión de voluntad y que la determinación y las emociones juegan un papel importante en su resolución. No obstante, apenas en las últimas cuatro décadas es cuando se han venido concretando, con gran relevancia y profundidad, investigaciones que abordan el campo de las emociones y sus repercusiones en la Educación Matemática, de manera que su estudio puede pensarse como un tema relativamente nuevo, al igual que el de la inteligencia emocional y social. Por cierto, Goleman (2006) menciona que el entrelazamiento socio-emocional no ha permitido tener claro cuáles son las habilidades sociales y cuáles las emocionales, pues, ubica "la inteligencia social dentro del ámbito de lo emocional" (p. 90). En tal sentido, resulta cuesta arriba separar la causa de una emoción del mundo de las relaciones sociales.

Siendo las cosas así, es muy probable que aún queden muchas cosas por investigar al respecto, sobre todo cuando siguen preocupando temas tales como el fracaso escolar que no siempre se corresponde con el desarrollo cognitivo de los estudiantes sino con otros elementos o factores que lo generan, por ejemplo, la angustia, la tensión, el disgusto, la rabia, la inconsciencia social o la falta de empatía. Eso quiere decir que la situación trasciende la consideración de sólo factores debidos a la razón y abre espacios para la puesta en escena de otros debidos a lo social y al afecto, tal es el caso de las emociones que suelen influir y contribuir con la formación, solidificación o eliminación de creencias, actitudes y otros factores del dominio afectivo.

Aunque lo recomendable es tratar la cognitivo, lo social y lo afectivo de manera integral, la discusión en este documento se sesga hacia lo afectivo y, en particular, hacia las emociones por jugar papeles preponderantes en: (a) la facilitación o inhibición del aprendizaje de la Matemática; y (b) el éxito, o el fracaso, tanto profesional como personal de los sujetos, el cual, según Goleman (1996), tiene mayor dependencia en lo emocional que en lo cognitivo.

En primera instancia, las emociones son conceptualizadas como fenómenos afectivos acompañados de conmociones orgánicas características (Lexus, 1997). Se asocian con factores tales como alegría, tristeza, rabia, miedo, temor, placer, amor, sorpresa, ira, enojo, odio, frustración, desagrado, disgusto y vergüenza. Gómez Chacón (2000) las reporta como "respuestas organizadas más allá de la frontera de los sistemas psicológicos, incluyendo lo fisiológico, cognitivo, motivacional y el sistema experiencial. Surgen en respuesta a un suceso, interno o externo, que tiene una carga de significado para el sujeto" (p. 25). González (1997) agrega que cuando son experimentadas por el sujeto son capaces de inhibirlo o estimularlo ante el proceso que las genera. Para Calhoun y Salomón (1989) y Bloch (2007), involucran tanto procesos fisiológicos como psicológicos, siendo los primeros de talante orgánico y los segundos se corresponden con actividades mentales y, por ende, de ámbito cognoscitivo. Goleman (1996) las concreta como sentimientos asociados con, entre otros: (a) pensamientos, (b) estados psicológicos y biológicos, y (c) tendencias de actuar.

Aunque las emociones provienen de una experiencia interna, su análisis no puede agotarse en ese espacio, requiriendo considerar su expresión en la conducta (lo externo) y otras pautas distintivas observando, por ejemplo, las acciones y reacciones de los sujetos que la poseen. En su análisis, Bloch (2007) asevera que lo fisiológico, el comportamiento expresivo y la experiencia interna también deben tomarse en cuenta. Una conceptualización de dichas emociones es sintetizada en la Figura 2.

Emociones

Reacciones psico-fisiológicas que emite un sujeto en respuesta a un suceso, interno o externo, teniendo para él una carga de significado. Son de carácter momentáneo y de tipo afectivo, y suelen estar acompañadas de expresiones orgánicas características asociadas con pensamientos, motivaciones, experiencias, elementos hereditarios, cogniciones, estados psicológicos, estados biológicos y tendencias de actuar.

Figura 2. Conceptualización de las emociones

Como el estudio de las emociones no puede hacerse de manera aislada, es válido plantear algunas situaciones donde están imbricados varios factores de interés. Gómez Chacón (2000) manifiesta que las creencias derivan del significado de los actos emocionales que los estudiantes exhiben al ser enseñados o al aprender algo. Cuando, por ejemplo, aprenden Matemática reciben continuos estímulos “que le generan cierta tensión. Ante ellos reacciona emocionalmente” (p. 26). Tales reacciones están condicionadas por sus creencias acerca de sí mismo y acerca de la Matemática y pueden ser automatizadas y solidificadas en actitudes y emociones que impactan en dichas creencias y contribuyen con su formación. En este sentido, las creencias, las actitudes y las emociones constituyen factores relevantes al momento de desarrollarse asuntos que tienen que ver con el proceso de enseñanza-aprendizaje-evaluación de los contenidos matemáticos, sobre todo cuando se sabe que muchos de los éxitos, o de los fracasos escolares, no siempre dependen de las capacidades cognitivas de los sujetos sino del uso inteligente de las emociones y de otros factores socio-afectivos.

3.3 Las actitudes

Las actitudes pueden abordarse desde muchas aristas, así como son variadas las formas de analizarlas y concretar sus componentes y repercusiones, sobre todo en ámbitos educativos.

Según Gallego Badillo (2000), se pueden discriminar cuatro dimensiones características de las actitudes: (a) la cognitiva (el conocer/el saber): percepciones, ideas, opiniones, concepciones, creencias, etc.; (b) la afectiva: la emoción/el sentir; (c) la conativa o intencional, y (d) la conductual o comportamental**.** Este mismo autor hace mención de un componente axiológico, que forma parte de lo afectivo, debido a que la aceptación o el rechazo hacia un objeto o situación suele estar precedido “de una valoración personal, no sólo si se está en condiciones de realizar el comportamiento perseguido, sino también en términos de los beneficios personales y comunitarios que los resultados de la actuación revierten” (p. 29). En este sentido, se involucra el análisis de los principios que permiten considerar si algo es o no es valioso para el sujeto y el razonar sobre cuáles son los fundamentos que sustentan el juicio de valor.

Martínez Padrón (2005) reporta que las actitudes son: (a) instancias que predisponen y dirigen al sujeto sobre hechos de la realidad, filtran sus percepciones y orientan su pensamiento para adaptarlo al contexto; (b) predisposiciones de valoración emitidas por los sujetos (Clemente, 1995); (c) sentimientos positivos o negativos asociados con algún objeto psicológico que conduce a actuar y expresarse según ellos; (d) organizaciones de creencias focalizadas en un objeto o situación particular capaces de predisponer a la emisión de respuestas preferenciales (Rokeach, citado en Gómez, 1998); y (e) campos de creencias, sentimientos y estados de ánimo que trascienden el dominio de la cognición (McLeod, 1992).

Las consideraciones anteriores y las planteadas por Robbins (1994) y Gómez Chacón (2000) sirvieron de sustento para construir la Figura 3, la cual sintetiza lo que en este documento se concibe como actitudes.

Actitudes

- Reacciones valorativas o evaluativas manifiestas a través del agrado o desagrado hacia algún objeto, sujeto o situación.

Figura 3. Conceptualización de las actitudes

4. El afecto en el aprendizaje de la Matemática

Los sistemas escolares actuales suelen asumir que los estudiantes poseen diferentes niveles de desarrollo, obligando a configurarles diversidad de competencias que, sin necesidad de estar explícitamente descritas, convergen hacia la consideración de varios tipos de inteligencia por el hecho de abrir espacios donde se indica que el aprendizaje depende, al menos, de variados aspectos cognitivos, afectivos, socioculturales y contextuales. Aunque todos estos aspectos se deben procesar de manera integral, por la inter-relación que se da entre los múltiples factores que los constituyen, esta sección sólo reporta algunas especificaciones que tienen que ver con el afecto en el aprendizaje de la Matemática.

En cuanto al afecto, Gómez Chacón (2000) manifiesta que cuando un estudiante aprende Matemática está expuesto a obtener alguna experiencia que le puede provocar reacciones que influyen en la formación de sus creencias acerca de la Matemática y acerca de sí mismo en relación con dicha asignatura. Martínez Padrón (2008b) agrega que tales creencias pueden afectar sus comportamientos y sus acciones en situaciones de aprendizaje y en su capacidad de aprender Matemática. Estas, a su vez, pueden provocar reacciones emocionales que pudieran automatizarse y convertirse en actitudes que contribuyan con la formación y el mantenimiento de dichas creencias.

Lo planteado es uno de los sustentos que permiten aseverar que el aprendizaje de la Matemática está directamente relacionado con el afecto, pudiéndose establecer conexiones, relaciones o explicaciones funcionales y no funcionales entre los factores comprometidos que subyacen no sólo en quien aprende sino, también, en quien enseña o planifica, sin excluir al resto de sujetos o grupos socioculturales que pueden impactar en esos procesos: los compañeros de clase, los docentes de quienes los estudiantes recibieron clase anteriormente, los padres, la noosfera y la sociedad en general, pues, de acuerdo con Martínez Padrón (2008b), de allí se derivan representaciones personales, puntos de vista, mitos, relaciones de poder, ideologías y representaciones sociales que podrían hacer que los estudiantes terminen pensando de acuerdo con algunas directrices implícitas o explícitamente previstas en cada una de esas instancias.

La conexión entre la Matemática que se aprende y el afecto sustentado en factores tales como emociones, creencias y actitudes hacia la Matemática es eminente y, en consecuencia, cobra interés tanto en quienes aprenden o enseñan, como en el discurso y en el sistema social, económico y político donde están inmersos los protagonistas de la clase. En este sentido, se incluyen momentos de alegría, gusto, insatisfacción, frustración, rabia, disgusto, repugnancia, desapego, incertidumbre, miedo, aversión, desánimo, resistencia o preocupación. Los materiales instruccionales y otros objetos ligados esos procesos también impactan, lo cual es observable al momento de llevarse a cabo la transposición didáctica donde confluyen el afecto de quien enseña y de quien aprende, los contenidos/saberes a transponer y el contexto donde se desarrolla la clase. En consecuencia, se puede aseverar que el aprendizaje de los sujetos está comprometido o influenciado por variados aspectos didácticos, cognitivos, metacognitivos, sociales, afectivos y actuacionales.

Como el aprendizaje de los sujetos también depende del contexto, lo que piensan, hacen o dicen los actores involucrados en la clase delinean, impactan y son impactados con lo que allí acontece. Esto advierte que en toda actividad de aula es necesario que el docente modele, favorablemente, con el ejemplo, puesto que sus actuaciones afectan intelectual y emocionalmente a sus estudiantes. Además, si quien enseña no hila fino en el proceso de enseñanza-aprendizaje-evaluación de los contenidos matemáticos entonces pudiera, entre otras cosas, enseñar a aborrecer u odiar la Matemática, en vez de desarrollar factores que favorezcan su aprendizaje.

5. LO QUE DICEN Y OBSERVARON LOS QUE ENSEÑAN MATEMÁTICA EN LA EDUCACIÓN MEDIA DE PARAGUAY: ALGUNAS EXPERIENCIAS

5.1 Sobre la capacidad de aprender Matemática

El centro de discusión de este documento gira en torno al afecto hacia la Matemática; por ende, toma en cuenta la capacidad de aprenderla. A tal efecto, en el curso se desarrollaron actividades donde, por ejemplo, se solicitó a los participantes que asumieran posturas en relación con la siguiente interrogante: *¿considera que la capacidad de aprender matemática es algo innato o puede desarrollarse mediante algunas experiencias particulares?*

El grupo, de casi 200 participantes[1], reportó variadas respuestas, destacando que la capacidad de aprender Matemática puede desarrollarse mediante <<*experiencias*>> (A1-3) y <<*actividades de refuerzo…centradas en informaciones del entorno familiar*>> (A1-4), dado que son muy efectivas. También <<*depende de varios factores… y se relaciona mucho con el aspecto sociocultural de las personas*>> (A2-8). Algunos participantes dijeron que desde que empezaron a conocer los números se interesaron mucho por la Matemática, aunque nunca tuvieron apoyo externo para aprenderla. Uno dijo que aprenderla <<*depende más del interés propio de cada sujeto*>> (A3-8). Otro indicó que conoce <<*personas que se hicieron expertos*

[1] En adelante, los participantes del curso se denotarán como **AN-n**, donde **N** indica el número del aula donde dicho participante hizo el curso, y **n** el número natural asignado a cada uno de ellos, en esa aula particular.

en esta ciencia a base de mucho esfuerzo y dedicación>> (A9-3) propia. Ambos casos asumieron que quienes aprenden Matemática es por poseer una capacidad que, al igual que la inteligencia, puede desarrollarse.

Respecto a lo que dicen los participantes, se observa que en el aprendizaje de la Matemática deben considerarse múltiples factores que abarcan aspectos experienciales, afectivos, actuacionales y socioculturales. Eso abre espacios para trascender el dominio de la cognición que ha venido ennobleciéndose como preponderante al momento de enseñar y evaluar contenidos matemáticos.

5.2 Sobre el aprendizaje de la Matemática y el refuerzo de lo aprendido

Otra interrogante planteaba a los participantes, lo siguiente: *¿qué tipo de actividades suele organizar para concretar actividades de refuerzo y de aprendizaje de la Matemática?, ¿cuáles aspectos toma en cuenta al momento de elaborar estas actividades?*

Antes de analizar la respuesta a tal interrogante, conviene aclarar que el vocablo refuerzo, aquí utilizado, no está acoplado a la acepción de la psicología conductista. Se utiliza para hacer mención a las actividades utilizadas para lograr el mejoramiento del rendimiento escolar y del aprendizaje, al hacerlo más robusto. Por tanto, es para mejorar lo aprendido mediante ejercitaciones o resolución de problemas en el ambiente escolar, por lo que tiene que ver con estrategias que eliminan o disminuyen carencias en el aprendizaje de la Matemática. En este sentido, un docente destaca que utiliza <<*muchos ejercicios de razonamiento y especialmente juegos que hacen que* [los estudiantes] *se entretengan mucho y se sientan despiertos y atentos en la clase de Matemática*>> (A1-8). Este sujeto hace referencia a una motivación necesaria y a la consideración de las emociones que ayudan en el proceso, aunque menciona que es importante prestar atención a lo que hacen los estudiantes, sobre todo con <<*aquellos que no tienen afecto por la matemática*>>, indicando que, en estos casos, vale mucho decirle expresiones como las siguientes: <<*muy bien, lo estás haciendo excelente, viste que vos también podes, ¡Fuerza!… ¡resuélvelo, yo sé que tú puedes!*>>. Otro participante se acopla más a lo que indica la acepción seguida en el curso, indicando que las actividades que suele desarrollar en el aula son, generalmente, <<*la resolución de ejercicios y problemas… donde interactuamos, a veces, a través de actividades lúdicas relacionadas con el tema,… tratando de respetar las diferencias individuales*>> (A3-5).

Un nuevo docente señala que utiliza campamentos y concursos entre los distintos grados, a la luz de los intereses y necesidades de los estudiantes y tomando en cuenta el ritmo sus aprendizajes (A9-5). Otros participantes del curso utilizan <<*guías de estudios, ejercicios…*>> (A2-1) incentivándolos a la lectura de curiosidades y acertijos matemáticos. Este último declara que utiliza juegos, dado que <<*esas cosas les encantan a los alumnos*>>. Otros casos dan fe de lo favorable que puede ser el uso de los juegos en el aula de clase de Matemática, aflorando aspectos actitudinales que se favorecen con el uso de esta técnica de enseñanza. Hay quien reporta que también recurre al contexto inmediato, saliendo del <<*aula al patio para medir perímetro y área de la cancha… les encanta a los alumnos y les motiva a tener más afecto por las matemáticas*>> (A1-6). Señala que toma <<*en cuenta el interés de los alumnos por aplicar los conocimientos a situaciones reales*>>.

En los segmentos de episodios que acaban de mostrarse, y en los reportados por muchos otros participantes no mostrados en el texto, puede notarse que los docentes declaran que lo contextual y lo lúdico ocupan un espacio importante en el aula, al momento de reforzar lo aprendido, propiciar el entretenimiento mediante situaciones matemáticas divertidas, fomentar la participación colectiva y mantener la atención de los estudiantes. Al respecto mencionan, por ejemplo, lo útil de incorporar curiosidades matemáticas durante la clase que, como se sabe, pueden disparar diversión, alegría, euforia e, incluso, el elemento sorpresa requerido para trabajar lo mágico de la Matemática Recreativa. Siendo las cosas así, en la clase de Matemática queda develada la incorporación de la diversión mediante el uso de materiales lúdicos, lo cual impacta en las actitudes y la motivación. Aunque no queda despejado si la ludicidad es o fue propicia para reforzar, para evaluar o para aprender Matemática, es clara la referencia a factores que trascienden lo cognitivo, tal es el caso de lo actitudinal, quedando abierta la posibilidad de tomar en cuenta no sólo a los sujetos que piensan y sienten, como lo indica Goleman (1996), sino a los que, a su vez, se emocionan y se motivan cuando aprenden Matemática.

5.3 Sobre el afecto hacia la Matemática

Posteriormente, se hizo un análisis de lo que plantearon los docentes participantes del curso, luego que observaran a sus estudiantes en situación de resolutores de problemas de Matemática. Las respuestas fueron producto de la siguiente propuesta: *Seleccione algunos problemas de Matemática, organice a sus estudiantes en grupos y colóquelos en situación de resolutores de esos problemas. Obsérvelos, describa lo observado y marque algunos episodios críticos que reporten situaciones de gusto, molestia, placer, aversión u otro factor del dominio afectivo que permita describir, comprender o explicar lo que allí acontece en relación con el aprendizaje de los contenidos matemáticos que conforman la estructura de los problemas dados. De igual manera, solicite que describan algunas situaciones que le ocurrieron durante el proceso de resolución.*

A continuación se reportan algunos eventos observados por los docentes participantes del curso, la mayoría ya reportados en Martínez Padrón (2014):

- A1-1: Existen estudiantes que realizan la tarea en forma rápida y muestran interés en la resolución de problemas matemáticos, representando un desafío y una meta a la cual llegar, incansablemente. Otros no procuran resolverla, no solicitan ayuda y <<*se encierran en sus dudas e inquietudes*>>.
- A2-2: Hay estudiantes que se interesan por buscar la solución del problema, <<*otros demuestran preocupación y hasta desesperación por no entenderlo. También están los que no demuestran ningún interés por aprender y los que se pasan molestando a los que procuran trabajar*>>. Algunos tienen dificultades en explicar el razonamiento realizado para resolver determinados problemas, unos por desconocimiento y otros por la dificultad que tienen para utilizar los términos matemáticos. Durante el desarrollo de los problemas, algunos estudiantes <<*demostraron su satisfacción por las situaciones planteadas*>> y se esmeraron en resolverlas, <<*otros se mostraron contrariados y constantemente se quejan de que es difícil, que no les gusta pensar para resolver las situaciones planteadas y que por estas razones no les gusta la matemática*>>. Una minoría se muestra indiferente, sin mostrar aceptación o rechazo por la tarea a ser realizada.
- A1-4: De los 40 estudiantes, 8 mostraron placer y pusieron <<*su empeño en resolver los problemas presentados*>>. Aproximadamente, un 50% de los restantes,

se esforzó en <<*resolverlos para demostrar que son buenos/as alumnos/as, pero lo hacen por obligación. Los demás esperan la oportunidad para copiar de los otros compañeros del grupo, manifestando que no lo saben hacer*>>. Además, muchos estudiantes manifiestan << *total aversión por la matemática y llegan al 7° grado sin haber aprendido ni siquiera las operaciones básicas*>>.

- A1-5: En el aula hay todo tipo de reacciones, dependiendo de los gustos, capacidades y aptitudes de los estudiantes. <<*Algunos han demostrado gusto al tener que trabajar con los problemas y placer al poder resolverlos, otros siempre están muy molestos e incómodos a la hora de trabajar con esta materia y debo intentar motivarlos constantemente*>>. En estos casos, el docente declara <<*que a estos alumnos les cuesta mucho más aprender los conceptos y aplicarlos en ejercicios o problemas, ya que se nota que tienen una predisposición negativa hacia las matemáticas por diversos motivos y experiencias que debieron haber sucedido posiblemente a lo largo de su vida estudiantil*>>.
- A1-7: Cuando los estudiantes no muestran interés por las actividades desarrolladas en un período dado de la clase, entonces <<*sienten angustia, rabia y miedo*>> al momento que les corresponde resolver sus ejercicios.
- A1-9*:* Mayormente, se observa gusto en el momento de formar grupos para resolver los problemas. Igual sienten placer al llegar a los resultados correctos. Pero aparece la aversión y la molestia, en el momento de razonarlos, resistiéndose a <<*realizar un razonamiento lógico, esperan (algunos/as) que el otro compañero haga el esfuerzo, para luego copiar, ¡nada más!*>>. En estos casos, reportan un manejo deficiente de las herramientas básicas y al no poder con el problema dicen que presentan: (a) angustia de no saber por dónde empezar; y (b) temor de equivocarse en la resolución.
- A1-10: <<*Los estudiantes que gustan de las matemáticas sienten placer, gusto al trabajar y desafían a repetir la experiencia. Los... que no… se sienten molestos dicen aburrirse, preguntan ¿para qué sirve esto?. El razonamiento matemático fue efectivo en los grupos que gustan de la materia. Los otros dicen que no tienen nada contra mi persona pero que no les interesa mejorar su razonamiento matemático*>>.
- A3-6: Entre los estudiantes hubo quienes dijeron que sintieron: (a) <<*angustia de no saber hacer… Nos rompimos la cabeza,…, ¡fue muy difícil!*>>*;* (b) <<muy bien porque pudimos resolver los tres problemas. Tal vez no estén bien pero la intención es lo que vale>> aunque, según el docente, <<*No hicieron bien ningún problema*>>; (c) <<*muy mal porque los "ejercicios" estuvieron un poco difícil y no hicimos nada… hicimos mucho esfuerzo y no nos salió ninguno*>>*;* y (d) asustados <<*al ver el primer "ejercicio" porque nunca lo vimos antes, y los otros "ejercicios" tampoco los pudimos resolver porque nos olvidamos del procedimiento de resolución de este tipo de problemas*>>
- A2-4: Las reacciones de los estudiantes son diversas: <<*algunos compiten con otros compañeros y manifiestan euforia al encontrar una solución correcta… otros son más lentos y las reacciones en estos son más emocionantes, la satisfacción que sienten es más profunda porque saben que les llevó un poco más de tiempo pero que el esfuerzo tiene sus frutos*>>. Hay quienes manifiestan que: (a) <<*el razonamiento aplicado en la resolución de situaciones problemáticas… mucho depende del conocimiento, interpretación y correcta aplicación de los conceptos matemáticos*>>*;* (b) <<*con la práctica constante, se van adquiriendo mayores destrezas,…haciendo… que lo complejo sea más fácil*>>, evitando el aburrimiento y produciendo <<*satisfacciones positivas por el logro obtenido*>>

• A2-4: Cuando los estudiantes solicitan razones sobre la aplicación o uso de lo aprendido o de lo que se les enseña, suelen escucharse expresiones tales como: <<*¿Para qué estudian eso si en la vida diaria no lo van a utilizar?*>> y << *¿Para qué sirve la matemática si voy a estudiar leyes?, ¡nunca entendí la matemática!, si voy al súper no voy a pedir la cuenta en progresión aritmética*>>.

Al analizar los segmentos que preceden, puede observarse que los participantes del curso dan cuenta de variados episodios directamente ligados con el afecto hacia la Matemática, haciendo mención al gusto, la molestia, el placer, el aburrimiento, el miedo, la aversión u otros factores constituyentes del dominio afectivo. De igual manera, se encontraron elementos para indicar que cuando se enseña esta asignatura se pueden provocar emociones negativas que hacen que la mente emocional secuestre a la racional, lo cual inhibe el aprendizaje y cierra espacios para el desafío. En varias consideraciones se hace mención a lo motivacional, sin excluir lo social, lo cual indica que la problemática correspondiente al aprendizaje de la Matemática está conectada con esos aspectos, logrando marcarse situaciones que tienen que ver con el interés social, la experiencia, la satisfacción personal, la sincronía y la empatía. Eso se corresponde con lo reportado en otros países, como Venezuela y México, donde se ha investigado que la conexión entre la Matemática que se aprende y lo socio-afectivo es eminente (Martínez Padrón, 2008b; 2009; 2014; Ávila, 2015). De la última autora ya se había reportado la importancia que aún tiene la exploración de las cuestiones afectivas vinculadas con lo sociocultural.

Con esa realidad tan actual, sigue cobrando interés el estudio del fracaso de los que aprenden y, también, de los que enseñan, así como el discurso utilizado durante el desarrollo de la clase. La consideración del sistema social, económico y político donde están inmersos los protagonistas de la clase también es preponderante y, en este caso, lo socio-afectivo viene dando cuenta de las marcadas deficiencias en el aprendizaje de la Matemática, lo cual pudiera ligarse al hecho de seguir ennobleciendo a la razón de los sujetos, aunque en el aula prevalezcan factores desfavorables tales como la ira, la violencia, el desgano, la desmotivación, el aburrimiento, la depresión o la falta de empatía o de autenticidad de quiénes enseñan o aprenden Matemática.

Al cierre de esta sección, vale agregar lo que dijo uno de los participantes: <<he escuchado decir que las cosas no aburren porque son aburridas sino que nos aburren porque somos aburridos>> (A6-1). Esto pudiera acrecentarse si, además, se privilegia lo estrictamente intelectual en detrimento de la carga afectiva que pudiera servir para explicar, describir o comprender lo que acontece, con frecuencia, en las aulas de clase de Matemática.

5.4 Sobre el éxito o el fracaso en el aprendizaje de la Matemática

En otra actividad se pidió a los participantes que describieran situaciones puntuales que tienen que ver con el aprendizaje de la Matemática, a la luz del éxito o del fracaso debido a variados factores del dominio afectivo. Otro planteamiento también solicitó que asumieran posturas en cuanto a lo siguiente: *¿creen posible desterrar el fracaso en el aprendizaje de la Matemática siguiendo, solamente, lo previsto en una instrucción basada en lo racional?* Sobre esta particularidad, se reportan algunos casos.

Se destacó que una instrucción basada en lo netamente racional no sería suficiente para desterrar los problemas del aprendizaje de la Matemática, señalándose que el docente debe garantizar que sus estudiantes comprendan que dicha asignatura

<<*es una herramienta para su vida misma*>> (A1-5) y, en consecuencia, debe <<*crear ambientes adecuados para que surja el interés y el gusto por aprenderla cada día más*>> (A1-5). Igual reportan que <<*los problemas emocionales,… son muchas veces la causa del fracaso…* [y que] *el entorno juega un papel preponderante en el aprendizaje*>> (A1-2). Lo dicho impacta en la mejora del grado de aceptación hacia la asignatura, despertando el interés y el gusto ya mencionado.

De manera particular, A10-1 propone que la sociedad y los padres también tienen mucho que ver con el éxito o con el fracaso de sus representados, en relación con el aprendizaje de la Matemática, dado que lo primero que suelen analizar son las calificaciones obtenidas en dicha asignatura, en desmedro de lo que aprendió, o no, el estudiante: << *¡Si obtuvo buena calificación, el resto no importa!*>>. En caso de que evidencien fracasos por no aprobarse la asignatura o por salir mal en determinadas pruebas, la mayoría de los estudiantes compara este hecho con lo ocurrido con otros de sus semejantes. Hay casos donde dicen: << *¡a mis padres le costaba la Matemática!*>> y, en consecuencia ¡me pasará lo mismo! Según este participante, <<*la mayoría de las personas precisan que la matemática es complicada*>>, por eso es rechazada, incluso, antes de ser estudiada. Esta misma idea es sostenida por A8-6 quien indica que la falta de gusto hacia la Matemática está influenciada por los padres: <<*el prejuicio tenido por ser una disciplina difícil, el preconcepto tenido hacia los profesores del área de matemáticas, el concepto que tienen algunos que matemática es sólo para los dotados*>>.

En este orden de ideas, A9-3 señala <<*que el fracaso… no proviene de las experiencias en niveles superiores sino* [que]… *se genera en los… inferiores*>>: en la primaria sólo se aborda lo racional <<*sin respetar el proceso evolutivo, la madurez mental* [y] *emocional del niño*>>. Agrega que <<*los docentes en los niveles primarios no están capacitados en la materia*>> y coincide con A8-4, A7-3, A9-1 y Martínez Padrón (2008b) al señalar que las experiencias de aprendizaje que ellos diseñan y desarrollan, en el aula de Matemática, requieren trascender la secuencia: **concepto→ejemplo→ejercicios**. Si para complemento, los únicos recursos que se utilizan son los libros, los cuadernos y las pizarras, entonces, se mutilan otras opciones que hacen que el aprendizaje pueda ser placentero y significativo.

A10-2 estima que <<*lo concerniente al factor afectivo,… es el mayor responsable en el rendimiento del alumnado en matemática*>> y lo considera trascendental tanto en el fracaso como en el éxito en el aprendizaje de la Matemática, destacando que <<*el alumno tiene que querer lo que está haciendo*>> y gracias a ese afecto se facilita la resolución de muchas cuestiones en Matemática. En correspondencia con estos planteamientos: ¿Acaso, existen docentes de Matemática que no les gusta lo que hacen, no aman a la asignatura o no tienen las competencias necesarias para enseñarla? ¡Parece que sí! Martínez Padrón (2008b) reporta evidencias de docentes que no les gusta la Matemática, a pesar de estarse formando para enseñar contenidos matemáticos, y otras áreas del saber, en las Escuelas Primarias venezolanas.

En relación con quienes aprenden, existen docentes <<*que amenazan a sus alumnos con el aplazo y otros tipos de castigo*>> (A1-3). Eso puede ocurrir por <<*falta de seguridad del docente*>> (A1-3). Esta es otra razón por la cual muchos estudiantes sienten aversión por la Matemática y, por ende, fracasan.

Para resolver situaciones como las anteriores y evitar, disminuir o eliminar la predisposición negativa hacia la Matemática, algunos docentes utilizan <<*técnicas de* *persuasión… explicando en lo posible las aplicaciones reales de cada contenido>>* (A1-5). Igual destaca que la modelación es un aspecto de vital interés, pues, si los estudiantes <<*constantemente ven a alguien que valora y ama la materia, tal vez algún día sentirán lo mismo>>.*

En vista de que una instrucción basada en lo <<*netamente cognitivo no soluciona el fracaso de los docentes y* [sus] *estudiantes*>> (A8-8), se hace necesario que la preparación de dichos docentes abarque <<*tanto... lo cognitivo como…lo afectivo*>> (A9-1), pues, <<*es muy importante conocer a los alumnos, su realidad como persona, su familia, sus necesidades. Dedicar un tiempo a dialogar con ellos, conocer sus problemas, sus inquietudes…*>> (A8-8). Lo anterior obliga a considerar, también, lo social por tener elementos que podrían solventar situaciones de fracaso.

El fracaso, según Mora Penagos (2002), puede tener explicaciones psicológicas, sociales, económicas y culturales. Entre sus principales factores "están…los métodos de enseñanza desarrollados cotidianamente en nuestras instituciones escolares en correspondencia con la visión que se tiene sobre la Matemática escolar". Así, pudiera estar conectado tanto con las concepciones que tienen los docentes al momento de organizar y desarrollar las actividades de clase, como con el sistema de creencias intrincado en sus esquemas personales y originado de su propia experiencia.

Existen otros aspectos que pudieran ser relevantes a la hora de garantizar el aprendizaje de la Matemática. A3-3 menciona los siguientes: (a) la empatía con los estudiantes; (b) el conocer las particularidades de los estudiantes; (c) el considerar las diferencias individuales; (d) la motivación, particularmente en aquellos más rezagados; y (e) el manejo del afecto, particularmente de las actitudes y la posibilidad de revertirlas, si es el caso, a favor de la Matemática.

Es trascendente destacar que lo que tiene que ver con la actitud hacia la Matemática a veces se torna alarmante y desalentador. A2-5 señala que <<*es impresionante como el solo escuchar la palabra Matemática, produce una especie de repudio…* [y] *rechazo por parte de algunos estudiantes>>.* Este docente apunta que los principales responsables pudieran ser los mismos docentes, sobre todo aquellos de los primeros grados quienes no siempre inculcan el afecto hacia la Matemática y no tratan de hacerla agradable. También, existen docentes que se contentan con que sus estudiantes transcriban lo que éste copia en la pizarra, pidiéndoles luego un aprendizaje mecánico que no va más allá de <<*recordar la fórmula a emplear*>> (A7-3). Este docente señala que hay algo que está fallando y se hace la siguiente interrogante: <<*¿será que siempre aprendimos mecánicamente y por eso así lo enseñamos o es que no entendemos o nunca nos enseñaron a pensar o no mostraron el camino correcto de deducir, pensar, relacionar y llegar a conclusiones?*>> Lo del aprendizaje mecánico también es respaldado por A7-5 al decir que cuando se formaba <<*todo era mecánico y estructurado*>>*,* aunque reconoce que aún existen docentes que se desempeñan orientados por este tipo de concepciones.

En cuanto a la posibilidad de cambiar actitudes existen varias evidencias de que eso es posible, pues, de ese grupo de docentes de Matemática hay casos que actualmente la perciben de manera diferente a como la percibían cuando estudiantes. A7-5 indica que <<*hay buenos formadores de formadores* [de lo contrario] *hoy... no sería profesora de matemática>>.* Indica que su experiencia con esta disciplina fue terrible y placentera a la vez. <<*En toda mi etapa de estudiante de Educación Media, jamás aprendí realmente Matemática, es más, me causaba* [una] *angustia terrible*>>.

Luego, cuando estudió docencia se fue por Lengua y durante su preparación para el ingreso a la carrera, tomó un curso de Matemática con una docente que la atrapó con su manera de desarrollar el curso. Posteriormente, decidió cambiarse de Lengua para ser docente de Matemática. Tal situación le planteó un reto: << *¡enseñaría como esa profesora!*>> Aunque es lo que sigue intentando, reconoce que aún hay muchas cosan que afectan su meta: el sistema.

6. Primeras Conclusiones

De acuerdo con los datos reportados por los participantes del curso, se encontraron episodios que advierten que la problemática existente en el aprendizaje de la Matemática continúa efervescente y supeditada a múltiples factores de índole cognitivo, afectivo y social. También depende de aspectos contextuales, culturales y actuacionales, destacando que para poder mejorar dicho aprendizaje es necesario que quienes enseñan contenidos matemáticos deben poseer un conocimiento didáctico-matemático robusto y capaz de enfrentar las situaciones configuradas por ese compendio de factores. En tal sentido, es imperativo revisar las actuaciones de los protagonistas de las clases, a fin de impactar los procesos de formación de quienes enseñan, estudian, aprenden y evalúan contenidos matemáticos. También hay que incluir cambios en la formación de los formadores que enseñan Matemática, en todas las instancias educacionales, sobre todo cuando en este momento se duda de su capacidad para liderizar los cambios que se vienen planteando y gestando en las reformas curriculares de muchos países.

Lo planteado reclama abordajes urgentes, no para incrementar el cúmulo de investigaciones que pudieran hacerse al respecto sino para, definitivamente, impactar el mejoramiento del aprendizaje de los estudiantes que aún sigue reportándose como deficitario.

Respecto al afecto de los estudiantes hacia la Matemática, se puede concluir que a pesar de que la misma sigue siendo considerada como el fundamento formal de la mayoría de las disciplinas de todas las épocas, continúa reportándose como la menos popular de los planes de estudio. Las razones de su impopularidad son variadas, pero, la tendencia a alejarse de ella, de repudiarla, de considerarla complicada, aburrida o sin utilidad aparente sigue marcando acciones de rechazo signado por la presencia de actitudes adversas y por la existencia de representaciones sociales ligadas al fracaso en su aprendizaje. Quizás por eso continúan encontrándose sujetos con una marcada aversión hacia la Matemática que, sin duda, ha contribuido a desfavorecer tanto su aprendizaje como su enseñanza. Es posible que esta problemática tenga su sustento en la dificultad que muchos tienen para comprenderla, en el aún sostenido rigor que caracteriza su manera de enseñarla y en la manera de proceder de muchos docentes que suelen infundir, incluso, hasta temor para controlar la participación de los estudiantes y el orden de la clase, lo cual está íntimamente relacionado con el fracaso de los estudiantes, de sus docentes, del discurso usado en el desarrollo de las actividades escolares y de las instancias educaciones encargadas de formarlos como seres sociales competentes.

Queda presente la necesidad de insistir en el manejo eficiente del afecto hacia la Matemática. No hay que olvidarse de la empatía, de los sentimientos, de las creencias, de los valores, de la asertividad, de las relaciones sociales ni de la motivación si se quiere comprender o explicar, densamente, lo que acontece en aula donde se aprende Matemática. Si se quiere mejorar lo que allí acontece, tampoco hay que dejar de lado a las emociones por ser fundamentales en el logro de mejores aprendizajes de contenidos matemáticos: siempre han sido y serán un factor que arrostrar cuando se trata de mejorar la actuación de los resolutores de los problemas de Matemática.

Referencias bibliográficas

Albrecht, K. (2006). *Inteligencia social*, (G. Dols, Trad.). Colombia: Javier Vergara Editor (Trabajo original publicado en 2006).

Ávila, A. (2015). *La investigación en educación matemática en México: una mirada a 40 años de trabajo en el campo*, Plenaria presentada en el XIV Congreso Interamericano de Educación Matemática, Chiapas, México, 1-16; Recuperado el 28 de Octubre de 2015, de http://xiv.ciaem-redumate.org/index.php/xiv_ ciaem /xiv_ciaem/paper/viewFile/1515/740

Balbuena, L. y Carrillo, A. (2011). Ñandutí, curso on line de formación permanente de profesores de matemáticas de nivel secundario. *UNIÓN* [en línea], 28, 75-83. Recuperado el 18 de Mayo de 2012, de http://www.fisem.org/web/union/images /stories/28/archivo_10_volu men28.pdf.

Bloch, S. (2007). *Al alba de las emociones*. Chile: Uqbar Editores.

Bloom, B. y colaboradores (1977). *Taxonomía de los objetivos de la educación. La clasificación de las metas educacionales* (M. Pérez Rivas, Trad.). Buenos Aires: Editorial El Ateneo.

Calhoun, C. y Salomón, R. (1989). *¿Qué es una emoción? Lecturas clásicas de psicología filosófica*. México: Fondo de Cultura Económica, S. A.

Callejo, M. y Vila, A. (2003). Origen y formación de las creencias sobre la resolución de problemas. Estudio de un grupo de alumnos que comienzan la educación secundaria, *Boletín de la Asociación Matemática Venezolana* [en línea], 10 (2). Recuperado el 31 de Julio de 2004, de http://www.emis.de/journals /BAMV/conten /vol10/mcallejo+vila.pdf.

Camacho, R. (2013). Refletindo a formação Matemática dos profesores dos anos iniciais. Ponencia. *Resúmenes de la XXVII Reunión Latinoamericana de Matemática Educativa*, p. 83.

Clemente, J. (1995). Construcción de una escala de actitudes hacia la Matemática. *Educación y Ciencias Humanas*, 3 (4), 165-189. Caracas.

Cooney, T. (1999). *Examining what we belief about beliefs* [en línea]. Recuperado el 19 de Septiembre de 2002, de http://www.uni-duisburg.de/FB11/PROJECTS/MFO _Beliefs.html.

Flores, D, Medina, B., Peralta, D. y Rodríguez, C. (2013). Las emociones y su impacto en el aprendizaje de las Matemáticas, *Acta del VII Congreso Iberoamericano de Educación Matemática*, 2747-2755. Uruguay.

Gallego Badillo, R. (2000). *Los problemas de las competencias cognoscitivas. Una discusión necesaria.* Colombia: Universidad Pedagógica Nacional.

Gardner, H. (1998). *Inteligencias múltiples*. Barcelona: Editorial Paidós.

Goleman, D. (1996). *La inteligencia emocional*, (E. Mateo, Trad.). España: Javier Vergara Editor (Trabajo original publicado en 1995).

Goleman, D. (2006). *Inteligencia social. La nueva ciencia de las relaciones humanas.* España: Editorial Kairós.

Gómez Chacón, I. (2000). *Matemática emocional. Los afectos en el aprendizaje matemático*. España: Narcea, S.A., Ediciones.

Gómez, P. (1998). *Calculadoras gráficas y precálculo. Las actitudes de los estudiantes* [en línea]. Recuperado el 12 de Octubre de 2000, de http://ued.edu.co/servidor/ued/ libros/libroaportes.htm.

González de Hernández, N. (2013). Factores asociados a una evaluación académica en la enseñanza de Matemática: herramienta estratégica para incrementar la calidad de la enseñanza y el aprendizaje. En R. Flores (Ed), *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa* 26, 897-904, México: Comité Latinoamericano de Matemática Educativa.

González, F. E. (1997). *Procesos cognitivos y metacognitivos que activan los estudiantes universitarios venezolanos cuando resuelven problemas matemáticos*. Tesis de doctorado no publicada, Universidad de Carabobo, Valencia.

Lexus (1997). *Enciclopedia de pedagogía y psicología*. España: Ediciones Trébol.

Maaß, J. y Schlöglmann, W. (2009). *Beliefs and attitudes in Mathematics Education*. New Research Results, Sense Publishers Totterdam / Taipei.

Martínez Padrón, O. (2005). Dominio afectivo en Educación Matemática. *Paradigma*, XXIV (2), 7-34.

Martínez Padrón, O. (2008a). Actitudes hacia la Matemática. *Sapiens*. 9 (2), 237-256.

Martínez Padrón, O. (2008b). *Creencias y concepciones en encuentros edumáticos*. Tesis doctoral no publicada. Universidad Pedagógica Experimental Libertador, Instituto Pedagógico de Caracas, Caracas, Venezuela.

Martínez Padrón, O. (2009). *Sistemas de creencias hacia la mate*mática observados en docentes, en servicio, que se forman en educación integral. Ponencia presentada en el V CIBEM, Puerto Montt, Chile.

Martínez Padrón, O. (2011a, Noviembre). *¿Enseñamos a enseñar Matemática?* Ponencia presentada en la VIII Jornada de Enseñanza de la Matemática en la Educación Básica de la UPEL-El Mácaro, Turmero, Venezuela.

Martínez Padrón, O. (2011b). *El afecto en el aprendizaje de la Matemática*. Documento del Curso Iberoamericano de Formación Permanente de Profesores de Matemática, Centro de Altos Estudios Universitario. Organización de Estados Iberoamericanos.

Martínez Padrón, O. (2014). El afecto en el aprendizaje de la Matemática: una mirada desde los docentes paraguayos. En P. Leston (Ed), *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa*, 27, 1953-1962. México: Comité Latinoamericano de Matemática Educativa

McLeod, D. (1992). Research on affect in mathematics education: A reconceptualisation. In D. A. Grouws (Ed.), *Handbook of research on mathematics teaching and learning*, pp. 575-596. New York: Macmillan Publishing Company.

Mora Penagos, W. (2002). *Modelos de enseñanza-aprendizaje y desarrollo profesional: elementos para la cualificación docente* [en línea]. Recuperado el 4 de Agosto de 2002, de http:/atenea.udistrital.edu.co/grupos/redevac/htlm/r_biblio.htm.

Müller, D., Engler, A. y Vrancken, S. (2012). Propuesta de actividades sobre funciones en un entorno virtual de aprendizaje. Análisis de su implementación. En R. Flores (Ed), *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa* 25, 471-480, México: Comité Latinoamericano de Matemática Educativa.

Parra, H. (2013). Condiciones mínimas necesarias que debe considerar el docente para la contextualización de los contenidos matemáticos. Ponencia. *Resúmenes de la XXVII Reunión Latinoamericana de Matemática Educativa*, p. 110.

Paulino, E. y Marmolejos, J. (2013). Importancia del aprendizaje de la acción del despeje y la sustitución numérica en la interpretación y solución de situaciones problemáticas. En R. Flores (Ed), *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa* 26, 421-428, México: Comité Latinoamericano de Matemática Educativa

Pehkonen, E. (1999, Noviembre). Beliefs as obstacles for implementing an educational change in problem. *Conference at Mathematisches Forschun gsinstitut Oberwolfach: Mathematical Beliefs and their Impact on Teaching and Learning of Mathematics* [en línea]. Recuperado el 16 de febrero de 2003, de http://www.uni-duisburg.de/FB11/PROJECTS/MFO_abstracts.pdf.

Pepin, B. y Son, J. (2012). Motivation, beliefs, and attitudes towards Mathematics and its teaching. En S. J. Cho (Ed), *Proceeding of the 12th International Congress on Mathematical Education,* 523-527.

Polya, G. (1965). *Cómo plantear y resolver problemas* (J. Zagazagoitía, Trad.). México: Editorial Trillas.

Ponte, J. (1994). *Knowledge, beliefs, and conceptions in mathematics teaching and learning* [en línea]. Recuperado el 25 de Septiembre de 2002, de http://www.educ.fc.pt/docentes/ jponte/ind_uk.htm.

Ponte, J. (1999). Teachers´ beliefs and conceptions as a fundamental topic on teacher education. En K. Krainer y F. Goffree (Eds.), *On research in teacher education: From a study of teaching practices to issues in teacher education* [en línea], 43-50, Recuperado el 7 de Septiembre de 2002, de http:www.educ.fc.pt/docentes/ jponte/ind_uk.htm.

Quintana, J. (2001). *Las creencias y la educación*. Pedagogía Cosmovisional. España: Empresa Editorial Herder, S. A.

Robbins, S. (1994). *Comportamiento organizacional. Conceptos, controversias y aplicaciones.* (S. P. Mascaro, Trad.). México: Editorial Prentice Hall Hispanoamericana S. A. (Trabajo original publicado en 1993).

Rodríguez, C. (2012). Compendio alternativo para el estudio independiente. Matemática Superior I y Matemática Superior II. Carrera de contabilidad y finanzas. En R. Flores (Ed), *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa*. 25, 443-450, México: Comité Latinoamericano de Matemática Educativa

Schoenfeld, A. (1992). Learning to think mathematically: Problem solving, metacognition an sense-making in mathematics. En D. Grows (Ed). *Handbook for research on mathematics teaching and learning.* New York: McMillan; pp. 334-370.

Veiga, D. (2012). Introducción al capítulo de propuestas para la enseñanza de las Matemáticas. En R. Flores (Ed), *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa.* 25, 386-387. México: Comité Latinoamericano de Matemática Educativa.

Vila, A. y Callejo, M. (2004). *Matemáticas para aprender a pensar. El papel de las creencias en la resolución de problemas*. España: Narcea, S. A. de Ediciones.

Vivas, M. y Gallego, D. (2008). *La inteligencia emocional: ¿Por qué y cómo desarrollarla?* Venezuela: Universidad de los Andes, Consejo de Desarrollo Científico, Humanístico y Tecnológico.

Oswaldo Jesús Martínez Padrón: Profesor de Matemática, Magíster en Educación Superior: Matemática, Doctor en Educación. Profesor Titular de la Universidad Pedagógica Experimental Libertador (Venezuela). Coordinador del Centro de Investigación para la Participación Crítica (CIPaC) y Miembro del Núcleo de Investigación en Educación Matemática (NIEM) de la UPEL. Contacto: ommadail@gmail.com

UNIÓN
REVISTA IBEROAMERICANA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA
www.fisem.org/web/union
http://asenmacformacion.com/ojs/index.php/union/index

ISSN: 1815-0640
Número 45. Marzo 2016
Página 44-60

Estrategia para ampliar la visión de las matemáticas y suscitar el interés por la investigación

Jaqueline Cruz-Huertas

Fecha de recepción: 05/03/2013
Fecha de aceptación: 04/02/2016

Resumen	Se presentan los resultados de una estrategia aplicada de manera consecutiva desde el año 2006, a estudiantes de primer semestre de Administración de Empresas Comerciales de la Universidad Colegio Mayor de Cundinamarca, Bogotá - Colombia, en el marco del proyecto interdisciplinar: *Matemáticas y comunicación, una forma de promover la investigación formativa en el aula*. La estrategia, es un trabajo interdisciplinar que consiste en la elaboración de un ensayo como producto final. Con ello, se pretende ampliar o cambiar las visiones que los estudiantes traen sobre la importancia de las matemáticas en el desarrollo humano y científico. Así mismo, busca promover una actitud positiva hacia el aprendizaje de esta ciencia a partir de la lectura de material especializado y, propone mejorar habilidades de lectura y escritura para fortalecer los procesos de investigación formativa. **Palabras clave**: Matemática, Comunicación, Interdisciplinar
Abstract	It present the results of a strategy applied consecutively since 2006, to first semester students of Business Administration of the University Business College of Cundinamarca, Bogota - Colombia, as part of the interdisciplinary project: *Mathematics and communication, a how to promote research training in the classroom*. The strategy, is an interdisciplinary work consisting in the development of a test as a final product. With this, we intend to expand or change the views that students bring to the importance of mathematics in human and scientific development. It also seeks to promote a positive attitude towards learning this science from specialized reading materials and aims to improve reading and writing skills to strengthen the processes of formative research. **Keywords**: Mathematics, Communication, Interdisciplinary.
Resumo	Neste artigo são apresentados os resultados de uma estratégia aplicada consecutivamente desde 2006, a alunos do primeiro semestre de Administração de Empresas da Faculdade de Negócios da Universidade de Cundinamarca, Bogotá - Colômbia, como parte de um projeto interdisciplinar: Matemática e comunicação, uma forma de promover a formação em pesquisa na

sala de aula. Trata-se de um trabalho interdisciplinar que consiste em um ensaio, como um produto final. Tem-se a intenção de expandir ou mudar opiniões dos alunos sobre a importancia da Matemática para o desenvolvimento humano e científico. Pretende-se, também, promover uma atitude positiva em relação à aprendizagem dessa ciência a partir da leitura de materiais especializados buscando contribuir com o desenvolvimento de habilidades de leitura e escrita com vistas a fortalecer os processos de investigação.
Palavras-chave: Matemática, Comunicação, Interdisciplinar.

1. INTRODUCCIÓN

Las matemáticas han jugado un papel crucial en el desarrollo científico y tecnológico lo que ha sido bien reconocido por las distintas culturas a lo largo de la historia. De ahí, su inserción en los planes de estudio de casi todas profesiones que permanentemente se nutren de ella para resolver diversos problemas. Sin embargo, son múltiples las dificultades que se encuentran durante el proceso de enseñanza y aprendizaje de esta ciencia.

En consecuencia, son notorios los escasos conocimientos matemáticos de los estudiantes que inician pregrado, unidos a la falta de motivaciones y conciencia sobre la importancia que esta disciplina tiene para el desarrollo humano y científico. Esto constituye un verdadero obstáculo para avanzar con éxito en la profesión. Igualmente, la falta de integración entre las disciplinas, hace que se diluyan los esfuerzos tanto de docentes y estudiantes durante el proceso de formación.

Es así como mediante este documento, se describe una experiencia pedagógica interdisciplinar que se ha realizado de manera consecutiva desde el año 2006 en la que participan los componentes de Matemáticas, Taller de Comunicación Oral y escrita e Informática. Desde entonces, se ha venido realizando con todos los estudiantes de primer semestre del programa de Administración de Empresas Comerciales de la Universidad Colegio Mayor de Cundinamarca.

La Universidad Colegio Mayor de Cundinamarca, es un establecimiento público de orden nacional, ubicada en la ciudad de Bogotá, Colombia. El programa de Administración de Empresas Comerciales, jornada nocturna, se creó desde el año 1996. En el plan de estudios, el área cuantitativa está compuesta por 8 asignaturas con un total de 25 créditos que representan el 16% del total de créditos del programa que consta de 156.

La estrategia tiene como objetivo central, ampliar la visión que los estudiantes traen sobre la importancia de las matemáticas mediante la lectura crítica y reflexiva de material especializado de modo que mediante la elaboración de un ensayo como producto final, les permita adquirir una actitud más positiva hacia el aprendizaje de esta ciencia y, de manera simultánea, logren mejorar habilidades de lectura y escritura propiciando el fortalecimiento de los procesos de investigación formativa.

En el primer semestre se inicia el estudio de matemáticas como primera asignatura del Área Cuantitativa. Esta, debe sentar las bases necesarias para abordar con éxito, en los siguientes semestres, las demás materias que integran este campo de formación, así como todas aquellas que involucren aplicaciones matemáticas.

A la fecha, más de dos mil estudiantes han participado de esta experiencia pedagógica. Los instrumentos que han servido para el proceso de observación y análisis de la experiencia son: evaluación y análisis de resultados de la evaluación diagnóstica en matemáticas, procesos de lectura y escritura, elaboración de ensayos por los estudiantes, procesos de evaluación y co- evaluación de los ensayos mediante criterios específicos planteados en una matriz y los resultados de una encuesta que se realiza a todos los estudiantes, para evidenciar el impacto del proyecto a la luz de los objetivos propuestos y las variables objeto de estudio.

2. DESCRIPCIÓN DEL PROBLEMA

Dentro de los objetivos de la asignatura de matemáticas, se pretende que el estudiante asuma una actitud positiva hacia las matemáticas, y tenga un pensamiento observador, analítico, lógico y crítico que le facilite en un contexto específico, comprensión, asociación, comparación, clasificación y transformación de situaciones problema mediante el uso del lenguaje matemático, favoreciendo el trabajo en equipo, la práctica de la tolerancia y el liderazgo.

Al finalizar esta asignatura el estudiante debe estar en capacidad de analizar, aplicar e interpretar conceptos matemáticos que le permitan resolver problemas específicos de su área, así como comprender diferentes modelos matemáticos aplicables a la Administración.

La edad de los estudiantes oscila entre los 20 y 26 años. Los grupos son heterogéneos; algunos llevan más de 4 años sin estudiar o recientemente no han tenido estudios relacionados con el área de matemáticas. Otros, sólo cuentan con los escasos recuerdos de lo que vieron en el colegio. En ciertos casos algunos estudiantes habían iniciado otra carrera pero la abandonaron por diversos motivos, como situaciones económicas, laborales, familiares, porque no era lo que buscaban o la exigencia en conocimientos matemáticos era muy alta y ellos no contaban con los niveles requeridos.

Desde hace varios años, se ha observado, cómo el esfuerzo e interés de los jóvenes por el estudio de las matemáticas ha disminuido notablemente. Razón por la que es frecuente encontrar estudiantes que ingresan a la universidad con un gran déficit de conocimientos en este campo, como se puede inferir de los resultados de la prueba diagnóstica que se realiza a los estudiantes que inician primer semestre. Los datos han mostrado tendencias muy similares en todos los semestres. Como ejemplo se presenta en la siguiente tabla 1, los resultados de la prueba realizada en el segundo semestre del año 2012.

FACULTAD: Administración y Economía									**PERIODO: II - 2012**				
PROGRAMA ACADÉMICO: Administración de Empresas Comerciales													
RESULTADOS	**TOTAL APLIC.**		**Excelente 4,6-5,0**		**Bueno 4,0 – 4,5**		**Aceptable 3,0 – 3,9**		**Insuficiente 2,0 -2,9**		**Deficiente 0,0-1,9**	
	No.	**%**	**No.**	**%**	**No.**	**%**	**No.**	**%**	**No.**	**%**	**No.**	**%**
GRUPO A	34	100	0	0	1	3	2	6	12	35	19	56
GRUPO B	35	100	0	0	0	0	2	6	10	13	23	66
GRUPO C	34	100	0	0	0	0	2	6	10	29	22	65
TOTAL	103	**100**	**0**	**0**	**1**	**1**	**6**	**6**	**32**	**31**	**64**	**62**

Tabla 1. ***Resultados prueba diagnóstica de matemáticas***

En la tabla, se puede ver que el 62% de los estudiantes se encuentran en un rango de *deficiente* y el 31 % en un rango de *insuficiente* y solamente el 7% de los estudiantes logra apenas superar la prueba. Cabe señalar, que la prueba pregunta conocimientos básicos de operaciones matemáticas y algunos problemas sencillos de aplicación.

Por lo anterior, varios estudiantes debían repetir hasta dos veces la asignatura, otros se sentían incapaces de continuar, a tal punto que decidían abandonar sus estudios. Al analizar las posibles causas que contribuían a generar tal desinterés y, por consiguiente, los escasos conocimiento de los estudiantes en matemáticas, se encuentra que éstas son muy diversas y complejas. Saltan a la vista las que tienen que ver con la mirada de la matemática como una ciencia muy complicada, que requiere esfuerzo, disciplina y gran dedicación.

Otras causas radican en la distracción casi generalizada de los estudiantes a causa del inadecuado uso de las nuevas tecnologías, la poca exigencia y ayuda de los padres en el proceso educativo de los hijos. Se podría mencionar además, la pereza, apatía y el facilismo que se observa día a día en las nuevas generaciones, como producto de la poca exigencia en la calidad de la educación secundaria. La alusión a esta última causa, tiene que ver en alguna medida, con el cumplimiento del Decreto 0230 que durante ocho años le significó al país un gran retroceso en materia educativa debido a su laxitud extrema, propiciando graves consecuencias para el país.

El decreto 0230, expedido el 11 de febrero de 2002 por el Ministerio de Educación Nacional, contenía las normas en materia de currículo, evaluación y promoción de los educandos y evaluación institucional. Estipulaba que hasta un máximo del 5% del total de estudiantes de una institución educativa, podían reprobar el año y los estudiantes tenían la posibilidad de presentar actividades de recuperación durante todo el año lectivo y durante todo el año siguiente, si no alcanzaban los logros previstos en un área determinada. De esta forma, muchos estudiantes terminaban pasando el año, más por cansancio de los docentes, quienes debían evaluar infinidad de veces, que por mérito propio.

Pero además, existen otras causas, no menos importantes como son: la falta de metodologías y didácticas adecuadas en los procesos de enseñanza, en especial, aquellas que favorezcan la relación permanente entre la *teoría* y la *práctica*; la insuficiente formación en las facultades de educación en el diseño de buenas estrategias pedagógicas y el uso adecuado de las nuevas tecnologías para propiciar aprendizajes más significativos. Igualmente, los escasos recursos físicos y tecnológicos en las instituciones y el gran número de estudiantes por maestro que en ocasiones supera cualquier intento humano, entre otras.

En lo que respecta al estudio de las matemáticas, éste por lo general se ha visto como un tema de difícil comprensión y de terror, incluso creado por algunos maestros quienes además de no contar con los mecanismos didácticos, tampoco supieron entender el verdadero *valor formativo* de las matemáticas y su importancia como elemento de cultura. Algunos maestros y padres de familia se quedaron con la visión sobre si el estudiante es “bueno” o es “malo” para las matemáticas, dando la idea que las habilidades en este campo son solo genéticas, por consiguiente ¡poco o nada se puede hacer!

Todo esto llevó a crear y reforzar la imagen de una ciencia muy difícil, pero además innecesaria, casi inútil, ¿Esto para qué me sirve? ¿Para qué me desgasto tanto en su aprendizaje si lo que voy a estudiar no tiene que ver con números?, pensamiento avalado incluso por algunos profesionales de otros campos del conocimiento y por la misma sociedad.

De acuerdo con lo anterior, se requiere que maestros, padres, estudiantes y en general la sociedad, puedan reflexionar sobre cuál es la verdadera *importancia* de las matemáticas. Esto con el fin de rescatar y fomentar tanto su *valor formativo* como la *importancia* que tiene en el avance de la ciencia, la tecnología y en general para el desarrollo de cualquier nación.

Por lo anterior, esta experiencia se centra en el estudio de una causa que poco es mencionada por el común de la gente, pero que ya había sido advertida por varios investigadores desde hace varios años como Goleman (1996); McLeod (1992); Gómez-Chacón (2000) y Gil, Blanco y Guerrero (2005), entre otros. Estos autores coinciden en expresar que en la educación matemática, los afectos, creencias, actitudes y emociones, son determinantes en la calidad del aprendizaje. Por tanto, la dimensión afectiva del individuo y *la visión* que los estudiantes tienen de las matemáticas, así como *la importancia* que éstos le proporcionan en sus vidas y en su desarrollo profesional, están ligados a estos factores.

Al llevar la situación descrita a la Universidad Colegio Mayor de Cundinamarca, se observa que los estudiantes que ingresan a primer semestre de Administración de Empresas Comerciales, no son ajenos a las problemáticas referidas. Desde la experiencia docente, se ha podido observar desde el año 2004, las graves deficiencias operatorias y los enormes vacíos conceptuales que la mayoría de los estudiantes presentan en el campo matemático. Muchos estudiantes no imaginan que esta carrera les va a exigir los conocimientos necesarios en esta área, por lo que muchos, desde el comienzo del semestre se van quedando rezagados y con pocas posibilidades de avanzar.

Se percibe además, que la mayoría de los estudiantes no tiene claro por qué son *importantes* las matemáticas para su profesión, expresan que en el colegio no le habían puesto atención a esta materia. Así que solamente al iniciar la carrera se vienen a percatar de sus escasos conocimientos.

Por otra parte, desde la asignatura de Taller de Comunicación, se detecta en los estudiantes pocos conocimientos gramaticales, dificultad para abordar y comprender textos y escribir textos académicos. En la mayoría de los casos, los estudiantes solamente se han acercado a textos narrativos. Además, la mayoría desconoce la importancia de la lectura y la escritura en la universidad y en su vida laboral. En consecuencia, estas dificultades también influyen en el bajo rendimiento académico de otras asignaturas.

De acuerdo con la problemática descrita anteriormente, se planteó la pregunta ¿Cómo diseñar una estrategia pedagógica interdisciplinar, que permita *ampliar* o *cambiar* la *visión* que los estudiantes tienen sobre las matemáticas, y de manera simultánea, mejorar las prácticas de lectura y escritura para suscitar el interés por la investigación?

Como objetivo general se propuso: Ampliar la visión que los estudiantes de primer semestre traen sobre las matemáticas, suscitando interés por la investigación mediante el ensayo como una estrategia interdisciplinaria.

Como objetivos específicos se planteó:

1) Promover una actitud positiva hacia el aprendizaje de las matemáticas mediante la lectura de material especializado.
2) Suscitar interés por la investigación mediante la producción de ensayos y documentos de carácter académico.
3) Fortalecer las competencias comunicativas mediante las prácticas de lectura crítica y escritura reflexiva.

3. REFERENTES TEÓRICOS

Según Leonardo da Vinci, "*el deseo de aprender es natural en los hombres buenos*" (Gelb, 2006, p. 53). En efecto, todos llegamos al mundo llenos de *curiosidad* y desde pequeños, todos nuestros sentidos están enfocados hacia la exploración del mundo y el aprendizaje. Por tanto, la *curiosidad* se convierte en la mayor motivación que surge desde el interior, como ese gran *deseo* de *aprender* o *hacer* algo, animando al individuo a iniciar procesos de investigación.

Cuando el *deseo,* producto de la *curiosidad,* emerge casi de forma natural, impulsa a las personas a hacer los más grandes esfuerzos y sacrificios para lograr las metas propuestas. Pero no es fácil que un *deseo* simplemente aparezca de la nada, como por arte de magia, sino que por lo general éste surge como producto de la interacción con el entorno y la cultura.

Por otro lado, las *visiones* que tienen los maestros frente a *qué son las matemáticas* y *cuál es su importancia en el desarrollo humano y científico,* entre otras, marcan de manera notable la pauta de los métodos empleados para su enseñanza; pero también cabe señalar que algunas investigaciones como las realizadas por (Hidalgo, S., Maroto, A., Palacios, A., 2005) y (Gil, N., Blanco, L., Guerrero, E.,2005) indican que las actitudes, las emociones y las creencias que los estudiantes tienen sobre las matemáticas, influyen tanto en el bajo rendimiento como en el éxito de su aprendizaje.

En cuanto a las *visiones* que los estudiantes tienen sobre las matemáticas, se puede señalar que están correlacionadas, con las emociones, creencias y actitudes, entre otras variables, que cada individuo ha tejido o conformado según las experiencias y vivencias a lo largo de la vida y que están relacionadas con la enseñanza y aprendizaje de esta asignatura. En efecto, "el estudiante en la tarea de aprender, recibe continuos estímulos asociados con las matemáticas (problemas, actuaciones del profesor, mensajes sociales, etc.) que le generan cierta tensión" (Mandler, 1989, citado por Hidalgo, Maroto y Palacios, 2005, p. 91).

Con respecto a la pregunta ¿Qué son las matemáticas?, cabe señalar que su respuesta ha cambiado en el transcurso de la historia. De hecho, para los griegos, 500 años a. C. y hasta el 300 d. C., las matemáticas consistían en el estudio de los *números* y la *forma,* destacado este enfoque con la publicación de *Los Elementos* de Euclides. Posteriormente, hasta mediados del siglo XVII, con el descubrimiento del cálculo con Newton y Leibniz, las matemáticas se convirtieron en el estudio del *número*, la *forma*, el *movimiento*, el *cambio* y el *espacio* (Devlin, 2002, p.10). Esta nueva concepción de las matemáticas, despertó un gran avance e interés por las ciencias físicas y en general por la investigación matemática, convirtiéndola en una actividad próspera y de amplitud mundial. Infortunadamente, esta visión aún es ignorada por muchas personas que desconocen su gran importancia.

Cabe señalar que hacia 1900, las matemáticas constaban solo de unos doce temas distintos entre aritmética, geometría y cálculo. Hoy en día, superan las setenta categorías. Algunas temáticas como el álgebra y la topología se han dividido en varios campos. Otros temas como la teoría de la complejidad y los sistemas dinámicos, se han constituido en nuevas y diversas áreas de estudio.

Dado todo este crecimiento de la actividad matemática, hoy en día, los matemáticos se sienten más cómodos al expresar que las matemáticas son "*la ciencia que estudia las estructuras"* puesto que finalmente lo que ellos hacen, es examinar y crear estructuras: numéricas, algebraicas, geométricas, topológicas, aleatorias, etc. Tales estructuras, pueden ser reales o imaginarias, visuales o mentales, estáticas o dinámicas, cualitativas o cuantitativas, puramente utilitarias o de algo más que un interés recreativo (Devlin, 2002, p. 13).

En cuanto a la las *visiones* sobre la importancia de las matemáticas y siguiendo el pensamiento de Puig (2001), para algunos profesores la más importante misión y tal vez la única que se les asigna, es el *desarrollo del pensamiento lógico*, el cual está relacionado con el *arte de razonar bien*. En consecuencia, la didáctica estará orientada hacia la comprensión de leyes y teoremas, así como la habilidad para usarlos correctamente en otros razonamientos que siguen reglas similares, sin importar mucho el origen de éstos.

Para otros profesores, las matemáticas constituyen ante todo, la ciencia que permite solucionar problemas. Entonces la didáctica que sigue esta visión consiste en solucionar gran cantidad de problemas. Así, muchas veces el docente se dedica a la solución de ejercicios rutinarios, extraídos en su mayoría de libros de texto, que por lo general son realidades inventadas, caducadas o manipuladas y alejadas de la vida cotidiana, como claramente lo expresa Alsina (2007). En consecuencia, tales actividades poco o nada ayudarán a mostrar a la matemática como una ciencia útil para la interpretación y modelización de la realidad. Por supuesto, no es que esto sea totalmente perjudicial, pues nadie duda de la importancia de desarrollar tales habilidades. Pero cuando este pragmatismo cuantitativo se convierte en el único fin, sin preocuparse por analizar siquiera cuáles serían las facultades que el estudiante debe poner en juego en la solución de un problema, ni mucho menos, si esas facultades le van a servir para desarrollarse en su vida futura como ser social, entonces, la importancia de las matemáticas queda reducida al simple utilitarismo o la ciencia ficción.

Desafortunadamente las pruebas estandarizadas que se han implementado en el sistema educativo, como mecanismo de control, han impulsado de manera categórica esta concepción pragmática y por tanto, las técnicas didácticas que le favorecen. En consecuencia, lo que finalmente importa para la mayoría de instituciones educativas es el éxito en los resultados y, por ello, se inculca entre otras motivaciones, el espíritu de competencia y el individualismo.

Otros maestros, quizá con una mayor sensibilidad, consideran que es necesario desarrollar otras facultades adicionales a las ya mencionadas. Para esto, es necesario abordar algunos principios que a lo largo de la historia han caracterizado a esta ciencia. Por ejemplo, de acuerdo con el pensamiento de Pascal una buena educación matemática debería contribuir a cultivar en primer lugar lo que él denominaba el *"esprit de finesse"*[1] concepto tan profundo que no cuenta con una traducción muy exacta, pero que hace referencia a *la finura de espíritu* (Puig, 2001, p. 4).

Se podría decir que una persona ha logrado cultivar *la finura de espíritu*, cuando es capaz de comprender bien unos cuantos principios «poco comunes» y derivar consecuencias, o ser capaz de derivar consecuencias de una gran diversidad de principios. Según Pierre Duhem, los que tienen "*esprit de finesse"* son los espíritus amplios e imaginativos, aquellos que son capaces de abarcar una gran multiplicidad de hechos colocándolos dentro de una perspectiva, y extremadamente dotados para "ver claramente gran número de nociones concretas, y comprender a la vez el conjunto y los detalles" (Ferrater, J. 1979, p.1021).

1 Pascal precisa su pensamiento al respecto: Hay, pues, dos clases de espíritus: uno, que penetra viva y profundamente las consecuencias de los principios, y eso es el espíritu de justeza (justesse); otro, que comprende gran número de principios sin confundirlos, y ése el espíritu de geometría. La diferencia viene a ser ahora la de la fuerza y penetración, por un lado, y la amplitud, por el otro (Ferrater, J. 1979, p.1022).

Por otro lado, con el avance de la ciencia y la tecnología, desde hace varios años, se tiene la posibilidad de utilizar herramientas de software para el estudio de los objetos matemáticos, permitiendo establecer un diálogo amplio entre la visualización y los procedimientos algebraicos que se realizan con lápiz y papel. En este mismo sentido, Villa-Ochoa (2009), expresa que cuando los docentes promueven la enseñanza a partir de situaciones del *mundo real*, hace que se disminuya la brecha que ha existido entre *matemáticas y realidad*. Pero además, es importante apuntar que cuando tales situaciones se logran modelar o simular mediante el uso de herramientas computacionales, conlleva a que tanto maestros como estudiantes puedan explorar los objetos a través de la visualización, la observación y la experimentación, logrando no solo reconocer patrones y comprobar leyes, sino realizar nuevas conjeturas, ya sea relacionadas con el comportamiento de los objetos matemáticos, o sobre el potencial del software como herramienta constructiva.

La aplicación de variadas estrategias de enseñanza y aprendizaje como las descritas anteriormente, hacen posible reducir la brecha entre *realidad* y *matemáticas* que por muchos años desafortunadamente, esta relación para la mayoría de los estudiantes, ha sido muy distante.

4. DESCRIPCIÓN DE LA EXPERIENCIA

Como se mencionó, es difícil para una persona avanzar en algo que no represente suficiente *importancia* y *curiosidad*, pues en concordancia con esta, se ejercerán los esfuerzos necesarios para sortear dificultades.

En consecuencia, desde la experiencia docente y con el ánimo de cambiar o ampliar las visiones que los estudiantes tienen sobre las matemáticas y conjuntamente fortalecer los procesos de investigación, se decidió proponerles la realización de un ensayo sobre ***"la importancia de las matemáticas en el desarrollo humano y científico",*** el cual deben ir elaborando desde el comienzo del semestre para entregarlo a finales de este.

Para la elaboración del ensayo se ha seleccionado un buen número de libros y artículos académicos, entrevistas a matemáticos famosos y videos, que se han dispuesto en la plataforma MOODLE. Además los estudiantes tienen plena libertad de consultar otros libros o fuentes que deseen.

Es así como, desde el comienzo del semestre, los estudiantes reciben las orientaciones necesarias para el desarrollo del ensayo. Además se les da a conocer mediante una matriz los criterios de evaluación que se tendrán en cuenta para su valoración. Esta estrategia, se ha venido trabajando de manera integrada con la asignatura de Taller de Comunicación y Taller de Informática.

Desde el taller de comunicación oral y escrita se realizan diversas actividades encaminadas a fortalecer en los estudiantes procesos relacionados con la estructura de los textos académicos, competencias textuales, la lectura crítica y reflexiva, el uso y manejo de las normas APA como elementos esenciales para la producción de textos críticos. De igual manera, el ensayo se evalúa como parte final del proceso de esta asignatura.

En el Taller de Informática los docentes que imparten esta asignatura, refuerzan las técnicas para la elaboración de trabajos escritos de forma que puedan aplicar a los documentos una estructura apropiada, utilizando las herramientas que proporcionan procesadores de texto como Word y otras herramientas como Google Docs.

Por otra parte, cabe señalar que algunos estudiantes son integrantes activos del ***Semillero Pigmalión*** de la universidad y han participado del curso *"leer para investigar"*, por lo que paralelamente han empezado a interesarse de una manera más consciente por la investigación y desde allí, refuerzan procesos de consulta, lectura y escritura.

Durante las clases de matemáticas, se hace énfasis sobre la importancia que tiene cada una de las temáticas en el campo profesional de los estudiantes. Por otro lado, ellos deben realizar un taller muy práctico denominado *Elaborando cajas y construyendo funciones*[2] . Este plantea una situación real, en la que los estudiantes a partir rectángulos con dimensiones dadas, deben construir varias cajas sin tapa. Con los registros de medición de las cajas organizados mediante una tabla, deben analizar el comportamiento de las distintas variables involucradas en el problema y encontrar los modelos matemáticos y verificarlos.

Para apoyar el desarrollo del taller, se diseñó el recurso virtual denominado "*modelación y simulación interactiva de funciones",* colocado en la dirección www.funciomaticas.com*.* En esta web, se presentan diversos conceptos teóricos sobre el tema, la modelación de las familias de funciones y el modelo de una caja sin tapa en segunda y tercera dimensión, como la que se propone en el taller, de manera que los estudiantes pueden variar las dimensiones de la altura, el largo y el ancho de la caja y analizar las variables implicadas en el modelo. Además, se simulan todas las *funciones matemáticas* que surgen a partir de las variaciones de las diferentes dimensiones relacionadas en el modelo.

A manera de ejemplo, en la figura 1, se muestra el diseño de una de las pantallas de uno de los módulos que compone el recurso virtual mencionado.

[2] Para conocer más sobre este taller, puede visitar la página www.funciomaticas.com

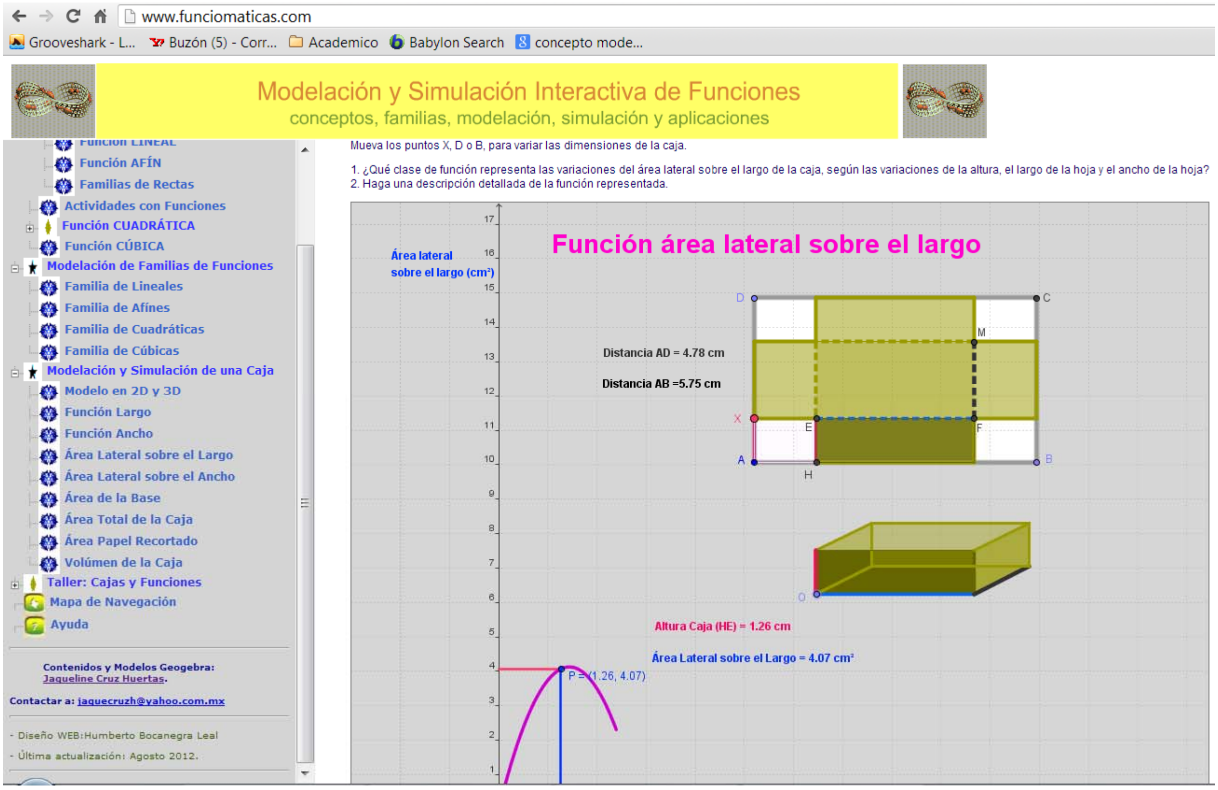


Figura 1. Diseño de una de las pantallas. Autor: Jaqueline Cruz.

Con las estrategias metodológicas aplicadas, se pretende que los estudiantes adviertan por sí mismos, la relación que existe entre el *mundo real* y *las matemáticas*. De tal forma, que vean cómo a través de los modelos matemáticos se puede analizar diversas situaciones y fenómenos de la vida cotidiana.

Una vez que los estudiantes entregan el ensayo, en una de las clases de matemáticas, se les da la oportunidad que lean por parejas, dos de los ensayos de otro grupo. Deben realizar un proceso de co-evaluación apoyados en la matriz de evaluación (ver tabla 2) que se elaboró para este fin. En este espacio, también se aprovecha la oportunidad para indagar con los estudiantes, mediante diversas preguntas, sobre las dificultades y los aspectos positivos de la actividad.

MATRIZ DE EVALUACIÓN PARA EL ENSAYO DE MATEMÁTICAS
Ensayo de: ____

Criterios	Puntos Guía	Valoración					
		0	1	2	3	4	5
1. Documentación previa.	¿Refleja que el autor se ha documentado sobre el tema objeto del ensayo? ¿Tiene referencias bibliográficas sin que ello implique una sobrecarga de éstas?						
2. Relación con el tema.	¿Está claramente centrado en el tema propuesto y aborda plenamente sus aspectos esenciales?						
3. Analiza hechos relevantes, aportando	¿Contrasta sus puntos de vista con los de otros autores?						

juicios de valor e interpretación subjetiva del autor.	¿El punto de vista y los aportes del autor son novedosos?						
4. Concisión.	¿Tiene estructura: organización de ideas, coherencia y cohesión? ¿Se ajusta a la extensión señalada?						
5. Reflexión.	¿Refleja que el autor ha reflexionado sobre el tema? ¿Se cuestiona? ¿Hace preguntas?						
6. Componente Estético.	¿Es agradable o ameno para el lector? ¿Guarda equilibrio entre amenidad y rigurosidad?						
7. Conclusiones.	¿Presenta conclusiones y aportes del autor sobre el tema? (párrafo de cierre).						

TOTAL PUNTOS

Revisado por: ________________________________

Tabla 2. Matriz de evaluación para el ensayo. Autor: Jaqueline Cruz.

Finalmente, mediante las herramientas que provee Google Drive, se aplica un instrumento de evaluación mediante una encuesta de 19 preguntas, con la que se pretende recoger información para conocer varios tópicos relacionados con los objetivos del proyecto y de esta forma, evaluar los diferentes aspectos de la estrategia aplicada, desde una perspectiva más amplia.

5. RESULTADOS

En la siguiente tabla, se presentan las preguntas y las repuestas expresadas en porcentaje, que dieron 68 estudiantes durante el primer semestre del año 2012.

Preguntas	***Opciones***	***Respuestas (%)***
1. ¿Me han gustado siempre las matemáticas?	*Si* *No*	*46* ***54***
2. Me considero para las matemáticas	*Muy bueno* *Bueno* *Regular* *Malo*	*1* *35* ***59*** *4*
3. ¿Es la primera vez que leo sobre temas relacionados con la educación matemática?	*Si* *No*	***84*** *16*
4. ¿Es la primera vez que escribo sobre la importancia de las matemáticas?	*Si* *No*	***87*** *13*
5. El tema sugerido para la realización del ensayo me pareció	*Muy importante* *Importante* *Poco importante*	***72*** *26* *1*
6. Entre los aportes más importantes que obtuve con la realización del ensayo fueron. *(puede seleccionar varias opciones)*	*Una visión más amplia sobre la importancia de las matemáticas.* *Comprendí mejor el valor de las matemáticas.* *Entendí mejor las causas sobre las dificultades para su aprendizaje*	***55*** *40* *50*
7. La realización del ensayo, me permitió un acercamiento más afectuoso hacia las matemáticas en:	*Alto grado* *Mediano grado* *Bajo grado* *Ningún grado*	***49*** *47* *3* *1*

8. *Con la realización del ensayo logré cambiar algunos mitos que tenía como: Las matemáticas (puede seleccionar varias opciones)*	*Son para inteligentes* *No son lo mío* *No sirven para nada* *Son difíciles* *Son para locos*	***46*** *26* *24* *40* *10*
9. *Después de realizar el ensayo, mi interés por el aprendizaje de las matemáticas:*	*Aumentó* *Quedó igual* *Disminuyó*	***87*** *13* *0*
10. *En relación con mi actitud frente al aprendizaje de las matemáticas, considero que el ensayo me permitió obtener*	*Una actitud más positiva* *Una actitud menos positiva* *No hubo cambios en mi actitud*	***92*** *1* *7*
11. *Mi grado de motivación durante la realización del ensayo fue:*	*Alto* *Medio* *bajo*	***67*** *32* *1*
12. *¿Me agradaría participar en el futuro en alguna investigación relacionada con las matemáticas y la administración?*	*Si* *No*	***90*** *10*
13. *Las estrategias didácticas, tanto presenciales como virtuales, empleadas por la profesora de matemáticas, favorecen la formación de un pensamiento analítico e investigativo en:*	*Alto grado* *Mediano grado* *Bajo grado* *Ningún grado*	***74*** *22* *1* *0*
14. *Los aportes más importantes relacionados con los procesos de lectura que logré al realizar el ensayo fueron: (puede seleccionar varias opciones)*	*Ser más reflexivo* *Ser más crítico* *Ser más analítico* *Abordar lecturas de diversas fuentes y disciplinas*	*49* *40* ***56*** *26*
15. *El trabajo realizado me permitió reconocer y aplicar la estructura del ensayo en:*	*Alto grado* *Mediano grado* *Bajo grado* *Ningún grado*	***56*** *41* *3* *0*
16. *Los aportes más importantes relacionados con los procesos de escritura que logré al realizar el ensayo fueron: (puede seleccionar varias opciones)*	*Mejorar la redacción* *Mejorar la ortografía* *Aplicar correctamente las normas APA* *Mejorar la argumentación* *Aplicar correctamente conectores* *Tener más respeto por el pensamiento de otros autores*	*66* *32* *28* ***71*** *31* *29*
17. *La realización del ensayo me permitió consolidar e integrar saberes relacionados con las matemáticas y la lecto - escritura en:*	*Alto grado* *Mediano grado* *Bajo grado* *Ningún grado*	***65*** *34* *1* *0*
18. *Las estrategias didácticas, tanto presenciales como virtuales, empleadas por la profesora de taller de comunicación oral y escrita, contribuyen a fortalecer procesos de investigación en:*	*Alto grado* *Mediano grado* *Bajo grado* *Ningún grado*	***76*** *22* *0* *1*
19. *Proyectos interdisciplinares como este, permiten desde los primeros semestres, adquirir herramientas para de investigación en:*	*Alto grado* *Mediano grado* *Bajo grado* *Ningún grado*	***96*** *4* *0* *0*

Tabla 3. Encuesta y respuestas, primer semestre de 2012.

Como se puede inferir de los resultados de la encuesta, la experiencia ha permitido reforzar procesos de lectura y escritura, en un área poco trabajada anteriormente por los estudiantes, como lo es el campo de las matemáticas. Además de reforzar los procesos de investigación formativa en el área, se han podido ampliar y, en algunos casos cambiar paradigmas y visiones que los estudiantes traen sobre las matemáticas al inicio de su carrera, permitiéndoles asumir una actitud más positiva hacia su aprendizaje.

Varios estudiantes expresan que el hecho de haber leído diversos artículos, libros, ver videos sobre el tema, y haber tenido que realizar el proceso de escritura, les permitió acercarse de una manera *más afectiva y positiva* a las matemáticas. Además, les ayudó a ser más conscientes de la importancia que esta ciencia tiene no solo para su carrera, sino como un elemento de cultura vital para el desarrollo humano y los procesos investigativos.

En cada semestre, se hace una preselección de los mejores ensayos para ser presentados a la dirección del Semillero Pigmalión de la Universidad. Esto con el fin que desde allí o desde otras instancias, se continúe con el acompañamiento para mejorar procesos de redacción y escritura para luego ser publicados en algunos medios de comunicación e información de la universidad.

Esta experiencia se ha socializado en varios eventos como: II encuentro de investigación en Administración de Empresas. “La administración y los retos del cambio”. Universidad Cooperativa de Colombia. Octubre 20 de 2011, X encuentro regional de semilleros de investigación. REDCOLSI – nodo Bogotá Cundinamarca “La lectura: una puerta a la investigación” Universidad Central. Mayo 10 de 2012 y IV encuentro de semilleros de investigación: “Acercamiento a perspectivas actuales de la Administración y Economía” -RESFAE. Unipanamericana. Sept 19 de 2012.

6. CONCLUSIONES

Aunque actividades como esta de escribir, leer y corregir pueden resultar dispendiosas tanto para el estudiante como para el docente, sin duda alguna, vale la pena su realización ya que como se puede inferir de los resultados, se ha logrado un impacto muy positivo en los estudiantes.

Se ha observado que cuando se proponen aplicaciones partiendo de entornos reales, y además, se amplían estos contextos con herramientas de modelación, simulación e interacción, las estructuras cognitivas del estudiante se desarrollan mejor, propiciando aprendizajes significativos. Esto porque le permite trabajar de forma simultánea, procesos conceptuales, procesos analíticos y sociales. De esta manera, los estudiantes pueden tener mayor facilidad para transferir los conceptos aprendidos a otros contextos. En efecto, la realización de talleres prácticos relacionados con las temáticas trabajadas, es lo que finalmente muestra si un estudiante es capaz de utilizar sus conocimientos en la solución de problemas en contexto. En otras palabras, si verdaderamente ha desarrollado su competencia matemática.

Las anteriores apreciaciones, han sido estudiadas y analizadas por la autora de este artículo, en un proceso de investigación mucho más amplio cuyos resultados han sido publicados por la Editorial Académica Española en el libro "*Matemáticas y realidad. Una conexión posible con GeoGebra*"

Es importante señalar, que mediante la elaboración del ensayo, es posible propiciar cambios significativos y ampliar o cambiar visiones y paradigmas que traen los estudiantes sobre las matemáticas al inicio de su carrera, favoreciendo una actitud más positiva hacia el estudio de esta ciencia, disminuyendo en gran medida los índices de pérdida y deserción en el programa.

Finalmente, es posible aunar esfuerzos desde diferentes asignaturas y recibir apoyo de los Semilleros de Investigación de las universidades, para avanzar desde los primeros semestres, en el desarrollo de habilidades investigativas, procesos tan necesarios para afianzar la investigación en el país.

Referencias Bibliográficas

Alsina C. (2007). *Si enrique VIII tuvo 6 esposas, ¿cuántas tuvo enrique IV? El realismo en educación matemática y sus implicaciones docentes*. Revista Iberoamericana de Educación. , nº 43, pp. 85-101.

Devlin, K. (2002). *El lenguaje de las matemáticas*. Traducción de Pedro Crespo. Barcelona, MA NON Tropo.

Gelb, M. J. (2006). *Inteligencia Genial. Siete principios claves para desarrollar la inteligencia, inspirados en la vida y obra de Leonardo da Vinci*. Traducción de Margarita Valencia. Grupo Editorial Norma, p. 53.

Ferrater, J. (1979). *Diccionario de filosofía*, tomo segundo. Madrid, Alianza, p. 1021-1022.

Gil, N., Blanco, L.J., Guerrero, E. (2005). *El dominio afectivo en el aprendizaje de las matemáticas. Una revisión de sus descriptores básicos*. *Revista Iberoamericana de Educación Matemática*. UNIÓN, junio, No. 2 p 15-32.

Gómez-Chacón, I.M. (1997). *Procesos de aprendizaje en matemáticas con poblaciones de fracaso escolar en contextos de exclusión social. Las influencias afectivas en el conocimiento matemático*. Tesis Doctoral. Universidad Complutense. Inédita.

Goleman, D. (1996). *Inteligencia emocional.* Barcelona: Kairós

Hidalgo, S., Maroto, A., Palacios, A. (2005). *El perfil emocional matemático como predictor de rechazo escolar: relación con las destrezas y conocimientos desde una perspectiva evolutiva*. Educación Matemática, agosto/vol. 17, número 002. México. Santillana, p. 89-116.

McLeod, D.B. (1992). *Research on affect in mathematics education: A reconceptualization.* Extraído el 30 de septiembre de 2012 desde http://www.peterliljedahl.com/wp-content/uploads/Affect-McLeod.pdf.

Ministerio de Educación Nacional. (2002). Decreto 0230 de Febrero 11 de 2002. Extraído el 30 de septiembre de 2012 desde http://menweb.mineducacion.gov.co/normas/concordadas/jeronimo/ley%20115%20OK/hipervinculos%20115/Decreto_0230_2002.pdf

Núñez, J.C. y González, J. (2002). *Las actitudes hacia las matemáticas: Una perspectiva evolutiva*. Trabajo de investigación financiado por el Ministerio de Ciencia y Tecnología. Universidad de Oviedo. España.

Puig, A. P. (2001, 10 de enero). "*El Valor formativo de las matemáticas en la segunda enseñanza*". Extraído el 21 de Mayo de 2012 desde http://www.google.com/#sclient=psy&hl=es&biw=718&bih=511&source=hp&q=El+valor+formativo+de+las+matematicas&aq=f&aqi=&aql=&oq=&pbx=1&bav=on.2,or.r_gc.r_pw.&fp=44a92051a5c66869 .

Villa-Ochoa J. A., Bustamante C. A., Berrio Arboleda M. D. Osorio J.A. y Ocampo Bedoya D. (2009). *Sentido de realidad y modelación matemática: el caso de Alberto.* ALEXANDRIA Revista de Educação em Ciência e Tecnologia, vol. 2, nº 2, pp. 159-180.

Autor: Licenciada en Matemáticas, Universidad Distrital; Especialista en Computación para la Docencia, Universidad Antonio Nariño; Especialista en Educación, Universidad Complutense de Madrid; Especialista en Edumática, Universidad Autónoma; Magister en Informática Aplica a la Educación, Universidad Cooperativa de Colombia. Docente Universidad Colegio mayor de Cundinamarca. Permio Compartir Gran Maestra 2000. E mail: jcruzh@unicolmayor.edu.co; jaquecruzh@gmail.com; Página personal: www.funciomaticas.com

Dirección: Calle 23 No 68 -59 interior 40.
Cuidad: Bogotá
País: Colombia
Correo personal: jaquecruzh@gmail.com
Teléfono: (571) 80 30 799
Celular: 300 222 59 15

Publicaciones

- **Libro: Matemáticas y realidad-Una conexión posible con GeoGebra**. Editorial Académica Española, ISBN-13: 978-3-659-08309-9. OmniScriptum GmbH & Co. KG. Heinrich-Böcking-Str. 6-8. 66121, Saarbrücken, Germany. Mayo 18 de 2015.
- **Artículo: Ambiente enriquecido con TIC para el aprendizaje de funciones.** Revista Agenda de Calidad. Universidad Colegio Mayor de Cundinamarca. Noviembre -2014

- **Artículo Original tipo 1, clasificación Colciencias:** ***Funciones en Contexto. Una experiencia enriquecida en la modelación y simulación interactiva.*** Revista indexada Sistemas y Telemática. Universidad ICESI. ISSN 1692-5238. Vol 11. No. 26. Septiembre 2013, pág. 59 -80.
- **Artículo:** ***Análisis didáctico de la guía de aprendizaje. Variación de triángulos isósceles de igual perímetro***. Revista indexada Internacional Magisterio. Editor: Cooperativa Editorial Magisterio. ISSN 1692-4053. No. 60, pág. 89 -92. Enero - 2013.
- **Artículo "*Al rescate del valor formativo de las matemáticas*".** Pensamiento Universitario. Revista No. 32. Universidad Colegio Mayor de Cundinamarca. ISSN 0121- 7348. Año 2012. Pág. 8-14.
- **Libro: NUESTROS MEJORES MAESTROS – *Experiencias Educativas Ejemplares 2000.*** ISBN 958-33-9994-7. Co-autora - Editor: COMPARTIR. Bogotá, D.C. Colombia. Oct. 2006
- **Artículo:** ***Cabri Geómetre: Todo un micromundo que crece con los estudiantes*.** Palabra Maestra. ISSN 1657-3102. Vol. 12, pág. 4 - 5. Marzo, 2006.
- **Artículo*: Durmiendo con el Fantasma de las matemáticas*.** Educación y Cultura. Editor FECODE. *ISSN*: 0120-7164. Vol. 54, pág. 32 a 36. Septiembre, 2000.
- **Artículo: "*Exploración acerca de la incidencia de las matemáticas en la formación de estudiantes*".** Revista indexada EMA**,** Investigación e Innovación en educación matemática. ISSN 0122-5057. Volumen 4. No. 1. Noviembre 1998, pág. 46 - 58. Una empresa Docente, Universidad de los Andes. Bogotá. Colombia.
- **Página WEB:** www.funciomaticas.com**.**
  Contiene un amplio estudio de las funciones lineales, afines, cuadráticas y cúbicas con talleres y actividades interactivas que favorecen la comprensión significativa de los conceptos.

REVISTA IBEROAMERICANA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA
www.fisem.org/web/union
http://asenmacformacion.com/ojs/index.php/union/index

ISSN: 1815-0640
Número 45. Marzo 2016
Página 61-75

Habilidades en lecto-escritura matemática en estudiantes del área ciencias de la salud. Prueba de sondeo.

Rafael Antonio Vargas Vargas

Fecha de recepción: 22/10/2012
Fecha de aceptación: 10/06/2014

Resumen

Este trabajo presenta los resultados de una prueba de sondeo realizada a dos grupos diferentes de estudiantes del curso de farmacología, del área de la salud. Aquí se intenta evaluar las habilidades y debilidades en matemática básicas. A pesar de la importancia de las matemáticas en el área de la salud se observan deficiencias en la manipulación de la información matemática, que probablemente está relacionado con deficiencias tempranas en la formación. Con este trabajo se llama la atención sobre el impacto de la educación matemática temprana en la vida de estudiantes avanzados y en su éxito profesional.
Palabras clave: Cerebro, notación matemática, ciencias de la salud.

Abstract

This paper presents the results of a survey conducted in two different groups of students of pharmacology course. The survey explores skills on reading and writing of mathematical data. Despite the importance of mathematics in the health field, it observed deficiencies in the manipulation of mathematical data that is probably related to deficiencies in early mathematical training. This is intended to draw attention to the impact of early mathematics education in the life of advanced students and their professional success.
Keywords: Brain, mathematical notation, health sciences

Resumo

Este artigo apresenta os resultados de um teste em dois grupos diferentes de alunos do curso de farmacología, área da saúde. É avaliado os pontos fortes e fracos em matemática básica. Apesar da importância da matemática na área da saúde, são observados deficiencias na manipulação de informações matemáticas, o que provavelmente está relacionado com deficiências da formação inicial. A intenção é chamar a atenção para o impacto da educação matemática no início da vida de estudantes avançados e seu sucesso profissional.
Palavras-chave: Cérebro, notação matemática, ciências da saúde

1. Introducción

El uso de las matemáticas es fundamental para nuestro desempeño cotidiano, casi todas las actividades humanas están permeadas por las matemáticas; desde que nos levantamos y vemos la hora en el reloj y planeamos nuestro día, hasta cuando programamos el despertador y nos acostamos. Según la actividad que realicemos las matemáticas son más o menos importantes y en algunos situaciones pueden convertirse en elementos vitales que determinan la vida o la muerte de un individuo (Rodríguez, Milagros, 2011). Este es el caso del papel de las matemáticas en el área de la salud en donde la información numérica es clave, pues es la base de procedimientos cotidianos tan simples como la medición de signos vitales (frecuencia cardiaca, presión arterial, temperatura, frecuencia respiratoria), el cálculo en la administración de medicamentos, la programación de su administración, los datos de exámenes de laboratorio, hasta trabajos y procedimientos mucho más complejos que incluyen el análisis de información en diversos tipos de estudios clínicos y epidemiológicos (Olmedo, Victor & Ariza, Raúl, 2012). A pesar de la importancia de las matemáticas con frecuencia los programas académicos no incluyen preparación específica en este tema, pues muchos de los conceptos de matemática aplicada están incorporados en las diversas asignaturas: biofísica, bioquímica, fisiología, farmacología, áreas clínicas, etc. Se asume que el estudiante de pregrado ingresa con un bagaje adecuado en términos de lectura, escritura y conocimiento matemático, y no se tiene en cuenta la probable desigualdad en los niveles de formación entre los estudiantes, debido a diferencias biológicas, sociales, culturales y económicas entre otras (Hutton, 1998a). Pasar por alto este tipo de diferencias puede impactar negativamente tanto el desempeño académico del estudiante universitario del área de ciencias de la salud, como el desempeño laboral del futuro profesional, lo cual en últimas y tal vez esto sea lo más importante, puede impactar negativamente la calidad en la atención de los pacientes que serán atendidos por estos futuros profesionales.

2. Problema

En la práctica clínica los errores de los profesionales de la salud son frecuentes y con frecuencia la mortalidad por esta razón, es más alta que la mortalidad por otro tipo de eventos como los accidentes de tránsito. Muchos de estos errores no son reportados, ni registrados en las historias clínicas de los pacientes, o si son registrados nunca son identificados como causa de muerte dada la gran cantidad de información que a diario se anota en una sola historia clínica. Gran parte de estos errores están relacionados con problemas en lectura e interpretación de datos, muchos de ellos datos matemáticos, que incluyen cifras y unidades de medida, cuya lectura incorrecta trae como consecuencia que la ejecución de las órdenes médicas o de enfermería se realice en forma incorrecta. La falla en los cálculos ocasiona que con relativa frecuencia al paciente se le aplican cantidades insuficientes de medicamentos, con lo que se falla en la terapia, o se administran dosis excesivas de fármacos que pueden causar toxicidad. Tales errores se incrementan en ambientes de alto flujo de pacientes, con alta sobrecarga laboral, como sucede en áreas de urgencias, salas de cirugía, salas de partos, unidades de reanimación y unidades de cuidados intensivos, entre otras, que asociado al estrés del personal, llevan a que el tiempo de lectura y ejecución de las órdenes registradas en la historia clínica sea corto, lo que incrementa la probabilidad de errores. Muchos de estos errores también están relacionados con la deficiente formación en matemáticas del personal, área que en muchas ocasiones es vista con desdén en carreras del área de la salud, en donde se considera que no debe estar incluida en los programas de formación profesional, pues se asume que la formación matemática no es una prioridad y que es más necesaria en las áreas de ingeniería (Baccelli, Sandra, Anchorena, Sergio, Moler, Emilce, & Aznar, María

Andrea, 2013). El resultado de todo esto es que el nivel en formación matemática de muchos egresados del área de la salud sea débil y con bastantes vacios, lo que puede incidir negativamente en el desempeño de sus funciones (Wright, 2010). Para explorar las habilidades o debilidades de lecto-escritura matemática en estudiantes de la salud realizamos con frecuencia un sondeo al inicio del semestre del módulo de farmacología para estudiantes de Ciencias Naturales y Enfermería. Esto con el fin de identificar deficiencias y hacer notar, en los mismos estudiantes, la importancia de la lectura y la notación matemática en el estudio de la farmacología en particular.

3. Objetivos

El objetivo del presente trabajo es realizar un sondeo acerca de las habilidades de lecto-escritura matemática de estudiantes del área de la salud. En la prueba se incluye tanto la representación alfabética, como la simbólica de datos y procedimientos matemáticos.

4. Metodología

Se diseño una prueba con el fin de explorar como los individuos se desempeñan con tareas de procesamiento de la información matemática. La prueba contiene 14 preguntas dividida en dos sesiones: en la primera se pide que se escriban cifras o se realicen procedimientos empleando el lenguaje alfabético (frases o texto) con lo que se pretende evaluar principalmente la actividad del hemisferio izquierdo, el cual es responsable del lenguaje verbal y escrito (figura 1A). En la segunda sesión se piden que a partir de textos se escriban cifras o procedimientos empleando lenguaje simbólico matemático (números, símbolos) con lo que se intenta explorar principalmente la actividad del hemisferio derecho (figura 1B). El tiempo para desarrollar la prueba fue de 10 minutos y no se permitió el empleo de calculadora. La prueba se aplicó en dos grupos de estudiantes: un grupo que ingresa al curso de farmacología por primera vez (nuevos; n=63) y un grupo que tiene conocimientos de farmacología básica (avanzados; n=30). La respuesta a cada pregunta se calificó como acierto (1) o error (0). Como acierto se consideró aquellas respuestas que estaban de acuerdo a la orden y error como aquellas que carecían de respuesta, con respuestas falsas o que sin ser falsas iban en contra de la orden, es decir que por ejemplo la orden indicaba escribir en letras y escribían en números (o viceversa), aunque la información fuera correcta, la respuesta se consideró como error.

A

Escriba en letras las siguientes expresiones numéricas:

Ejemplo: 82 ochenta y dos______________________

69754 _______________________________

0,52 _______________________________

3/8 _______________________________

Ln 32 _______________________________

12^2 _______________________________

Realice las siguientes operaciones (resultado en letras):

6 - 2,45 _______________________________

Que número sumado al 16 da 85? _______________________________

B

Escriba en números las siguientes expresiones numéricas:

Ejemplo: ochenta y dos 82_____________________________

Tres mil cuatrocientos dos _______________________________

Cuarenta y tres milésimas _______________________________

Raíz cuadrada de cien _______________________________

Dos enteros un tercio _______________________________

Tres menor que ocho _______________________________

Realice las siguientes operaciones (resultado en números):

8 - 2,45 _______________________________

A cuanto equivalen noventa y seis mg en gms? _______________________________

Figura 1. Prueba para evaluar función de los hemisferios cerebrales. A - Datos para evaluar hemisferio izquierdo. B – Datos para explorar la actividad del hemisferio derecho. Cada bloque de datos se presentó en hojas independientes.

Para evaluar si se presentó dominancia de un hemisferio sobre otro se realizó una resta simple entre el total de la prueba para hemisferio izquierdo menos el total de la prueba para hemisferio derecho (figura 8). Un resultado positivo (1 a 7) se interpretó como dominancia del hemisferio cerebral izquierdo (HI) y un valor negativo (-7 a -1) se interpretó como dominancia del hemisferio cerebral derecho (HD).

Dominancia cerebral = HI – HD > 0 Dominancia hemisferio cerebral izquierdo

< 0 Dominancia hemisferio cerebral derecho

Hemisferio izquierdo	Pregunta	Nuevos	Avanzados

(verbal alfabético)			
	1	97%	86%
	2	1,6%	3%
	3	83%	66%
	4	30%	10%
	5	81%	59%
	6	35%	24%
	7	52%	41%
Hemisferio derecho (simbólico numérico)			
	1	95%	79%
	2	7,9%	17%
	3	71%	69%
	4	60%	55%
	5	68%	45%
	6	52%	38%
	7	29%	14%

Tabla 1. Resultado sondeo habilidades matemáticas. La tabla expresa el porcentaje de aciertos en cada grupo para cada pregunta.

5. Resultados

El desempeño de ambos grupos fue similar Tabla 1. Los errores más frecuentes se presentaron con la información que incluye números decimales, preguntas 2 del bloque A y pregunta e del bloque B (figura 1). Está información fue presentada como números o letras, pero los errores fueron más frecuentes especialmente cuando los valores se expresan en letras (figuras 2 y 3). Aparentemente el concepto de numero decimal no es claro, lo cual es difícil de explicar pues es un concepto que en la vida cotidiana se emplea en forma corriente cuando empleamos el dinero, por ejemplo. Los intentos por expresar un número decimal fueron muy variados y discordantes (ver figuras 2 y 3).

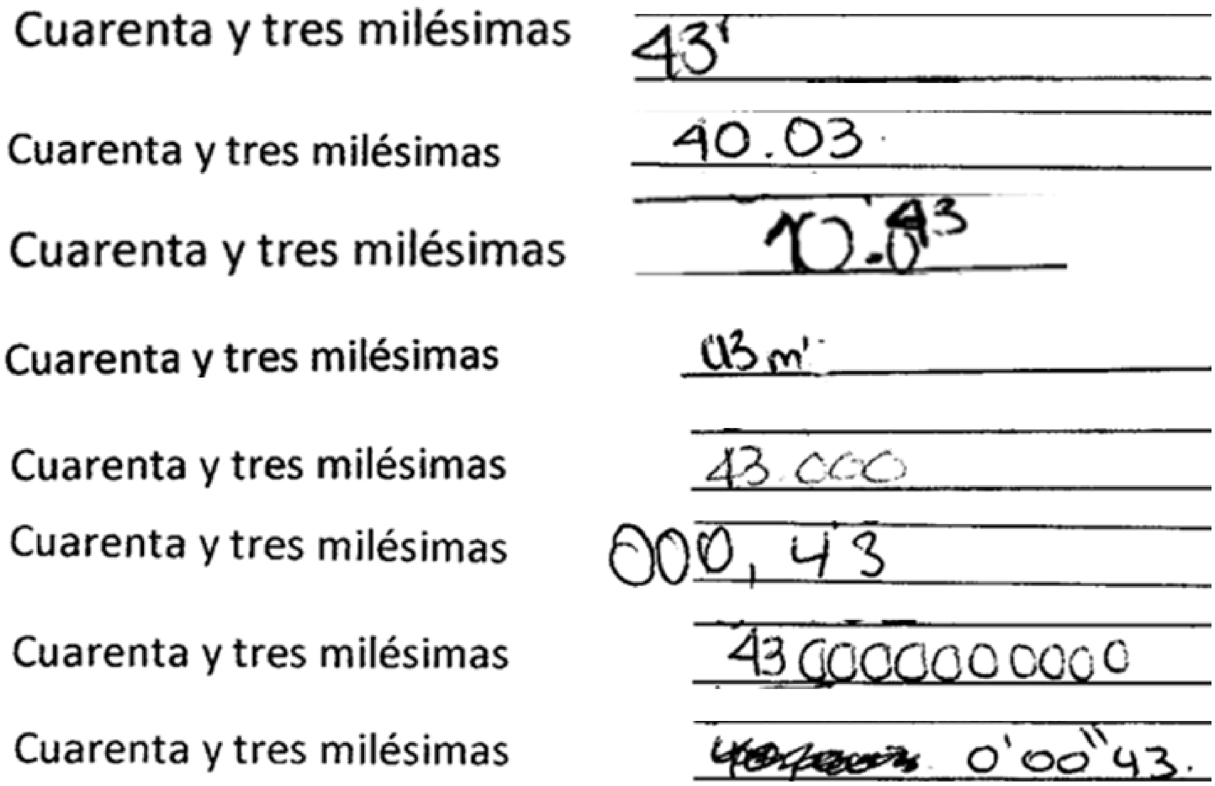


Figura 2. Expresión numérica. En este ejercicio se ordena expresar texto en números. Aquí diferentes intentos por expresar el término “cuarenta y tres milésimas” en forma numérica.

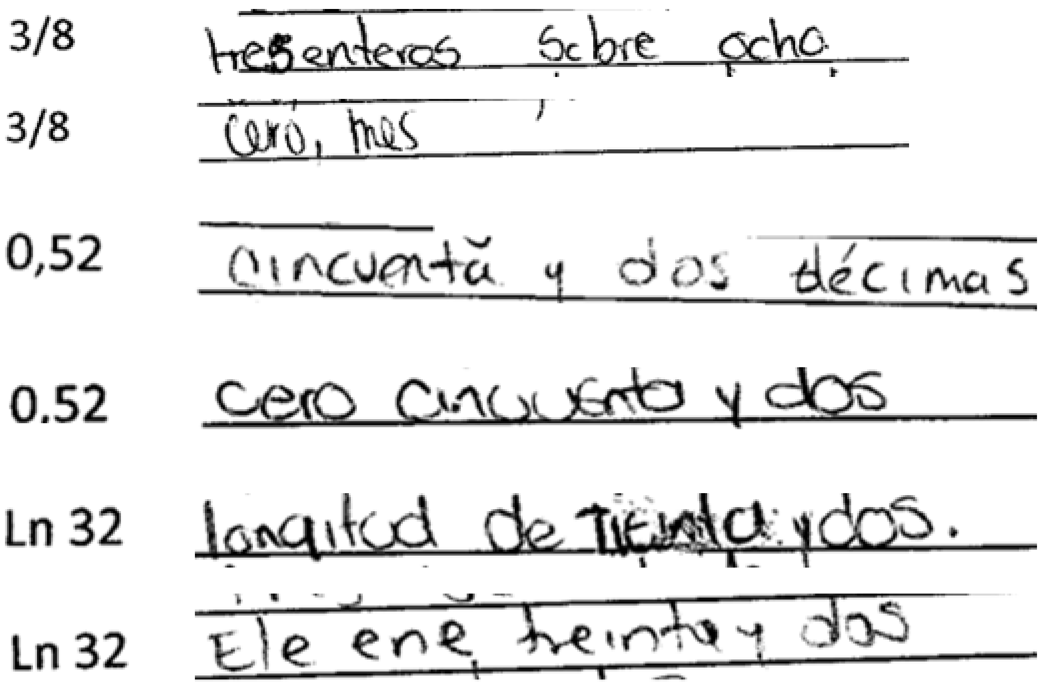


Figura 3. Expresión de datos numéricos en letras. En este ejercicio se pide que se escriban en texto los datos numéricos que aparecen: fracciones, decimales y logaritmos.

También se observaron errores al escribir términos matemáticos de uso universal como el logaritmo natural y radicación (figuras 3 y 4). En algunos casos se confunde el significado con otros términos y símbolos o no se entiende. Probablemente este tipo de errores se presenta porque estos son términos y notaciones tienen menos uso y sobre estos se hace menos énfasis en los programas escolares. Adicionalmente se observaron errores en declaraciones matemáticas que incluyen términos de relación como en las desigualdades (figura 4) y en el momento de expresar múltiplos o submúltiplos de unidades de medición. Todos estos conceptos también son de uso corriente en el lenguaje cotidiano (mayor que, menor que, igual, miligramos, microlitros), pero aparentemente no se logran relacionar las frases con los conceptos matemáticos.

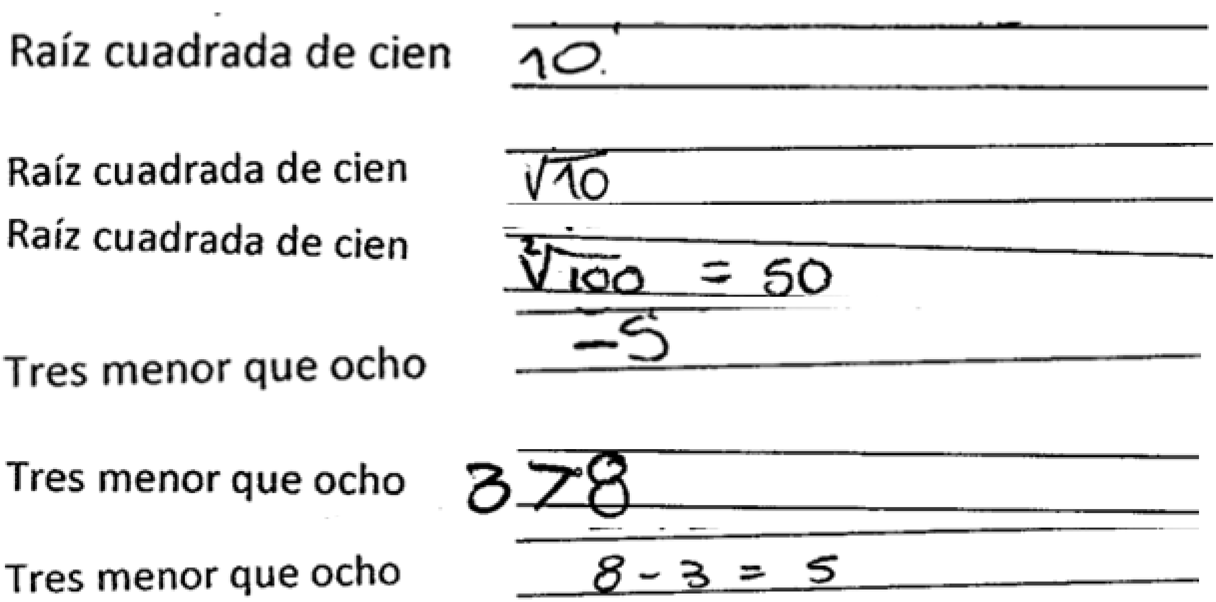


Figura 4. Expresiones en números. En este ejercicio se pide que se escriba en números los valores que aparecen en letras.

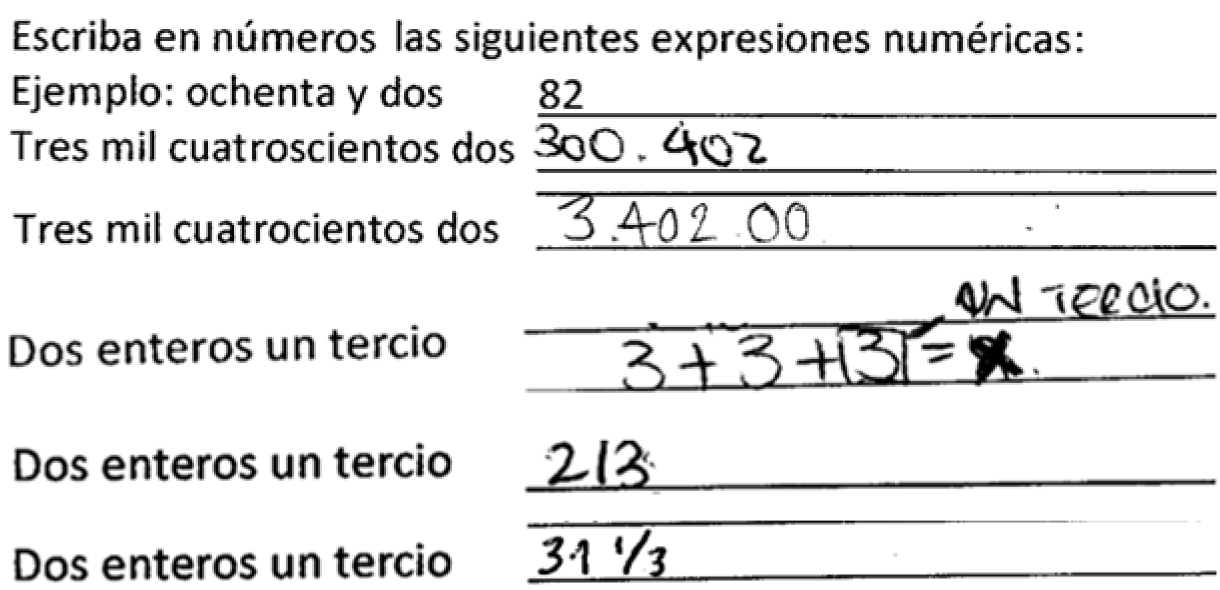
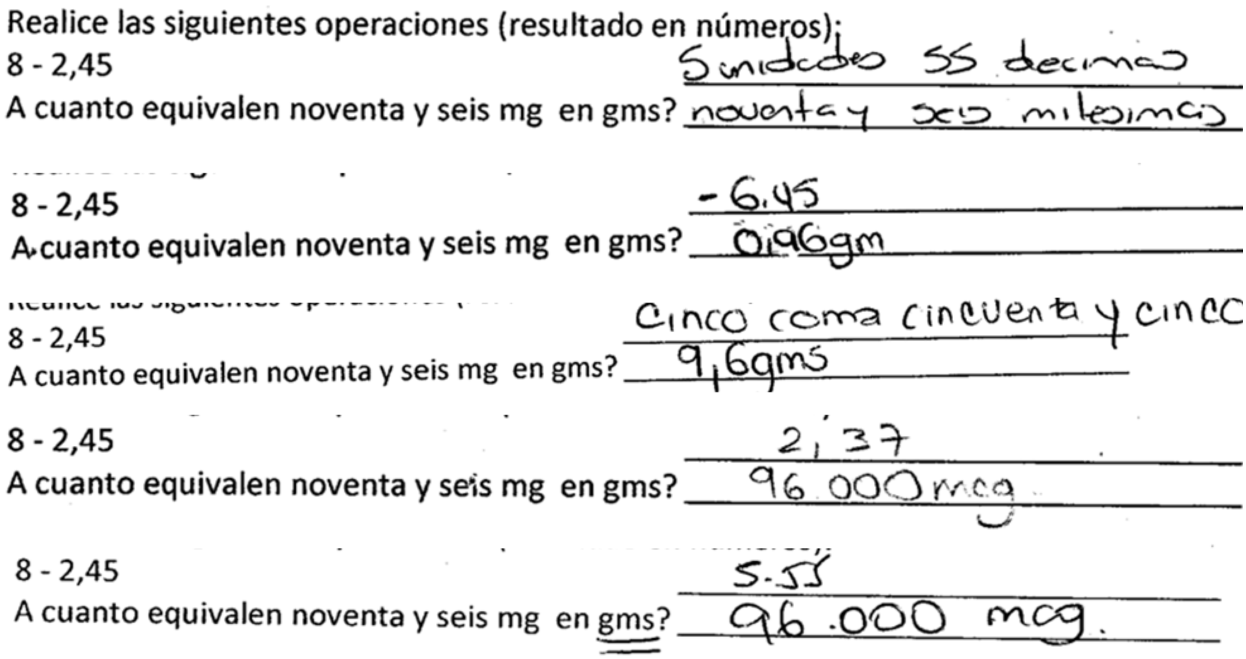


Figura 5. Expresiones en números. Otros intentos por expresar diferentes términos en forma numérica: números enteros, mixtos y fracciones.

De igual forma se observaron errores, aunque en menor proporción, con números enteros, fraccionarios y mixtos (figura 5). En cuanto a procedimientos matemáticos sencillos que incluyen sumas o restas con números decimales, o que involucran conversión de unidades, también fueron frecuentes los errores y con frecuencia los participantes expresaban en letras lo que se debía expresar en números o viceversa (figura 6 y 7).

Al solicitar que escriban en letras o símbolos matemáticos cifras o procedimientos se buscaba la participación de ambos hemisferios, pero en forma secuencial y realzando la participación del hemisferio que determina la respuesta, empleando lenguaje alfabético (hemisferio izquierdo) o lenguaje simbólico (hemisferio derecho). La lectura de cifras en texto implica el uso del hemisferio izquierdo y la expresión de cifras con números implica emplear el hemisferio derecho. Lo opuesto la lectura de números implica trabajar con hemisferio derecho y expresarlas en texto implica el uso del hemisferio izquierdo. De acuerdo a los resultados el pasar información de un hemisferio a otro representa un esfuerzo que en algunos casos genera confusión (figuras 6 y 7). Aunque esta parte del ejercicio intentaba evaluar la presencia de dominancia hemisférica, los resultados no permiten llegar a una conclusión acerca de si hay dominancia hemisférica, pues aunque se observa que en algunos participantes predominan la habilidad para interpretar símbolos y en otro para interpretar textos, esto puede estar alterado por muchas causas, en especial la ausencia de respuesta en algunos casos (ver figura 8).


Realice las siguientes operaciones (resultado en números):
8 - 2,45 Sunidades 55 decimas
A cuanto equivalen noventa y seis mg en gms? noventa y seis milesimas

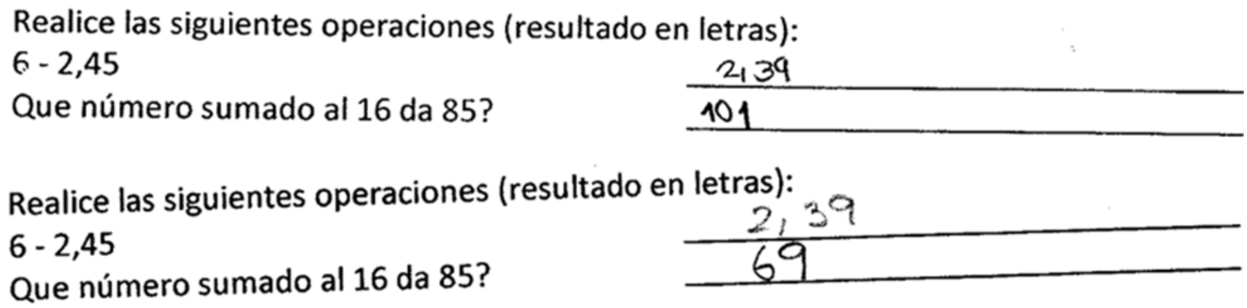
8 - 2,45 -6,45
A cuanto equivalen noventa y seis mg en gms? 0,96gm

8 - 2,45 Cinco coma cincuenta y cinco
A cuanto equivalen noventa y seis mg en gms? 9,6gms

8 - 2,45 2,37
A cuanto equivalen noventa y seis mg en gms? 96 000 mcg

8 - 2,45 5.55
A cuanto equivalen noventa y seis mg en gms? 96.000 mcg.

Figura 6. Resultados de procedimientos expresados en números. En este ejercicio se ordena realizar una operación y expresar sus resultados en números.


Realice las siguientes operaciones (resultado en letras):
6 - 2,45 2,39
Que número sumado al 16 da 85? 101

Realice las siguientes operaciones (resultado en letras):
6 - 2,45 2,39
Que número sumado al 16 da 85? 69

Figura 7. Resultados de procedimientos expresados en letras. En este ejercicio se ordena realizar una operación y expresar sus resultados en texto.

6. Análisis y discusión

Aunque el sondeo es pequeño y puede tener algunas fallas que incluyen heterogeneidad en las preguntas, el sesgo de la copia de las respuestas entre los participantes, el uso de calculadora (no permitido) en algunos casos, el estrés de los participantes (aunque siempre que se aplica se advierte que no es una evaluación, que no es calificable), el no responder la totalidad de la prueba, entre otras; el resultado si permite hacer un llamado de atención sobre la educación en general y la formación matemática en particular.

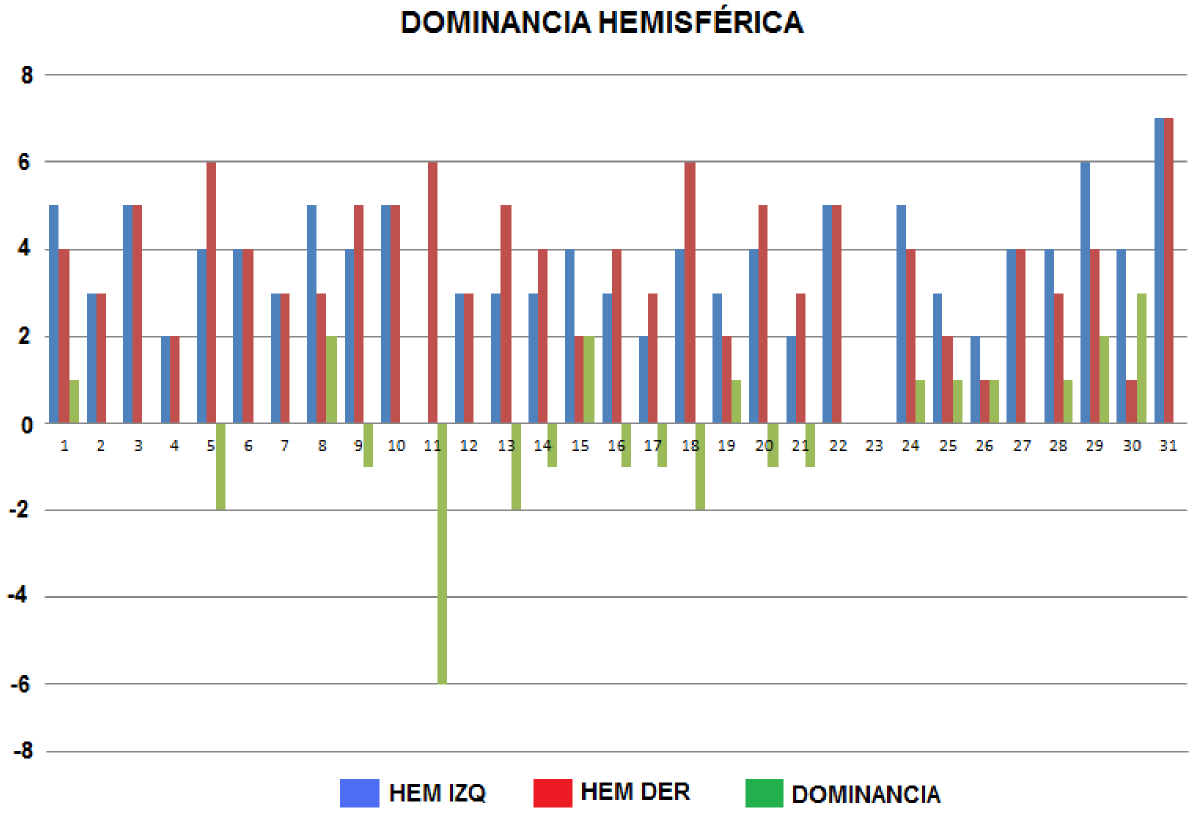


Figura 8. Dominancia hemisférica. El puntaje máximo fue de 7 para cada bloque de preguntas de la prueba, un desempeño máximo en ambas pruebas genera no dominancia sujeto 31 (teórico). Ninguno de los evaluados alcanzo el máximo puntaje. El valor de 0 en algunas pruebas puede corresponder a evaluados que no respondieron esa parte de la prueba.

Diversos autores han planteado que el pensamiento matemático se desarrolla progresivamente con la maduración cerebral determinado por factores biológicos pero también del entorno y que la forma más temprana, o inicial, de este pensamiento involucra el desarrollo de la capacidad de interpretar símbolos y realizar estimaciones o aproximaciones (Butterworth, 2000; De Smedt, Holloway, & Ansari, 2011; Gordon, 2004; Lourenco & Longo, 2010). Esta tarea de realizar estimaciones e interpretar símbolos, depende principalmente del hemisferio cerebral derecho. En forma más tardía, y debido a la educación, se empieza a desarrollar el pensamiento matemático formal, que va paralelo al desarrollo de habilidades y control motor, así como de la adquisición de habilidades comunicativas: lectura, escritura. Estas habilidades incluyen el aprendizaje de símbolos, conceptos, reglas, procedimientos y operaciones matemáticas (Ardila, 2006, 2006; Gallistel & Gelman, 1992; Lourenco & Longo, 2010; Park, Park, & Polk, 2012; Zarnhofer et al., 2012). El desarrollo de las capacidades intelectuales va paralelo al desarrollo de habilidades motoras (movimiento de manos y conteo de dedos, marcha) y la dominancia corporal (zurdo, diestro). En este proceso la apropiación de conceptos como izquierda – derecha, arriba – abajo son claves, en especial en la cultura occidental, pues la escritura tiene una direccionalidad, pues se desarrolla de izquierda a derecha y de arriba hacia abajo (Fischer & Brugger, 2011; Moeller, Martignon, Wessolowski, Engel, & Nuerk, 2011; Price, Mazzocco, & Ansari, 2013). Pero también esto es fundamental en matemáticas pues la posición de los números es clave en cifras de más de un dígito, para construir múltiplos o submúltiplos: unidades, decenas, centenas o decimas, centésimas, milésimas, etc, dependen de estos conceptos. Fallas en el desarrollo psicomotor del individuo, que depende de aspectos biológicos (genes, enfermedades) y ambientales (nutrición, afecto, estrés, sistema educativo), podrían ser razones para que con el tiempo se presenten dificultades, por ejemplo, para la notación de cifras decimales (figuras 2 a 4), un concepto que es clave en el trabajo del personal de salud, cuando realiza mediciones. De igual forma algunos autores plantean que existe una división del trabajo cerebral y que la actividad matemática esta segregada en los hemisferios cerebrales, esto no es fácil identificar dado el trabajo integrado que realizan las diferentes áreas cerebrales. El hemisferio derecho aparentemente realiza actividades relacionadas con estimación de valores y datos e interpretación de símbolos matemáticos, habilidad que se desarrolla en etapas tempranas de la vida, y que algunos autores plantean podría ser una habilidad de otras especies. El hemisferio izquierdo al parecer se encarga de tareas formales relacionadas con operaciones matemáticas (Price et al., 2013; Vallentin, Bongard, & Nieder, 2012) y la verbalización de la información matemática, al emplear el lenguaje alfabético oral o escrito (Zarnhofer et al., 2012). Fallas en la maduración de procesos de estimación y cálculos podrían explicar las notaciones de cifras totalmente desproporcionadas (ver figura 2).

Un adecuado desempeño en tareas matemáticas depende de muchos factores, que pueden estar presentes desde antes del nacimiento. Se requiere de un desarrollo neurológico adecuado (control prenatal, nutrición, desarrollo armónico postnatal), pero que además se tenga formación permanente y estímulos adecuados que generen en el individuo aprecio por el área (depende del entorno, del ambiente familiar, la educación y el entorno social). Sin embargo estas condiciones no siempre son óptimas lo cual puede afectar el desarrollo de un pensamiento matemático. Por otro lado la educación que es clave y las matemáticas, como componente fundamental en todo proceso educativo, con el sinnúmero de reglas, leyes, proposiciones, teoremas, se ve más como una carga en el mundo escolar, que como una herramienta fundamental para que el individuo tenga un desempeño adecuado en sus labores cotidianas. Dado que el conocimiento matemático es un proceso continuo y progresivo, pero que tiene periodos críticos, requiere de estímulo y motivación permanente y fallas durante las diferentes etapas del proceso enseñanza-aprendizaje, en especial durante la infancia y la adolescencia, donde el proceso de aprendizaje es clave y máximo, puede traer consecuencias nefastas. El resultado es que adolescentes y adultos tengan fallas en sus capacidades para entender y resolver tareas matemáticas, lo que pueden incidir negativamente no solo en su formación universitaria, sino en su vida profesional futura. Hasta el momento no existen estudios que demuestren esta relación conocimiento-mal desempeño, y documentar esto puede ser difícil pues reconocer este tipo de errores tiene implicaciones legales, por lo cual debe existir subregistros al respecto. Esto también dificulta que sea identificado como un problema, por lo que corregir fallas en la formación matemática en un nivel de educación superior puede ser una tarea difícil de abordar. Por supuesto no es una tarea imposible, pero si demanda tiempo y esfuerzos institucionales e individuales, dos elementos con los que pocas veces se cuenta, en especial por parte del estudiante universitario dadas las múltiples cargas y compromisos académicos que tiene. Igual cosa sucede con el profesional de la salud, que en muchas ocasiones debe responder por más de un trabajo y/o el hogar; y la capacitación que en pocas ocasiones recibe, se centra en adquirir y desarrollar habilidades prácticas. De igual forma para corregir fallas en procedimientos que requieran el uso de matemáticas, es necesario detectarlas y reconocerlas, lo cual no siempre es fácil, y una vez detectadas tener la voluntad de corregirlas, lo cual tampoco es fácil. Por lo tanto es necesario insistir por una formación matemática bien estructurada, desde los niveles preescolar, básico y secundario, que brinde al ciudadano del futuro la posibilidad y la habilidad de emplear en forma adecuada los conocimientos matemáticos tanto en su vida cotidiana, como en su desempeño profesional.

7. Conclusiones

Aunque en el presente trabajo se muestra el resultado de un sondeo pequeño y se requieren estudios más amplios, se observa deficiencias de lecto-escritura matemática, lo que está acorde con datos de estudios internacionales como PISA que indican que el nivel de formación de estudiantes de países en vías de desarrollo, son bajos, en especial en pruebas de lectura, escritura y razonamiento matemático (Froemel, JE, 2006). Muchos de estos estudiantes ingresan a la universidad con serias deficiencias que difícilmente pueden corregirse. Este problema es común en todas las áreas de formación: ingenierías, ciencias naturales, ciencias de la salud, ciencias sociales, etc. En un intento de corregir estas deficiencia muchos programas han incluido asignaturas orientadas a “nivelar” en conocimientos de matemática aplicada a los estudiantes del área de la salud (Escalona Fernández, González Serra, Tamayo Aguilar, & Velázquez Codina, 2013). Sin embargo, esta capacitación no es constante en todos los programas de salud e incluso la tendencia, en muchas instituciones, es la de eliminar dichas asignaturas en aras de ofrecer al estudiante asignaturas práctica que promuevan un contacto temprano del estudiante con su campo de acción profesional (Hutton, 1998b). Hasta el momento no existen estudios concluyentes que demuestren las bondades de una u otra tendencia en formación en salud (incluir o no cursos de nivelación matemática), por lo tanto es necesario enfatizar en la importancia de la formación temprana ofreciendo educación de calidad y la necesidad de reforzamiento permanente de dicha formación.

BIBLIOGRAFIA

Ardila, A. (2006). [The origins of language: an analysis from the aphasia perspective]. *Revista de neurologia*, *43*(11), 690-698.

Baccelli, Sandra, Anchorena, Sergio, Moler, Emilce, & Aznar, María Andrea. (2013). Análisis exploratorio de las dificultades de alumnado de Ingeniería en la resolución de problemas de optimización. *Números. Revista de Didáctica de las Matemáticas*, *84*, 99-113.

De Smedt, B., Holloway, I. D., & Ansari, D. (2011). Effects of problem size and arithmetic operation on brain activation during calculation in children with varying levels of arithmetical fluency. *NeuroImage*, *57*(3), 771-781. doi:10.1016/j.neuroimage.2010.12.037

Escalona Fernández, L. A., González Serra, Y. Y., Tamayo Aguilar, G. M., & Velázquez Codina, J. R. (2013). Resolución de problemas matemáticos aplicados a la medicina y su impacto en la formación del médico general. *Correo Científico Médico*, *17*(2), 178-185.

Fischer, M. H., & Brugger, P. (2011). When Digits Help Digits: Spatial-Numerical Associations Point to Finger Counting as Prime Example of Embodied Cognition. *Frontiers in Psychology*, *2*. doi:10.3389/fpsyg.2011.00260

Froemel, JE. (2006). Los estudios internacionales del rendimiento y los países en vías de desarrollo: participación, resultados y relevancia. *Revista de Educación*, *1*, 131-152.

Gallistel, C. R., & Gelman, R. (1992). Preverbal and verbal counting and computation. *Cognition*, *44*(1–2), 43-74. doi:10.1016/0010-0277(92)90050-R

Gordon, P. (2004). Numerical cognition without words: evidence from Amazonia. *Science (New York, N.Y.)*, *306*(5695), 496-499. doi:10.1126/science.1094492

Hutton, B. M. (1998a). Do school qualifications predict competence in nursing calculations? *Nurse Education Today*, *18*(1), 25-31. doi:10.1016/S0260-6917(98)80031-2

Hutton, B. M. (1998b). Nursing mathematics: the importance of application. *Nursing Standard*, *13*(11), 35-38. doi:10.7748/ns1998.12.13.11.35.c2567

Lourenco, S. F., & Longo, M. R. (2010). General Magnitude Representation in Human Infants. *Psychological Science*, *21*(6), 873-881. doi:10.1177/0956797610370158

Moeller, K., Martignon, L., Wessolowski, S., Engel, J., & Nuerk, H.-C. (2011). Effects of finger counting on numerical development - the opposing views of neurocognition and mathematics education. *Frontiers in Psychology*, *2*, 328. doi:10.3389/fpsyg.2011.00328

Olmedo, Victor, & Ariza, Raúl. (2012). Matemáticas en medicina: una necesidad de capacitación. *Medicina Interna de México*, *28*(3), 278-281.

Park, J., Park, D. C., & Polk, T. A. (2012). Parietal Functional Connectivity in Numerical Cognition. *Cerebral Cortex*. doi:10.1093/cercor/bhs193

Price, G. R., Mazzocco, M. M. M., & Ansari, D. (2013). Why mental arithmetic counts: brain activation during single digit arithmetic predicts high school math scores. *The Journal of Neuroscience: The Official Journal of the Society for Neuroscience*, *33*(1), 156-163. doi:10.1523/JNEUROSCI.2936-12.2013

Rodríguez, Milagros. (2011). La matemática y su relación con las ciencias como recurso pedagógico. *Números. Revista de Didáctica de las Matemáticas*, *77*, 35-49.

Vallentin, D., Bongard, S., & Nieder, A. (2012). Numerical Rule Coding in the Prefrontal, Premotor, and Posterior Parietal Cortices of Macaques. *The Journal of Neuroscience*, *32*(19), 6621-6630. doi:10.1523/JNEUROSCI.5071-11.2012

Wright, K. (2010). Do calculation errors by nurses cause medication errors in clinical practice? A literature review. *Nurse Education Today*, *30*(1), 85-97. doi:10.1016/j.nedt.2009.06.009

Zarnhofer, S., Braunstein, V., Ebner, F., Koschutnig, K., Neuper, C., Reishofer, G., & Ischebeck, A. (2012). The Influence of verbalization on the pattern of cortical activation during mental arithmetic. *Behavioral and Brain Functions: BBF*, *8*, 13. doi:10.1186/1744-9081-8-13

Autor/es: Rafael Antonio Vargas Vargas. Médico-cirujano e Ingeniero Electrónico. Magister en Fisiología y Doctor en Ciencias Biomédicas. Profesor asistente del Departamento de Ciencias Fisiológicas de la Pontificia Universidad Javeriana, sede Bogotá. Contacto: rvargas3200@hotmail.com; rafael.vargas@javeriana.edu.co

DATOS DE CONTACTO:

Nombre: Rafael Antonio Vargas Vargas.
E-mail: rvargas3200@hotmail.com; rafael.vargas@javeriana.edu.co
Dirección postal: Cra 70F No. 78A 85. Bogotá, Colombia.
Teléfono: 57-3177749194

DATOS PARA LA PUBLICACIÓN

Títulos: Médico-cirujano. Universidad Nacional de Colombia. Ingeniero electrónico. Fundación Universidad Central. Magister en fisiología. Universidad Nacional de Colombia. PhD en Ciencias Biomédicas. Universidad Nacional Autónoma de México.
Institución: Pontificia Universidad Javeriana. Bogotá. Colombia
Lugar de residencia: Bogotá, Colombia
Publicaciones:
Rafael Antonio Vargas Vargas, 2013. Matemáticas y neurociencias: una aproximación al desarrollo del pensamiento matemático desde una perspectiva biológica. Unión. Revista Iberoamericana de Educación Matemática. 36: 37 – 46. ISSN: 1815-0640.
A. Camargo, D. Gutiérrez, S. Gutiérrez, R. Vargas. 2012. Enfermería: simbología, estereotipos e imagen social. “Una visión trasgeneracional” de enfermeras y médicos en la Fundación Santa Fe de Bogotá, un homenaje en sus 40 años. Actualizaciones en Enfermería 15(4): 8 – 20. ISSN: 0123-5583.
R. Vargas, I. Þ. Jóhannesdóttir, B. Sigurgeirsson, H. Þorsteinsson and K. Æ. Karlsson. 2011. Zebrafish brain a simple in vivo and in vitro model for studying spontaneous neural activity during development. Advances in physiology education 35(2):188-196. ISSN: 1522-1229.
R. Vargas, A. Camargo. 2011. El sueño un fenómeno biológico inspirador del arte. Actualizaciones en Enfermería 14(4): 34 – 39. ISSN: 0123-5583.
A. Camargo, R. Vargas. 2011. Ritmos circadianos: una realidad compleja implícita en algunas obras literarias. Actualizaciones en Enfermería 14(2): 42 – 47. ISSN: 0123-5583.

REVISTA IBEROAMERICANA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA
www.fisem.org/web/union
http://asenmacformacion.com/ojs/index.php/union/index

ISSN: 1815-0640
Número 45. Marzo 2016
Página 76-95

Proposição de Davýdov e colaboradores para introdução ao ensino do conceito de equação

Josélia Euzébio da Rosa, Ademir Damazio, Josiane Cruz Goularte Dorigon

Fecha de recepción: 11/03/2014
Fecha de aceptación: 20/01/2016

Resumen	Es ese trabajo fue investigada la introducción del concepto de ecuación en las proposiciones desarrolladas por Davýdov y sus colegas. La investigación de naturaleza teórica fue desarrollada con base en presuposiciones de la Teoría Histórico-cultural. Durante el análisis de las proposiciones, fueron destacados multiplex relaciones en las proposiciones de Davýdov entre las significaciones aritméticas, geométricas y algébricas en nivel teórico. Características esenciales fueron reveladas en el movimiento entre las dimensiones particular, singular y universal en el procedimiento de ascensión del abstracto para el concreto. Por Davýdov, las ecuaciones son presentadas partiendo de situaciones de análisis interpretadas por medio de esquemas en relación parte-todo. **Palabras clave**: Proposición de Davydov. Relación *todo-partes*. Ecuación.
Abstract	In this work, the introduction of equation concept in the propositions for teaching developed by Davýdov and his co-workers was investigated. The research is theoretical and was developed based on the assumptions of Historical Cultural Theory. Along the analysis of propositions, multiple relations were highlighted on the propositions by Davydov, among arithmetic, geometric and algebraic significations in theoretical level. Essential characteristics were revealed in the movement among particular singular and universal dimensions in the procedure of ascension from abstract to the concrete. By Davýdov, the equations are represented from situations of analysis interpreted by schemes relative to the whole-part relationship. **Keywords**: Proposition by Davydov. Whole-part relationship. Equation.
Resumo	Neste trabalho investigou-se a introdução do conceito de equação conforme proposição de ensino, desenvolvida por Davýdov e colaboradores. A pesquisa, de natureza teórica, foi desenvolvida com base nos pressupostos da Teoria Histórico-Cultural. Durante a análise das proposições, destacaram-se as múltiplas relações na proprosição davydoviana entre as significações aritméticas, geométricas e algébricas em nível teórico. Foram reveladas as características essenciais no movimento entre as dimensões particular, singular e universal no procedimento de ascensão do abstrato ao concreto. Em Davýdov, as equações são apresentadas a partir de situações de análise, interpretadas por meio de esquemas referentes à relação *parte-todo*. **Palavras-chave:** Proposição davydoviana. Relação *todo-partes*. Equação.

1. Introdução

A introdução do conceito de equação foi investigada na proposição de ensino desenvolvida por Davýdov e colaboradores. De acordo com Galperin, Zaporózhets, Elkonin (1987) e Rosa (2012), Davýdov e colaboradores, seguidores de Vygotski, elaboraram uma proposta para o ensino de Matemática que expressa os princípios da Teoria Histórico-Cultural.

A partir dos pressupostos da Teoria Histórico-Cultural, no ensino, os conceitos devem ser organizados de forma orientada do geral e universal para o particular e singular no procedimento de ascensão do abstrato ao concreto. Mas, em que consiste organizar o ensino a partir destes pressupostos?

De acordo com Jardinetti (1996), abstrato e concreto manifestam-se no método dialético como uma tendência no processo de conhecimento. Concreto e abstrato são momentos de pensamentos diferentes de um mesmo objeto.

O procedimento em que se eleva do abstrato ao concreto está apoiado na formação do pensamento teórico, composto pelas dimensões universal, particular e singular do conhecimento. O concreto, como ponto de partida, é o aspecto sincrético dado empiricamente. Neste momento do processo de cognição, o pensamento identifica os aspectos essenciais do objeto e extrai as relações essenciais, universais, que vêm a serem as abstrações teóricas. Estas constituem as mediações que possibilitam a superação do aspecto sincrético do objeto de conhecimento e proporcionam um salto qualitativo, no período analítico, para o concreto como ponto de chegada. O concreto como ponto de chegada, ou concreto como síntese, é um nível superior atingido pelo pensamento no processo de conhecimento: trata-se das suas múltiplas determinações (Jardinetti, 1996).

Considerar esses momentos de pensamento, no ensino, requer um movimento específico. Deste modo, o objetivo, na presente investigação, foi compreender o movimento conceitual inerente a uma proposição fundamentada nos pressupostos da Teria Histórico-Cultural. Especificamente, o movimento conceitual apresentado por Davýdov e colaboradores para introdução ao ensino do conceito de equação no segundo ano do Ensino Fundamental I (Segundo ano escolar).

Os dados da pesquisa, de natureza teórica, foram extraídos do livro didático davydoviano para o segundo ano do Ensino Fundamental (Давыдов, et al. 2012) e do respectivo livro de orientação ao professor (Горбов, Микулина, Савельева, 2009). O material, originalmente escrito na língua russa, foi traduzido para a língua portuguesa por Elvira Kim. No livro didático são apresentadas as tarefas, que correspondem no contexto educacional brasileiro, aos exercícios ou atividades, para serem desenvolvidas pelos estudantes. No livro de orientações constam os direcionamentos teórico-metodológicos para o professor desenvolver as tarefas do livro didático. Ambos foram elaborados com base nos resultados das investigações realizadas por Davýdov e colaboradores, em sala de aula, por mais de vinte e cinco anos.

Foram selecionadas quatro tarefas davydovianas que representam a síntese do movimento conceitual adotado por Davýdov e colaboradores para introdução do conceito de equação no segundo ano do Ensino Fundamental. Tais tarefas são apresentadas, no presente artigo, de modo a colocar o leitor em atividade, por meio de perguntas que o levem a pensar nas possíveis respostas. Durante a análise das tarefas foram reveladas as múltiplas relações entre as significações aritméticas, geométricas e algébricas em nível teórico. Em Davýdov, as equações são apresentadas a partir de situações de análise interpretadas por meio de esquemas referentes à relação *parte-todo*. Tal relação é representada na forma algébrica e constitui o modelo universal de equação referente às operações de adição e subtração, conforme se apresenta na sequência. Vale ressaltar que há todo um movimento conceitual que antecede a introdução do conceito de equação em Davýdov desde o primeiro ano escolar. Neste trabalho, apresentamos apenas um recorte do mesmo. Para os interessados na totalidade das tarefas recomendamos as seguintes leituras: Rosa (2012), Madeira (2012), Alves (2012), Matos (2012), Dorigon (2012), Silveira (2012), Crestani (2012), Souza (2013) e Rosa, Damazio e Alves (2013).

2. Análise do objeto de estudo

Na presente seção descrevemos quatro tarefas extraídas do livro didático davydoviano e as explicamos com base no manual de orientação ao professor. Concomitantemente, procedemos às reflexões teóricas com base nos Fundamentos da Teoria Histórico-Cultural. Tais tarefas fazem parte de um sistema mais amplo que se inicia, na proposição davydoviana de ensino, desde o primeiro ano escolar. Os elementos de álgebra, aritmética e geometria já foram introduzidos, nas tarefas precedentes, a partir do estudo das relações entre grandezas discretas e contínuas (ROSA, 2012). As tarefas apresentadas na sequência contemplam a sistematização da relação parte e todo, já abordada nas tarefas precedentes no plano objetal (Rosa, Damazio e Alves, 2013).

Tarefa 1: Analise o esquema (Figura 1) e escreva as *partes* e o *todo* nos quadros abaixo da igualdade a + b = c (Горбов, Микулина e Савельева, 2009).

Figura 1: Tarefa 1 – Esquema todo-partes e representação algébrica
Fonte: Elaboração com base na proposição davydoviana

A partir da análise do esquema é possível concluir que treze (13) é o valor do *todo*. Então, qual é o valor das duas partes que compõem o *todo*? Inicialmente faz-se necessário identificar qual das significações algébricas, ***a***, ***b*** ou ***c***, representa o *todo* (13) na relação *parte-todo* expressa na igualdade ***a + b = c*** (Горбов, Микулина e Савельева, 2009).

Igualdade, de acordo com Pereira (1986, p. 123), "é o conjunto de duas expressões do mesmo valor unidas pelo sinal = (de igual) [...] dois ou mais termos são iguais quando são exatamente similares em grandeza e quantidade". Quanto aos membros da igualdade, estes "são as expressões ou grandezas separadas pelo sinal de igualdade. O elemento à esquerda do sinal de igualdade é o primeiro membro e o que está à direita é o segundo membro da igualdade" (Pereira, 1986, p. 149).

Na igualdade ***a + b = c***, ***a + b*** constituem o primeiro membro da igualdade e ***c*** o segundo membro da igualdade. Tal igualdade é expressa por meio da operação de adição, a mais simples e da qual todas outras operações dependem (Caraça, 1951). Ao número ***a*** dá-se o nome de *adicionando,* este representa o papel passivo da operação. O número ***b*** é denominado *adicionador:* desempenha o papel ativo. Os dois são as *parcelas* da adição (Caraça, 1951).

Na tarefa em análise, as *partes* juntas (**a** e **b**) compõem o *todo*. A operação que se utiliza para determinar o *todo* a partir das *partes* é a adição. Deste modo, o *todo* é registrado, na operação da adição, após a igualdade. Na presente tarefa, o *todo* (13) corresponde ao valor algébrico ***c*** (Figura 2).

Figura 2: Tarefa 1 – esquema todo-partes: representação algébrica com todo
Fonte: elaboração com base na proposição davydoviana

Se o *todo* (13) corresponde ao valor ***c***, as *partes* ***a*** e ***b*** serão menores que o *todo* ***c***. Assim, atribui-se um valor aleatório para uma das *partes* (Figura 3).

Figura 3: Tarefa 1 – Uma das partes conhecida
Fonte: elaboração com base na proposição davydoviana

Dentre as opções de valores aritméticos para uma das *partes* optou-se pelo número sete (7). Este, pela propriedade comutativa da adição (a + b = b + a), pode representar tanto a parte de valor algébrico ***a*** quanto a parte de valor ***b***. Optou-se, aleatoriamente, a título de exemplificação, por **a = 7**.

Neste estágio de resolução da tarefa já se tem o valor aritmético do *todo* (13) e o valor aritmético da *parte* ***a*** (7). O professor sugere vários valores para representar a outra parte desconhecida (9, 2, 5, etc.). A síntese a ser elaborada, a partir das observações do professor, com base na relação do *todo* com suas *partes*, é que somente um destes números corresponde à *parte* desconhecida. O valor aritmético para ***b*** não pode ser determinado aleatoriamente (Горбов, Микулина e Савельева, 2009).

A sugestão apresentada no manual de orientações ao professor é que continuidade da tarefa seja realizada no plano mental: quanto será necessário adicionar ao número sete (*parte)* para obter o *todo* (13)? (Figura 4).

Figura 4: Tarefa 1 – Esquema e representação algébrica todo-partes
Fonte: elaboração com base na proposição davydoviana

A partir da análise referente à figura 4 (7 + 6 = 13), têm-se as seguintes relações: a *parte* sete (7) adicionada a outra *parte* seis (6) resulta no *todo* treze (13). Ou, comutativamente, a *parte* seis (6) adicionada à *parte* sete (7) resulta no *todo* treze (13). A partir da operação inversa, a subtração, tem-se que a *parte* sete (7) subtraída do *todo* treze (13) resulta em seis (6). Ou a *parte* seis (6) subtraída do *todo* treze (13) resulta em sete (7). Vale o alerta de que poderiam ser outros valores para as partes. A opção pelos números 7 e 6 foi aleatória, a título de exemplificação de uma possível resolução da tarefa.

A segunda questão da tarefa 1 (Figura 5) consiste novamente na análise da relação entre as *partes* e o *todo*.

Figura 5: Tarefa 1 – Questão 2) Esquema todo-partes e representação algébrica
Fonte: elaboração com base na proposição davydoviana

A partir da análise do esquema (Figura 5) conclui-se que o *todo* corresponde ao valor quatorze (14). Para relacionar este *todo* à representação algébrica, faz-se necessário considerar que, na primeira parte da tarefa, a operação considerada foi adição, agora se trata da subtração.

A subtração é a operação pela qual se determina um número ***c*** que, somado com ***b***, resulta em ***a*** **(*c* + *b* = *a*)***,* ou seja: ***a* – *b* = *c***. Para o número ***a***, dá-se o nome de diminuendo, para ***b***, de diminuidor ou subtrativo, e para ***c*** de resto ou diferença.

Para que a operação da subtração seja possível, nos limites dos números inteiros positivos, o aditivo deve ser maior que o subtrativo, ou igual a ele (Caraça, 1951).

Pereira (1986), define a operação de subtração, como a inversa da adição. Dada a soma de dois números (minuendo e subtraendo determinar um outro (resto ou diferença). Para que uma subtração seja possível de ser operada, nos números Naturais, é necessário que o minuendo, representado genericamente por ***m***, seja igual ou maior ao subtraendo, representado por ***s***. Assim, tem-se que m ≥ s. Por meio da operação de subtração entre dois números obtém-se um terceiro que, adicionado ao segundo, resulta no primeiro.

Na tarefa em análise, **m** representa o valor do *todo*, e as duas partes estão representadas por ***n*** e ***k***. Logo, estabelecem-se as seguintes relações subtrativas: ***m – n = k*** ou ***m – k = n*,** nas quais, do *todo* **m** subtrai-se uma das *partes,* **n** ou **k**. Porém, a tarefa já determina que ***n*** é o subtrativo, ***k*** o resto e quatorze (14) o *todo* (Figura 6).

Figura 6: Tarefa 1 – Questão 2) Esquema todo-partes representação algébrica com o todo
Fonte: elaboração com base nas proposições davydovianas

Para representar as *partes* do esquema, entre várias opções escolhe-se um valor aleatoriamente (Figura 7):

Figura 7: Tarefa 1 – Questão 2) Todo e uma parte completa
Fonte: elaboração com base na proposição davydoviana

Optou-se, aleatoriamente, a título de exemplificação, por ***n = 8***. Tem-se o valor aritmético do *todo* (14) e de uma das *partes* (8). Quanto será a outra *parte*? (Figura 8).

Figura 8: Tarefa 1 – Questão 2) Todo-partes completa
Fonte: elaboração com base na proposição davydoviana

Na igualdade formada (**14 - 8 = 6)**, do *todo* quatorze, subtraiu-se a *parte* oito e resultou na outra *parte,* seis.

Escolheu-se o número oito (8), dentre as várias possibilidades, para representar uma das *partes*. Por outro lado, o valor aritmético seis (6) foi determinado a partir dos valores conhecidos. Ou seja, a última *parte* desconhecida não pode ser determinada aleatoriamente. Em síntese, se existem dois valores conhecidos na relação entre *duas partes* e *todo*, o terceiro número não pode surgir de uma escolha arbitrária, este depende estritamente dos valores conhecidos (Горбов, Микулина e Савельева, 2009).

Os modelos abstratos **a + b = c**, e **m – n = k** representam o movimento universal determinado pela relação *todo-partes*. A tarefa pré-determinava um valor singular para cada modelo. Na adição, o valor aritmético era treze (13) e, na subtração, o valor aritmético era quatorze (14). A partir da determinação dos demais valores singulares, obteve-se a representação concreta do modelo universal abstrato. As demais tarefas são pensadas com base na relação universal entre as partes e o todo, conforme segue.

Tarefa 2: A partir do registro **k + b = c**, na sua forma geométrica, elabore o enunciado de um problema (Горбов, Микулина e Савельева, 2009).

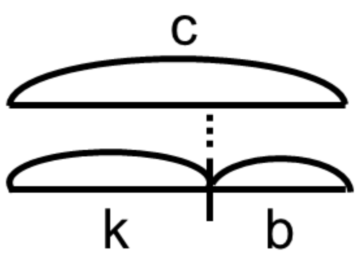


Figura 9: Tarefa 2 – Esquema genérico
Fonte: elaboração com base na proposição davydoviana

Tem-se o registro da representação universal da relação *todo-partes* por meio da operação de adição (**k + b = c)** no esquema (Figura 9). Trata-se de uma representação geométrica da igualdade. Há uma *parte* ***k***, que adicionada à *parte* ***b***, resulta no *todo* ***c***. A título de exemplificação, a história elaborada foi a seguinte: “Há ***c*** lápis na caixa, entre eles ***k*** vermelhos e ***b*** azuis”. Deste modo, ***c*** é o *todo* (total de lápis na caixa). Uma das *partes* é denominada por ***k*** (referente aos lápis vermelhos) e ***b*** é a outra *parte* (para lápis azuis).

A partir da história, com base na relação universal (*todo-partes*), elabora-se o enunciado de um problema particular como, por exemplo: havia na caixa, lápis vermelhos e azuis, em um total de ***c*** lápis. Sabe-se que eram ***k*** vermelhos. Quantos eram azuis?

Elaborado o enunciado do problema, constata-se que há um valor desconhecido a ser calculado, mas qual deles ***c***, ***b*** ou ***k***? Após análises, o valor desconhecido é representado no esquema (Figura 10).

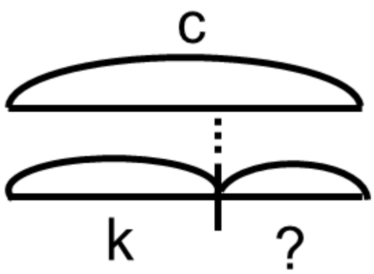


Figura 10: Tarefa 2 – Esquema genérico com interrogação
Fonte: elaboração com base na proposição davydoviana

No problema, a pergunta consistia em “quantos eram azuis?”. Sabe-se, a partir da história, que eram ***b*** azuis. Logo, ***b*** é o valor desconhecido. Este é substituído, nas representações, por um sinal de interrogação.

k + b = c

k + ? = c

Em Matemática, quando se pretende calcular um valor desconhecido, costuma-se utilizar uma letra, que designa uma incógnita (Горбов, Микулина е Савельева, 2009). Mas, qual seria esta letra? Geralmente, utiliza-se a letra ***x***. Assim, substitui-se o sinal de interrogação pela incógnita ***x*** (Figura 11):

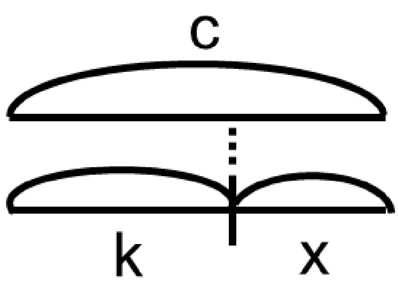


Figura 11: Tarefa 2 – esquema genérico com incógnita x
Fonte: elaboração com base na proposição davydoviana

k + b = c
k + ? = c
k + x = c

Até o momento elaborou-se a história, em seguida o problema, mas somente com valores algébricos no movimento orientado do geral para o particular (o problema). A partir do problema, os valores algébricos (***k*** e ***c***) serão substituídos por valores aritméticos singulares.

Para exemplificação, os números utilizados serão 8 e 15 (Figura 12), estes serão representados tanto na igualdade quanto no esquema (Горбов, Микулина e Савельева, 2009). Os números genéricos ***k*** e ***c*** são substituídos pelos valores aritméticos 8 e 15. Mas 8 representa o valor de ***k*** ou ***c***? O mesmo questionamento também é válido para o número 15.

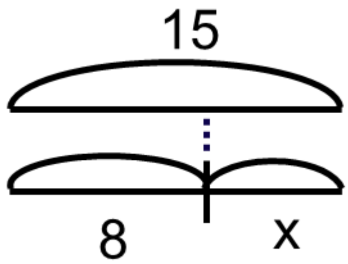


Figura 12: Tarefa 2 – esquema com valores aritméticos
Fonte: elaboração com base na proposição davydoviana

k + x = c
8 + x = 15

Sabe-se que nesta tarefa, com base na relação *todo-partes*, que o valor aritmético de uma das *partes* é desconhecido. Como quinze (15) é maior que oito (8), o primeiro representa o *todo* e o segundo (oito), a outra *parte*. A sugestão apresentada no manual do professor é que este informe às crianças que as igualdades com a incógnita são denominadas, em Matemática, de equações.

Após a alteração da igualdade e do esquema reformula-se, também, o enunciado do problema com a substituição dos valores representados algebricamente pelos aritméticos (Горбов, Микулина e Савельева, 2009).

Enunciado reformulado: havia, na caixa, lápis vermelhos e azuis, em um total de quinze (15) lápis. Sabe-se que eram oito (8) vermelhos. Quantos eram azuis?

O cálculo do valor desconhecido é fundamentado no seguinte raciocínio: qual número que, adicionado a oito (8), resulta em quinze (15)?

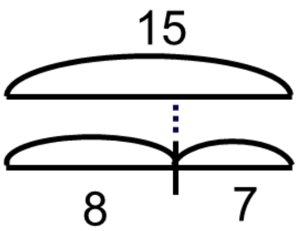


Figura 13: Tarefa 2 – Esquema todo e partes
Fonte: elaboração com base na proposição davydoviana

8 + x = 15
8 + 7 = 15
x = 7

Ao número oito adiciona-se um valor desconhecido para atingir o quinze (**8 + x = 15**). O cálculo deve ser realizado por meio da reta numérica. A partir do número oito, adiciona-se sete unidades para a direita até atingir o número quinze. O total de unidades acrescidas representa o valor de ***x***. Portanto, o valor aritmético que representa a quantidade singular de lápis azuis, neste problema particular, é sete.

De igual maneira, em Davýdov entende-se a equação, em primeiro lugar, como a descrição do problema, e só depois como certo registro. A equação, antes de tudo, é mais um formato de representação do problema junto ao esquema (Горбов, Микулина e Савельева, 2009).

Portanto, a incógnita (representada aqui pela letra ***x***) faz mais o papel do sinal de interrogação do que representa um número e, como as outras letras, trata-se de um número a ser determinado (Горбов, Микулина e Савельева, 2009).

Por conseguinte, Davýdov e colaboradores apresentam o conceito de equação, suas relações com o conceito de incógnita no movimento mediado pela composição e estruturação de um problema, e na inter-relação com um sistema de representações (aritméticas, algébricas e geométricas). Tal movimento seguiu, na especificidade da tarefa em análise, orientado do geral para o particular e singular, o fio condutor desse movimento foi a relação universal.

A forma universal da equação do primeiro grau é expressa por $ax + b = 0, a \neq 0$. Pela propriedade de equivalência, se somar a ambos os membros da igualdade o número $-b$, ela não se altera ($ax + b - b = 0 - b$), o que resulta em: $ax = -b$. Toda equação do 1º grau, $ax + b = 0$, tem uma só raiz, e a solução de uma equação é dada pelo valor que satisfaz a igualdade (Caraça, 1951).

Na tarefa 1, Davýdov e colaboradores iniciavam pela representação genérica de uma operação. O desenvolvimento da tarefa culminava em uma representação particular composta por valores aritméticos e valores desconhecidos, mas sem a sistematização da incógnita. Esta é introduzida em Davýdov durante o desenvolvimento do sistema de tarefas, a partir de situações geradoras de necessidade da mesma, durante o cálculo do valor desconhecido. Trata-se de uma introdução teórica, como síntese das múltiplas determinações que a envolvem no movimento entre todas as dimensões conceituais (geral, universal, particular e singular). O procedimento de resolução, ponto de partida predominante nas proposições atuais (Rosa, 2012), é apresentado após o estudo das relações internas entre a parte o o todo, conforme a tarefa 3.

<u>**Tarefa 03:**</u> Determine o valor aritmético da incógnita: **x – 27 = 46** e **84 – x = 52.**

A primeira igualdade (**x – 27 = 46**) é uma equação? Sim, pois possui igualdade e incógnita. Mas, é possível resolvê-la? Sim, pois existe um número que, ao subtrair 27, resulta em 46. Ou seja, 27 e 46 são *partes* que compõem o *todo* ainda desconhecido. Qual operação matemática, nesta equação, pode ser realizada para determinar o valor da incógnita ***x***? (Горбов, Микулина е Савельева, 2009).

Antes do cálculo do valor desconhecido, representa-se o *todo* e as *partes* da equação (Figura 14).

$$\overbrace{x}^{\text{Todo}} - \overbrace{27}^{\text{Parte}} = \overbrace{46}^{\text{Parte}}$$

Figura 14: Tarefa 3 – Todo e partes da equação
Fonte: elaboração com base nas proposições davydovianas

Do *todo* (x) subtrai-se a *parte* (27), e resulta na outra *parte* (46). Qual número que, subtraído de vinte e sete (27), resulta em quarenta e seis (46)? Para responder a esta questão, faz-se necessário, por meio da operação de adição, adicionar as *partes* para resultar no *todo* desconhecido (Figura 15).

$$\overbrace{x}^{\text{Todo}} - \overbrace{27}^{\text{Parte}} = \overbrace{46}^{\text{Parte}}$$
$$x = 46 + 27$$
$$x = 73$$

Figura 15: Tarefa 3 – Cálculo do valor aritmético da incógnita x
Fonte: elaboração com base na proposição davydoviana

Conforme ilustrado anteriormente, para determinar o valor da incógnita ***x*** opera-se com as duas partes (46 + 27) que compõem o *todo*, por meio da operação de adição. O resultado é setenta e três (73). Logo, **x = 73**.

A mesma equação também pode ser representada geometricamente no esquema (Figura 16). Nesta representação, explicita-se a necessidade de se unir as *partes* para compor o *todo* antes desconhecido.

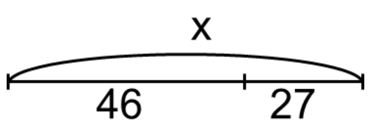


Figura 16: Tarefa 3 – Equação representada por esquema
Fonte: elaboração com base na proposição davydoviana

Por meio do esquema, pode-se visualizar, geometricamente, que à *parte* quarenta e seis (46) se adiciona a outra *parte,* vinte e sete (27). Juntas elas compõem o *todo*, representado por ***x***. A partir do cálculo (46 + 27) determina-se o valor aritmético do *todo* (73). Assim, tem-se que ***x* = 73** (Figura 17).

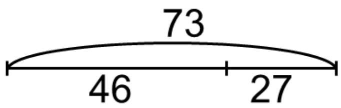


Figura 17: Tarefa 3 – Esquema com valor da incógnita calculado
Fonte: elaboração com base na proposição davydoviana

Em síntese, do *todo* (73) subtrai-se a *parte* (46), e resulta no valor da outra *parte* (27). Ou, do *todo* (73), subtrai-se o valor da *parte* (27) e resulta no valor da outra *parte* (46). Ou, ainda, as *partes* (46 e 27), por meio da adição, compõem o *todo* (73).

A segunda parte da tarefa em análise consiste em determinar se a igualdade **84 – x = 52** é uma equação. Sim, pois possui igualdade e incógnita. É possível resolvê-la? A resposta é afirmativa, pois existe um número que se subtrai de oitenta e quatro (84) resulta em cinquenta e dois (52). Antes de calcular o valor da incógnita, representa-se o *todo* e as *partes* da equação **84 – x = 52**, conforme a figura 18 (Горбов, Микулина e Савельева, 2009).

$$\overbrace{84}^{\text{Todo}} - \overbrace{x}^{\text{Parte}} = \overbrace{52}^{\text{Parte}}$$

Figura 18: Tarefa 3 – Todo e partes da equação
Fonte: elaboração com base na proposição davydoviana

Do *todo* (84) subtrai-se a *parte* de valor aritmético desconhecido, e resulta no valor da outra *parte* (52). Deste modo, quanto se subtrai de 84 (***x***) para resultar 52?

Qual operação deve ser realizada para determinar o valor de ***x***? É a subtração, uma vez que o *todo* e uma das *partes* são conhecidos. Assim, do *todo* (84) subtrai-se a *parte* conhecida (52) e resulta no valor de quanto (Figura 19)?

$$\overbrace{84}^{\text{Todo}} - \overbrace{x}^{\text{Parte}} = \overbrace{52}^{\text{Parte}}$$
$$84 - 52 = x$$
$$32 = x$$

Figura 19: Tarefa 3 – Cálculo do valor aritmético da incógnita x
Fonte: elaboração com base na proposição davydoviana

Do *todo* (84) subtrai-se a *parte* (52) e resulta no valor da outra *parte* (32).

A equação **84 – x = 52** pode ser representada geometricamente pelo esquema (Figura 20). Nele é possível visualizar a relação entre o *todo* e as *partes* que determina a realização da operação de subtração (84 – 52) para obtenção do valor da incógnita ***x*** (32).

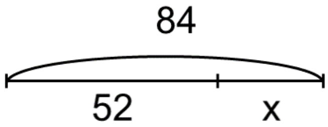


Figura 20: Tarefa 3 - Equação representada por esquema
Fonte: elaboração com base na proposição davydoviana

Do *todo* (84), se subtrai a *parte* (52) e resulta no valor até então desconhecido (32), conforme figura 21.

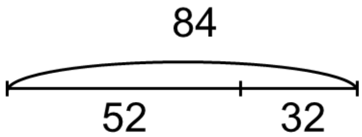


Figura 21: Tarefa 3 – Esquema com valores aritméticos
Fonte: elaboração com base na proposição davydoviana

As duas equações resolvidas na tarefa em análise (x – 27 = 46 e 84 – 52 = 32) são apresentadas com o operador “menos”. Mas a operação utilizada para calcular o valor da incógnita foi diferente. Na primeira foi utilizada a adição e, na segunda, a subtração. Onde está o erro? Na solução da primeira equação ou da segunda? (Горбов, Микулина е Савельева, 2009).

Na primeira equação, as *partes* juntas resultavam no *todo* desconhecido. Ou seja, nesta equação, a incógnita era o *todo* (Figura 22).

$$x - 27 = 46$$
$$x = 46 + 27$$
$$73 = 46 + 27$$

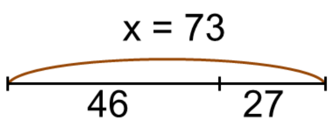
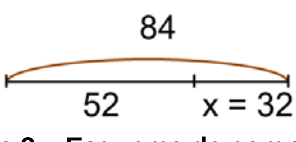


Figura 22 Tarefa 3 – Esquema de comparação todo e partes
Fonte: elaboração com base na proposição davydoviana

Na segunda equação, a incógnita era uma das *partes*: do *todo se* subtrai uma *parte* conhecida e resulta no valor da outra *parte* (Figura 23).



$$84 - x = 52$$
$$84 - 52 = x$$
$$84 - 52 = 32$$

Figura 23 Tarefa 3 – Esquema de comparação todo e partes
Fonte: elaboração com base na proposição davydoviana

Não se trata de um erro. Em um caso o valor desconhecido era o *todo* e, no outro, era a *parte* (Горбов, Микулина e Савельева, 2009). Em Davýdov, o procedimento de resolução de equações não é apresentado por meio de regras do tipo: se está somando, passa para o outro lado da igualdade diminuindo; ou, se está diminuindo, para o outro lado da igualdade somando. Tal orientação é característica do ensino tradicional. Na proposição davydoviana, após as reflexões sobre o procedimento de resolução ocorre a generalização (Tarefa 04)

Tarefa 04: Componha as equações e compare as soluções.

Com base no esquema (Figura 24), devem-se compor as três igualdades da tarefa (Горбов, Микулина e Савельева, 2009).

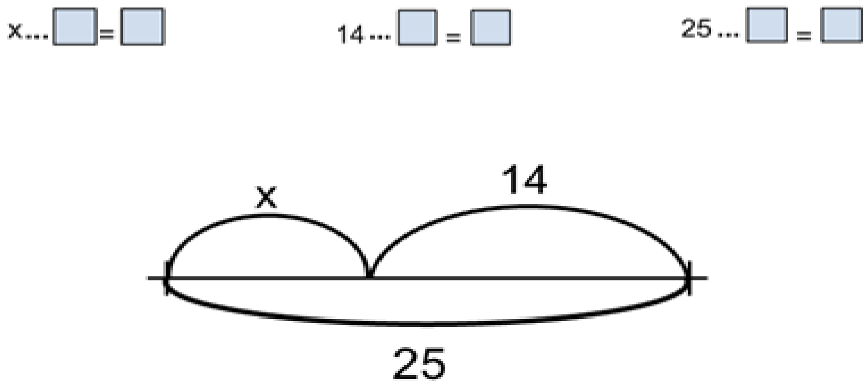


Figura 24: Tarefa 04 – esquema todo e partes
Fonte: elaboração com base na proposição davydoviana

No esquema geométrico, o *todo* de valor aritmético vinte e cinco (25) e as *partes* que compõem este *todo* são o valor desconhecido (***x***) e o valor aritmético quatorze (14).

Primeira igualdade (Figura 25):

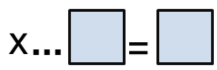


Figura 25: Tarefa 04 - Primeira igualdade para completar
Fonte: elaboração com base na proposição davydoviana

A incógnita (***x***) já está apresentada no primeiro termo da equação. Serão representados, aritmeticamente, o segundo e terceiro termo, juntamente com a operação a ser definida.

Por meio do esquema (Figura 24), constata-se que a incógnita (***x***) é uma *parte* e, para representar a equação, restam o *todo*, vinte e cinco (25), e a *parte* quatorze

(14). Se a incógnita (***x***) é uma *parte*, não poderá ser adicionada ao *todo* vinte e cinco (25).

Logo, para representar a igualdade, a incógnita (***x***), que é uma *parte,* deverá ser unida à outra *parte,* quatorze (14). Juntas, por meio da operação de adição, comporão o *todo,* vinte e cinco (25), conforme figura 26.

$$x \overset{+}{\dots} \boxed{14} = \boxed{25}$$

Figura 26: Tarefa 04 – Todo, parte e operação completos
Fonte: elaboração com base na proposição davydoviana

Qual número que, adicionado a quatorze, resulta em vinte e cinco? Ou, de outro modo, do *todo,* vinte e cinco (25), subtrai-se a *parte* conhecida, quatorze (14), e resulta em quanto (Figura 27)?

$$x \overset{+}{\dots} \boxed{14} = \boxed{25}$$
$$x + 14 = 25$$
$$x = 25 - 14$$
$$x = 11$$

Figura 27: Tarefa 04 – Cálculo da equação
Fonte: elaboração com base na proposição davydoviana

Do *todo,* vinte e cinco (25), subtrai-se a *parte* quatorze (14) e resulta no valor singular da outra *parte,* onze (11). Ou seja, para **x = 11**, temos a *parte* onze (11), adicionada a outra *parte,* quatorze (14), estas compõem o *todo,* vinte e cinco (25).

A segunda igualdade (Figura 28).

$$14 \dots \boxed{} = \boxed{}$$

Figura 28: Tarefa 04 – Segunda igualdade para completar
Fonte: elaboração com base na proposição davydoviana

Na segunda igualdade, já está representado o valor aritmético quatorze (14) no primeiro termo. Serão representados o segundo e terceiro termo, juntamente com a operação a ser definida.

Por meio do esquema, constata-se que quatorze (14) é uma *parte* e, para representar a equação, restam o *todo,* vinte e cinco (25), e a *parte* (***x***).

Se a *parte* quatorze (14) já está representada na igualdade, a operação é adição, visto que as *partes* juntas compõem o *todo*.

Conforme o esquema (Figura 24), a outra *parte* é a incógnita (***x***) e, para representar o segundo membro, resta o *todo* vinte e cinco (25), conforme a figura 29.

$$14 \overset{+}{\dots} \boxed{x} = \boxed{25}$$

Figura 29: Tarefa 04 – Todo, parte e operação completos
Fonte: elaboração com base na proposição davydoviana

Na equação ilustrada anteriormente (Figura 29) tem-se a *parte* quatorze (14) adicionada a outra *parte* de valor desconhecido (***x***). Ambas compõem o *todo*, vinte e cinco (25).

Ao quatorze (14) adiciona-se quanto para resultar em vinte e cinco (25)? Ou, de vinte e cinco (25), ao se subtrair a *parte* quatorze (14), resultará em quanto (Figura 30)?

$$14 \overset{+}{\dots} \boxed{x} = \boxed{25}$$
$$14 + x = 25$$
$$x = 25 - 14$$
$$x = 11$$

Figura 30: Tarefa 04 – Cálculo da equação
Fonte: elaboração com base na proposição davydoviana

Assim, o valor singular da incógnita é 11 (**x = 11).** Quatorze (14) e onze (11) são as *partes* que compõem o *todo*, vinte e cinco (25).

Terceira igualdade (Figura 31):

$$25 \dots \boxed{} = \boxed{}$$

Figura 31: Tarefa 04 – Terceira igualdade para completar
Fonte: elaboração com base na proposição davydoviana

A terceira igualdade está representada, inicialmente, pelo valor aritmético vinte e cinco (25). Por meio do esquema (Figura 24), constata-se que é o *todo.* A operação não poderá ser adição, pois ao *todo* não se adiciona a *parte.*

Do *todo* vinte e cinco (25) subtrai-se uma *parte* para obter o valor de outra *parte*. Logo, o esquema, possui duas partes: quatorze (14) e ***x***. Escolheu-se, aleatoriamente, a *parte* quatorze para o segundo termo, e a incógnita (***x***) foi registrada após a igualdade (Figura 32).

$$25 \therefore \boxed{14} = \boxed{x}$$

Figura 32: Tarefa 04 – Todo, parte e operação completos
Fonte: elaboração com base na proposição davydoviana

Do todo vinte e cinco (25) subtrai-se a *parte* de valor aritmético quatorze (14) e resulta no valor desconhecido (***x***). Assim, de vinte e cinco (25) subtrai-se quatorze (14), e resulta em quanto?

$$25 \therefore \boxed{14} = \boxed{x}$$
$$25 - 14 = x$$
$$11 = x$$
$$x = 11$$

Figura 33: Tarefa 04 – Cálculo da equação
Fonte: elaboração com base na proposição davydoviana

A *parte* referente ao valor aritmético da incógnita (***x***), no esquema, é onze (11), assim como no esquema. Para **x = 11**, tem-se (Figura 34):

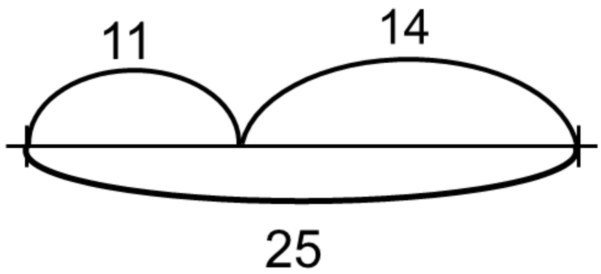


Figura 34: Tarefa 04 – Cálculo da equação
Fonte: elaboração com base na proposição davydoviana

Do *todo* vinte e cinco (25) subtrai-se a *parte* quatorze (14), que resulta no valor da outra *parte*, onze (11). Qual a solução das três equações?

Simultaneamente, para as três equações, a solução resultou no mesmo valor aritmético onze (11). Ou seja, o valor das incógnitas, nas três equações (**x + 14 = 25**, **14 + x = 25** e **25 – 14 = x)** foi o mesmo: **x = 11**.

Cabe o seguinte questionamento: por que este resultado (**x = 11**) repetiu-se para nas três equações? (Горбов, Микулина е Савельева, 2009).

As três equações possuíam os mesmo termos (25, 14 e x). Porém, em cada equação estes estavam posicionados em lugares diferentes. Entretanto, foram elaboradas a partir de um mesmo esquema universal, que continha os mesmos números singulares *parte* (14), *todo* (25) e a *outra parte* desconhecida. Por isso, para cada equação particular, formada com base na relação universal *todo-partes,* obteve-se o mesmo valor aritmético singular onze (11).

O valor numérico de cada termo da equação pode ser determinado a partir do valor numérico dos outros termos. Além disso, é possível construir tantas equações quantos componentes existirem na igualdade (Горбов, Микулина е Савельева, 2009). Tal síntese é elaborada durante o desenvolvimento das tarefas. Neste, reproduz-se o sistema de conexões internas do conceito de equação até atingir sua concretude em nível teórico.

Na proposição davydoviana as diferentes representações da relação *todo-partes* são alternadas e são exploradas as diversas possibilidades. Tal relação fundamenta a representação algébrica e a determinação do valor desconhecido, representado pela letra ***x***.

O movimento interno da relação universal (*todo-partes*), ao ser concretizado, permite a generalização do conceito de equação, no que se refere à operação a ser realizada para resolvê-la. Se as duas *partes* são conhecidas, para determinar o *todo* basta adicioná-las. Por outro lado, se o *todo* e uma das *partes* são conhecidos, para determinar a outra *parte*, faz-se necessário subtrair a *parte* conhecida do *todo*. Em síntese, o valor numérico de cada termo da equação pode ser determinado a partir do valor numérico dos outros termos.

O sistema de tarefas davydovianas, para a introdução ao conceito de equação,

> permite construir, sobre a base da igualdade dada, vários tipos de equações (os estudantes concluem que a quantidade de tais equações é igual à quantidade de elementos incluídos na igualdade: $x + a = c$, $c – x = a$, $c – a = x$. De acordo com estas equações, as crianças transformam qualquer situação inicial na quantidade correspondente dos chamados problemas texto (DAVÍDOV, 1988, p. 211).

Enfim, o conceito de equação é introduzido em Davýdov com base no movimento do geral (representado no modelo geometricamente e algebricamente) para o singular (as significações aritméticas), mediado pelas particularidades (problemas textos). O fio condutor desse movimento é a relação universal entre o todo e as partes. Diferentemente das proposições de ensino que predominam atualmente, cujo foco inside no procedimento de resolução de situações particulares e singulares, sem a devida atenção ao movimento interno da relação entre as partes e o todo. Portanto, considera-se que a proposição davydoviana pode contribuir para se repensar o ensino de matemática.

Com essa finalidade, no Brasil, há um um movimento de articulação entre a proposição davydoviana e a atividade orientadora de ensino, criada inicialmente pelo professor Manoel Oriosvaldo de Moura. Crestani (2016) e Galdino (2016) elaboraram uma história virtual e desenvolveram, matemáticamente, como base no movimento conceitual matemático propoto por Davýdov. Trata-se de estudos iniciais, mas que indicam possibilidades de transformação da Educação Matemática brasileira, que, atualmente, atinge resultados pouco satisfatórios.

Bibliografia

ALVES, E. de S. B. (2012). *Proposições Brasileiras e davydovianas: limites e possibilidades.* Monografia (Especialização em Educação Matemática) - Universidade do Extremo Sul Catarinense, Criciúma. 119 f.

CARAÇA, B. J. (1951). *Conceitos fundamentais da matemática.* Lisboa: Livraria Sá da Costa.

CRESTANI, S. (2012). *Análise conceitual das proposições de Davydov e seus colaboradores para o ensino do conceito de divisão*. Monografia (Especialização em Educação Matemática) - Universidade do Extremo Sul Catarinense, Criciúma. 70 f**.**

CRESTANI, S. (2016). *Organização do ensino de Matemática na perspectiva do desenvolvimento do pensamento teórico: uma reflexão a partir do conceito de divisão*. Dissertação de Mestrado em Educação, Universidade do Sul de Santa Catarina, Tubarão, SC, Brasil.

DAVIDOV, V. V. (1988). *La enseñanza escolar y el desarrollo psíquico: investigación teórica y experimental.* Trad. Marta Shuare Moscú: Editorial Progreso.

DAVÝDOV, V. V. (1982). *Tipos de generalización en la enseñanza.* Habana: Editorial Pueblo y Educación.

DORIGON, J. C. G. (2012). *Proposições de Davydov para introdução ao conceito de equação.* Monografia (Especialização em Educação Matemática) - Universidade do Extremo Sul Catarinense, Criciúma. 90 f.

GALDINO, A. P. S. 2016. *O conhecimento matemático de estudantes do 3º ano do ensino fundamental sobre o conceito de multiplicação: um estudo com base na Teoria Histórico-Cultural.* Dissertação de Mestrado. Universidade do Sul de Santa Catarina, Tubarão.

GALPERIN, P.; ZAPORÓZHETS A.; ELKONIN, D. (1987). *Los problemas de la formación de conocimientos y capacidades enlos escolares y los nuevos métodos de enseñanza en la escuela.* In: SUARE, M. *La psicología Evolutiva y pedagógica en la URSS*. Moscú, Progreso, p. 300-316.

JARDINETTI, J. R. B. (1996). *Abstrato e o concreto no Ensino da Matemática: algumas reflexões.* Bolema, ano 11, nº 12, p. 45 – 57.

MADEIRA, S. C. (2012*). "Prática": Uma leitura Histórico-Crítica e proposições davydovianas para o conceito de multiplicação.* Dissertação (Mestrado em Educação) - Universidade do Extremo Sul Catarinense, Criciúma. 165 f.

MATOS, C. F. (2012). *Resolução de problemas davydovianos sobre adição e subtração por estudantes brasileiros do sexto ano do ensino fundamental.* Monografia (Especialização em Educação Matemática) - Universidade do Extremo Sul Catarinense, Criciúma. 168 f.

PEREIRA, M. A. M. (1986). (Ed.). *Enciclopédia Sysamérika.* Curitiba: Editora Argos, Ltda.

ROSA, J. E. (2012). *Proposições de Davydov para o ensino de Matemática no primeiro ano escolar: inter-relações dos sistemas de sistema de significações numéricas.* Tese (Doutorado em Educação). Universidade Federal do Paraná 244 f.

ROSA, J. E.; DAMAZIO, A.; ALVES, E. S. B. **(**2013**).** *Adição e subtração em Davydov.* Boletim GEPEM / Grupo de Estudos e Pesquisas em Educação Matemática, Rio de Janeiro, n. 63, p. 61-75, Jul./Dez..

SILVEIRA, G. M. (2012). *Proposições para o ensino do sistema de numeração em Davydov.* Monografia (Especialização em Educação Matemática) - Universidade do Extremo Sul Catarinense, Criciúma. 112 f.

SOUZA, M.B. (2013). *O ensino do conceito de número: objetivações nas proposições davydovianas e formalista moderna.* Dissertação (Mestrado em Educação). Universidade do Extremo Sul Catarinense, Criciúma. 237 f.

ГОРБОВ С. Ф.; МИКУЛИНА Г. Г.; САВЕЛЬЕВА О. В. (2008) *Обучение Математике. 1класс: Пособиедляучителейначальнойшколы* (Система Д.Б. Эльконина – В.В. Давыдова). 2-е ида, перераб. - М.:ВИТА-ПРЕССб. 128р. [GORBOV, S.F.; MIKULINA, G.G.; SAVIELIEV, O.V. (2009). *Ensino de Matemática. 1 ano: livro do professor do ensino fundamental* (Sistema do D.B. Elkonin – V.V. Davidov). 2ª edição redigida, Moscou, Vita-Press.]

ДАВЫДОВ, В. В. О. (2012). et al. *Математика, 1-Kjiacc.* Mockba: Mnpoc - Aргус. [Davidov, V.V. (2012) *Matemática, 1ª série. Livro didático e de exercícios para os estudantes da primeira série.* Moscou: MIROS, Argus.

Josélia Euzébio da Rosa, E-mail: joselia.rosa@unisul.br. Licenciada em Matemática. Doutora em Educação, linha de pesquisa Educação Matemática. Professora do Mestrado em Educação da Universidade do Sul de Santa Catarina – UNISUL. Pesquisa com base na Teoria Histórico-Cultural, cujo foco é para a obra de Davydov.

Ademir Damazio, E-mail: add@unesc.net. Licenciado em Matemática pela UNIPLAC. Especialista Matemático pela FUESS. Especialista em Ciências Matemáticas pela FURB. Mestre em Educação pela UFSC. Doutor em Educação pela UFSC. Professor da UNESC. Pesquisa: Conceitos Matemáticos Científicos, Cotidianos e Histórico-Cultural.

Josiane Cruz Goularte Dorigon, e-mail: josyanecg@yahoo.com.br, Licenciada em Matemática. Pós-graduada em Educação Matemática na Pós-graduação Latu Sensu da Universidade do Extremo Sul Catarinense - UNESC. Especialização em Metodologia da Matemática e Física na faculdade de Ensino Superior Dom Bosco, FDB, Brasil.

REVISTA IBEROAMERICANA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA
www.fisem.org/web/union
http://asenmacformacion.com/ojs/index.php/union/index

ISSN: 1815-0640
Número 45. Marzo 2016
Página 96-116

A resistência à transformação do texto pedagógico do planejamento do ambiente de modelagem matemática na prática pedagógica escolar

Lilian Aragão da Silva, Andréia Maria Pereira de Oliveira

Fecha de Recepción:07/09/2014
Fecha de aceptación:10/02/2016

Resumen	En este artículo, se analiza la resistencia a la transformación del entorno de planificación pedagógica texto modelización matemática en las clases de matemáticas de tres profesores que participan en la investigación. La investigación fue de carácter cualitativo, cuyos datos fueron producidos a través de la observación, entrevistas y documentos. Análisis de los datos sugiere que la resistencia a la transformación de la planificación pedagógica texto estaba condicionada a la fidelidad al texto mismo en la práctica docente de la escuela, los maestros favorecidos cuando sus decisiones a priori y se controlan las decisiones de los estudiantes. Estas construcciones se definieron y caracterizaron utilizando las nociones teóricas de Basil Bernstein. **Palabras clave:** Texto pedagógico, Planificación, Los modelos matemáticos, Práctica de la enseñanza secundaria.
Abstract	In this article, we analyze the resistance to transformation of pedagogical text planning environment mathematical modeling in mathematics lessons of three teachers participating in the research. The research was qualitative in nature, whose data were produced through observation, interviews and documents. Data analysis suggests that resistance to transformation of pedagogic text planning was conditional on fidelity to the text itself in school teaching practice, teachers favored when their decisions a priori and controlled the decisions of students. These constructs were defined and characterized using the theoretical notions of Basil Bernstein. **Keywords:** Pedagogic text, Planning, Mathematical modelling**,** School teaching practice.
Resumo	No presente artigo, analisamos a resistência à transformação do texto pedagógico do planejamento do ambiente de modelagem matemática nas aulas de matemática de três professores participantes da pesquisa. A pesquisa realizada foi de natureza qualitativa, cujos dados foram produzidos por meio da observação, entrevistas e documentos. A análise dos dados sugere que a *resistência a transformação* do texto pedagógico do planejamento foi condicionada a uma *fidelidade* ao próprio texto na prática pedagógica escolar, quando professores privilegiavam suas decisões tomadas *a priori* e controlavam as decisões dos estudantes. Tais constructos foram definidos e caracterizados a partir das noções teóricas de Basil Bernstein. **Palavras-chave:** Texto pedagógico, Planejamento, Modelagem matemática, Prática pedagógica escolar.

1. Introdução

A modelagem[1], no cenário da Educação Matemática, tem se consolidado como um ambiente de aprendizagem favorável para oportunizar um espaço de reflexão, investigação, negociação e problematização ao lidar com problemas provenientes de situações externas à matemática nas aulas (BARBOSA; 2009; ALRØ; SKOVSMOSE, 2006; JACOBINI, 2004). Nessa direção, assumimos a modelagem conforme a compreensão proposta por Barbosa (2009), como um ambiente de aprendizagem, no qual os estudantes são convidados a investigar problemas provenientes do cotidiano, de outras ciências ou de áreas profissionais por meio da matemática.

Com isso, os problemas propostos nas atividades de modelagem são de natureza diferente, a depender da familiaridade do professor[2] com esse ambiente (SANT'ANA; SANT'ANA, 2009). Por outro lado, Alro e Skovsmose (2006) argumentam que a natureza dos problemas, que envolvem dados do dia-a-dia, oferece diferentes condições de comunicação entre professor e estudantes, ao permitir que os estudantes questionem informações contidas na atividade. Essas e outras potencialidades especializam o ambiente citado, bem como fundamentam as razões que levam professores a sentirem desconforto quando planejam atividades dessa natureza, perante os resultados dos estudos já realizados (SILVA; OLIVEIRA; 2012a,b). Nesses estudos, conceituamos o planejamento do ambiente de modelagem, baseado em Vasconcellos (2010), como um processo de tomada de decisões do professor para atingir determinadas finalidades pedagógicas que estão vinculadas ao desenvolvimento do ambiente de modelagem. Nesses estudos, analisamos o momento que antecede a implementação na sala de aula, quando os professores discutiram e elaboraram o planejamento do ambiente de modelagem matemática.

Entretanto, Vasconcellos (2010) argumenta que o planejamento não pode ser caracterizado apenas no agendamento de ações futuras, mas, também, na implementação na sala de aula, uma vez que outras decisões podem ser tomadas quando os estudantes participam da aula. Dessa maneira, o autor considera que o planejamento contempla dois elementos básicos: a antecipação e a realização. Neste artigo, estamos interessados em analisar a realização a partir das decisões já tomadas pelo professor, no momento em que o professor operacionaliza o planejamento do ambiente de modelagem nas aulas de matemática.

Apesar de existirem trabalhos que focam no professor ou na relação entre professores e estudantes ao implementar atividades de modelagem nas aulas de matemática (OLIVEIRA, 2012; SANTANA; BARBOSA; 2012; OLIVEIRA, 2010; MAAB, 2005; entre outros), não há evidências quanto à implementação do ambiente de modelagem colocando lentes na tomada de decisões do professor agendadas a *priori*. Em outras palavras, a transformação do planejamento do ambiente de modelagem.

---

[1] No decorrer deste trabalho, por vezes, omitimos o termo *matemática* da expressão *modelagem matemática* para evitar repetições.
[2] Nesse caso, estamos considerando que as atividades de modelagem foram elaboradas pelo professor.

Para fundamentar esta investigação, utilizaremos alguns conceitos da teoria de Basil Bernstein (1990). Um dos conceitos chave da teoria centra-se na representação pedagógica que comunica alguma coisa, seja ela expressa pela fala, escrita, visual, espacial ou ainda na postura ou na vestimenta. Tal representação traduz princípios de ordenamento interno e relação mútua, a qual foi denominada por Bernstein (1990) de *texto*. Ademais, o autor denominou de *texto pedagógico* como aquele que visa ações pedagógicas. Além disso, o texto pedagógico é comunicado a partir de uma dada relação social. A *prática pedagógica* é conceituada por Bernstein (1990) de uma maneira mais ampla, como a relação social que pode ocorrer entre pais e filhos, professores e estudantes, assim como entre médico e paciente, dentre outros. Neste artigo, acrescentamos o termo *escolar* para denotar as relações sociais estabelecidas entre professor e estudantes na sala de aula. Portanto, aqui, estamos interessados em analisar a *prática pedagógica escolar* e os textos pedagógicos produzidos a partir dela.

Na prática pedagógica escolar, estamos considerando que há, pelo menos, dois textos envolvidos: o primeiro está centrado no professor e que, nesse caso, refere-se às comunicações ou tomada de decisões desse agente, no caso, o *texto pedagógico do planejamento do ambiente de modelagem*. O segundo está relacionado aos estudantes, os quais produzirão um texto referente ao que se espera dele na atividade, isso quer dizer que eles também tomam decisões na prática pedagógica escolar. Portanto, o texto pedagógico do planejamento do ambiente de modelagem comunicado pelo professor podem acarretar eventuais transformações, a partir dos textos produzidos pelos estudantes ou, ainda, de outras situações do contexto. Do ponto de vista teórico, a transformação do texto é um fenômeno inevitável, mas, neste artigo, estamos interessados em analisar as possíveis resistências à transformação do texto pedagógigo do planejamento do ambiente de modelagem, a qual pode ocorrer na comunicação pedagógica entre professores e estudantes.

Na seção seguinte, estabelecemos um diálogo com a literatura sobre a prática pedagógica escolar em modelagem com a lente teórica de Basil Bernstein, a fim de situar o leitor e empregar constructos teóricos que serão utilizados para fundamentar a análise.

2. A comunicação pedagógica no ambiente de modelagem matemática sob a ótica da teoria de Basil Bernstein

As tomadas de decisões tanto dos professores quanto dos estudantes no desenvolvimento do ambiente de modelagem dependem da comunicação estabelecida na prática pedagógica escolar (FERRUZI; ALMEIDA, 2012; OLIVEIRA, 2012; SANTANA; BARBOSA, 2012; BARBOSA; 2007). Isso significa que as tomadas de decisões podem mudar constantemente, mas para que isso aconteça, os professores precisam criar diferentes condições na comunicação a fim de que os estudantes participem ativamente da construção do ambiente de modelagem.

A princípio, temos que o ambiente de modelagem fornece, por si só, diferentes condições na comunicação pedagógica, uma vez que faz referência a realidade dos estudantes. Entretanto, são as formas de comunicação entre professores e estudantes que podem possibilitar ou limitar a participação deles no processo educativo (BARBOSA, 2007). Dessa maneira, entendemos que o ambiente de modelagem permite variações na comunicação na prática pedagógica escolar.

À luz da teoria de Bernstein (1990), as variações na comunicação estabelecidas entre professor e estudantes podem ser traduzidas em termos das *formas de controle* e do *enquadramento*. Por exemplo, quando o professor controla explicitamente a interação comunicativa podemos dizer que o enquadramento é forte. Já quando os estudantes podem assumir algum controle sobre a interação comunicativa dizemos que o enquadramento é fraco. Assim, Bernstein (1990) admite que o enquadramento pode variar entre forte e fraco. Além disso, o autor propõe que a variação no enquadramento acontece mediante as regras que fundamentam a prática pedagógica, a saber: as regras de seleção, as regras de sequenciamento, as regras de compassamento e as regras criteriais.

Segundo Bernstein (1990), as *regras de seleção* dizem respeito aos princípios que estabelecem a seleção do tema, do conteúdo ou dos dados de uma atividade escolar. No estudo de Zbiek e Conner (2006), os estudantes selecionaram algumas informações e descartaram outras para construir a solução de um problema de modelagem. Nesse caso, o professor deixou que os estudantes selecionassem os dados. Com esse exemplo, inferimos que o enquadramento foi fraco na regra de seleção, uma vez que os estudantes tiveram um controle na seleção dos dados.

Já as *regras de sequenciamento* referem-se aos princípios que estabelecem uma progressão ou ordenamento da aprendizagem em/para uma dada atividade escolar, ou seja, ordena o que vem antes e o que vem depois. No trabalho de Araújo e Barbosa (2005), o professor iniciou a aula indicando que primeiro os estudantes deveriam utilizar uma função que representasse uma situação cotidiana e depois estudar essa função com os conteúdos de cálculo diferencial e integral, abordados naquela disciplina. Contudo, no desenvolvimento, os estudantes desafiaram a ordem proposta pelo professor para aplicação dos conteúdos matemáticos utilizados, criando seu próprio ordenamento que, por sinal, resultou na estratégia inversa proposta pelo professor. Nesse caso, o enquadramento foi forte na regra de sequenciamento, pois o professor controlou essa ordem, porém os estudantes enfraqueceram esse enquadramento.

Por sua vez, as *regras de compassamento* dizem respeito aos princípios que estabelecem a velocidade ou uma taxa temporal relacionadas ao período necessário à aprendizagem e às regras de sequenciamento. Como não encontramos exemplos na literatura em modelagem a respeito das regras de compassamento, mostraremos uma possível ilustração. Por exemplo, caso o professor estabeleça que os estudantes desenvolvam toda a atividade de modelagem em duas aulas, mas no final ele reconheceu que os estudantes não apresentaram um ritmo esperado para resolver toda a atividade, daí ele pode dispor de mais uma aula para finalizar a atividade. Assim, podemos dizer que o enquadramento do professor foi forte em termos das regras de compassamento ao controlar explicitamente uma taxa temporal dos estudantes para o desenvolvimento da atividade. Porém, o enquadramento foi enfraquecido quando o professor percebeu que o ritmo dos estudantes não acompanhou o ritmo esperado por ele, fazendo com que o controle fosse reduzido.

Por fim, temos as *regras criteriais* que dizem respeito aos critérios que se espera que os estudantes assumam para avaliar uma comunicação, uma relação social ou uma posição legítima ou ilegítima. Em outras palavras, essas regras permitem que estudantes tomem posse das *regras de reconhecimento*[3] e *regras de realização*[4] para produzir um texto legítimo a um dado contexto comunicativo. Por exemplo, nos trabalhos de Oliveira (2012), Santana e Barbosa (2012) e Silva e Santana (2012), os professores formataram e/ou regularam as tomadas de decisões dos estudantes no ambiente de modelagem. Ao fazer isso, o professor tornou explícitos os critérios que os estudantes deveriam tomar como legítimos para produzir um texto esperado pelo professor, como exemplo, a determinação dos dados, dos procedimentos ou dos conteúdos matemáticos. Assim, os estudantes reconheceram as informações legítimas naquele contexto comunicativo e realizaram o texto a partir das indicações do professor. Nos três casos, o enquadramento foi forte e centrado no professor em relação às regras criteriais.

De modo geral, os estudos de Araújo e Barbosa (2005) e Zbiek e Conner (2006) mostram exemplos de sala de aula em que o professor permitiu que os estudantes tomassem suas próprias decisões e participassem ativamente no desenvolvimento de atividades de modelagem, tendo o professor como mediador de todo esse processo. Enquanto que nos trabalhos de Oliveira (2012), Santana e Barbosa (2012) e Silva e Santana (2012) encontramos evidências que os professores regularam as tomadas de decisões dos estudantes a fim de preservar as suas decisões. Do ponto de vista teórico, compreendemos que as tomadas de decisões do professor e dos estudantes podem ser traduzidas em termos dos *textos pedagógicos*. Em contrapartida, o texto pedagógico do professor refere-se às tomadas de decisões agendadas no planejamento, por isso, diz respeito ao *texto pedagógico do planejamento do ambiente de modelagem*.

Face ao exposto, nos estudos de Araújo e Barbosa (2005) e Zbiek e Conner (2006), o texto pedagógico dos estudantes mudaram o texto pedagógico do planejamento do ambiente de modelagem do professor. Do contrário, os estudos de Oliveira (2012) Santana e Barbosa (2012) e Silva e Santana (2012) mostraram que os professores regularam os textos pedagógicos dos estudantes. Ou seja, os professores privilegiaram o texto pedagógico do planejamento do ambiente de modelagem, não oferecendo condições para eventuais mudanças a partir da produção textual dos estudantes. Bernstein (1990) identifica a mudança no texto como um processo de *transformação*, considerando que tal transformação acontece sempre quando o texto se torna ativo na prática pedagógica escolar.

Entretanto, a partir da análise da literatura reconhecemos que há situações em sala de aula em que os textos foram transformados “em partes” ou, ainda, não foram transformados. Isso acontece porque o professor pode assumir um maior controle na produção textual dos estudantes e establecer claramente as ações dos estudantes. Neste artigo, estamos interessados em analisar a possibilidade dos textos não serem transformados, a qual traduzimos como uma resistência a eventuais transformações. O termo *resistência* tem significado semelhante ao utilizado no senso comum, cuja definição refere-se ao ato de resistir, se opor, repelir um ataque, se defender, reagir a obstáculos, e etc. (ROCHA, 2003).

[3] São as regras que permitem fazer a distinção entre contextos, por meio da identificação das características específicas de um dado contexto, distinguindo entre os textos que são considerados legítimos ou não em uma determinada prática pedagógica (BERNSTEIN, 1990).
[4] São as regras que criam os meios para a produção do texto legítimo, elas se referem ao como produzir esse texto (BERNSTEIN, 1990).

A seguir, apresentaremos o contexto que produzimos os dados e o método que viabilizou a produção e análise dos dados.

3. O contexto e os participantes da pesquisa

Nesta pesquisa, utilizamos os dados que foram produzidos nas salas de aula de três professores da Educação Básica. Os três professores estavam vinculados às atividades do curso de extensão[5] para a formação de professores em modelagem matemática, no qual planejaram o ambiente de modelagem para ser desenvolvido nas aulas. Desde o início do curso, os professores aceitaram o convite para participar da pesquisa e disponibilizaram as aulas a fim de serem acompanhadas. A partir daí, os professores assinaram um termo de consentimento tendo a liberdade de escolher um pseudônimo ou o próprio nome para identificá-los nos dados da pesquisa. Os professores participantes da pesquisa foram: Cau, Márcia e Chico.

A professora Cau possui 10 (dez) anos de experiência na docência. Ela planejou o ambiente de modelagem para as turmas do 3º ano do Ensino Médio de uma escola pública e estadual do município de Feira de Santana, na Bahia. A escola localiza-se na zona urbana e central do município. Quanto ao perfil dos estudantes na turma desenvolvida, eles eram jovens que, em sua maioria, tinham a pretensão de prestar vestibular ao concluir a escolaridade. A forma de organização do ambiente de modelagem proposto pela professora Cau foi o *caso 2*, em que a professora selecionou o tema e elaborou os problemas, cabendo aos estudantes a coleta de dados e a resolução dos problemas (BARBOSA, 2009). Assim, o tema consistiu na *reciclagem de lixo* e os problemas objetivavam a investigação da quantidade de lixo produzida na própria escola e a quantidade possível à redução com a coleta seletiva.

A professora Márcia possui 22 (vinte e dois) anos de experiência na docência. Ela planejou o ambiente de modelagem para as turmas da Educação de Jovens e Adultos (EJA) de uma escola pública e municipal de Feira de Santana, na Bahia. A escola estava localizada na zona urbana e periférica do município. Quanto ao perfil dos estudantes na turma desenvolvida, eles eram jovens e adultos que trabalhavam em turnos opostos ao da escola. Nessa turma, a maioria dos estudantes era de ingressos no mercado de trabalho, por isso tinham a intenção de concluir a Educação Básica para comprovar a escolaridade. A professora Márcia propôs o ambiente de modelagem organizado no *caso 1*, no qual ela escolheu o tema, coletou os dados e elaborou os problemas, cabendo aos estudantes a resolução (BARBOSA, 2009). A professora selecionou como tema *a queda do muro da escola* e organizou problemas que visavam à investigação do orçamento de cada material necessário para o levante do muro e o custo total. Por coincidência, na turma havia pedreiros, ajudantes e funcionários de lojas de materiais de construção que entendiam daquela prática.

O professor Chico possui 12 (doze) anos de experiência na docência. Ele planejou o ambiente de modelagem para uma turma do 8º ano do Ensino Fundamental II de uma escola pública e estadual do município de Feira de Santana-Bahia. Essa escola localizava-se na zona urbana e periférica do município. Os estudantes da turma eram adolescentes que ainda não tinham objetivos futuros após a escolaridade. A

[5] O curso é um projeto de extensão (Resolução CONSEPE[5] Nº. 111/2011) certificado pela Universidade Estadual de Feira de Santana (UEFS) que ocorreu no ano de 2012 e foi desenvolvido aos sábados, no turno matutino, perfazendo uma carga horária de 40 horas.

forma de organização do ambiente de modelagem proposto pelo professor Chico enquadrou-se, também, no *caso 1*. Com base nisso, o professor selecionou como tema *a utilização racional da mochila escolar*[6], cujo propósito dos problemas foi investigar a capacidade da mochila e relacionar com a massa corporal dos estudantes.

4. Método

O presente estudo tem como método o qualitativo, pois se pretende analisar as ações desenvolvidas em um contexto particular (JOHNSON; CHRISTENSEN, 2012; ALVES-MAZZOTTI, 2002). Neste caso, temos o objetivo de compreender a resitência à transformação do texto pedagógico do planejamento do ambiente de modelagem nas aulas de matemática dos três professores participantes, bem como as razões subjacentes a tal resistência. Assim, para viabilizar o objetivo, utilizamos observação, entrevistas e documentos como procedimentos de produção dos dados.

De acordo com Johnson e Christensen (2012), a observação é um procedimento que possibilita produzir dados pertinentes, permitindo ao observador acompanhar as experiências desenvolvidas pelos participantes no contexto natural. Em vista disso e do objetivo do estudo, a observação foi o principal procedimento metodológico que viabilizou a análise da resistência a transformação do texto pedagógico do planejamento quando os professores implementaram o ambiente de modelagem nas aulas de matemática. A observação foi registrada com uma câmera de vídeo que permitiu produzir os dados momento a momento.

Após a observação, realizamos entrevistas a fim de entender porque os professores resistiram à transformação do texto pedagógico do planejamento de tal forma. Segundo Alves-Mazzotti (2002), o investigador ao realizar a entrevista está tipicamente preocupado em compreender o significado atribuído pelos sujeitos aos eventos ou às situações que fazem parte daquele contexto ou da sua vida cotidiana. Neste estudo, a entrevista foi utilizada como um procedimento de produção dos dados útil para entender a resistência à transformação do texto pedagógico do planejamento do ambiente de modelagem diante da observação das aulas dos professores.

A entrevista foi inspirada em pesquisas que utilizaram os recortes de vídeos para estimular o entrevistador a remeter à situação original (CALDERHEAD, 1981; DENLEY; BISHOP, 2010). Essas pesquisas utilizaram a entrevista *stimulated recall* (lembrança estimulada) para reavivar a memória dos professores logo após aquela situação vivenciada, explicando como aconteceu e as ações que foram tomadas nas respectivas situações. Assim, inspirados neste tipo de entrevista, utilizamos alguns recortes de vídeos das aulas para resgatar e estimular os professores a argumentarem sobre as possíveis razões que levaram a resistir à transformação do texto pedagógico. Para conduzir a entrevista, utilizamos um roteiro de perguntas que foi elaborado a *priori* acerca das situações de sala de aula recortadas e para registrá-la, utilizamos uma câmera de vídeo.

Ao analisarmos as entrevistas, percebemos que os professores justificavam a resistência à transformação pelas decisões tomadas, explicitamente, no guia do planejamento[7] e, por vezes, referiam-se ao mesmo. Assim, esse documento forneceu

[6] A mochila escolar utilizada nesta atividade de modelagem refere-se àquelas que foram disponibilizadas pelo Governo do Estado da Bahia aos estudantes das escolas estaduais.
[7] Este termo foi criado pelo Grupo Colaborativo em Modelagem Matemática (GCMM-UEFS) para representar um plano para elaborar o ambiente de modelagem na sala de aula.

elementos para compreender o objeto de estudo da presente pesquisa. Dessa maneira, os documentos configuraram-se, também, como um procedimento de produção de dados.

Após a coleta dos dados, iniciamos a transcrição e a análise. Essa última foi inspirada na perspectiva metodológica e analítica de Bernstein (1990), o qual propõe uma *linguagem de descrição* que suscita uma reflexão dialética entre os dados empíricos e os conceitos teóricos. Dessa maneira, os dados não são entendidos apenas do ponto de vista teórico, mas da reflexão e da análise do empírico *versus* o teórico, os quais podem comunicar algo a mais que a própria teoria.

5. Apresentação dos dados

Os dados apresentados nesta seção referem-se aos textos de três professores e dos estudantes no desenvolvimento da aula, bem como as entrevistas realizadas com eles após as aulas. Na apresentação dos dados, os textos dos professores e estudantes foram enumerados para facilitar sua localização e relacionados com as letras O (para os dados provenientes da observação) ou E (para os dados provenientes da entrevista) a fim de identificar procedimentos que viabilizaram a coleta de dados. Ademais, enumeramos os textos dos estudantes a fim de preservar suas identidades.

5.1. A resistência à transformação do texto pedagógico do planejamento do ambiente de modelagem

A professora Cau propôs para os estudantes alguns problemas, os quais estão relacionados ao tema reciclagem. A figura abaixo estão os enuncidos dos problemas que foram investigados na sala:

Qual a quantidade de lixo seria possível reduzir com a coleta seletiva e a prática efetiva da reciclagem na nossa escola?

A partir deste questionamento, podemos abordar as questões a seguir:

- Considerando constante a quantidade média de lixo diária produzida pela escola, qual a quantidade de lixo reciclável pode ser prevista para um mês? E para um ano?
- Qual a quantia, em reais, que pode ser arrecada em um mês com a venda do lixo reciclável da escola?

Figura 1 – Problemas retirados do guia do planejamento da professora Cau

No desenvolvimento da atividade, a professora Cau e os estudantes tinham encontrado uma estratégia para suprir a falta de informações coletadas a fim de solucionar a situação-problema. Após a apresentação dessa estratégia, alguns estudantes indicaram a necessidade de outras informações e, particularmente, um estudante contestou essa estratégia utilizada, conforme podemos observar no recorte abaixo:

> **(O1) Estudante 5:** Eu não estou entendendo, porque vamos estipular se nós temos o reciclável e o reciclável também faz parte do total. Como é que vamos estipular, se já temos o reciclável? Não podemos calcular o total em cima do que já temos que é o reciclável?

> **(O2) Professora Cau:** Vamos entender a falha do nosso trabalho. Deveria ser pesado o lixo total e o lixo reciclável para a gente estabelecer uma relação. Como não fizeram o levantamento do lixo total, só fizeram do reciclável então devemos fazer uma estimativa para o total, considerando o reciclável aqui porque não sabemos do que resta para completar o total. É uma saída!
> **(O3) Estudante 5:** Então está, pró!
> **(O4) Estudante 7:** Pró! E como vamos saber quantos alunos tem na escola para calcular o lixo total?
> **(O5) Estudante 10:** Vai à secretaria ali e pergunta.
> **(O6) Professora Cau:** Não precisa não! Eu tenho aqui! Vamos utilizar as informações que tenho aqui da quantidade de alunos da manhã e da tarde. 339 da manhã [Olhando para a sua agenda].
> **(O7) Estudante 10:** 339, só?
> **(O8) Professora Cau:** Essas são informações oficiais da escola quando eu fiz a inscrição da OBMEP. É dado da secretaria.
> **(O9) Estudante 10:** Parece que tem mais como barulho!
> **(O10) Professora Cau:** Embora com a greve saibamos que alguns alunos saíram, devemos considerar este dado como oficial, pois é uma alteração que não influencia muito. E aqui está constando 280 alunos da tarde. Também não sei se houve alguma alteração, mas vamos considerar o que temos. Então, baseado nisso e baseado na outra informação que cada indivíduo produz 0,5 quilo diariamente. Vocês vão agora calcular quanto em 1 dia seria produzido de lixo aqui na escola.

Nesse recorte, há uma atuação dos estudantes na contestação da estratégia utilizada e na sugestão de outras informações para dar conta dessa estratégia. A princípio, um estudante (O1) contestou a estratégia utilizada para solucionar a falta de informações quantitativas, indicando que o valor correspondente ao lixo total poderia ser estipulado de acordo com o valor do lixo reciclável que eles já possuíam. Porém, a professora Cau (O2) não legitimou essa contestação, justificando a falta de informações como uma falha do trabalho e desconsiderando a sugestão do estudante. Isso mostra que a professora resistiu à contestação do estudante que poderia promover outras mudanças, e sendo assim, induziu qual estratégia eles deveriam seguir para resolver essa falha. Com isso, também, entendemos que a professora exerceu um maior controle nas ações dos estudantes para dar conta da falta de informações.

Após a ação da professora, os estudantes começaram a utilizar essa estratégia e questionar outras informações que seriam necessárias para encontrar o lixo total, como por exemplo, a quantidade de estudantes na escola. Um estudante sugeriu que se encaminhasse a secretaria para obter essa informação, no entanto, a professora Cau (O6) indicou que não seria preciso ir à secretaria, pois ela continha essa informação. Posteriormente, a professora (O10) percebeu que a informação que ela forneceu correspondeu a um dado oficial, mas não estava condizente com a realidade da escola, considerando a evasão estudantil no período da greve. Entretanto, a professora reforçou que os estudantes deveriam legitimar a informação e indicou as ações que eles deveriam seguir para resolver a situação-problema. Ou seja, a professora apontou o que eles deveriam reconhecer e o que ela esperava que os estudantes realizassem na atividade. Abaixo, há uma explicação da professora quanto à contestação do estudante e a necessidade de outras informações:

> **(E1) Professora Cau:** Essa questão da falha, como tinha dito antes, foi minha não deles. Eu tinha planejado trabalhar com dados reais. Se a gente tivesse feito a pesagem do lixo total, a gente teria informações mais concretas. Na hora, eu perguntei aos alunos antes como deveríamos resolver isso, mas na verdade eu já tinha pensado antes em uma solução no guia do planejamento, mas uma solução hipotética. Então, eu me guiei baseado nisso. Minha solução hipotética foi baseada em pesquisas, não foi uma mera hipótese. Por isso que eu não achei relevante a ideia do aluno 5, por que se não cairíamos em uma hipótese sem referência. Poderia também ser uma saída a ideia dele, mas não tem referência alguma. E veja que a saída que nós encontramos acabou sendo mais produtivo, em minha opinião, porque tivemos que relacionar com outros dados da escola, como o tempo que os alunos passam na escola, a quantidade de alunos e tudo mais. Agora, essa questão da quantidade de aluno, eu sabia da

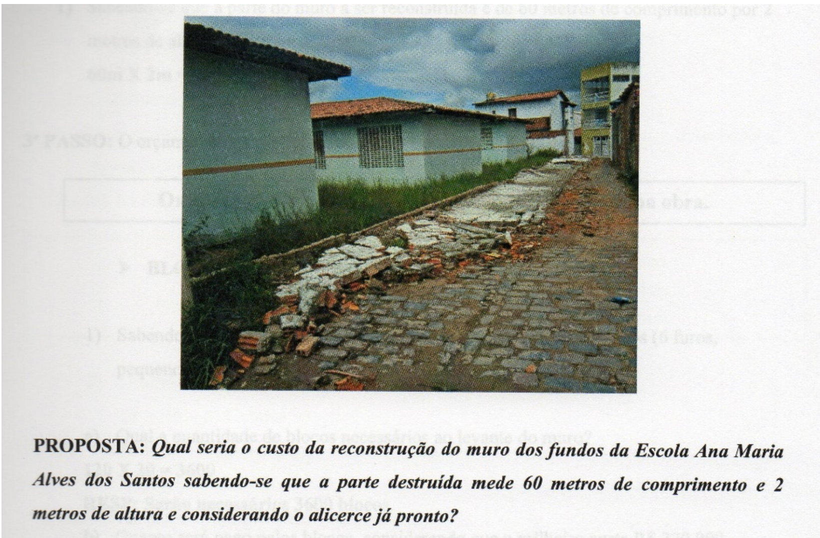
> evasão por causa da greve, mas achei que baseado nos dados oficiais teria soluções mais precisas, até porque nós não tínhamos a informação da quantidade de alunos que saíram. E se fossemos pesquisar isso, na escola, perderíamos muito tempo. A atividade já tinha ultrapassado o tempo que eu tinha organizado.

Nesse trecho da entrevista, a professora apontou que a estratégia utilizada para resolver a falta de informações baseou-se na solução hipotética dada por ela no guia do planejamento. Segundo a professora, a solução hipotética esteve pautada em pesquisas da *internet* cujas informações eram plausíveis e caracterizavam a realidade. Com base nisso, Cau explicou que não considerou cabível a sugestão do estudante. Assim, entendemos que a professora justificou a resistência à sugestão do estudante a fim de conduzir a solução prevista.

Além disso, a professora apontou vantagens em ter desenvolvido a estratégia já conhecida por ela, que resultaram na descoberta de outras informações da escola. Como exemplo disso, a professora citou que a informação referente à quantidade de estudantes consistiu em um dado oficial da escola, embora não estivesse condizente com a realidade, uma vez que a greve gerou uma evasão escolar. Isso mostra que a professora tentou justificar ao máximo a utilização dessa estratégia e de informações oficiais, mas não realística, para percorrer o mesmo caminho proposto por ela na solução hipotética da situação-problema.

Nas aulas dos professores Márcia e Chico, também, encontramos evidências da resistência às mudanças aliada a uma preservação do planejamento a *priori*.

A professora Márcia propôs para os estudantes uma investigação sobre a queda do muro da escola. Essa investigação foi organizada em um problema geral (Ver figura 2 abaixo) e problemas específicos sobre cada material necessário para establecer o levante do muro, tais como: blocos, areia e cimento, brita, ferro, colunas ou pilares e mão de obra do pedreiro.



PROPOSTA: *Qual seria o custo da reconstrução do muro dos fundos da Escola Ana Maria Alves dos Santos sabendo-se que a parte destruída mede 60 metros de comprimento e 2 metros de altura e considerando o alicerce já pronto?*

Figura 2 – Situação-problema retirada do guia do planejamento da professora Márcia

Na aula da professora Márcia, um grupo de estudantes estava resolvendo as situações-problema referentes ao orçamento dos blocos no levante do muro quando a professora interferiu na estratégia de resolução dos estudantes. A fim de compreender a intervenção da professora sob a resolução do problema, mostraremos o que a situação-problema solicitava. A situação-problema foi organizada da seguinte forma:

➢ **BLOCOS**

1) Sabendo-se que para o levante de $1m^2$ de parede utiliza-se 30 blocos (6 furos, pequeno) determine:
a) Qual a quantidade de blocos necessários ao levante do muro?
b) Quanto será pago pelos blocos, considerando que o milheiro custa R$ 320,00?

Figura 3 – Parte da atividade correspondente ao orçamento de blocos

Nesta questão, os estudantes estavam empenhados em encontrar o valor que seria pago pelos blocos (alternativa b), após descobrir que seriam necessários 3600 blocos (alternativa a). A estratégia inicial dos estudantes para resolver a alternativa b) foi dividir os 3600 em partes, no caso, 1000 + 1000 + 1000 + 500 + 100. Assim, os estudantes calcularam os 3 milheiros e, em seguida, calcularam os 500 a partir da metade do milheiro. Para encontrar o valor correspondente a 100 blocos, os estudantes começaram a dividir 500 pela metade. Nesse momento, a professora Márcia aproximou-se do grupo para mediar a discussão dos estudantes:

(O11) Professora Márcia: Como é que vocês estão pensando?
(O12) Estudante 3: A metade de 500.
(O13) Professora Márcia: Ham!
(O14) Estudante 4: 350.
(O15) Professora Márcia: A metade de 500?
(O16) Estudante 4: Eu acho que é...
(O17) Professora Márcia: É quanto?
[Estudantes param e ficam pensando]
(O18) Professora Márcia: Quanto é a metade de 500?
(O19) Estudante 3: 250.
(O20) Professora Márcia: Isso. 250 está bom, mas 250 é um número com 50, não é? Esse 250 não é bom, não é? Se 500 é 160 [reais], ao invés de você pensar em metade, dividido por 2, que dá 250 um número quebrado, você poderia dividir por quanto para dar um número inteiro e redondo?
(O21) Estudante 5: Oh, meu Deus! [risos]
[Estudantes ficam em silêncio]
(O22) Professora Márcia: Então vamos pensar no 1000. 1000 é 320 [reais]. O 100 dentro dos 1000 são quantos pedacinhos?
[Estudantes ficam em silêncio por alguns segundos pensando]
(O23) Estudante 3: 10.
(O24) Professora Márcia: Hum! O 320 [reais] é o 1000. Quanto é o 320 em 10 pedacinhos? Porque se em cima eu dividi em 10 pedacinhos em baixo eu tenho que dividir em 10 pedacinhos. [A professora gesticula com as mãos referindo-se a 1000 em cima e 320 em baixo]
(O25) Estudante 4: E o 500?
(O26) Professora Márcia: Não, esquece o 500. Trabalhem com o 1000.
(O27) Estudante 3: Certo!

Esse recorte mostra a professora Márcia conduzindo os estudantes para uma estratégia diferente do que eles iniciaram na resolução da atividade. A princípio, a professora Márcia (O20) argumentou que o cálculo partindo da divisão pela metade não representava um valor apropriado, uma vez que o 250 terminava em 50. Assim, a professora Márcia (O20 e O22) induziu outros caminhos para os estudantes seguirem na resolução. Com isso, entendemos que a professora tinha a intenção de fazer com que os estudantes encontrassem com a divisão sucessiva o valor imediato correspondente aos 100 blocos, conforme podemos notar nos novos questionamentos da professora (O22) que conduzem a esse caminho. Notemos que do contrário, ou seja, se os estudantes continuassem aquela divisão sucessiva pela metade, eles encontrariam outros valores, não imediato a 100 blocos, mas que poderiam ser agrupados para descobrir o custo correspondente a esses 100 blocos. Ou seja, os estudantes desenvolveriam um caminho mais longo para encontrar esse orçamento.

A primeira interferência da professora Márcia (O20) não gerou resposta imediata dos estudantes, pois o questionamento não pareceu ter promovido uma compreensão deles. A partir disso, a professora (O22) mudou o questionamento induzindo, precisamente, o que ela esperava que os estudantes realizassem na resolução da atividade. Dessa maneira, a professora indicou quais ações os estudantes deveriam reconhecer como legítima para resolver a situação-problema, abandonando a estratégia inicial. Em (O26), podemos observar esse direcionamento da professora, a qual exerceu um maior controle nas ações dos estudantes. Abaixo, há uma explicação da professora em relação a sua mediação no grupo:

> **(E2) Professora Márcia:** Quando eu percebi que aquela divisão daria mais trabalho e mais cálculo, eu tentei puxar para uma forma mais simples e mais rápida. Então, eu percebi que não era uma boa ideia trabalhar com números nem tanto arredondados. Na verdade, eles têm dificuldades com a divisão. E ensinando uma forma mais simples não enfrentariam essa dificuldade. Foi por isso que eu puxei isso dos estudantes.

Neste trecho, a professora Márcia afirmou que sua intervenção no grupo resultou de sua percepção quanto ao caminho percorrido pelos estudantes. Para ela, esse caminho, seguido por eles, não tinha sido uma boa estratégia, uma vez que esse caminho conduzia para uma solução extensa e que, futuramente, geraria uma dificuldade nos estudantes. A partir disso, entendemos que a professora buscou precaver as dificuldades que seriam enfrentadas pelos estudantes. Embora ela tenha justificado uma precaução, esse direcionamento na estratégia de solução dos estudantes expressou um maior controle por parte da professora, bem como gerou uma interrupção no pensamento dos estudantes quando buscavam uma estratégia de solução própria.

Por outro lado, no guia do planejamento, a professora Márcia tinha estabelecido uma solução ainda mais rápida, ao dividir 3600 por 1000 e multiplicando por 320. Entretanto, na aula, ela conduziu a uma divisão diferente, mas com a mesma intenção de desenvolver uma solução rápida. Isso mostra que a professora mudou, porém preservou os princípios e intencionalidades expressos no guia, bem como exerceu um maior controle na comunicação com os estudantes.

Em outro grupo, a professora Márcia contestou a solução dos estudantes da situação-problema referente à quantidade de areia e cimento necessária para o levante do muro da escola. A situação-problema estava subdividida em duas questões. A primeira consistia em uma tabela que mobilizava o conteúdo matemático de grandezas diretamente proporcionais e, com isso, solicitava a quantidade de latas de cimento e areia. Já a segunda solicitava essas quantidades para o levante do muro da escola, sugerindo que os estudantes considerassem a área do muro da escola que correspondia a 120 m^2, e comparassem com os valores da tabela. Abaixo, apresentamos a situação-problema:

➢ **AREIA E CIMENTO**

O cimento e a areia são usados no preparo da argamassa, mistura utilizada para unir os blocos.
Para o levante do muro prepara-se a argamassa misturando uma lata de cimento e oito latas de areia, que chamamos de TRAÇO da argamassa.
Simbolicamente representamos por 1: 8 → lê-se um para oito.
Com essa quantidade é possível levantar $4m^2$ de muro.

1) Baseado nessas informações complete a tabela abaixo sabendo que as grandezas "quantidade de cimento" e "quantidade de areia" são grandezas diretamente proporcionais.

Levante	$4m^2$	$8m^2$		$32m^2$		$128m^2$
Quantidade de cimento (em latas)	1		4			
Quantidade de areia (em latas)	8				128	

2) Observando os resultados da tabela complete: No levante do muro da nossa escola utilizaremos:
a) ______ latas de cimento
b) ______latas de areia
(Lembre-se que é melhor sobrar do que faltar)

Figura 4 – Partes da atividade correspondente à quantidade de areia e cimento

Notemos que abaixo da alternativa b da segunda questão, a professora enfatizou para os estudantes, na própria atividade, que essas latas podem ser contabilizadas acima da quantidade exata para o levante do muro da escola. Esse lembrete sugere que o resultado encontrado será maior que o necessário. Entretanto, na solução da segunda questão, os estudantes registraram a quantidade exata de latas necessárias para a construção do muro, ou seja, subtraíram as quantidades referentes a 128 m^2 pelas quantidades referentes a 8 m^2, encontrando as quantidades de latas para 120 m^2, o que correspondeu exatamente a área do muro da escola.

A solução dessa questão foi registrada pelos estudantes no final da segunda aula. Na terceira aula, a professora iniciou contestando essa solução dos estudantes:

> **(O28) Professora Márcia:** Aqui você não achou 32? Porque aqui: Observando o resultado da tabela complete. No levante do muro da nossa escola, utilizaremos quantas latas de cimento? Aqui fala a quantidade de cimento em latas. Oh, quantas? [Apontando para a última coluna do quadro]
> **(O29) Estudante 6:** 32.
> **(O30) Professora Márcia:** E porque você colocou 30?
> [Estudantes ficam em silêncio pensando]
> **(O31) Professora Márcia:** Aqui também. Quantidade de areia em latas. Quanto é? [Apontando para a última coluna do quadro]
> **(O32) Estudante 6:** 256.
> **(O33) Professora Márcia:** E porque colocou 240? Entendeu? Você vai colocar os valores corretos e aí a gente vai continuar as próximas questões.
> [Após a intervenção da professora, os estudantes apagaram os valores e colocaram aqueles correspondentes à última coluna]

Nesse recorte, a professora Márcia contestou a solução encontrada pelos estudantes conduzindo para outra que ela almejava que eles realizassem na resolução da atividade. Nesse caso, a professora (O28 e O31) apontou que a quantidade de latas de cimento e areia correspondesse aos valores obtidos na última coluna, ou seja, aos valores relacionados a 128 m^2. Notemos que a natureza da pergunta da professora e a sua ação, inibiram a explicação da questão pelo grupo de estudantes, silenciando-os.

Nessa condução, Márcia (O33), também, declarou que aqueles valores é que estavam corretos e, assim, correspondiam àquelas quantidades. Com isso, ela induziu que os estudantes apagassem e registrassem o que foi ratificado. Isso demonstra que a professora exerceu um maior controle nas soluções dadas pelos estudantes e a partir desse controle, os estudantes realizaram as ações estabelecidas pela professora para atender às suas expectativas.

A partir de outro ponto de vista, notamos que no guia do planejamento a professora tinha agendado a solução que ela induziu para os estudantes. Portanto, a intervenção e comunicação da professora no grupo podem ser entendidas como uma preservação dos resultados encontrados por ela, ou seja, na tentativa de legitimar apenas os resultados que ela planejou para a atividade. Nas aulas da professora Márcia, encontramos evidências, também, de um grupo de estudantes contestando algumas informações da atividade a partir de situações do dia a dia, conforme podemos observar:

> **(O34) Estudante 7:** Professora, a gente está fazendo esta conta errada que uma caçamba não tem 5000 quilos! Eu sei que é 5 metros. Eu trabalho em um material de construção.
> **(O35) Professora Márcia:** 5 metros c-ú-b-i-c-o-s.
> **(O36) Estudante 7:** Então!
> **(O37) Estudante 8:** 5000 quilos só se for em uma caçamba de três eixos.
> **(O38) Professora Márcia:** Espera aí, que agora ele disse que é sabido! Vamos discutir.
> **(O39) Estudante 7:** Uma caçamba pega até 4000 quilos.
> **(O40) Professora Márcia:** Não pega não!
> **(O41) Estudante 7:** Pega! Eu trabalho em um material de construção professora!
> **(O42) Professora Márcia:** Ou ela pega 5 ou ela pega 6.
> **(O43) Estudante 7:** Não, não.
> **(O44) Estudante 8:** Tem umas que pega só 3.
> **(O45) Estudante 7:** Tem no tanque da caçamba o tanto do quilo que ela pode pegar. Se passar da balança a federal multa.
> **(O46) Professora Márcia:** Oh! Psiu! Essa informação aí ela é oficial. Você sabe o que é uma informação oficial?
> **(O47) Estudante 7:** Não.
> **(O48) Estudante 8:** Que é superior, vem de cima.
> **(O49) Professora Márcia:** Vem de cima, muito bem! Vem de cima, não sou eu que estou inventando não. Pode ser que na sua loja as coisas sejam feitas com 4 mil, mas o correto é vender 5.
> **(O50) Estudante 7:** Não é não professora. Mas aqui eu vou considerar assim, porque é a senhora que está dizendo!
> **(O51) Professora Márcia:** A gente pode discutir isso melhor no final da atividade.

Nesse recorte, os estudantes 7 e 8 contestaram a veracidade das informações contidas na atividade, especificamente, a quantidade de areia que uma caçamba pode transportar. Baseados em situações do dia a dia e no mundo do trabalho, os estudantes afirmaram que uma caçamba pode transportar até 4000 quilos e outras conseguem transportar apenas 3000 quilos. Além disso, alegaram que a ultrapassagem dos quilos recomendados nas caçambas pode ocasionar infrações de trânsito.

Entretanto, a professora (O40) discordou da contestação dos estudantes e, posteriormente, em (O46) e (O49), justificou que essa informação da atividade constituiu-se como um dado oficial e por isso sugeriu como verdadeira. A partir da justificativa e da posição da professora naquele contexto, o estudante 7, em (O50), argumentou a favor das considerações da mesma em relação as informações contidas na atividade, não obstante discordasse dela.

Portanto, esse trecho mostra a professora exercendo maior controle sob a legitimidade das informações contidas na atividade. Também, notamos a professora sinalizando que aquelas informações devem ser reconhecidas pelos estudantes naquela prática pedagógica. Abaixo, há uma breve explicação da professora em relação à legitimidade das informações:

> **(E3) Professora Márcia:** Para fazer esta atividade, eu pesquisei e optei por fazer essa pesquisa no bairro da escola. Então, as informações eu coletei no bairro em dois materiais de construção. E, depois, fiz uma entrevista com um pedreiro conhecido e um sobrinho engenheiro, para eu ter noções de algumas coisas que na hora que eu estava organizando esse trabalho me pareceram obscuras. Aí, o pedreiro e o engenheiro me ajudaram, mas o pedreiro pela sua prática me ajudou muito mais. Por isso, que quando os estudantes me perguntaram sobre aqueles dados eu informei que eram oficiais, não eram inventados. Eles podem até saber de outros pesos de caçambas, mas o que continha na atividade era um peso correspondente a uma caçamba que existe, porque foi o material de construção e pedreiro que me confirmaram. Então, não poderiam dizer que eram inventados.

Nesse trecho, a professora Márcia explicou que realizou uma pesquisa para elaborar a atividade e informar os dados quantitativos da mesma. Além disso, pontuou que essas informações eram oficiais e verídicas, pois foram pesquisadas em locais ou com pessoas que entendiam da prática de construção. Portanto, Márcia justificou que a legitimidade das informações estava relacionada à pesquisa que ela realizou com especialistas daquela prática. Isso mostra o porquê ela exerceu um maior controle na legitimidade das informações da atividade, as quais deveriam ser reconhecidas pelos estudantes. Por outro ponto de vista, mostra uma resistência da professora em mudar ou incluir outras informações advindas dos estudantes que entendiam, também, daquela prática, ou seja, em preservar as informações e trabalhar apenas com essas.

O profesor Chico propôs três problemas relacionados ao tema mochila, conforme podemos observar abaixo:

Situação-problema:

O uso da mochila ultrapassa os 10% da massa corporal do adolescente?

A mochila suporta o peso dos 5 livros mais o caderno capa dura de 20 matérias?

A mochila é de boa qualidade?

Figura 5 – Situação-problema retirada do guia do planejamento do professor Chico

Na aula do professor Chico, um grupo de estudantes estava reunido discutindo a veracidade das medidas, do volume da mochila, informadas pelo professor para o desenvolvimento da atividade. Nessa discussão, alguns estudantes concordavam com as medidas estabelecidas pelo professor enquanto outros discordavam dessas medidas. No recorte abaixo, os estudantes solicitaram a presença do professor a fim de encontrar um acordo e prosseguirem no cálculo das medidas:

> **(O52) Estudante 1:** Professor, ele está dizendo que o senhor está errado. Ele diz uma coisa e o senhor outra.
> **(O53) Professor Chico:** Faça o que eu digo!
> **(O54) Estudante 1:** Está vendo?
> **(O55) Estudante 2:** Mas está errado!
> **(O56) Professor Chico:** O quê?
> **(O57) Estudante 2:** A profundidade é para dentro. Lembra da profundidade do mar? Como é que profundidade é para o lado?

(O58) Professor Chico: Mas é assim meu filho! Para calcular o volume da mochila você tem que medir a altura, largura e profundidade [indicando as medidas da forma expressa pela figura 6 abaixo]
(O59) Estudante 2: Está errado!
(O60) Professor Chico: Mas é assim! Olhe, volume é igual a H vezes L vezes P [mostrando o cartaz em suas mãos]. Calculem aí!
[Estudantes começam a calcular o volume enquanto o estudante 2 balança a cabeça representando um não]

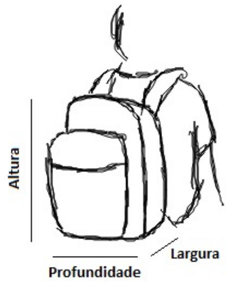


Figura 6 – Representação das medidas do volume indicadas pelo profesor Chico

O recorte acima foi marcado pelo desacordo de alguns estudantes e pela intervenção do professor induzindo os mesmos a concordarem com as suas informações. Notemos que a intervenção do professor Chico (O53) no grupo foi, inicialmente, diretiva ao indicar quem os estudantes deveriam seguir e o que ele (O58 e O60) esperava ser realizado pelos estudantes. Embora o estudante 2, em (O57), tivesse apontado uma incompreensão acerca da localização da profundidade, o professor (O58 e O60) continuou reforçando as suas informações, sinalizando as medidas na mochila e, posteriormente, apresentando as medidas na fórmula em um cartaz. Nesse caso, o professor exerceu explicitamente o controle das ações dos estudantes.

Com isso, entendemos que o professor não se preocupou em entender a explicação do estudante e preservou as informações que ele tinha pesquisado. Portanto, isso mostra que o professor tentou resistir aos textos produzidos pelo estudante, conservando o que ele tinha planejado. Na entrevista, o professor justificou sua intervenção no grupo:

(E4) Professor Chico: Eu fui enfático no grupo, porque aqueles alunos são "retados" e costumam perturbar muito minhas aulas. Eles não prestam muita atenção no que eu dizia durante a aula. Por isso, que eu mediei assim. Agora, quanto às medidas, eu só fui perceber que havia um equívoco em casa. Quando eu olhei as respostas dos alunos e o cartaz, percebi que não estava correto. Daí, em outra aula, expliquei isso melhor a eles e consertei.

O professor Chico argumentou que a intervenção no grupo decorreu da indisciplina dos estudantes. Segundo Chico, os estudantes não prestaram a devida atenção ao que ele comunicava, por isso que sua intervenção foi de natureza mais diretiva e enfática a quem eles deveriam seguir. Essa indisciplina dos estudantes provocou um controle mais explícito por parte do professor, bem como impediu que o professor oportunizasse uma análise dos argumentos do estudante. Notemos que o professor, posteriormente, a partir da análise das soluções dos estudantes, deparou-se com as incompreensões realizadas por ele para representar as medidas do volume da mochila. Isso põe em evidência que o professor não se atentou aos argumentos dos estudantes por conta da indisciplina e resistiu às mudanças e correções das medidas indicadas por ele. Com isso, Chico preservou as informações planejadas a *priori*.

6. Discussão dos dados

Os dados e análises apresentados acima mostram que o texto pedagógico do planejamento do ambiente de modelagem não sofreu algumas modificações quando foi operacionalizado na sala de aula devido à resistência do professor. Baseado na teoria de Bernstein (1990), argumentamos que as modificações refletem a *transformação do texto*. Entretanto, nessa categoria notamos a *resistência à transformação do texto pedagógico do planejamento*, quando o professor evitou que houvesse mudanças textuais.

Aliada a essa resistência, notamos que os profesores tentaram preservar o texto pedagógico do planejamento do ambiente de modelagem planejado *a priori*. Podemos traduzir essa preservação como uma *fidelidade* ao texto pedagógico do planejamento. A partir da análise dos dados, tal fidelidade condicionou as formas de comunicação na prática pedagógica escolar. Ou seja, o professor regulou a comunicação com os estudantes na tentativa de preservar o texto pedagógico do planejamento. Portanto, a resistência à transformação foi condicionada por uma fidelidade ao texto pedagógico do planejamento.

Na tentativa de globalizar os resultados, observamos que os professores Cau, Márcia e Chico mostraram-se resistentes à transformação do texto pedagógico do planejamento do ambiente de modelagem nas seguintes situações: encontrar uma estratégia para a falta de informações coletadas para resolver o problema; contestar as estratégias utilizadas pelos estudantes para solucionar a situação-problema; discordar das contestações advindas dos estudantes em termos da veracidade dos dados contidos na atividade ou a veracidade das informações dadas pelo professor. Em cada uma das resistências, a transformação do texto do planejamento, notamos uma fidelidade ao texto que esteve vinculada às características da relação pedagógica instutuída entre professor e estudantes.

Dessa maneira, a fidelidade ao texto do planejamento ocorreu quando os professores legitimavam apenas: o que eles consideravam como legítimo para os estudantes seguirem, as soluções que eles planejaram a *priori*, as pesquisas realizadas na elaboração do planejamento, o conhecimento matemático mobilizado e suas representações no desenvolvimento da atividade. Nesse contexto, a resistência à transformação e a fidelidade foram marcadas por um maior controle por parte do professor. À luz da teoria de Bernstein (1990), as formas de controle expressam o enquadramento, que no caso desta pesquisa, foi marcado por um enquadramento forte, embora consideremos que os controles assumidos por cada professor apresentaram naturezas diferentes.

Para fundamentarmos isso, traremos outros conceitos teóricos que abordam a lógica de qualquer prática pedagógica. Bernstein (1990) apresenta e examina cinco regras que fundamentam a prática pedagógica. Contudo, notamos que apenas uma dessas perpassou nos dados dessa categoria, a saber: as *regras criteriais*. Essa regra diz respeito aos critérios que se espera que os estudantes (adquirentes) reconheçam e realizem para a produção do texto legítimo àquele contexto comunicativo (BERNSTEIN, 1990). Conforme o teórico, essa regra está relacionada a pelo menos duas outras regras, as quais são denominadas de *regras de reconhecimento* e *regras de realização*. Segundo Bernstein (1990), as regras de reconhecimento dizem respeito às regras que permitem fazer a distinção entre contextos, por meio da identificação das características específicas de um dado contexto, distinguindo entre os textos que são considerados legítimos ou não em uma determinada prática pedagógica. Enquanto que as regras de realização refere-se às regras que criam os meios para a produção do texto legítimo, elas se referem ao como produzir esse texto. Do ponto de vista teórico, as regras de reconhecimento são suficientes, mas não garantem a posse das regras de realização. Isso significa que os estudantes podem reconhecer mas não, necessariamente, realizar o texto legítimo e esperado por aquele contexto comunicativo.

Nas aulas dos professores, observamos que a resistência à transformação aliada à fidelidade ao texto do planejamento foram marcadas por um maior controle por parte do professor às ações dos estudantes ao indicarem o que eles deveriam reconhecer e realizar para atingir as expectativas do professor. Ou seja, o enquadramento foi forte em termos das regras criteriais, de modo que os estudantes produzissem o texto legítimo e considerado como tal pelo professor. Nesse enquadramento forte, os professores explicitavam o quê os estudantes deveriam reconhecer e o quê os estudantes deveriam realizar, em outras palavras, deixavam as regras e critérios claros a fim de que os estudantes tomassem posse das regras de reconhecimento e de realização.

Nos dados, também, encontramos algumas situações particulares que aconteceram nessa categoria. Por exemplo, nas aulas da professora Márcia, notamos que houve diferentes contestações partindo de diferentes sujeitos. Nos dados, referente à solução da quantidade de latas de areia e cimento, a professora contestou a resolução dos estudantes, mostrando uma resistência à transformação do texto e uma fidelidade ao texto. Já nos dados relativo à veracidade das informações, foram os estudantes que contestaram as informações das atividades e dos professores, respectivamente. Em ambos os casos, os professores discordaram das contestações, resistindo às transformações que poderiam ocorrer se concordassem e mostrando uma fidelidade ao texto pedagógico do planejamento.

Segundo Bernstein (1990), qualquer enquadramento carrega consigo os procedimentos para a sua perturbação e contestação, as quais podem provocar mudanças nos princípios de integração social dos estudantes. Entretanto, tanto a perturbação quanto a contestação podem partir do professor ou dos estudantes, podendo subverter as regras de realização. Baseado nisso, entendemos que alguns dados dessa categoria, citados anteriormente, refletem uma tentativa de subverter as regras de realização e as imposições do enquadramento. Porém, analisamos que mesmo a contestação partindo do professor ou dos estudantes havia uma resistência à transformação do texto pedagógico do planejamento, notavelmente, por parte do professor.

Por fim, evidenciamos que as justificativas dadas pelo professor para convencer os estudantes a seguirem o caminho trilhado por eles nem sempre os convenciam, mas a posição instituída por cada sujeito naquele contexto comunicativo fazia os estudantes realizarem o quê os professores almejavam para a atividade.

Além disso, observamos outras particularidades no que tange ás diferentes naturezas do controle assumido pelos professores, embora se caracterizasse por um enquadramento forte. Bernstein (1990) sugere que as variações ou mudanças no enquadramento podem ter graus diferentes. Nessa direção, compreendemos que um mesmo enquadramento pode assumir também graus variados, por exemplo, um enquadramento fraco pode variar em termos do seu grau, ou seja, mais fraco, menos fraco, dentre outros. Nessa categoria, notamos que o enquadramento permaneceu forte em todos os recortes apresentados, entretanto, constatamos que a natureza desse enquadramento teve graus diferentes, a partir da forma como os professores intervieram nos grupos, ou seja, por meio das perguntas ou afirmações colocadas por eles, estando de acordo com a relação pedagógica estabelecida entre professores e estudantes.

A intervenção da professora Cau, por exemplo, tem natureza diferente da intervenção dos demais professores. Devemos tomar a mesma como diferente, pois a professora se preocupava em ouvir as argumentações dos estudantes, embora, por vezes apresentava um enquadramento forte. Já as intervenções dos professores Chico e Márcia são mais diretivas, pois foram marcadas por interrupções nas argumentações ou estratégia dos estudantes a fim de estabelecerem as regras e deixar explícitos os critérios que esperavam ser atingidos. Assim, o controle permaneceu por parte do professor, embora sua natureza fosse diferente.

7. Considerações finais

Do ponto de vista teórico, a transformação textual refere-se a uma característica crucial e inevitável quando o texto se torna ativo no contexto pedagógico, ou seja, quando os estudantes estão envolvidos no processo educativo. Entretanto, uma análise preliminar da literatura sugere que há momentos ou situações em sala de aula que professores foram adeptos “em partes” a transformações textuais ou não foram adeptos a transformação quando os estudantes participam do ambiente de modelagem (ARAÚJO; BARBOSA, 2005; ZBIEK; CONNER, 2006; OLIVEIRA, 2012; SANTANA; BARBOSA, 2012; SILVA; SANTANA, 2012). A análise dos dados apresentadas neste artigo colocou ênfase sobre a *resistência à transformação* do texto pedagógico do planejamento do ambiente de modelagem, ou seja, quando os professores não foram adeptos à transformação.

Além disso, notamos que essa resistência à transformação do texto pedagógico do planejamento foi condicionada pela *fidelidade* ao mesmo. Essa manifestação revela um aspecto novo que não foi localizado pela teoria de Basil Bernstein (1990), mas, neste artigo, essa fidelidade foi analisada a partir de alguns conceitos teóricos, como o enquadramento, o controle, as regras criteriais, as regras de realização e as regras de reconhecimento. Assim, concluímos este artigo fornecendo compreensões teóricas à comunidade de Educação Matemática, lançando novas contribuições as pesquisas que investigam a comunicação pedagógica no ambiente de modelagem matemática.

8. Referências

Alrø, H.; Skovsmose, O. (2006). *O diálogo e a aprendizagem em Educação Matemática.* Belo Horizonte: Autêntica. 158p. (Coleção Tendências em Educação Matemática).

Alves-Mazzotti, A. J. (2002). O método nas ciências sociais. In: ALVES-MAZZOTTI, A. J.; GEWANDSZNAJDER, F. (Orgs.). *O método nas ciências naturais e sociais: pesquisa quantitativa e qualitativa.* 2. ed. São Paulo: Pioneira. Cap. 6-7, p. 129-178.

Araújo, J. L.; Barbosa, J. C. (2005). Face a face com a modelagem matemática: como os alunos interpretam essa atividade? *Bolema: Boletim de Educação Matemática*, Rio Claro (SP), n.23, p. 79-95.

Barbosa, J. C. (2007). Teacher-student interactions in mathematical modeling. In: HAINES, C. ET AL. (Eds.). *Mathematical modeling: education, engineering and economics.* Chischeter: Horwood Publishing. p. 232-240.

Barbosa, J. C. (2009). Integrando Modelagem Matemática nas práticas pedagógicas. *Educação Matemática em Revista*, Sociedade Brasileira de Educação Matemática - SBEM, Ano 14, nº 26, p. 17-25. Março de 2009.

Bernstein, B. (1990). *Class, Codes and Control, volume IV: the structuring of pedagogic discourse.* London: Routledge. 235 p.

Calderhead, J. (1981). *Stimulated recall: a method for research on teaching.* Br. J. Edu. Psychol. 51 211–7.

Denley, P.; Bishop, K. (2010). The potential of using stimulated recall approaches to explore teacher thinking. In: Rodrigues, S. (Ed.). *Using Analytical Frameworks for Classroom Research: Collecting Data and Analysing Narrative.* Abingdon: Routledge, p. 109-124.

Ferruzi, E. C.; Almeida, L. M. W. (2012). Interações dialógicas em atividades de modelagem matemática. *REIEC: Revista electrónica de investigación en educación en ciencias.* (UNICEN), v. 7, nº 1, p. 1-17.

Jacobini, O. R. (2004). *A modelagem matemática como instrumento político na sala de aula.* 215f. Tese (Doutorado em Educação Matemática) – Instituto de Geociências e Ciências Exatas, Universidade Estadual Paulista, Rio Claro.

Johnson, B.; Christensen, L. (2012). *Educational research: quantitative, qualitative, and mixed approaches.* Thousand Oaks: Sage.

Maab, K. (2005). Barriers and opportunities for the integration of modeling in mathematics classes: results of an empirical study. In: BLOMHOJ, M.; BRANDELL, G.; NISS, M. (Eds.). *Teaching mathematics and applications: the 10th ICME***.** Conpenhagen. p. 61-74.

Oliveira, A. M. P. (2010). *Modelagem matemática e as tensões nos discursos dos professores.* 199f. Tese (Doutorado em Ensino, Filosofia e História das Ciências) – Instituto de Física, Universidade Federal da Bahia e Universidade Estadual de Feira de Santana, Salvador.

Oliveira, M. L. C. (2012). A formulação das estratégias utilizadas pelos alunos no ambiente de modelagem matemática. *Acta Scientiae: Revista de Ensino de Ciências e Matemática,* Canoas (RS), v. 14, n.2, p. 295-308.

Rocha, R. (2003). *Minidicionário Ruth Rocha*. 2. ed. São Paulo: Scipione.

Santana, T. S.; Barbosa, J. C. (2012). A intervenção do professor em um ambiente de modelagem matemática e a regulação da produção discursiva dos alunos. *Bolema - Boletim de Educação Matemática,* Rio Claro (SP), v. 26, nº 43, p. 219-248.

Sant'Ana, A. A.; Sant'Ana, M. F. (2009). Uma experiência com a elaboração de perguntas em modelagem matemática. In: CONFERÊNCIA NACIONAL SOBRE MODELAGEM MATEMÁTICA NA EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 6., Londrina. *Anais...* Londrina: SBEM, p. 1-13. 1 CD-ROM.

Silva, L. A.; Oliveira, A. M. P. (2012a). As discussões entre formador e professores no planejamento do ambiente de modelagem matemática. *Bolema - Boletim de Educação Matemática,* Rio Claro (SP), v. 26, nº 43, p. 299-329.

Silva, L. A.; Oliveira, A. M. P. (2012b). A tensão da elaboração da situação-problema no planejamento do ambiente de modelagem matemática. In: SEMINÁRIO INTERNACIONAL DE PESQUISA EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 5., Petrópolis. *Anais...* Rio de Janeiro: SBEM. p. 1-21. 1 CD-ROM.

Silva, M. S.; Santana, T. S. (2012). Os “discursos de distanciamento” dos professores no ambiente de modelagem matemática. In: SEMINÁRIO INTERNACIONAL DE PESQUISA EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 5., Petrópolis. *Anais...* Rio de Janeiro: SBEM, p. 1-21. 1 CD-ROM.

Vasconcellos, C. S. (2010). *Planejamento: projeto de ensino-aprendizagem e projeto político pedagógico.* São Paulo: Libertad. 205 p.

Zbiek, R. M.; Conner, A. (2006). Beyond motivation: exploring mathematical modelling as a context for deepening students’ understandings of curricular mathematics. *Educational studies in mathematics.* New York, n.63, p. 89-112.

Lilian Aragão da Silva. Doutoranda do Programa de Pós-Graduação em Ensino, Filosofia e História das Ciências da Universidade Federal da Bahia (UFBA) e da Universidade Estadual de Feira de Santana (UEFS). Docente do Centro de Formação de Professores da Universidade Federal do Recôncavo da Bahia (UFRB), Campus de Amargosa, Bahia, Brasil. *E-mail:* lilianufrb@gmail.com

Andréia Maria Pereira de Oliveira. Doutora em Ensino, Filosofia e História das Ciências pela Universidade Federal da Bahia e Universidade Estadual de Feira de Santana (UFBA/UEFS). Docente do Departamento de Ciências Exatas da Universidade Estadual de Feira de Santana, do Programa de Pós-Graduação em Ensino, Filosofia e História das Ciências da Universidade Federal da Bahia (UFBA) e da Universidade Estadual de Feira de Santana (UEFS) e do Programa de Pós-Graduação em Educação da Universidade Estadual de Feira de Santana (UEFS). *E-mail:* ampodeinha@gmail.com

UNIÓN
REVISTA IBEROAMERICANA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA
www.fisem.org/web/union
http://asenmacformacion.com/ojs/index.php/union/index

ISSN: 1815-0640
Número 45. Marzo 2016
Página 117-131

Matemáticas aplicadas a la biología

Matías Ezequiel Hernández Rodríguez

Fecha de recepción: 26/09/2014
Fecha de aceptación: 11/02/2016

Resumen	En este artículo, después de una introducción histórica a la matemática, presentamos una breve introducción a la biomatemática. Destacamos las áreas donde la matemática contribuye con la biología, y a modo de ejemplo se presentan dos trabajos: Vacunación óptima para un modelo *SIRS* y Optimización de protocolos de quimioterapia. Por último damos la conclusión del trabajo. **Palabras clave**: Biomatemática, Cáncer, Optimización, Modelos *SIRS*.
Abstract	In this work, we present an historical introduction to the mathematics and next we present an short introduction to the biomathematics. We highlight the main areas which the mathematics works with the biology. By way of example, we explain two papers: Optimal vaccination in a *SIRS* model and Optimal cancer chemotherapy. Finally, conclusion of the paper is presented. **Keywords**: Biomathematics, Cancer, Optimization, *SIRS* models.
Resumo	Neste artigo, apresentamos uma introdução histórica à matemática, e uma breve introdução à biomatemática. Destacamos as áreas nas quais a matemática contribui com a biologia, e a título de exemplo e com finalidade pedagógica, trazemos dois trabalhos: Otimização de vacinação para um modelo *SIRS* e Otimização de protocolos de quimioterapia para o câncer. Por último, apresentamos a conclusão do artigo. **Palavras-chave:** Biomatemática, Cáncer, Optimização, Modelos *SIRS*.

1. Introducción

La historia de la Matemática es casi tan antigua como la del hombre. Existe evidencia de que ya en la prehistoria, motivado por necesidades prácticas tales como cuantificar el tiempo u objetos (como la cantidad de individuos de una manada), medir el tamaño de terrenos, la decoración con cerámica o un comercio muy trivial, nuestros primitivos antecesores hicieron uso de algún conocimiento muy rudimentario de matemática (Redondo, Martín y Pobes, 2010, pp. 167 – 195; Seidenberg, 1978, pp. 301 – 342; Tabak, 2010, pp. 1 – 18) Tal vez la prueba más célebre de la existencia de la matemática en la prehistoria sea el hueso de Ishango. Fue descubierto por Jean Heinzelin de Bracout en el año 1960 en la región de Ishango, ubicada entre Uganda y el Congo. Con una antigüedad de entre dieciocho mil y veinte mil años, este artefacto consiste de un hueso color marrón, que fue parte del peroné de un babuino, con una serie de muescas (ver Figura 1). Se cree que este artefacto además de contar permitía realizar algunas operaciones aritméticas (Buriticá, 2010, pp. 167-195; Huylebrouck, 2006, pp. 135-162).

Figura 1. Hueso de Ishango desde distintos ángulos.
Fuente: Ferrer, S. (2014).

La idea de número estuvo entonces siempre ligada al desarrollo de esta ciencia, y a pesar de que tantos siglos nos separan desde aquel entonces, fue en tiempos recientes que la idea de número quedó formalizada de la mano de matemáticos como, entre otros, Peano, Hilbert, Cantor y Frege (Rey Pastor, Pi Calleja, Trejo, 1960, pp. 1 – 152).

A medida que las sociedades se fueron haciendo más complejas, se enfrentaron a problemas más complicados, y esto motivó el desarrollo de métodos matemáticos también más complejos. Además, el comercio extendido entre regiones cada vez más distantes permitió la interacción de matemáticos de distintos lugares, y esto evidentemente también favoreció el desarrollo de la matemática.

Desde las primeras formas tan primigenias hasta lo que en la actualidad se entiende, o mejor dicho se acepta por Matemática han pasado más de setenta mil años. La historia de la Matemática es como vemos muy extensa, y como todos los quehaceres del hombre para nada lineal. Cada civilización ha dejado su impronta característica, y lo siguen haciendo en el desarrollo actual de la matemática a través de diferentes escuelas tales como, entre otras, la francesa, la americana, la inglesa y la alemana, (Huylebrouck, 2006, pp. 135 – 162).

Tanto la historia como la filosofía de la Matemática nos ayudan a comprender en parte su naturaleza así como estudiar cuestiones ontológicas y epistemológicas. En este plano existen diferentes posturas que van desde una visión platónica de la cuestión, inspirada por Kurt Gödel, hasta una visión completamente materialista de la misma. La mirada platónica de la Matemática, en pocas palabras, significa que los objetos de la Matemática tienen una realidad y una existencia por sí mismos, resultando que estos no se inventan sino que se descubren (Ferreirós, 1999, pp. 446 – 473); vale aclarar que muchos científicos tienen una mirada platónica de la ciencia en general y no sólo de la Matemática (Wilber, 2009). La posición materialista sostiene que las teorías de la Matemática, y por lo tanto la Matemática misma son producto de la mente humana (Bunge, 2014, pp. 7 – 8; Russell, 1983).

Es indiscutible el hecho de que muchas de las teorías matemáticas existentes surgieron por abstracción de problemas concretos de la realidad o de otras disciplinas como, entre otras, la Física, la Ingeniería y la Biología. Luego la teoría puede seguir dos senderos: (a) además de modelar con éxito los fenómenos de interés que la motivaron, continúa desarrollándose hasta llegar incluso a un conocimiento a priori de la realidad; entonces, en este mutuamente enriquecedor ida y vuelta entre las ciencias fácticas y la Matemática, muchos científicos han sentido rayano a lo divino el modo en que la Matemática se ajusta tan perfectamente con los fenómenos de la naturaleza. (b) El otro sendero es mucho menos fructífero desde el punto de vista aplicado y desvía a la teoría de sus fuentes empíricas convirtiéndola en un quehacer puramente teórico. John Von Neumann decía al respecto que:

> Cuando una teoría matemática se aleja de sus fuentes empíricas o, más todavía, si pertenece ya a una segunda o tercera generación inspirada sólo de manera indirecta en ideas procedentes de la “realidad”, le asechan graves peligros. Irá convirtiéndose cada vez más en algo puramente esteticista, más y más. Esto no es algo necesariamente malo, siempre y cuando esa disciplina esté arropada por temas correlacionados que mantengan más estrechas conexiones empíricas, o esté bajo la influencia de hombres de gusto excepcionalmente bien formado. Ahora bien, entraña un grave riesgo que el tema se desarrolle siguiendo las líneas de menor resistencia, que la corriente, tan lejos ya de sus orígenes, se escinda en multitud de ramales intrascendentes, y que la disciplina acabe desembocando en un cúmulo informe de detalles y complejidades. En otras palabras, a gran distancia de sus fuentes empíricas, o tras excesiva endogamia “abstracta”, un tema matemático corre peligro de degeneración (Simmons, 2000, pp. 1).

El debate sobre la naturaleza de la Matemática sigue abierto, más allá de la postura epistemológica que se adopte, a la hora de intentar responder a la pregunta ¿qué es la Matemática?, la siguiente frase de uno de los genios más grande que ha conocido el mundo, nuevamente John Von Neumann, parece ser la más acertada:

> En Matemática uno no entiende las cosas, se acostumbra a ellas.

Llegados a este punto, debemos indicar que no es la intensión de este artículo seguir adentrándose en la epistemología de la matemática sino más bien explorar un proceso que la misma está atravesando en la actualidad, y que en cierta forma nos revela parte de la naturaleza de susodicha ciencia. Este proceso consiste en una apertura por parte de las ciencias fácticas hacia la Matemática como nunca antes se había observado. La relación existente entre la Matemática y ciencias como la Física, la Astronomía y la Economía es algo bien conocido; pero en la actualidad la Matemática está penetrando de manera sorprendente en ciencias como la Biología, la Psicología, la Historia y la Sociología (Britton, 2002; Burt, 2011; Hernández, 2014; McElreath y Boyd, 2007; Momo y Capurro, 2006; Murray, 2001; Ozores, 2014).

El presente artículo se enfoca en la Biomatemática, que es una interdisciplina destinada a estudiar los fenómenos biológicos a partir de las teorías de la Matemática. El conocimiento de esta moderna ciencia, y en particular algunos de los problemas concretos que trata, como los presentados en este artículo, es de vital importancia para el estudiante de matemática pues le proporciona una imagen de la naturaleza de la ciencia que estudia así como su relación con las demás disciplinas y por ende su importancia en la sociedad.

El artículo ha sido organizado como se describe a continuación. En el capítulo 2 realizamos una breve introducción a la Biomatemática, luego ofrecemos dos ejemplos motivadores. Así, en el capítulo 3 presentamos el primer ejemplo: Vacunación óptima para una enfermedad contagiosa (Hernández, 2014, pp. 25 – 35). El capítulo 4 está destinado a presentar el segundo ejemplo: Optimización de protocolos de quimioterapia (Hernández, 2014, pp. 12 – 61). Finalmente en el capítulo 5 daremos la conclusión del artículo.

2. Matemáticas aplicadas a la Biología

Es un hecho innegable que en nuestros días la Matemática está atravesando un momento de gloria en el sentido de que además del desarrollo propio de las teorías abstractas de sus diferentes rama, está teniendo una participación crucial en otras disciplinas de las cuales se nutre y a las cuales, después de dotarlas de un marco teórico adecuado, las impulsa haciéndolas avanzar hacia lugares antes inimaginables.

La Biología es una de esas ciencias, y su vínculo con la Matemática ha tomado un impulso decisivo a principio del siglo XX con las ecuaciones de Lotka – Volterra para modelar la dinámica de un sistema de cazadores y presas, y esto se ha acentuado en las últimas décadas. Es menester aclarar que en siglos pasados ya han existido, aunque en forma más fugaz, encuentros entre la Matemática y la Biología tales como el modelo de Fibonacci, para el crecimiento de conejos; el modelo de Malthus, para el crecimiento de la población humana; el modelo de Verhulst y el modelo de Gompertz para el crecimiento poblacional. La fugacidad de estos encuentros no les quita importancia. Por ejemplo, de las investigaciones de Malthus se inspiró Darwin para desarrollar su teoría de la evolución, la cual es fundamental para la Biología moderna. El modelo de Verhulst ha podido explicar el crecimiento de algunos tipos de bacterias y paramecium (Álvarez, 2006, pp. 73 – 112). La ecuación de Gompertz, por su parte, ha logrado modelar con éxito el crecimiento de tumores (Hernández, 2014, pp. 1 – 8).

Algunas de las áreas de la Biología en las que los modelos matemáticos han contribuido notablemente son, entre otras, las siguientes: crecimiento tumoral (Barrea y Hernández, 2012; pp. 41 – 49; Barrea y Hernández, 2012, pp. 5789 – 5800; Barrea y Hernández, 2013, pp. 35 – 49; Hernández, 2014; Preziosi, 2003; Wodarz y Komarova, 2005), dinámica de poblaciones (Britton, 2002, pp. 1 – 79; Murray, 2001, pp. 1 – 115; Nowak, 2006), modelos para la determinación del sexo según la temperatura de los huevos (Murray, 2001, pp. 119 – 144), epidemología (Allen, 2003, pp. 56 – 153; Bürger, 2010, pp. 7 – 62; Hernández, 2014, pp. 25 – 35), biología celular y molecular (Britton, 2002), farmacodinámica y farmacocinética (Bonate y Howard, 2011; Källén, 2008), dinámica de HIV (Nowak, 2006, pp. 167 – 189) y ecología (Momo y Capurro, 2006).

Podríamos ahondar aún más más en la historia de la biomatemática, así como glosar con más detalle el proceso interdisciplinario que ambas ciencias están viviendo; sin embargo no hay mejor manera para describir este proceso que mediante ejemplos concretos. Para lo primero, se recomienda la lectura de los siguientes trabajos: Engel (1978) y Ozores (2014, pp. 29-38).

3. Vacunación óptima para un modelo *SIRS*

Continuamos ahora con un problema de control óptimo presentado en Hernández (2014, pp. 25-35). Allí se considera un modelo *SIRS*, el cual describe la dinámica de una enfermedad contagiosa sobre una población cuyos individuos pueden estar, respecto a la enfermedad, en uno y solamente uno de los siguientes estados: susceptible, *S*, infectado, *I*, y recuperado, *R*. Las personas susceptibles son aquellas que pueden llegar a enfermarse, las infectadas son las que se encuentran enfermas y las recuperadas son aquellas personas que se curan de la enfermedad. Algunos de estos últimos pueden volver a enfermarse, es decir a ser susceptibles. La retroalimentación de la enfermedad se puede simplificar de la siguiente manera $S \rightarrow I \rightarrow R \rightarrow S$, lo cual da lugar a la notación *SIRS*.

Para la dinámica de la enfermedad se tiene el modelo que figura en el sistema de ecuaciones siguiente:

$$\begin{cases} \dot{S}(t) = \mu\left(1 - \dfrac{S(t)}{K}\right) - \beta S(t)I(t) - (\delta + u(t))S(t)R(t) + vR(t) \\ \dot{I}(t) = \beta S(t)I(t) - (\delta + \varepsilon + \gamma)I(t) \\ \dot{R}(t) = \gamma I(t) - (\delta + v)R(t) + u(t)S(t). \end{cases} \tag{1}$$

En el modelo (1) $S(t)$, $I(t)$ y $R(t)$ denotan respectivamente el número de individuos susceptibles, infectados y recuperados en el tiempo t, y está acompañado por las condiciones iniciales $(S(0),I(0),R(0)) = (S_0,I_0,R_0)$, donde $S_0,\ I_0,\ R_0 > 0$, y además se supone que $0 \leq t \leq T$.

En el modelo anterior, los individuos susceptibles tienen una tasa de nacimiento, μ; pero no crecen indefinidamente sino con una capacidad de soporte, K. Debido a los encuentros entre susceptibles e infectados, algunos de primeros pasan a ser infectados, β representa la capacidad de infectar de la enfermedad, y el término $S(t)I(t)$ indica el número de encuentros entre susceptibles e infectados en el tiempo t. Existe además una tasa natural de muerte, δ, y una proporción de susceptibles vacunados en el tiempo t, $u(t)$, que pasan a ser recuperados.

En cuanto a los infectados la tasa de crecimiento se ve afectada positivamente por los individuos susceptibles que pasan a ser infectados, poseen una tasa de muerte natural, δ, una tasa de muerte por la enfermedad, ε, y una cierta proporción, γ, pasa de ser infectado a recuperado.

Finalmente, la población de recuperados posee como fuentes de crecimiento la proporción de infectados que pasan a ser recuperados y la proporción de susceptibles que son vacunados, y por ende pasan a ser recuperados. Tiene la misma mortalidad que los susceptibles y los infectados; pero suponemos que una proporción, *v*, de recuperados pueden volver a ser susceptibles.

Ahora bien, en un principio se podría pensar en vacunar toda la población de susceptibles con el fin de minimizar el número de individuos infectados, es decir considerar $u(t) = 1$, en el período *[0,T]*. Sin embargo, lamentablemente vacunar tiene un precio económico. Esto da lugar al problema de encontrar una función, *u*, definida y acotada en *[0,T]* tal que minimize los siguientes objetivos: (a) el número medio de individuos susceptible, (b) el número medio de individuos infectados, (c) la cantidad media de personas vacunadas y (d) el negativo de la cantidad media de individuos recuperados (o sea que maximice la cantidad media de recuperados). En lenguaje matemático esto se expresa de la siguiente manera:

$$\min_{u \in U_{ad}} J(u), \qquad (2)$$

donde

$$J(u) = \int_{[0,T]} (w_1 S(t) + w_2 I(t) - w_3 R(t) + \tfrac{1}{2} w_4 u^2(t))dt,$$
$$U_{ad} = \{u : [0,T] \to [0,1] \mid u \text{ es medible}\}.$$

Minimizar *J(u)*, significa encontrar una manera de vacunar a la población, expresada por la función *u(t)* definida en el intervalo de tiempo *[0,T]* de modo tal que se reduscan al mínimo el número de personas susceptibles e infectadas y la proporción de personas vacunadas, lo cual viene dado por $\int_{[0,T]} (w_1 S(t) + w_2 I(t) + 0.5 w_4 u^2(t))dt$. Por otra parte minimizar la cantidad $\int_{[0,T]} -w_3 R(t)dt$, es equivalente a maximizar $\int_{[0,T]} w_3 R(t)dt$, es decir la cantidad de personas recuperadas. Las constantes w_1, w_2, w_3 y w_4 en cierta forma representan el peso que se le da a cada objetivo. Además w_4 habrá de ser un número lo suficientemente grande como para que los integrandos de *J(u)* sean todos del mismo orden de magnitud.

Un problema como el (2), se denomina problema de control óptimo ya que a la función *u*, con la cual en cierta manera controlamos el sistema, se la denomina control. Se busca un control, *u**, que sea óptimo en el sentido de que resuelva (2).

Existen dos maneras de resolver el problema (2): (a) una consiste en discretizar el problema y luego optimizar, que fue el seguido por nosotros luego de haber probado unicidad y existencia de (1) y (2) (Hernández, 2014, pp. 25-35); (b) optimizar y luego discretizar (Hinze, Pinnau y Ulbrich, 2009).

3.1 Resultados numéricos del trabajo

En el artículo Hernández (2014, pp. 25-35) se discretizó el problema, para eso se discretizó el intervalo *[0,T]*, y luego *S*, *I*, *R*, *u*, y *J(u)*. El problema (2) se transforma en lo que se conoce como un problema de optimización finito dimensional que puede ser resuelto utilizando la función fmincon de *MATLAB R2009a*. Allí se considera las siguientes condiciones iniciales: *S*(0) = *1000, I*(0) = *110, R*(0) = 61.

K	***M***	***β***	***Δ***	***N***	***E***
8.000	150	0.0023	0.21	0.1	0.4
Γ	***T***	w_1	w_2	w_3	w_4
0.08	70	10	100	10	10^5

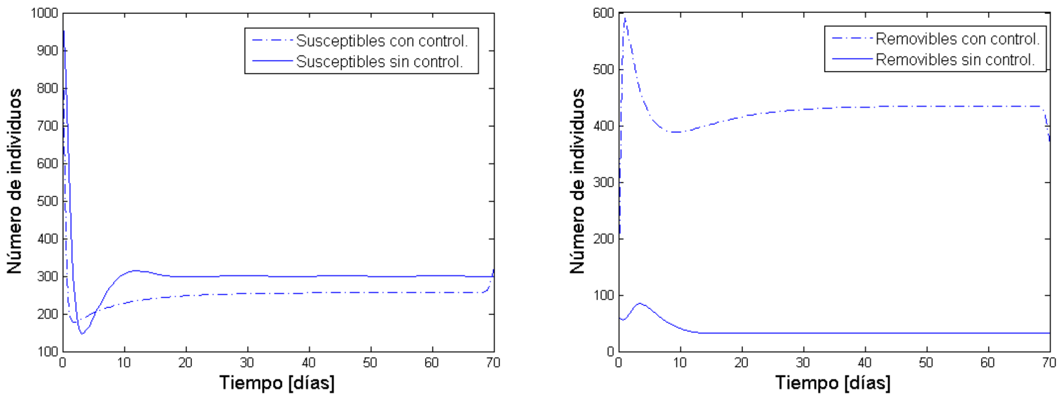
Tabla 1. Parámetros del modelo.

La figura 2 muestra el control óptimo, *u**, la dinámica de la enfermedad sin control, es decir sin vacunar y cuando se vacuna siguiendo *u**.

Como se puede observar en la Figura 2, cuando no se vacuna la población (línea continua), la enfermedad alcanza un estado de equilibrio. En dicho equilibrio la población de infectados se estabiliza cerca de los 125 individuos, la población de susceptibles hace lo propio cerca de los 300 individuos, y la población de recuperados será cercana a los 30 individuos.

Por el contrario, cuando se vacuna siguiendo el control óptimo, la población se estabiliza alrededor de valores bien distintos (línea discontinua). Los susceptibles lo hacen cerca de los 250 individuos, los recuperados superan los 400 individuos, y lo más importante es que la población de infectados desaparece.

Si se observa el control óptimo, este sugiere que inicialmente deben ser vacunados todos los individuos susceptibles; pero cuando la enfermedad evoluciona rápidamente la proporción de individuos a ser vacunados debe ser cercana a 0.55. Esto se mantiene así prácticamente hasta el día 66, donde la proporción desciende abruptamente hasta llegar a cero en el día 70. Se puede observar como a partir de un control que dista de la función constante *u* = *1*, la enfermedad también se puede erradicar, y esto evidentemente a un menor costo.



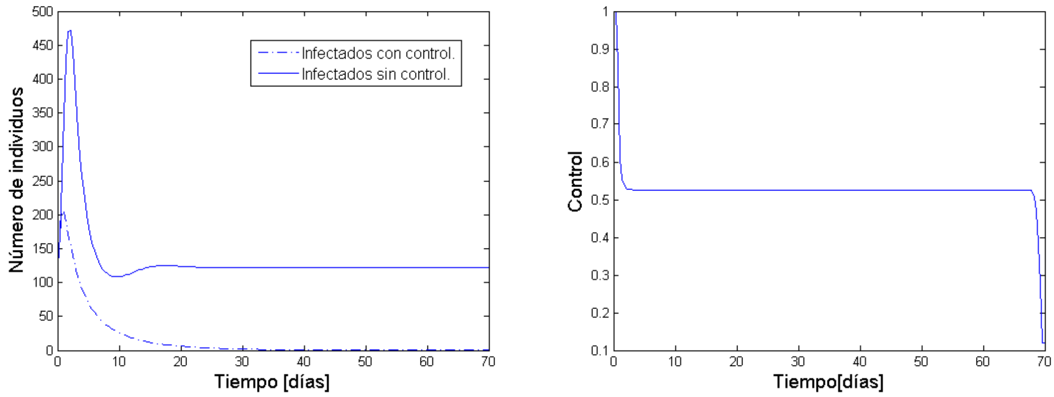


Figura 2. Dinámica de la enfermedad sin control (línea continua) y con el control óptimo. Fuente: Hernández, M. (2014, pp. 25-35).

Por medio de este ejemplo vemos como la matemática puede contribuir a la biología desde diferentes aspectos. El sistema de ecuaciones diferenciales (1) ha probado ser muy efectivo para modelar la propagación de una enfermedad contagiosa, por otro lado la teoría de control óptimo establece la forma de vacunar la población si se desea minimizar los objetivos mencionados anteriormente.

4 Optimización de protocolos de quimioterapia

El último ejemplo que deseamos compartir se refiere a la optimización de protocolos de quimioterapia (Hernández, 2014, pp. 12 – 61). La quimioterapia es una de las técnicas más utilizadas en la lucha contra el cáncer, generalmente los protocolos utilizados, que consisten en la administración de un cóctel de drogas en ciertos instantes de tiempo, están destinados a erradicar la enfermedad, o lo que es lo mismo a eliminar la mayor cantidad de células cancerosas posibles. Esta forma de proceder resulta contraproducente desde varios ángulos, por ejemplo las drogas utilizadas también eliminan células sanas y esto tiene graves efectos secundarios sobre el paciente. Por otro lado, los protocolos destinados a erradicar la enfermedad lo que en realidad eliminan son las células sensibles a la quimioterapia; pero resulta que existe un pequeño grupo de células que son resistentes, y después del tratamiento queda un tumor constituido principalmente por células resistentes. Ese tumor resistente podrá crecer sin que la terapia le haga efecto, el resultado de esto es la muerte del paciente. En la Figura 3 observamos la dinámica de un tumor heterogéneo sometido a una terapia destinada a erradicarlo. El tumor está constituido por células sensibles (verdes) y resistentes (rojas). Inicialmente la mayor parte del tumor está constituida de células sensibles, la terapia tiene efectos sobre estas células y aunque en principio el tumor disminuye después de un tiempo comienza a crecer. Finalmente queda un tumor constituido principalmente por células resistentes.

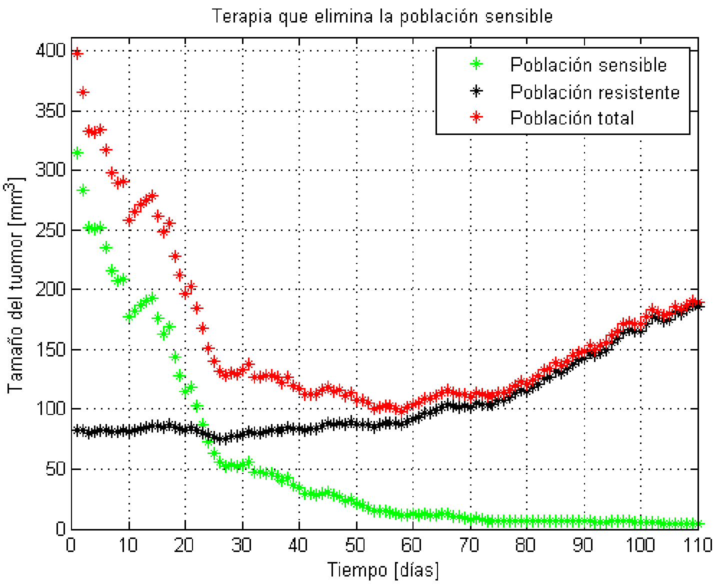


Figura 3. Dinámica de un tumor cuando se aplica una terapia destinada a erradicarlo. Fuente: Hernández, M. (2014).

Se acaba de comentar, son interesantes aquellos protocolos que contemplan no sólo erradicar la enfermedad sino también minimizar la cantidad de drogas utilizadas. Es aquí donde entra en juego la matemática. Lo primero de lo que se debe disponer es de un modelo que describa la dinámica del tumor sometido a terapia. El modelo de Gompertz modela muy bien el crecimiento de tumores (Hernández, 2014, pp. 14) suponiendo un cóctel de *d* drogas que se suministran en los instantes de tiempo $t_1,\ldots,t_n$, el modelo adopta la siguiente forma:

$$\begin{cases} \dot{N}(t) = N(t)\left\{\lambda ln\left(\frac{N_\infty}{N(t)}\right) - \alpha(C,t)\right\} \\ N(0) = N_0, \end{cases} \qquad (2)$$

donde λ es la tasa de crecimiento del tumor, N_∞ la capacidad de soporte más allá de la cual el tumor no podrá crecer, y C es una matriz en la cual el elemento C_{ij} representa la concentración de la droga j suministrada en el tiempo t_i, concentración que se mide en mg/kg. Además α está definida como sigue:

$$\alpha(C,t) = \sum_{j=1}^{d}\sum_{i=1}^{n} \kappa_j C_{ij} e^{-\mu_j \Delta_i t},$$

donde κ_j representa la efectividad de la droga j, c es tal que $t_c \leq t \leq t_{c+1}$ o $c = n$ si $t > t_n$, μ_j representa el decaimiento en el cuerpo de la concentración C_{ij}, y $\Delta_i t = t - t_i$.

Sobre los posibles protocolos, C, se imponen ciertas restricciones que no vamos a describir en detalle para no complicar en demasía lo que queremos explicar; pero si podemos decir que están relacionadas con la cantidad máxima permitida de cada droga en cada instante de tiempo, la cantidad máxima acumulada de cada droga a lo largo de la terapia y el tamaño máximo permitido del tumor. De todos los protocolos que satisfacen esas restricciones, se busca aquel, C^*, junto con un vector de tiempos t^* (cuyas componentes son los instantes de tiempo en los cuales se suministran drogas) que minimicen el funcional $J(C) = w_1 f_1(C) + w_2 f_2(C)$, donde:

$$f_1(C) = \int_0^T N(t)dt,$$

$$f_2(C) = \sum_{j=1}^{d}\sum_{i=1}^{n} C_{ij}.$$

El objetivo f_1 representa el tamaño promedio del tumor a lo largo de la terapia, existen motivos biológicos por el cual elegirlo (Hernández, 2014, pp. 16), y el segundo objetivo, f_2, representa la cantidad total de drogas utilizadas durante la terapia. Entonces, C^* es un protocolo que minimiza el tamaño medio del tumor y la cantidad de drogas utilizadas durante la terapia, cuando se aplica en los instantes de tiempo descritos pos las coordenadas de t^*.

Las constantes w_1 y w_2 representan el peso que se le da a cada objetivo, son números entre 0 y 1, y verifican la siguiente igualdad

$$w_1 + w_2 = 1.$$

4.1 Resultados numéricos del trabajo

El cáncer de vejiga es una de las principales neoplasias en el aparato urinario, para el mismo existe el siguiente protocolo quimioterapia estándar, C_0 :

	Methotrexate	***Vinblastine***	***Doxorubibin***	***Cisplatin***
***t* = 0**	30	0	0	0
***t* = 1**	0	3	30	70
***T* = 14**	30	3	0	0
***T* = 21**	30	3	0	0

Tabla 2. Protocolo estándar C_0

En la tabla anterior el tiempo se mide en días, al primer día en que se suministra drogas se lo considera el día cero.

Puede probarse que este protocolo corresponde a minimizar el funcional $J(C)$ cuando $w_2 = 0$ (Hernández, 2014, pp. 29 – 31, 55), o sea que el protocolo estándar está destinado a erradicar el tumor. La idea es encontrar un par (C^*, t^*) que nos diga cuanta droga suministrar y en qué momento hacerlo con el objetivo de minimizar los objetivos definidos anteriormente. Sobre el vector t^* se supone que su componente inicial es 0, pues es el momento en que comienza a realizarse la terapia, y que, por razones biológicas, su componente final también está fija, y vale T = 28. Esto último significa que se considera la dinámica de la enfermedad durante los 21 días de terapia más una semana de descanso. El papel de las constantes w_1 y w_2 es muy importante, pues permite ponderar con diferentes pesos los objetivos antes definidos De este modo los protocolos óptimos que encontremos tendrán en cuenta la situación del paciente. Por ejemplo ante un paciente muy sensible a las drogas podría utilizar un protocolo que provenga de ponderar el objetivo f_1 por sobre el objetivo f_2, y viceversa.

El siguiente protocolo, C_1, se obtiene cuando $w_1 = 0.7$ y $w_2 = 0.3$. Es un protocolo que pondera erradicar el tumor por sobre minimizar la cantidad de drogas utilizadas, y puede ser útil ante un paciente que tolere el tratamiento.

	Methotrexate	*Vinblastine*	*Doxorubibin*	*Cisplatin*
***t* = 0**	*3.45*	*4.95*	*6.46*	*33.70*
***T* = 4.31**	*0.76*	*1.09*	*1.43*	*7.25*
***T* = 6.58**	*0.71*	*1.02*	*1.34*	*6.91*
***T* = 8.90**	*0.66*	*0.97*	*1.27*	*6.61*

Tabla 3. Protocolo C_1

El protocolo, C_2, que figura a continuación proviene de darle igual importancia a ambos objetivos, es decir cuando $w_1 = w_2 = 0.5$.

	Methotrexate	*Vinblastine*	*Doxorubibin*	*Cisplatin*
***t* = 0**	4.49	6.14	7.86	38.33
***T* = 5.45**	1.13	1.52	1.93	8.84
***T* = 7.91**	1.10	1.43	1.82	8.41
***T* = 11.01**	1.02	1.37	1.75	8.05

Tabla 4. Protocolo C_2

Por último se presenta el protocolo, C_3, obtenido cuando $w_1 = 0.3$, $w_2 = 0.7$. Este protocolo podría ser útil para un paciente que sea muy sensible a las drogas.

	Methotrexate	*Vinblastine*	*Doxorubibin*	*Cisplatin*
***t* = 0**	*5.39*	*7.28*	*9.28*	*44.09*
***T* = 6.97**	*1.47*	*1,91*	*2.42*	*10.86*
***T* = 9.68**	*1.34*	*1.80*	*2.28*	*10.30*
***T* = 12.53**	*1.28*	*1.72*	*2.18*	*9.81*

Tabla 5. Protocolo C_3

Cuando se hace variar w_1 desde 0 hasta 1, con lo cual w_2 varía desde 1 hasta 0, y se va resolviendo el problema de optimización, entonces se obtiene lo que se conoce como frente de Pareto. El frente de Pareto contiene todos los posibles protocolos óptimos. Este se observa en la curva que se muestra en la Figura 4, junto con los protocolos óptimos C_1, C_2 y C_3.

Como se acaba de indicar para calcular numéricamente el frente de Pareto, se hace variar w_1 desde 0 a hasta 1, el paso considerado fue de $h = 1 / 300$.

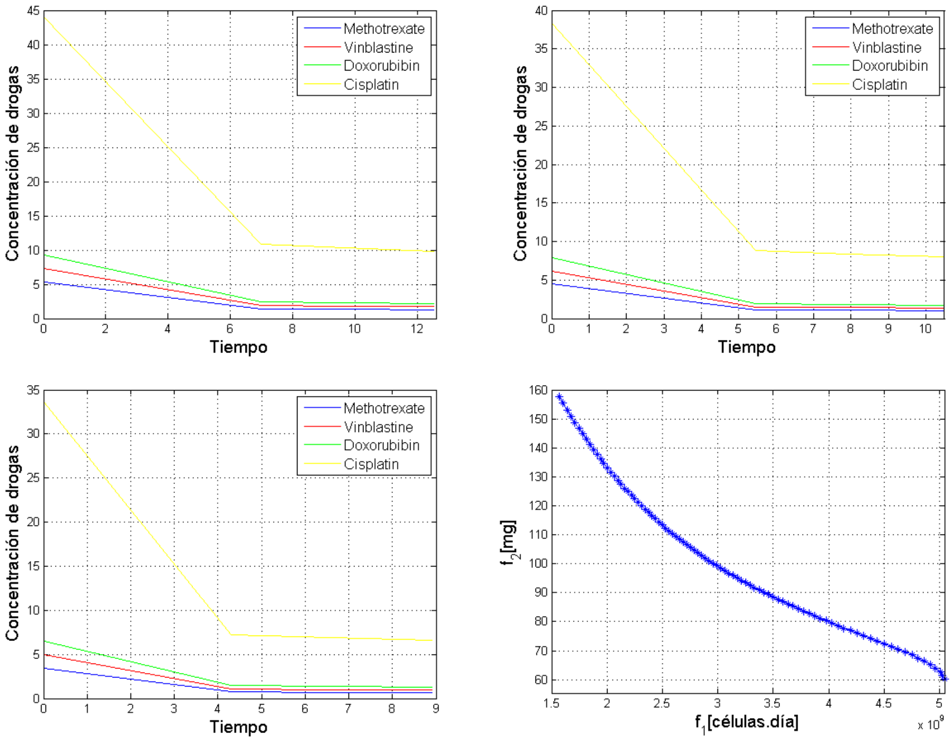


Figura 4. De izquierda a derecha, y de arriba hacia abajo, *C₁*, *C₂*, *C₃* y el frente de Pareto. Fuente: Hernández, M. (2014).

De manera muy particular, este ejemplo ilustra otra aplicación de la matemática a la biología, en este caso más bien a la medicina. Por ejemplo los protocoles obtenidos indican que las drogas deben suministrarse en dosis de mayor a menor, esto es acorde con la experiencia clínica. Además nos dicen cuanta droga exacta suministrar y cuando hacerlo con el fin de minimizar los objetivos que hemos definido anteriormente.

5. Conclusiones

Desde antes del siglo XX han existido encuentros más bien efímeros entre la matemática y la biología tales como el modelo de Fibonacci, para el crecimiento de una población de conejos y los modelos de Malthus, Verhulst y Gompertz para el crecimiento de la población humana. La fugacidad de estos encuentros no les resta importancia en absoluto. Por ejemplo las teorías de Malthus inspiraron a Darwin a formular su teoría de la evolución, el modelo de Verhulst permite explicar el crecimiento de ciertas bacterias y paramecium, y la ecuación de Gompertz describe con exactitud el crecimiento de los tumores.

Desde comienzo del siglo XX, con la aparición de las ecuaciones de Lotka-Volterra, hasta la actualidad, la matemática ha penetrado en ciencias tan diversas como, entre otras, la sociología, la epidemiología, la biología, la psicología y la historia.

En este artículo no hemos entrado en el aspecto fenomenológico ni epistemológico de la biomatemática, sino que después de una breve introducción a la misma presentamos dos ejemplos concretos con el objeto de ilustrar de qué manera la matemática, mediante sus diversas teorías, colabora con la biología.

El primer ejemplo versa sobre como vacunar de manera óptima una población sobre la cual se propaga una enfermedad contagiosa descripta por un modelo *SIRS*. Como pudimos observar es posible erradicar la enfermedad en 70 días sobre los cuales la mayor parte del tiempo solo se necesita vacunar aproximadamente la mitad de los individuos susceptibles.

El segundo ejemplo presentado tiene que ver con la optimización de protocolos de quimioterapia. Los resultados numéricos para un cáncer de vejiga nos brindan protocolos que no sólo están destinados a erradicar la enfermedad sino también a minimizar la cantidad de drogas utilizadas. De esta manera se puede atender las necesidades del paciente dependiendo de su resistencia a las drogas utilizadas. Otra cuestión interesante que los resultados numéricos proporcionan es que las drogas se administran en dosis que van de mayor a menor, y esto coincide con los estudios clínicos.

Bibliografía

Allen, L. (2003). *An introduction to Stochastic Processes with applications to biology.* Pearson, New Jersey. USA.

Barrea, A., y Hernández, M. (2012). *Fuzzy multiobjective optimization for chemotherapy schedules. Mathematics Applied in Science and Technology,* (4), 1, 41-49.

Barrea, A. y Hernández, M. (2012). *Pareto front for chemotherapy schedules. Applied Mathematical Sciences,*(6), 116, 5789-5800.

Barrea, A. y Hernández, M. (2013). *La teoría de control aplicada a la quimioterapia contra el cáncer. Simposio Argentino de Investigación Operativa,* 35-49.

Bonate, P. y Howard, R. (2011). *Pharmacokinetics in drug development: advance and applications.* Springer, New York. USA.

Britton, N. (2002). *Essential Mathematical Biology.* Springer, New York. USA.

Bunge, M. (2014). *La ciencia, su método y su filosofía.* Penguin Random House Grupo Editorial, Bs. As. Argentina.

Bürger, R. (2010). *Introducción al modelamiento en biomatemática.* Universidad de Concepción, Concepción. Chile.

Buriticá, O. (2010). *Determinación simple de un número primo aplicando programación funcional a través de DRSCHEME. Scientia et Technica,* 2(45), 155-160.

Burt, G. (2011). *Conflict, complexity and mathematical social sciences.* Emerald Group Publishing Limited, London. United Kingdom.

Engel, A. (1978). *Elementos de biomatemática.* Universidad Estadual de Campinas, Campinas. Brasil.

Ferreirós, J. (1999). *Matemática y platonismo. Gaceta de la Real Matemática Española,* 2, 446-473.

Ferrer, S. (2014). Un viaje en el tiempo en busca de la primera calculadora científica. Sección: Matemáticas, Física y Química. *SINC. La ciencia es noticia* [en línea]. Recuperado el 21 de septiembre de 2014, de http://www.agenciasinc.es/Reportajes/Un-viaje-en-el-tiempo-en-busca-de-la-primera-calculadora-de-la-humanidad.
Hinze, M, Pinnau, R. y Ulbrich, M. (2009). *Optimization with PDE constraints.* Springer, New York. USA.
Hernández, M. (2014). *Optimización y sustentabilidad de protocolos de quimioterapia.* Universidad Nacional de Córdoba, Córdoba. Argentina.
Hernández, M. (2014). *Vacunación óptima de un modelo SIRS. Revista de Educación Matemática Argentina*, (29) 2, 25-35.
Huylebrouck, D. (2006). *Mathematics in (central) Africa before colonization. Anthropologica et praehistorica*, 117, 135-162.
Källén, A. (2014). *Computacional pharmacokinetics.* Chapman & Hall/CRC, New York. USA.
McElreath, R., Boyd, R. y Trejo, C. (2007). *Mathematical models of social evolution: a guide for the perplexed.* The University of Chicago Press, Chicago. USA.
Momo, F. y Capurro, A. (2006). *Ecología matemática: principios y aplicaciones.* Ediciones Cooperativas, Bs. As. Argentina.
Murray, J. (2001). *Mathematical Biology: an introduction.* Springer, New York. USA.
Nowak, M. (2006). *Evolutionary dynamics: exploring the equations of life.* Harvard University Press, Cambridge. USA.
Ozores, A. (2014). *Un vistazo a la Biomatemática. Revista de Didáctica de la matemática Números,* 86, 29-38.
Presiozi, L. (2003). *Cancer modelling and simulation.* Chapman & Hall/CRC, Florida. USA.
Redondo, F., Martín, M. y Pobes, E. (2010). *Prehistoria de la matemática y la mente moderna: Pensamiento matemático y recursividad en el Paleolítico franco-cantábrico. Dynamis*, 30, 167-195.
Rey Pastor, J., Pi Calleja, P. y Trejo, C. (1960). *Análisis Matemático I.* Kapeluz, Bs. As. Argentina.
Russell, B. (1983). *El conocimiento humano.* Orbis S.A., Bs. As. Argentina.
Seidenberg, A. (1978). *The origin of mathematics. Archive for History of Exact Sciences,* 18(4), 301-342.
Simmons, G. (2000). *Ecuaciones diferenciales. Con aplicaciones y notas históricas*. McGraw-Hill, Madrid. España.
Tabak, J. (2010). *Mathematics and the laws of nature: developing the languaje of science*. Facts on File, New York. USA.
Wilber, K. (2009). *Cuestiones cuánticas: escritos místicos de los físicos más famosos del mundo*. Kairós S.A., Barcelona. España.
Wodarz, D. y Komarova, L. (2005). *Computational biology of cancer: lecture notes and mathematical modeling.* World Scientific Publishing, London. United Kingdom.

Autores:

Matías Ezequiel Hernández Rodríguez: Doctor en Matemática por la Universidad Nacional de Córdoba, Argentina. Investiga problemas relacionados a la optimización de quimioterapia contra el cáncer y es catedrático en la Facultad de Ciencias Físico Matemáticas y Naturales de la Universidad Nacional de San Luis, Argentina.
mehernandez@unsl.com.ar

REVISTA IBEROAMERICANA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA
www.fisem.org/web/union
http://asenmacformacion.com/ojs/index.php/union/index

ISSN: 1815-0640
Número 45. Marzo 2016
Página 132-151

O que podem as oficinas de Geometria? Cartografia de uma sala de aula da Educação de Jovens e Adultos

Paola Judith Amaris Ruidiaz

Fecha de recepción: 12/04/2014
Fecha de aceptación: 03/03/2016

Resumen	Este artículo gira en torno a: *¿Cómo los talleres de Geometría pueden accionar otros modos de estar en la relación educador-educando en una sala de clases de la EJA?* – la EJA es un tipo de educación supletoria a la educación formal, en Brasil. Se practica la cartografía, relacionada a la producción de subjetividad humana, como movimiento metodológico. Así, se cartografía el proceso educador/educando y las posibilidades de la relación dialógica entre ellos. Fueron diseñados y realizados talleres de Geometría, como dispositivo disparador y de intervención durante un semestre de clases. Se analizó la relación dialógica **–** estudios de Paulo Freire – relaciones de poder y dispositivo como propuestas de Michel Foucault y Gilles Deleuze. **Palabras clave**: producción de subjetividad; relaciones de poder; enseñanza geometría; dispositivo.
Abstract	This article is around the following question: What the Geometry workshops can rigger other ways of being in the relationship between educator-student in a classroom of EJA? – EJA is a type of supplementary education to regular education, in Brazil. Mapping practice in relation with human subjectivity as methodological movement. This study is mapping the processes educator/student and the possibilities of dialogue between them. We designed Geometry workshops as a driver and intervention device in the classroom. We analyzed the dialogic relationship, as contextualized in Paulo Freire studies and power relationships as proposed by Michel Foucault and Gilles Deleuze. **Keywords:** production of subjectivity; power relations; geometry education; device.
Resumo	Este artigo gira em torno da seguinte pergunta: *Como as oficinas de Geometria podem disparar outros modos estar na relação educador-educando numa sala de aula da EJA?* – EJA é um tipo de educação supletiva à educação formal, no Brasil. Praticamos a Cartografia como movimento metodológico–relacionada à subjetividade humana. Cartografaram-se o processo educador/educando e as possibilidades da relação dialógica entre estes. Desenharam-se e realizaram-se oficinas de Geometria, olhando-as como um dispositivo acionador e de intervenção dentro da sala de aula. Analisaram-se a relação dialógica –estudos de Paulo Freire –, as relações de poder e de dispositivo propostas por Michel Foucault e Gilles Deleuze. **Palavras-chave**:produção de subjetividade; relações de poder; ensino da geometria; dispositivo.

1. Introducción

Este texto, não pode ser visto como um resultado ou uma conclusão de um processo, pois faz parte das marcas[1] feitas no caminho da pesquisa. Agora é parte de um acúmulo como pesquisadora. Que por aquelas marcas teve que se movimentar para produzir este artigo, em que se mostra a cartografia como uma possibilidade metodológica e, sobretudo, como uma produção de subjetividades quanto dos estudantes participantes desse processo, como da pesquisadora.

Ao longo deste artigo, conceitos foucaultianos e deleuzianos como Dispositivos, Relações de Poder, Cartografia, Subjetividade irão se mostrando como base central da discussão teórica[2]. Paulo Freire (1977,1978) é fundamental nesse trabalho, pois sua proposta de relação educador-educando atravessou toda a pesquisa. Dispositivos outros podem aparecer, causar marcas e podem se tornar parte central da subjetivação produzida por esse texto. Pois a abordagem atravessa suas conexões, pelos seus agenciamentos, pelas suas fissuras, pelo meio. Onde tudo pode acontecer.

No percurso desse texto a escola é atravessada por uma frase de Nietzsche: "familiar é o habitual; e o habitual é o mais difícil de `conhecer´, isto é, de ver como problema, como alheio, distante, `fora de nós´" (2001, p.251). Sendo assim, esta pesquisa foi feita numa Escola Estadual com estudantes pertencentes à Educação de Jovens e Adultos (EJA) da oitava série do Ensino Fundamental (no grupo pesquisado as idades oscilavam entre 17 a 65 anos), num município do Estado de São Paulo – Brasil, chamado Rio Claro.

Assim, diferentes caminhos foram atravessados, diferentes visões foram confrontadas. As multiplicidades e singularidades, produção de subjetividades e demais agenciamentos provocados no processo investigativo estão presentes neste texto e é parte da construção deste artigo e da necessidade de construí-lo. Um devir[3] artigo. Dessa maneira, diversas linhas vão se tecer, sendo a primeira linha a construção narrativa teórica do dispositivo e dos seus agenciamentos. Isto é parte fundamental na compreensão do processo cartográfico, pois "desemaranhar as linhas de um dispositivo é, em cada caso, traçar um mapa, percorrer terras desconhecidas, é o que Foucault chama de trabalho em terreno" (Deleuze, 1990, p. 155). Caminhando pelo dispositivo escola, dispositivo EJA, dispositivo aula de matemática, desdobrando-nos num *caminho através* que faz parte da fissura da investigação, pois abordaremos nosso movimento metodológico junto com a pesquisa de intervenção feita por meio do dispositivo oficina. Ao fim, a Arca russa, a cartografia de alguns "personagens rítmicos" que fizeram parte do território habitado. Nesse caso, serão apresentados dois personagens dos seis feitos no

[1] No entanto, na medida em que fui mergulhando na memória para buscar os fatos e reconstituir sua cronologia, me vi adentrando numa outra espécie de memória, uma memória do invisível feita não de fatos mas de algo que acabei chamando de "marcas (...)". (Rolnik, 1993).

[2] Teoria é aqui entendida junto a Michel Foucault e Gilles Deleuze quando afirmam que: "as relações teoria-prática são muito mais parciais e fragmentárias. Por um lado a teoria é sempre local, relativa a um pequeno domínio e pode se aplicar a um outro domínio, mais ou menos afastado (...) por outro lado, desde que uma teoria penetre em seu próprio domínio encontra obstáculos que tornam necessário que seja revezada por outro tipo de discurso (é este outro tipo [de discurso] que permite eventualmente passar a um domínio diferente (...) É por isso que a teoria não expressará, não traduzira, não aplicará uma prática: ela é uma prática. Mas local e regional (...) não totalizadora". (Foucault, 1979, pp.69-71)

[3] Devir é jamais imitar, nem fazer como, nem justar-se a um modelo, seja ele de justiça ou de verdade. Não há um termo de onde se parte, nem um ao qual se chega ou se deve chegar. Tampouco dois termos que se trocam. A questão "o que você está se tornando" é particularmente estúpida. Pois à medida que alguém se torna, o que ele se torna muda quanto ele próprio [...]. (Deleuze & Parnet, 1998, p.10)

trabalho de mestrado já concluído, tentando assim desemaranhar suas linhas e cartografias dos dispositivos.

2. Justificativa e o problema da pesquisa

"A angústia produz conhecimento, produz pesquisa". O pensamento se problematiza no momento que ele é violentado; Deleuze acrescenta: "pensar é experimentar, problematizar. O saber, o poder e o si são a tripla raiz de uma problematização do pensamento" (2005, p.124). O ensinar a matemática, muitas vezes pode cair num revés. Mais ainda quando se pensa na relação educador-educando. E na sua ausência dialógica, pois a maioria das vezes essa comunicação cai num só sentido, essa comunicação se baseia muitas vezes em: Faça os exercícios! Qual foi o resultado? Entenderam? Sim ou não, etc. Não é essa uma comunicação. Esquece-se de argumentar, falar matematicamente, duvidar, gerar perguntas, construir conjuntamente o conhecimento. Dessa maneira, sentimos motivados para realizar estudos e contribuições à educação matemática, na área de ensino da geometria, tendo como eixo primordial a relação dialógica educador-educando, para que se chegue a acionar outros modos de estar dentro da relação possibilitando assim estratégias didáticas cuja finalidade é a de criar processos argumentativos e reflexivos entre eles.

Sabemos da importância da relação dialógica educador-educando planteada por Paulo Freire ─ e Michel Foucault ─ nas implicações pedagógicas do diagrama poder-saber ─ que ajudaram nas análises e fez com que suas linhas se apresentem nas relações de poder que impedem um ambiente dialógico na sala de aula. Assim, entendendo com Foucault a existência de vários dispositivos ─ a escola, em particular e em geral, a EJA, os programas oficiais e todos os ditos e não ditos que percorrem a educação e entre eles as oficinas de geometria como um dispositivo acionador, dentro da sala de aula. Centrou-se nosso trabalho em terreno com a seguinte questão: *Como as oficinas podem disparar outros modos estar na relação educador-educando? Esta pergunta implica responder: É possível, através da relação dialógica e da argumentação, criar um ambiente outro em que micro revoluções possibilite alterar, ao menos localmente, as relações de poder que travam mudanças?* Praticou-se a cartografia como pesquisa de intervenção, um trabalho em terreno para desemaranhar esses ditos e não ditos:

> Amparados em Deleuze (2005), Foucault (2009)[4] e Rolnik (1989), em consonância com o pensamento da Filosofia da Diferença, nos apropriamos do método da *cartografia* na realização da produção de dados. Ressaltando que a semântica da palavra cartografia, aqui, se refere à cartografia da subjetividade humana. (Tuchapesk, 2015, p.1310)

Uma possibilidade metodológica para visibilizar os modos de estar dessas relações. Fazer mapas que permita compreender as produções de subjetividades, um convite aos encontros que foram produzidos nesse processo cartográfico. Portanto, esse artigo procura abrir novos territórios. "Um território. Uma área. Um movimento... Vidas" (Clareto & Miarka, 2015, p.806). Abrir espaços para que a vida seja movimentada, para que seja pensada e aberta aos encontros, esse é um sentido, mas não é um fim da cartografia. Aqui se pretende incomodar, questionar,

---

[4] Foucault 2009, refere-se nesse artigo na Edição de Vigiar e Punir do ano 1999.

pois existe a vida que afirma nosso território, nossos personagens rítmicos. "Vidas que movimentam e se movimentam. Talvez perguntar pela efetividade da área seja perguntar pelo movimento de produção de vida. Que tipo de vida uma educação matemática afirma?" (Clareto & Miarka, 2015, p.806).

3. Narrativas Teóricas

Primeiro, entende-se a Escola[5] como um território existencial[6], um território em que se movimenta a vida, produz-se subjetividades e um espaço em que se geram afetos. Para nós a Escola se produz por um fora que faz produzir o lado de dentro dela, vendo esse último como sua dobra. Esboçando:

Fora,

> É preciso distinguir a exterioridade e o lado de fora. A exterioridade é ainda uma forma (...) e mesmo duas formas exteriores uma à outra, pois o saber é feito desses dois meios, luz e linguagem, ver e falar. Mas o lado de fora diz respeito à força: se a força está sempre em relação com outras forças, as forças remetem necessariamente, feitas de distâncias indecomponíveis através das quais uma força age sobre outra ou recebe a ação de outra. É sempre de fora que uma força confere às outras, ou recebe das outras, a afetação variável que só existe a uma tal distância ou sob tal relação(...). (Deleuze, 2005, p.93)

O lado de fora da Escola é tudo aquilo que pode afetar seu funcionamento, neste caso, todas as políticas que a regem, ao menos as mais visíveis. Não são somente as políticas educacionais que no caso do Brasil são "Os Parâmetros Curriculares Nacionais" (PCN), senão também, as obrigações históricas, sociais, culturais e existenciais que carrega. Essas políticas chegam a ser homogeneizantes e impostas, nas quais a educação tem que cumprir com suas exigências. Um exemplo claro são as competências[7], as quais ao final são discursos incompetentes. Segundo Chauí (1982), "esse discurso começa com discurso ideológico onde pretende anular a diferença entre o pensar, o dizer e o ser, engendrando uma lógica de identificação de todos os sujeitos sociais com uma imagem particular de uma classe dominante" (p.13). De certa forma fica claro, para nós, que estes são *parâmetros internacionais* ─ possivelmente engendrados nas políticas de educação, dos organismos financeiros internacionais, para países deles dependentes.

Agora, tratando da nossa escola, o lugar da pesquisa e tentando desdobra-la com a Escola em geral, fizemos algumas perguntas tentando compreender o espaço da nossa pesquisa, pois tínhamos que perceber como funcionava a escola. Como está organizada? Qual é seu movimento? Foram perguntas que surgiram ao habitar esse território. Mas, essas perguntas foram explicitas pela professora de Matemática[8]:

---

[5] Escola com (E maiúscula se faz referência como aparelho de Estado, e escola com "e" minúscula faz referência à nossa escola pesquisada)

[6] Segundo Deleuze e Guattari (1995): (...) Há território a partir do momento em que componentes de meios param de ser direcionais para se tornarem dimensionais, quando eles param de ser funcionais para se tornar expressivos. Há território a partir do momento em que há expressividade do ritmo (...)

[7] (...) As competências, no caso dos PCN são apresentadas como: "Capacidade de abstração, habilidade, desenvolvimento do pensamento sistêmico, (...) Criatividade, curiosidade, capacidade de pensar múltiplas alternativas para a solução de um problema, (...) são competências que devem estar presentes na esfera social, cultural, nas atividades políticas e sociais como um todo" (Brasil, pp.12-13).

[8] Usaram-se os **Mapas narrativos** para entrevistar aos pesquisados: São as marcas/linguagem feitas com os entrevistados, seja um desenho, um escrito, onde se possam visualizar suas marcas, usa-se como meio para fazer as entrevistas como uma forma de expressão dos pesquisados, para narrar suas histórias.

Não sei se eu vou conseguir passar a sensação que eu tenho da escola: ***cadeia*** *pobre*. Pesquisadora: Por que cadeia pobre? *Professora: Aqui, cadeia... não. Fica forte? Você não vai pôr o nome, né? Da escola? Cadeia. Vou por uma janelinha, toda cheia de grade e aqui também, cheio de grade. Várias janelas, todas com grades. Mas é só para gente pobre. Tem cadeia que vai gente rica, mas essa aqui é só para pobre. Ela é muito cheia de regras, ela tenta imprimir um ar de muitas regras e assim, de seriedade, sabe? Tanto a diretora, quanto as coordenadoras... é uma coisa cheia de regras e quando a gente aperta um pouquinho ou a gente tenta ir à levada deles, né? Falando a mesma língua. Já que é para ser cheia de regras vai ser assim e tal... Eles abrem. Daí eles te botam o dedo na cara, né? Dizendo que é para ser um pouco mais aberto, você não pode ser tão ferro e fogo, você não pode ser tão extremista, você acha que está lidando com pessoas de faculdade não é, é gente pobre... Então, eles tentam dar um ar de seriedade no sentido de falar: "Não. Isso aqui é uma escola, os alunos têm que vir, tem que estudar". Cobram umas coisas muito sem sentido e, por outro lado, eles abrem para uma coisa que... para coisas que tem todo o sentido de você fazer.*

Foucault comenta algumas idéias sobre isso:

> As disciplinas, organizando as "celas", os "lugares" e as "fileiras" criam espaços complexos: ao mesmo tempo arquiteturas, funcionais e hierárquicos. São espaços que realizam a fixação e permitem a circulação, recortam segmentos individuais e estabelecem ligações operatórias (...). São espaços mistos: reais que regem a disposição de edifícios, de salas, de móveis, mas ideias, pois se projetam sobre a organização caracterizações, estimativas, hierarquias (...). (1999, p.135)

Pois bem, segundo Foucault (1999) as Escolas são constituídas como uma sociedade disciplinar, pois é muito mais fácil controlar os corpos e sua vigilância – o que ele fala de "localizações funcionais" –, a disciplina exige a cerca, um lugar fechado. Cada indivíduo em seu lugar. A Escola atravessada por ditos e não-ditos, por subjetividades e, sobretudo, por relações de poder, poderia ser pensada como um *dispositivo*, assumindo o conceito foucaultiano:

> Um conjunto decididamente heterogêneo que engloba discursos, instituições, organizações arquitetônicas, decisões regulamentares, leis, medidas administrativas, enunciados científicos, proposições filosóficas, morais e filantrópicas. Em suma, o dito e o não-dito são os elementos do dispositivo. O dispositivo é a rede que se pode estabelecer entre estes elementos. (1979, p.244)

Um dispositivo desempenha funções importantes e definidas nesse funcionamento. É heterogêneo porque sua natureza é desigual ─ pode ser discursiva ou não, visível ou não visível. Poderia ser a escola um dispositivo se se pensasse nos termos heterogêneo, enunciados ou leis? O discurso pode aparecer como programa de uma instituição, ou como lei justificando a implantação de um dispositivo, ou, ao contrário, como elemento que permite justificar e mascarar estas práticas que permanecem mudas.

Foucault distingue no dispositivo, três instâncias (*Saber, Poder e Subjetividade*) que não possuem contornos definitivos, mas constituem um processo que vem desde o Diagrama poder-saber. Ou seja, vai desde o estudo das prisões e só se supera a partir do estudo das subjetivações na História da Sexualidade. Fazendo um pequeno esboço, discutiremos o poder-saber e depois abrangeremos a produção de subjetividade, que é parte central da nossa discussão nesse artigo*:*

> Temos antes que admitir que o poder produz saber (...) que poder e saber estão diretamente implicados, que não há relação de poder sem constituição correlatada de

> um campo de saber, nem saber que não suponha e não constitua ao mesmo tempo relações de poder (...). (Foucault, 1999, p.30)

Nesse trecho, Foucault propõe a relação poder-saber ao falar da primeira instância é importante compreender que não é localizado─ não existe o poder como substância, ele se mostra só em seu próprio exercício─ assim, onde tem poder há resistência. O máximo que pode acontecer é que certos aparelhos capturem o poder como fazem as instituições, mas, o que captura essas instituições são as intensidades de forças, as relações de poder que interagem umas afetando as outras e estão em contínuo movimento. Enquanto ao dispositivo e a subjetivação, aquele está implícito dentro do processo de *subjetivação*, pois devem produzir sujeitos. Falar de subjetivação é um processo de auto afetação, "(...) uma relação de força consigo, um poder de se afetar a si mesmo, um afeto de si por si" (Deleuze, 2005, p.108).

Pergunta-se: por que toda essa colação teórica? Primeiro, devemos compreender que para cartografar é preciso entender do porquê da cartografia, usando palavras de Deleuze "*É preciso instalarmo-nos sobre as próprias linhas, que não se contentam apenas em compor um dispositivo, mas atravessaram-no" (1990, p. 155)* o dispositivo é constituído por diferentes linhas (sendo para nós dispositivo: Escola, EJA, aula de matemática, Oficinas de Geometria), ou setas que atravessam qualquer espaço, relações de poder envolvidas, as quais produzem subjetividades. A cartografia faz visível o não oculto, ou seja, faz visível algumas dessas linhas, essa é a razão principal da sua prática, explicamos o conceito de dispositivo tentando fazer com que os leitores entendam que existe um guarda-chuva teórico onde começa e baseia-se nossa pesquisa. Cartografa-se o dispositivo. Esse método ou caminho praticado nos fez pensar e refletir sobre nossa ação: como pensarmos nessa relação educador-educando? Dessa maneira, a cartografia ajuda-nos a não tentar compreender, mas, sim, produzir outros modos de estarmos nessa relação, objetivo da pesquisa.

3.1. Dispositivo EJA

Nesse caminho, outro território habitado foi a EJA:

> A formação da EJA é atravessada por diversas leis, normas, discursos que transpassam seu caráter educativo, cujo objetivo é alfabetizar aquela população que, por diversas questões culturais, econômicas e sociais, não teve acesso à educação na idade própria ou pelo fato de serem excluídos da escola "normal", o que os coloca à margem do mercado de trabalho pela sua condição de não escolarizados. Desse modo, a EJA está carregada historicamente de cicatrizes sendo que estas indicam como ela tornou-se o que é hoje. (Amaris, 2013, p.188)

A escola habitada funcionava na seguinte ordem: de dia era uma escola para o ensino fundamental, no caso do Brasil está divido em anos, que vão do 1º ao 9º ano e as idades vão de 6 a 14 anos, cronologicamente um ano para cada série. E no caso da EJA só tinha da quinta série até a oitava série. Assim, era destinada àqueles que não tiveram acesso ou continuidade de estudos no ensino fundamental e médio na idade própria.

Outras linhas se apresentaram dentro do *dispositivo EJA.* Eram os incômodos que produziam a palavra analfabeto e seu uso. Para tentar compreender esse conceito é preciso pelo menos, ter presente que a concepção comum de alguma pessoa analfabeta se reduz a não saber ler e escrever, definição literal e imprópria porque deixa de lado uma realidade que traz consigo no fato da pessoa analfabeta. Mesmo assim, não dá lugar a sua realidade de iletrado. Essa definição de analfabeto tem que partir da sua realidade histórica, ou seja, na sociedade onde ele se encontra, porque até o momento a sociedade mesma não exigiu dele a necessidade de saber ler e escrever porque “aquilo que desconhece é o que até agora não teve necessidade de aprender. Se tem vivido até agora é porque a sociedade não exigia dele o conhecimento” (Pinto, 1979, p.63).

Dessa maneira, segundo Álvaro Viera, o analfabeto,

> Em sua essência, não é aquele que não sabe ler, mas sim aquele, que por suas condições concretas de existência, não necessita ler. Esta é sua definição real. É a exposição de sua essência, porque não apresenta o fato de ser iletrado como um acidente, mas como algo original, essencial, que tem que ser assim, dada sua condição de vida, fundamentalmente de trabalho. Porque se assim não fosse, se necessitasse saber ler para sobreviver, ou bem saberia (e então não haveria o problema) ou então simplesmente não existiria. (1979, p.92)

Outro incômodo: a maioria dos professores da EJA não tiveram escolha ao chegar ali. Ou seja, estão na EJA para tentar completar o salário e chegam à sala de aula depois de uma jornada de trabalho de dia todo e, portanto, cansados. Na sala de aula tudo ─ na escola regular e na EJA ─ flui como se fosse igual o tempo todo. Por que será que os compreendemos e os nomeamos de diferentes nomes?

Analisando essa situação primeira, o mesmo sistema educativo está fazendo com que a EJA fique dessa forma, que seja uma maneira de completar o salário, e depois de um dia de trabalho e nem ter tempo para fazer algo diferente para os alunos da EJA. Determina, então, a partir destas subjetivações concretas que os professores são afetados, que fiquem limitados a aula tradicional, já que é o jeito mais fácil de brincar “do fazer de conta que ensino”. Alguém já disse: giz, lousa e cuspe.

Segundo, aqui também está o descompromisso do professor por não tentar algo contrário. Sabemos que não é fácil escapar aos *novelos* e *linhas emaranhadas* do dispositivo escola ou do dispositivo EJA. Talvez seja mais fácil optar pelo modelo do *Mesmo* porque a escolha figura na *ordem das coisas* e desta forma os professores optam pela reprodução das condições sociais impostas a eles e aos alunos. Muitos estão cientes disso, mas dentro da cotidianidade e do funcionamento das coisas a margem de ação fica muito limitada. Na maioria dos casos, a afetação do dispositivo não dá margem a nenhuma resistência que indique a possibilidade de tentar sair da aula tradicional.

O educador parece ter assumido um *carregador de fardos*[9]. Até onde pode levar esses fardos? Como sair desse mal-estar, desse que carrega fardos, animal pesado, e ir ao leão, esse animal que move a ruptura? Como fazer com que a

[9] (...) Tanto voluntarismo, tanto abnegação, tanta renúncia e, por que não dizer, tanta culpa [...] Quando as coisas não vão bem nas searas da educação, o quanto se acostuma imputar aos professores ─ alegando-se ─ da parte dele apatia, despreparo, ineficiência, desinteresse ou mesmo falta de civismo ─ boa parte das responsabilidades aí implicadas. Como ─ é o que se lhes aponta ─ não fazem jus à nobre missão de que foram investidos? Como, a despeito das imensas dificuldades que cercam sua grandiosa tarefa, podem eles furtar-se a ela? (...). (Costa, 2005, p.1265)

educação se movimente para sair dessas brechas? Para abrir novos desafios, novas experiências? Como potencializar esses incômodos?

Afinal, qual é a produção de subjetividade que está sendo criada na escola?

Escutemos as palavras da professora:

É uma cadeia burra, né? Porque está fechada para certas coisas e no fim, quando você vê, não é de rigor nenhum, né? Porque se todo mundo que entra, mesmo tendo estourado de falta... olha, eles me falaram no começo do ano: "Nesse semestre, quem tiver mais de cento e tantas faltas lá no semestre, não adianta nem vir conversar com a gente. A gente já vai reprovar de cara." O que foi feito? Chegou agora no final, muita gente ia reprovar, ia dar problema para a escola... o que eles fizeram? "Olha, manda fazer um trabalhinho, uma pesquisa qualquer e a gente faz, um trabalho de compensação". Um provão no final que é uma compensação de nota. Então eu, quem tinha a mínima condição de passar, foi passando ao longo das provas, né? Ficou quem? Até eles falam: "Ai professora, você é uma santa." Eu procurei facilitar porque eu sei de todas as agruras, eu sei que esse pessoal é o excluído do excluído, né? É a nota da exclusão, né?

A partir dessas perspectivas, olhando essas características tanto históricas, culturais, políticas e humanas, pode-se perceber que a EJA, é um dispositivo. Como qualquer instituição educativa a EJA tem a relação mestre-estudante, que é uma relação de poder que se constrói através da assimetria do saber. Assim, a EJA se constitui em um dos dispositivos educacionais brasileiros e faz parte também do dispositivo escola.

3.2. Dispositivo aula de matemática

Dessa maneira chegamos ao nosso lugar de encontro. A aula de Matemática. Onde sua interação baseava-se em: *Estudante da EJA: A professora passa um exercício e explica, passa outro e a gente tem que se virar e fazer. Aí se a gente não der conta, ela passa outro e passa outro para a gente fazer... ela vai tentando a gente a fazer. Ela passa a conta, explica e a outra, a próxima, a gente faz sozinha. Aí, se ela ver que tem muita dificuldade, ela passa mais uma, duas, explica de novo e passa mais algumas para a gente fazer sozinha.*

A interação educador-educando ficava nula. Usando palavras de Freire, os professores ficavam como meros "narradores": "Narração de conteúdos que, por isto mesmo, tendem a petrificar-se ou fazer-se algo quase morto, sejam valores ou dimensões concretas da realidade. Narração ou dissertação que implica um sujeito ─ o narrador─ e objetos paciente, ouvintes ─ os educandos" (1977, p. 57). Isso mesmo acontecia na sala de aula, a posição dos estudantes era só a de ouvinte, limitando-se a cumprir seu labor, e a consequência disso é que isso conduz à memorização mecânica do conteúdo narrado, algo "normal" nas aulas dessa escola.

Uma estudante da EJA ilustrará melhor o que acontecia na sala de aula: *a professora faz entender. Ela vai na lousa e faz entender. "Vocês entenderam? " "Não. " Ela explica de novo. "Vocês entenderam? " "Não. " Ela explica de novo. Entendeu? Ela é assim. "Então espera aí que eu vou explicar de novo, presta atenção aqui e assim (...)*

Usaremos esta citação:

> A aprendizagem é entendida com Deleuze (1988) como algo não dado ou previsto na ordem das coisas. Ela ocorre quase por "acaso" nos devires e encontros que a

> vida proporciona a cada um. Como um *puzzle*, as faculdades, habilidades ou competências se encaixam não como algo previsto e organizado em um grande quebra-cabeça, mas na forma quebrada daquilo que traz e transmite a diferença. (De Souza, 2013, p.5)

Caberia perguntar como se dá o pensar nessa aula? Como ele se produz? Será que ali existe algum *acontecimento* ou algum *encontro* que nos faça lembrar que estamos no mundo? Os fardos que carregamos às vezes pesam demais quando insistimos e nos apropriarmos da Matemática enquanto repetição, repetir e repetir. Que tal se nós pensássemos como Manoel de Barros (1993), "repetir, repetir até ficar diferente", ou, pelo menos ter presente como disse Deleuze (2006) "Aprender sem sentir é repetir". Então, como se dá a comunicação nessa aula de matemática? Aqui uma estudante responde essa dúvida: *Eu pergunto, ela responde na hora. Se você não entender... ela está explicando, ela acabou de explicar, se você não entendeu, você pergunta e ela responde, explica de novo. Quando você tem muita dúvida, você leva o caderno, ela explica no caderno, entendeu?*

Tem uma citação de Freire para pensar no que se pode fazer numa sala de aula: Como posso dialogar, se alieno a ignorância, isto é, se a vejo sempre no outro, nunca em mim? Como posso dialogar, se me admito como um homem diferente, virtuoso como herança, diante dos outros, meros "isto", em que não reconheço outros eu? (1970, p.80). Lembrando também que "não há diálogo se não há amor, pois é um ato de coragem". Por que não fazer o mínimo, pergunto? Simplesmente uma pequena reflexão.

4. Movimento metodológico

Escolhemos um caminho através, uma prática cartográfica que segundo Deleuze e Félix Guattari,

> É um caminho que nos ajuda no estudo da subjetividade dadas algumas de suas características (...) é um procedimento **ad hoc,** a ser construído caso a caso (...) processual vai se fazendo no acompanhamento dos movimentos das subjetividades e dos territórios (...). (Kastrup & Barros, 2009, p.76)

Uma pesquisa de intervenção, segundo Passos e Barros (2009, p.17). Estes autores indicam que toda pesquisa é pesquisa-intervenção, pois a intervenção sempre se realiza por um mergulho na experiência que agencia pesquisadores e pesquisados, teoria e prática, num mesmo processo de produção-com-o-outro, da emergência-junto que é inventado nos movimentos do plano da experiência. Neste caso, "conhecer o caminho de constituição de dado objeto equivale a caminhar como esse objeto, constituir esse próprio caminho, constituir-se no caminho. Esse é o caminho das pesquisas de intervenção" (Passos & Barros, 2009, p.32).

Desta forma é um processo mais descritivo do que interpretativo, que visa acompanhar o processo dentro da rede, por isso se escolhe este caminho, porque permite mapear o que acontece dentro dela, dentro do dispositivo**.** Faz visível o não oculto, mergulha nas produções de subjetivações, de subjetividades, de linhas de forças, que se podem encontrar dentro da sala de aula, escola, EJA e oficinas de Geometria.

A pesquisadora é uma antropófaga, porque dela vai depender esse olhar fronteiriço dentro da pesquisa. Nesse momento, a pesquisadora devorou as situações, elementos e sensibilidades possíveis dentro da rede, tornou-se um corpo vibrátil[10], cujos afetos são produzidos por e com as pessoas ao seu redor, dentro do território habitado, olhando todas as relações na rede, como um corpo vibrátil, afetada também por essas forças. Assim, ser antropófago significa, antes de tudo, capturar e ser capturado pelos afetos produzidos naquele território existencial, pois neste movimento vai perceber os fluxos, as fraturas, as invenções, as forças dos processos de subjetivação. É assim como Rolnik diz: "O um verdadeiro antropófago: vive de expropriar, se apropriar, devorar e desovar, transvalorado" (1989, p.3).

Quando se fala de uma pesquisa de intervenção é porque a pesquisadora também habita o território a ser mapeado, engajando-se nele, deixa se impregnar, acompanha os processos, isso implica que deve estar com a pesquisa e não acima dela, ou seja, um saber com e não um saber sobre.

> O "*saber sobre*" busca controlar o objeto de estudo em sua manifestação presente e futura. Conhecer aqui é controlar variáveis da realidade, antecipar o futuro, determinar a regularidade do fenômeno (...). O "*saber com*", diferentemente, aprende com os eventos à medida que os acompanha e reconhece neles suas singularidades. Ao invés de controlá-los, os aprendizes-cartógrafos agenciam-se a eles, incluindo-se em sua paisagem, acompanhando os seus ritmos. (Passos & Alvarez, 2009, p.143. Grifo nosso)

Ao habitar o território temos que identificar os movimentos, os fluxos, as linhas de força (de poder e resistência), a produção de subjetividade, etc. Para isto a antropófaga devora, desenha, faz uma escrita, uma narração. Para olhar esses processos dentro da rede, trabalha com mapas narrativos (Bovo, Gasparotto, Rotondo & De Souza, 2012) e (De Souza & Tuchapesk, 2015), cuja intenção é a de estabelecer uma relação dialógica, pois toda narrativa é um relato, uma viagem "é um desenho que acompanha e se faz ao mesmo tempo em que os movimentos de transformação da paisagem" (Rolnik, 1989, p.23). Dessa maneira, produzem-se dados, mas não se está à procura deles, mas, sim, aos encontros — como é um procedimento *ad hoc*, caso a caso, *o caminho através* não pode ser pensado como um método linear, mas, sim, pensa-se como processualidade e não como processamento.

Por conseguinte, nosso movimento investigativo usa um *caminho através* para olhar dentro da rede os processos e a estruturação da comunicação na sala de aula da oitava série do ensino fundamental na EJA. As oficinas de Geometria são usadas como foco principal de pesquisa de intervenção para visualizar as relações educador-educando, os processos de subjetivação existentes na sala de aula de matemática. Investigando como as relações de poder impedem ou não a existência de um ambiente dialógico na aula.

Os ambientes das oficinas de Geometria pretenderam ser feitas a partir das artes, da criatividade, qualquer meio possível que contribuiu para evidenciar os processos dialógicos em sala de aula. Essas oficinas de Geometria se constituem como um dispositivo que acionou esses processos dialógicos que colaboraram na produção de resistências e afrontamentos à pedagogia tradicional.

[10] Segundo Rolnik (1997), primeiro o olho vibrátil, que faz com que o olho seja tocado pela força do que vê. Segundo, A pele é um tecido vivo e móvel, feito das forças/fluxos que compõem os meios variáveis que habitam a subjetividade. Nesse momento, nosso olho vibrátil capta na pele uma certa inquietação, como se algo estivesse fora do lugar ou de foco

Dessa maneira, o dispositivo oficina: “é, dessa forma, uma série de práticas e de fundamentos que produzem efeitos” (Katrup & Barros, 2009, p.81). Tomar as oficinas de Geometria como agenciamentos que se estabelecem dentro do movimento investigativo cria também condições concretas para que esse *caminho através* possa desemaranhar o dispositivo. Pois a sala de aula foi um lugar de invenção, de si e do mundo. Segundo Katrup e Barros (2009) é um espaço coletivo, como territórios de fazer juntos, os participantes da oficina estabelecem com os materiais trabalhados agenciamentos, “relações de dupla captura” (Deleuze, 1998), criando e sendo criados, num movimento de (co) engendramento, ao fazer e inventar coisas, se inventam relações com as pessoas, como o material e consigo mesmo, o pesquisador estabelece assim, uma invenção de si, por ser subjetivado ao mesmo tempo com o pesquisado.

Nesse *caminho através* que visa o estudo das subjetividades, a investigação se faz através da habitação do território, o que significa abordá-lo por suas conexões, bifurcações, agenciamentos. Portanto, também há uma produção de realidade, pois abarcam tanto sua produção de subjetividade quanto a dos territórios. Neste caso, o dispositivo oficina de Geometria se caracteriza pelo seguinte:

> Capacidade de irrupção naquilo que se encontra bloqueado pela criação, é seu teor de liberdade em se desfazer de códigos, que dão a tudo o mesmo sentido. O dispositivo tenciona, movimenta, desloca para outro lugar, provoca outros agenciamentos. Ele é feito de conexões e, ao mesmo tempo, produz outras. (Kastrup & Barros, 2009, p.90)

Dessa maneira, intervimos a sala de aula da oitava série com oito oficinas: foram trabalhadas através de dois temas fundamentais da Geometria da Oitava série o Teorema de Pitágoras e Teorema de Tales. Trabalhada por médio do Tangram, regras de Cusinaire, Filme “O Pato Donald’s e o mundo da Matemática”, quebra cabeças, trabalhos em grupos e demais ferramentas que ajudaram a acionar outro tipo de relação educador-educando. Pensando as oficinas como meio de potencializar e conceber a educação matemática como uma produção coletiva de conhecimento permitindo, assim, acionar os modos de subjetivação no movimento aprender dialogicamente a Geometria.

Nessa instância o dispositivo oficina foi um disparador:

> Fazendo que se produzam modos de ser aluno, de ser professor, de aprender e ensinar acordados com uma certa verdade transcendente (...) porém há uma mobilidade nos dispositivos; as linhas são todas linhas de variação (...) então os dispositivos tem as linhas de ruptura, de fratura, que permitem que outros dispositivos sejam acionados. Fraturar, quebrar, inventar. (Rotondo & Marocco, 2012, p. 19)

Quando se fala que outros dispositivos sejam acionados, quer dizer que nossa proposta de pesquisa começou localizando a EJA como dispositivo, agora as oficinas vão ser consideradas como um dispositivo disparador, que se aciona dentro da EJA, produzindo agenciamentos na produção conjunta de aprender a Geometria:

> Produzir um novo corpo sem amarras na imanência do viver. O dispositivo acionando a produção do conhecimento, a invenção, a produção de um si e de um mundo junto à produção matemática. A matemática sendo produzida como problema, com problematização, por necessidade. (Rotondo & Marocco, 2012, p.19)

Um exemplo disso foi no diálogo criado numa oficina ao assistir o filme “O Pato Donald’s e o mundo da Matemática”. A ideia era usar o cinema como uma forma de linguagem histórica e cultural, fornecedor fundamental de qualquer processo educativo, para tentar acionar a relação dialógica por meio das experiências visuais:

Pesquisadora: contem-me o que sentiram ao assistir esse filme, gostaram? Será que a Geometria é assim como a mostra o filme que está em todo lugar?

Estudante 1: eu adorei esse filme pois de uma forma divertida aprendemos que tudo em nossa vida tem Matemática, a parte que mais gostei foi quando ele explicou o jogo das damas de um jeito diferente.

*Estudante 2**:** Eu nunca imaginei que tudo fosse Matemática ou Geometria, foi bom ver que tudo o que está ao nosso redor é Matemática, Por que o que a gente aprende não é assim. Por que não a ensinam desse jeito?*

Estudante 3: Eu acho porque é difícil mesmo perceber a Matemática que está nosso redor, ninguém se detém para pensar nisso, responde ela à pergunta da Estudante 2.

*Estudante 4**:** Eu acho que a Matemática é difícil, mas também é muito importante, em todos os lugares tem Matemática e é preciso usá-la por isso temos que ter presente que ela é importante para nossa vida, pois sem ela não conseguiremos emprego.*

Estudante 5: Eu entendo que existe Matemática em tudo o que imaginamos, achei interessante que até nosso corpo pode ter figuras geométricas, e estão até nas notas musicais.

Pesquisadora: pois é, os pitagóricos ajudaram muito na Geometria e na música.

Estudante 6: Na Grécia, os pitagóricos ensinavam a Matemática que nos ensinam hoje, certo? Por exemplo, o Teorema de Pitágoras que nos estão ensinando.

*Estudante 1**:** pois é, eu fiquei surpreendida com isso também.*

*Estudante 6**:** por exemplo nos pentagramas, a música é só Matemática.*

*Estudante7**:** A descoberta dos pitagóricos foi muito importante para a educação, eu gostei do filme e tem muita coisa boa para pensar como nas figuras geométricas que estão na natureza.*

Estudante 8: gostei muito desse filme, primeira vez que vejo um filme de Matemática, adorei como explicarão a sinuca, não sabia que até nisso tem Matemática.

*Estudante 2**:** Eu também gostei muito da sinuca, agora vou tentar jogar assim (sorrisos de toda a sala)*

Estudante 9: Eu entendi que a Matemática está conosco desde nosso nascimento, na natureza, nas flores, fiquei muito surpreendida com esse filme, gostei muito dessa aula, ou mais curioso para mim foi que a Matemática tem um jeito fácil de ser aprendida por meio desses exemplos que mostraram no filme.

Depois dessa conversa pedi para eles, escreverem sobre o filme e suas apreciações, queria que eles escrevessem já que é alfabetização e qualquer exercício de escrita é bom para eles. Dessa maneira fechamos essa atividade.

Nesse momento quando os modos de subjetivação são potencializados e as relações de poder podem ser acionadas e assim propiciar um movimento, na rede de poder, onde os fluxos de resistência promovam fluxos de invenção, ruptura ou fratura, por intermédio das oficinas. Esses novos modos de olhar a Geometria permitiram quebrar, fraturar e inventar a relação educador/educando, desenvolvendo um modo de ser aluno e ser professor, inventando uma prática. Assim, o dispositivo: "é capaz de uma manipulação das relações de força, através de uma certa racionalidade e organização, com um certo propósito: `seja para desenvolvê-las [as forças] em determinada direção, seja para bloqueá-las, para estabilizá-las, utilizá-las etc´" (Rotondo & Marocco, 2012, p.19).

O dispositivo oficinas de geometria, teve a função de produzir outros modos de estar naquele território existencial, acionando diferentes processos de subjetivação existentes, para compreender esses modos de ser/viver/estar, dito de outra maneira, essas fraturas, invenções existentes no movimento dos fluxos de resistência proporcionados pelo deslocamento transversal da relação dialógica educador/educando na geometria. Uma delas acionou a seguinte história[11]: *eu cheguei na quarta passada à minha casa e brinquei com minha filha de oito anos e pensei muito em você com sua história para fazer o Tangram. Então, no outro dia depois que ela chegou da escola eu lhe ensinei a fazê-lo e mostrar-lhe as figuras geométricas*.

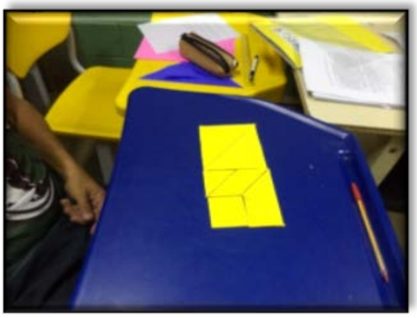


Figura 1. Tangram

5. Cartografias: A Arca Russa[12]

Em que lugar estamos? Foi a primeira frase dita pelo personagem invisível, narrador em *off,* na voz do diretor Alexandr Sokúrov. Durante 90 minutos, um narrador oculto, onde recria a história da Rússia por 35 salas do Museu Hermitage, em São Petersburg. Em um único plano-sequência, comentando e interagindo com cenas e personagens de 300 anos de história russa.

Segundo o conceito antropofágico de Rolnik, o que o diretor fez foi uma antropofagia, um canibalismo cultural, vivenciando cada época da história de seu país, com alguns acontecimentos importantes dentro daquela época. Mas, por que esses acontecimentos? E não outros? Para nossa reflexão, foram aquelas marcas deixadas pelos vazios históricos criados dentro dele.

Em um plano-sequência, ele criou todas as cenas dentro de um só espaço para fazer em 90 minutos a história de Rússia. Um flâneur, mostrando suas obras, os personagens importantes. Foi interagindo e mostrando as obras de arte do museu, visíveis e os não ocultos. Assim, a Arca Russa vai ser nosso barco, onde os

[11]Primeira oficina feita na sala de aula, o Tangram.
[12]Filme Russo do ano 2002 dirigido por Aleksandr Sokurov.

personagens do território habitado, da oitava série, vão aparecendo e mostrando-se dentro da narrativa para, ao final, fazer um plano-sequência para dar língua às marcas visíveis produzidas por eles. Para ao final fazer "o perfeito flâneur, para o observador apaixonado, é um imenso júbilo fixar residência no numeroso, no ondulante, no movimento, no fugidio e no infinito" (Baudelaire, 1997, p.18).

Por esta razão, usando os mapas narrativos decidimos fazer um flâneur nas vidas de algumas pessoas da sala de aula da oitava série. Tais mapas fazem parte fundamental da aproximação daqueles que habitavam nosso território, não sendo motivo principal da cartografia, pois ela é um processo, e também não tentamos descrever, simplesmente narrar o que aconteceu nesse encontro. Assim, nos ajuda a compreender e a escutar cada história de vida e sobretudo, escutar suas vozes. Por esse motivo mostramos dois personagens que faziam parte de nosso grupo de pesquisa.

5.1. Personagem rítmico: Andrea

A juventude, os sonhos, o desejo de ser uma Psicóloga. Era Andrea. Uma menina de 19 anos, com uma energia abrasadora. Muito ativa na sala de aula. Tipo de estudante que ajuda muito os seus colegas. Companheira de trabalho de Laura, as duas sempre no mesmo canto da sala, no fundo. Sorrisos e sonhos. É ela.

Eu comecei a conversa com uma dúvida: por que sempre no mesmo canto em todas as aulas? Pesquisadora: Como é a sua relação com os companheiros dentro da sala de aula*? Eu acho que é bom. É tranquilo. Eu não saio do meu canto, mas... porque eu assento sempre no canto, aí estou sempre no meu cantinho com a Laura. Nem saio de lá. Eu sempre assento ali, então é difícil eu sair daquele cantinho.* E o que você observa na sala de aula desde seu canto? (Mapa Narrativo-sala de aula, sinalizando-se)

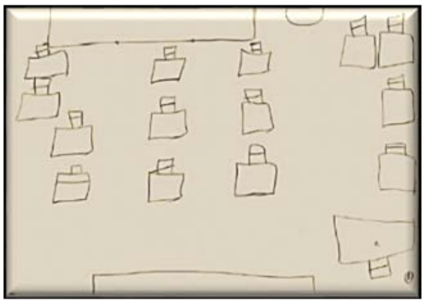


Figura 2. Mapa Narrativo-Sala de aula de Matemática.

Andrea: A sala não muda, cada um continuou no seu mesmo lugar. Ninguém se mistura, você viu? As meninas continuam aqui, nós continuamos aqui... e aqui o Rafael... então não mistura. Não tem jeito de unir ninguém naquela sala. Até porque, tem muita gente ali que não conversa, uma pessoa para outra. Mas, por exemplo uma oficina que você fez, as escalas e a última o quebra cabeça. Senti diferença no espaço. Ninguém se deu conta... "me ensina" e tal. Foi da hora. Todo mundo estava se comunicando mais. Mas mesmo assim, não se misturou.

Daí, foi me contando sobre o que pensava da sala de aula de Matemática. *Andrea: Ela passa um e explica. Passa outro e a gente tem que se virar e fazer. Aí se a gente não der conta, ela passa outro e passa outro para a gente fazer... ela vai tentando a gente fazer. Ela passa a conta, explica e a outra, a próxima, a gente faz sozinha. Aí, se ela ver que tem muita dificuldade, ela passa mais uma, duas, explica de novo e passa mais algumas para a gente fazer sozinha.* Pesquisadora: Como é comunicação na sala de aula? *Andrea: é boa*. Pesquisadora: Essa comunicação é sobre os exercícios? *Ela passa mesmo é falando. Aí a gente vai fazendo, depois que ela fala a gente vai fazendo... ela fala que é mais fácil para a gente entender do que a gente ir lendo. Porque matemática é mais decorar, né? Tem que decorar a fórmula, decorou a fórmula você está de boa... pelo menos eu entendi assim, depois que eu decorei as fórmulas soube fazer as contas. Matemática tudo você tem que decorar. Lembra de tal fórmula? Se você lembrar, você faz a conta todinha. Você lembra da tabuada? Se você decorar a tabuada você faz a conta todinha... então é só decorar. Eu pelo menos decoro tudo.*

Depois continuei com o mapa das oficinas. Ela fez um desenho fazendo uma comparação, um antes e depois das oficinas, na sala de aula.

Figura 3. Mapa narrativo-Sala de aula/Oficinas

Eu comecei com a seguinte pergunta: você, como se sentiu com as oficinas? Gostou? *Andrea: Eu gostei. Eu estava falando para a Laura, eu falei: "A Paola podia* *dar aula para o seu filho Filipe, quando ele começasse a estudar" Eu gostei dos desenhos, é um jeito mais fácil de se aprender, porque só você passar o triângulo, não é fácil, é confuso. E assim deu para a gente aprender como é feito, a gente montou o triângulo, viu como é que faz certinho (risos*). Pesquisadora: Achou mais fácil aprender geometria assim, com as oficinas? *Andrea: É. Com certeza. É mais fácil, porque você vai entender o triângulo como ele é, o que faz ele ser daquele jeito. Só você desenhar e pôr o ângulo, tudo certinho, esquece... você só vai ver aquilo. Tem muita coisa por trás daquilo.* Pesquisadora: Como que? Ah... Como o recheio do triângulo. Para mim triângulo não tinha recheio. Como os triângulos formam quadrado.

5.2. Personagem rítmico: Rosa

Na vida, existem aquelas pessoas que a vida toda foi de coragem, sacrifício e luta. Cada passo, cada esforço é feito pensando não nela mesma, senão na sua família, seus filhos. É essa mulher que com 44 anos ainda acredita que um futuro melhor pode ter e não fica esperando que a vida lhe dê alguma coisa. Sabe que os sonhos são alcançáveis e que só precisa um pouco de coragem, amor e vida para consegui-los. Ela na sala de aula, sempre ficava na parte da frente, participava de todas as atividades e sempre tinha o mesmo grupo de trabalho para suas atividades.

O dia da nossa conversa ela me surpreendeu quando lhe perguntei. Como você enxerga a escola? (Fazendo o desenho da escola).

Figura 4. Mapa narrativo-Escola

O futuro, algo melhor para a nossa vida. É um monte de coisas... descoberta, novas descobertas. Oportunidade, recomeço. Pesquisadora: Recomeço? *É, seria um recomeço*. Pesquisadora: Porque acha? Rosa: *Por quê? Porque a pessoa... no meu caso aqui. Eu parei de estudar 20 anos atrás. Então eu retomei os meus estudos agora, com 44 anos já*. Pesquisadora: E porque parou? Trabalho? *Trabalho. Morava com a minha tia, então a minha tia era muito exigente, pegava ônibus lotado, pegava ônibus, depois metrô, chegava no serviço, depois dois metrôs, mais ônibus... até chegar em casa, tomar um banho e ir para a escola, eu não dava conta. Minha cabeça não dava. Aí eu fiz a sexta série, repeti de novo ela, aí desanimei de vez, aí eu parei. E ainda mandava dinheiro para Pernambuco, para a minha família, para ajudar, sabe? Larguei para lá o estudo. Então a escola aqui, o EJA, para mim é o recomeço de tudo, de tudo o que eu perdi. Uma chance, uma nova oportunidade talvez, de fazer tudo certo... é isso aí, para mim é um recomeço. E foi uma coisa assim, sabe?*

Assim, ela mesma levou a conversa para falar sobre a sala de aula. Como se sente dentro da sala de aula? *Estressada, às vezes*. Pesquisadora: Sim? E por que? Rosa: *Nossa! Muita bagunça. As pessoas não levam a sério, não levam a* *sério o estudo. Mais as pessoas novas, que não tem muita experiência... a gente que tem mais idade está levando a coisa a sério e eles que estão novos, não percebem que eles estão perdendo uma chance de ter um futuro melhor. Não estão ali no futuro como nós estamos... com mais idade, mais cansados.* Pesquisadora: É incômodo para você compartilhar aulas com pessoas mais jovens? *Rosa: Pois às vezes, tem muito jovem na EJA agora e eles só fazem bagunça, não todos. Mas, é mais fácil lidar com pessoas adultas.*

Ela parou de desenhar e suspirou ao terminar essa frase. Continuamos com a sala de Matemática.

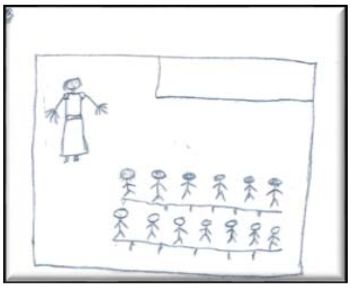


Figura 5. Mapa narrativo-Sala de aula de Matemática.

Ela começou a desenhar e eu perguntei: Como é sua aula de Matemática. Como você aprende Matemática? *Rosa: Ué, faz exercícios, a gente escreve. Presta atenção, os colegas ficam prestando atenção na aula, a professora de matemática dá teste. A matemática... a professora dando aula de matemática e os alunos olhando para a lousa (sinalizando o desenho) É sempre assim, a professora explicando e os estudantes olhando? Tudo na lousa. Olhando para a lousa. Sempre junto um do outro.* Pesquisadora: Então o jeito como a gente trabalhou nas oficinas para você foi novo? *Foi. Foi uma descoberta porque aí eu vi que um traço pode significar muita coisa, né? A maioria das coisas começa com um traço. Um triângulo, um risco com ... então eu vi que tudo hoje é pela técnica, né? Pelas formas. Então triângulo, Pitágoras, essas coisas...através de um traço você pode formar uma pessoa, pode formar... qualquer coisa, né? Então é um caminho. Um aprendizado muito bom para a gente que eu tive. E sabe uma coisa, toda vez que eu olhar para você, eu vou saber que você me ensinou a...assim, passou o filme para a gente, mostrou os traços, mostrou que eles podem fazer tal coisa, fazer um coração, uma estrela, fazer um... sei lá. Um monte de coisas.* Pesquisadora: Como você sentiu na oficina, com seus companheiros como a professora, deu para trocar ideia? *Foi bem. Naquela hora lá de juntar as mesas e fazer em dupla, em grupo, né? Grupo... então assim, juntava até pessoas que não estão se dando bem e teve que fazer, sabe? Ir lá. Dá para aprender mais. Faz ter uma união também, né?*

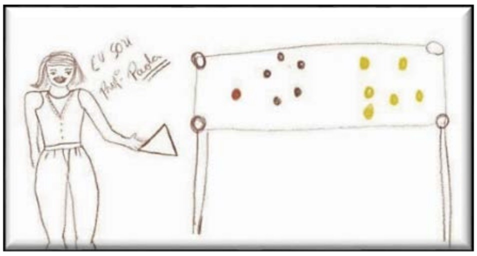


Figura 6. Mapa narrativo-Sala de aula com as oficinas.

6. Conclusões?

"A educação é um ato de amor, por isso, um ato de coragem" frase de Freire que atravessou toda a pesquisa. Até onde é nosso compromisso como educadores? Qual é nosso desejo? "Como o desejo pode e deve despender suas forças na esfera do político e se intensificar no processo de mudança da ordem estabelecida?" (Foucault, 1991, p.81). Temos que resistir? Lutar? Contra o que?

Esse artigo foi um espaço para discutir e questionar aquelas políticas que atravessam nossa educação, nosso espaço habitado e que habitaremos. Também foi um espaço para pensar que existe uma saída, e depende muito das nossas possibilidades criadas na sala de aula, nossa escola, nosso lar. Não acredito num desligamento da nossa realidade na Escola, aliás, é o lugar onde mais visível se torna.

Toda pesquisa de intervenção cumpre o uso do seu verbo, intervir, deslocar, mudar de lugar. A cartografia faz visível aquelas linhas que já estão no ar, aqui não se inventaram histórias, pois já estavam escritas nas marcas das pessoas. Aqui, simplesmente "se deu língua aos afetos que pediam passagem". Narrou-se os afetos, e aquilo que se fez sentir no processo da pesquisa, acompanhou-se as pegadas das pessoas que habitavam a escola e sobretudo, tentando desemaranhar o dispositivo.

Todavia, dispositivos outros se acionaram e permitiram criar marcas tanto nos estudantes, quanto na pessoa que construiu esse texto, por isso se teve que movimentar, criar, fazer. Isso faz parte de nosso compromisso como educadores, além do nosso compromisso como educadores matemáticos. Não podemos cair no *mesmo,* ou seja, mesmo discurso, mesma aula, mesmo descompromisso, mesmos modos de estar que o próprio sistema faz com que reproduzamos, sendo como máquinas ao caminhar.

O "novo" foi uma palavra bem repetida em toda a pesquisa: repita de novo, faça de novo, não entendi, vai de novo. Mas esse novo, ao qual me refiro, é o novo que Deleuze disse, pois é uma confrontação entre o novo e o tradicional, pois o tradicional não se renova e o novo sempre é novo, essas são as forças de luta que existem dentro da educação tradicional e dentro do sistema educativo.

São importantes nossos desejos, qual é nossa potência de vida? Qual é nossa resistência? As escolhas fazem parte do nosso caminho, o *cuidado de si* deve ser parte do nosso caminho ao andar, disso depende nossa resistência, disso depende como fala Foucault "fazer da nossa vida uma obra de arte". A cartografia agencia, é difícil não se afetar por qualquer processo investigativo. Por isso é importante tornar todas aquelas marcas numa produção onde se visualize: o que pode uma escola? Nesse caso, foi o que atravessou essa pesquisa e atravessou a visão do mundo da autora desse artigo.

Por isso não se pode falar de conclusões porque ainda há muito por perguntar, por fazer, por errar. Esse artigo se constituiu uma grande estrada para devires outros. Muitas bifurcações por conhecer e sentir. Entretanto, vamos caminhando para fazer caminho ao andar. Fazer o mínimo como falava Deleuze, é isso o que é importante dentro da sala de aula, numa escola, uma vida.

Bibliografía

Amaris, P. (2013). *Dispositivo Educação de Jovens e Adultos*. Linha Mestre, 7(23), 187-191.

Andrei D (Produção), Aleksandr S (Direção). (2002). *A Arca Russa.* Rússia.

Baudelaire, C. (1997). *Sobre modernidade: o pintor da vida moderna*. Rio de Janeiro: Paz e Terra.

Bovo, A., Gasparotto, G., Rotondo, M., De Souza, A. C. C. (2012, Dic.). *Pesquisando Práticas e Táticas em Educação Matemática*. Bolema: Boletim de Educação Matemática, 25(41), 1-41. Recuperado de: http://www.redalyc.org/pdf/2912/291223514003.pdf.

Brasil, PCNEM. (1999).MEC/SEMTEC.

Chaui, M. (1982*). Cultura e Democracia. O Discurso competente e outras falas*. São Paulo: Contemporânea,1-14.

Clareto, S., Miarka, R. (2015). eDucAçÃo MAteMátiCA AefeTIvA: nomes e movimentos em avessos. Bolema, 29(53),704-808.

Costa, S. (2005*). De fardos que podem acompanhar a atividade docente ou de como o mestre pode devir burro (ou camelo).* Educação e sociedade, 26(93), 1257-1272.

De Barros, M. (1993). *O livro das ignorâncias.* Rio de Janeiro: Civilização Brasileira.

De Souza, A.C.C. (2013). *O que pode a Educação Matemática?.* Trabajo presentado en el V Seminário Conexões – Deleuze e Território e Fugas e…XII Simpósio Internacional de Filosofia – Nietzsche/Deleuze, Campinas.

De souza, A. C. C., Tuchapesk, M. (2015). Do conceito à prática da autonomia do professor de matemática. Bolema: boletim de educação matemática, 29(53), 1309-1328.

Deleuze, G. (1990). *¿Qué es un dispositivo*? Michael Foucault, filosofo. Trad. Wanderson Flor do Nascimento. Barcelona: Gedisa, 155-161. Recuperado de: http://escolanomade.org/pensadores-textos-e-videos/deleuze-gilles/o-que-e-um-dispositivo.

Deleuze, G**. (**1992**).** *Conversações* (Trad. P.P. Pelbart). São Paulo: Editora 34.

Deleuze, G**. (**2005**).** *Foucault* **(**Trad. Claudia Sant´Anna Martins). São Paulo: Editora Brasiliense.

Deleuze, G & Parnet, C. (1998). *Diálogos.* São Paulo: Escuta.

Deleuze, G & Guattari, F. (1995). *Mil platôs - Capitalismo e Esquizofrenia*. V.1. Rio de Janeiro: Ed.34.

Foucault, M. (1979). *Microfísica do poder*. Rio de Janeiro: Graal.

Foucault, M. (1999). *Vigiar e Punir*: *nascimento da prisão*. Tradução de Raquel Ramalhete. Petrópolis: Vozes.

Foucault, M. (1991). *O Anti-Édipo: uma introdução à vida não fascista***.** Rio de Janeiro: Hólon, 81-84.

Freire, P. (1977). *Pedagogia do Oprimido*. São Paulo: Paz e Terra.

Freire, P. (1978). *Educação como Pratica da Liberdade*. Rio de Janeiro: Paz e Terra.

Kastrup, V., & Barros, R. (2009). *Movimentos-funções no dispositivo na prática da cartografia.* En Passos, E., Kastrup, V., Escóssia, L. (Eds.), Pistas do método da cartografia: pesquisa intervenção e produção de subjetividade (pp. 76-91). Porto Alegre: Sulina.

Nietzsche, F. (2001). *A Gaia Ciência* (Trad. P. Souza). São Paulo: Companhia de Letras.

Passos, E., & Barros, R. (2009). *A cartografia como método de pesquisa-intervenção*. Em Passos, E., Kastrup, V; Escóssia, L. (org.). Pistas do método da cartografia: pesquisa intervenção e produção de subjetividade (pp.17-31). Porto Alegre: Sulina.

Passos, E., & Barros, R. (2009). *Cartografar é acompanhar processos.* En Passos, E., Kastrup, V., Escóssia, L. (Eds.), Pistas do método da cartografia: pesquisa intervenção e produção de subjetividade (pp. 52-75). Porto Alegre: Sulina.

Passos, E., & Barros, R. (2009)**.** *Cartografar é habitar um território existencial*. En Passos, E., Kastrup, V., Escóssia, L. (Eds.), Pistas do método da cartografia: pesquisa intervenção e produção de subjetividade (pp.131-149). Porto Alegre: Sulina.

Pinto, A. V. (1986). *Sete lições sobre Educação de Adultos***.** São Paulo: Editora Autores Associados.

Rolnik, S. (1987). *Cartografia, ou de como pensar com o corpo vibrátil*. Recuperado en http://www.pucsp.br/nucleodesubjetividade/Textos/SUELY/pensarvibratil.

Rolnik, S. (1993, Sep). *Pensamento, corpo e devir Uma perspectiva ético/estético/política no trabalho acadêmico*. Cadernos de Subjetividade. Núcleo de Estudos e Pesquisas da Subjetividade, Programa de Estudos Pós Graduados de Psicologia Clínica, PUC/SP, 1 (2), 241-251.

Rolnik, S. (1997). *Uma insólita viagem à subjetividade fronteiras com a ética e a cultura*. Cadernos de Subjetividade. Núcleo de Estudos e Pesquisas da Subjetividade, Programa de Estudos Pós Graduados de Psicologia Clínica, PUC/SP. Recuperado em http://www.pucsp.br/nucleodesubjetividade/suely%20rolnik.htm

Rotondo, M. A. S & Marocco, T. (2012). *Dispositivo Experimentoteca de Matemática: Produção na imanência***.** V Seminário Internacional de pesquisa em Educação Matemática. Rio de Janeiro.

Paola Judith Amaris Ruidiaz:. Formada como Licenciada em Matemática na Universidade Pedagógica e Tecnológica da Colômbia. Mestre pelo Programa de Pós-graduação em Educação Matemática UNESP (Bolsista CAPES) e atualmente Doutoranda em Educação Matemática na UNESP (Bolsista CAPES) Campus Rio Claro, Sp. Brasil. Desenvolvendo pesquisas na Educação Matemática na área da Filosofia da Diferença.
Rua 11b, 841. Bairro Bela Vista na Cidade de Rio Claro. Sp. Brasil. E-mail: paolaamaris@gmail.com. Celular: 55 19 98238 8106

UNIÓN
REVISTA IBEROAMERICANA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA
www.fisem.org/web/union
http://asenmacformacion.com/ojs/index.php/union/index
ISSN: 1815-0640
Número 45. Marzo 2016
Página 152-161

Comprensión del razonamiento matemático de los estudiantes: una práctica pedagógica inclusiva

Macarena Larrain

Fecha de recepción: 31/12/2014
Fecha de aceptación: 03/03/2016

Resumen	En este trabajo se examina cómo el análisis de los errores matemáticos que surgen en el aula escolar ayuda a los profesores a incrementar y profundizar su nivel de conocimiento y comprensión del razonamiento matemático de sus alumnos. A la vez, se argumenta que este conocimiento constituye un aporte relevante para el diseño e implementación de estrategias pedagógicas inclusivas, que atiendan a las necesidades diversas de los estudiantes. **Palabras clave**: análisis de errores; razonamiento matemático; inclusión; diversidad
Abstract	This paper discusses how the analysis of mathematical errors arising in the classroom helps teachers to increase and deepen their knowledge and understanding of mathematical thinking of their students. At the same time, it is argued that this knowledge is relevant for the design and implementation of inclusive teaching strategies that address the diverse needs of students. **Keywords**: error analysis; mathematical thinking; inclusion; diversity
Resumo	Este artigo discute como a análise de erros matemáticos que surgem na sala de aula ajuda os professores a aumentar e aprofundar seu conhecimento e compreensão do pensamento matemático dos seus alunos. Ao mesmo tempo, argumenta-se que esse conhecimento é relevante para a concepção e implementação de estratégias de ensino inclusivas que atendam às diversas necessidades de alunos. **Palavras-chave:** análise de erros; raciocínio matemático; inclusão; diversidade

1. Introducción

En las últimas décadas, la mayoría de los países ha suscrito acuerdos internacionales relacionados con la idea de integrar o incluir a los estudiantes con necesidades educativas especiales en las aulas regulares. Especialmente a partir de la Declaración de Salamanca sobre principios, políticas y prácticas para las Necesidades Educativas Especiales (UNESCO, 1994), esto se ha convertido en una meta educativa a nivel internacional. Así, los sistemas educativos actuales en la mayoría de los países, avanzan hacia un enfoque inclusivo, en el que las escuelas regulares son para todos los niños y jóvenes, sin discriminación, y buscan responder a la diversidad del alumnado, mejorando las condiciones de acceso, participación, permanencia y logros de aprendizaje de todos los estudiantes (UNESCO, 2004).

Para dar respuesta a estos desafíos, se requiere de profesores con las habilidades apropiadas y con el conocimiento de estrategias y metodologías que permitan ocuparse de estudiantes con características y necesidades muy diversas.

Entonces, cabe preguntarse ¿qué estrategias resultan apropiadas para atender a la diversidad al interior del aula de matemática?, ¿cómo puede un profesor dar respuesta a las necesidades particulares de todos sus estudiantes para así impulsar su aprendizaje y permitir que cada uno desarrolle al máximo sus capacidades?

2. Desarrollo

2.1 Prácticas pedagógicas inclusivas

A este respecto, Ainscow (1994) ha precisado que las respuestas pedagógicas tradicionales, en las que se busca individualizar la enseñanza para responder a las necesidades particulares de los estudiantes, presentan dificultades puesto que centran la atención en el individuo, en lugar de en el curriculum y no son capaces de identificar aspectos de las estrategias o métodos de enseñanza que resultan problemáticos o poco efectivos.

En esta misma línea, el Diseño Universal para el Aprendizaje (DUA) ofrece a los profesionales de la educación un marco de referencia para atender a la diversidad en el aula. Sus autores señalan que el principal obstáculo para que todos los alumnos logren aprendizajes de calidad son los currículos inflexibles y diseñados para atender a un alumno “promedio” que en realidad no existe, puesto que ellos ponen barreras no intencionadas para el aprendizaje, particularmente para aquellos estudiantes con capacidades y motivaciones diferentes, que no corresponden al prototipo de alumno promedio (CAST, 2011).

El DUA proporciona una respuesta al creciente interés por desarrollar currículos más personalizados, que respondan a la diversidad de aprendices en el entorno escolar. Sin embargo, este marco de referencia hace hincapié en que no es necesario elaborar respuestas educativas personalizadas diseñadas a la medida para aquellos alumnos con necesidades educativas especiales. Por el contrario, ellos proponen que desde el inicio se deben planificar procesos pedagógicos flexibles, que atiendan a las necesidades de grupos que, por su naturaleza humana, son esencialmente diversos (Rappolt-Schlichtmann, Daley & Rose, 2012). Es decir, el foco está puesto en la eliminación de barreras y en el diseño de ambientes de aprendizaje maleables, que sean capaces de ofrecer alternativas y opciones entre las que cada alumno pueda escoger, anticipándose así a la variabilidad y permitiendo que todos los estudiantes progresen desde su propio nivel actual de habilidades (Rose, Harbour, Johnston, Daley & Abarbanell, 2006).

Por tanto, no se trata solo de diferenciar la enseñanza a posteriori para aquellos alumnos que presentan un diagnóstico médico, neurológico o psicopedagógico determinado, sino de diseñar y poner en práctica estrategias pedagógicas que resulten efectivas, que otorguen oportunidades de aprendizaje para todos los alumnos (Ayala, Brace & Stahl, 2012) y que permitan responder a los diferentes ritmos, estilos y necesidades de aprendizaje. Para esto, es necesario que dichas estrategias se fundamenten en el conocimiento y la comprensión de las conceptualizaciones construidas por los alumnos y de los niveles de apoyo y la calidad de los andamiajes que requieren (Empson, 2003; Stough & Palmer, 2003). Asimismo, resulta crucial la forma en que este conocimiento de los procesos cognitivos de los alumnos contribuye al diseño y estructura de las estrategias de enseñanza para que estas promuevan el aprendizaje de todos los estudiantes (Moscardini, 2014).

Aún más, diversos autores (ver por ejemplo Jordan, Schwartz y McGhie-Richmond, 2009; Watson, 2000) argumentan que las estrategias de enseñanza efectivas son útiles para todos los estudiantes, incluyendo a la gran mayoría de aquellos con necesidades educativas especiales y especialmente para los que tienen dificultades de aprendizaje relacionadas a áreas particulares del currículum. La razón de esto reside en que la entrega de oportunidades de aprendizaje flexibles, que se adaptan al nivel de comprensión y habilidades de cada alumno es factible en un aula inclusiva y ayuda a una experiencia de aprendizaje más efectiva para todos los alumnos.

En síntesis, es necesario un cambio de paradigma, que avance desde la concepción de las prácticas pedagógicas como algo que debe resultar efectivo para el estudiante promedio y que se complementa con algo adicional o especial para algunos alumnos, hacia un enfoque centrado en el estudiante, en el que se diseñen oportunidades de aprendizaje en las que todos pueden participar y que permiten el acceso al curriculum para todos.

2.2 Conocimientos de los profesores para las prácticas pedagógicas inclusivas

La aplicación de este enfoque pedagógico a la enseñanza de las matemáticas en los niveles de educación básica requiere de profesores que sepan orquestar muy bien sus conocimientos profesionales, que Shulman (1986) categorizó en tres tipos: conocimientos pedagógicos generales; conocimientos disciplinares, que en este caso se refiere a tener conocimientos generales de la matemática; y conocimientos pedagógicos del contenido, que Shulman definió como una forma particular del conocimiento del contenido disciplinar, que abarca los aspectos afines a su enseñanza, incluyendo diversas formas de representación de los principales conceptos de la disciplina, variedad de ejemplos y explicaciones que permitan hacer el contenido comprensible para los alumnos, comprensión acerca de qué hace que el aprendizaje de un contenido sea más fácil o más difícil, las dificultades o errores más comunes para cada tema y estrategias que permitan reorganizar las estructuras mentales de esos estudiantes para superar las dificultades, entre otros.

Hill y Ball (2009), a partir de la observación de profesores de primaria, determinaron que la interpretación de conceptos y procedimientos matemáticos, su explicación a niños y jóvenes y la comprensión del razonamiento de estos, requiere de una habilidad que no es necesaria en otras profesiones. Así, diferenciaron aún más finamente la categorización propuesta por Shulman y crearon el constructo de Conocimiento Matemático para Enseñar (Ball, Thames y Phelps, 2008), que tiene dos grandes categorías: Conocimiento Común del Contenido y Conocimiento Pedagógico del Contenido; dentro de este último, se incluye el conocimiento del currículum, del contenido y la enseñanza y del contenido y los estudiantes. El conocimiento del contenido y los estudiantes contempla la capacidad para anticipar los aspectos del contenido que los alumnos pueden considerar confusos o el tipo de razonamiento que podrían seguir ante un determinado contenido, la habilidad de interpretar los razonamientos a veces incompletos y expresados en el lenguaje cotidiano de los jóvenes estudiantes y conocimiento sobre los errores que más comúnmente surgen durante el aprendizaje de un determinado contenido matemático. Por su parte, los profesores ponen en práctica el conocimiento del contenido y la enseñanza cuando, por ejemplo, durante las discusiones con toda la clase deben decidir si profundizan o no en la contribución de un alumno, si se detienen para clarificar mejor un asunto, si realizan una pregunta o dan una tarea particular para potenciar o poner en conflicto el razonamiento de un alumno.

Greer y Meyen (2009) también destacan que para que la enseñanza de la matemática a alumnos con necesidades educativas especiales logre desarrollar un aprendizaje comprensivo y no meramente memorístico, es clave que los docentes cuenten con un sólido conocimiento pedagógico del contenido y rescatan la definición que Shulman (1987, p.15) hace de éste como “la capacidad del profesor de transformar el conocimiento del contenido que él o ella posee en formas que son pedagógicamente poderosas, pero a la vez adaptables a las variaciones en habilidad y antecedentes que presentan los alumnos”.

Por lo tanto, son de especial interés el conocimiento y las habilidades que puedan tener los docentes en relación a cómo piensan o razonan los alumnos en edad escolar, lo que facilita la implementación de prácticas pedagógicas centradas en el estudiante y que atiendan a las necesidades educativas de todos ellos (Empson, 2003).

2.3 Comprensión del razonamiento matemático de los alumnos para el diseño de estrategias pedagógicas efectivas

Bajo esta perspectiva, la interpretación del pensamiento y de las formas de razonar de los alumnos resulta crucial para poder desarrollar e implementar prácticas pedagógicas inclusivas, ya que otorga información relevante para la toma de decisiones pedagógicas, información de mayor utilidad que la mera identificación de déficits del alumnado (Elliot y Gibbs, 2008, citado en Moscardini, 2014).

De manera similar, Watson (1996) postula que una manera efectiva de apoyar a los estudiantes con necesidades educativas especiales consiste en utilizar el conocimiento acerca del razonamiento matemático de los alumnos para modificar la enseñanza y diseñar respuestas educativas acordes a sus necesidades. Para acceder a las comprensiones conceptuales de los alumnos, Watson señala que es necesario establecer interacciones focalizadas con los estudiantes, que permitan conocer de mejor manera su pensamiento.

Un estudio realizado por Moscardini (2013), apoya lo propuesto por Watson. El estudio indagó los conocimientos y creencias de doce profesores de primaria en escuelas especiales que atienden a niños con dificultades de aprendizaje moderadas antes y después de un curso de desarrollo profesional sobre razonamiento matemático de los alumnos. Los docentes participantes destacaron que una comprensión más profunda de las formas de pensar de sus estudiantes les proporcionaba una base de conocimientos más sólida para la enseñanza.

Además, este enfoque pedagógico, que busca comprender el razonamiento de los estudiantes en el contexto de las comunidades de aprendizaje que se construyen en el aula, apoya una actitud de indagación que es característica de una pedagogía inclusiva (Moscardini, 2014).

En el ámbito de la educación regular, también existe amplio consenso y vasta evidencia que muestra que la comprensión que tienen los profesores del razonamiento matemático de los alumnos es una poderosa herramienta para mejorar los procesos de enseñanza. Por ejemplo, un estudio longitudinal dirigido por Fennema, Carpenter, Franke, Levi, Jacobs y Empson (1996) examinó cómo cambiaban las creencias y las prácticas pedagógicas de 21 profesores de primaria en un periodo de 4 años en que los docentes participaron en un programa de desarrollo profesional orientado a incrementar su habilidad para comprender el desarrollo del razonamiento matemático de sus alumnos. Encontraron grandes cambios tanto en las creencias como en las prácticas docentes, que evolucionaron desde unas en que el rol del profesor consistía en demostrar procedimientos hacia unas en que el docente ofrecía actividades de resolución de problemas y fomentaba la comunicación y discusión de los razonamientos de los estudiantes, ayudándolos así a construir nuevo conocimiento sobre su propio nivel actual de razonamiento matemático. Aún más, Fennema y su equipo mostraron que estos cambios en las prácticas pedagógicas resultaron en mejores logros de aprendizaje de los alumnos.

Es entonces crucial preguntarse cómo puede un profesor evaluar si el razonamiento de sus alumnos refleja o no una real comprensión del contenido matemático. A este respecto, Barmby, Harries, Higgins y Suggate (2007) señalan que si consideramos que la comprensión de la matemática se basa en el establecimiento de conexiones entre representaciones mentales de conceptos matemáticos, entonces para conocer el grado de comprensión de un alumno respecto de un concepto o procedimiento matemático, primero es necesario admitir que éste no es posible de conocer a cabalidad, pues no es directamente observable. Solo es posible acceder a él considerando algunas muestras o representaciones, que nos ilustren lo que un alumno ha comprendido de manera correcta, aquello que aún le falta por construir y aquello que ha construido o conectado de manera errónea.

Para ello, según Barmby y sus colaboradores (2007), es necesario utilizar tareas o actividades con características particulares, que permitan que los alumnos tengan la oportunidad de expresar dichas representaciones. Por ejemplo, un listado de ejercicios matemáticos construido sin ninguna intención particular más que la práctica de procedimientos matemáticos, puede entregarnos poca o ninguna información acerca del nivel de comprensión matemática de los alumnos, ya que es posible resolver gran parte de los ejercicios matemáticos con una comprensión limitada de los conceptos involucrados, utilizando técnicas memorísticas. De esta manera, el hecho de que un estudiante tenga correcto uno o más ejercicios matemáticos, no proporciona información útil para el profesor que busca desarrollar habilidades de razonamiento matemático en sus alumnos. Sin embargo, cuando un alumno comete un error de manera sistemática, éste podría indicar las limitaciones de su comprensión acerca del contenido matemático implicado.

2.4 Errores matemáticos: una ventana hacia el razonamiento matemático de los estudiantes

Para los efectos de este argumento, se considerarán errores matemáticos aquellos errores sistemáticos, persistentes y profundos, que no son fácilmente identificables y corregibles por el estudiante de manera aislada (Brodie, 2014).

La persistencia y sistematicidad de los errores son explicadas por las teorías constructivistas del aprendizaje como provenientes de concepciones erradas (*misconceptions*), es decir, de estructuras conceptuales construidas por el estudiante, que tienen sentido de acuerdo a sus estructuras mentales actuales, pero que difieren del conocimiento disciplinar (Smith, diSessa & Roschelle, 1993). Se desprende entonces, que los errores tienen sentido para quien los comete, puesto que existe un razonamiento subyacente (errado) que explica lo realizado. Muchas veces estas concepciones erróneas provienen de aprendizajes previos que son transferidos incorrectamente para la realización de tareas o ejercicios matemáticos en un ámbito diferente y es posible identificar dentro de un mismo error elementos matemáticamente válidos y elementos incorrectos (Brodie, 2014).

Las concepciones erróneas, al estar conectadas a estructuras conceptuales correctas en otras áreas, son difíciles de eliminar o de reemplazar mediante la enseñanza, ya que las estructuras mentales deben ser reemplazadas o reorganizadas en otras más apropiadas y acordes al conocimiento proveniente de la disciplina. Sin embargo, esto no significa que los errores no deban ser considerados en el proceso de enseñanza, muy por el contrario, este cambio conceptual implica grandes desafíos para los docentes, quienes deben comprender y enfrentar estas conexiones erróneas (Smith et al., 1993; Brodie, 2014), ya que dar respuesta a los errores matemáticos de los alumnos al interior del aula ha demostrado tener mejores efectos en el aprendizaje que intentar evitar su ocurrencia (Rach, Ufer y Heinze, 2013).

Brodie (2014, p. 224) sintetiza las características de los errores señalando que estos

> ‘son razonables y muestran el razonamiento de los alumnos; son una parte normal y necesaria del aprendizaje de las matemáticas; y los errores de los alumnos dan acceso a los profesores al pensamiento actual de los alumnos acerca de las maneras de hacer matemática’.

2.5 El análisis de errores

Hace ya varias décadas que Hendrik Radatz (1979) señaló que los errores en el aprendizaje de las matemáticas son el resultado de la combinación compleja de diversas variables, incluyendo las características del currículum, del entorno, de los profesores, de los estudiantes y de todas las interacciones entre ellos. Por esta razón, los errores presentan un gran desafío para los profesores, puesto que es necesario dilucidar entre variados factores para poder dar una respuesta pedagógicamente apropiada.

El cómo se lleva a cabo este proceso de análisis, ha sido estudiado por diversos autores y es considerado como un elemento indispensable de la enseñanza de la matemática (Peng y Luo, 2009; Riccomini, 2005).

McGuire (2013) propone un ciclo de análisis de errores organizado en tres etapas. La primera consiste en identificar el patrón de errores o la conceptualización errónea del estudiante. A este respecto, Holmes, Miedema, Nieuwkoop y Haugen (2013) señalan que los profesores, primero deben ser capaces de discernir si un error proviene de una concepción errónea o es simplemente el producto de un descuido. Si el caso es el primero, la naturaleza de los errores y sus causas subyacentes deben ser buscadas, para así poder individualizar la enseñanza y responder a las necesidades particulares de los alumnos (Radatz, 1979; Prediger & Wittmann, 2009; Cox, 1975), lo que constituye la segunda etapa del ciclo de análisis propuesto por McGuire (2013).

Para identificar y comprender los errores de los estudiantes, los profesores deben tener un sólido conocimiento disciplinar de la matemática, pero a la vez deben ser capaces de interpretar los niveles de comprensión del alumno (McGuire, 2013). Esto entrega a los docentes información útil acerca de los procesos cognitivos subyacentes al razonamiento matemático de los alumnos, en lugar de focalizarse exclusivamente en si las respuestas son correctas o incorrectas, lo que no permite visualizar cómo o qué están aprendiendo los alumnos (Ashlock, 2009).

La tercera etapa en el ciclo de análisis de errores (McGuire, 2013) consiste en remediar los errores utilizando estrategias pedagógicas específicamente diseñadas para estos efectos. La habilidad para seleccionar adecuadamente estas estrategias está relacionada con el concepto de conocimiento pedagógico del contenido propuesto por Shulman (1987), ya que se refiere al conocimiento que los profesores tienen de estrategias que tienen un alto potencial para reorganizar las estructuras conceptuales de los estudiantes (McGuire, 2013).

A pesar de la relevancia de esta etapa, diversos estudios han mostrado que tanto los futuros profesores (Cooper, 2009) como muchos profesores en ejercicio (Riccomini, 2005) no han recibido suficiente formación que los ayude a diseñar respuestas pedagógicas apropiadas y focalizadas en la reconstrucción de conceptos, que atienda a las dificultades específicas que presenta el alumno.

7. Conclusiones

La inclusión de todos los estudiantes en un mismo sistema educativo es un objetivo relevante en muchos países. Para lograrlo, es necesario que los docentes diseñen currículos flexibles, que dejen espacio para que los alumnos accedan a los contenidos de estos desde diferentes perspectivas, a ritmos distintos, con formas de aprender diversas. Es decir, que se acerquen al aprendizaje de acuerdo a sus características y necesidades particulares. Es en la flexibilidad de los diseños donde está la clave, ya que ésta permite que cada estudiante tenga una experiencia de aprendizaje particular y ajustada para él.

Para poder diseñar procesos de enseñanza y aprendizaje que se acomoden a las características de los estudiantes, los docentes necesitan poseer conocimientos relevantes acerca de los diversos procesos de razonamiento matemático que suelen tener los estudiantes frente a los contenidos o habilidades que quieren promover. Sin embargo, esto muchas veces no es suficiente, puesto que en la realidad del aula es posible observar que surgen alumnos con razonamientos diversos, originales y diferentes a los esperados por el educador. Por lo tanto, es necesario que los docentes pongan en práctica estrategias que les permitan conocer y comprender los procesos de razonamiento que están siguiendo sus alumnos, para así poder dar respuestas educativas que se ajusten a los niveles actuales de comprensión de sus alumnos y que, a la vez, los ayuden a avanzar en sus aprendizajes.

Una estrategia relevante para conocer el razonamiento matemático de los alumnos consiste en analizar los errores que ellos cometen al realizar ejercicios o tareas matemáticas. El proceso de análisis de errores comienza con la identificación de un patrón de errores, que permite al docente caracterizar el tipo de ejercicios en los que el alumno se equivocaría. Luego, la comprensión de la naturaleza del error y de las concepciones equivocadas que lo subyacen, permiten al educador vislumbrar el razonamiento del estudiante y predecir el tipo de respuesta que daría a un ejercicio o tarea similar. Con esta información, el profesor está en mejores condiciones para crear e implementar respuestas educativas que se ajusten a las distintas características y necesidades de los alumnos diversos que tiene a su cargo, que impulsen el aprendizaje y permitan que todos los estudiantes desarrollen al máximo sus capacidades.

Bibliografía

Ainscow, M. (1994). *Special needs in the classroom: A teacher education guide*. London: Jessica Kingsley Publishers.

Ashlock, R. B. (2009). *Error Patterns in Computation: Using Error Patterns to Help Each Student Learn*. (10th Edition). Upper Saddle River, NJ: Pearson.

Ayala, E., Brace, H.J. & Stahl, S. (2012). Preparing teachers to implement Universal Design for Learning. En T. E. Hall, A. Meyer & D.H. Rose (Eds.) *Universal Design for Learning in the Classroom. Practical Applications.* New York: Guilford.

Ball, D.L., Thames, M.H. & Phelps, G. (2008). Content Knowledge for Teaching: What makes it special? *Journal of teacher Education*, 59(5), 389 – 407.

Barmby, P., Harries, T., Higgins, S. & Suggate, J. (2007) How can we assess mathematical understanding? En J. Woo, H. Lew, K. Park, D. Seo (Eds.), *Proceedings of the 31st Conference of the International Group for the Psychology of Mathematical Education*, Vol. 2, pp. 41–48.

Booth, T., Ainscow, M., Black-Hawkins, K., & Vaughan, M. (2002). *Índice de Inclusión: Desarrollando el aprendizaje y la participación en las escuelas*. Bristol: Centre for Studies on Inclusive Education (CSEI).

Brodie, K. (2014). Learning about learner errors in professional learning communities. *Educational Studies in Mathematics*, 85(2), 221-239.

CAST (2011). Universal Design for Learning Guidelines version 2.0. Wakefield, MA: Autor.

Cox, L. S. (1975). Diagnosing and Remediating Systematic Errors in Addition and Subtraction Computations. *Arithmetic Teacher*, 22(2), 151-157.

Empson, S. B. (2003). Low-performing Students and Teaching Fractions for Understanding: an Interactional Analysis. *Journal for Research in Mathematics Education*, 34(4), 305-343.

Fennema, E., Carpenter, T. P., Franke, M. L., Levi, L., Jacobs, V. R., & Empson, S. B. (1996). A longitudinal study of learning to use children's thinking in mathematics instruction. *Journal for research in mathematics education*, 27(4), 403-434.

Greer, D. L., & Meyen, E. L. (2009). Special education teacher education: A perspective on content knowledge. *Learning Disabilities Research & Practice*, 24(4), 196-203.

Hill, H. C. & Ball, D. L. (2009). *The curious – and crucial – case of mathematical knowledge for teaching*. Phi Delta Kappan, 91(2), 68-71.

Jordan, A., Schwartz, E. & McGhie-Richmond, D. (2009). Preparing teachers for inclusive classrooms. *Teaching and Teacher Education*, 25, 534-542.

Moscardini, L. (2014). Developing equitable elementary mathematics classrooms through teachers learning about children's mathematical thinking: Cognitively Guided Instruction as an inclusive pedagogy. *Teaching and Teacher Education*, 43, 69-79.

Moscardini, L. (2013), Primary special school teachers' knowledge and beliefs about supporting learning in numeracy. *Journal of Research in Special Educational Needs*. doi: 10.1111/1471-3802.12042

Prediger, S., & Wittmann, G. (2009). Aus Fehlern lernen–(wie) ist das möglich. *Praxis der Mathematik in der Schule*, 51(3), 1-8.

Radatz, H. (1979). Error analysis in mathematics education. *Journal for Research in Mathematics Education*, 10(3), 163-172.

Rach, S., Ufer, S., & Heinze, A. (2013). Learning from errors: effects of teachers training on students´ attitudes towards and their individual use of errors. *PNA*, 8(1), 21-30.

Rappolt-Schlichtmann, G., Daley, S.G. & Rose, L.T. (2012). Introduction. En G. Rappolt-Schlichtmann, S.G. Daley & L.T. Rose (Eds.) *A Research Reader in Universal Design for Learning* (pp. 1 – 16). Cambridge: Harvard Education Press.

Rose, D., & Meyer, A. (2000). Universal Design for Learning. *Journal of Special Education Technology*, 15(1), 67-70.

Rose, D. H., Harbour, W. S., Johnston, C. S., Daley, S. G., & Abarbanell, L. (2006). Universal Design for Learning in Postsecondary Education: Reflections on Principles and their Application. *Journal of Postsecondary Education and Disability*, 19(2), 135-151.

Shulman, L. S. (1986). Those who understand: Knowledge growth in teaching. *Educational researcher*, 15(2), 4-14.

Shulman, L. (1987). Knowledge and Teaching: Foundations of the New Reform. *Harvard Educational Review*, 57(1), 1 – 22.

Stough, L. M. & Palmer, D. J. (2003). Special Thinking in Special Settings: a Qualitative Study of Expert Special Educators. *The Journal of Special Education,* 36(4), 206-222.

UNESCO (1994). *Informe final. Conferencia Mundial sobre Necesidades Educativas Especiales: Acceso y Calidad.* Madrid: UNESCO/Ministerio de Educación y Ciencia.

UNESCO (2004). Educación para Todos: el imperativo de la calidad. Informe de Seguimiento de la EPT en el Mundo. París: Autor.

Watson, J. (1996). *Reflection through interaction: The classroom experience of pupils with moderate learning difficulties*. London: Falmer.

Watson, J. (2000). Constructive instruction and learning difficulties. *Support for Learning*, 15(3), 134-140.

Macarena Larrain J.: Master of Arts en Necesidades Educativas Especiales de la Universidad de Leeds, Inglaterra. Licenciada en Educación con mención en Matemática por la Pontificia Universidad Católica de Chile. Profesora en la Facultad de Educación de la Universidad de los Andes. mlarrainj@uandes.cl

Av. Monseñor Álvaro del Portillo 12.455,
Las Condes, Santiago, Chile.

REVISTA IBEROAMERICANA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA

ISSN: 1815-0640
Número 45. Marzo 2016
Página 162-183

www.fisem.org/web/union
http://asenmacformacion.com/ojs/index.php/union/index

Secuencia didáctica para el autoaprendizaje de la simplificación de fracciones con uso de tecnología en estudiantes universitarios

Omar Cuevas Salazar, Edna Myriam Valenzuela Lagarda, Mucio Osorio Sánchez, Evaristo Trujillo Luque

Fecha de recepción: 16/03/2015
Fecha de aceptación: 14/03/2016

Resumen	El objetivo del estudio, fue desarrollar una secuencia didáctica con uso de tecnología, para que estudiantes de nivel universitario, de forma independiente, aprendieran con comprensión la simplificación de fracciones. Participaron 14 alumnos del curso de Fundamentos de Matemáticas de las carreras de ingeniería, inscritos en Enero de 2014. Se aplicaron dos exámenes, diagnóstico y final, así como una encuesta de opinión. Se compararon los promedios de ambos exámenes con una prueba de hipótesis. La secuencia didáctica propuesta, tuvo un impacto favorable en los estudiantes que participaron en la investigación, ya que aumentó significativamente el rendimiento académico de los alumnos. **Palabras clave**: Secuencias didácticas, Autoaprendizaje, Tecnología, Educación Superior
Abstract	The aim of the study was to develop a teaching sequence with use of technology for students at university level, independently, learn with understanding simplifying fractions. Fourteen students attended the course Fundamentals of Mathematics engineering careers, enrolled in January 2014. Two tests, diagnosis and final as well as an opinion poll were applied. The averages of both tests were compared with a hypothesis test. The proposed teaching sequence had a favorable impact on the students who participated in the research, as it significantly increased academic performance of students. **Keywords**: Teaching sequences, self-learning, Technology, Higher Education
Resumo	O objetivo do estudo foi desenvolver uma seqüência de ensino com o uso da tecnologia para estudantes de nível universitário, de forma independente, aprender com a compreensão simplificar frações. Catorze alunos participaram do curso Fundamentos de Matemáticas carreiras de engenharia, matriculados em Janeiro de 2014. Foram aplicados dois testes, diagnóstico e final como uma pesquisa de opinião. As médias de ambos os testes foram comparados com um teste de hipóteses. A seqüência de ensino proposto teve um impacto favorável sobre os estudantes que participaram da pesquisa, uma vez que aumentou significativamente o desempenho acadêmico dos alunos. **Palavras-chave:** seqüências didáticas, a autoaprendizagem, Tecnologia, Ensino Superior

1. Introducción

Uno de los temas centrales de los programas escolares en casi todos los países es, sin lugar a dudas, el de las matemáticas. Las matemáticas amplían la capacidad de comprender, controlar y mejorar el mundo en el que se vive. En las escuelas se depende en gran medida de los conocimientos matemáticos, de modo que muchos alumnos se encuentran en seria desventaja si tienen *lagunas* en matemáticas ya que es una materia interdisciplinaria, es decir, se relaciona con otras áreas del conocimiento, como la biología, química, física, entre otras (Qualding, 1982, p. 445).

Uno, de entre los muchos conocimientos matemáticos que los alumnos deben comprender, en el nivel medio superior, son las fracciones. Tal es su importancia, que en la estructura de la prueba ENLACE, prueba que se realiza anualmente en México en todos los niveles educativos, se encuentran las operaciones básicas con fracciones y la simplificación de fracciones (ENLACE, 2012).

El uso habitual histórico y actual del concepto de fracción es aquel que se asocia con la relación parte-todo. Actualmente las fracciones se aplican en varias situaciones de contexto, esto genera o deriva distintos significados de fracción, tales como la fracción como parte de un todo, como cociente, como razón, como probabilidad, como un número racional, como medida, como porcentaje, entre otros. No obstante, algunos significados carecen de importancia y fuerza para un significado escolar (Peña, 2011, p. 28).

El inicio de la enseñanza de las fracciones en México se da en tercero de primaria. Los aprendizajes esperados con respecto a las fracciones, del libro de texto de la Secretaría de Educación Pública (SEP), que corresponde a este grado son: (a) resolver problemas de reparto cuyo resultado sea una fracción de la forma $\frac{m}{2^n}$, (b) identificar escrituras equivalentes con fracciones, (c) identificar y representar gráficamente fracciones y, (d) resolver problemas al sumar o restar fracciones.

Para abordar el tema de fracciones, se inicia con un problema de partición y reparto. Cabe señalar que no se explica el concepto de fracción ni su representación previo a los problemas, como se haría en una enseñanza tradicional. El libro está elaborado con estrategias innovadoras que promueven el auto-aprendizaje para el desarrollo de competencias básicas para la vida y el trabajo, producto de las propuestas que conforman la Reforma Integral de la Educación Básica (Secretaría de Educación Pública, 2011).

Después del problema de partición y reparto se explica cómo se representa una fracción y cuáles son sus elementos. Se mencionan ejemplos de cosas que se pueden partir como pasteles, chocolates, bolsas de canicas y hojas de papel. Posteriormente se realizan actividades con distintos elementos, como figuras, preguntas e instrucciones que ayudan al estudiante a comprender el concepto de fracción como parte-todo.

De tercero a sexto grado de primaria los libros de texto desarrollados por la SEP tienen una estructura similar para la enseñanza de cualquier tema, la cual es: problema, definiciones, ejemplos y ejercicios, aunque este orden puede cambiar. El tema de fracciones varía a lo largo de la primaria en cuanto a la dificultad de los ejercicios, actividades y ejemplos.

En secundaria el currículo contempla el estudio de las fracciones y sus operaciones en los tres grados. En primero y segundo se estudian las fracciones comunes, significados y operaciones. En tercero se revisan las fracciones comunes y sus operaciones para entrar en el tema de fracciones algebraicas. Para el concepto de fracciones se manejan diferentes problemas de contexto. Estos problemas dan oportunidad a los estudiantes de descubrir los diferentes significados de fracciones y a darle importancia a su uso (Alarcón, Bonilla, Nava, Rojano y Quintero, 1994, p. 81).

Desde el inicio de la investigación en Educación Matemática, el proceso de enseñanza aprendizaje relacionado con las fracciones es uno de los más estudiados, tal vez porque representan una de las áreas de dificultad más comunes en las escuelas de todo el mundo (Fandiño, 2005, citado por Flores, 2012, p. 23). Según Freudenthal (1983, citado por Gallardo, 2011, p. 73), en lo que se refiere a la didáctica de las fracciones, ésta ha sido caracterizada por una tendencia unificadora, suponiendo que los estudiantes ya han comprendido y superado los obstáculos de los números naturales. Esto ocasiona que el tratamiento de las fracciones funcione con menor éxito que el de los números naturales, teniendo como consecuencia que conforme avanzan los estudiantes en los diferentes niveles tengan dificultades para hacer uso de las fracciones en problemas de contexto intra y extamatemáticos.

Peña (2011, pp. 10-11), afirma que el tema de las fracciones es uno de los conceptos matemáticos que presenta mayor dificultad en estudiantes de educación básica y señala que la hipótesis que actualmente ha cobrado importancia acerca de los conflictos en la enseñanza aprendizaje de este tema, es la que establece que la dificultad en el aprendizaje se debe principalmente a la multiplicidad de significados relacionados a las fracciones, lo que se puede llamar de otra forma, a su carácter polisémico.

La enseñanza de los números naturales, que es un tema previo a las fracciones, presenta diferencias epistemológicas que producen obstáculos para su comprensión y aprendizaje. Estos obstáculos perduran hasta el nivel de educación secundaria, e incluso, hasta la educación superior. Pruzzo (2012, pp. 2-4) coincide con Peña al señalar que una gran cantidad alumnos de secundaria no logra representar números fraccionarios, operar con ellos o establecer equivalencias. De manera que los aprendizajes sobre números racionales posteriores se ven comprometidos.

Los maestros de primaria expresan, que a los alumnos se les dificulta la conceptualización de las fracciones al no usarlas en su vida cotidiana, como lo hacen con los números naturales. Comentan que al resolver problemas, los niños tienen dificultades en dar una respuesta numérica, sus particiones carecen de equidad o exhaustividad, no comprenden las equivalencias, confunden los conceptos de numerador y denominador, así como la relación entre ambos, por lo que no saben distinguir si una fracción es menor o mayor que otra (Olguín y Álvarez, 2012, pp. 583-584).

De igual manera ocurre en los niveles medio superior y superior, los maestros se enfrentan con la misma problemática, los alumnos tienen dificultades para simplificar fracciones, comprender equivalencias, resolver operaciones básicas, especialmente si son sumas de fracciones con diferente denominador, esto dificulta la enseñanza de otros temas que incluyen fracciones, razones, proporciones y expresiones racionales. Según Larrazolo, Bacckhoff y Tirado (2013, pp.1151-1152), el 84% de los estudiantes de nivel superior en México conocen el concepto de fracción, el 83% es capaz de convertir decimales en fracciones comunes y apenas 50% puede solucionar problemas que involucren una fracción común como división, los datos fueron arrojados mediante un estudio realizado en cinco universidades de distintos estados del país. El estudio se hizo aplicando el Examen de Habilidades y Conocimientos Básicos (EXHCOBA) a aspirantes a dichas universidades.

Existen investigaciones que fundamentan la problemática en el uso de las fracciones, tal es el caso presentado por Peña (2011, pp. 17-18), quien realizó una investigación titulada “Resignificación del algoritmo para operar aditivamente con fracciones en un contexto escolar”. El objetivo general fue construir una propuesta didáctica que a través de un trabajo conceptual resignifique el algoritmo para operar aditivamente con fracciones. Para ello, elaboró una secuencia didáctica de actividades, la cual se aplicó a estudiantes de secundaria de 11 y 12 años, teniendo como resultados que estos lograron resignificar los conceptos y procedimientos experimentados y, desarrollaron un razonamiento argumentativo.

Otro ejemplo de esta problemática, es el estudio relacionado con la noción de fracción aplicado a jóvenes de 12 a 15 años, estudiantes de secundaria del Estado de México, en el que se les planteó un problema relacionado con el reparto de una pizza, en cuya solución interviene el concepto de equivalencia de fracciones, adición, diferencia y multiplicación de fracciones. Flores (2012, pp. 30-31) encontró que las principales dificultades fueron: (a) la interpretación del problema, (b) no considerar las condiciones del problema, (c) enfrentarse con una fracción y repartirla a su vez en partes iguales, y (d) no saber utilizar fracciones equivalentes para realizar el reparto solicitado.

Otra investigación relacionada con el uso de fracciones la realizó López (2012, p. 57), cuyo objetivo fue desarrollar una propuesta didáctica para la enseñanza del concepto de fracción considerando la relación parte-todo, para alumnos del séptimo grado en Colombia. En esta investigación primeramente se aplicó una prueba diagnóstico para identificar los conocimientos que los estudiantes tenían acerca de las fracciones, considerando sus diversos significados y representaciones. En esta prueba se detectaron fallas en relación a la conceptualización de fracción.

En el caso particular de la materia de Fundamentos de Matemáticas que se imparte en el primer semestre en las carreras de ingeniería del Instituto Tecnológico de Sonora, los contenidos de esta materia son principalmente de álgebra y trigonometría. Los alumnos enfrentan dificultades al momento de utilizar fracciones en cualquiera de los contenidos, ya sean productos notables, factorización, operaciones básicas con polinomios, más aún cuando se trata de exponentes fraccionarios, operaciones con expresiones racionales y las razones trigonométricas.

Esta materia tuvo 21.37% de índice de reprobación, 43% alumnos ausentes y

2.21% de alumnos dados de baja en el semestre enero-mayo de 2013 (ver figura 1), solo el 33.42% de los alumnos aprobaron la materia, lo que constituye un cuello de botella, ya que está seriada con otras materias de matemáticas.

Las fracciones forman parte del conjunto de conocimientos previos necesarios para la construcción de nuevos significados. Con el fin de identificar en los alumnos las dificultades que presentan acerca de las fracciones, se elaboró un instrumento diagnóstico. Este instrumento consta de siete reactivos, algunos de los cuales son preguntas abiertas y otros ejercicios que requieren un procedimiento para obtener máximo común divisor o simplificar fracciones.

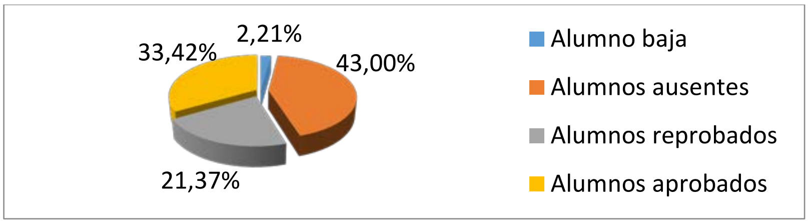


Figura 1. Índices de reprobación y deserción de la materia de Fundamentos de Matemáticas del semestre enero-mayo de 2013.

Se aplicó el instrumento diagnóstico a un grupo de la materia de Fundamentos de Matemáticas en el semestre agosto-diciembre de 2013. En el grupo estaban inscritos 35 alumnos, de los cuales asistieron y resolvieron el instrumento un total de 31 alumnos. Se observó que el 32% de los alumnos desconoce las partes de las fracciones, un 22.6% desconoce el significado de fracciones equivalentes y un 58% no logra simplificar cualquier fracción. Ante esta problemática es prioritario buscar soluciones para que los estudiantes de nivel universitario logren comprender el concepto de fracción, equivalencia y simplificación de fracciones.

El departamento de Matemáticas de ITSON ha realizado esfuerzos para dar solución a esta problemática capacitando profesores y ofreciendo asesorías gratuitas a los estudiantes por maestros y alumnos tutores, sin embargo la problemática persiste. Ya que la enseñanza de las fracciones no está incluida en el plan de estudios se sugiere, como alternativa, desarrollar una propuesta didáctica para autoestudio, con uso de tecnología. Con esta propuesta se pretende que los estudiantes mejoren su rendimiento académico en los aspectos relacionados a este tema. Para fines de este trabajo, el rendimiento académico es medido a través de las calificaciones de exámenes aplicados a los alumnos.

1.1 Objetivo general

Desarrollar una secuencia didáctica con uso de tecnología, para que estudiantes de nivel universitario, de forma independiente, comprendan significativamente la simplificación de fracciones.

1.2 Objetivos específicos

a. Determinar si la secuencia didáctica ayuda a mejorar el rendimiento académico de los estudiantes en relación a la simplificación de fracciones, para evaluar su efectividad.
b. Conocer la opinión de los estudiantes, a través de la aplicación de una

encuesta, para valorar la secuencia didáctica.

1.3 Hipótesis

La implementación de una secuencia didáctica sobre simplificación de fracciones con uso de tecnología, mejora el rendimiento académico de los estudiantes.

1.4 Justificación

"El estudio de las fracciones es importante por sí mismo y porque permite el desarrollo de nociones útiles para el conocimiento de temas más avanzados, tales como el razonamiento proporcional y el estudio de las expresiones racionales en el álgebra" (Alarcón et al., 1994, p. 81). Clarke y Roche (2009, p. 128) comentan al respecto, que es generalmente aceptado que las fracciones formen parte importante del currículo de matemáticas en el nivel básico, sustentando el razonamiento proporcional, así como temas posteriores, como el álgebra y la probabilidad.

Las fracciones intervienen durante la vida universitaria del alumno. Tal es el caso de las carreras de ingeniería de ITSON, donde se utilizan en materias como Cálculo, Probabilidad y Estadística, Ecuaciones Diferenciales y Álgebra Lineal. Además en materias propias de algunas carreras como la de Ingeniería Civil, por ejemplo en Topografía, Estática, Construcción y Análisis Estructural, así como la carrera de Ingeniero Químico, en Balance de Materia y Energía. El número de materias en los que intervienen las fracciones es muy amplio, de ahí la importancia de que el alumno domine este tema, pues es un conocimiento previo interviniente en la construcción de nuevos significados. No únicamente en el ámbito escolar, detrás de las operaciones que cotidianamente se realizan en el comercio, la industria, en los bancos, entre otros, están las fracciones. Por ejemplo, en un cuarto de hora…, medio kilo de…, la medida de…. es tres octavos (Cardoso, Cortina y Pérez, s. f., pp. 1-2).

2. Marco referencial

2.1 Secuencia Didáctica

Según Obaya y Ponce (2007, p. 19), una secuencia didáctica se refiere a un modelo alternativo de enseñanza que permite el logro de los objetivos de una planeación educativa. Una secuencia comprende un conjunto de situaciones didácticas o actividades ordenadas con un grado de dificultad progresivo, en las que interactúan alumnos, profesor y medios, para la comprensión de un objeto matemático específico.

Una secuencia evita la improvisación y la dispersión al tener una estructura definida, esto no quiere decir que la secuencia no sea flexible, ésta puede y debe adaptarse para cumplir los fines para los que fue creada. Es además, es un instrumento útil para organizar los contenidos escolares.

Martínez (s.f., pp. 5-8) indica que la planeación de una secuencia didáctica debe responder a las siguientes preguntas: (a) Qué. Ubicar el contenido que se quiere trabajar, es útil considerar los conocimientos previos de los alumnos para saber con qué nivel iniciar; (b) Por qué. Esto es la justificación o la razón del contenido; (c) Cómo. Señalar las actividades y forma de trabajarlas; (d) Con qué.

Esto es, incluir los recursos necesarios para el logro de las actividades; (e) Dé qué manera. Es la organización de tiempos, así como si será de forma individual o en equipo; y (f) Evaluación. Esta debe contemplar la forma de evaluar el aprendizaje, pero también la evaluación de la secuencia didáctica.

Además de la planeación de la secuencia, Martínez (s. f., pp. 5-8) señala que al diseñar una secuencia didáctica con uso de tecnología se deben tomar en cuenta los siguientes elementos: (a) Asignar un título, (b) Establecer en qué materia y en qué periodo escolar se impartirá, (c) Señalar el propósito de aprendizaje, (d) Señalar los recursos que se utilizarán, (e) Indicar qué actividades se realizarán fuera del salón de clase, (f) Aclarar qué productos se desarrollarán por parte de los alumnos y (g) Indicar bajo qué criterios se evaluará el aprendizaje.

2.2 Tecnologías de la Información y la Comunicación (TIC)

Las tecnologías de la información y la comunicación (TIC) se entienden como un conjunto de técnicas, desarrollos y dispositivos avanzados, en fin, toda forma de tecnología usada (software y hardware) ya sea para crear, almacenar, intercambiar o bien, para procesar información en varias modalidades, tales como datos, imágenes, videos, audios, presentaciones multimedias, páginas Web, sitio Web, y otras formas (Tello, 2007, p. 3).

Según Gómez y Macedo (2010, p. 223), la incorporación de las TIC en la sociedad, especialmente en el ámbito educativo, ha adquirido una progresiva importancia y ha evolucionado durante los últimos años, tanto, que la utilización de estas tecnologías en el aula pasará de ser una posibilidad a instituirse como una necesidad y como una herramienta de trabajo indispensable para el profesorado y el alumnado.

Cuevas-Salazar, García-López y Cruz-Medina (2008, p. 1090), mencionan que en el ámbito universitario, el uso de medios tecnológicos ha incrementado, ya que son un apoyo para promover de manera significativa el procesamiento de información y la construcción del conocimiento. Con ellos, los profesores pueden lograr motivar a sus estudiantes y mejorar las formas de aprendizaje.

Para Ferro, Martínez y Otero (2009, pp. 3-6), la principal ventaja de las TIC es que estas ayudan a crear entornos virtuales de aprendizaje, lo que implica que no exista un lugar específico, donde la educación es posible sin límites temporales, ajustándose al tiempo de aprendizaje de cada estudiante. Además las TIC favorecen la adaptación del proceso de estudio a las características educativas y cognitivas de cada persona, dejando de ser receptores pasivos de la información para ser procesadores activos, lo cual permite hacer conciencia de la información procesada, favoreciendo el conocimiento.

Algunas de las TIC más utilizadas en educación son los programas didácticos o software educativo, Barboza (2005, p. 1) los define como programas computacionales creados específicamente como medio didáctico. Esto quiere decir que se utilizan para facilitar los procesos de enseñanza y aprendizaje. Juegan un importante papel en la enseñanza, ya que entre las ventajas que ofrecen es la presentación de contenidos más dinámicos, flexibilidad de adaptación, facilidad en la actualización de contenidos, interactividad, adaptación a cualquier nivel educativo

(Abánades, Botana, Escribano y Tabera, 2009, pp. 6-8).

Una herramienta tecnológica muy utilizada en educación es la página Web. Según Jiménez, (2009, citado por Pantoja, Lozano y Portillo, 2013, p. 6) una página Web es un documento que contiene información específica de un tema en particular y que es almacenado en algún sistema de cómputo que se encuentre conectado a la red mundial de información denominada Internet conocida como WWW (World Wide Web), que se basa en la tecnología hipertexto/hipermedia. De esta forma, este documento puede ser consultado por cualquier persona que se conecte a esta red mundial de comunicaciones.

Algunas funciones de una página Web en educación pueden ser: (a) Sustitutiva, ya que sustituir la educación presencial por la educación a través de los medios; (b) Complementaria, abarca desde la simple información hasta la modificación profunda de técnicas, métodos o contenidos de la enseñanza, (c) Extensiva, destinada a mejorar la instrucción recibida en las estructuras educativa; y (d) De iniciación y desarrollo, se ejerce sobre la población que no haya estado sometida a la acción de ningún sistema educativo (Aguilera, 1982, citado por Ferrer, 2005, pp. 204-205). Al conjunto de páginas Web relacionadas entre sí por medio de hipervínculos y ordenadas jerárquicamente, se le conoce como sitio Web.

Otra herramienta tecnológica utilizada en educación, específicamente en el área de matemáticas es el Software matemático. Uno de estos es GeoGebra, una aplicación de Software libre, quiere decir que tiene libertad de ejecución, de redistribución, de estudio para modificaciones o mejoras y su publicación (Abánades et al., 2009, p. 5). Las construcciones se pueden exportar fácilmente a páginas Web y ofrece un wiki donde se pueden compartir las construcciones (Losada, 2007, p. 1).

Al exportar las realizaciones o construcciones de Geogebra a una página Web, se genera un Applet. Este es una pequeña aplicación (HTML) escrita en Java y que se puede ejecutar en cualquier navegador que disponga de un intérprete Java, sin la necesidad de intercambiar información con el servidor ya que siempre se ejecuta en el cliente.

GeoGebra cae dentro de dos categorías de software matemático, el CAS (Sistema de Álgebra Computacional) y el DGS (Sistema de Geometría Dinámica) lo que permite combinar las representaciones gráficas y algebraicas y mostrar ambas al mismo tiempo, esto representa un gran valor agregado, ya que los estudiantes pueden articular ambas representaciones (Losada, 2007. pp. 5-6).

Los alumnos pueden realizar diversas actividades con GeoGebra, como construcciones geométricas rápidas y precisas, razonar y comprender acerca de las relaciones geométricas de diferentes objetos, manipular figuras geométricas e identificar las diferencias y semejanzas entre ellas, ejecutar cálculos de medidas, controlar el aspecto gráfico de una figura con el mouse, observar los pasos de una construcción para repetirla cuantas veces sea necesario, hacer conjeturas acerca de esas construcciones, entre otras (Castellanos, 2010, p. 46).

Según García (2011, pp. 392-393), GeoGebra favorece el desarrollo de la autoconfianza de los estudiantes, ya que permite construir y tener actividad en todo momento. La interactividad o retroalimentación inmediata y efectiva que ofrece el software invita a la toma de conciencia y corrección de los errores cometidos. La facilidad de uso y la rapidez de respuesta incitan al estudiante a la búsqueda de diversas formas de encontrar una solución.

3. Metodología

3.1 Participantes y contexto

La presente investigación se desarrolló en el Instituto Tecnológico de Sonora (ITSON), la cual es una universidad pública estatal con sede en Ciudad Obregón, Sonora. La población comprende a todos los alumnos de primer año de las carreras de ingeniería, que cursan la materia de Fundamentos de Matemáticas. Estos alumnos se encuentran en un rango de edad de los 18 a los 20 años. El 20% de estos alumnos es de sexo femenino, el 30% trabaja además de estudiar y el 90% procede de escuelas públicas. En la materia de Fundamentos de Matemáticas se utilizan con bastante frecuencia las fracciones y contiene los temas que son base para cursos posteriores, tanto de las ciencias básicas como los propios de sus carreras. La muestra correspondió a un grupo de 14 alumnos inscritos en esta materia, los cuales no fueron elegidos al azar.

La implementación de la propuesta didáctica se llevó a cabo en cinco sesiones de 50 minutos cada una, en el período escolar Enero-Mayo de 2014. Durante este semestre la mayoría de los alumnos estaba cursando la materia por segunda vez, ya que el período regular de admisiones es en el semestre que corresponde a Agosto-Diciembre.

3.2 Instrumentos

Se elaboraron dos exámenes, uno diagnóstico y otro examen final para determinar las competencias de los estudiantes en cuanto a las fracciones equivalentes y la reducción de fracciones. Estos instrumentos constan de 11 y 12 reactivos respectivamente, algunos son preguntas abiertas y otros son ejercicios que requieren de un procedimiento para obtener máximo común divisor o simplificar fracciones. A estos exámenes se les asignó una calificación para realizar los análisis correspondientes.

Para medir la opinión que los alumnos o participantes tienen sobre la secuencia didáctica acerca de simplificación de fracciones, se elaboró una encuesta, que consta de nueve ítems en Escalamiento Likert y una pregunta abierta. Esta última con el fin de que los participantes expresaran con mayor libertad cualquier opinión, positiva o negativa acerca de la secuencia didáctica.

Las preguntas son acerca de la importancia de la secuencia, la claridad y orden de las instrucciones y el tiempo de ejecución. También se cuestiona la parte tecnológica para evaluar su relevancia y manejabilidad. Otro punto importante es la participación del maestro, si es o no relevante.

La presente investigación contempla el enfoque cuantitativo. Ya que uno de los objetivos de este estudio es determinar si la secuencia didáctica ayuda a mejorar el rendimiento académico de los estudiantes en relación a la simplificación de fracciones, para evaluar su efectividad, se considera que esta investigación es de tipo experimental. El diseño adecuado para esta investigación fue el cuasiexperimental, ya que los participantes no se eligieron al azar, sino que los grupos ya están formados antes del experimento.

Para conocer la opinión de los alumnos sobre la secuencia didáctica, se usó una variable independiente y dos variables dependientes. La variable independiente que se manipuló en el experimento fue la secuencia didáctica, la cual fue aplicada al grupo elegido. El efecto que esta causó en la comprensión de los participantes sobre simplificación de fracciones, fue una de las variables dependientes y el efecto que causó en la actitud hacia la secuencia didáctica de los estudiantes fue la otra.

3.3 Diseño de la secuencia didáctica

Para el diseño de la secuencia didáctica se utilizó el software GeoGebra y se colocó en un sitio Web, para que esta se pudiera acceder a ella por los alumnos desde cualquier computadora con acceso a Internet.

La secuencia contiene instrucciones, conceptos, Applets de GeoGebra, preguntas, llenado de tablas y aplicación dentro de un contexto intramatemático. En los Applets de GeoGebra se utilizan deslizadores, herramienta para cambiar valores que a su vez modifican ciertas condiciones.

La idea principal de los Applets fue tomada de uno elaborado por Colombo (2012), que consiste principalmente en dos deslizadores, uno correspondiente al denominador y otro al numerador de una fracción, con los valores de estos se forma un rectángulo de cierto color, dividido en partes iguales, la cantidad de partes la determina el valor del denominador, con otro color se resalta el valor del numerador en la figura. Otro rectángulo abajo representa una fracción equivalente a la anterior y se forma multiplicando el valor de un tercer deslizador por el numerador y por el denominador. La conversión a números decimales de ambas fracciones se muestra con una flecha en una recta numérica. Para fines de la secuencia didáctica se realizaron algunas modificaciones a la idea original de Colombo, además se diseñaron nuevos Applets, como el de simplificación de fracciones, el de máximo común divisor, entre otros. La secuencia incluye en total seis páginas Web vinculadas, las cuales se nombran de la siguiente manera en el presente trabajo: *Inicio*, *Fracciones*, *Fracciones Equivalentes*, *Simplificación*, *Máximo Común Divisor* y *Aplicación*.

La página Web Inicio es básicamente una bienvenida, en la que se da una breve explicación de la importancia de las fracciones, del uso de los Applets y se indican los materiales que se requieren para realizar las actividades. Además se incluye un mensaje de audio por medio de un avatar en el que se resalta la importancia de leer las instrucciones y se invita a explorar la página.

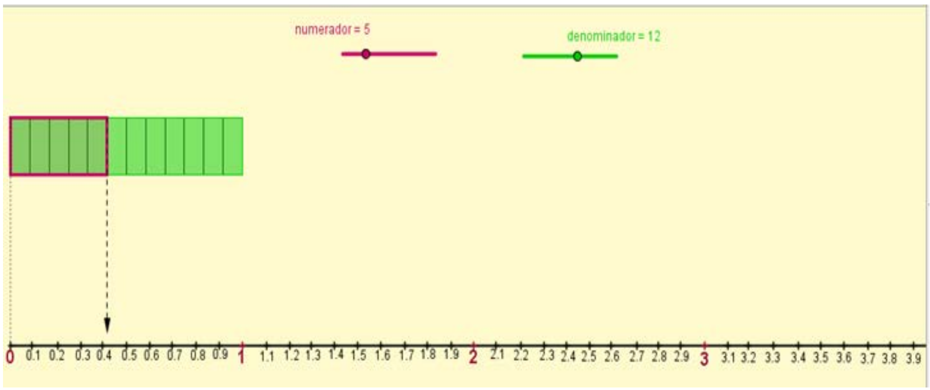


Figura 2. Applet de GeoGebra insertado en la página Web Fracciones. Primer acercamiento del alumno a la actividad matemática relacionada al concepto de fracción.

Las prácticas matemáticas empiezan en la siguiente página que tiene como título Fracciones. Esta parte de la secuencia incluye un Applet (ver figura 2) cuyo fin es que los alumnos identifiquen en el rectángulo el numerador y el denominador, para formar la fracción y que a su vez se familiaricen con el Applet, ya que las actividades posteriores se realizan con la misma representación salvo algunas modificaciones que va requiriendo la actividad.

La página Fracciones equivalentes incluye seis Applets. En la figura 3 muestra dos rectángulos, el primero con una representación geométrica de la fracción que se forma con los deslizadores y el segundo es una representación geométrica similar a la anterior pero sin divisiones, es decir, se desconocen numéricamente el numerador y el denominador.

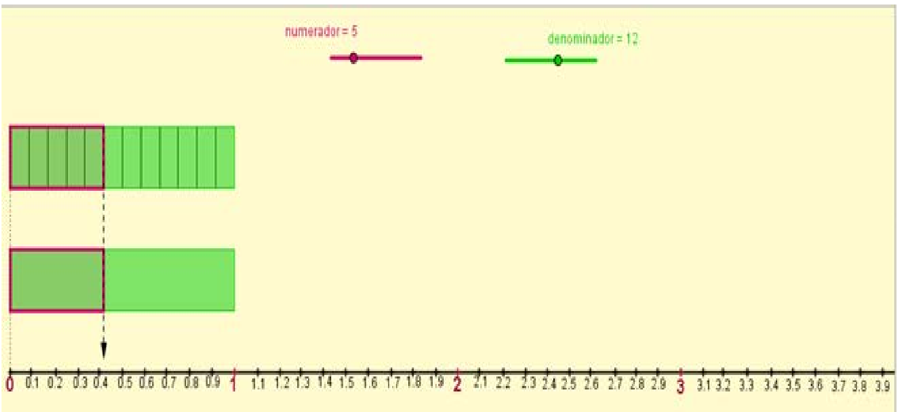


Figura 3. Applet de GeoGebra insertado en el sitio Web que corresponde a la página "Fracciones Equivalentes" sin divisiones.

Esta sección de las Fracciones equivalentes tiene la finalidad de que el alumno visualmente identifique las que son equivalentes en las representaciones geométricas dadas, ya que tienen el mismo valor numérico en la recta. Las partes sombreadas para el numerador y denominador son iguales, la diferencia es que no están divididas de la misma manera.

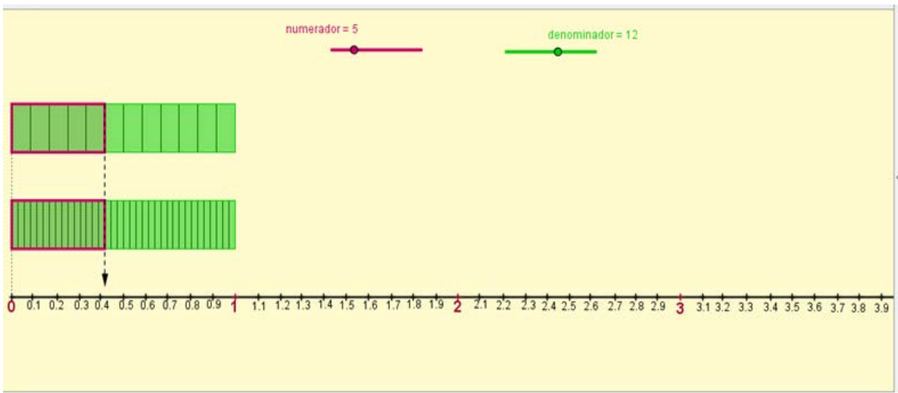


Figura 4. Applet de GeoGebra insertado en el sitio Web que corresponde a la página "Fracciones Equivalentes" con divisiones.

El Applet de la figura 4 contiene los mismos rectángulos pero el segundo ya tiene divisiones, de manera que es posible establecer una cantidad para el numerador y el denominador. Se solicita llenar una tabla formando las fracciones indicadas con los deslizadores y que se encuentre la fracción que representa el segundo rectángulo, esta es una tabla interactiva, ya que es un Applet con el que se puede verificar inmediatamente si las respuestas son correctas o no.

Con el Applet de la figura 5, ha de concretarse la actividad anterior, en el que se agrega la representación aritmética de la equivalencia, mostrando que el numerador y el denominador de la fracción deben multiplicarse por el mismo valor para obtener la fracción del segundo rectángulo. Aritmética y geométricamente se muestra una equivalencia.

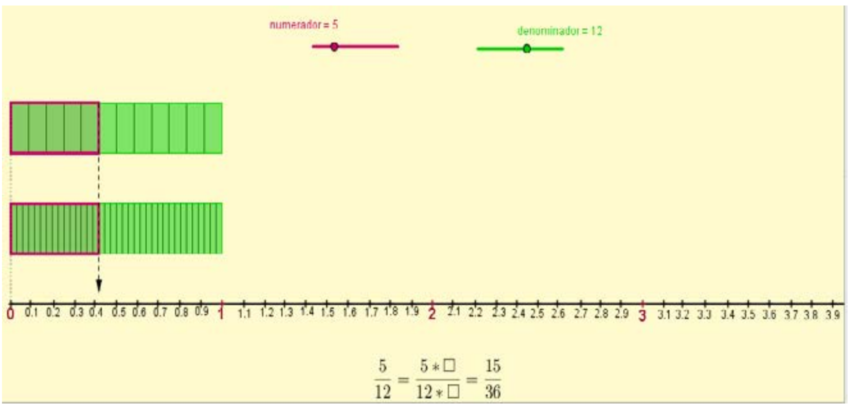


Figura 5. Applet de GeoGebra en el que se muestra la equivalencia aritmética y geométrica.

Haciendo uso del mismo Applet, con el propósito de que establezca la equivalencia de fracciones con números enteros, se pide al estudiante formar varias fracciones: (a) con numerador cero y cualquier denominador, (b) con numerador y denominador iguales, (c) que el numerador sea el doble del denominador y, (d) que el numerador sea el triple del denominador.

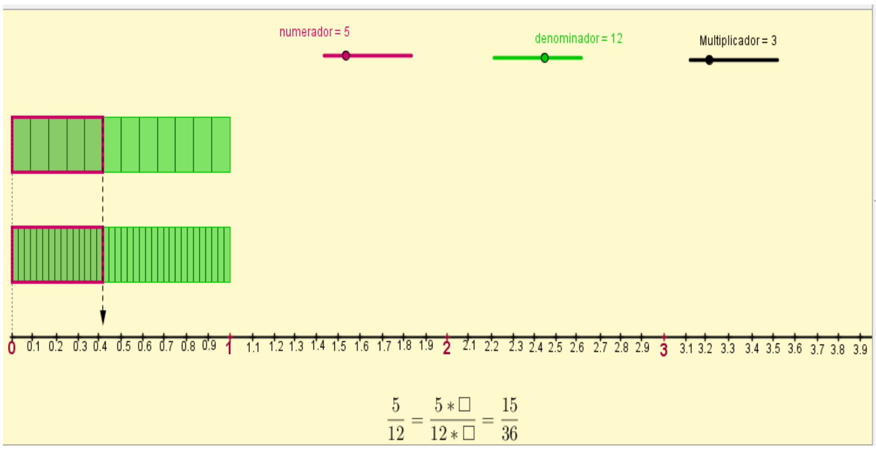


Figura 6. Applet de GeoGebra que incluye un deslizador multiplicador, para modificar la fracción equivalente.

El Applet de la figura 6 tiene como variante un nuevo deslizador, que aumenta o disminuye la cantidad de divisiones del segundo rectángulo. Se pide completar una tabla interactiva (ver figura 7), en la que el alumno debe encontrar valores faltantes, ya sea la fracción equivalente o el valor por el que hay que multiplicar numerador y denominador o finalmente encontrar la fracción inicial, con la finalidad de que intervenga o emerja el procedimiento para establecer equivalencia de fracciones y también para introducirlo a la reducción, ya que en algunos casos tendrá que dividir en lugar de multiplicar para encontrar el valor inicial. Ciertos ejercicios los podrá resolver con apoyo del Applet, pero en la gran mayoría tiene que hacerlo por sí mismo.

Ya que GeoGebra no permite espacios vacíos en las casillas de entrada, fue necesario colocar ceros (ver figura 7) en los lugares en los que el alumno debe introducir un valor para formar las equivalencias. Esto mismo sucede en otros Applets en los que se colocaron distintos valores de forma estratégica en las casillas de entrada.

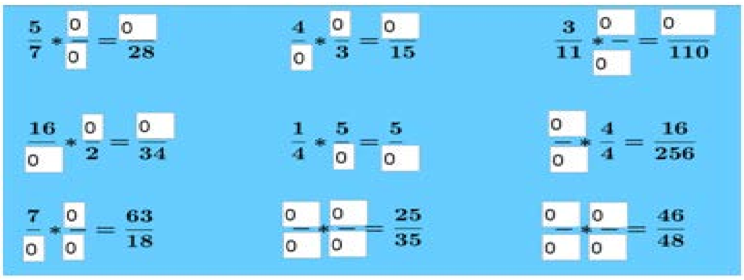


Figura 7. Applet de GeoGebra interactivo para encontrar valores faltantes en las equivalencias.

La página Web Simplificación de fracciones incluye un Applet similar a los anteriores. En este el tercer deslizador es un divisor que reduce la fracción (ver figura 8). Mientras numerador y denominador no sean divisibles por el mismo valor, el segundo rectángulo no se forma, por lo que no se visualiza.

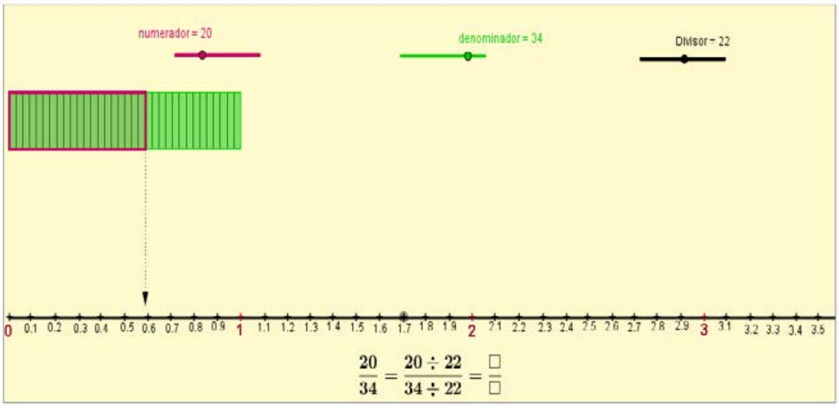


Figura 8. Applet de GeoGebra con un deslizador divisor para simplificar fracciones.

Con el uso del Applet se pide llenar una tabla, para reducir la misma fracción las veces que sea posible, empezando con el divisor más pequeño. Se le pregunta al alumno ¿Con cuál divisor se obtuvo la fracción irreducible? Con la finalidad de que intervenga o emerja el procedimiento para obtener la fracción irreducible y el concepto de máximo común divisor (mcd).

La página Web Máximo común divisor, contiene un Applet con el que se pretende ayudar a encontrar el mcd de 2 números (ver figura 9), con el método de descomposición en factores primos, necesarios para la comprensión y establecimiento de un procedimiento para encontrar el mcd, para reducir fracciones al máximo. Se solicita llenar una tabla para encontrar fracciones irreducibles con apoyo del Applet y otra tabla sin el apoyo de este para verificar que lograron el objetivo final de la propuesta.

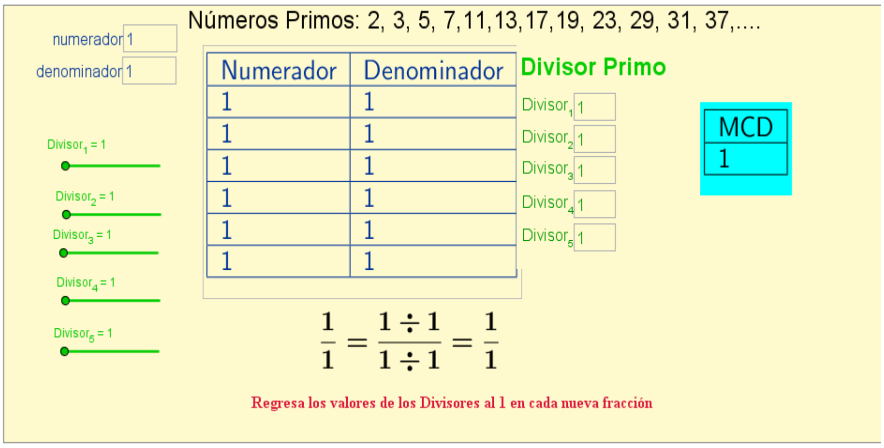


Figura 9. Applet de GeoGebra para encontrar el máximo común divisor.

La página Web Aplicación contiene información sobre las posibles aplicaciones de la simplificación de fracciones tanto en lo cotidiano como en un contexto escolar. Como último ejercicio se pide que identifiquen en diferentes expresiones matemáticas, la fracción y la simplifiquen, con un Applet interactivo con el que pueden verificar sus respuestas (ver figura 10).

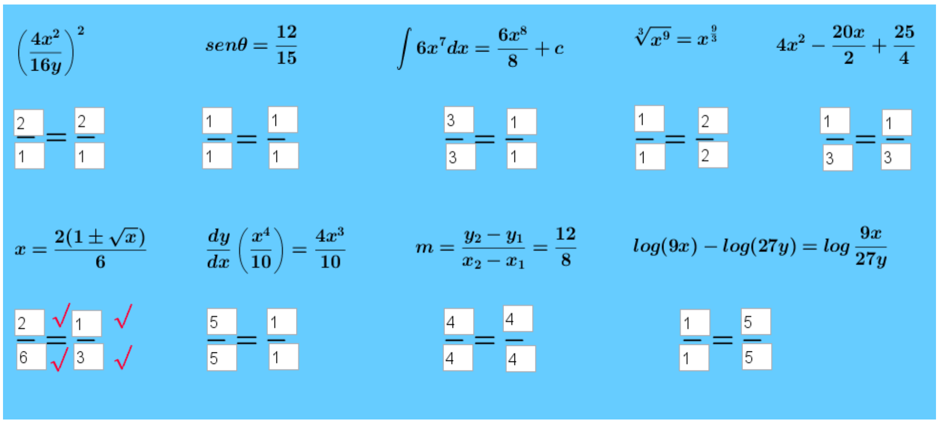


Figura 10. Applet de GeoGebra para identificar una fracción en una expresión algebraica y simplificarla.

3.4 Procedimiento

A continuación se describe el procedimiento que guio la investigación.

1. Elaboración de examen diagnóstico y examen final. Se elaboró un examen diagnóstico para identificar el nivel de comprensión de los estudiantes acerca de la simplificación de fracciones. Además se elaboró el examen final para comparar los sistemas de prácticas declarados en ambos exámenes. El examen final se aplicó después de implementada la secuencia didáctica.
2. Elaboración de la Secuencia didáctica. Para ello se utilizó el software GeoGebra y se colocó en un sitio Web.
3. Elaboración de encuesta de opinión. Para conocer la opinión de los participantes acerca de la secuencia didáctica, se elaboró una encuesta con el escalamiento tipo Likert.
4. Implementación de la secuencia. Este paso se llevó a cabo en varias etapas: (a) Se efectuó la aplicación del examen diagnóstico a 12 de los 14 alumnos participantes, en el aula de clases (tiempo estimado 20 minutos), una semana antes de implementar la secuencia didáctica; (b) se calificaron los exámenes, (c) se citó al grupo al lugar donde se llevaría a cabo la puesta en escena, aula del Centro de Informática y Servicios de Cómputo (CISCO), para que cada alumno dispusiera de una computadora con Internet y pudiera acceder a la secuencia didáctica; (d) Se implementó la secuencia didáctica en tres sesiones de 50 minutos; (e) Se aplicó el examen final (tiempo estimado 20 minutos) y la encuesta de opinión (15 minutos) a los 14 alumnos involucrados en el estudio; y (f) Se calificó el examen final.
5. Análisis de resultados. Se realizó un análisis estadístico de los resultados de los exámenes diagnóstico, con una prueba de hipótesis para decidir si la hipótesis era aceptada, con los datos obtenidos en la muestra. El método utilizado para probar la hipótesis fue la *Prueba t*. Los resultados recolectados por la encuesta de opinión se analizaron utilizando estadística descriptiva,

mediante gráficas de pastel.

4. Análisis y resultados

4.1 Resultados de exámenes

Para evaluar el impacto de la secuencia didáctica en el aprendizaje de los 14 alumnos involucrados sobre simplificación de fracciones, se aplicó un examen diagnóstico y un examen final. Se analizaron los resultados de ambos exámenes con una prueba de hipótesis, por medio de una prueba t, para medias de dos muestras emparejadas. La media y desviación estándar para el examen diagnóstico fueron 24.75 y 15.78 respectivamente, para el examen final fueron 45.5 y 27.31.

Las hipótesis para esta prueba fueron:

H_0: el promedio de las calificaciones de los alumnos en el examen diagnóstico es igual al promedio de las calificaciones de los alumnos en el examen final.

H_1: el promedio de las calificaciones de los alumnos en el examen diagnóstico es menor al promedio de las calificaciones de los alumnos en el examen final.

Esta prueba arrojó un valor $t = -3.319$ y un valor $p = .003$ con 11 grados de libertad, por lo que se rechaza la hipótesis nula con un nivel de significancia de .05 y se acepta la hipótesis alterna, ya que el valor $p < 0.05$.

Como hipótesis preliminar de este estudio se consideró que la implementación de una secuencia didáctica sobre simplificación de fracciones con uso de tecnología, mejora el rendimiento académico de los estudiantes. Con los resultados obtenidos se puede concluir que sí existe una mejora significativa en el rendimiento académico tras implementar la secuencia didáctica. Por lo tanto, se considera que la secuencia didáctica contribuyó a la comprensión de simplificación de fracciones.

4.2 Resultados de la encuesta de opinión

Para el análisis de la encuesta se utilizó el método de Escalamiento Likert y se realizaron gráficas de pastel. En el Escalamiento Likert se asignó a cada respuesta de opción múltiple un valor. Debido a que las afirmaciones de la encuesta son positivas, la respuesta de más alta puntuación es la que implica una actitud favorable hacia la afirmación. Son cinco respuestas por afirmación, de manera que a “muy en desacuerdo” se le asignó el valor 1, ascendiendo los valores conforme las actitudes favorecen la afirmación.

La puntuación se obtiene sumando los valores dados por cada encuestado, dado que la encuesta fue contestada por 14 alumnos, la puntuación más alta que favorece a la afirmación, puede ser de 70 puntos, y la más baja de 14 (ver figura 11).

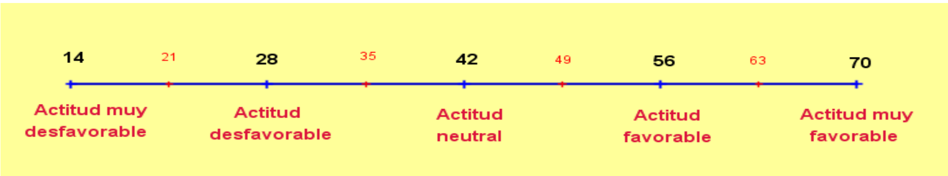


Figura11*.* Gráfica de la actitud de los estudiantes hacia una afirmación según la puntuación dada.

Para efectos de este trabajo, la puntuación de las respuestas se consideró de acuerdo a los siguientes rangos: si la puntuación de las respuestas estuvo en un rango de 14 a 21, se clasificó como muy desfavorable, de 22 a 35 se tomó como desfavorable, de 36 a 49 como neutral, de 50 a 63 como favorable y de 64 a 70 como muy favorable.

La primera afirmación de la encuesta “Hubo claridad en las instrucciones” tuvo un total de 60 puntos. De acuerdo a los rangos propuestos se tiene una actitud favorable por parte de los alumnos. La distribución de los estudiantes hacia esta afirmación, el 93% de los estudiantes opinó que estuvo por lo menos de acuerdo en que las instrucciones fueron claras y solo un 7% tuvo una opinión indecisa. De esto se puede concluir que la redacción de las instrucciones de la secuencia didáctica fue clara.

La segunda afirmación “La secuencia de las actividades tuvo un orden de menor a mayor dificultad” resultó con un total de 56 puntos siendo esta también una puntuación favorable. El 7% de los estudiantes opinó estar en desacuerdo, por lo que es recomendable considerar hacer modificaciones en el orden del grado de dificultad de la secuencia didáctica.

“El grado de dificultad de los ejercicios fue adecuado” es la afirmación 3, en la que los estudiantes, según la escala Likert la favorecieron con 62 puntos. Los resultados muestran que un 86% por lo menos está de acuerdo con esta afirmación, solamente un 14% se mostró neutral y no existe una sola opinión en contra. Se concluye que no es necesario hacer modificaciones en el grado de dificultad de los ejercicios.

En la afirmación 4 que dice “El tiempo de ejecución para lograr el objetivo de las actividades fue adecuado”, tuvo una puntuación de 61, la cual es una puntuación favorable. El 93% consideró estar por lo menos muy de acuerdo con esta afirmación, mientras que el 7% se mantuvo neutral. Por lo que, de acuerdo a la opinión de los estudiantes, el tiempo de ejecución fue adecuado.

La quinta afirmación “La actividad ayudó al entendimiento del tema” tuvo un total de 59 puntos, lo que resultó favorable, según la escala Likert. Un estudiante omitió su respuesta en este ítem. Un alto porcentaje, 84%, estuvo de acuerdo con esta afirmación mientras que el16% se mantuvo neutral. Los estudiantes confirman que la secuencia didáctica ayudó a entender la simplificación de fracciones, sin embargo por el porcentaje de estudiantes que se mostró neutral, es recomendable comparar estos resultados con los del análisis cualitativo para contemplar posibles mejoras.

La afirmación 6 “EL software es amigable” tuvo un puntaje de 63, lo que se considera favorable, cercano a muy favorable. La mayoría de los estudiantes 57% estuvo muy de acuerdo con que el software es amigable, un 36% solo estuvo de acuerdo y un 7% mostró una opinión neutral. Los Applets de GeoGebra y la página Web fueron entendibles y fáciles de usar, por lo que se concluye que el software fue adecuado según la opinión de los estudiantes.

“El uso del software ayudó a la comprensión del tema” es el ítem 7, al cual los estudiantes dieron una puntuación de 60 puntos, lo que resultó favorable. El 86% de los alumnos estuvo por lo menos de acuerdo con esta afirmación, mientras que un 14% se mostró neutral, ni de acuerdo ni en desacuerdo. Con este resultado y el anterior, se confirma que el uso de las TIC facilitan los procesos de enseñanza y aprendizaje, por la presentación de contenidos dinámicos, su flexibilidad de adaptación e interactividad. Sin embrago, es importante poner atención, ya que el 14% manifestó neutralidad en cuanto a que el software fue de ayuda para comprender el tema, por lo que es necesario analizar el uso de la tecnología con otros análisis, por ejemplo el cualitativo.

La siguiente afirmación “la actividad puede realizarse sin la presencia de un maestro” tuvo una puntuación de 50 lo que se considera como favorable. Sin embargo, un 22% de los estudiantes no estuvo de acuerdo con esta afirmación. La secuencia didáctica se diseñó para resolverse sin la presencia de un maestro, un porcentaje importante de alumnos no lo consideró así.

Por último, la afirmación “Recomendarías esta actividad para estudiar la simplificación de fracciones” es la más favorecida con 65 puntos, resultando en la clasificación de muy favorable. El 72% estuvo muy de acuerdo en recomendar la actividad para el estudio de la simplificación de fracciones. Un 21% estuvo de acuerdo y un 7% se mantuvo neutral. Los estudiantes recomiendan estudiar simplificación de fracciones con esta secuencia didáctica.

5. Conclusiones

Una vez analizados los resultados bajo el enfoque cuantitativo, se puede concluir, que la secuencia didáctica sobre simplificación de fracciones propuesta, tuvo un impacto favorable en los estudiantes que participaron en la investigación, ya que el rendimiento académico mejoró significativamente en relación a la simplificación de fracciones, tras su implementación.

Los estudiantes están a favor de la secuencia didáctica, les parece recomendable, por la claridad de las instrucciones, por el grado de dificultad y el tiempo de ejecución fue el adecuado, por el software amigable, aunque un 21% manifestó que no se puede realizar sin maestro.

La movilidad o dinamismo que ofrece el software de GeoGebra, permitió en un tiempo inmediato, obtener la representación geométrica de diferentes fracciones y su equivalencia. También se consiguió obtener el máximo común divisor para varios pares de números, en un tiempo de ejecución menor que si se hiciera de forma manual.

Es importante mencionar que en la figura 7 se utilizó el cero como número en las casillas de entrada y da la impresión de tener una indeterminación de cero sobre cero. Esto no representó ningún conflicto didáctico para los alumnos, ya que lograron realizar la actividad sin problema y sin que el profesor tuviera que intervenir en alguna duda.

Con la visualización se identificó la relación entre el valor de la fracción, su representación geométrica y su representación numérica, permitiendo a su vez, identificar la relación de esa fracción con la fracción equivalente, representada geométricamente. La verificación inmediata brindó confianza al estudiante, dándole seguridad para continuar si acertó, o bien, haciéndolo revisar y corregir en caso de haber errado.

El tiempo propuesto para la realización de la secuencia fue superior al tiempo de estudio, el 93% de los estudiantes ejecutó la secuencia didáctica en un tiempo menor del estimado, es decir, el tiempo de aprendizaje fue menor que el tiempo propuesto. El hecho de que la secuencia didáctica esté disponible en un sitio Web permite al estudiante aprender a su ritmo, revisando la secuencia las veces que sea necesario, ajustando el tiempo de estudio a su tiempo de aprendizaje.

Bibliografía

Abánades, M., Botana, F., Escribano, J. y Tabera, L. (2009). Software matemático libre. *La Gaceta de la RSME* [en línea], 12(2), 325-346. Recuperado el 7 de mayo de 2014, de http://gaceta.rsme.es/abrir.php?id=862

Alarcón, J., Bonilla, E., Nava, R., Rojano, T. y Quintero, R. (1994). *Libro para el Maestro. Matemáticas. Educación Secundaria.* D. F., México: SEP. Recuperado el 10 de marzo de 2014, de http://www.reformasecundaria.sep.gob.mx/matematicas/pdf/orientaciones/libromaestro.pdf

Barboza, L. (2005). Software Educativo: su potencialidad e impacto en los procesos de enseñanza y aprendizaje ¿aliado o adversario del profesor? Recuperado el 7 de mayo de 2014, de http://beceneslp.edu.mx/PLANES2012/2o%20Sem/06%20La%20tecnolog%EDa%20inform%E1tica%20aplicada%20a/Materiales/Unidad%20I/Software%20Educativosu%20potencialidad%20e%20impacto.pdf

Cardoso, E. R., Cortina, J.L., Pérez, L. (s. f.). El conocimiento cuantitativo sobre fracciones en los estudiantes de 6° grado de primaria. Trabajo presentado en el X Congreso Nacional de Investigación Educativa. Recuperado el 12 de junio de 2013, de http://www.comie.org.mx/congreso/memoriaelectronica/v10/pdf/area_tematica_05/ponencias/1587-F.pdf

Castellanos, I. (2010). Visualización y razonamiento en las construcciones geométricas utilizando el software GeoGebra con alumnos de II de Magisterio de la E.N.M.P.N. (Tesis inédita de maestría). Universidad Pedagógica Nacional. Recuperado el 7 de mayo de 2014, de http://www.cervantesvirtual.com/obra/visualizacion-y-razonamiento-en-las-construcciones-geometricas-utilizando-el-software-GeoGebra-con-alumnos-de-ii-de-magisterio-de-la-enmpn/

Clarke, D. & Roche, A. (2009). Students' fraction comparison strategies as a window into robust understanding and possible pointers for instruction. *Springer link*. Vol. 72, p.p. 127-138. Recuperado el 24 de enero de 2013, de http://link.springer.com/article/10.1007/s10649-009-9198-9#page-1

Colombo, F. (2012). GeoGebra. Equivalencia de fracciones. Recuperado el 5 de abril de 2013, de http://www.geogebratube.org/material/show/id/12474

Cuevas-Salazar, O., García-López, R., Cruz-Medina, I. (2008). Evaluación del impacto de una plataforma para la gestión del aprendizaje utilizada en cursos presenciales en el Instituto Tecnológico de Sonora. *Revista Mexicana de Investigación Educativa*. Vol. 13, No. 39, 1085-1107.

ENLACE, (2012). Recuperado el 12 de junio de 2013, de: http://www.enlace.sep.gob.mx/content/ms/pages/estructura_de_la_prueba/habilidad_matematica.html

Ferrer, R. (2005). Diseño de páginas web en educación. Recuperado el 25 de abril de 2013, de http://www.tendenciaspedagogicas.com/Articulos/2005_10_11.pdf

Ferro, C., Martínez, A., Otero, M. (2009). Ventajas del uso de las TICs en el proceso de enseñanza-aprendizaje desde la óptica de los docentes. *EDUTEC, Revista Electrónica de Tecnología Educativa* [en línea], 29. Recuperado el 10 de marzo de 2014, de http://edutec.rediris.es/Revelec2/revelec29/articulos_n29_pdf/5Edutec-E_Ferro-Martinez-Otero_n29.pdf

Flores, R. (2012). La noción de fracción como comparador parte-todo. *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa* [en línea], 24. Recuperado el 24 de enero de 2013, de http://www.clame.org.mx/acta.htm

Gallardo, A. (2011). Fracciones negativas y las nociones previas para el reconocimiento de su significado por estudiantes de secundaria. *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa* [en línea], 24. Recuperado el 24 de enero de 2013, de http://www.clame.org.mx/acta.htm

García, M. (2011). Evolución de actitudes y competencias matemáticas en estudiantes de secundaria al introducir GeoGebra en el aula. (Tesis inédita de doctorado). Universidad de Almería. Recuperado el 7 de mayo de 2014, de http://archive.geogebra.org/en/upload/files/Tesis_ MariadelMarGarciaLopez.pdf

Gómez, L. y Macedo, J. (2010). Importancia de las TIC en la educación básica regular. *Tecnología de la Información* [en línea], 14(25), 209-224. Recuperado el 10 de marzo de 2014, de http://sisbib.unmsm.edu.pe/bibvirtual/publicaciones/inv_educativa/2010_n25/pdf/a12v14n25.pdf

Larrazolo, N., Backhoff, E. & Tirado, F. (2013). Habilidades básicas de razonamiento matemático de estudiantes de educación media superior en México. *Revista Mexicana de Investigación Educativa* [en línea], 18(59), pp. 1137-1163. Recuperado el 14 de mayo de 2014, de http://www.comie.org.mx/v1/revista/portal.php?idm=es&sec=SC03&&sub=SBB&criterio=ART59005

López, J. F. (2012). Propuesta didáctica para la enseñanza del concepto de fracción en el grado séptimo considerando la relación parte-todo (Tesis inédita de maestría). Universidad Nacional de Colombia. Recuperado el 27 de abril de 2013, de http*://www.bdigital.unal.edu.co/ 5922/1/8410009.2012.pdf*

Losada, R. (2007). GeoGebra: la eficiencia de la intuición. *La Gaceta de la RSME*. Vol. 10, No. 1, 223-239. Recuperado el 5 de abril de 2013, de http://gaceta.rsme.es/abrir.php?id=619&zw=090333

Martínez, P. (s. f.). Secuencia didáctica. Recuperado el 17 de Junio de 2013, de https://docs.google.com/viewer?a=v&pid=sites&srcid=ZGdlbnAudW5hbS5teHxmaWxvc29maWF8Z3g6Mjk2Mjg3NDBiNDA0MGI3Zg

Obaya, A. y Ponce R. (2007). La Secuencia didáctica como herramienta del proceso enseñanza aprendizaje en el área de Químico Biológicas. *ContactoS* [en línea]. Vol. 63-19-25. Recuperado el 17 de Junio de 2013, de http://www.izt.uam.mx/newpage/contactos/anterior/n63ne/secuencia_v2.pdf

Olguín, E y Álvarez, M. (2012). El reparto con fracciones mediante "escenarios didácticos". *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa* [en línea], 25. Recuperado el 24 de enero de 2013, de http://www.clame.org.mx/acta.htm

Pantoja, J., Lozano, A. y Portillo, M. (2013). Automatización del control de asistencia del personal docente del departamento de computación de la facultad experimental de ciencias de la universidad de Zulia. *Telematique* [en línea],12(2). Recuperado el 17 de Junio de 2013, de: http://www.redalyc.org/pdf/784/78428243001.pdf

Peña, P. (2011). Resignificación del algoritmo para operar aditivamente con fracciones en un contexto escolar (Tesis inédita de maestría), Instituto Politécnico Nacional. Recuperado el 24 de enero de 2013, de http://www.matedu.cicata.ipn.mx/tesis/maestria/ pena_2011.pdf

Pruzzo, V. (2012). Las fracciones: ¿Problema de aprendizaje o problema de enseñanza? *Revista Pilquen* [en línea]. Sección pedagógica, 16(8). Recuperado el 12 de junio de 2013, de http://www.revistapilquen.com.ar/Psicopedagogia/Psico8/8_Pruzzo_Fracciones.pdf

Qualding, D. (1982). La importancia de las matemáticas. *Perspectivas* [en línea], 12(4). Recuperado el 24 de enero de 2013, de http://unesdoc.unesco.org/images/0005/000524/052474so.pdf

Secretaría de Educación Pública. (2011). Matemáticas. Tercer grado. D. F., México: Editorial SEP.

Tello, E. (2007). Las tecnologías de Información y comunicaciones (TIC) y la brecha digital: su impacto en la sociedad de México. *Revista de Universidad y Sociedad del Conocimiento* [en línea], 4(2). Recuperado el 10 de marzo de 2014, de http://www.uoc.edu/rusc/4/2/dt/esp/ tello.pdf

Autores:

Cuevas Salazar Omar (ocuevas@itson.edu.mx)
Antonio Caso S/N, Col. Villa ITSON
Ciudad Obregón, Sonora, México
Instituto Tecnológico de Sonora
(644) 4109000 Ext. 1730

Doctor en Educación por la NOVA Southestearn University. Actualmente es responsable de la Maestría en Matemática Educativa del Departamento de Matemáticas del Instituto Tecnológico de Sonora. Ha publicado en revistas indizadas de carácter nacional e internacional, como la Revista Mexicana de Investigación Educativa, Revista Iberoamericana de Educación, Revista Electrónica de Investigación Educativa.

Valenzuela Lagarda Edna Myriam (ednamvalezu@hotmail.com)
Nápoles 2236 Col. Bellavista
Ciudad Obregón, Sonora, México
Instituto Tecnológico de Sonora
(644)4137991

Licenciada en Administración de Empresas por el Instituto Tecnológico y de Estudios Superiores de Monterrey, Maestra en Matemática Educativa por el Instituto Tecnológico de Sonora. Actualmente imparte clases a nivel licenciatura y maestría en el Departamento de Matemáticas del Instituto Tecnológico de Sonora.

Osorio Sánchez Mucio (mosorio@itson.edu.mx)
Antonio Caso S/N, Col. Villa ITSON
Ciudad Obregón, Sonora, México
Instituto Tecnológico de Sonora
(644) 4109000 Ext. 1722

Ingeniero Agroindustrial por la Universidad Autónoma Chapingo, Maestro en Enseñanza de las Ciencias por el Centro Interdisciplinario de Investigación y Docencia en Educación Técnica y en Estadística Aplicada por el Colegio de Posgraduados. Actualmente es Jefe del Departamento de Matemáticas del Instituto Tecnológico de Sonora. Ha sido ponente en congresos relacionados con Metodología de la Investigación y Enseñanza de las Matemáticas.

Trujillo Luque Evaristo (evaristo.trujillo@itson.edu.mx)
Antonio Caso S/N, Col. Villa ITSON
Ciudad Obregón, Sonora, México
Instituto Tecnológico de Sonora
(644) 4109000 Ext. 1856

Licenciado en Matemáticas y Maestro en Ciencias especialidad Matemática Educativa por la Universidad de Sonora. Actualmente es profesor interino adscrito al Departamento de Matemáticas del Instituto Tecnológico de Sonora. Ha participado como ponente en diversos congresos de carácter nacional relacionados con Matemática Educativa

UNIÓN
REVISTA IBEROAMERICANA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA
www.fisem.org/web/union
http://asenmacformacion.com/ojs/index.php/union/index

ISSN: 1815-0640
Número 45. Marzo 2016
Página 184-204

Elementos da prática de uma Comunidade de Prática de professores de Matemática na utilização do Software GeoGebra

Loreni Aparecida Ferreira Baldini
Márcia Cristina de Costa Trindade Cyrino

Fecha de recepción: 18/06/2015
Fecha de aceptación: 03/03/2016

Resumen	En este artículo se presentan los elementos de la práctica de una Comunidad de Práctica de Docentes de Matemáticas en la utilización del software GeoGebra que promueve el desarrollo profesional de sus miembros. Los resultados muestran que sus miembros tuvieron la oportunidad de desempeñar un papel activo en su formación; de sentirse desafiado; de compartir experiencias; de exponer errores sin restricciones; de presentar, explicar, explorar y comparar las estrategias; de utilizar las tecnologías digitales y el "lápiz y papel"; y confiar en un experto en el grupo. Estos elementos han permitido que sus miembros establezcan relaciones de respeto, de confianza, de solidaridad y de creatividad. **Palabras clave**: Desarrollo Profesional; Comunidades de Práctica; Software GeoGebra.
Abstract	In this article are presented elements of the practice of a Community of Practice of Mathematics Teachers in the use of GeoGebra that promoted professional development of its members. The results show that its members had the opportunity to play an active role in their formation process; to feel challenged; to share experiences; to expose mistakes without constraints; to present, justify, explore and compare strategies; to use digital technologies and the "pencil and paper"; and to count on the on the presence of the expert group. These elements have allowed its members to establish relationships of respect, trust, solidarity and creativity. **Keywords**: Professional Development; Community of Practice; Software GeoGebra.
Resumo	Nesse artigo são apresentados elementos da prática de uma Comunidade de Prática de Professores de Matemática na utilização do *software* GeoGebra que promoveram o desenvolvimento profissional de seus membros. Os resultados revelam que seus membros tiveram a oportunidade de desempenhar um papel ativo em sua formação; de sentir-se desafiado; de partilhar experiências; de expor erros sem constrangimentos; de apresentar, justificar, explorar e comparar estratégias; de utilizar as tecnologias digitais e o “lápis e papel”; e de contar com um *expert* no grupo. Estes elementos permitiram que seus membros estabelecessem relações de respeito, confiança, solidariedade e criatividade. **Palavras-chave:** Desenvolvimento Profissional; Comunidades de Prática; *Software* GeoGebra.

1. Introdução

Formar o professor para integração das Tecnologias Digitais da Informação e Comunicação – TDIC nas práticas pedagógicas é um dos atuais desafios impostos aos processos de formação de professores que ensinam matemática perspectivando o seu desenvolvimento profissional (Mishra; Kohler, 2006; Cyrino; Baldini, 2012).

Na busca de possibilidades alternativas aos cursos de treinamento, que possam colaborar com uma formação de professores na perspectiva do desenvolvimento profissional, o Grupo de Ensino e Pesquisa sobre a Formação de Professores que Ensinam Matemática - Gepefopem tem desenvolvido estudos e pesquisas acerca de espaços que sejam profícuos para explorar processos de aprendizagem e a mobilização/constituição de conhecimentos de professores (Cyrino, 2009; Cyrino; Caldeira, 2011; Baldini, 2014; Garcia, 2014; Nagy; Cyrino, 2014).

Um desses trabalhos, analisou as aprendizagens e os conhecimentos mobilizados/constituídos do *TPACK* – Conhecimentos Tecnológicos e Pedagógicos do Conteúdo nos empreendimentos da prática de uma Comunidade de Prática de Formação de Professores de Matemática na utilização do *software* GeoGebra - CoP-FoPMat (Baldini, 2014).

No presente artigo, são apresentados os elementos da prática dessa CoP que promoveram o desenvolvimento profissional de professores e de futuros professores de Matemática. Inicialmente são descritas as perspectivas de desenvolvimento profissional de professores, de aprendizagem em Comunidades de Prática - CoP (Wenger, 1998) e do *TPACK* (Mishra; Kohler, 2006) assumidas nessa investigação, bem como os encaminhamentos metodológicos e a análise dos empreendimentos: resolução e discussão de uma tarefa utilizando o *software* GeoGebra e investigação de questões e construções desencadeadas por essa tarefa. Para finalizar, são caracterizados os elementos da prática da CoP-FoPMat que promoveram o desenvolvimento profissional de seus membros.

2. Desenvolvimento Profissional – algumas perspectivas

Para romper com a concepção tradicional de formação que advém de cursos de treinamento no qual o formador é o centro do processo, vários autores têm optado pelo termo desenvolvimento profissional, em detrimento da utilização de termos como “formação” ou “instrução” (Day, 2001; Ponte, 1998; Inbernón, 2010; Ferreira, 2003 e 2006; Cyrino, 2013). No quadro a seguir apresentamos aspectos do desenvolvimento profissional de professores assumidos por alguns desses autores.

Autores	Desenvolvimento Profissional
Day (2001)	Inclui a aprendizagem eminentemente pessoal a partir da experiência pessoal. “Inclui todas as experiências de aprendizagens naturais e aquelas planejadas. [...] É o processo através do qual os professores, enquanto agentes de mudança, reveem, renovam e ampliam individual ou coletivamente o seu compromisso com os propósitos do ensino” (p.21).
Ponte (1998)	Traz a ideia de uma formação com múltiplas etapas em um processo de incompletude na formação docente, é exigido ao longo de toda a carreira; tem a formação ‘formal’ - inicial, contínua, especializada e avançada, como um suporte fundamental; é favorecido por contextos colaborativos - institucionais, associativos, formais ou informais; é de cada professor no essencial da sua responsabilidade; é a chave da competência profissional, a capacidade de equacionar e resolver problemas da prática profissional; e, requer um

	trabalho investigativo em questões relativas à própria prática profissional.
Imbernón (2010)	"[...] pode ser concebido como qualquer intenção sistemática de melhorar a prática profissional, crenças e conhecimentos profissionais, com o objetivo de aumentar a qualidade docente, de pesquisa e de gestão" (p.47).
Ferreira (2003)	"[...] é aprender e caminhar para a mudança, ou seja, ampliar, aprofundar e/ou reconstruir os próprios saberes e prática e desenvolver formas de pensar e agir coerentes" (p.36).
Ferreira (2006)	[...] "um processo que se dá ao longo de toda experiência profissional [...]. Envolve a formação inicial e continuada, bem como a história pessoal como aluno e professor. [...] os estímulos ou pressões que sofre socialmente e sua própria cognição e afeto – crenças, valores, meta" (pp. 149 - 150).
Cyrino (2013)	"uma experiência (LARROSA, 2009) que promove no professor mudanças quanto às suas crenças, conhecimentos e práticas relativas à sua profissão" (p.5189).

Quadro 1 – Aspectos do Desenvolvimento Profissional

De modo geral, esses autores consideram a aprendizagem dos professores em formação como elemento chave para o seu desenvolvimento profissional. Nesse sentido, o desenvolvimento profissional é visto como um processo - individual e/ou coletivo - influenciado por experiências de diferentes naturezas, formais ou informais, que provocam mudanças em suas crenças, conhecimentos e práticas. Evidenciam que para que essas aprendizagens e mudanças ocorram, não basta oferecer aos professores cursos, seminários, oficinas, é preciso incentivá-los a investigar a própria prática, a equacionar os problemas dessa prática, a desenvolver um trabalho colaborativo a fim de que possam gerir e assumir um compromisso com a sua formação. Para tanto, as CoPs podem se constituir como um espaço privilegiado para ouvi-los, entender suas necessidades e tomar como ponto de partida para sua formação suas experiências pessoais e profissionais.

3. Aprendizagem em Comunidades de Prática

Wenger (1998) defende que a aprendizagem é fundamentalmente social e ocorre em contextos de experiência de participação no mundo, com a participação em CoPs. Considera uma CoP como um grupo de pessoas que compartilham uma preocupação ou uma paixão por algo que fazem (domínio), e aprendem como fazê-lo interagindo uns com os outros, "é um espaço de engajamento na ação, de relações interpessoais, de conhecimento compartilhado, e de negociação dos empreendimentos" (Wenger, 1998, p. 85).

A comunidade, de acordo com Wenger, McDermott e Snyder (2002), cria o tecido social da aprendizagem, encoraja interações e relacionamentos por meio de sua prática. A prática é o conhecimento específico desenvolvido, compartilhado e mantido pela CoP, envolve um conjunto de estruturas, ideias, ferramentas, informações, estilos, linguagens, estórias e documentos que os membros compartilham. Para associar prática e comunidade, Wenger (1998) apresenta três dimensões da relação pela qual a prática é fonte de coerência de uma comunidade: engajamento/compromisso mútuo, empreendimento articulado/conjunto e repertório compartilhado.

O engajamento/compromisso mútuo requer, além de fazer coisas juntos, o compromisso com a aprendizagem do outro e o desenvolvimento de relacionamentos que nem sempre implicam em homogeneidade. Envolve competências própria e dos outros e se baseia no que as pessoas fazem e no que conhecem, ou seja, na capacidade de colaborar com conhecimentos dos outros (Wenger, 1998).

O empreendimento articulado de uma CoP é definido em conjunto pelos seus membros a partir do que as pessoas fazem juntas. No entanto, não se trata de um objetivo fixo ou definido inicialmente para ser perseguido sem que possa ser alterado. A negociação de um empreendimento dá origem a relações de responsabilidade mútua entre os envolvidos que incluem o que importa e o que não importa, o que fazer e o que não fazer, o que prestar atenção e o que ignorar, o que falar e o que deixar subentendido, o que justificar e o que não dar valor, o que mostrar e o que ocultar, quando ações e artefatos são bons o suficiente e quando eles precisam de melhoria ou refinamento (Wenger, 1998).

O repertório compartilhado é o conjunto de recursos partilhados por uma comunidade para engajamentos na prática e para a negociação de significados. O repertório de uma CoP "inclui rotinas, palavras, ferramentas, formas de fazer as coisas, histórias, gestos, símbolos, gêneros, ações, ou concepções que a comunidade tem produzido ou adotado no curso de sua existência, e que se tornaram parte de sua prática" (Wenger, 1998, p.83).

De acordo com Cyrino (2009) a negociação de significados, no contexto de uma CoP, é um mecanismo para a aprendizagem. A aprendizagem muda quem somos, modifica nossa habilidade de participar, de pertencer, de negociar significados (Wenger, 1998). A negociação expressa uma interação contínua de conquista, de dar e receber, de influenciar e ser influenciado e o significado é o produto de sua negociação, fonte de energia necessária para a aprendizagem. Nesse sentido, o significado negociado é ao mesmo tempo histórico e dinâmico, contextual e único.

O conceito de negociação de significado é caracterizado por Wenger (1998), como o processo pelo qual se experimenta o mundo e se engaja nele como algo significativo. O processo de negociação de significados é contínuo, envolve interpretar e agir, fazer e pensar, entender e responder, e, assim, produz constantemente novas relações com e no mundo. Aquilo que é feito ou falado pode referir-se ao que foi feito ou falado no passado e, mesmo assim, volta a produzir uma nova situação, uma nova interpretação, uma nova experiência que produz significados que ampliam, redirecionam, ignoram, reinterpretam, modificam ou confirmam a história de significados da qual o sujeito faz parte. Viver é um constante processo de negociação de significados (Wenger, 1998).

O processo de negociação de significados ocorre na interação entre dois outros processos, o de participação e o de reificação (Wenger, 1998). A participação é um processo abrangente que envolve as relações com os outros, é uma forma de ação que significa ser parte de algo. Ela dá forma ao que fazemos, a quem somos e como interpretamos o que fazemos, e ainda descreve uma experiência social de viver em um mundo enquanto membros de comunidades sociais. Esse processo combina fazer, conversar, pensar, sentir e pertencer. Assim sendo, a participação leva a renegociar significados em novos contextos.

O processo de reificação é parte intrínseca das práticas, indispensável para o processo de negociação e para as experiências de significados. Esse termo é usado por Wenger (1998) para referir-se ao processo de dar forma à experiência, para cristalizar tal experiência em uma "coisa". Além de dar forma à experiência a reificação muda a nossa experiência com o mundo. O processo de reificar não envolve somente expressar uma ideia, uma emoção ou construir uma ferramenta, é criar condições para novos significados, uma vez que "inclui fazer, projetar, representar, nomear, codificar, e descrever, assim como perceber, interpretar, usar, reutilizar, decodificar e reformular" continuamente (Wenger, 1998, p.59).

A relação fundamental existente entre os processos de participação e de reificação é de complementariedade e de dualidade, formando uma unidade de maneira dinâmica. Um processo não substitui o outro, não se transforma no outro, embora um transforme o outro. Por meio das várias combinações possíveis entre eles surgem possibilidades de uma variedade de experiências de negociação de significados úteis para descrever o nosso engajamento com o mundo. Enquanto na participação os sujeitos reconhecem-se uns nos outros, na reificação eles se projetam para o mundo atribuindo significados (Wenger, 1998).

A aprendizagem ocorre nessa dualidade entre os processos de participação e de reificação, e é a partir desse cenário que a CoP se constitui como um espaço fecundo para formação de professores e de futuros professores.

4 . TPACK – um quadro para orientar a integração de tecnologias de ensino

Em busca de discutir elementos relacionados aos conhecimentos necessários ao professor para a integração de tecnologias no ensino, Mishra e Koehler (2006), argumentam que o conhecimento tecnológico não pode ser tratado separadamente dos conhecimentos pedagógicos e dos conhecimentos do conteúdo. Esses autores estendem as ideias de Shulman (1986, 1987), e propõem uma integração do conhecimento do conteúdo e do conhecimento pedagógico com o conhecimento tecnológico, por meio de uma estrutura teórica para a utilização da tecnologia educacional no desenvolvimento profissional dos professores, o *TPACK* - Conhecimento Tecnológico Pedagógico de Conteúdo (*Technological Pedagogical Content Knowledge – TPACK* – Figura 1*)*.

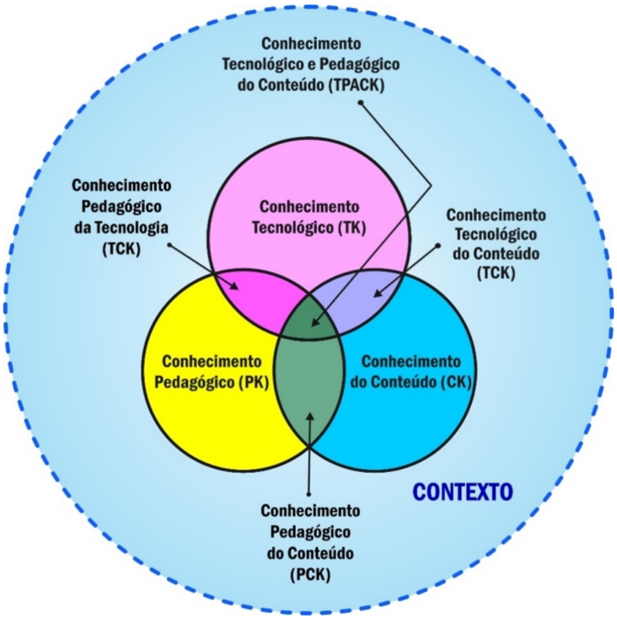


Figura 1 - O quadro *TPACK*
Fonte: Adaptado de Koehler e Mishra (2006).

Nesse quadro conceitual (Quadro 2), os conhecimentos sobre o conteúdo, a pedagogia e a tecnologia são considerados essenciais para o desenvolvimento de um "bom ensino". No entanto, em vez de tratar esses conhecimentos separadamente, a proposta dos autores insere três pares de interseção e uma tríade, nas quais são consideradas conexões e interações, duas a duas, entre conteúdo, tecnologia e pedagogia, e, a interação entre esses três conhecimentos. Isso não significa que não se possa olhar para cada um deles isoladamente, mas que é indicado, também, olhar para suas relações.

Conhecimento do Conteúdo (*CK*) - É o conhecimento que os professores precisam ter sobre o assunto, objeto de ensino e aprendizagem. Inclui conhecimento de fatos centrais como conceitos, teorias e procedimentos (SHULMAN, 1986).
Conhecimento Pedagógico (*PK*) - É o conhecimento sobre os processos de aprendizagem e de práticas de ensino, ou seja, dos métodos e teorias de ensino e de aprendizagem (SHULMAN, 1986).
Conhecimento Pedagógico do Conteúdo (*PCK*) - É o conhecimento do conteúdo incorporando os aspectos mais apropriados para seu ensino. Inclui saber como um conteúdo pode ser organizado para o ensino, as formas de representação de ideias, analogias, ilustrações, exemplos e demonstrações (SHULMAN, 1986).
Conhecimento Tecnológico (*TK*) - Refere-se ao conhecimento de tecnologias que são ou podem ser utilizadas em ambientes de aprendizagem. Inclui as habilidades necessárias para operar tecnologias específicas (MISHRA e KOEHLER, 2006).
Conhecimento Tecnológico do Conteúdo (*TCK*) - Refere-se à forma como tecnologia e o conteúdo se influenciam mutuamente, como uma tecnologia pode ser usada para fornecer novas maneiras de ensinar um conteúdo (MISHRA e KOEHLER, 2006).
Conhecimento Pedagógico da Tecnologia (*TPK*) - É o conhecimento das possibilidades e limitações da tecnologia para diferentes abordagens de ensino, e, ainda, saber como o ensino e a aprendizagem podem mudar a partir do uso de tecnologias específicas e com o uso de uma determinada estratégia pedagógica (MISHRA e KOEHLER, 2006).
Conhecimento Tecnológico e Pedagógico do Conteúdo (*TPACK*) - Refere-se a um conhecimento que vai além de todos os três componentes (tecnologia, pedagogia e conteúdo). O *TPACK* oferece uma maneira de conceituar o conhecimento que professores precisam, a fim de integrar a tecnologia em práticas de ensino. Implica em usar a tecnologia para explorar relações matemáticas e não para repetir práticas tradicionais por meio de outra tecnologia (MISHRA e KOEHLER, 2006).

Quadro 2 – Conhecimentos necessários ao professor de Matemática

Desse modo, o *TPACK* pode colaborar para o desenvolvimento profissional dos professores, de modo que eles possam se apropriar de "hábitos tecnológicos" a fim de compreender e descrever a matemática e as relações existentes "por trás" dos resultados mostrados em uma tela de computador. Esse conceito deve ser valorizado nos processos de formação, porque o domínio do *TPACK* propicia compreensão de questões pedagógicas que possibilitam que as tecnologias sejam usadas para a constituição de conhecimentos em sala de aula.

5. Encaminhamento da pesquisa

Com o objetivo de identificar elementos da prática de uma CoP que promoveram o desenvolvimento profissional de seus membros, foi feita a analise das aprendizagens e dos conhecimentos mobilizados/constituídos na prática dessa CoP por meio de uma pesquisa qualitativa, na perspectiva da pesquisa intervenção (Krainer, 2003).

A pesquisa foi desenvolvida no contexto da CoP–FoPMat constituída por doze professores, nove futuros professores e pela formadora (primeira autora deste artigo). Os encontros da CoP ocorreram em um Colégio Estadual da cidade de Arapongas – PR, que atende o Ensino Fundamental II e o Ensino Médio. Foram realizados 25 encontros, no período de 05/2012 a 06/2013, com duração média de 1h e 40 min.

Nesse artigo são apresentados os processos de negociação de significados que foram desencadeados pela proposição de uma tarefa que envolve o Teorema de Pitágoras (Quadro 3).

"Os babilônios dos tempos de Hamurabi (c. 1700 a.C.) provavelmente já sabiam que o quadrado sobre a hipotenusa de um triângulo retângulo é igual à soma dos quadrados sobre os catetos. Entretanto, acredita-se que a primeira demonstração geral desse fato foi dada por Pitágoras de Samos (c. 585 – c. 500 a.C.) ou um de seus discípulos. Por essa razão, o teorema ficou universalmente conhecido como Teorema de Pitágoras." (SILVA, C.M.S. e LORENZONI, C.A.C.A. O velho conhecido Teorema de Pitágoras e suas demonstrações. *História & Educação Matemática.* São Paulo, v. 2, n. 2, p. 112, 2002.)
A história da matemática, assim como o estudo de diferentes demonstrações, são recursos importantes para o trabalho com o Teorema de Pitágoras em sala de aula. Esses recursos permitem evidenciar a matemática como uma construção humana, bem como articular diferentes conteúdos que compõem o currículo de Matemática. Com base nos conhecimentos sobre o Teorema de Pitágoras e nas propostas pedagógicas atuais para o Ensino Fundamental e Ensino Médio, considere as afirmativas a seguir.

I. As palavras sublinhadas no enunciado: "o **quadrado** sobre a hipotenusa de um triângulo retângulo é igual à soma dos quadrados sobre os catetos" justificam o fato de podermos construir somente **quadrados** sobre os lados de um triângulo retângulo para demonstração do teorema.
II. O Teorema de Pitágoras deve ser trabalhado em sala de aula, necessariamente, após a compreensão, pelos alunos, do conceito de semelhança de triângulos.
III. É possível constatar o Teorema de Pitágoras comparando as áreas de semicírculos construídos sobre os lados de um triângulo retângulo, ou seja, em um triângulo retângulo, a área do semicírculo construído sobre a hipotenusa é igual à soma das áreas dos semicírculos construídos sobre os catetos.
IV. O Teorema de Pitágoras pode ser verificado comparando-se as áreas de quaisquer polígonos regulares construídos sobre os lados de um triângulo retângulo.

Estão corretas apenas as afirmativas:
a) I e II. b) II e III. c) III e IV. d) I, II e IV. e) I, III e IV.

Quadro 3 – Tarefa
Fonte: Prova do PDE/2006 - Secretaria de Estado da Educação.

Os membros da CoP resolveram a tarefa em pequenos grupos (3 ou 4 pessoas) e depois apresentaram/discutiram suas resoluções no grande grupo (todos os membros da CoP). Em um primeiro momento utilizaram lápis e papel para resolução da tarefa e em seguida o GeoGebra para construir figuras perspectivando a constatação do Teorema de Pitágoras. Durante a resolução e as discussões da tarefa, a CoP se engajou nos empreendimentos e compartilhou seus repertórios.

Os encontros foram audiogravados, cujas transcrições foram complementadas com: registros escritos dos membros da CoP em um diário digital disponibilizado na plataforma Moodle, no qual eles registravam suas reflexões sobre os encontros; notas de campo produzidas pela formadora; discussões ou comentários registrados nos fóruns de socialização (Plataforma Moodle); figuras construídas no *software* GeoGebra, enviadas para a formadora por e-mail. Com o intuito de manter o sigilo dos nomes dos membros da CoP, utilizamos P para indicar os professores e a coordenadora, e FP para indicar futuros professores, seguidos de nomes fictícios[1].

A seguir são apresentadas análises de alguns episódios que revelam processos de negociação de significados dos membros da CoP nos empreendimentos: resolução e discussão de uma tarefa utilizando o *software* GeoGebra e investigação de questões e construções desencadeadas por essa tarefa. Nessa análise explicita-se as aprendizagens e os conhecimentos do *TPACK* mobilizados/constituídos pelos professores e futuros professores na prática dessa CoP.

6. Aprendizagens e Conhecimentos do TPACK mobilizados na resolução e discussão da tarefa utilizando o *software* GeoGebra

Após a leitura da tarefa, os pequenos grupos se envolveram em investigar as afirmativas, desencadeando negociações de significados relativas ao Teorema de Pitágoras, como mostra o episódio a seguir.

1.	*P-Alice:*	*A quatro é verdadeira.*
2.	*FP-Carol:*	*A primeira é verdade. Não é verdade?*
3.	*P-Aline:*	*Somente quadrados!? Não, então não.*
4.	*P-Maura:*	*Por quê?*
5.	*P-Aline:*	*Se a quatro for verdadeira a primeira não pode ser. Porque é* (está escrito) *somente quadrados.*
6.	*P-Alice:*	*Semicírculo* (referindo-se a afirmativa III)*? Por que semicírculo?* (Pausa). *Vamos construir o semicírculo no rascunho sobre os lados do triângulo. Se são semicírculos, isso* (lado do triângulo) *vai ser o diâmetro?*
7.	*P-Maura:*	*É.*
8.	*P-Alice:*	*A área* (do semicírculo) *vai ser πr^2 dividido ao meio. Se aqui é 3* (medida do lado)*, vai ser 2,25π. No lado 4 vai ser 4π. Agora esse aqui, 2,5 ao quadrado é igual a 6,25π. Após calcular a medida das áreas dos círculos, dividiram por dois para obter as medidas das áreas dos semicírculos.*
9.	*P-Aline:*	*Agora soma esse com esse* (somam a medida das áreas dos semicírculos referente aos catetos).
10.	*P-Alice:*	*É. Vai dar sim. Deu* (risos)*. Que legal*. (Comparam a soma obtida com a medida da área do semicírculo referente à hipotenusa).
11.	*FP-Carol:*	*E essa quatro* (afirmativa IV)*? Como que você já viu? Comparando a área de quaisquer polígonos regulares?*
12.	*P-Alice:*	*Foi no PDE. Pode ser qualquer figura. Desde que seja regular. Não precisa ser só quadrado.*
13.	*FP-Carol:*	*Desde que seja regular?*
14.	*P-Alice:*	*Sim. Dá certinho.*
15.	*FP-Carol:*	*Então quer dizer não precisa ser só quadrado, pode ser qualquer polígono regular!? Então por isso que a número 1* (afirmativa I) *não vai ser verdade, porque diz somente quadrado.*
16.	*P-Alice:*	*É isso mesmo, porque usou somente quadrado.*
17.	*FP-Carol:*	*E esse dois* (afirmativa II)*, também não?*

[1] Todos os membros da CoP assinaram um Termo de Consentimento Livre e Esclarecido, e projeto foi aprovado pelo Comitê de Ética em Pesquisa (UEL).

18. P-Alice: Não, não tem necessidade. Só a 3 e 4.

A interação entre P-Alice, P-Aline, P-Maura e FP-Carol na busca pela alternativa correta da tarefa revela que mobilizaram conhecimentos do conteúdo a respeito da identificação do raio a partir do diâmetro, do cálculo da área do círculo e da área do semicírculo. Revela também que constituíram o conhecimento de que o Teorema de Pitágoras pode ser constatado comparando as áreas de semicírculos construídos sobre os lados de um triângulo retângulo. Esses conhecimentos são evidenciados, por exemplo, quando P-Alice (6, 8, 10) demonstra não conhecer essa forma de verificar esse teorema e busca, junto com as demais, a verificação a partir de suas experiências, surpreendendo-se com a relação encontrada.

No decorrer da interação, a FP-Carol (2 e 15), a P-Aline (3 e 5) e a P-Alice (16) também manifestaram conhecimento de que é possível constatar o Teorema de Pitágoras comparando áreas de quadrados construídos sobre os lados do triângulo retângulo. A projeção de P-Alice (1 e 12), bem como, os questionamentos da FP- Carol (11, 13 e 15), revelam a constituição do conhecimento de que é possível constatar o teorema comparando área de polígonos regulares (Conhecimento do Conteúdo).

FP-Carol evidenciou confiança ao expor suas dúvidas, fazendo questionamentos e aceitando as respostas de P-Alice e P-Aline. Ela demonstrou menos experiência com relação ao Teorema de Pitágoras, porém, sua atitude de ouvir e questionar as professoras experientes, sobre a resolução e conceitos envolvidos na tarefa, sinaliza um processo de participação que combina fazer, conversar, pensar (WENGER, 1998).

As reificações referentes ao Teorema de Pitágoras foram evidenciadas nos registros realizados nos diários, na folha de tarefa e nas figuras construídas no software GeoGebra (Quadro 4), uma vez que, após a resolução da tarefa na folha e a discussão coletiva, os grupos iniciaram o trabalho com o GeoGebra construindo figuras, inspirados nas afirmativas da tarefa.

As figuras do Quadro 4 ilustram que o trabalho com a tarefa possibilitou a mobilização/constituição de conhecimentos relacionados ao modo de construir triângulo retângulo, polígonos regulares, setor circular no GeoGebra, tais figuras são resultado de escolhas adequadas de suas ferramentas (Conhecimento Tecnológico). Além disso, o fragmento de diário exposto pela P-Alice (Quadro 4) sinaliza que utilizaram o GeoGebra pautados em propriedades matemáticas (Conhecimento Tecnológico do Conteúdo), nomeadamente: construção do triângulo retângulo – uso da ferramentas “Reta Perpendicular” que garante o ângulo reto; construção do pentágono regular sobre o lado do triângulo retângulo – uso da ferramenta “Polígono Regular” que mantém a propriedade com o “Mover” dos vértices; construção do semicírculo – uso da ferramenta “Setor Circular” que permite obter a área do semicírculo.

As ferramentas utilizadas permitiram que o grupo construísse figuras dinâmicas, de modo que, com o “Mover”, é possível transformá-las mantendo suas propriedades e, com isso, testar hipóteses, perceber regularidades e viabilizar aprendizagens (Conhecimento Pedagógico da Tecnologia).

Observamos que P-Aline, que havia se envolvido em uma generalização numérica para o cálculo da área do semicírculo, durante as apresentações e discussões da resolução da Tarefa no grande grupo, apresenta uma generalização algébrica (Quadro 4) envolvendo a comparação de áreas de semicírculos e de triângulos equiláteros. Ao explicar ao grande grupo, relatou que usaria a mesma ideia para outros polígonos regulares, deixando rastros de mobilização/constituição de conhecimento concernente a generalizar algebricamente esse teorema, por meio de comparação de áreas e a passagem do particular para o geral no processo de sistematização (Conhecimento do Conteúdo).

*O grupo discutiu e concluiu que podemos construir sobre os lados de um triângulo retângulo quaisquer polígonos regulares, esta definição foi confirmada no GeoGebra, comparando a soma das áreas dos polígonos dos catetos com a área do polígono sobre a hipotenusa (*P-Maura, diário do 13º encontro, 30/08/12)
No 3º item fizemos os cálculos utilizando as medidas 3, 4 e 5 (lado 3 = 2,25pi/2, lado 4 = 4pi/2 e lado 5 = 6,25pi/2). Depois fizemos no GeoGebra utilizando o semicírculo, (descobrimos que, para encontrarmos a área do semicírculo, temos que fazer o setor circular). Utilizamos o pentágono regular, fizemos um triângulo retângulo fixo com retas e retas perpendiculares e depois utilizamos a ferramenta polígono regular para fazermos os pentágonos, e no teste ele permaneceu fixo (P-Alice, diário do 13º encontro, 30/08/12).

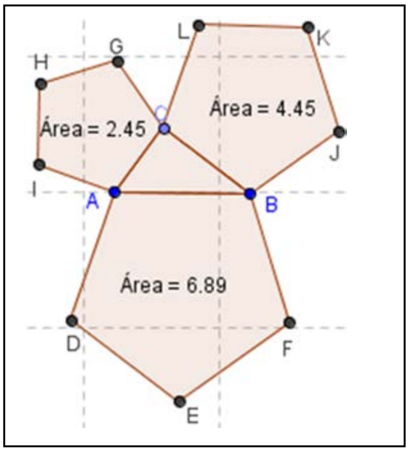


Figura (1) realizada pelo grupo e enviada pela P-Alice

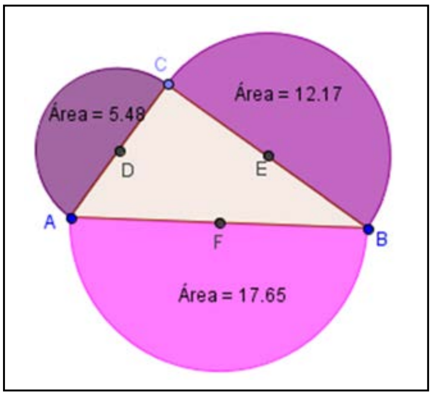
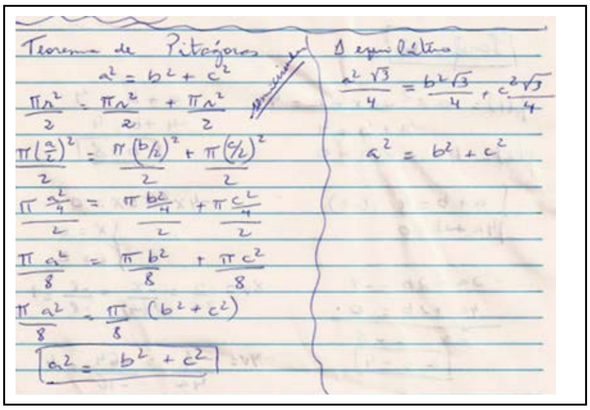


Figura (2) enviada pela P-Aline



Folha de tarefa da P-Aline

Quadro 4 – Reificações referentes ao Teorema de Pitágoras

Diante das informações do Quadro 4 e do episódio, infere-se que as participantes do grupo reificaram que é possível constatar o Teorema de Pitágoras geometricamente comparando áreas de semicírculos e de polígonos regulares.

À medida que os grupos descobriam novos encaminhamentos para construir figuras relativas às afirmativas da tarefa, esses foram expostos ao grande grupo, desencadeando negociações de significados em torno dos procedimentos.

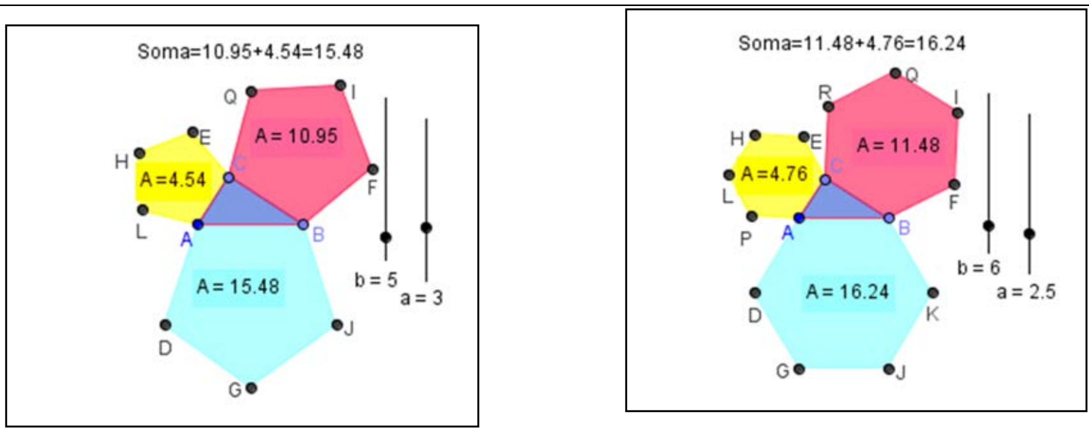
1.	*P-Rosa:*	*<u>Nós fizemos variar o lado do triângulo retângulo</u>* (suas medidas) *<u>e dos polígonos</u>* (número de lados)*. <u>Tudo de uma vez</u>.*
2.	*FP-Jorge:*	*O que você fez com o seletor?*
3.	*P-Rosa:*	*<u>Nós construímos um seletor para o triângulo</u>* (retângulo) *<u>e outro para os polígonos</u>.*
4.	*FP-Jonas:*	*Mexe para a gente ver.*
5.	*P-Rosa:*	*Vamos por animação* (usa o recurso do GeoGebra que proporciona o mover

automático).

6. FP-Jorge: *O que muda com o seletor?*
7. P-Clara: *Muda o número de lados do polígono e a medida dos catetos e da hipotenusa.*
8. FP-Jorge: *Como faz isso? Eu não sei fazer...*
9. FP-Jonas: *Espera...*
10. FP-Jorge: *Você fez um polígono regular de **a** lados, usando o seletor **a**?*
11. P-Rosa: *Isso mesmo. Oh,* (move o seletor) *está diminuindo os lados* (número de vértices) *até chegar num triângulo.*
12. FP-Jorge: *Ah, entendi! Você fez um polígono regular de **a** lados e **a** é o seletor.*
13. P-Rosa: *O lado do triângulo também muda, pois está em função do seletor **b**.*
14. FP-Jorge: *Ah... você fez um seletor para o triângulo também! Muito louco!*
15. P-Rosa: *E a soma das áreas fica sempre igual.*

Essa negociação em relação ao uso do “Seletor” deixa indícios de que P-Rosa e os outros integrantes de seu grupo mobilizaram/constituíram conhecimentos na escolha assertiva das ferramentas do *software*, uma vez que optaram por aquelas (“Seletor”) que têm potencial para representar o objeto matemático (triângulo retângulo e polígonos regulares sobre seus lados) de modo dinâmico (Conhecimento Tecnológico do Conteúdo).

Na socialização do modo como construiu a figura (Quadro 5), a P-Rosa (1, 3, 11, e 15) evidencia a interação entre seus processos de participação e de reificação. Demonstra que compreende aspectos da tecnologia que podem mudar o modo de ensinar o Teorema de Pitágoras e a existência de diversas ferramentas para a realização da tarefa aliada à estratégia pedagógica. Compreende que, a partir de um tipo de construção, obtêm-se várias figuras e que isso permite investigar regularidades e a realização de generalização, evidenciando, assim, sua aprendizagem do modo de construir figuras dinâmicas que validam esse teorema (Conhecimento Pedagógico da Tecnologia).



Figuras obtidas com a variação dos seletores ($a = 3$ e $b = 5$; $a = 2,5$ e $b = 6$), realizadas pelo grupo e enviadas pela P-Rosa.

> *“A construção do triângulo (retângulo) e dos polígonos com dois seletores foi fascinante. Ficou show, fácil para os alunos construírem e compreenderem os conceitos”.*

P-Rosa, diário do 13º encontro, 20/09/12

Quadro 5 – Indicativos de mobilização/constituição do TPACK

P-Rosa, neste episódio, assume a posição do *expert.* Em uma CoP o *expert* varia conforme a necessidade de partilhar e negociar conhecimentos mais aprofundados de uma ideia, situação, ou conceito. A comunidade, ao legitimar esses conhecimentos, elege, formalmente ou não, um membro como *expert*, que nem sempre foi a formadora. Assim, não se trata de um membro ter um papel fixo, visto que ele pode ser *expert* em um determinado tema e em outro não.

No fragmento de diário (Quadro 5), P-Rosa reconhece que os alunos podem facilmente realizar a construção de figuras como esta, porque envolve poucas ferramentas do *software*. Reconhece também que a figura dinâmica, usando dois seletores, pode viabilizar a compreensão dos conceitos, uma vez que, ao mover o seletor *a,* alteram-se as dimensões do triângulo retângulo e, por conseguinte, as dos polígonos e respectivas áreas. Ao mover o seletor *b,* altera-se o número de vértices do polígono e suas áreas, no entanto, nos dois casos, mantém-se a regularidade sobre as áreas.

Os procedimentos utilizados na construção da figura, sua sofisticação e a declaração da P-Rosa de que, desse modo, a figura se torna "fácil" de ser construída e proporciona a compreensão dos conceitos envolvidos permitem inferir que a figura foi pensada de modo que os estudantes pudessem sondar relações matemáticas a partir do movimento dos seletores. Infere-se, também, que P-Rosa e os membros de seu grupo encontraram um modo mais eficiente para construir a figura, ou seja, que aprenderam a utilizar a tecnologia (GeoGebra) imersos no conteúdo e na pedagogia - *TPACK* (Mishra; Koehler, 2006).

A socialização da P-Rosa (episódio anterior) propiciou aos participantes (re) significar o modo de construir triângulo retângulo e polígonos regulares sobre seus lados. Os conhecimentos tecnológicos socializados pela P-Rosa foram legitimados pelos participantes e incentivaram os pequenos grupos a construírem novas figuras associadas à afirmativa IV da tarefa.

7. Aprendizagens e Conhecimentos do TPACK mobilizados a partir de questões e construções desencadeadas pela tarefa

O uso do GeoGebra permitiu que novas questões e construções desencadeadas pela tarefa fossem investigadas. Os processos de negociação de significados focalizaram a construção de polígonos/figuras irregulares sobre os lados do triângulo retângulo com o objetivo de investigar a possibilidade de generalizar o Teorema de Pitágoras a partir de figuras irregulares/semelhantes. As investigações tiveram início com uma provocação da formadora, após a discussão da resolução da tarefa, na busca de outras reflexões a respeito do Teorema de Pitágoras.

P-Loreni: *Quais outras figuras podem ser construídas sobre os lados do triângulo retângulo que permitem constatar o teorema?*
FP-Jorge: *Retângulos...*

O FP-Jorge surpreendeu os membros da comunidade ao construir uma figura no GeoGebra para mostrar tal possibilidade. Os procedimentos utilizados pelo FP-Jorge desencadearam uma negociação de significados acerca da construção de retângulos sobre os lados de um triângulo retângulo.

1. *FP-Jorge:* *Vou pôr a malha* (insere a malha quadriculada na tela de visualização do GeoGebra).

2. *P-Loreni:* *Por quê?*
3. *FP-Jorge:* *Vou usar a malha para fazer o 3, 4, 5* (triângulo retângulo)*. Vamos medir.*
4. *P-Rosa:* *Deu certinho.*
5. *FP-Jorge:* *Agora faz um retângulo aqui e aqui* (sobre os catetos) *e outro aqui* (sobre a hipotenusa)*. Aqui complicou* (sobre a hipotenusa)*. Tem que usar alguma propriedade* (matemática).
6. *P-Loreni:* *A construção do triângulo retângulo é eficiente?*
7. *P-Rosa:* *Não.*
8. *P-Loreni:* *Por que não?*
9. *FP-Jorge:* *Porque não é fixa.*
10. *P-Rosa:* *Ele fez um desenho, é um esboço.*
11. *P-Loreni:* *Em uma investigação com aluno, ao movimentar* (o vértice) *o que vai acontecer?*
12. *P-Isabela:* *Vai deixar de ser um triângulo retângulo. O ângulo deixa de ser reto.*
13. *P-Loreni:* *Então, para fazer uma figura temos que garantir que com o movimento a figura não perderá as propriedades, neste caso, o ângulo de 90º.*
14. *P-Rosa:* *Ele está tentando fazer um retângulo com o dobro do lado do triângulo?*
15. *FP-Jorge:* *É, só que aqui na hipotenusa não certo.*
16. *P-Rosa:* *Ficou um paralelogramo, um trapézio... Sei lá. Você tem que fazer retas perpendiculares pelos vértices e usar o círculo [...]*
17. *FP-Jorge:* *Agora deu certo* (Usa a sugestão de P-Rosa*).*
18. *P-Loreni:* *Compare as áreas. Deu?*

O procedimento utilizado pelo FP-Jorge na construção da figura levou a P-Rosa (10) a distinguir uma figura de um desenho/esboço quando se usa um *software* de geometria dinâmica. Considera-se uma figura como um objeto teórico que representa relações geométricas, portanto, mantêm suas propriedades ao mover seus vértices e, no caso do triângulo retângulo feito pelo FP-Jorge, deixaria de ser retângulo, como afirma P-Isabela (12), por isso foi considerado um esboço da figura, por não respeitar rigorosamente as relações geométricas. A interferência da formadora (6, 8, 11 e 13) confirmou e evidenciou os significados produzidos para esse procedimento, que uma figura dinâmica carrega suas propriedades (Conhecimento Tecnológico do Conteúdo).

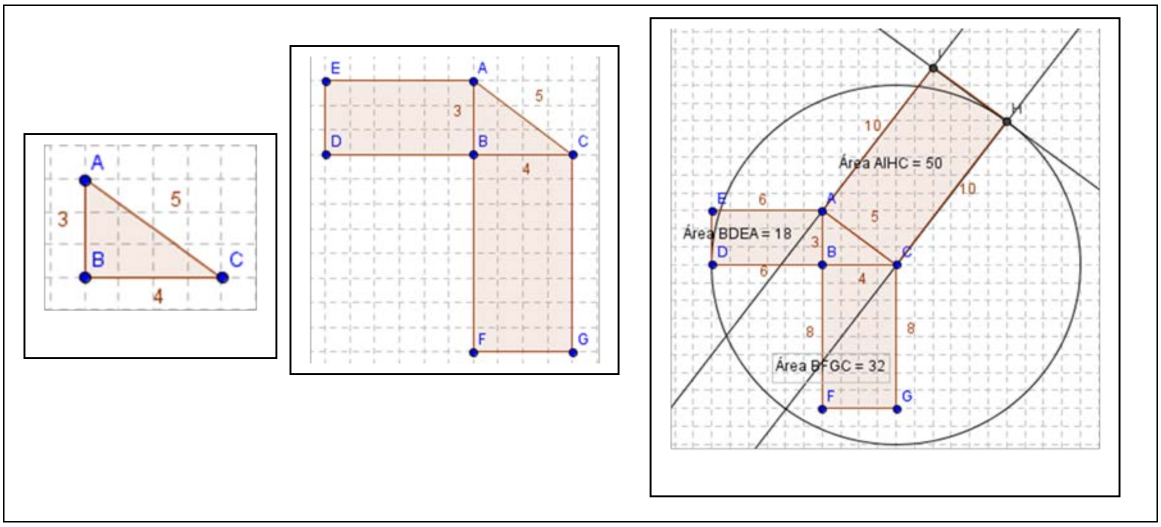
A P-Rosa (14 e 16), ao compreender a relação de proporcionalidade entre os lados dos retângulos e do triângulo retângulo, sugerindo o uso das ferramentas “Retas Perpendiculares” e “Círculo dados Centro e Raio”, revela que mobilizou conhecimentos a respeito do retângulo associados à tecnologia, uso das retas perpendiculares para obter o ângulo reto e a escolha da ferramenta adequada para transportar a medida do comprimento (Conhecimento Tecnológico do Conteúdo).

O engajamento mútuo dos membros da CoP-FoPMat com relação ao empreendimento de resolver tarefas utilizando o *software* GeoGebra, possibilitou observar a prática de um grupo livre de pressões institucionais que busca aprendizagens de um domínio, aspecto peculiar de uma CoP. Como pontuam Wenger e Snyder (2001), em uma CoP seus membros compartilham conhecimentos com liberdade e criatividade, incentivando novas abordagens para os problemas enfrentados.

Os professores e os futuros professores buscaram a própria aprendizagem, que é considerada como chave para o desenvolvimento profissional. De acordo com o episódio anterior, inferimos que os membros aprenderam que:

- o teorema pode ser constatado geometricamente comparando as áreas de retângulos de lados proporcionais aos lados do triângulo retângulo;
- uma figura dinâmica carrega suas propriedades quando movimentada;

- há modos adequados para construir uma figura para que mantenha invariantes suas propriedades;
- algumas ferramentas são adequadas para a construção de retângulos por garantir suas propriedades, como “Retas”, “Retas Perpendiculares”, “Círculo dados Centro e um dos seus Pontos”.



Quadro 6 – Sequência de figuras construídas pelo FP-Jorge

Nos diários, os membros relataram que desconheciam a possibilidade de constatar o Teorema de Pitágoras comparando área de retângulos.

> *A questão da proporcionalidade ficou muito clara depois que o FP-Jorge usou o GeoGebra para mostrar que funcionava para um polígono não regular* (FP-Andrea, diário do 13º encontro, 30/08/12).
>
> *Quando o vi fazendo com retângulos, tinha certeza de que não daria certo.* (P-Aline, diário do 13º encontro, 30/08/12).
>
> *Neste dia [...] deu para entender perfeitamente que podemos usar qualquer polígono para constatar o Teorema de Pitágoras. Lembrando que ele deverá ser proporcional* (P-Maura, diário do 13º encontro, 30/08/12).

A FP-Andrea e a FP-Karen reconheceram a importância do GeoGebra para que o grupo confirmasse que é possível constatar o teorema com polígonos irregulares. Elas e a P-Maura também demonstraram, em seus diários, compreensão de que os lados do retângulo possuem uma relação de proporcionalidade com o triângulo retângulo. P-Aline, por sua vez, deixou indícios de seus conhecimentos matemáticos quando afirmou que não acreditava ser possível constatar desse modo o Teorema de Pitágoras.

Atitudes como a do FP-Jorge, de socializar ao grande grupo “novas descobertas”, foram comuns na prática da CoP-FoPMat. Pensar na possibilidade de constatar o teorema usando figuras que não fossem regulares energizou a comunidade para a aprendizagem da utilização do GeoGebra e de outras possibilidades de verificar geometricamente o teorema.

Diferentes polígonos irregulares foram investigados e possibilitaram a exploração das potencialidades do *software* GeoGebra, à generalização do Teorema de Pitágoras comparando áreas de figuras irregulares e discussões de cunho pedagógico. Enquanto os grupos trabalhavam, a formadora passava pelos grupos e interagia com os membros, questionando ou orientando, cuidando para não validar respostas de modo que o grupo continuasse a investigação. O episódio a seguir retrata um desses momentos.

1.	*P-Loreni:*	*O que vocês estão fazendo?*
2.	*P-Elisa:*	*Eu pensei no isósceles, fiz aqui, qual é a relação* (de proporcionalidade) *desses lados* (do triângulo isósceles construídos sobre os lados do triângulo retângulo) *com a base* (lados do triângulo retângulo), *mas não deu.*
3.	*P-Loreni:*	*Essa relação não poderia ser com outro elemento do triângulo* (do triângulo *isósceles)? A altura com os lados* (do triângulo retângulo)*? [...]*
4.	*P-Elisa:*	*Em relação à altura?*
6.	*P-Elisa:*	*Vou tentar* (construir no GeoGebra) *no isósceles.*
7.	*P-Loreni:*	*E se a gente tivesse uma altura que variasse em função do lado* (do triângulo retângulo), *por exemplo: ora a altura fosse* $^1/_3$ *ora ¼?.*
8.	*P-Elisa:*	*Não precisaria trabalhar exatamente com isósceles* (triângulo)*. Porque estaria preocupado com a altura, aí poderia ser qualquer* (polígono).

P-Elisa (2) declarou que testou a relação de proporcionalidade entre os lados do triângulo isósceles e os lados (base) do triângulo retângulo usando o GeoGebra, mas que o modo utilizado não mostrou a relação entre as áreas. Por meio de questionamentos, a formadora (3, 5 e 7) provocou o grupo a investigar a relação entre a altura do triângulo isósceles e os lados do triângulo retângulo, fator que auxilia P-Elisa (8) a verbalizar sua compreensão de que, a partir da altura, pode-se verificar a relação de proporcionalidade para qualquer polígono.

Eu falei aqui na sala que eu estava com dúvidas porque eu não estava usando embasamento matemático, estava apenas desenhando por desenhar e aí começa a não dar certo. [...] Aí a P-Rosa ainda falou "é pelos ângulos". Eu cheguei em casa e fiz. Fiz dois ângulos de 45°, achei o ponto médio, lá no encontro é o vértice do triângulo... aí deu certo. Então tem que usar as propriedades matemáticas sempre. Senão não vai dar certo... (P-Clara, 16º encontro, 04/10/12).

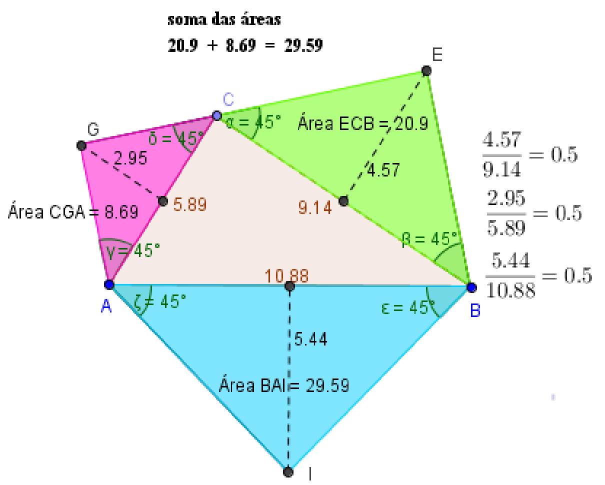


Figura enviada pela P-Clara

Quadro 7 – Reificação do Teorema de Pitágoras por meio do triângulo isósceles

A formadora sempre usou a ferramenta "Mover" para transformar as figuras e procurou questioná-los para observar suas compreensões. Essa atitude propiciou que eles reificassem o Teorema de Pitágoras comparando áreas de polígonos irregulares que possuem uma relação de proporcionalidade com os lados do triângulo retângulo, como no caso dos trapézios.

1.	*FP-Jorge:*	*Eu estou pensando neste trapézio aqui, para construir outro aqui e outro aqui* (nos catetos do triângulo retângulo), *proporcional. Só que aqui deu um quadrado e na verdade tem que ser uma secção do quadrado [...].*
2.	*FP-Jonas:*	*Como assim, vai ser proporcional?*
3.	*FP-Jorge:*	*AE vai ser proporcional ao AD* (AE metade de AD). *[...] E é o ponto médio, vou passar uma perpendicular aqui. Se aqui vai ser igual, eu duplico isso aqui.*

		Não sei se vai chegar a algum lugar...
4.	*P-Marilene:*	*Esse aqui vai ser semelhante* (trapézio sobre o cateto)*?*
5.	*FP-Jorge:*	*Essa é minha ideia. Agora eu sei que isso aqui é metade de um lado do quadrado e eu só tenho que ter certeza que isso aqui é o dobro disso aqui.*

[...] Testam modos de construir os trapézios sobre os catetos.

6.	*P-Marilene:*	*Então você pega essa medida e faz uma paralela aqui.*
7.	*FP-Jorge:*	*É uma perpendicular em cada vértice.*
8.	*P-Marilene:*	*É a paralela que dá certo.*
9.	*FP-Jorge:*	*É verdade. Agora vou passar no ponto A. Agora tenho que esticar esse e passar aqui.*
10.	*FP-Jonas:*	*Fazendo uma perpendicular.*

[...] seguem testando modos de obter o trapézio e negociando as ferramentas.

11.	*FP-Jorge:*	*Aí no final a gente vai ver se a área bate.*

[...] terminam a construção e obtêm as áreas dos trapézios.

12.	*P-Marilene:*	*Isso, 41,8 mais quanto aí? Mais 167,2.*
13.	*FP-Jorge:*	*Vê se dá 209?*
14.	*P-Marilene:*	*Pimba!!* (risos).
15.	*FP-Jorge:*	*Massa, né?*

O episódio explicita que o grupo iniciou o trabalho com trapézios utilizando a “tentativa e erro”. A partir da observação do FP-Jorge (1) de que o trapézio era uma secção do quadrado o grupo se engajou na busca por procedimentos para construir trapézios sobre os lados do triângulo retângulo que permitissem constatar o Teorema de Pitágoras.

No episódio há rastros de que o FP-Jorge (1, 2 e 5) mobilizou conhecimentos de proporcionalidade quando explicou que os segmentos $\overline{AE}$ e $\overline{AD}$ têm uma relação de proporcionalidade, uma vez que estão divididos pelo ponto *E* - ponto médio (Conhecimento do Conteúdo). P-Marilene (6 e 8), FP-Jorge (7 e 9) e FP-Jonas (10) negociaram o uso de ferramentas do GeoGebra associadas aos procedimentos para construção da figura, como o uso de retas perpendiculares e paralelas (Conhecimento Tecnológico).

Para confirmar a relação entre as áreas e validar o teorema, o grupo, como indicam FP-Jorge (11 e 13) e P-Marlene (14), utilizou as medidas propiciadas pelo GeoGebra e as comparou com os cálculos na folha de papel, evidenciando que utilizar a tecnologia digital não dispensa as convencionais como lápis e papel. A interação revela também que, ao utilizar o GeoGebra, o grupo construiu conhecimentos de que o Teorema de Pitágoras pode ser confirmado geometricamente por meio de trapézios semelhantes (Conhecimento Tecnológico do Conteúdo).

De modo geral, na negociação de significados evidenciada nesse episódio também há indícios de mobilização/constituição de Conhecimentos Tecnológico do Conteúdo, entre eles:

- a busca por um modo adequado para construir, utilizando o GeoGebra, os trapézios sobre os catetos utilizando uma relação de proporcionalidade;
- o fato de não seguirem instruções para a construção das figuras e se sentirem desafiados, o que pode levar às aprendizagens.

Wenger (1998) salienta que a negociação de significados ocorre em várias situações, sobretudo, quando há uma desafiadora. O episódio retrata um grupo desafiado pela situação em que se envolveram, ou seja, em descobrir outras possibilidades para verificar o teorema. Para esse autor, a negociação de significados não se limita à linguagem, inclui relações sociais e esse grupo desenvolveu um relacionamento de confiança, no qual o FP-Jorge, que teve a ideia inicial de construir trapézios, conduziu a construção da figura e a discussão se posicionando no grupo como *expert*. P-Marilene e FP-Jonas ao questionar e sugerir possibilidades, demonstram um papel ativo na aprendizagem sua e de seus colegas, visto que a P-Marta e a P-Rose acompanharam o que eles disseram e tentaram reproduzir no computador o que viram e, assim, manifestaram suas participações nesse desafio.

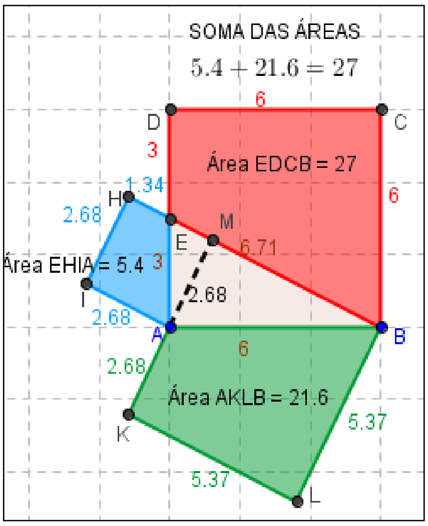


Figura enviada pelo FP-Jorge.

Razões observadas no grande grupo com relação as bases dos trapézios:

$$\frac{DE}{BC} = \frac{AK}{BL} = \frac{HE}{AI} = \frac{1}{2}$$

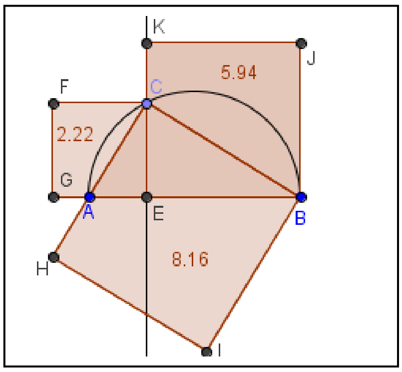


Figura enviada pela P-Maura. Ela construiu o triângulo retângulo, traçou a altura relativa à hipotenusa e inseriu quadrados que determinaram os trapézios.

Quadro 8 – Reificações referentes ao Teorema de Pitágoras e de proporcionalidade.

Os registros realizados nos diários também evidenciaram que a atitude da formadora, após a apresentação desse grupo, em (re)construir passo-a-passo a figura do trapézio e discutir os aspectos matemáticos associado às ferramentas do *software,* proporcionou diferentes reflexões, tais como:

> *O que você fez no início do encontro de hoje, foi muito bom. <u>É importante entender matematicamente o que estamos fazendo</u>.* (P-Aline, diário do 15º encontro, 27/09/12).
>
> *Achei muito válida a discussão que tivemos no início do encontro, <u>porque me fez refletir o quanto eu estava querendo que o GeoGebra me desse solução que só o embasamento matemático pode dar</u>* (P-Clara, diário do 15º encontro, 27/09/12).
>
> *Loreni, sempre eu acho que entendi, mas vem você que, além de mostrar uma maneira mais fácil de construir, ainda <u>fala de conteúdos novos que eu não tinha pensado,</u> por exemplo: usar as alturas do triângulo para construir os trapézios* (P-Maura, diário do 15º encontro, 27/09/12).
>
> *Achei interessante a construção [...]. Conforme comentamos, a maioria dos cursistas <u>prefere fazer primeiro as construções no papel, parece que pensamos melhor fazendo os cálculos e as construções na "unha"</u>* (P-Alice, diário do 15º encontro, 27/09/12).

As professoras destacadas nos fragmentos de diários supracitados reconheceram a necessidade de refletir as relações matemáticas envolvidas na construção de uma figura e nos conteúdos que podem ser discutidos/explorados a partir da figura. Indicaram, também, que o *software* colaborou para a compreensão da proporcionalidade e que ele requer reflexões do conhecimento matemático para a construção de uma figura. Ainda, P-Alice reconhece a necessidade de o grupo utilizar primeiro "o lápis e papel" para depois o *software*, o que evidencia a dificuldade de o grupo transpor a “matemática do lápis e papel” para a tecnologia digital.

Os membros da CoP-FoPMat construíram diferentes figuras (Quadro 9) sobre os lados do triângulo retângulo, e com isso, reificaram que é possível generalizar geometricamente o Teorema de Pitágoras a partir de figuras semelhantes.

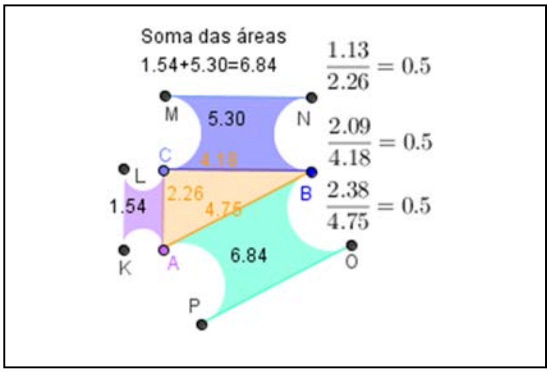


Figura enviada pela P-Maura inspirada no texto da Kaleff, Rei, Garcia (1999).

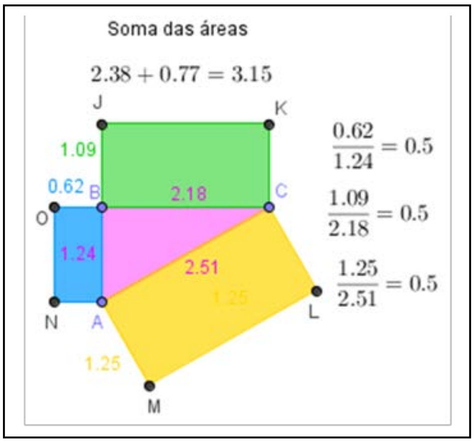


Figura enviada pela P-Aline.

Quadro 9 - Reificações do Teorema de Pitágoras usando figuras semelhantes

As discussões no grande grupo, foram essencias para mobilizar os membros da CoP a investigar, testar hipóteses, experimentar possibilidades utilizando o *software* GeoGebra. Além das figuras do Quadro 9, outras foram construídas para verificação das razões que possibilitaram a retificação de que o teorema pode ser constatado por meio de figuras semelhantes construídas sobre os lados de um triângulo retângulo.

8. Algumas considerações

Esta comunidade firmou sua prática nos empreendimentos negociados e articulados (Wenger, 2002) que possibilitaram abordar diversas questões acerca das TDIC, mais especificamente, explorar o potencial do *software* GeoGebra para a aprendizagem, enfatizando a resolução da tarefa e a discussão de relações matemáticas subjacentes às suas resoluções.

A partir da resolução e da discussão da tarefa e das questões e construções desencadeadas por ela, os membros da CoP-FoPMat puderam negociar suas reificações relacionadas aos significados produzidos concernentes ao Teorema de Pitágoras e, outros conteúdos envolvidos e também, a respeito do uso das TDIC. As reificações não se limitaram aos conhecimentos do conteúdo, da tecnologia e do pedagógico, mas envolveram aspectos do ensino e da aprendizagem matemática na utilização das tecnologias digitais, portanto, das conexões (interações) entre estes três conhecimentos. Dessa forma, os membros da comunidade mobilizaram/constituíram conhecimentos constituintes do *TPACK*, perspectiva assumida nesse estudo como uma possibilidade para orientar a formação do professor para o uso das TDIC.

O estudo das aprendizagens e conhecimentos do *TPACK* mobilizados/constituídos na prática da CoP-FoPMat, na utilização do *software* GeoGebra, nos permitiu identificar (Quadro 10) elementos desta prática que promoveram o desenvolvimento profissional de seus membros.

Os membros da da CoP-FoPMat tiveram oportunidade de:

Desempenhar um papel ativo no seu processo de formação - As ações do formador não foram impostas verticalmente, ou seja, não foram direcionadas apenas pelo formador. Os professores e futuros professores influenciaram, diretamente, na configuração dos empreendimentos negociados. Tiveram liberdade para opinar, discutir, concordar, discordar, expor suas ideias, negociar significados em um processo dinâmico que favoreceu que os participantes se tornassem agentes de sua aprendizagem, proporcionando a constituição de conhecimentos profissionais relativos ao conteúdo, à organização e à condução de uma aula usando a tecnologia digital. Desse modo, desempenharam um papel ativo em seus processos de formação.

Sentir-se desafiado a partir da resolução da tarefa - A partir das dinâmicas de resolução e discussão de tarefas, os membros da CoP foram desafiados com relação aos seus conhecimentos matemáticos e aos conhecimentos profissionais relacionados à tecnologia, ensino e aprendizagem. Outros fatores também colaboraram para que se sentissem e se mantivessem desafiados: a dinâmica do grupo, as atitudes da formadora que procurou questioná-los, o uso da tecnologia digital que propiciou experimentar e confirmar conjecturas, o engajamento mútuo do grupo, a prática da comunidade que manteve o desafio e possibilitou autonomia para que investigassem e atribuíssem novos significados aos conhecimentos mobilizados.

Compartilhar experiência - A resolução de tarefas nessa comunidade ocorria em pequenos grupos, formados por professores experientes e futuros professores. A pluralidade de pessoas, com diferentes histórias de vida, permitiu o compartilhamento de diferentes experiências, com isso, puderam negociar e produzir significados que podem possibilitar mudanças em sua prática pedagógica. Os futuros professores deixaram evidente a importância do conhecimento constituído na prática, partilhado pelos professores. Os professores também reconheceram que as diferentes formas dos futuros professores abordarem uma ideia matemática, o uso que fazem da tecnologia digital, enriquecem as discussões do grande grupo.

Expor erros sem constrangimentos - As dificuldades em construir figuras utilizando o software GeoGebra, em relacionar as figuras com as ideias matemáticas associadas a tarefa, colaborou para que os membros desta comunidade pudessem expor seus erros sem constragimento. Os erros mobilizados eram discutidos, por vezes nos pequenos grupos e em outros momentos nas plenárias. As discussões relacionadas aos erros suscitaram reflexões sobre a importância de analisar erros nos processos de ensino e de aprendizagem, que se explorados adequadamente podem ser fontes de aprendizagens.

Apresentar, justificar, explorar e comparar estratégias - Após o trabalho nos pequenos grupos, os membros apresentavam, ao grande grupo, suas resoluções feitas na folha de tarefa ou figuras construídas no GeoGebra, assim como, justificações de suas estratégias, comparando diferentes modos de explorar ideias matemáticas subjacentes à figura.

Utilizar de tecnologias digitais e o "lápis e papel", integrados ou não - A utilização de tecnologias digitais integradas ou não ao lápis e papel, possibilitaram reflexões por parte dos membros sobre conceitos matemáticos. Ao resolver ou esboçar figuras na folha, os participantes tiveram a possibilidade de refletir acerca da ideia matemática presente no processo de construir uma figura no GeoGebra, de verificar quais relações matemáticas podem ser exploradas e quais conhecimentos matemáticos podem ser generalizados, além de outras questões relacionadas ao conhecimento pedagógico.

Valorizar a presença do *expert* no grupo - A presença de um *expert* no grupo, que por vezes não era o formador/investigador, possibilitou a discussão de novas abordagens para os problemas enfrentados e promoveu a negociação de significados entre os membros. O *expert*, tinha o papel, dentre outros, de legitimar os conhecimentos que eram mobilizados/constituidos no decorrer dos encontros da comunidade, assumindo com suas ações uma participação central no grupo.

Quadro 10 - Elementos da prática da CoP-FoPMat que permitiram o desenvolvimento profissional.

A análise do repertório partilhado na CoP-FoPMat ao longo dos encontros nos permite inferir que o desenvolvimento profissional para a integração das tecnologias digitais envolve a constituição de diferentes conhecimentos consoantes ao *TPACK* e que estes não são integrados rapidamente à prática; são complexos e constituídos por meio de interações que demandam negociações e tempo. Contudo, os membros dessa comunidade sinalizaram que ampliaram os significados que foram atribuídos às questões relacionadas aos seus conhecimentos profissionais e ao uso de tecnologias digitais.

A prática da CoP-FoPMat revelou que a formação de professores para a integração das TDIC no ensino de Matemática requer um espaço que incentive a promoção de interações sociais regulares que privilegie compartilhar ideias, práticas e principalmente a liberdade de seus membros para (re)negociar os empreendimentos e significados, expor seus problemas, suas crenças e suas expectativas.

Os elementos identificados na prática da CoP-FoPMat, além de promoverem o desenvolvimento profissional de seus membros, a partir das aprendizagens e conhecimento mobilizados, permitiram o estabelecimento de relações de respeito, confiança, solidariedade e criatividade, que são profícuas para o desenvolvimento da identidade profissional de professores, na medida em que incentivaram os seus membros a refletir sobre suas crenças/concepções interconectadas com os conhecimentos a respeito do seu ofício na busca de desenvolver sua autonomia e seu compromisso político (Cyrino, 2013), para o uso adequado das TDIC no ensino de Matemática.

Espera-se que os elementos da prática da CoP-FoPMat apresentados neste trabalho colaborem para desencadear reflexões que indiquem outras formas de pensar, compreender e promover ambientes de formação na perspectiva do desenvolvimento profissional, em particular no que tange à integração das TDIC nas práticas pedagógicas.

Agradecimentos

As autoras agradecem ao CNPq e à Fundação Araucária pelo apoio financeiro.

Bibliografía

Baldini, L. A. F. (2014). *Elementos de uma Comunidade de Prática que permitem o desenvolvimento profissional de professores e futuros professores de Matemática na utilização do Software GeoGebra*. Tese (Doutorado) – Universidade Estadual de Londrina, Londrina.

Cyrino, M. C. C. T.; Baldini, L. A. F. (2012). *Software GeoGebra na Formação de Professores de Matemática – uma visão a partir de dissertações e teses. Revista Paranaense de Educação Matemática,* 1, 42-61.

Coutinho, C. P. (2011). TPACK: Em Busca de um Referencial Teórico para a Formação de Professores em Tecnologia Educativa. *Revista Paidéi@. UNIMES VIRTUAL*. Recuperado em 05 de dezembro de 2012 de http://revistapaideia.unimesvirtual.com.br.

Cyrino, M. C. C. T. (2009). Comunidades de prática de professores como espaço de investigação sobre a formação de professores de matemática. In: BATISTA, I. L.; SALVI, R. F. *Pós-graduação em ensino de ciências e educação matemática:* perfil de pesquisas. Londrina: EDUEL, 95-110.

Cyrino, M. C. C. T. (2013). Formação de Professores que Ensinam Matemática em Comunidades de Prática. In: Congresso Iberoamericano de Educación Matemática. Montevideo, Uruguay: *Actas*... del VII CIBEM. 5195-5188.

Day, C. (2001). *Desenvolvimento profissional de professores. Os desafios da aprendizagem permanente*. Porto Editora, Porto.

Ferreira, A. C. (2003). *Metacognicão e Desenvolvimento Profissional de Professores de Matemática:* uma experiência de trabalho colaborativo*.* Tese (Doutorado) - Universidade Estadual de Campinas. Campinas.

Ferreira, A. C. (2006) O trabalho colaborativo como ferramenta e contexto para desenvolvimento profissional: compartilhando experiências. In: Nacarato, A. M.; Paiva, M. A. V. (Org.). *A formação do professor que ensina Matemática:* perspectivas e pesquisas. Belo Horizonte: Autêntica, 149-166.

Imbernón, F. (2010). *Formação docente e profissional: formar-se para a mudança e a incerteza.* Trad. Leite, S. C. Cortez. São Paulo.

Kaleff, A. M.; Rei, D. M.; Garcia, S. dos S. (1999). *Quebra-cabeças Geométricos e Formas Planas*. EdUFF, Niterói. Rio de Janeiro.

Krainer, K. (2003). *Teams, communities & networks. Journal of Mathematics Teacher Education, Netherlands*, 2, 93-105.

Mishra, P.; Koelhler, M. J. (2006). *Technological pedagogical content knowledge: a framework for teacher knowledge. Teachers College Record*, 6, 1017– 1054.

Ponte, J. P. (1998). *Da formação ao desenvolvimento profissional*. In *Actas do ProfMat***,** Lisboa: APM. 27-44.

Shulman, L. (1986). *Those Who Understand: knowledge growth in teaching. Educational Research.* Washington, 2, 4–14.

Shulman, L. (1987). *Knowledge an Teaching: foundations of the new reform. Harvard Educational Review,* 1, 1- 22.

Wenger, E. (1998). *Communities of practice:* learning, meaning and identity*.* Cambridge University Press. New York.

Wenger, E. C.; Snyder, W. M. (2001). *Comunidades de prática: a fronteira organizacional*. In: *Aprendizagem organizacional.* Tradução de: Cássia Maria Nasser. *Harvard Business Review*. Rio de Janeiro: Campus, 9-26.

Wenger, E.; Mcdermott, R.; Snyder, W. M. (2002*). Cultivating communities of practice*. Harvard Business School Press. Boston.

Autores:

Loreni Aparecida Ferreira Baldini. Licenciada em Matemática, mestre e doutora pela Universidade Estadual de Londrina – PR (Programa de Ensino de Ciências e Educação Matemática). Professora da SEED Secretaria de Educação do Estado do Paraná, Brasil. Apucarana. loreni@ibest.com.br.

Márcia Cristina de Costa Trindade Cyrino. Doutora em Educação USP/SP. Professora do Departamento de Matemática e do Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Educação Matemática da Universidade Estadual de Londrina (UEL). Londrina, Paraná, Brasil. marciacyrino@uel.br

UNIÓN
REVISTA IBEROAMERICANA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA
www.fisem.org/web/union
http://asenmacformacion.com/ojs/index.php/union/index

ISSN: 1815-0640
Número 45. Marzo 2016
Página 205-224

As Tecnologias Digitais e o Processo de Visualização e Representação Geométrica na Resolução de Fotoproblemas

Rosimeire Aparecida Soares Borges, Sandra Maria da Silva Sales de Oliveira

Fecha de recepción: 23/06/2015
Fecha de aceptación: 03/02/2016

Resumen	Este estudio investigó el uso das tecnologías digitales en el proceso de visualización y representación geométrica para la comprensión y la resolución de fotoproblemas, con alumnos de Educación Primaria. Fue realizada una sesión de fotos de objetos en la escuela con cámara digital; elaboración, digitación y resolución de fotoproblemas geométricos, con institucionalización de los conceptos y exposición de los trabajos producidos por los alumnos. Este estudio sugiere que la innovación de metodologías de enseñanza de Geometría con uso de herramientas tecnológicas auxilia los alumnos en la comprensión de los conceptos geométricos. **Palabras clave**: Tecnologías digitales. Resolución de fotoproblemas. Geometría.
Abstract	This study investigated the use of digital technologies in the process of geometric visualization and representation in order promote the understanding and resolution of photoproblems, with elementary school students. There was a session of photo shooting of objects at the school with a digital camera, and elaboration, typing and resolution of geometric photoproblems, with the institutionalization of the concepts and exhibition of the works produced by the students. This study suggests that the innovation of methodologies for Geometry teaching with the use of technological tools assists students in understanding of geometric concepts. **Keywords**: Digital Technologies. Photo-problem solutions. Geometry.
Resumo	Este estudo investigou o uso das tecnologias digitais no processo de visualização e representação geométrica para a compreensão e a resolução de fotoproblemas, com alunos do Ensino Fundamental. Foi realizada uma sessão de fotos de objetos na escola com máquina digital; elaboração, digitação e resolução de fotoproblemas geométricos, com institucionalização dos conceitos e exposição dos trabalhos produzidos pelos alunos. Este estudo sugere que a inovação de metodologias de ensino da Geometria com uso de ferramentas tecnológicas auxilia os alunos na compreensão dos conceitos geométricos. **Palavras-chave:** Tecnologias digitais. Resolução de fotoproblemas. Geometria.

1. Introdução

No mundo moderno, a rápida evolução tecnológica consiste em um dos desafios da Educação, que necessita auxiliar o aluno na construção dos conhecimentos, para que possa solucionar problemas e argumentar, desenvolvendo sua autonomia. Para Gadotti (2010, p.13), "educar significa, então, capacitar, potencializar, para que o educando seja capaz de buscar a resposta do que pergunta, significa formar para a autonomia". Nesse contexto, o uso das Tecnologias Digitais de Comunicação e Informação-TDIC como recurso em sala de aula tem-se revelado de fundamental importância, como facilitador e motivador para o ensino dos conceitos e suas aplicações.

Presencia-se a necessidade da utilização de diferentes metodologias que não distem do uso dessas tecnologias e que subsidiem o processo de ensino e de aprendizagem nas escolas. Nóvoa (1999, p.12) evidenciou a relação da complexidade da ação educativa com as tecnologias de informação e comunicação:

> A acção educativa sempre se revestiu de uma grande complexidade e de margens significativas de imprevisibilidade. Estas características são ainda mais marcadas [...] devido à presença na escola de crianças de todas as origens sociais e culturais, bem como à democratização do acesso às mais variadas tecnologias de informação e comunicação [...] O reforço de práticas pedagógicas inovadoras, construídas pelos professores a partir de uma reflexão sobre a experiência, parece ser a única saída possível.

Nessa direção, para um redimensionar das práticas educativas, ao educador cabe desenvolver sua consciência crítica e a apropriação dos benefícios que podem ser obtidos pelas TDIC para o ensino dos conceitos em sala de aula, que, em suas múltiplas formas de utilização e manifestação, assumem um importante papel na área educacional (Guimarães, 2007). Assim sendo, a escola deve propiciar ao aluno novas formas de aprendizagem que incluam essas tecnologias em prol da agilidade e versatilidade do processo de ensino e de aprendizagem dos conceitos.

No ambiente escolar, o computador tem auxiliado os educadores em suas aulas e atividades com seus alunos. Nesse contexto, de acordo com Valente (1999, p.6), o professor deixa de repassar conhecimento, e seu papel é o de criar ambientes de aprendizagem e facilitar o "processo de desenvolvimento intelectual do aluno". Assim, é urgente superar as barreiras criadas, ligadas a dois movimentos: a ação do professor enquanto sujeito do processo de ensino e de aprendizagem, no sentido de se preparar para uma incorporação tecnológica e; o papel do sistema educacional, então responsável pela implementação de condições favoráveis à incorporação da tecnologia no ambiente escolar (Frota, 2010).

A interconexão dessas tecnologias subsidia as discussões e argumentações acerca dos temas estudados pelos alunos nas diferentes áreas do conhecimento" (Brasil, 2002, pp. 117-118). Entretanto, é necessário que o aluno seja estimulado a desenvolver posturas e raciocínios autônomos, o que poderá auxiliá-lo em sua formação (Cláudio; Cunha, 2001). Essas discussões põem em cena a relação dos atores, professor e aluno, que no ato de aprender e ensinar não poderá "estar desvinculada do processo de informática" (Ens, 2002, p.38). A produção dos conhecimentos também deve estar atrelada a resolução de problemas em situações reais que possam despertar o interesse dos alunos e auxiliá-los no desenvolvimento do raciocínio (Dante, 2000). Desse modo, a relação aluno, professor, tecnologia, conteúdos e metodologias deverá estar baseada em teorias que privilegiem a emancipação humana.

As TDIC podem estar inerentes ao estudo da matemática em sala de aula através da resolução de problemas que envolvam os conceitos. Para D'Ambrósio (1996, p.80), esse tipo de estudo exige do educador uma contribuição relevante, pois ele "terá o papel de gerenciar/facilitar o processo de aprendizagem e naturalmente interagir com o aluno na produção crítica de novos conhecimentos". Polya (1978) defendeu que o desenvolvimento de habilidades e técnicas matemáticas deveria ser privilegiado, para que o aluno descobrisse por si só a solução dos problemas estudados. Segundo Dante (2000, p.11) "[...] um dos principais objetivos do ensino da matemática é fazer o aluno pensar produtivamente e, para isso, nada melhor que lhe apresentar situações que o envolvam, o desafiem e o motivem a querer resolvê-las". Entretanto, D'Ambrosio (1996) adverte que a matemática nas escolas é estudada de forma mecânica e descontextualizada dos problemas da vida social dos alunos.

Em relação ao ensino de Geometria, Vargas e Barrios (2014) afirmam que se constitui em um ambiente para desenvolver o pensamento espacial, os processos de nível superior e diversas formas de argumentação. Para Abrantes (2000) nos últimos anos tem havido um empenho, em nível mundial, para revalorizar o processo de ensino e de aprendizagem dessa disciplina. Evidencia-se, a importância de se discutir e refletir sobre a atualização das metodologias de ensino e de aprendizagem de Geometria, visto que, a compreensão dos conceitos implica em conhecer o significado dos conceitos, a partir do uso de metodologias próprias. Passar o conhecimento conceitual para a representação simbólica requer uma estruturação do pensamento e reflexão sobre a ação (Morelatti; Souza, 2006).

Nesse contexto, o professor precisa se preparar teoricamente para utilizar metodologias de ensino que incluam o uso das TDIC, essencialmente as que colocam os alunos em contato com essas tecnologias. A resolução de problemas se destaca como uma das metodologias de ensino de relevância na formação dos alunos. Consiste "em um exercício coletivo de memória, imaginação, percepção, raciocínios e competências para a produção e transmissão de conhecimentos" (Brasil, 1999, p. 83). Além disso, desenvolve nos alunos competências para compreender conceitos e procedimentos, que são essenciais para se tirar conclusões e efetuar argumentações, necessárias à formação de cidadãos, capazes de agir e tomar decisões.

É preciso que se reconheça a relevância do ensino de Geometria a partir de ambientes cotidianos e culturais e de materiais didáticos para que possam analisar as ações propostas (Vargas; Barrios, 2014). As TDIC têm auxiliado na resolução de problemas de Geometria e na compreensão dos conceitos geométricos. Existem várias metodologias de ensino que incluem as TDIC, no entanto, a criação de um ambiente de aprendizagem que possa favorecer a construção do conhecimento geométrico não depende somente da tecnologia escolhida, mas também do professor.

A Geometria desempenha um papel fundamental na formação do aluno, propiciando-lhe a oportunidade de construção de um modelo de pensamento próprio que lhe permita "compreender, descrever e representar, de forma organizada, o mundo em que vive" (Brasil, 1997, p.55). A resolução de problemas geométricos poderá trazer aos alunos uma melhor compreensão dos conceitos, visto que a visualização e a representação de conceitos geométricos constituem-se em formas efetivas para a construção e exploração de conceitos abstratos e estabelecem relação desses conceitos com a realidade. Assim sendo, a utilização de uma imagem pode ser empregada na construção e resolução de problemas geométricos. Essa interação pode ser realizada por meio de fotoproblemas fixados numa fotografia. A utilização de fotoproblemas como metodologia de ensino da Geometria pode trazer a realidade para dentro da sala de aula e permitir aos alunos saírem da aula para a realidade. Uma das vantagens desse método é a valorização das capacidades de visualização dos alunos no processo de raciocínio (Almeida; Santos, 2007).

A resolução de problemas pode auxiliar no desenvolvimento das habilidades dos alunos em visualização, desenho, argumentação lógica e aplicação na busca de soluções (Brasil, 1999) e ainda na construção da imagem mental, permitindo ao aluno pensar no objeto geométrico, mesmo na sua ausência, e a diferenciar suas características conceituais. Assim, o objetivo deste estudo foi investigar a eficácia do uso das TDIC para a visualização e a representação de conceitos geométricos na resolução de fotoproblemas em alunos dos dois anos iniciais do Ensino Fundamental II[1], e está pautado no ensino da Geometria, realizado de um modo criativo, que possa estimular a curiosidade dos alunos e favorecer- lhes a organização do pensamento e o desenvolvimento do raciocínio lógico por meio da resolução de fotoproblemas.

O estudo da Geometria coloca as estruturas mentais dos alunos em atividade, possibilitando-lhes um caminhar do estágio de desenvolvimento cognitivo, passando das operações concretas para o estágio das operações abstratas. Nesse sentido, o aluno poderá conhecer e explorar o espaço em que se insere, identificando as formas geométricas (Kaleff, 2008).

2. Considerações Teóricas

O processo de desenvolvimento do raciocínio geométrico está presente em estudos da geometria gráfica, que consiste na interpretação e representação da figura que corresponde a uma imagem do objeto matemático. A geometria gráfica é um conhecimento que privilegia a 'forma' e a visualização, tornando-se um dos suportes na aprendizagem dos conceitos geométricos, um dos principais canais da percepção (Almeida; Santos, 2007). A forma pela qual o objeto é interpretado pela mente humana influencia na própria cognição em Geometria. Um estudo envolvendo figuras geométricas precisa basicamente levantar considerações relacionadas ao aspecto da

[1] Alunos com idades entre 11 (onze) e 12(doze) anos.

visualização, quando esse raciocínio será todo desenvolvido por tal indivíduo, sendo estruturado, e, a partir da interpretação que o indivíduo faz do modelo que representa o objeto geométrico, tanto no que se refere à imagem mental, através de um diagrama, ou mesmo por um modelo concreto (Kaleff, 2008). Na resolução de problemas geométricos, das dificuldades apresentadas pelos alunos, algumas se devem à essa dificuldade de visualização. O que ocorre é que muitas vezes esses alunos não conseguem relacionar diversos sistemas.

O desenvolvimento do pensamento em Geometria foi estudado pelos professores holandeses Pierre Van Hiele e sua esposa, Dina Van Hiele-Geldof. Os resultados das investigações desses professores começaram a ser publicados no ano de 1959. Entretanto, foi Pierre Van Hiele que reformulou e desenvolveu essa teoria, que vem despertando a atenção internacional. Foram feitas traduções para o inglês, em 1984, por Geddes, Fuys e Tischler, deflagrando o interesse por essa contribuição (Kaleff, 2008). Esse Modelo é utilizado para a avaliação das habilidades e como guia sobre a aprendizagem dos alunos em Geometria, pois se fundamenta em cinco níveis do desenvolvimento do pensamento geométrico que descrevem as características do processo do pensamento: Reconhecimento ou Visualização, Análise, Dedução informal ou Ordenação, Dedução Formal e Rigor (Villiers, 2010).

Aos alunos, frequentemente, são apresentadas tarefas que requerem vocabulário, conceitos ou conhecimentos de propriedades, além do nível de pensamento que possuem, problema esse percebido por Van Hiele. Investigando, ele percebeu que há uma alarmante falta de harmonia entre o ensino e a aprendizagem em Matemática, visto que em uma sala de aula os alunos pensam em níveis diferentes dos colegas e também do professor, e, frequentemente, usam palavras e objetos de formas diferenciadas das referidas pelos seus professores e pelo livro didático. Quando o ensino ocorre em um nível de pensamento acima ao do aluno, o conceito não fica gravado por muito tempo e não é bem assimilado, assim como as concepções erradas persistem, quando apreendidas. Van Hiele verificou ainda que, apesar do crescimento cronológico das idades, automaticamente não ocorre um crescimento nos níveis de pensamento e que poucos estudantes decididamente atingem o último nível (Villiers, 2010).

Nos trabalhos iniciais, os Van Hiele desenvolveram a estrutura para uma experiência com os níveis de pensamento, com o objetivo de auxiliar o aluno a desenvolver um *insight* em Geometria. Para eles, um aluno desenvolve um insight se: a) for capaz de se desempenhar numa possível situação não usual; b) desenvolve correta e adequadamente as ações requeridas pela situação; c) desenvolve deliberada e conscientemente um método que resolva essa situação. Desse modo, para que os estudantes tenham um *insight,* precisam entender o que estão fazendo, por que estão fazendo e quando o fazem. Dessa forma, os alunos são capazes de aplicar seu conhecimento ordenadamente para resolver os problemas propostos (Villiers, 2010). Os níveis de desenvolvimento do pensamento geométrico atribuídos por Van Hiele são:

- NÍVEL 0 – Reconhecimento: inicialmente, os alunos basicamente raciocinam por meio de considerações visuais. Sem considerações explícitas das propriedades dos seus componentes, os conceitos geométricos são levados em conta como um todo. Entretanto, as figuras geométricas são reconhecidas pela sua aparência global, podendo ser denominadas por triângulo, quadrado, etc. Nesse nível, o aluno pode identificar formas específicas, aprender o vocabulário geométrico, reproduzir uma figura dada, etc.

- NÍVEL 1 – Análise: os alunos pensam por meio de observação e experimentação e através de uma análise informal sobre os conceitos geométricos. Para que os alunos possam entender conceitos de classes e formas, estabelecem propriedades que constituem as figuras geométricas. Porém, nesse nível, os alunos ainda não são capazes de compreender as relações entre as figuras ou entre as propriedades.
- NÍVEL 2 – Dedução informal ou Ordenação: os alunos, nesse nível, já são capazes de definir e relacionar as figuras e suas propriedades, podendo, no entanto, distingui-las se necessário para a formação de um conceito geométrico. Assim, reconhecem classes de figuras e entendem a inclusão e a intersecção de classes, entretanto, nesse nível, os alunos ainda não compreendem o que significa uma dedução ou axiomas, não percebem como elaborar provas formais e partem de pontos diferentes.
- NÍVEL 3 – Dedução: os alunos nesse nível deduzem uma afirmação a partir de outra ou de outras que foram sequenciais. Tais deduções são entendidas como um caminho que guia para a consignação de uma teoria geométrica, dentro de um contexto matematicamente formal em que aparecem termos indefinidos, como os axiomas, com teoremas e definições.
- NÍVEL 4 – Rigor: nesse nível, os alunos conseguem avaliar rigorosamente sistemas dedutivos, comparando diferentes axiomas na ausência dos modelos concretos estudados nas diversas geometrias. Os alunos possuem a capacidade de aprofundar na análise das propriedades de um sistema dedutivo (Villiers, 2010).

Os Van Hiele identificaram algumas generalizações, propriedades características desse Modelo, e que fornecem um roteiro quanto à metodologia a ser aplicada:

> (1) O Modelo é parte de uma teoria de desenvolvimento e, portanto, presume que um aluno, para atuar com sucesso em um determinado nível, necessita ter adquirido (através de experiências de aprendizagem apropriadas) as estratégias dos níveis anteriores, não permitindo aos alunos saltar níveis;
> (2) O processo, ou a falta dele, de um nível para outro, depende mais dos conteúdos e métodos de ensino recebidos do que da idade. Van Hiele chama a atenção para o fato de que é possível ensinar a um aluno habilidades acima de seu nível real.
> (3) No mecanismo entre os níveis, os objetos inerentes a um nível se transformam em objetos de estudo para o nível posterior.
> (4) Cada nível tem seus próprios símbolos linguísticos e seu próprio sistema de relações conectando esses símbolos. Assim, uma relação que é aceita como correta em um nível pode ser modificada (Kaleff *et al*., 1994, p.27).

As cinco fases sequenciais existentes no decorrer da aprendizagem geométrica, segundo Van Hiele, se seguidas corretamente, favorecem ao indivíduo adquirir conhecimento sobre um determinado conceito geométrico em um nível de pensamento, quais sejam:

- FASE 1 – Questionamento ou Informação: estabelece-se um diálogo entre o professor e o aluno, fazem-se observações e questões, e se institui um vocabulário específico. Com esse diálogo, o professor terá a possibilidade de perceber quais os conhecimentos anteriores que os alunos têm do assunto, e assim, perceber a direção dos estudos que deverá tomar.
- FASE 2 – Orientação Direta: o professor tem a tarefa de selecionar um material para que os alunos possam analisar e se familiarizar com as estruturas e características deste nível. Os exercícios, em sua maioria, são tarefas de uma só etapa, que possibilitam respostas exclusivas e objetivas.
- FASE 3 – Explicitação: os alunos refinam o uso de seus vocabulários, podendo expressar verbalmente suas ideias, referentes às estruturas que observam. A ajuda do professor deve ser mínima, pois deverá deixar o aluno independente em busca de formar um sistema das relações em estudo.
- FASE 4 – Orientação Livre: as atividades apresentadas ao aluno devem possuir diferentes formas de resolução, ou seja, múltiplas etapas, tornando-se possível que o aluno ganhe experiência na busca da individualização na resolução de atividades. Dessa maneira, muitas relações tornam-se mais claras entre os objetos de estudo.
- FASE 5 – Integração: consiste na observação e revisão do que já foi estudado, visando à integração global entre os objetos e relações com a consequente união e internalização em um novo domínio de pensamento. O papel do professor é o de auxiliar no processo de síntese, no entanto, sem introduzir novidades ou discordâncias. Os alunos devem ter alcançado um novo nível de pensamento e, no nível seguinte, estarão preparados para repetir as fases de aprendizagem (Kaleff *et al*., 1994).

Considerando esses pressupostos, a teoria de Van Hiele será utilizada para subsidiar as análises das atividades desenvolvidas nesta investigação, referentes à compreensão dos alunos participantes no estudo dos conceitos da Geometria Plana por meio de resolução de fotoproblemas.

3. Procedimentos metodológicos

A aprendizagem da Geometria deve envolver professores, alunos e a comunidade escolar. Assim sendo, o presente estudo se utilizou da investigação do tipo qualitativa. Esse tipo de estudo fundamenta-se na especificidade do objeto das ciências sociais, atribuindo valor às manifestações específicas e comportamentais dos participantes deste estudo, para o entendimento dos fenômenos. Esse tipo de investigação estabelece que tudo seja observado, e permite construir pontos que auxiliem uma maior compreensão do objeto de estudo (Bogdan; Biklen, 1994).

A concepção de que o conceito é evocado, e de forma significativa, nas situações, levou à proposição, como atividades essenciais desta investigação, da elaboração e resolução de fotoproblemas envolvendo os conceitos geométricos, a partir das fotos tiradas pelos alunos no cotidiano escolar.

3.1. Participantes

Como local para realização desta pesquisa elegeu-se uma Escola Estadual do Estado de Minas Gerais, que atende a um público de alunos abrangendo todos os anos do Ensino Fundamental. Participaram deste estudo todos os 160 alunos[2] matriculados e frequentes nos dois anos iniciais do Ensino Fundamental II, com idades entre 11 (onze) e 12(doze) anos, como já referido.

3.2. Procedimentos

A compreensão e ampliação da percepção de espaço e a construção de modelos para interpretar questões da Matemática e de outras disciplinas é uma competência a ser desenvolvida com os alunos. Nesse sentido, cogitou-se que atividades geométricas em situações problema poderiam facilitar a percepção das relações existentes entre as representações das figuras geométricas planas com os objetos que estas representam. Pensando por essa lente, o primeiro passo foi a aplicação de um Teste Diagnóstico aos alunos, com o intuito de conhecer as habilidades e competências em Geometria que eles já possuíam, as quais seriam pré-requisitos nas fases posteriores.

De posse da análise dos resultados desse teste foram ministrados encontros de reforço dos conceitos geométricos pela professora pesquisadora. A terceira etapa foi uma sessão de fotos por meio de uma máquina digital, realizada dentro da escola, ação dos alunos. Na quarta etapa, foram realizadas duas oficinas, de elaboração, digitação e resolução de fotoproblemas geométricos, a partir das fotos obtidas na sessão anterior, também pelos alunos. Na quinta etapa, uma sessão de institucionalização dos conceitos geométricos envolvidos e a correção dos fotoproblemas elaborados pelos alunos. Por fim, a sexta etapa compreendeu a apresentação dos trabalhos realizados pelos alunos participantes da pesquisa em uma "Exposição dos Fotoproblemas".

4. Desenvolvimento e Resultados

De início os alunos participantes dessa investigação não se mostraram muito interessados, o que mudou significativamente quando foi mencionada a metodologia que seria utilizada. A aplicação do Teste Diagnóstico para cada turma foi feita em horário de aula e teve duração de 50 minutos. Teve como objetivo identificar quais os conhecimentos básicos da Geometria Plana que esses alunos já apresentavam. Composto por cinco questões abertas, esse teste foi respondido individualmente pelos 160 alunos participantes.

Na primeira questão desse teste os alunos classificaram, em curvas abertas ou curvas fechadas, quatro curvas apresentadas. O que se pode notar, nas respostas obtidas, é que todos os alunos (100%) acertaram mostrando ter compreendido os conceitos envolvidos. Já na segunda questão foram apresentados diferenciados

[2] Esses alunos estavam sempre divididos em turmas de 40 alunos e cada turma em grupos de 4 alunos.

polígonos para que os alunos os classificassem de acordo com o número de lados. Os resultados, considerando por classes de figuras, mostram que os alunos apresentaram dificuldades em reconhecer os quadriláteros, quando somente 60,71% dos participantes acertaram essas classificações.

De modo mais específico, os octógonos foram reconhecidos por 46,42% dos participantes. 39,28% dos alunos pesquisados identificaram os triângulos. Já os pentágonos, hexágonos e heptágonos, apenas 25% acertaram a classificação. Pode-se notar nessas duas questões que, embora reconhecessem bem as curvas abertas e fechadas na primeira questão do Teste Diagnóstico, a maioria dos alunos ainda não se encontrava no nível 0 (zero) (Visualização ou Reconhecimento) conforme teoria de Van Hiele, pois na segunda questão, ficaram nítidas suas dificuldades em reconhecer os polígonos apresentados. Esses resultados mostram que ainda não conheciam as propriedades das figuras geométricas. Já os alunos que acertaram essas questões conseguiram identificar as formas específicas das figuras geométricas apresentadas, por meio de suas propriedades, o que indica que já estavam no nível 0 (zero) (Visualização ou Reconhecimento), segundo a teoria de Van Hiele.

Na terceira questão do Teste Diagnóstico, em que foi proposta aos alunos a classificação dos quadriláteros da segunda questão, as dificuldades se evidenciaram. Somente 12,5% dos alunos reconheceram um quadrado e 15 % classificaram, corretamente, um paralelogramo. Na classificação de retângulos, 25% dos alunos acertaram e de losangos, apenas 14,28 %. O que se percebeu é que uma maioria dos alunos não soube diferenciar e classificar os quadriláteros por não conhecer as propriedades dessas figuras geométricas, o que vem confirmar que esses alunos ainda não se encontravam no nível 0 (zero) (Visualização ou Reconhecimento). Os alunos que acertaram essa questão, já se encontravam no nível 0 (zero), visto que conseguiram raciocinar por meio de considerações visuais, levando em conta a aparência global das figuras geométricas envolvidas na atividade, o que mostra que identificaram as formas específicas e propriedades das figuras que classificaram. Nota-se assim, que nessa questão houve valorização das capacidades de visualização dos alunos, o que auxilia no processo de raciocínio, de acordo com estudo de Almeida e Santos (2007).

Em relação à quarta questão do Teste Diagnóstico, na qual deveriam classificar os triângulos apresentados na segunda questão, o que se pode verificar foi que a maioria dos alunos não conseguiu identificar e classificar os triângulos. Apenas 28,56% dos participantes conseguiram classificar os triângulos, ou seja, uma minoria. Na quinta questão, foi apresentada uma figura com a imagem de um campo de futebol e foi solicitado que os alunos citassem as figuras geométricas que integravam essa imagem. Os resultados dessa atividade permitiram notar que a maioria dos alunos não conseguiu identificar todas as figuras geométricas presentes. Uma minoria dos alunos 32,14% afirmou tratar-se de: círculo, semicírculos e retângulos. Quanto aos alunos que erraram, há evidências que não reconheceram as figuras geométricas e não conseguiram diferenciá-las.

Os resultados dessas duas questões mostraram que a maioria dos alunos (67,86%) ainda não se encontrava no nível 0 (zero) de desenvolvimento do pensamento geométrico, conforme teoria de Van Hiele. Mais especificamente, em relação à quarta questão, notou-se que uma maioria dos alunos não soube classificar os triângulos e na quinta questão esses alunos afirmaram a presença de figuras geométricas que não estavam na figura dada, o que aparentou terem feito confusão entre as figuras e não conhecimento das suas propriedades. Já os alunos que acertaram essas duas questões (32,14%) mostraram ter considerações explícitas das propriedades dessas figuras o que lhes permitiu classificá-las acertadamente. Reconhece-se assim, que esses alunos já estavam no nível 1 “Análise” de desenvolvimento do pensamento geométrico, estabelecido por Van Hiele, em que os alunos pensam por meio de análise informal sobre os conceitos geométricos, conhecendo as propriedades das figuras geométricas.

Em virtude desses resultados do Teste Diagnóstico, antes de dar continuidade às atividades previstas na investigação, tornou-se necessária a realização de cinco encontros com o objetivo de oferecer aos alunos participantes da referida pesquisa atividades de reforço relacionadas aos conceitos geométricos envolvidos no Teste Diagnóstico. Esses encontros foram divididos em três momentos: a) uma apresentação dos conceitos geométricos em Power Point; b) uma atividade com a resolução de problemas envolvendo os conceitos geométricos que seriam abordados na investigação e, c) um momento de institucionalização dos conceitos envolvidos, seguido de discussões e reflexões. Essas atividades foram pensadas com base em Nóvoa (1999), que defende uma saída possível para a melhoria da ação educativa, pensar e realizar práticas pedagógicas inovadoras que podem ser construídas pelos próprios professores. Além disso, foram propostas atividades de resolução de fotoproblemas, de modo a contribuir na formação dos alunos para o desenvolvimento da autonomia, conforme Gadotti (2010), para quem educar significa preparar os alunos para que sejam capazes de buscar respostas para as perguntas que lhes são colocadas.

De um modo geral, nesses encontros os alunos participantes da investigação apresentaram inúmeras dúvidas, tanto em relação à classificação das figuras geométricas, quanto em relação aos conceitos matemáticos envolvidos nas resoluções dos problemas estudados. No entanto, ao final dos cinco encontros, observou-se que houve progresso na aprendizagem dos conceitos geométricos envolvidos. Mais especificamente nos três primeiros, as atividades propiciaram aos alunos identificar as figuras geométricas e estabelecer as propriedades específicas de cada uma delas. Assim, reconhece-se que nesse momento da investigação os alunos conseguiram raciocinar através de considerações visuais sobre as figuras geométricas planas, embora ainda não explicitassem todas as propriedades dos seus componentes, o que indica terem passado para o nível 0 (zero) de desenvolvimento do pensamento geométrico, conforme a teoria de Van Hiele.

De modo mais detalhado, observou-se que os alunos, estando no nível 0 (zero) de desenvolvimento do pensamento geométrico (Kaleff *et al*., 1994), perpassaram pelas duas primeiras fases desse nível: fase 1 “Questionamento ou Informação”, estabelecendo diálogo com a professora pesquisadora, levantando questões e instituindo um vocabulário mais específico, quando ela pode perceber os conhecimentos adquiridos por esses alunos e decidir que direcionamento deveria ser dado aos estudos; e fase 2 “Orientação Direta” do nível 0(zero), quando foram apresentadas as diretivas para a compreensão das atividades e os procedimentos dessa etapa, com base nos conhecimentos geométricos adquiridos até então.

No quarto encontro de atividades de reforço dos conceitos geométricos pode-se perceber que os alunos já expressavam verbalmente suas ideias referentes às estruturas geométricas estudadas, o que mostra terem perpassado pela fase 3 do nível 0 (zero): “Explicitação”. Nessa fase, a ajuda da professora foi mínima, deixando os alunos independentes na busca de formar um sistema de relações em estudo. Pode-se afirmar ainda que foi cumprida a fase 4 desse nível: “Orientação Livre”, pois as atividades possuíam diferentes formas de resolução, o que tornou possível que ganhassem experiência na busca da individualização para a resolução dessas atividades, sem interferência direta da professora pesquisadora.

No quinto encontro de reforço, os alunos observaram e revisaram o que já havia sido estudado, objetivando estabelecer relações entre as figuras geométricas estudadas. Como consequência, houve união e internalização desses conceitos num novo domínio de pensamento. Estavam na fase 5 “Integração”, última fase do nível 0 (zero), conforme teoria de Van Hiele. Nesse momento da pesquisa, o papel da professora investigadora foi o de auxiliar na sintetização dos conceitos já estudados, não introduzindo novos conceitos. Notou-se, que os alunos alcançaram condições para avançar para um novo nível de pensamento (Kaleff *et al*. 1994).

Na continuidade da investigação ocorreu a sessão de fotos, que consistiu em um momento muito esperado pela maioria dos alunos participantes, pelo fato de poderem sair do ambiente da sala de aula. A pesquisadora apresentou aos alunos as instruções de como seria essa etapa da investigação. Nessa sessão de fotos foram utilizadas duas câmeras digitais. Eles saíram da sala de aula, em grupos de quatro alunos, para o pátio da escola, acompanhados pela pesquisadora, respeitando a vez da utilização individual de uma câmera digital. Durante essa sessão de fotos, os alunos mostraram interesse em desenvolver a atividade, tirar uma foto no pátio escolar que abrangesse uma figura geométrica. O interesse dos alunos foi abordado por Ens (2002), que defende que as situações reais, além de despertar o interesse dos alunos, propiciam a construção do conhecimento e auxiliam no desenvolvimento do raciocínio, o que é reafirmado por Valente (1999) quando refere ao uso das tecnologias na educação, que podem despertar o interesse e facilitar o processo de desenvolvimento intelectual dos alunos.

Observando a sessão de fotos, nota-se também que os alunos tiveram a oportunidade de reconhecer as formas geométricas observadas no cotidiano escolar, passando pela fase 3 “Explicitação” do nível 0 (zero). Nessa fase os alunos puderam expressar verbalmente suas ideias, relativas às estruturas geométricas que observavam. Observou-se a independência dos alunos para tirar as fotos de objetos que visualizaram no cenário escolar, que remetessem à Geometria. As atividades ocorreram sem a interferência da professora, o que corresponde a fase 4: “Orientação Livre”, na qual os alunos agem sem interferência direta e as relações entre as figuras geométricas tornam-se mais claras. Foi dada a oportunidade de observação e de revisão do que já haviam estudado, caracterizando a fase 5 “Integração”, ocorrendo a relação global entre os objetos geométricos estudados e a união e internalização em um novo domínio de pensamento (Kaleff, *et. al*,1994). Desse modo, pode-se dizer que revelaram capacidade para entrar no nível 1).

No laboratório de informática da escola, os alunos pesquisados participaram de uma sessão de seleção das fotos tiradas por eles na sessão de fotos. Foram selecionadas (160) cento e sessenta fotos[3] envolvendo conceitos geométricos diversificados para serem utilizadas na oficina de elaboração e resolução de fotoproblemas. Com o auxílio da ferramenta *Paint*, após reconhecerem as figuras geométricas presentes nas fotos, os alunos marcaram, em cores vermelho e verde, os limites externos dessas figuras (conforme Figuras 1 e 2) e em seguida essas fotos foram impressas para serem utilizadas na oficina de elaboração dos fotoproblemas.

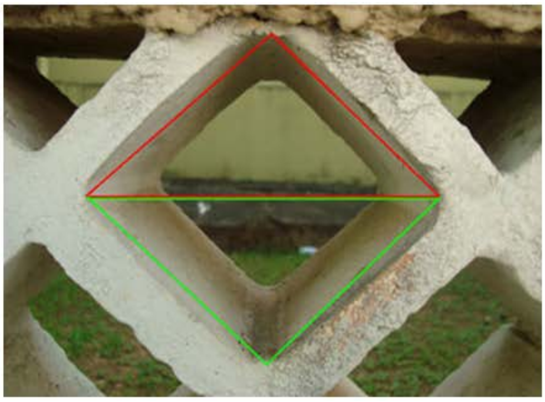


Fig. 1. Foto do muro da escola feita pelos alunos.

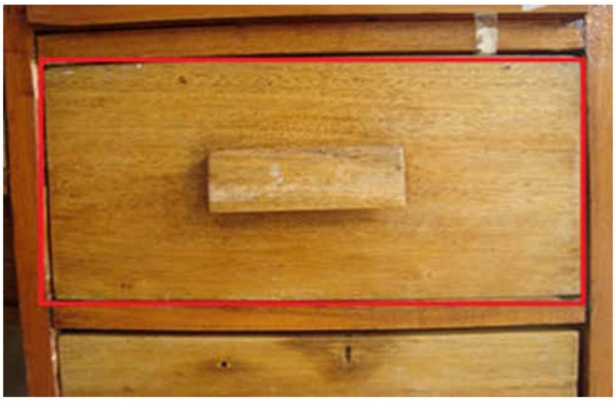


Fig. 2. Foto da gaveta da mesa do professor feita pelos alunos.

Nessa atividade, os alunos se utilizaram da visualização e observação das fotos, no momento em que precisaram estabelecer e marcar os limites de cada figura geométrica identificada e realizar uma análise informal, utilizando os conceitos estudados para reconhecer as características que constituíam as figuras geométricas identificadas. Observa-se assim que nessa atividade, eles perpassaram pelas cinco fases do nível 1: fase 1 – questionamento ou informação; fase 2 – orientação direta; fase 3 – explicitação; fase 4 – orientação livre e fase 5 – integração, como considerado pela teoria de Van Hiele. Ao reconhecer que eles passaram pelas cinco fases do nível 1, entende-se que estavam preparados para repetir as fases de aprendizagem em um novo nível de desenvolvimento do pensamento geométrico, o nível 2 (Kaleff *et al*., 1994). Pode-se dizer ainda que a visualização das formas geométricas constantes nas fotos por eles tiradas veio auxiliar na construção e exploração dos conceitos abstratos que estariam envolvidos, posteriormente, na elaboração de problemas, a partir das fotos (Almeida; Santos, 2007).

[3] Cada aluno selecionou uma das fotos que tirou, ficando 4 fotos de cada grupo.

Na próxima etapa da investigação, nas oficinas de elaboração dos problemas envolvendo conceitos geométricos, os alunos receberam as fotos marcadas na sessão anterior. De início a professora pesquisadora explicou a proposta da oficina que era a de elaborar um problema tendo como referência uma das fotos. Nessa atividade, os alunos necessitaram estabelecer a proporção das medidas das figuras geométricas contidas nas referidas fotos com as medidas reais dos objetos fotografados. Assim, identificando as figuras geométricas planas envolvidas nas fotos, atribuíram valores proporcionais das medidas reais para os lados das figuras e criaram problemas geométricos utilizando os conceitos estudados e revistos nas atividades de reforço. Os problemas criados pelos alunos foram, primeiramente, registrados por eles manualmente em uma folha A4, para depois digitarem e imprimirem.

Reconhece-se que a proposta dessa oficina de elaboração dos fotoproblemas vem ao encontro do que defende D'Ambrosio (1996), que aos alunos devem ser oferecidas diferenciadas situações de aprendizagem e que o ensino não deve se dar de forma mecânica e descontextualizada da vida dos alunos. Os alunos foram capazes de definir e relacionar as figuras geométricas presentes nas fotos, reconhecendo-as por meio de suas propriedades, podendo, no entanto, distingui-las para a formação de um conceito geométrico. Observou-se assim que, nessa etapa da investigação, os alunos atingiram o nível 2 de desenvolvimento do pensamento geométrico: "Dedução Informal ou Ordenação", como estabelecido pela teoria de Van Hiele, quando reconheceram as classes de figuras e entenderam a inclusão e a intersecção de classes. Em relação às fases inerentes a esse nível 2, pode-se afirmar que perpassaram pela fase 1 "Questionamento ou Informação" quando dirigiram várias questões para a professora pesquisadora.

Nessa etapa, a professora explicitou as diretivas que deveriam ser seguidas, salientando a necessidade de tomarem por base os conhecimentos geométricos já adquiridos para elaborarem os fotoproblemas geométricos, características da fase 2: "Orientação Direta". Foi um momento de discussões e de expressividade do pensamento geométrico em que foram capazes de definir e de relacionar as figuras geométricas por meio das respectivas propriedades, necessárias e suficientes para a formação de um conceito geométrico, o que caracteriza a fase 3 do nível 2: "Explicitação". Além disso, essa etapa da investigação propiciou aos alunos estarem em contato com a Geometria de um modo diferenciado, uma oportunidade de construir um modelo de pensamento próprio, o que pode auxiliá-los na compreensão, descrição e representação, de modo organizado dos conceitos estudados (Brasil, 1997).

Na sequência dessa investigação, no laboratório de informática da escola, os alunos digitaram e imprimiram os problemas elaborados na oficina anterior, para posteriormente utilizá-los na oficina de resolução dos fotoproblemas. Nessa oficina as resoluções foram feitas manualmente, em folhas A4 em cor azul, conforme exemplos constantes nas Figuras 3 e 4. Cabe salientar que as folhas contendo os fotoproblemas foram trocadas entre os grupos de alunos para que cada grupo resolvesse problemas diferentes dos que elaborou. Como fonte de pesquisa, eles utilizaram um livro didático de matemática, em busca das fórmulas geométricas necessárias para as resoluções dos problemas elaborados. Essa proposta veio privilegiar o desenvolvimento de habilidades e técnicas matemáticas pelos alunos, visto que tiveram que pensar um problema a partir da foto do cotidiano escolar, e ainda os conceitos geométricos e matemáticos envolvidos na resolução (POLYA, 1978).

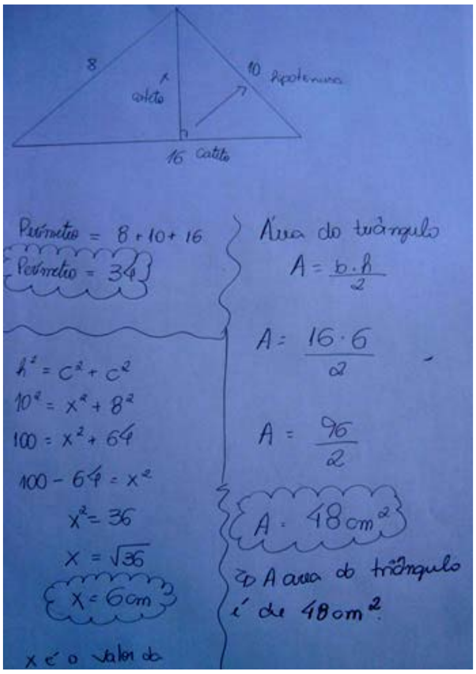


Fig. 5. Resolução de problemas pelos alunos.

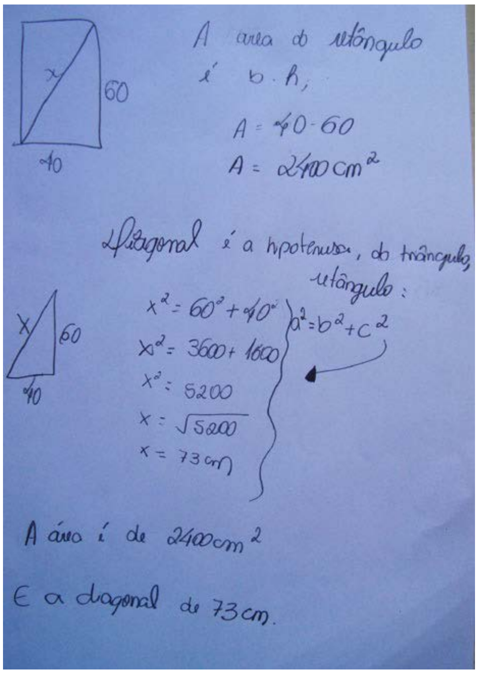


Fig. 6. Resolução de problemas pelos alunos.

A resolução dos fotoproblemas elaborados pelos alunos foi uma atividade de interação entre eles, em que conseguiram definir e reconhecer as fórmulas necessárias para efetuar os cálculos, como aquelas envolvendo perímetro e área, por exemplo, na direção de obter respostas para os problemas. Essa atividade de resolução lhes exigiu a passagem do conhecimento conceitual para o a representação simbólica o que, segundo Morelatti e Souza (2006), requer uma estruturação do pensamento e reflexão sobre a ação. Os alunos não apresentaram dúvidas em relação aos conceitos geométricos, mas sim referentes aos cálculos, as quais foram remediadas pela professora pesquisadora. Todas essas características indicam que os alunos continuaram no nível 2 “Dedução informal ou Ordenação”, como estabelecido pela teoria de Van Hiele.

Pode-se ainda reconhecer que os alunos estavam no nível 2, passaram pela fase 4 “Orientação Livre” desse nível, visto que as atividades realizadas possuíam diferentes formas de resolução, o que tornou mais claras as relações entre os objetos geométricos em estudo e oportunizou que eles vivenciassem a resolução dos fotoproblemas. Além disso, foi uma situação que os envolveu, em que se sentiram desafiados, porém motivados a querer resolvê-los pensando produtivamente (DANTE, 2000).

Dando sequência à investigação, foi realizada uma oficina de correção dos problemas e institucionalização dos conceitos envolvidos pela professora pesquisadora, em sala de aula, com os alunos, os quais participaram discutindo e refletindo sobre as resoluções por eles efetuadas, demonstrando permanecer no nível 2: “Dedução informal ou Ordenação”, conforme estabelecido pela teoria de Van Hiele, porém, passando pela fase 5 “Integração”. Nessa fase, foram capazes de observar e fazer uma revisão do que foi estudado, o que lhes permitiu uma integração global entre os objetos estudados. Os alunos estabeleceram relações entre os objetos de estudo em um novo domínio de pensamento. Nessa etapa, o papel da pesquisadora foi o de auxiliar no processo de institucionalização e sintetização dos conceitos geométricos abordados pelos alunos nos problemas, contudo, sem introduzir novidades ou discordâncias.

A próxima etapa da investigação foi a oficina de confecção dos cartazes (Figuras 5 e 6) referentes aos fotoproblemas resolvidos anteriormente, com duração de duas aulas de 45 minutos.

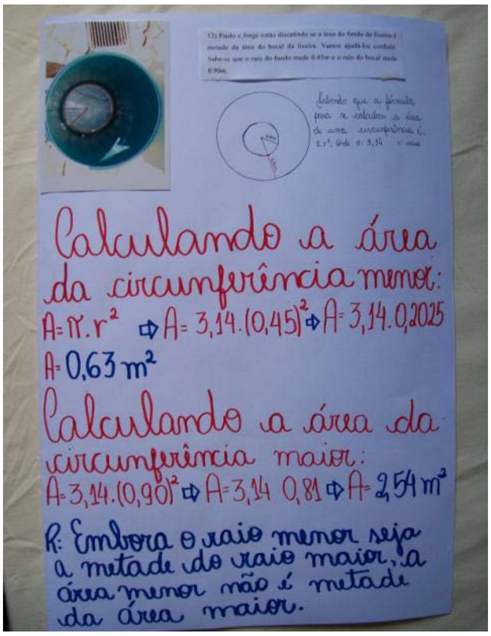


Fig.5. Cartaz feito pelos alunos.

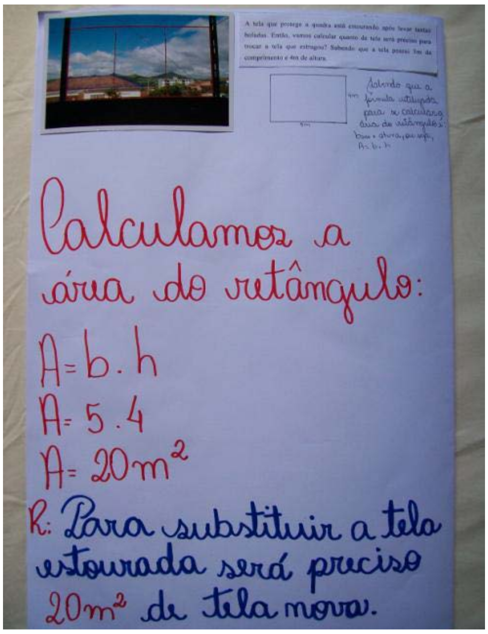


Fig.6. Cartaz feito pelos alunos.

Para a elaboração desses cartazes, os alunos levaram as fotos e os problemas impressos, as resoluções em folhas A4, cartolinas, além de lápis, borracha, caneta, pincel atômico e régua. Nessa oficina, colaram a foto no canto superior esquerdo da cartolina e, abaixo ou ao lado da foto, colaram o problema já digitalizado em papel A4. Abaixo ou ao lado das colagens os alunos fizeram o desenho esquemático da resolução e utilizaram o restante da cartolina para a reprodução, no cartaz, daquela resolução do problema que havia sido feita em A4.

Os cartazes elaborados foram apresentados em um mural da referida escola em uma “Exposição”. Mais especificamente, no centro do mural, os alunos colocaram um cartaz em cor vermelha com o título “Fotoproblemas”, acompanhado da definição desse termo e, ao lado desse cartaz, todos os cartazes por eles produzidos (Figura

7). Cada uma das turmas de alunos que foi visitar essa "Exposição" colocou suas dúvidas em relação aos problemas e à atividade de pesquisa em si para os alunos que fizeram os trabalhos, que ficaram próximos ao mural e explicaram sinteticamente como a pesquisa foi realizada, seus resultados e impressões.

Fig. 7. Exposição dos cartazes feitos pelos alunos.

O que pode ser notado pela professora pesquisadora é que, para os alunos participantes da pesquisa, essa Exposição foi um momento em que puderam apresentar, para toda a escola, o resultado do trabalho por eles realizado: as habilidades desenvolvidas, de interpretação e resolução dos problemas, que culminaram na compreensão dos conceitos geométricos estudados; suas impressões sobre essa metodologia diferenciada de estudar um conceito geométrico com uso das tecnologias digitais; as possibilidades de interação com os colegas e professor; bem como a arte e a criatividade empreendidas para apresentarem, nos cartazes, os fotoproblemas por eles elaborados e resolvidos.

Além disso, percebeu-se que essa Exposição foi um momento em que se despertou a atenção dos alunos, professores e funcionários da escola, ou seja, da comunidade escolar, para a observação e o entendimento sobre como as tecnologias podem ser empregadas em novas metodologias que venham a auxiliar no processo de ensino e de aprendizagem dos conceitos. Isto vem ao encontro do que foi defendido nos estudos de Ens (2002) que afirma que o processo de ensino não poderá estar desvinculado do uso da informática.

Pode-se dizer que essa Exposição consistiu, para os alunos, em um momento de observação e revisão do que já haviam estudado, visando a uma integração entre os objetos geométricos, o que indica que permaneceram no nível 2: "Dedução informal ou Ordenação", porém passando pela fase 5 "Integração". Entende-se, assim, que esses alunos ficaram preparados para um novo nível de desenvolvimento do pensamento geométrico e para repetir as cinco fases de aprendizagem no próximo nível, conforme teoria de Van Hiele (Kaleff *et al*., 1994).

Avaliando todas as etapas desta investigação, depreende-se que, de acordo com a teoria de Van Hiele, consistiu em uma experiência com os níveis de desenvolvimento do pensamento geométrico dos alunos, o que veio auxiliá-los no desenvolvimento de um *insight* em Geometria, visto que, foram capazes de mostrar desempenho em situações não usuais; realizaram correta e adequadamente as ações requeridas em todas as situações e ainda desenvolveram, deliberada e conscientemente, o método que subsidiasse a resolução das situações. Assim, ao que parece, houve entendimento, por parte dos alunos, do que estavam fazendo, por que estavam fazendo e quando deveriam fazer, o que os tornou capazes de aplicar os conhecimentos geométricos de forma ordenada para a elaboração e resolução dos fotoproblemas (Villiers, 2010).

5. Considerações finais

Remetendo ao objetivo primeiro, esta investigação teve como foco essencial o uso das tecnologias digitais de informação e comunicação no processo de visualização e representação para a compreensão dos conceitos geométricos. Nessa direção, os alunos de uma escola pública, participantes deste estudo, trabalharam conceitos da Geometria Plana, por meio da elaboração e resolução de fotoproblemas.

Este estudo permite afirmar que, de modo geral, os alunos têm dificuldades na compreensão dos conceitos geométricos e a visualização é um fator fundamental. Como formas efetivas na construção e exploração dos conceitos geométricos pelos alunos nas atividades, a visualização e a representação de conceitos geométricos os auxiliou a estabelecem relação desses conceitos com a realidade escolar, visto que as fotos utilizadas foram obtidas nesse cenário (Almeida; Santos, 2007). Desse modo, observou-se a importância da visualização, pois foram capazes de estruturar o pensamento geométrico por meio desse construto. Partiram da interpretação dos objetos do cotidiano escolar e estabeleceram relação com os conceitos geométricos estudados. A máquina digital e o computador auxiliaram os alunos a relacionar os conceitos geométricos já construídos aos novos, o que corrobora o estudo de Gadotti (2010), para quem as tecnologias, enquanto recurso em sala de aula, facilitam e motivam a aprendizagem dos conceitos e suas aplicações. Essa tentativa de redimensionamento das práticas educativas remete ao que foi defendido por Guimarães (2007), para quem o professor deve se apropriar dos benefícios das TDIC em sala de aula, explorando suas diversificadas formas de utilização. Destaca-se, assim, que utilizar a visualização combinada com o uso das tecnologias de informação e comunicação como elementos essenciais na elaboração e resolução de fotoproblemas consistiu em uma metodologia diferenciada que propiciou aos alunos vivenciarem situações diversificadas, que certamente podem auxiliar na melhoria da qualidade do processo de ensino.

O papel da professora pesquisadora nas atividades envolvendo fotoproblemas foi de mediadora e orientadora, o que remete ao que foi defendido por D'Ambrosio (1996) como papel do professor, de contribuir com os alunos na produção crítica de novos conhecimentos. A pesquisa de campo oportunizou à professora pesquisadora conhecer a realidade dos alunos dos dois anos iniciais do Ensino Fundamental II, em relação ao processo de ensino e de aprendizagem de Geometria. Iniciando pelos encontros com atividades de reforço, o que se pode notar é que permitiu aos alunos participantes da investigação um nivelamento dos conhecimentos geométricos que iriam utilizar como pré-requisitos para as atividades das oficinas. A sessão de fotos indicou que houve o interesse dos alunos em relação às atividades interativas e diferenciadas, bem como a satisfação pela liberdade e autonomia que tiveram para participar da investigação, o que vem ao encontro dos estudos de Gadotti (2010), que defende a necessidade de auxiliar os alunos no processo de construção dos conhecimentos, de modo a capacitá-los na resolução de problemas, argumentação e desenvolvimento da autonomia.

As oficinas de elaboração e resolução dos fotoproblemas e confecção dos cartazes, a partir das fotos tiradas pelos próprios alunos, mostrou a importância de oferecer-lhes a oportunidade de, usando ferramentas tecnológicas, criar e utilizar seus conhecimentos. A exposição dos cartazes, etapa final do trabalho, mostrou a satisfação dos alunos em expor o trabalho por eles realizado para toda escola. Atividades como estas, realizadas por professores e alunos, podem ser socializadas, de modo que as experiências sejam compartilhadas e possam ser replicadas. A visualização por meio das fotos permitiu que os alunos participantes avançassem nos estudos sobre os objetos geométricos, auxiliando-os na construção de esquemas utilizados na elaboração e resolução dos fotoproblemas. Todas essas etapas vão ao encontro dos estudos realizados por Vargas e Barrios (2014), que se referem ao ensino de Geometria afirmando que o mesmo propicia o desenvolvimento do pensamento espacial, dos processos de nível superior e das diferentes formas de argumentação.

A teoria de Van Hiele permitiu avaliar os níveis de compreensão dos alunos participantes do estudo aqui referido, constituindo-se de fundamental importância para nortear as análises realizadas. No decorrer das atividades realizadas nas oficinas, o que se pode perceber é que, segundo o Modelo de Van Hiele, os alunos participantes partiram do nível 0 “Reconhecimento” de desenvolvimento do pensamento geométrico, no qual levam em conta como um todo os conceitos geométricos, passaram para o nível 1 “Análise”, em que, por meio da visualização, efetuam uma análise informal de um conceito geométrico; em seguida atingiram o nível 2 da “Dedução informal ou Ordenação”, quando entendem e relacionam os conceitos geométricos abstratos (Kaleff *et al*., 1994). Ainda ficou evidente que os alunos participantes da pesquisa não atingiram o nível 3 “Dedução formal” e o nível 4 “Rigor” da conceituação do ente geométrico. Depreende-se que o Modelo de Van Hiele foi ideal para avaliar as habilidades dos alunos em Geometria, além de ter sido um guia sobre a aprendizagem dos conceitos estudados nas oficinas, permitindo à professora pesquisadora as análises de cada etapa e planejamento da próxima etapa, fundamentando todas as atividades nos níveis de desenvolvimento do pensamento geométrico, conforme apresentado por Villiers (2010) e Kallef (1994).

Pode-se afirmar que este estudo pode contribuir para o desenvolvimento de habilidades e técnicas matemáticas por parte dos alunos, visto que, desde a elaboração até a resolução dos fotoproblemas, os alunos tiveram que buscar fórmulas e compreender os conceitos de base para construírem os novos conceitos (Polya, 1978). Essa metodologia de resolução de fotoproblemas pode propiciar ao aluno pensar produtivamente, pois vive situações que o envolvem, um dos principais objetivos do ensino da matemática, de acordo com Dante (2000). Tudo leva a crer que a construção e resolução de fotoproblemas, com o auxílio de ferramentas tecnológicas, constituem-se em um método que pode auxiliar no processo de ensino e de aprendizagem da Geometria no nível fundamental de ensino. Essa experiência vem confirmar o atual papel do professor, no sentido de propiciar aos alunos metodologias de ensino que incluam as TDIC, de modo a agilizar e tornar versátil o processo de ensino e de aprendizagem dos conceitos, conforme revela Garcia (2006).

Em suma, para atender às necessidades dos alunos, as metodologias de ensino da Geometria precisam incluir as ferramentas tecnológicas da atualidade. Ao professor cabe fundamentar teoricamente suas ações em teorias que subsidiem sua compreensão de como se dá o desenvolvimento do pensamento geométrico do aluno. É preciso que os alunos sejam estimulados a desenvolver posturas e raciocínios autônomos, conforme Cláudio e Cunha (2001) evidenciam em seus estudos. Cabe, ainda, inovar continuamente essas metodologias, de modo a contribuir para a melhoria do processo de ensino e aprendizagem dos conceitos em sala de aula e fora dela, o que vem influenciar na formação crítica e criativa dos alunos para atuarem com autonomia.

Bibliografia

Abrantes, P. (2000). *Investigações em Geometria na Sala de Aula.* Recuperado em 15 de setembro de 2014, de: http://www. prof 2000.pt/ users/j.pinto/ textos/ texto1.pdf.

Almeida, I. A. C.; Santos, M. C. A. (2007). *A visualização como fator de ruptura nos conceitos geométricos*. UFPE. Curitiba. Recuperado em 15 de outubro de 2014, de: www.degraf.ufpr.br/artigos_graphica/AVISUALIZAÇÃO.pdf

Brasil, Ministério da educação e Cultura (1997). *Parâmetros Curriculares Nacionais*: matemática /. Secretaria de Educação Fundamental. Brasília: MEC/SEF, 1997**.**

Cláudio, D.; Cunha, M. L. (2001). As novas tecnologias na formação de professores de Matemática. In: CURY, Helena N. (org.), *Formação de professores de Matemática uma visão multifacetada.* Porto Alegre: Edipucrs.

D' Ambrosio, U. (1996). *Educação matemática:* da teoria à prática. São Paulo: Papirus.

Dante, L. R. (2000). *Didática da Resolução de Problemas de Matemática*. São Paulo: Ática.

Ens, R. T. (2002). *Relação Professor, Aluno, Tecnologia*: um espaço para saber fazer, o saber conviver e o saber ser. Prado Velho PR, Curitiba, v.1, n.3 – p. 37- 44, fevereiro 2002. Recuperado em 22 de novembro de 2014, de: http://homer.nuted.edu.ufrgs.br/ObjetosPEAD2006/tics/tics.pdf

Frota, M. C. R. (2003). *Perfis de entendimento sobre o uso da tecnologia na educação matemática.* Recuperado em 19 de dezembro de 2014, de:http://www.ufrrj.br/emanped/paginas/conteudo_producoes/docs_27/perfis.pdf

Gadotti, M. (2010). *Escola Cidadã.* São Paulo: Editora Cortez e Autores Associados.

Garcia, L. M. I. (2006). *A visualização e a representação geométrica de conceitos matemáticos e suas influências na constituição do conceito matemático.*

IGCE/UNESP. Rio Claro. Recuperado em 18 de novembro de 2014, de: www.fae.ufmg.br/ebrapem/completos/08-06.pdf

Guimarães, J. M. de M. (2007). Educação, globalização e educação à distância. *Revista Lusófona de Educação*. Portugal. n. 9, p.139-158. Recuperado em 22 de novembro de 2014, de: http://www.scielo.oces.mctes.pt/pdf/rle/n9/n9a09.pdf

Kaleff, A M.M. R; Henriques, A; Rei, D. M; Figueiredo, L.G. (1994). Desenvolvimento do pensamento geométrico: modelo de Van Hiele. *Bolema*, v.10. 21-30. Recuperado em 25 de novembro de 2014, de: http://www.uff.br/leg/publicacoes/01_18_Desenvolvimento_do_Pensamento_Geom%E9trico_-_O_Modelo_de_Van_Hiele.pdf

Kaleff, A. M. M. R. (2008). *Novas Tecnologias no Ensino da matemática-Tópicos em Ensino de Geometria:* a sala de aula frente ao laboratório de ensino e à história da Geometria. Rio de Janeiro: UAB/CEDERJ, v. 1. 223p.

Morelatti, M. R. M; Souza, L. H.G.de. (2006). Aprendizagem de conceitos geométricos pelo futuro professor das séries iniciais do Ensino Fundamental e as novas tecnologias. *Educar*, Curitiba, n. 28, p. 263-275, Editora UFPR.

Nóvoa, A. (1999). *Os professores na virada do milênio*: do excesso dos discursos à pobreza das práticas. F.E.U.S.P. 1999. Recuperado em 25 de novembro de 2014, de: http://hdl.handle.net/10451/690

Polya, G.(1978). *A arte de resolver problemas.* Trad. e adapt.: Heitor Lisboa de Araújo. Rio de Janeiro: Interciência.

Valente,J.A. (org.).(1999). O computador na sociedade do conhecimento. Campinas, SP: UNICAMP/NIED, 1999.

Vargas, H. O. C.; Barrios, D. V. (2014). Ideas para enseñar: Propuesta didáctica de la sección áurea manifestada en la pintura y la fotografia. *Revista Iberoamericana de Educação Matemática*, n. 40, Dez. 2014. pp.147-157.

Villiers, M. de (2010). Algumas Reflexões sobre a Teoria de Van Hiele. *Revista Educação Matemática Pesquisa*. São Paulo, v. 12, n 3, p. 400-31. ISSN 1983-3156. Recuperado em 25 de novembro de 2014, de: http://revistas.pucsp.br/index.php/emp/issue/view/192

Autores:
Primer autor: **Rosimeire Aparecida Soares Borges**

Doutora em Educação Matemática. Professora do Mestrado em Educação da Universidade do Vale do Sapucaí/Pouso Alegre/ MG/Brasil. Atua na área de História da Educação Matemática, Tecnologias Digitais de Comunicação e Informação na Educação, Formação de professores e Seminários de Pesquisa.

Segundo autor: **Sandra Maria da Silva Sales Oliveira**

Doutora em Psicologia. Professora do Mestrado em Educação da Universidade do Vale do Sapucaí/ Pouso Alegre/ MG/Brasil. Atua na área de Psicologia da Educação, Aprendizagem, Dificuldades de Aprendizagem e Formação de Professores.

REVISTA IBEROAMERICANA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA

ISSN: 1815-0640
Número 45. Marzo 2016
Página 24-43

www.fisem.org/web/union
http://asenmacformacion.com/ojs/index.php/union/index

Sobre a utilização de materiais didáticos manipuláveis na educação básica na visão dos professores[1]

Renata Cristina Geromel Meneghetti, Marina Ferruci Bega

Fecha de recepción: 04/06/2014
Fecha de aceptación: 04/03/2016

Resumen	Esta investigación tuvo como objetivo investigar el uso de los materiales didácticos manipulables (MDM) en las clases de matemáticas en la educación básica, según el punto de vista del maestro. Participaron en esta investigación, respondiendo a un cuestionario abierto sobre el tema, cuarenta y dos maestros que enseñan las matemáticas en la Educación Básica en una ciudad brasileña. Esta investigación indica que a pesar de la presencia y la importancia de la innovación tecnológica en el entorno educativo, los profesores entrevistados hacen uso de MDM en la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas especialmente para el desarrollo de contenidos y ellos destacan que los MDM son de suma importancia para hacer las matemáticas más cerca del real, más touchable y mejor entendida por los estudiantes. **Palabras clave**: materiales didácticos manipulables; enseñanza y aprendizaje de las matemáticas; educación básica; maestros.
Abstract	This manuscript addresses the use of didactic manipulative materials (DMM) in elementary school, according to the teacher's point of view. Forty-two Mathematics teachers of a Brazilian city answered an open questionnaire about the topic. The results show, despite the presence and importance of technological innovations in the educational context, the teachers claim to use DMM in the teaching and learning of mathematics, especially for the development of contents, as they enable Mathematics to become more significant and palpabel, closer to the real world and better understood by students. **Keywords**: instructional materials manipulatives; the teaching and learning of mathematics; elementary scholl; teachers.
Resumo	Esta pesquisa teve como propósito investigar o uso de materiais didáticos manipuláveis (MDM) nas aulas de matemática da educação básica, do ponto de vista do professor. Participaram nesta investigação, respondendo a um questionário aberto sobre o tema, quarenta e dois professores que ministram a disciplina de matemática em escolas de Educação Básica de uma cidade brasileira. Esta pesquisa indica que apesar da presença e importância das inovações tecnológicas no cenário

[1] Uma versão preliminar e parcial deste artigo foi apresentada no CIBEM/2013.

educacional, os professores entrevistados afirmam fazer uso de MDM no processo de ensino e aprendizagem de matemática, em especial para o desenvolvimento dos conteúdos e reforçam que os MDM são importantes para tornar a matemática mais próxima do real, mais palpável e melhor compreendida pelos alunos.
Palavras-chave: materiais didáticos manipuláveis; ensino e aprendizagem de matemática; educação básica; professores.

1. Introdução

Conteúdos relacionados com a disciplina de matemática geralmente são responsáveis por uma parte considerável das dificuldades de aprendizagem por parte dos alunos. Isso pode estar associado ao grau de abstração com que esses conteúdos são abordados em sala de aula, muitas vezes desvinculados do mundo material e da vida diária.

> O caráter abstrato dos estudos matemáticos surpreende os principiantes nos primeiros contatos com um mundo de ideias e representações, desprovidas das particularidades das coisas materiais. Apesar de a matemática ser utilizada e estar presente na vida diária, exceto para quem já compartilha deste saber, as ideias e os procedimentos matemáticos parecem muito diferentes dos utilizados na experiência prática ou na vida diária. (Micotti, 1999, p. 162).

Para haver compreensão dos conceitos matemáticos é necessário buscar algo que desperte no estudante o prazer pela aprendizagem da matemática, que torne esta aprendizagem mais prazerosa. Como enfatizam Turrioni e Perez (2006, p. 144): “Um ensino de matemática visando o prazer de aprender, garantindo participação e interesse dos alunos, a participação da comunidade, é fundamental para um aprendizado mais eficiente e de qualidade”. Uma alternativa para alcançar tal finalidade é a utilização de materiais didáticos manipuláveis (MDM), de maneira a estimular o aluno a participar da aula e a compreender o conteúdo focado.

Nesta pesquisa, materiais didáticos manipuláveis são entendidos como aqueles que os alunos podem manipular por meio do tato (da experiência), compreendendo materiais concretos, atividades experimentais, jogos etc. Considera-se ainda que:

> Os materiais didácticos não podem servir apenas para o professor fazer demonstrações, os alunos devem ter oportunidade de manipulá-los e descobrirem por si próprios os conhecimentos matemáticos (...) o professor adquire um novo papel, o de orientador das aprendizagens (...) é a partir de experiências pessoais, individuais e concretas que o aluno desenvolve uma aprendizagem dos conteúdos matemáticos. (Candeias, 2007, p. 319)

Dentro de uma perspectiva construtivista de conhecimento compreende-se que os MDM podem favorecer a construção do conhecimento pelo aluno, auxiliando-o na socialização das ideias, na motivação para aprender, na apresentação do conteúdo por meio de situações desafiadoras; tornando o aluno integrante ativo no processo de ensino e aprendizagem. Assim, a utilização de MDM, incluindo aqueles que favorecem atividades lúdicas, pode ser vista como um facilitador da aprendizagem, na medida em que for bem elaborado e usado adequadamente pelo professor junto a seus alunos.

Esta pesquisa teve como propósito investigar, sob a perspectiva do professor, como os MDM têm sido utilizados nas aulas de matemática da Educação Básica e qual a importância desses materiais no processo de ensino e aprendizagem de matemática,

2. Considerações Teóricas

Os MDM conquistaram um espaço importante no contexto da educação matemática, pois sua utilização pode tornar as aulas de matemática mais dinâmicas e favorecer a compreensão dos conteúdos abordados.

> É necessário que haja por partes dos educadores uma revisão sobre a situação atual da prática docente, identificando novos meios e propostas de tornar sua aula mais proveitosa, visando à interação do aluno com o conteúdo estudado e fazendo com que ele tenha uma maior afinidade com os conteúdos matemáticos ensinados em sala de aula. Por esse motivo apresentamos o uso de materiais manipuláveis e jogos como uma proposta pedagógica para tornar as aulas de Matemática mais dinâmicas e proveitosas. (Sousa & Oliveira, 2010, p. 2)

Uma forma de classificar os diversos materiais para ensino foi apresentada por Sowell (1989) da seguinte maneira: (i) Materiais concretos: são aqueles que os alunos trabalham diretamente com eles, por exemplo, o Cuisinaire, o geoplano, dobraduras com papeis etc; tais materiais são sempre trabalhados com a supervisão de um instrutor; (ii) Materiais pictóricos: os estudantes não trabalham diretamente com eles, mas assistem demonstrações de seu uso, seja por animações ou pelo uso do material manipulável apenas pelo professor, em demonstração na sala de aula; (iii) Materiais abstratos ou simbólicos: são utilizados pelos alunos de maneira simbólica, por exemplo, preenchendo atividades com lápis e papel, a partir de suposições propostas nos livros-texto ou ouvindo uma aula e lendo em livros didáticos.

Uttal, Scudder e DeLoache (1997) reconhecem que tanto professores quanto pesquisadores têm sugerido que objetos concretos permitem à criança estabelecer conexões entre suas experiências diárias e seu aprendizado sobre conceitos e símbolos matemáticos. Em essência, é observado que os objetos concretos se tornam um caminho para a aprendizagem de símbolos abstratos.

Segundo Matos e Serrazina (1996, p. 3, citado por Nacarato, 2004-2005), materiais manipuláveis são “objectos ou coisas que o aluno é capaz de sentir, tocar, manipular e movimentar. Podem ser objetos reais que têm aplicação no dia-a-dia ou podem ser objectos que são usados para representar uma idéia”. Assim, o material manipulável nos permite representar algo que tem uma aplicação no dia a dia ou até mesmo uma ideia.

A utilização de materiais dessa natureza ajuda no desenvolvimento habilidades como a criatividade, a interação social e a confiança em si, como relata Brandalise e Lubeck (2007):

> Pudemos ver que pelos esforços coletivos, a educação matemática se efetiva, mostrando pela transdisciplinaridade e criatividade, que a aprendizagem ocorre; contextualizada e diferenciada, participando eficazmente na formação de indivíduos críticos e atuantes. (Brandalise & Lubeck, 2007, p. 7).

Enfatizando a importância dos aspectos sociais proporcionados pelos MDM, Sousa e Oliveira (2010, p. 7) também afirmam que:

> Quando usamos os materiais manipuláveis e jogos em sala de aula, podemos aumentar o leque de possibilidades a serem trabalhadas, não apenas com conceitos matemáticos, mas também com conceitos sociais, como o convívio, a colaboração do aluno com os seus colegas, o respeito ao próximo, convívio com ganhos e perdas, entre outros. (Souza & Oliveira, 2010, p.7).

Assim, a utilização de MDM pode favorecer não somente a aprendizagem de novos conteúdos como também o desenvolvimento de outros conhecimentos e habilidades importantes para a formação do cidadão como um todo.

Outra característica marcante da utilização de MDM, principalmente quando estes envolvem jogos ou atividades lúdicas, é de serem meios de cativar os aprendizes e incentivá-los a abandonar a concepção de matemática como uma disciplina teórica e maçante, e passar a percebê-la como uma ciência viva e acessível; como algo mais prazeroso de se aprender. O que faz do aprendizado atraente é o sentimento de ser capaz que suscita no ser humano, quando este se vê desvendando algo através de sua capacidade motora ou intelectual, quando este percebe que conseguiu chegar a uma conclusão sobre o conteúdo ensinado, e entendeu o que lhe foi proposto.

Araújo (2000, p. 15) destaca que através de atividades lúdicas as aulas de matemática podem se tornar “[...] dinâmicas e prazerosas facilitando assim, o ensino-aprendizagem e levando o aluno a se apropriar do conhecimento, vivenciando, experimentando e se tornando uma pessoa autônoma para poder aplicar seus conhecimentos na vida”.

Essa autora ainda acrescenta que:

> Difundir e desmistificar o uso de atividades lúdicas, com fundamentações pedagógicas adequadas, favorece um aprendizado efetivo, representando estratégias altamente proveitosas para que o aluno tenha acesso ao conhecimento e ao desenvolvimento de suas capacidades. (Araújo, 2000, p. 11).

No Brasil, as diretrizes curriculares para o ensino de matemática visando à compreensão de conceitos apontam para a necessidade de se trabalhar com o aluno realidades cotidianas, de maneira a concretizar situações e manipular objetos. (Secretaria da Educação, 1989, 1994). Por sua vez, os Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN) enfatizam a importância da atenção do professor às necessidades dos alunos, de saber relacionar o conteúdo aprendido em sala de aula com a realidade por eles vivida. Isso requer traquejo do professor na busca por novas estratégias a serem utilizadas em sala de aula, visando facilitar o processo de ensino e aprendizagem da matemática e a compreensão dos alunos em relação aos conceitos focados. A utilização de materiais didáticos manipuláveis pode ser vista como uma dessas estratégias de ensino e aprendizagem. Ainda segundo os PCN, atividades como os jogos e materiais concretos:

> (...) podem contribuir para um trabalho de formação de atitudes – enfrentar desafios, lançar-se à busca de soluções, desenvolvimento da crítica, da intuição, da criação de estratégias e da possibilidade de alterá-las quando o resultado não é satisfatório – necessário para aprendizagem da Matemática. (Ministério da Educação, 1998, p. 47).

Além disso, os PCN também destacam o papel da história e das tecnologias da comunicação como recursos importantes no processo de ensino e aprendizagem da matemática. A utilização de recursos tecnológicos também são destaques na “nova” proposta curricular do Estado de São Paulo e dos PCN. (Ministério da Educação, 1998; Secretaria da Educação, 1994).

Por fim há um alerta das diretrizes curriculares para o fato de que nem sempre a utilização de materiais manipuláveis torna-se coerente com o conteúdo trabalhado. Por isso deve haver um discernimento do professor quanto a este fato. Segundo Farias (2010), “(...) o professor deve selecionar e dimensionar bem o material concreto para que obtenha êxito em sua aplicação, sabendo de seu potencial e de suas limitações” (p.3). Além disso, no preparo e na seleção do material a se utilizar, é preciso também estar atento às necessidades e particularidades do público alvo, ou seja, dos alunos para os quais o material será empregado.

Assim, pode-se ressaltar, como coloca Nacarato (2005), que nenhum objeto didático por si próprio melhorará o ensino de Matemática, pois para alcançar esse propósito é preciso também considerar a forma como esse objeto é utilizado, bem como as concepções pedagógicas do professor. Ball (1992) também adverte sobre a importância do professor neste processo ao enfatizar que os alunos não adquirem imediatamente os conceitos matemáticos com o uso de materiais manipuláveis. A instrução extensiva e a prática, com orientação do professor, são necessárias para que os resultados sejam, de fato, efetivos.

Assim, faz-se importante que o objeto didático (materiais manipulativos, jogos ou outros) esteja integrado às propostas alternativas de ensino e aprendizagem e que o professor esteja em consonância com estas, tal como já fora apontado por Meneghetti e Nunes (2006).

3. Metodologia

A pesquisa seguiu uma abordagem qualitativa de investigação, que tem o ambiente natural como fonte direta de dados e o pesquisador como principal instrumento (Lüdke & André, 1986). O levantamento dos dados se deu por meio da aplicação de um questionário à professores de matemática da educação básica, considerado vantajoso neste caso, pois possibilita que se atinja um número maior de participantes; permite que as pessoas o respondam no momento que julgarem conveniente e; não expõe os participantes à interferência da opinião do entrevistador na hora das respostas (Gil, 2008).

O questionário foi aplicado a 63 professores da educação básica de escolas de uma cidade do estado de São Paulo, Brasil. Tal questionário constituiu-se de sete questões abertas (ver anexo)[2]; em busca de compreender quando e como materiais didáticos manipuláveis estão sendo usados para auxiliar no ensino e na aprendizagem de matemática. Nesse caso entende-se por questões abertas as que possibilitam liberdade de respostas e possibilita respostas diferentes dos participantes, ou seja, cada participante pode responder livremente às perguntas[3].

Com tais questões buscou-se investigar: se os professores fazem ou não uso de MDM em suas aulas, bem como, a maneira como o fazem; se sentem diferenças (em relação à aprendizagem do aluno) quando empregam este tipo de material; se acham válido empregar MDM e sobre a forma como obtêm os MDM para utilização em sala de aula.

O critério de escolha dos professores para responderem ao questionário foi o de estarem atuando em escolas que contemplassem os três níveis de ensino da Educação Básica: Ensino Fundamental I (do primeiro ao quinto ano), Ensino Fundamental II (do sexto ao nono ano) e Ensino Médio (constituído de três anos). Foram contatadas e convidadas a participar da pesquisa onze escolas (sete particulares e quatro públicas) do município de São Carlos, São Paulo/Brasil; tais escolas estavam registradas na Diretoria de Ensino deste município como escolas que atendiam aos três níveis da Educação Básica. Para as escolas particulares usamos a sigla PA e para as públicas PU. Quatro dessas escolas (denotadas por PA-2, PA-5, PA-7 e PU-4) não concordaram em participar da pesquisa. Das sete escolas que aceitaram participar da investigação, quatro são particulares (denotadas por PA-1, PA-3, PA-4 e PA-6) e três são públicas (denominadas PU-1, PU-2 e PU-3).

[2] Antes da aplicação propriamente dita, o questionário foi apresentado e discutido (simulando sua aplicação) junto membros a um grupo de pesquisa de educação matemática coordenado pela primeira autora deste trabalho, do qual participam alunos do curso de licenciatura em matemática (futuros professores) e alunos da pós-graduação educação Matemática (ou áreas afins) que já atuavam como professores da Educação Básica. Tal procedimento feito visando avaliar se as questões propostas atingiriam os objetivos que se pretendia na pesquisa. Isso possibilitou o aprimoramento das questões.

[3] As questões abertas diferenciam-se das fechadas, sendo que essas últimas, em geral, referem-se às questões de alternativas, que conferem maior uniformidade as respostas (Gil, 2008).

Dessas escolas, foram convidados os seus 63 professores de matemática que atuavam nos três níveis da Educação Básica, ou seja, incluindo tanto os professores específicos da disciplina de matemática (séries finais do Ensino Fundamental e Ensino Médio), quanto os professores das séries iniciais do Ensino Fundamental; neste último caso o aluno tem um único professor por ano. Dos questionários entregues, retornaram 42 preenchidos (e foram designados por P1... P42), e 21 não responderam alegando não fazerem uso de MDM, e por isso, foram computados na análise como professores que não usam MDM em suas aulas. Foram feitas tabelas relacionando as respostas de maneira a ser possível uma conclusão sobre a opinião dos professores em relação ao uso deste tipo de material.

A partir das respostas dos sujeitos procedeu-se a uma análise qualitativa dos dados buscando agrupamento das respostas por meio de convergências, procurando salientar os aspectos mais relevantes ao propósito da investigação. Vale salientar que foram também utilizamos dados quantitativos para auxiliar na interpretação dos resultados. Através da análise das respostas dadas aos questionários pôde-se analisar a utilização de MDM nas aulas de matemática da Educação Básica.

4. Análise dos questionários

A fim de que fossem mantidos em sigilo os nomes dos professores e escolas, foi feita a relação a seguir, em que PA denotam escolas particulares, PU escolas públicas e P o respectivo professor de acordo com a numeração.

ESCOLAS	PU-1	PU-2	PU-3	PU-4	PA-1	PA-2	PA-3	PA-4	PA-5	PA-6	PA-7
Professores	P1	P7	P10	-	P13	-	P21	P36	-	P37	-
	P2	P8	P11	-	P14	-	P22	-	-	P38	-
	P3	P9	P12	-	P15	-	P23	-	-	P39	-
	P4	-	-	-	P16	-	P24	-	-	P40	-
	P5	-	-	-	P17	-	P25	-	-	P41	-
	P6	-	-	-	P18	-	P26	-	-	P42	-
	-	-	-	-	P19	-	P27	-	-	-	-
	-	-	-	-	P20	-	P28	-	-	-	-
	-	-	-	-	-	-	P29	-	-	-	-
	-	-	-	-	-	-	P30	-	-	-	-
	-	-	-	-	-	-	P31	-	-	-	-
	-	-	-	-	-	-	P32	-	-	-	-
	-	-	-	-	-	-	P33	-	-	-	-
	-	-	-	-	-	-	P34	-	-	-	-
	-	-	-	-	-	-	P35	-	-	-	-

Tabela 1: relação das escolas e dos professores participantes da investigação

No que segue apresentamos algumas tabelas com os dados obtidos em relação a cada questão realizada. Após a apresentação de cada tabela, procedeu-se à interpretação dos resultados.

Os dados da tabela 2 representam as respostas dos professores em relação à primeira questão, na qual se perguntou aos professores se eles utilizavam ou não MDM em suas aulas de matemática.

Utiliza MDM em suas aulas?						
	Escolas Públicas		Escolas Particulares		TOTAL	
SIM	12	80%	30	62,5%	42	66,6%
NÃO	3	20%	18	37,5%	21	33,3%

Tabela 2: Sobre a utilização de MDM nas aulas de matemática

Através desta tabela percebemos que a maioria dos professores alegou fazer uso de MDM em suas aulas de matemática; o que parece indicar que eles consideram importantes e de valia utilizar esse tipo de material nas aulas. Pode-se ainda observar, de acordo com as respostas dos professores, que a utilização de MDM em escolas públicas é maior do que em escolas particulares, aqui não foi possível saber qual o motivo pelo qual isso ocorre, entretanto uma possibilidade é a de o material estar associado ao incentivo e/ou à liberdade que o professor tem em utilizar este tipo de recurso didático.

A tabela 3 expressa os materiais utilizados pelos professores que responderam ao questionário e o número de vezes que estes materiais aparecem nas respostas deles, juntamente com a porcentagem relativa a estas aparições. Lembramos que o professor pode fazer uso de um ou mais materiais e, por isso, as porcentagens ultrapassam 100%.

Tipos de materiais utilizados		
Material	Utilizações	Percentual (%)
Material Dourado	27	64,3
Jogos	19	45,2
Sólidos Geométricos	13	30,9
Materiais Recicláveis	13	30,9
Encarte da apostila / Atividades com Papel	12	28,6
Jornais/Panfletos	8	19
Tangran	6	14,3
Ábaco	5	11,9
Régua, compasso, etc.	5	11,9
Blocos Lógicos	5	11,9
Material Cusinare	4	9,5
Softwares Educativos	4	9,5
Atividades simulando o uso de Dinheiro	3	7,1
Utilização de Balança	3	7,1
Atividade de Mercado	2	4,8

Tecnologias (recursos tecnológicos)	2	4,8
Carpete (atividades com flanelógrafo)	2	4,8
Geoplano	2	4,8
Atividades com Massa de Modelar	1	2,4
Literatura Infantil (livros)	1	2,4
Pentaminós	1	2,4
Espelhos (caleidoscópio)	1	2,4

Tabela 3: Tipos de materiais utilizados

Os resultados expressos na Tabela 3 indicam uma porcentagem maior de professores utiliza materiais concretos feitos de madeira e jogos. Os softwares educativos e a utilização de recursos tecnológicos por sua vez, não tiveram tanto destaque, o que, a nosso ver, pode estar relacionado à questão da acessibilidade em relação ao uso do material (disponibilidade ao professor e ao aluno ou se o material é fácil de ser confeccionado pelo professor ou pelo aluno, etc.).

Observamos ainda que dos quatro professores que admitiram utilizar-se de recursos tecnológicos a maioria são professores de escolas particulares, sendo apenas um professor de escola pública. O que pode indicar tanto a falta de artefatos para a utilização desses recursos, quanto à cobrança, ou falta dela, exercida pela instituição de ensino da qual o professor faz parte.

Na tabela 4 apresentam-se os dados obtidos sobre a maneira como os MDM são empregados nas aulas de Matemática, neste caso as respostas obtidas possibilitaram uma análise quanto à finalidade da utilização dos MDM em sala de aula:

De que maneira os MDM são empregados?		
Finalidade	Utilizações	Percentual (%)
Para Desenvolvimento de Conceitos	26	61,9
Para Fixar/Praticar Conteúdos	8	19
Como Motivação	6	14,3
Para auxiliar nas atividades	5	11,9
Como diversão/ Lazer	3	7,1
Não responderam	1	2,4

Tabela 4: Como os MDM são empregados

Através da Tabela 4 é possível perceber que a maioria dos professores alegou utilizar MDM para o desenvolvimento de conceitos ou para auxiliar na realização de atividades; o que vai ao encontro com o que a literatura tem colocado, ou seja, de se usar materiais deste tipo para auxiliar na construção e/ou na compreensão de conceitos. A preocupação com a compreensão dos conceitos é retratada, por exemplo, através do depoimento de P5, da escola PU1: "Utilizo esses materiais algumas vezes de acordo com o conteúdo proposto, outras após o término de alguma outra atividade. Antes, porém as crianças devem compreender o sentido e motivo de jogar e/ou manipular os materiais. Assim, procuro garantir com intenção condições adequadas para a constituição de vivências pelas crianças com os objetos trabalhados". Um número expressivo também apontou que utilizam MDM para fixar os conteúdos, isto é, como forma de concretizar a matéria já aprendida, colocando-a em prática, assim como forma de motivar os alunos tanto a participar das aulas quanto para perceberem como aplicar o conteúdo. Como expressa P16 da escola PA1: "São empregados como uma motivação que realizamos todo o início da aula para despertar o interesse e dar sequência aos conteúdos estudados. São utilizados também como estratégias para que o aluno se lembre de tudo o que foi estudado". Por fim, pode-se perceber que poucos associaram essa utilização como um momento de lazer ou descanso dos alunos.

A tabela 5 retrata as respostas quanto à percepção dos professores sobre se há ou não diferença na aprendizagem dos alunos quando os MDM são empregados.

O que sentem ao trabalhar com esse tipo de material		
	Utilizações	Percentual (%)
Que o aluno assimila melhor e mais fácil o conteúdo; com o material o aluno visualiza melhor a matemática e fica mais fácil de explicá-la	13	30,1
Torna útil a matemática no uso social	8	19
Desperta maior interesse dos alunos	7	16,7
Não responderam	5	11,9
Tornam as aulas mais criativas/dinâmicas	5	11,9
Favorecem o desenvolvimento de habilidades, tais como: concentração, atenção, percepção etc.	4	9,5
TOTAL	42	100

Tabela 5: O que sentem ao trabalhar com esse tipo de material

Na tabela 5 estão expressos os principais motivos pelos quais os professores dizem uitlizar MDM em suas aulas de matemática. Nesta, podemos perceber que a maioria dos professores acredita que os MDM são ferramentas que auxiliam na interpretação do conteúdo por parte do aprendiz, além de fazê-lo compreender a relação da matemática com seu cotidiano e encontrar assim uma utilidade para essa ciência. Como se vê na resposta de P16, da escola PA-1: "Trabalhando com esses materiais o conteúdo adquire um significado que vai auxiliar no processo de aprendizagem dos alunos. Quando inserimos jogos e material concreto em nossas aulas, ganhamos o aluno que vê um significado em aprender. Ele entende o valor que ela tem em seu dia a dia". Segundo P6 da escola PU1: "Com o material o aluno assimila o conteúdo com mais facilidade e melhor entendimento. Os alunos ficam bem mais motivados, pois eles adoram situações dinâmicas e que saem da rotina de lousa, caderno e professor."

Outros docentes também destacaram que os MDM tornam as aulas mais motivadoras, proporciona dinamismo nas aulas e favorece o trabalho do professor. De acordo com P42 da escola PA-6: "Favorece a motivação do aluno em aprender matemática, porque os materiais propiciam uma abordagem de maneira clara e dinâmica, favorecendo o trabalho do professor e sendo assim a compreensão do aluno. Um grupo de professores destacou também que o uso de MDM auxilia também no desenvolvimento de outras habilidades. Segundo P5, da escola PU-1: "Além dos conteúdos propostos as crianças adquirem habilidades de concentração, atenção, noção espaciais, lateralidade, entre outras. Além disso, percebe-se que as crianças aprendem à medida que atuam sobre os objetos (...)."

A tabela 6 apresenta dados em relação ao questionamento sobre se o uso de MDM favorece ou não a motivação do aluno em aprender matemática.

Sobre MDM favorecer ou não a motivação do aluno em aprender matemática		
	Utilizações	Percentual (%)
SIM	40	95,2
NÃO	1	2,4
Não responderam	1	2,4
TOTAL	42	100

Tabela 6: Sobre a motivação dos alunos

Pela tabela 6 percebemos que dos 42 professores que responderam ao questionário, o único que colocou crer que os MDM não são motivadores, alegou isso em função do número de alunos que geral se tem numa sala de aula. Para ele, quando esse número é grande, o efeito de se empregar MDM pode ser contrário ao proposto inicialmente (ou seja, ao desejado), podendo dar a impressão de bagunça ou descanso.

Dos outros 40 professores que concordaram que a utilização de MDM favorece a motivação em sala de aula, as justificativas estão postas na Tabela 7.

Porque usar MDM favorece a motivação		
	Utilizações	Percentual (%)
Tornam os alunos agentes construtores do conhecimento	11	27,5
Favorecem a aprendizagem	10	25,0
Dão significado ao conteúdo	10	25,0
Tornam a aula mais interessante	4	10,0
Os alunos aprendem brincando	3	7,5
É uma atividade diferenciada (sai da rotina)	1	2,4
TOTAL	40	100

Tabela 7: Porque usar MDM favorece a motivação

Analisando a Tabela 7, pode-se concluir que as respostas culminam para um mesmo objetivo, ou seja, os professores ao trabalharem com esse tipo de material em suas aulas percebem que os alunos são motivados pelo fato de se sentirem construtores do conhecimento, autores das suas descobertas. Isso torna a aula mais interessante, dá significado ao conteúdo e facilita a aprendizagem, tal como colocado por P22, da escola PA-3: “Ao trabalhar com MDM, a aprendizagem se torna mais atrativa, pois as crianças participam da construção do conhecimento”.

A tabela 8 apresenta os dados em relação a como os professores obtêm os MDM por eles utilizados:

Origem dos materiais		
	Frequência	Percentual (%)
A escola disponibiliza	30	39,47
Os alunos confeccionam	13	17,10
Material do professor	13	17,10
Os alunos levam	9	11,85
Tem no material do aluno	7	9,21
Através de representantes que visitam o colégio	2	2,63
A secretaria da educação disponibiliza	1	1,32
Redes de supermercado	1	1,32
TOTAL	76	100

Tabela 8: Como os materiais são obtidos

A maioria dos professores pega da própria escola os materiais com que trabalha ou obtém por meio dos alunos ou deles próprios. Como diz P25 da escola PA-3: “Existem poucos materiais, prefiro construir o material a ser trabalhado, durante a aula, pois assim os alunos participam mais”.

Em relação ao que os professores acham sobre os MDM existentes no mercado, obtivemos os dados colocados na Tabela 9:

Sobre os Materiais existentes no mercado		
	Frequência	Percentual (%)
São bons	20	37,73
Prefere confeccionar o material	14	26,41
São de difícil acesso	7	13,21
Faltam opções	7	13,21
Precisam ser adaptados	3	5,67
Há variedade	2	3,77
TOTAL	53	100

Tabela 9: Sobre os materiais existentes no mercado

Pelas respostas quanto a este item percebe-se que apesar da maioria dos professores acharem que os materiais existentes no mercado sejam bons, eles preferem confeccionar seus próprios materiais; um número considerável também apontou a falta de acessibilidade às novidades do mercado ou de opção (faltam novos materiais), tal como posto nas seguintes respostas: “São bons, porém gostaria de ter acesso a mais novidades” (P28, escola PA-3) e “Gosto dos materiais que tenho conhecimento, porém acho que faltam novos materiais nessa área” (P17, escola PA-1).

5. Considerações finais

Através dessa pesquisa pudemos observar que a maioria dos professores da Educação Básica afirma fazer uso de MDM em suas aulas de matemática e reconhecem a importância desse tipo de material no processo de ensino e aprendizagem de matemática, principalmente para o desenvolvimento dos conteúdos. Além disso, um número expressivo de professores salientou também a importância do MDM para fixar os conteúdos, ou seja, como forma de concretizar o conteúdo já aprendido, colocando-o em prática, assim como forma de motivar os alunos tanto a participar das aulas quanto a perceberem como aplicar o conteúdo. Para a maioria dos professores os MDM são ferramentas que auxiliam na interpretação do conteúdo por parte do aprendiz, além de fazê-lo compreender a relação da matemática com seu cotidiano e encontrar uma utilidade para essa ciência.

Assim, percebe-se que os professores indicam usar MDM para auxiliar os alunos na construção do conhecimento e/ou na em sua aplicação, pois dão significado aos conteúdos de matemática. Houve destaque também para outras habilidades e conhecimentos de âmbito mais gerais que podem ser adquiridos com a utilização dos MDM, tais como: concentração, atenção, percepção etc. Além disso, a maioria dos entrevistados concorda que os MDM favorecem a motivação do aluno em aprender, devido, principalmente, aos seguintes fatos: (i) atribui ao aluno um papel mais ativo, favorece a aprendizagem, dá significado ao conteúdo e torna a aula mais dinâmica, interessante e prazerosa.

Essas colocações vêm ao encontro do que tem sido apontado pelas pesquisas em relação à utilização dos MDM em sala de aula. Nessa direção, por exemplo, Souza e Oliveira (2010) ao falarem do desinteresse do aluno em aprender matemática aliado ao desânimo do professor em não ver suas aulas surtirem o efeito desejado, traz à tona a necessidade de algo diferente e, como alternativa, esses autores destacam a utilização de MDM. Eles ainda salientam que "(...) esses recursos podem, além de despertar o interesse dos alunos, fazer com que eles tenham uma maior interação com o conteúdo estudado." (Sousa & Oliveira, 2010, p. 2).

Percebe-se então que há uma grande necessidade de se trabalhar com materiais que fujam do contexto lousa e giz, principalmente nas aulas de matemática. Este fato é enfatizado pela literatura e também se fez nítido nesta pesquisa com a posição dos professores de Educação Básica que sentem a realidade das escolas dia a dia e expressam a necessidade de se contribuir para que a educação caminhe de acordo com a evolução de um mundo mais atrativo e dinâmico. Como mostra P6 da escola PU1, quando é questionado sobre a contribuição de MDM nas aulas de matemática: "Com o material o aluno assimila o conteúdo com mais facilidade e melhor entendimento. Os alunos ficam bem mais motivados, pois eles adoram situações dinâmicas e que saem da rotina de lousa, caderno e professor".

Por fim, observamos que apesar das inovações tecnológicas, que sem dúvida nenhuma, são importantes para o processo de ensino e aprendizagem em matemática, o uso dos MDM no processo de ensino e aprendizagem de matemática são ainda muito valorizados pelos professores, como forma de tornar a matemática mais próxima do real, mais palpável e melhor compreendida pelos alunos e comunidade em geral.

Agradecimentos: A autora agradece aos professores participantes desta pesquisa; à Pró-reitoria de Graduação da Universidade de São Paulo (Programa: ensinar com pesquisa) que possibilitou a coleta de dados mediante desenvolvimento de projeto de iniciação científica, que teve a participação da segunda autora deste trabalho.

6. Bibliografía

Araújo, I. R. O. (2000). *A utilização de lúdicos para auxiliar a aprendizagem e desmistificar o ensino da matemática*. Dissertação de Mestrado, Departamento de Engenharia de Produção, Universidade Federal de Santa Catarina, Santa Catarina, Brasil.

Ball, D. L. (1992). Magical hopes: manipulatives and the reform of math education. *American Educator*, 16(2), 14-18.

Brandalise, C.R., & Lubeck, M.(2007). O lúdico na educação matemática: um jogo da memória para ensino dos números racionais. In *IX ENEM: Encontro Nacional De Educação Matemática*, 9 (pp. 1-8). Belo Horizonte, Minas Gerais: SBEM.

Candeias, R.P.C.B.B. (2007). *Contributo para a história das inovações no ensino da matemática no primário:* João António Nabais e o Ensino da Matemática no Colégio Vasco da Gama. Dissertação (Mestrado em Educação Didática da Matemática) – Departamento de Educação, Universidade de Lisboa Faculdade de Ciências, Lisboa, Portugal.

Farias, S. A. D. (2010). Usando materiais manipuláveis no ensino superior. In X *ENEM: Encontro Nacional de Educação Matemática*, 10 (pp. 1-5). Salvador, Bahia: SBEM.

Gil, A. (2008). *Métodos e Técnicas de Pesquisa Social*. São Paulo: Atlas.

Lüdke, M., & André, M. E. D. A.(1986). *Pesquisa em educação: Abordagens qualitativas.* São Paulo: EPU.

Matos, J. M., & Serrazina, M. L. (1996). Didáctica da Matemática. Lisboa: Universidade Aberta.

Meneghetti, R.C.G., & Nunes, A.C.A. (2006). Aplicação de uma Proposta Pedagógica no Ensino dos Números Racionais. *Educação Matemática em Revista* (Revista da Sociedade Brasileira de Educação Matemática), 13(20/21), 77-86.

Micotti, M. C. O. O. (1999). Ensino e as propostas pedagógicas. In Bicudo, M. A. V. (Org.). *Pesquisa em educação matemática: concepções e perspectivas* (pp. 153-167). São Paulo: UNESP.

Ministério da Educação. (1998). *Parâmetros curriculares nacionais: matemática. Secretaria de Educação Fundamental*. Brasília, DF: MEC/ SEF.

Nacarato, A. M. (2004-2005). Eu trabalho primeiro no concreto. *Revista de Educação Matemática*, 9(9), 1-6.

Secretaria da Educação. (1989). *Proposta curricular para o ensino de matemática: 2º grau*. (2a ed.). Coordenadoria de Estudos e Normas Pedagógicas. São Paulo: SE/CENP.

Secretaria da Educação. (1994). *Proposta curricular para o ensino de matemática: 2º grau.* (3a ed.). Coordenadoria de Estudos e Normas Pedagógicas. São Paulo: SE/CENP.

Sousa, G. C., & Oliveira, J. D. S. (2010). O uso de materiais manipuláveis e jogos no ensino de matemática. In *Encontro Nacional de Educação Matemática*, 10 (pp. 1-11). Salvador, Bahia: SBEM.

Sowell, E. J. (1989). Effects of Manipulative Materials in Mathematics Instruction. *Journal for Research in Mathematics Education*, 20(5), 498-505.

Turrioni, A. M. S., & Perez, G. (2006). Implementando um laboratório de educação matemática para apoio na formação de professores. In Lorenzato, S. (Org.). *O laboratório de ensino de matemática na formação de professores* (pp. 57-76). Campinas: Autores Associados.

Uttal, D. H., Scudder, K. V., & Deloache, J. S. (1997). Manipulatives as symbols: a new perspective on the use of concrete objects to teach mathematics. *Journal of Applied Developmental Psychology*, 18(1), 37-54.

Renata Cristina Geromel Meneghetti: doutora em Educação Matemática. Docente da Universidade de São Paulo (USP/Brasil). Professora colaboradora junto ao Programa de Pós-Graduação em Educação para a Ciência da FC (Faculdade de Ciências) da UNESP (Universidade Estadual Paulista "Júlio de Mesquita Filho). rcgm@icmc.usp.br

Marina Ferruci Bega: Professora da Educação Básica. Cursou licenciatura em ciências exatas (com habilitação em Matemática pela Universidade de São Paulo (USP/Brasil). marinabega@hotmail.com

Anexo

Questionário aplicado a professores da educação básica ou questionário

1. Você utiliza de materiais didáticos manipuláveis em suas aulas? Quais e quando você faz uso desses materiais? Se não utiliza, porquê?

2. De que maneira eles são empregados?

3. Quais as diferenças que você sente ao trabalhar com, ou sem, estes materiais? Você acha que o uso do mesmo favorece ou desfavorece a motivação do aluno em aprender matemática? Por quê?

4. Em quais situações você acha válido o uso de materiais desse tipo? Cite exemplos.

5. O que você acha dos materiais didáticos existentes no mercado? Atende a suas necessidades?

6. Como você obtém os materiais didáticos (manipuláveis) que usa para ensinar conteúdos matemáticos?

7. Gostaria de acrescentar mais algum comentário?

UNIÓN
REVISTA IBEROAMERICANA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA
www.fisem.org/web/union
http://asenmacformacion.com/ojs/index.php/union/index

ISSN: 1815-0640
Número 45. Marzo 2016
Página 242-268

MATLAB: Una herramienta para la didáctica del Método de los Elementos Finitos

Emilio Martínez-Pañeda

Fecha de recepción: 20/10/2015
Fecha de aceptación: 19/03/2016

Resumen	El método de los elementos finitos (MEF) es a día de hoy el método numérico más utilizado en aplicaciones de ciencia e ingeniería. Sin embargo, el desarrollo de procedimientos efectivos para la enseñanza del mismo continúa siendo un desafío para los docentes de todo el mundo. En el presente trabajo se plantea el uso del software matemático MATLAB para el desarrollo de códigos con orientación docente. Los ejemplos presentados revelan la idoneidad del enfoque adoptado para reducir la brecha existente entre el sustento matemático del método y la sencillez de uso de los potentes programas comerciales. **Palabras clave**: Método de los Elementos Finitos, didáctica, MATLAB
Abstract	The finite element method (FEM) is nowadays the most widely used numerical method in science and engineering applications. However, the development of effective ways to teach it remains a challenge for teachers worldwide. In the present work, the use of the mathematical software MATLAB is proposed for the development of teaching-oriented codes. The examples presented reveal the suitability of the suggested approach to close the gap between the mathematical theory of the method and the ease of use of the powerful commercial programs. **Keywords**: Finite Element Method, teaching, MATLAB
Resumo	O método dos elementos finitos (FEM) é hoje o método numérico mais amplamente utilizado em aplicações científicas e de engenharia. No entanto, o desenvolvimento de maneiras eficazes de ensinar continua a ser um desafio para os professores em todo o mundo. No presente trabalho, é proposta a utilização do software MATLAB para o desenvolvimento de códigos orientada para o ensino. Os exemplos apresentados revelam a aptidão da abordagem sugerida para fechar o espaço entre a teoria matemática do método e a facilidade de utilização dos programas comerciais. **Palavras-chave:** Método dos elementos finitos, Ensino, MATLAB

1. Introducción: La docencia del Método de los Elementos Finitos

Desarrollado en la década de los 60 para el análisis de estructuras, el método de los elementos finitos (MEF) se ha convertido en la herramienta computacional más utilizada en aplicaciones de ciencia e ingeniería, extendiendo su uso más allá del análisis de solicitaciones tensionales para abarcar un amplio rango de áreas de conocimiento, que van desde el análisis de vibraciones hasta la transferencia de calor, pasando por el flujo de fluidos o los campos electromagnéticos, entre otras (ver, p. ej., Martínez-Pañeda y Gallego, 2015, Martínez-Pañeda y Betegón, 2015, Martínez-Pañeda y Niordson, 2015).

El MEF es un método numérico general para la aproximación de soluciones de ecuaciones diferenciales parciales. A grandes rasgos, el proceder del método radica en la división del dominio, cuerpo o estructura en elementos o parcelas de reducido tamaño (elementos finitos) en los que se define la variable a calcular y sobre los que se aplica la aproximación. El procedimiento implica la caracterización y correspondiente definición del comportamiento de cada elemento por separado y el posterior ensamblaje de los mismos, obteniendo una solución aproximada del comportamiento global del sistema discretizado (Oñate, 1995).

De manera que la obtención, en determinadas aplicaciones, de una solución razonablemente precisa mediante el MEF conlleva la resolución de una enorme cantidad de ecuaciones diferenciales y en consecuencia, un uso efectivo y práctico del método está ligado al uso de ordenadores. El vertiginoso desarrollo de la tecnología informática ha traído consigo una rápida popularización del MEF en la industria y una extensa proliferación de programas comerciales con capacidad para modelizar geometrías complejas y resolver mediante el MEF un sinfín de problemas prácticos de ingeniería. De manera que un profundo conocimiento del MEF se postula a día de hoy como indispensable para cualquier ingeniero y en consecuencia el análisis por elementos finitos es ya objeto de estudio en casi la totalidad de las carreras técnicas en España y en el resto del mundo.

Sin embargo, el desarrollo de procedimientos efectivos para la enseñanza del MEF continúa siendo un desafío para los docentes (Kosasih, 2010). El proceder habitual en la docencia de la asignatura consiste en combinar las clases teóricas en el aula con sesiones de prácticas en ordenador. Siendo usual en estas últimas el uso de uno o varios de los programas comerciales de elementos finitos más populares (ABAQUS, ANSYS, etc.), a los que tienen acceso con licencia educativa muchas universidades. Este software comercial posee una interfaz de usuario muy sencilla de entender y manejar, lo que trae consigo una rápida familiarización del alumnado con los programas. Sin embargo este hecho, al contrario de lo que pudiera parecer, se transforma en numerosas ocasiones en un inconveniente para la docencia de la asignatura. Y es que uno de los principales obstáculos observados durante la docencia del método radica en la fuerte brecha existente entre la sencillez de uso de los programas comerciales y la teoría matemática del MEF, ya que el asequible manejo del software comercial de elementos finitos permite al usuario desarrollar con éxito numerosos cálculos sin haber adquirido previamente los conocimientos de base del método. Así, en vista de la dificultad intrínseca al aprendizaje de un método con una fuerte carga matemática, los estudiantes tienden a elegir el camino más fácil, rehuyendo en lo posible el estudio del sustento matemático del MEF y adquiriendo vertiginosamente el conocimiento del uso del software comercial disponible.

Si este comportamiento no se remedia mediante los métodos de evaluación pertinentes, muchos estudiantes de ingeniería asumen la lógica errónea de estar capacitados para realizar cálculos por medio del MEF en sus futuros centros de trabajo por el hecho de poseer la habilidad de manejar correctamente el software comercial de elementos finitos sin comprender el procesamiento de los datos que realiza el mismo. Debido a que sólo un profundo conocimiento de la teoría que sustenta el MEF permite garantizar la validez de los resultados obtenidos y su posterior utilización en un diseño y dimensionamiento seguro, es necesario descubrir nuevas herramientas de docencia que ayuden a reducir la brecha existente entre el fundamento teórico del MEF y la cada día más sencilla interfaz de usuario que plantean los programas comerciales. Y es que aunque los métodos numéricos relacionados con el análisis por elementos finitos han sido desarrollados, investigados y discutidos en profundidad, las técnicas de enseñanza del MEF no han recibido aún la atención necesaria. En un primer momento varios autores (Zecher, 2002; Jolley, Rencis, & Grandlin, 2003) investigaron al respecto del enfoque más apropiado para la docencia del MEF en el contexto de asignaturas relacionadas con el estudio de la mecánica de los sólidos o los materiales, más tradicionales en los planes de estudio de las ingenierías. Sin embargo, debido a la rápida expansión de aplicaciones del MEF, la comunidad educativa ha adoptado un claro consenso al respecto de la necesidad de asignar a la docencia del MEF un espacio propio.

2. MATLAB como herramienta docente

Habida cuenta de que para una aplicación práctica del MEF es imprescindible el uso de ordenadores, la docencia del método debe obligatoriamente incluir el manejo de programas informáticos que basen sus cálculos en el MEF. En esa línea, varias propuestas han surgido en la comunidad académica. Así, mientras algunos autores se inclinan por la docencia mediante software comercial de elementos finitos como ANSYS (Earley, 1998; Backer, Capece, & Lee, 2001), ALGOR (Howard, Musto, & Prantil, 2001; Logue & Hall, 2001), COSMOS (Pike, 2001) o Pro/MECHANICA (Lissenden, Wagle, & Salamon, 2002), otros apuestan por el uso de programas de algebra computacional como Maple (Connell, Blyth, May, & Zorzan, 1999) o Mathematica (Jiang, & Wang, 2008), e incluso algunos docentes han recurrido a la utilización de las hojas de cálculo de Microsoft Excel (Teh, & Morgan, 2005).

Como ya se ha resaltado, los futuros profesionales de la ingeniería deben ser capaces no sólo de obtener resultados por medio de software comercial, sino de conocer los detalles de la formulación matemática y las herramientas numéricas de cálculo que utilizan estos códigos. Los estudiantes deben tener la oportunidad de acceder al código fuente, lo que no es posible en los programas comerciales, que actúan como cajas negras. O, mejor aún, deben ser capaces de desarrollar sencillos códigos de elementos finitos que sirvan de nexo de unión entre la formulación matemática de las clases teóricas y la aplicación práctica. Para ello, el software matemático MATLAB es la herramienta más apropiada.

MATLAB es un programa de cálculo numérico orientado a matrices con un lenguaje de programación propio (lenguaje M). Su capacidad para manipular matrices y resolver ecuaciones matriciales hace del mismo un instrumento idóneo para la implementación y desarrollo de un código de elementos finitos. MATLAB se emplea en más de 5000 universidades a lo largo del mundo y su creciente popularidad y versatilidad hacen que sea utilizado en numerosas asignaturas de las carreras de ciencia e ingeniería. Esta circunstancia facilita en gran medida la tarea docente, ya que los alumnos se han familiarizado previamente con el software y su lenguaje de programación.

En los últimos años se han publicado numerosos trabajos de investigación que emplean el paquete de software MATLAB para el análisis por elementos finitos (Alberty, Carstensen, Funken, & Klose, 2002) y el desarrollo de mejoras en las prestaciones del programa con el objetivo de reducir el tiempo de cálculo mediante el MEF ha sido una constante en la comunidad científica (Rahman, & Valdman, 2013). Existen varios libros publicados dedicados exclusivamente al desarrollo de códigos de elementos finitos en el software matemático MATLAB (Kwon, & Bang, 1996; Kattan, 2007; Ferreira, 2009; Baaser, 2010), cuyas características se han tenido en consideración en la elaboración del presente código, aunque con el objetivo de adecuar el mismo a la didáctica del método, éste difiere significativamente de todos los trabajos citados.

En el presente artículo el código de elementos finitos desarrollado se emplea para resolver mediante diferentes perspectivas un sencillo problema de cálculo estructural que servirá para ilustrar las capacidades docentes del uso de MATLAB en la enseñanza del MEF. Así, por medio de elementos finitos lineales y cuadráticos se obtienen los campos de tensiones y desplazamientos de una barra a tracción de sección constante empotrada en un extremo que está sometida a una carga uniformemente distribuida. El código se ha implementado en la versión 8 de MATLAB (R2012b) y para facilitar una mejor comprensión y reutilización del mismo se muestran íntegramente en los apéndices los códigos correspondientes a cada enfoque y se citan y detallan a continuación los aspectos más relevantes de los mismos. A medida que se resuelve el problema mediante diferentes planteamientos se van introduciendo de forma progresiva diferentes características intrínsecas al método, de manera que el código no está planteado como un instrumento para resolver problemas estructurales reales mediante el MEF sino como una herramienta docente del mismo. A diferencia del primer ejemplo, que ha sido implementado en versiones anteriores de MATLAB con éxito, en el segundo caso es necesario utilizar una versión actualizada del programa, con el fin de evitar el error de software que se produce en el comando MuPAD intrínseco a las versiones anteriores de MATLAB. El uso de MATLAB como herramienta de enseñanza requiere, como es obvio, de un conocimiento previo del manejo del programa por parte de los estudiantes. Sin embargo, esto no suele suponer un problema, ya que la utilización de MATLAB es habitual en las clases prácticas de las asignaturas relacionadas con el cálculo numérico de los primeros cursos de las carreras técnicas. Y en cualquier caso, para abordar plenamente los problemas que aquí se plantean sólo sería necesario adquirir unas nociones básicas de su uso, que podrían instruirse sin dificultades en una clase introductoria.

3. Planteamiento del problema

La configuración analizada se muestra en la Figura 1. La barra tiene una longitud L de 4 metros, está empotrada en el extremo x=0 y está sometida a una carga distribuida de s = 1000 N/m a lo largo del eje x. La sección transversal es constante con una superficie de A=0.5 m^2 y el módulo elástico tiene un valor de E = 5 MPa.

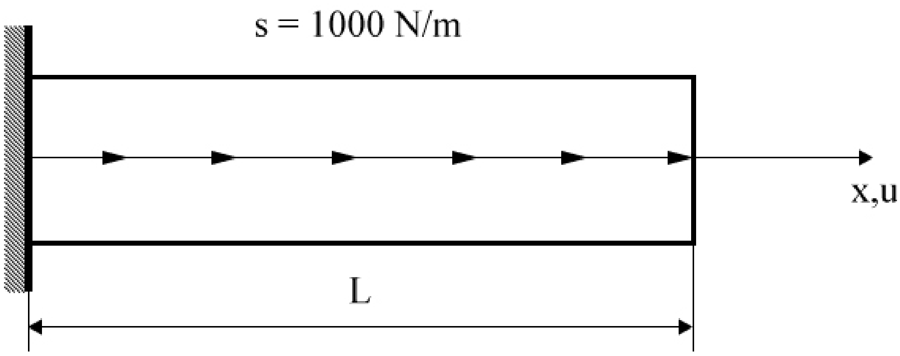


Figura 1. Barra de sección constante empotrada en un extremo sometido a una carga uniformemente distribuida.

3.1. Ejemplo 1: Elementos lineales

En el primer planteamiento del problema la barra se discretiza mediante cuatro elementos lineales de tipo barra con el objetivo de exponer el ensamblaje matricial característico del método y los campos de desplazamientos y tensiones calculados mediante el MEF se comparan a posteriori con la solución analítica. Este sencillo ejemplo permitirá al alumno comprender la formulación matricial del MEF y familiarizarse con las etapas de pre-proceso, proceso y post-proceso intrínsecas al método y al proceder del software comercial. La versión completa del código con comentarios se puede encontrar en el Apéndice 1. Es preciso comentar alguno de los aspectos relacionados con la programación que no han sido suficientemente detallados en el código. En la matriz *Nodos_elemento* se definen las conexiones entre elementos. Cada fila se corresponde con un elemento y en cada columna se especifican los nodos que forman parte del mismo (línea 23, Apéndice 1).

En el vector *Coord_nodos* se almacenan las coordenadas de cada nodo en el espacio. En este caso se sitúa el origen del eje x en el empotramiento de la barra y se asigna a cada elemento una longitud de un metro (línea 31, Apéndice 1). Se definen el vector de desplazamientos (*Desplazamientos*), el vector de fuerzas (*Fuerza*) y la matriz de rigidez (*Rigidez*). Asimismo se inicializan todos ellos mediante la función *zeros* de Matlab, lo que permite agilizar el proceso de cálculo del programa en los bucles (líneas 40-42, Apéndice 1).

Para facilitar las operaciones entre matrices es conveniente definir un vector con los grados de libertad prescritos en el sistema global (*GDL_prescritos*), que a posteriori se descuentan del número total de grados de libertad del sistema para obtener un vector que almacene los grados de libertad activos en el mismo (*GDL_libres*). Esta operación se lleva a cabo mediante la función de MATLAB *setdiff*, una herramienta especialmente apropiada para la diferencia de vectores (líneas 50-54, Apéndice 1).

Se introduce la carga distribuida sobre la barra en el sistema en base al vector de fuerzas nodales equivalentes. Para ello es necesario programar un bucle del tipo *for/end* que distribuya el efecto de la carga en los nodos, quedando ésta almacenada en el vector de fuerzas (líneas 60-67, Apéndice 1). Una vez discretizado el problema e impuestas las condiciones de contorno finaliza la parte correspondiente al pre-procesador y se inicia la etapa de cálculo o procesador, donde se obtienen la matriz de rigidez, los desplazamientos nodales y las tensiones en cada elemento. Por medio de un bucle del tipo *for/end* se calculan la matrices de rigidez de cada elemento y se ensamblan en la matriz de rigidez global. Para obtener la matriz de rigidez de cada elemento es necesario almacenar los grados de libertad (*GDL_elemento*) y la longitud (*Lon*) del mismo (líneas 75-83, Apéndice 1). La matriz de rigidez de un elemento lineal de tipo barra es función únicamente de la geometría de la misma (*Lon, A*) y de sus propiedades mecánicas (*E*). De manera que en el presente ejemplo, donde el módulo de Young y la sección de la barra son constantes, la matriz de rigidez de cada elemento se corresponde con la siguiente expresión:

$$K^{(e)} = \left(\frac{EA}{Lon}\right)^{(e)} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \tag{1}$$

Las matrices de rigidez de cada elemento, que han sido calculadas según (1) y que tienen un tamaño 2x2, se distribuyen para formar la matriz de rigidez global de acuerdo con el vector *GDL_elemento*. El proceso de ensamblaje se lleva a cabo mediante la siguiente línea de código: (líneas 80-81, Apéndice 1)

Rigidez(GDL_elemento,GDL_elemento)=...

Rigidez(GDL_elemento,GDL_elemento)+EA(e)[1 -1;-1 1];*

De manera que para este caso, donde la barra se ha discretizado mediante cuatro elementos finitos, la matriz de rigidez global toma la siguiente forma:

$$K = \begin{bmatrix} \left(\frac{EA}{Lon}\right)^{(1)} & -\left(\frac{EA}{Lon}\right)^{(1)} & 0 & 0 & 0 \\ -\left(\frac{EA}{Lon}\right)^{(1)} & \left[\left(\frac{EA}{Lon}\right)^{(1)} + \left(\frac{EA}{Lon}\right)^{(2)}\right] & -\left(\frac{EA}{Lon}\right)^{(2)} & 0 & 0 \\ 0 & -\left(\frac{EA}{Lon}\right)^{(2)} & \left[\left(\frac{EA}{Lon}\right)^{(2)} + \left(\frac{EA}{Lon}\right)^{(3)}\right] & -\left(\frac{EA}{Lon}\right)^{(3)} & 0 \\ 0 & 0 & -\left(\frac{EA}{Lon}\right)^{(3)} & \left[\left(\frac{EA}{Lon}\right)^{(3)} + \left(\frac{EA}{Lon}\right)^{(4)}\right] & -\left(\frac{EA}{Lon}\right)^{(4)} \\ 0 & 0 & 0 & -\left(\frac{EA}{Lon}\right)^{(4)} & \left(\frac{EA}{Lon}\right)^{(4)} \end{bmatrix}$$

Una vez calculada la matriz de rigidez global es posible resolver el sistema global de ecuaciones intrínseco al método de los elementos finitos: $K \cdot f = a$. Siendo K la matriz de rigidez global, f el vector de fuerzas global y a los desplazamientos nodales.

Si consideramos un sistema lineal tal que $A \cdot X = B$, el vector solución X puede ser obtenido en MATLAB empleando la barra inversa (\): X=A\B. En consecuencia, se aplica el mismo sistema para obtener los desplazamientos en cada nodo de la barra (líneas 87-89, Apéndice 1). A diferencia del resto de operaciones del código, en la obtención de los desplazamientos no se ha añadido un punto y coma (;) al final de la instrucción, éste se emplea para indicar a MATLAB que realice el cálculo sin presentar en pantalla el procedimiento o el resultado. De manera que se ordena al programa que muestre en pantalla los desplazamientos obtenidos en cada nodo. A partir de los valores de los desplazamientos nodales es posible calcular otros parámetros de interés, como las tensiones en cada elemento, que serán almacenadas en el vector *Tensiones*. Éstas se calculan a partir de las deformaciones, que a su vez se calculan a partir de los desplazamientos nodales (líneas 93-101, Apéndice 1).

Una vez que se ha obtenido toda la información que se necesitaba a partir de los desplazamientos nodales finaliza la etapa de cálculo o procesador y da paso a la etapa de visualización o post-procesador, donde se muestran con detalle los resultados obtenidos. Esta fase es muy importante cuando se resuelven geometrías complejas y el software comercial de elementos finitos incluye poderosas herramientas para visualizar los resultados obtenidos. En el presente ejemplo, al ser una sencilla configuración unidimensional, la solución analítica es conocida y en consecuencia existe la posibilidad de establecer comparaciones con la misma. Así, mediante la herramienta *plot* se representan gráficamente los desplazamientos calculados mediante el MEF y sobre la misma figura se sobreimprime la solución analítica. Es preciso utilizar el comando *hold on* para que la nueva representación gráfica se realice sobre la misma figura (líneas 111-122, Apéndice 1). De igual forma, se representan gráficamente en una nueva figura los campos tensionales obtenidos analíticamente y por medio del MEF (líneas 126-145, Apéndice 1).

Las gráficas obtenidas para el campo de desplazamientos y el campo de tensiones se muestran en las figuras 2 y 3 respectivamente. Los resultados se han representado de forma sencilla y funcional con el objetivo de eliminar obstáculos en la docencia, pero MATLAB ofrece un amplio abanico de herramientas para mejorar y complementar la estética y el detalle de las gráficas. Como se puede apreciar, se representan los valores obtenidos para los desplazamientos (Figura 2) y las tensiones (Figura 3) a partir de los datos del problema planteado en función de la posición en la barra. La solución obtenida mediante el MEF se reproduce mediante una línea roja discontinua, donde la posición de los nodos viene señalizada por pequeñas circunferencias del mismo color. Mientras que la solución exacta viene representada por una línea continua de color azul, tal y como se describe en la leyenda de ambas imágenes.

En la Figura 2 se observa que los desplazamientos nodales coinciden con los valores exactos y que, de acuerdo con la elección de elementos finitos del tipo lineal, en el interior de los mismos los desplazamientos varían linealmente aproximando razonablemente bien la solución analítica.

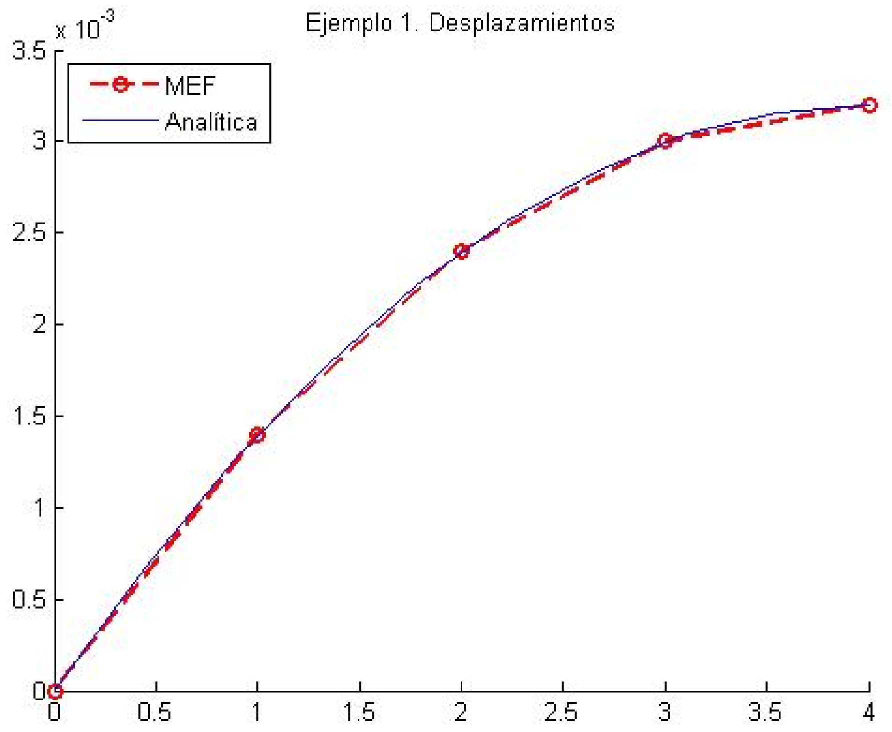


Figura 2. Desplazamientos obtenidos en función de la posición en el Ejemplo 1.

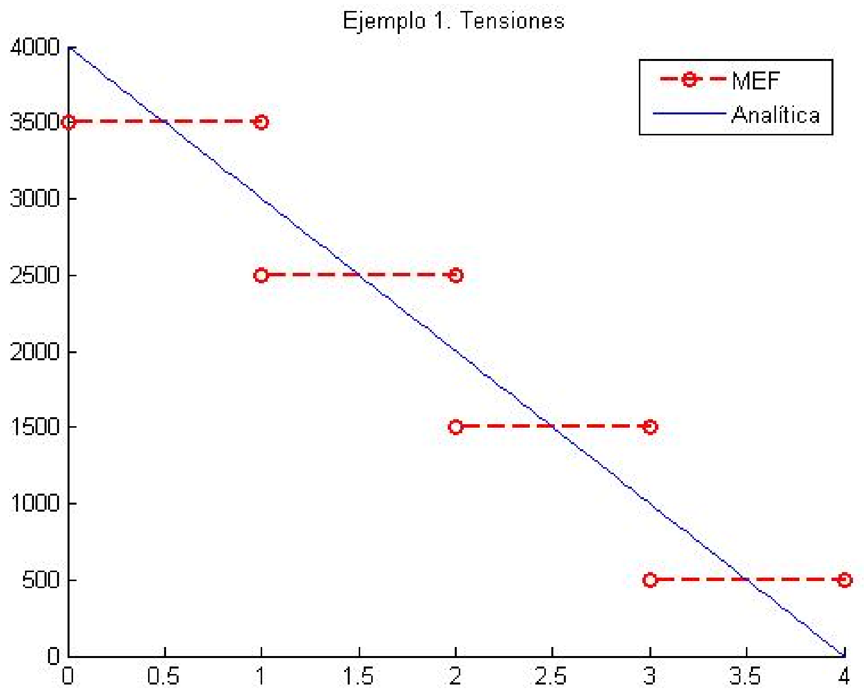


Figura 3. Tensiones obtenidas en función de la posición en el Ejemplo 1.

El alumno podrá apreciar cómo la compatibilidad se satisface siempre en los nodos y en consecuencia existe un campo de desplazamientos continuo. Sin embargo, en la aproximación del campo tensional de la Figura 3 se aprecian mayores diferencias entre la solución exacta y la obtenida mediante el MEF y por consiguiente es conveniente discretizar la barra con un mayor número de elementos para reducir el error en el cálculo del esfuerzo axil. El alumno podrá observar que en el MEF, generalmente, no existe equilibrio de tensiones en los nodos. Y es que las tensiones en los nodos se obtienen en cada elemento a partir de los valores de los desplazamientos en sus nodos y en consecuencia, las tensiones en un nodo común a varios elementos pueden tomar valores diferentes. De manera que a partir del presente ejemplo el alumno rápidamente podrá deducir que, al obtenerse las deformaciones y tensiones a partir de las derivadas del campo de desplazamientos, los errores en la aproximación de los campos de deformaciones y tensiones serán siempre superiores.

Además, el presente ejemplo permite modificar el mallado del problema con facilidad, requiriendo únicamente modificar las variables *Coord_nodos*, *Nodos_elemento* y *L*. Lo que permitirá al alumno obtener la solución mediante el MEF para diferentes discretizaciones, observando como la solución obtenida se aproxima cada vez más a la solución exacta a medida que aumenta el número de elementos empleado. Pero sobre todo, el presente ejercicio permitirá al alumno familiarizarse con las etapas básicas del MEF. Esto es:

- Discretizar el problema en una serie de elementos finitos conectados entre sí en los nodos (mallado).
- Calcular la matriz de rigidez $\left(K^{(e)}\right)$ y el vector de fuerzas nodales $\left(f^{(e)}\right)$ para cada elemento del sistema.
- Ensamblar y resolver la ecuación matricial de equilibrio global $(K \cdot f = a)$ para, una vez impuestas las condiciones de contorno, calcular los valores de los desplazamientos en los nodos.
- Calcular los parámetros que resulten de interés en cada caso a partir de los desplazamientos nodales obtenidos.
- Visualizar los resultados con claridad para tomar decisiones acertadas con respecto al diseño del componente analizado.

Una realización satisfactoria del ejemplo por parte del alumno le ayudará a comprender la estructura básica del método y esto le permitirá desarrollar el código para dar respuesta a problemas más complicados. En el segundo enfoque de este problema se introduce otro tipo de elemento finito a la par que se abordan dos aspectos claves del método que no se han considerado en el primer caso: la formulación isoparamétrica y la integración numérica de Gauss-Legendre.

3.2. Elementos cuadráticos

En este segundo enfoque la barra se discretiza mediante un solo elemento cuadrático de tipo barra con el objetivo de reflejar la importancia de una elección apropiada del grado de distribución de los desplazamientos en los elementos mediante el uso de diferentes funciones de interpolación o forma. Asimismo, este ejemplo permitirá al alumno familiarizarse con las transformaciones isoparamétricas intrínsecas al MEF y comprender el uso de la integración numérica más común en los análisis por elementos finitos: la cuadratura de Gauss-Legendre. Al igual que en el caso anterior, los campos de desplazamientos y tensiones calculados mediante el MEF se comparan con la conocida solución analítica.

La estructura del código apenas difiere de la concerniente al primer ejemplo, con la intención de que el programa pueda ser empleado, con la introducción de pequeños cambios, como herramienta docente para la resolución de una amplia variedad de ejercicios. A pesar de que las características del código se han comentado convenientemente en su interior, es preciso explicar con detalle algunas partes del mismo que no son comunes al primer ejemplo y sobre las que es fundamental hacer especial énfasis. En lo que a la etapa del pre-proceso se refiere, el único aspecto que difiere significativamente radica en la introducción en el vector de fuerzas del efecto de la carga distribuida sobre la barra. De acuerdo con los conceptos de equilibrio del Principio de los Trabajos Virtuales (PTV) se obtiene que, en un elemento aislado, cualquier fuerza T que actúe sobre un contorno Γ se puede expresar tal que:

$$F = \int_{\Gamma^e} N^T \cdot T \cdot d\Gamma^e \qquad (2)$$

Siendo N^T la transformada de la matriz de funciones de forma. Las funciones de forma son unas funciones de interpolación que toman el valor 1 en el nodo de referencia y 0 en el resto, de manera que las variables a calcular se pueden obtener como la suma de los productos de estas funciones de interpolación o forma por los valores de la función en los nodos. Así, por medio de la interpolación, la distribución de la variable a calcular (por ejemplo, el desplazamiento) queda definida en todo el dominio mientras que el problema se ha reducido a un número finito de grados de libertad. Las funciones de forma conocidas se corresponden con formas geométricas muy sencillas, pero en la práctica la geometría de los elementos en los que se divide el dominio es más compleja. Para transformar estos perfiles complejos en las formas simples conocidas se emplea la formulación isoparamétrica. Con el objetivo de no alterar en exceso la base del código y para resaltar su relevancia, la transformación isoparamétrica del presente ejemplo se lleva a cabo en una función de MATLAB que se ha programado por separado y que recibe el nombre de *TransIso*. Esta función recibe la posición de los nodos en el espacio (*Coord_nodos*) y entrega al código principal el vector de funciones de forma (*Fforma*), el determinante (*detJacobiano*) y el inverso (*invJacobiano*) del Jacobiano y la coordenada natural (xi) correspondiente a la coordenada cartesiana x. Lo que nos permite obtener el vector de Fuerzas a partir de la expresión (2):

$$F = \int_{\Gamma^e} N^T \cdot T \cdot d\Gamma^e = \int_L N^T \cdot s \cdot dx = \int_{-1}^{+1} \begin{bmatrix} 0.5 \cdot \xi \cdot (\xi - 1) \\ 1 - \xi^2 \\ 0.5 \cdot \xi \cdot (\xi + 1) \end{bmatrix} \cdot s \cdot |J| d\xi \qquad (3)$$

Siendo s el valor de la carga distribuida, ξ la coordenada natural y $|J|$ el determinante del Jacobiano. De manera que el vector de fuerzas nodales equivalentes se calcula en el código directamente de acuerdo con (3) y se almacena, al igual que en el primer ejemplo, en el vector *Fuerza*. La integral se resuelve directamente por medio del operador *int* de MATLAB (líneas 62-73, Apéndice 2). La transformación isoparamétrica se lleva a cabo en la función *TransIso* (líneas 1-18, Apéndice 3). Y, al igual que en el código principal, es preciso hacer hincapié en algunos aspectos de la misma. La transformación isoparamétrica que se pretende llevar a cabo se describe en la Figura 4. De acuerdo con la notación empleada en la misma, las funciones de forma en el caso de un elemento cuadrático unidimensional, que han sido obtenidas mediante interpolaciones de Lagrange, son las siguientes:

$$N_1(\xi) = \frac{1}{2}\xi(\xi - 1) \quad ; \quad N_2(\xi) = (1 - \xi)(1 + \xi) \quad ; \quad N_3(\xi) = \frac{1}{2}\xi(\xi + 1)$$

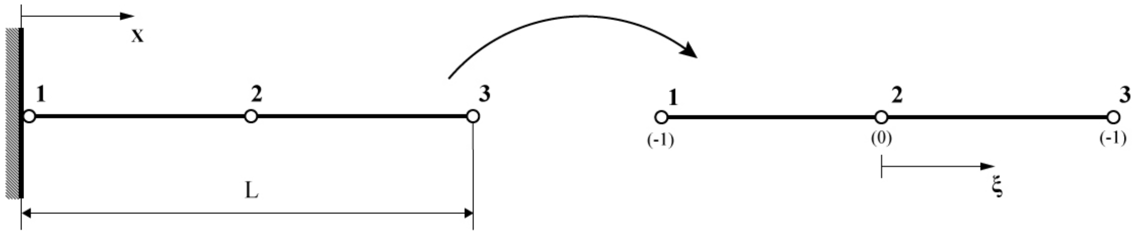


Figura 4. Transformación isoparamétrica para el problema planteado en el Ejemplo 2.

De manera que, definiendo *xi* como variable simbólica por medio del operador *syms*, las funciones de forma se almacenan en el vector *Fforma*. Y, de acuerdo con la formulación isoparamétrica, la matriz Jacobiano que define la transformación de coordenadas $x \rightarrow \xi$ en un elemento unidimensional es: $dx = J^{(e)} \cdot d\xi$. Y así, tal y como se procede en la función, el determinante del Jacobiano (*detJacobiano*) se obtiene fácilmente despejando en la expresión (4). Las derivadas presentes en la misma se resuelven por medio del comando de MATLAB *diff*.

$$x = N_1 \cdot x_1 + N_2 \cdot x_2 + N_3 \cdot x_3 \Rightarrow \frac{dx}{d\xi} = \frac{dN_1}{d\xi} \cdot x_1 + \frac{dN_2}{d\xi} \cdot x_2 + \frac{dN_3}{d\xi} \cdot x_3 \qquad (4)$$

Siguiendo con el análisis del código, se da paso a la etapa del procesador, donde se calculan la matriz de rigidez, los desplazamientos en los nodos y las tensiones en el elemento. Para no modificar en exceso el esqueleto del programa, la matriz de rigidez (*Rigidez*) se obtiene, al igual que en el primer ejemplo, por medio de un bucle del tipo *for/end*. Sin embargo en esta ocasión su uso no es necesario, ya que no hace falta realizar el proceso de ensamblaje al haber discretizado el dominio con un solo elemento. De acuerdo con las relaciones de equilibrio del PTV la matriz de rigidez de un elemento en un volumen Ω se puede obtener en base a:

$$K^{(e)} = \int_{\Omega^e} B^T \cdot D \cdot B \cdot d\Omega^e \qquad (5)$$

Donde K es la matriz de rigidez, D la matriz constitutiva y B la matriz de deformación del elemento. En el presente caso, aplicando la transformación isoparamétrica y teniendo en cuenta que el área y el módulo de Young son constantes en todo el elemento, la expresión (5) quedaría tal que:

$$K^{(e)} = \int_{\Omega^e} B^T \cdot D \cdot B \cdot d\Omega^e = EA \int_L B^T \cdot B \cdot dx = EA \int_{-1}^{1} B^T \cdot B \cdot |J| d\xi \qquad (6)$$

La matriz de deformación del elemento relaciona el vector deformación con el vector de desplazamientos nodales, y en consecuencia, para un elemento de tres nodos se corresponde con la siguiente expresión:

$$B = \left[\frac{dN_1}{dx}, \frac{dN_2}{dx}, \frac{dN_3}{dx}\right] \tag{7}$$

De manera que aplicando la transformación isoparamétrica quedaría tal que:

$$B = \left[\frac{dN_1}{dx}, \frac{dN_2}{dx}, \frac{dN_3}{dx}\right] = \left[\frac{dN_1}{d\xi}, \frac{dN_2}{d\xi}, \frac{dN_3}{d\xi}\right] \cdot \frac{d\xi}{dx} = \left[\frac{dN_1}{d\xi}, \frac{dN_2}{d\xi}, \frac{dN_3}{d\xi}\right] \cdot \frac{1}{|J|} \tag{8}$$

Sustituyendo (8) en (6) y operando se obtiene la siguiente expresión para la matriz de rigidez:

$$K^{(e)} = EA\int_{-1}^{1} B^T \cdot B \cdot |J| d\xi = EA \cdot \frac{L}{2}\int_{-1}^{1} \begin{bmatrix} \xi - 0.5 \\ -2\xi \\ \xi + 0.5 \end{bmatrix} \cdot [\xi - 0.5 \quad -2\xi \quad \xi + 0.5] d\xi \tag{9}$$

En este sencillo ejemplo, el producto matricial en el interior de la integral trae consigo expresiones polinómicas de segundo orden en función de ξ que no son difíciles de integrar. Sin embargo, en problemas de interés práctico será necesario el cálculo de integrales mucho más complejas en las que será imprescindible el uso de la integración numérica. En el MEF es especialmente popular la integración numérica de Gauss-Legendre y, por su singularidad, ésta se lleva a cabo en el presente ejemplo en una función programada en MATLAB externa al programa principal. Esta función, que recibe el nombre de *IntGauss*, recibe la variable de la coordenada natural (*xi*) y la matriz resultante del producto matricial en el interior de la integral de la matriz de rigidez (*R*), y devuelve la matriz resultante del proceso de integración (*H*), lo que permite resolver (9) para cada elemento y obtener la matriz de rigidez global (líneas 81-91 Apéndice 2 y líneas 1-11, Apéndice 4).

Aunque la función es sencilla, dada la relevancia de la integración Gaussiana en el MEF es preciso examinar en detalle sus características. Si se realiza el producto matricial del integrando en (9) queda:

$$K^{(e)} = EA \cdot \frac{L}{2}\int_{-1}^{1} \cdot \begin{bmatrix} (\xi - 0.5)^2 & -2\xi(\xi - 0.5) & (\xi - 0.5)(\xi + 0.5) \\ -2\xi(\xi - 0.5) & 4\xi^2 & -2\xi(\xi + 0.5) \\ (\xi - 0.5)(\xi + 0.5) & -2\xi(\xi + 0.5) & (0.5 + \xi)^2 \end{bmatrix} d\xi \tag{10}$$

La regla de integración o cuadratura de Gauss-Legendre expresa el valor de dicha integral como suma de los productos de los valores del integrando en una serie de puntos conocidos en el interior del intervalo (puntos de integración de Gauss) por unos coeficientes determinados (pesos). Habida cuenta de que la matriz de (10) contiene polinomios de segundo grado y teniendo en consideración que una cuadratura de Gauss-Legendre de orden n integra exactamente un polinomio de grado 2n-1 o menor, es obvio que será necesario recurrir a una cuadratura de orden 2 para integrar de forma exacta las expresiones del presente ejemplo. En la Tabla 1 se muestran las coordenadas y los pesos para elementos lineales.

n	$\pm\xi_i$	W_i
1	0	2
2	$1/\sqrt{3}$	1
3	$\sqrt{3/5}$ 0	$5/9$ $8/9$

Tabla 1. Coordenadas naturales ξ_i y factores de peso W_i en elementos unidimensionales

De manera que el elemento cuadrático con el que se ha discretizado la barra tiene 2 puntos de integración de Gauss ubicados en las coordenadas $\xi_i = \pm 1/\sqrt{3}$. Los desplazamientos nodales se obtienen resolviendo el sistema $K \cdot f = a$, tal y como se ha detallado en el caso anterior. Sin embargo, en esta ocasión se ha discretizado el dominio mediante un elemento finito cuadrático y por consiguiente, los desplazamientos en el interior del mismo no varían de forma lineal entre los valores obtenidos en los nodos, tal y como sucedía en el primer ejemplo, sino que la distribución de desplazamientos viene caracterizada por las funciones de forma cuadráticas empleadas. De manera que el campo de desplazamientos (u) en el interior del elemento se calcula en base a: (líneas 101-102, Apéndice 2)

```
u=Desplazamientos(1)*Fforma(1)+Desplazamientos(2)*Fforma(2)+...
    Desplazamientos(3)*Fforma(3);
```

Y el campo tensional (*n*), al igual que en el caso anterior, se obtiene a partir de las deformaciones, que están directamente relacionadas con los desplazamientos por medio de la matriz de deformación (*B*) (línea 106, Apéndice 2). Una vez resuelto el sistema matricial y obtenidos, a partir de los desplazamientos, todos los parámetros de interés, es importante reflejar convenientemente los resultados, en lo que se denomina la etapa de post-procesado. En este caso, a diferencia del primer ejemplo, al haber utilizado la transformación isoparamétrica será necesario realizar de nuevo el cambio de variable para reflejar los resultados de las variables de interés sobre el sistema de coordenadas cartesiano (líneas 117-126, Apéndice 2). El cambio de variable en la expresión de los desplazamientos (*u*) se lleva a cabo mediante el operador *subs* teniendo en consideración la relación existente entre la coordenada natural y la coordenada cartesiana (ver Figura 4):

$$\xi = 2\frac{x - x_c}{l^{(e)}} \tag{11}$$

Siendo x_c la coordenada cartesiana en el centro del elemento. Para representar gráficamente una función se emplea el comando *ezplot*. Se procede de idéntica forma para reproducir el campo tensional calculado. Las gráficas obtenidas con MATLAB se muestran en las Figuras 5 y 6. En las mismas se comparan, por medio de la misma señalización que la empleada en el primer ejemplo, los desplazamientos y las tensiones calculados mediante el MEF con la solución analítica.

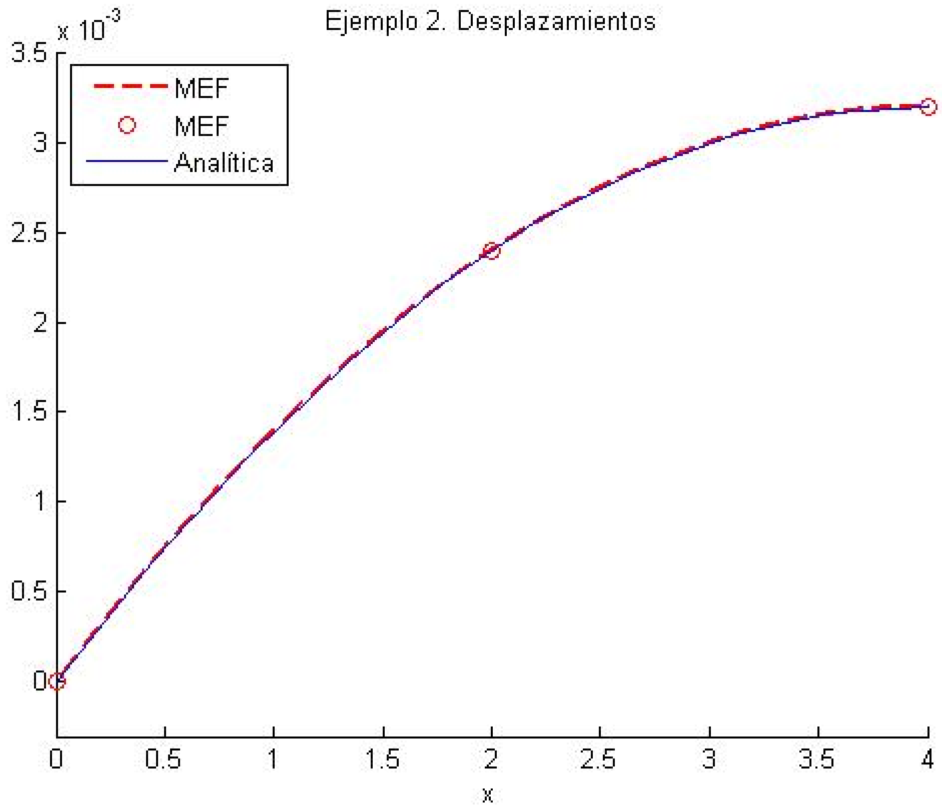


Figura 5. Desplazamientos obtenidos en función de la posición en el Ejemplo 2.

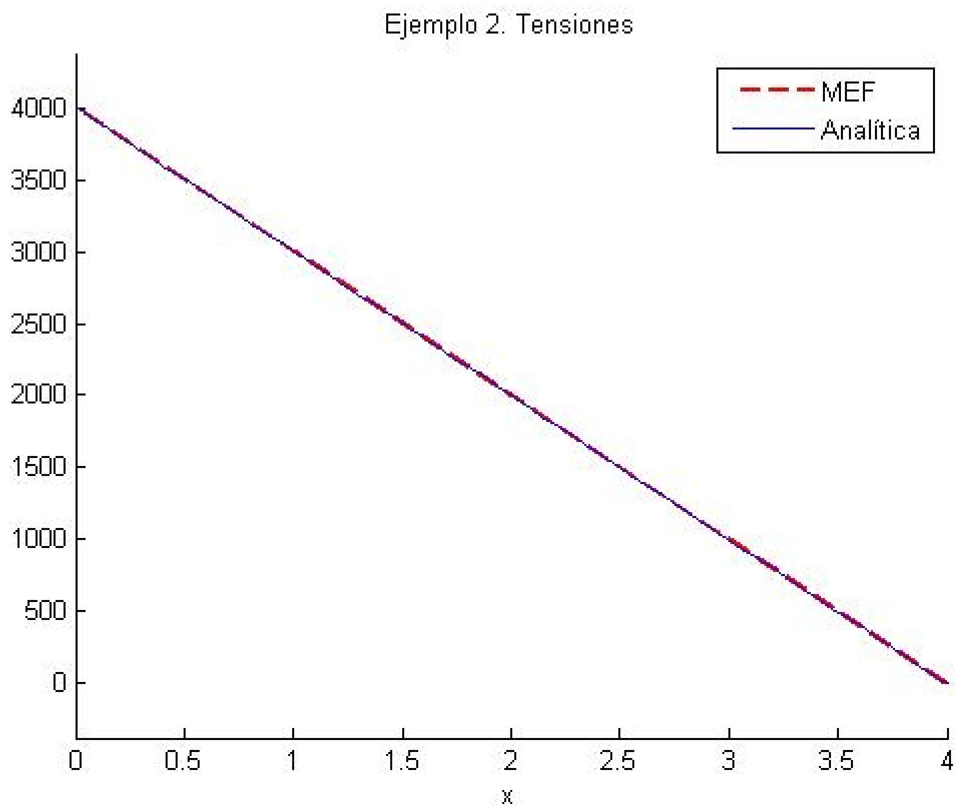


Figura 6. Tensiones obtenidas en función de la posición en el Ejemplo 2.

En la Figura 5 se observa que tanto los valores del desplazamiento en los nodos como el campo de desplazamientos en el interior del elemento coinciden con la solución exacta. Este resultado era previsible, pues se está aproximando una solución polinómica de segundo orden mediante un elemento finito cuadrático. De igual manera, en la Figura 6 se puede apreciar como el campo tensional en el interior del elemento reproduce fielmente la solución analítica. Con lo que en este segundo ejemplo no tendría sentido discretizar el dominio mediante un número mayor de elementos, ya que la solución obtenida mediante el MEF coincide con la exacta. Este hecho posibilita que el alumno fácilmente alcance la conclusión de que, en el caso de que el orden polinomial de la solución sea conocido, resulta conveniente el uso de elementos finitos con funciones de forma del mismo grado que la solución. Ya que esto garantiza no sólo que la solución en los nodos sea correcta, sino que la variación de los desplazamientos en el interior de cada elemento coincida con la exacta. Sin embargo, es necesario advertir a los estudiantes de que esta coyuntura rara vez se encuentra en un caso de aplicación práctica.

Observando las soluciones obtenidas para el primer (Figuras 2 y 3) y segundo (Figuras 5 y 6) ejemplo es posible establecer una comparativa entre los resultados obtenidos para diferentes tipos de elementos. De manera que el alumno rápidamente puede deducir que, para el problema evaluado en el presente trabajo, la precisión del elemento cuadrático es superior a la del elemento lineal. Ésta es una conclusión acertada, puesto que cuanto más simple es el elemento, menos capacidad tiene de aproximar soluciones en las que el campo de desplazamientos sea una función polinómica de un orden alto. Sin embargo, el uso de elementos finitos de menor orden permite ahorrar tiempo en el cálculo de las matrices del elemento. De manera que, en líneas generales y desde el punto de vista de la eficiencia computacional, es recomendable el uso de elementos finitos con menos nodos, aunque sea en mayor número, frente a elementos de orden superior. Y es que, dado el vertiginoso avance de la tecnología informática en los últimos años, los problemas asociados a una mayor cantidad de variables son cada vez menos importantes. El uso de elementos de orden superior se recomienda únicamente en aquellas regiones en las que se pueda intuir que la variable a calcular varía significativamente. En cualquier caso, en la mayoría de las ocasiones será la experiencia del calculista la que determine el tipo de elemento a utilizar.

4. Conclusiones

Por medio del software matemático MATLAB se ha desarrollado un inteligible código de elementos finitos capaz de resolver sencillos problemas estructurales abordando gradualmente las características más relevantes del MEF. El mismo se ha utilizado para obtener, mediante los dos tipos de elementos finitos más comunes, los campos de desplazamientos y tensiones en una barra a tracción de sección constante empotrada en un extremo que está sometida a una carga uniformemente distribuida. El problema resuelto, el orden de los ejemplos y la secuencia de operaciones desarrolladas en el proceso de resolución de los mismos obedecen exclusivamente a fines puramente didácticos, con el objetivo de que el alumno se enfrente de forma progresiva a las particularidades inherentes al MEF.

La estructura del código se ha desarrollado con el objetivo de que pueda ser extendido, sin necesidad de realizar grandes modificaciones, para dar respuesta a problemas más complejos, ya sea por la dimensión de los mismos (2D, 3D) o por el tipo de elemento finito a utilizar (viga, placa, etc.). En cualquier caso, los ejemplos reflejados en el presente artículo han demostrado ser más que suficientes para introducir el MEF a alumnos de ingeniería, sirviendo de enlace entre la formulación matemática del método y el proceder del software comercial. Por su sencillez de uso y programación, el software matemático MATLAB ha evidenciado ser una herramienta didáctica muy valiosa a la hora de trasmitir a los alumnos los fundamentos básicos del MEF.

A1. Apéndice 1: Código correspondiente al 1er ejemplo – elementos lineales

```
%.....................................................................

% MATLAB: Una herramienta para la didáctica del método de los
% elementos finitos.
% Ejemplo1

% Se resetea la memoria del programa y se limpia el espacio de trabajo

clear all

% Se definen las propiedades del material:
% E: módulo elástico.
% A: área de la sección transversal.

E=5000000;
A=0.5;

% Pre-procesador: Se discretiza el problema y se imponen las
% condiciones de contorno.

% Se asignan los nodos correspondientes a cada elemento:

Nodos_elemento=[1 2;2 3;3 4;4 5];

% Se define el número de elementos:

Numero_elementos=size(Nodos_elemento,1);

% Se posicionan los nodos en el espacio:

Coord_nodos=[0 1 2 3 4];

% Se define el número de nodos:

Numero_nodos=size(Coord_nodos,2);

% Se definen e inicializan el vector de desplazamientos, el vector de
% fuerzas y la matriz de rigidez:

Desplazamientos=zeros(Numero_nodos,1);
Fuerza=zeros(Numero_nodos,1);
Rigidez=zeros(Numero_nodos);

% Se introducen las condiciones de contorno.

% De acuerdo a las condiciones del problema, se restringen los grados
```

```
% de libertad (GDL) necesarios, en este caso están restringidos los
% desplazamientos en el primer nodo.

GDL_prescritos=[1];

% Se designan los GDL libres (GDL_libres).

GDL_libres=setdiff([1:Numero_nodos]',[GDL_prescritos]);

% Se introduce la carga aplicada.
% L es la longitud de la barra y s=1000 N/m es la carga distribuida
% del presente ejemplo.

s=1000; L=Coord_nodos(5)-Coord_nodos(1);
b=s*L/Numero_elementos;

for j=1:Numero_nodos

Fuerza(j)=b*sum(sum(Nodos_elemento == j))/size(Nodos_elemento,2);

end

% Procesador: Se calcula la matriz de rigidez, los desplazamientos en
% los nodos y las tensiones en cada elemento.

% Se calcula la matriz de rigidez (Rigidez), siendo GDL_elemento los
% grados de libertad y Lon la longitud de cada elemento.

for e=1:Numero_elementos

GDL_elemento=Nodos_elemento(e,:);
Lon=Coord_nodos(GDL_elemento(2))-Coord_nodos(GDL_elemento(1));
EA(e)=E*A/Lon;
Rigidez(GDL_elemento,GDL_elemento)=...
Rigidez(GDL_elemento,GDL_elemento)+EA(e)*[1 -1;-1 1];

end

% Se calculan los desplazamientos:

Desp=Rigidez(GDL_libres,GDL_libres)\Fuerza(GDL_libres);
Desplazamientos=zeros(Numero_nodos,1);
Desplazamientos(GDL_libres)=Desp

% Se calcula el vector de tensiones (Tensiones):

for k=1:Numero_elementos

Dif_desp=Desplazamientos(Nodos_elemento(k,2))-...
Desplazamientos(Nodos_elemento(k,1));
Lon=Coord_nodos(Nodos_elemento(k,2))-...
Coord_nodos(Nodos_elemento(k,1));
Tensiones(k)=E*A*Dif_desp/Lon;

end
```

```matlab
% Postprocesador: se muestran los resultados obtenidos.
% En el presente trabajo se conoce la solución analítica, por lo que
% los resultados obtenidos mediante el MEF se comparan con la misma:

% Desplazamientos

% Solución mediante el MEF

plot(Coord_nodos,Desplazamientos,'Marker','o','LineWidth',1.5,...
'LineStyle','--','Color',[1 0 0],'DisplayName','MEF');

% Solución analítica

x=linspace(0,L,10);
u=(-s*x.^2/2+s*L*x)/(E*A);
hold on
plot(x,u,'LineWidth',1,'DisplayName','Analítica');
h=legend('MEF','Analítica',2);
set(gca,'box','off')
title('Ejemplo 1. Desplazamientos');

% Tensiones

figure
hold on

% Solución mediante el MEF

f1=zeros(Numero_elementos,1);
for i=1:Numero_elementos
 p=Nodos_elemento(i,:);
 f1(i)=plot(Coord_nodos(p),repmat(Tensiones(i),1,...

length(Coord_nodos(p))),'Marker','o','LineWidth',1.5,'LineStyle',...
     '--','Color',[1 0 0],'DisplayName','MEF');
end

% Solución analítica

x=linspace(0,L,100);
y=s*(L-x);
f2=plot(x,y,'LineWidth',1,'DisplayName','Analítica');
h=legend([f1(end),f2],'MEF','Analítica');
title('Ejemplo 1. Tensiones');

% Fin Ejemplo1
```

A2. Apéndice 2: Código correspondiente al 2º ejemplo – elementos cuadráticos

```
%.....................................................................

% MATLAB: Una herramienta para la didáctica del método de los
% elementos finitos.
% Ejemplo2

% Se resetea la memoria del programa y se limpia el espacio de trabajo

clear all

% Se definen las propiedades del material:
% E: módulo elástico.
% A: área de la sección transversal.

E=5000000;
A=0.5;

% Pre-procesador: Se discretiza el problema y se imponen las
% condiciones de contorno.

% Se asignan los nodos correspondientes a cada elemento:

Nodos_elemento=[1 2 3];

% Se define el número de elementos:

Numero_elementos=size(Nodos_elemento,1);

% Se posicionan los nodos en el espacio:

Coord_nodos=[0 2 4];

% Se define el número de nodos:

Numero_nodos=size(Coord_nodos,2);

% Se definen e inicializan el vector de desplazamientos, el vector de
% fuerzas y la matriz de rigidez:

Desplazamientos=zeros(Numero_nodos,1);
Fuerza=zeros(Numero_nodos,1);
Rigidez=zeros(Numero_nodos);

% Se introducen las condiciones de contorno.

% De acuerdo a las condiciones del problema, se restringen los grados
% de libertad (GDL) necesarios, en este caso están restringidos los
% desplazamientos en el primer nodo.

GDL_prescritos=[1];
```

```
% Se designan los GDL libres (GDL_libres).

GDL_libres=setdiff([1:Numero_nodos]',[GDL_prescritos]);

% Se introduce la carga aplicada, formulando matricialmente el
% problema y haciendo uso de la transformación isoparamétrica.

% L es la longitud de la barra y s=1000 N/m es la carga distribuida
% del presente ejemplo.

s=1000;L=Coord_nodos(3)-Coord_nodos(1);

% Se realiza la transformación isoparamétrica por medio de la función
% TransIso

[Fforma,detJacobiano,invJacobiano,xi]=TransIso(Coord_nodos);

for j=1:Numero_nodos

Fuerza(j)=s*detJacobiano*int(Fforma(j),xi,-1,1);

end

% Procesador: Se calcula la matriz de rigidez, los desplazamientos en
% los nodos y las tensiones en cada elemento.

% Se calcula la matriz de rigidez (Rigidez), siendo GDL_elemento los
% grados de libertad de cada elemento.

for e=1:Numero_elementos

 GDL_elemento=Nodos_elemento(e,:);

B(xi)=[diff(Fforma(1)),diff(Fforma(2)),diff(Fforma(3))]*invJacobiano;
 R(xi)=B'*B;
 [H]=IntGauss(R,xi);
 EA(e)=E*A;
 Rigidez(GDL_elemento,GDL_elemento)=...
 Rigidez(GDL_elemento,GDL_elemento)+EA(e)*H*detJacobiano;

end

% Se calculan los desplazamientos:

Desp=Rigidez(GDL_libres,GDL_libres)\Fuerza(GDL_libres);
Desplazamientos=zeros(Numero_nodos,1);
Desplazamientos(GDL_libres)=Desp

% Se obtiene el campo de desplazamientos en el interior del elemento:

u=Desplazamientos(1)*Fforma(1)+Desplazamientos(2)*Fforma(2)+...
    Desplazamientos(3)*Fforma(3);

% Se obtiene el campo tensional en el interior del elemento:
```

```
n=E*A*B*Desplazamientos;

% Postprocesador: se muestran los resultados obtenidos.
% En el presente trabajo se conoce la solución analítica, por lo que
% los resultados obtenidos mediante el MEF se comparan con la misma:

% Desplazamientos

% Se obtiene el campo de desplazamientos haciendo el cambio de
% variable al sistema cartesiano

syms x;
u=subs(u,xi,(2*(x-L/2)/L));

% Solución mediante el MEF

hold on
a=ezplot(u,[0,L]);
set(a,'LineWidth',1.5,'LineStyle','--','Color', [1 0 0]);
plot(Coord_nodos,Desplazamientos,'o','Color', [1 0 0]);
title('Ejemplo 2. Desplazamientos');

% Solución analítica

y=linspace(0,L,10);
u=(-s*y.^2/2+s*L*y)/(E*A);
plot(y,u,'LineWidth',1,'DisplayName','Analítica');
h=legend('MEF','MEF','Analítica',2);

% Tensiones

% Se obtiene el campo de tensiones haciendo el cambio de variable al
% sistema cartesiano

n=subs(n,xi,(2*(x-L/2)/L));

% Solución mediante el MEF

figure;
hold on;
b=ezplot(n,[0,L]);
set(b,'LineWidth',1.5,'LineStyle','--','Color', [1 0 0]);

% Solución analítica

x=linspace(0,L,100);
y=s*(L-x);
f2=plot(x,y,'LineWidth',1,'DisplayName','Analítica');
h=legend([b(end),f2],'MEF','Analítica');
title('Ejemplo 2. Tensiones');

% Fin Ejemplo
```

A3. Apéndice 3: Código correspondiente a la función *TransIso*

```
function [Fforma,detJacobiano,invJacobiano,xi]=TransIso(Coord_nodos)

% En esta función se lleva a cabo la transformación isoparamétrica

% Se define el vector de funciones de forma (Fforma), siendo z la
% coordenada natural correspondiente a la coordenada cartesiana x.

syms xi

Fforma=[0.5*xi*(xi-1);(1-xi)*(1+xi);0.5*xi*(1+xi)];

% Se calculan el determinante y el inverso del Jacobiano (detJacobiano):

detJacobiano = diff(Fforma(1))*Coord_nodos(1) + ...
       diff(Fforma(2))*Coord_nodos(2) + diff(Fforma(3))*Coord_nodos(3);

invJacobiano=1/detJacobiano

```

A4. Apéndice 4: Código correspondiente a la función *IntGauss*

```
function [H] = IntGauss(R,xi)

% En esta función se lleva a cabo la integración Gaussiana.

% Se integra numéricamente por Gauss-Legendre con precisión
% cuadrática, siendo W el peso correspondiente al punto de
% integración.

W=1;

H=W*R(-1/(sqrt(3)))+W*R(1/(sqrt(3)))
```

ISSN: 1815-0640
Número XX. Noviembre 2015
Páginas XX-XX

Bibliografía

Alberty, J., Cartensen, C., Funken, S.A., & Klose, R. (2002). MATLAB implementation of the finite element method in elasticity. *Computing*, 69, 239-263.

Baaser, H. (2010). *Development and Application of the Finite Element Method based on MatLab*. Springer.

Backer, J.R., Capece, V.R., & Lee J.R. (2001). Integration of finite element software in undergraduate engineering courses. *ASEE Annual Conference Proceedings*, Session 1520.

Connell, H., Blyth, B., May, R., & Zorzan, C. (1999). Teaching the finite element method using software. *Proceedings of the Delta'99 Symposium on Undergraduate Mathematics*, 65-68.

Earley, R.D. (1998). Use of FEA in an introductory strength of materials course. *ASEE Annual Conference Proceedings*, Session 3648.

Ferreira, A.J.M. (2009). *MATLAB Codes for Finite Element Analysis*. Solid Mechanics and its Applications, Springer.

Howard, W.E., Musto, J.C., & Prantil, V. (2001). Finite element analysis in a mechanics course sequence. *ASEE Annual Conference Proceedings*, Session 2793.

Jiang, Y., & Wang, C. (2008). On teaching finite element method in plasticity with Mathematica. *Computer Applications in Engineering Education*, 16, 233-242.

Jolley, W.O., Rencis J.J., & Grandin H.T. (2003). A module for teaching fundamentals of finite-element theory and practice using elementary mechanics of materials. *ASEE Annual Conference Proceedings*, Session 3268.

Kattan, P.I. (2007). *MATLAB Guide to finite elements, an interactive approach*. Springer, Berlin, 2nd ed.

Kosashi, P.B. (2010). Learning finite element methods by building applications. *International Journal of Mechanical Engineering Education*, 38 (2), 167-184.

Kwon, Y. W., & Bang H. (1996). *Finite element method using MATLAB*. CRC Press, Boca Raton, FL.

Lissenden, C.J., Wagle, G.S., & Salamon, N.J. (2002). Applications of finite element analysis for undergraduates. *ASEE Annual Conference Proceedings*, Session 3568.

Logue, L.J., & Hall, K.A. (2001). Introducing finite element analysis in an MET strength of materials course. *ASEE Annual Conference Proceedings*, Session 3248.

Martínez-Pañeda, E., & Betegón, C., (2015). Modeling damage and fracture within strain- gradient plasticity. *International Journal of Solids and Structures,* 59, 208-215.

Martínez-Pañeda, E., & Gallego, R., (2015). Numerical analysis of quasi-static fracture in functionally graded materials. *International Journal of Mechanics and Materials in Design,* 11, 405-424.

Martínez-Pañeda, E., & Niordson, C., (2015). On fracture in finite strain gradient plasticity. *International Journal of Plasticity,* (in press)

Oñate, E. (1995). *Cálculo de estructuras por el método de elementos finitos.* Centro Internacional de Métodos Numéricos en Ingeniería, UPC.

Pike, M. (2001). Introducing Finite Element Analysis in Statics*. Proceedings of the 2001 American Society for Engineering Education Annual Conference & Exposition*, Session 2268.

Rahman, T., & Valdman, J. (2013). Fast MATLAB assembly of FEM matrices in 2D and 3D: Nodal elements. *Applied Mathematics and Computation*, 219 (13), 7151-7158.

Teh, K., & Morgan, L. (2005). The application of Excel in teaching finite element analysis to final year engineering students. *Proceedings of the 2005 ASEE 4th Global Colloquium on Engineering Education*, paper 50.

Zecher, J. (2002). Teaching finite element analysis in an MET program. *ASEE Annual Conference Proceedings*, Session 3448

Emilio Martínez Pañeda es actualmente investigador visitante en la Universidad de Cambridge. Ha publicado numerosos artículos en revistas de prestigio en el ámbito de la mecánica computacional y ha impartido charlas como ponente invitado en varios congresos y universidades.
Email: mail@empaneda.com

UNIÓN
REVISTA IBEROAMERICANA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA
www.fisem.org/web/union
http://asenmacformacion.com/ojs/index.php/union/index

ISSN: 1815-0640
Número 45. Marzo 2016
Página 269-284

Investigando la construcción de polígonos regulares mediante doblado de papel.

Alberto Arnal-Bailera

Fecha de recepción: 15/02/2015
Fecha de aceptación: 04/03/2016

Resumen	Consideramos de vital importancia reforzar la enseñanza de la Geometría a través de la manipulación de papel. Presentamos para ello un método aproximado de construcción de polígonos regulares mediante doblado de papel y unas actividades para promover alrededor de la construcción la reflexión matemática. **Palabras clave**: Geometría, Construcciones, Doblado de papel, Secundaria, GeoGebra.
Abstract	We do consider vitally important the manipulation of paper to strengthen the teaching of geometry. We introduce an approximate method for building regular polygons by bending paper. Also, we propose some activities to promote the mathematical thinking around the constructions. **Keywords**: Geometry, Constructions, Paper folding, Secondary, GeoGebra.
Resumo	Consideramos a manipulação de papel vital para reforçar o ensino da geometria. Apresentamos um método para a construção de polígonos regulares por dobradura de papel. As atividades apresentadas visam promover o pensamento matemático sobre o processo da construção. **Palavras-chave:** Geometria, construções, dobradura de papel, secundária, GeoGebra.

1. Introducción

Aunque en estos momentos en España estamos –de nuevo– inmersos en un proceso de reformas educativas en todas las etapas preuniversitarias, podemos afirmar que, en lo formal, los currículos de matemáticas en secundaria optan por la utilización de materiales en Geometría y la promoción de actividades de investigación o resolución de problemas. El Real Decreto 1105/2014, de 26 de diciembre, por el que se establece el próximo currículo básico de las matemáticas en la etapa de secundaria afirma que los procesos de investigación integran todas las competencias deseables en un alumno: “La resolución de problemas y los proyectos de investigación constituyen los ejes fundamentales en el proceso de enseñanza y aprendizaje de las Matemáticas…” Este decreto está a día de hoy por desarrollar por la Comunidad Autónoma de Aragón, donde lo que rige todavía es la Orden de 9 de mayo de 2007, en el que podemos encontrar ya consideraciones didácticas similares: “Puesto que las dificultades en el aprendizaje de las matemáticas no se superan con la práctica reiterada de rutinas, también conviene proponer a todo el alumnado actividades que exijan creatividad, que resulten motivadoras y que supongan un desafío, y no reservarlas únicamente para los estudiantes más capaces, (…) facilitar, mediante el uso de materiales educativos, la construcción de los conceptos matemáticos…"

Así pues, en el currículo se sugiere tanto la utilización de actividades de tipo investigación como el uso de materiales. No obstante, recae en los profesores la creación de materiales realmente interesantes para el alumnado y que superen las actividades muchas veces repetitivas y poco motivadoras de los manuales escolares.

La utilización de materiales diversos en la enseñanza de las matemáticas favorece una mejor comprensión de los conceptos estudiados, al observar estos desde diversos puntos de vista. La Geometría se presta de un modo especial a la experimentación con material. Cuando éste es adecuadamente elegido, se puede desarrollar un proceso rico de enseñanza-aprendizaje superando enfoques excesivamente formales o algebraicos, (Alsina, Burgues y Fortuny, 1988). Particularmente, el doblado de papel permite estudiar muchos de los conceptos matemáticos básicos e investigar sobre ellos (Baena, 1991; Caboblanco, 2010; Oller, 2007). El doblado de papel contribuye de modo positivo a la aprehensión de conceptos geométricos, siendo además bien aceptado por los alumnos como una alternativa motivadora a una instrucción al modo clásico (Boakes, 2009)

Aunque para el profesorado puede ser también interesante hacer un recorrido por la literatura que explora las construcciones geométricas planas con papel y tijeras desde un punto de vista lúdico (Alegría, 2006), nuestro interés en este artículo será curricular, por tanto, prestaremos atención a la interpretación matemática de cada una de las acciones que realicemos, bien doblando papel, bien cortando con las tijeras (Demaine y O'Rourke, 2007; Royo, 2002).

El objetivo de este artículo es mostrar un proceso de construcción análogo para todos los polígonos regulares a partir del concepto de ángulo central, conocido el radio de la circunferencia circunscrita. El hecho de que sea un proceso homogéneo tiene como propósito facilitar su utilización en el aula, ya que la explicación de una construcción será válida para el resto.

Dividiremos el artículo en tres partes:

La primera de ellas será relativa a los polígonos construibles de modo exacto con este proceso, son aquellos en los que podemos construir el ángulo central a través de disecciones y trisecciones sucesivas del ángulo completo (ver Tabla 2).

En la segunda parte nos dedicaremos a la construcción aproximada del resto, presentaremos un proceso de construcción aproximada del ángulo central, aproximando con un error relativo menor del 1% que quedará oculto por las limitaciones manuales del propio proceso de doblado del papel.

En la tercera parte expondremos cuál puede ser el aprovechamiento didáctico de estas construcciones y cómo integrarlo en las asignaturas de matemáticas de 4º de ESO.

Asumimos que, en algunos casos, el origami -arte de realizar figuras doblando papel- propone soluciones más elegantes o espectaculares, pero nuestro objetivo es hacer lo más sencillo posible el proceso de construcción y centrarnos en hacer visibles las propiedades matemáticas empleadas, de modo que puedan ser más fácilmente analizadas por los alumnos.Desarrollaremos esta construcción de un modo ordenado y justificado matemáticamente, de manera que se favorezca una actividad manual aprovechable didácticamente en un contexto de aula de matemáticas de segundo ciclo de secundaria.

2. Construcciones exactas

Caracterizar los polígonos regulares construibles con un determinado instrumento nos da idea de la potencia del mismo (Demaine y O'Rourke, 2007). Por ejemplo, sabemos que con regla y compás podemos construir un polígono regular de n lados cuando n es de la forma $2^r p_1 \ldots p_k$donde los p_i son primos de Fermat distintos (números primos de la forma 2^n+1). El origami tiene una caracterización similar: con origami se puede construir un polígono regular de n lados, cuando n es de la forma $2^r 3^s p_1 \ldots p_k$siendo los p_i primos distintos de la forma $2^n 3^m+1$. Estos son precisamente los polígonos regulares construibles con regla, compás y un instrumento que permitiera trisecar un ángulo.

Con las técnicas clásicas de origami se pueden construir muchos más polígonos regulares que con regla y compás únicamente, pero no todos. Listamos a continuación los polígonos regulares de menos de 30 lados no construibles con ambos instrumentos:

Regla y compás: 7, 9, 11, 13, 14, 18, 19, 21, 22, 23, 25, 26, 27, 28, 29.

Origami: 11, 22, 23, 25, 29.

Con las técnicas que presentaremos a continuación podremos construir de manera exacta los polígonos regulares de n lados cuando n es de la forma $2^{r+1}3^s$ con r y s mayores o iguales que 0, conocido el radio de la circunferencia circunscrita. Asumimos, por tanto, que la técnica es más limitada que el origami, por ello complementaremos, para los demás polígonos regulares, las técnicas de construcción exacta con técnicas de construcción aproximada. El proceso que vamos a utilizar implica en ambos casos encontrar primero el ángulo central y a partir de él construir el polígono regular.

Refiriéndonos a los ángulos, el doblado de papel permite la bisección y la trisección de un ángulo. Si queremos construir el ángulo central de un polígono de $2^r 3^s$ lados debemos, partiendo del ángulo llano, realizar r bisecciones del ángulo llano y s trisecciones del mismo, cada una de estas acciones divide el ángulo de 180 grados entre 2 o entre 3, con lo que obtendremos el ángulo de $360/2^r 3^s$ grados (Ver Tabla 1). Reiterando el trabajo de bisección o trisección de los ángulos que obtenemos a partir del llano podemos construir de manera exacta, entre otros un cuadrado, un hexágono o un octógono (ver Tabla 2) conocido el radio de la circunferencia circunscrita. No podemos construir de manera exacta, por ejemplo, el pentágono o el heptágono, por ejemplo.

Pasamos ahora a explicar las técnicas implicadas en el proceso de construcción exacta: Disección y Trisección, de cada una de ellas pondremos un ejemplo adecuado:

2.1. Bisección de un ángulo llano, construyendo un cuadrado.

En general, para dividir un ángulo en dos iguales basta con poner el dedo sobre el vértice y llevar una de las semirrectas que lo delimitan sobre la otra.

Comenzaremos todas las construcciones a partir de una hoja tamaño dinA4, por ser el papel más accesible a nivel escolar. En general utilizaremos papel en blanco para las construcciones exactas, y papel cuadriculado para las construcciones aproximadas.

Como ya hemos dicho, el propósito de cada construcción es la obtención de un polígono regular de un número dado de lados, conocido el radio de la circunferencia circunscrita.Consideraremos construcciones exactas las de los polígonos regulares cuyo ángulo central es resultado de sucesivas divisiones entre dos o entre tres del llano. Por ejemplo, podemos construir de modo exacto el cuadrado, ya que su ángulo central es de 90º y lo obtenemos dividendo en dos el ángulo llano, el proceso sería:

1. Tomo la hoja (usualmente de tamaño din A4) y la doblo en dos partes iguales. El doblez marca un ángulo de 180º.
2. Llevo la mitad de ese doblez sobre la otra mitad haciendo coincidir los extremos del papel, ahora el doblez marca un ángulo de 90º.
3. Marcar el radio de la circunferencia circunscrita en los extremos de la construcción, al doblar por estas marcas, que resultará un triángulo rectángulo e isósceles. Para ver más claramente el producto, podemos recortar en lugar de doblar. Al desplegar obtengo el cuadrado. Ver Figura 1.

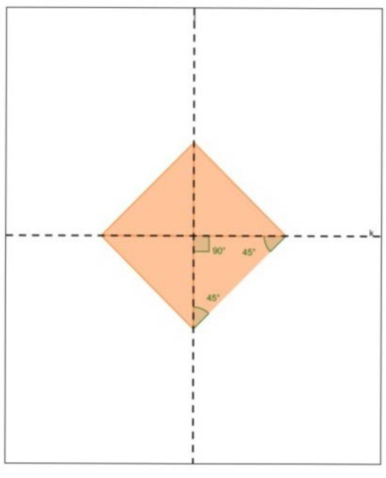


Figura 1. Cuadrado construido mediante doblado en tres pasos.

2.2. Trisección de un ángulo llano, construyendo un hexágono.

Para construir los ángulos centrales de $360/2^r3^s$ grados con s>0, necesitaremos trisecar un ángulo. Para ello debemos poner un dedo sobre el vértice y arrastrar simultáneamente hacia el interior del ángulo las dos semirrectas que lo delimitan(ver Figura 2). De modo que terminemos superponiendo tres superficies en forma de ángulo. Por ejemplo, para construir el hexágono conocido el radio de la circunferencia circunscrita, debemos obtener el ángulo central, $360/2^1 3^1$=60º como la tercera parte del ángulo llano. Explicamos a continuación cómo construir dicho ángulo paso a paso:

1. Utilizaremos una hoja inicialmente sin doblar (ver paso 1º de la figura 2).
2. La doblamos en dos partes iguales (ver paso 1º de la figura 2). Nótese que el doblez marca un ángulo de 180º.
3. Giramos la hoja y marcamos suavemente un doblez perpendicular al obtenido en 1, que divida en dos la hoja doblada, podemos para más claridad dibujar una fina línea de puntos sobre este doblez. Llamamos A al punto superior de este doblez(ver línea de puntos en el paso 3º de la figura 2).
4. Ponemos un dedo en A y arrastramos el extremo derecho del papel hacia la izquierda (ver paso 4º de la figura 2).
5. Con la mano con la que presionábamos el punto A, arrastramos el extremo izquierdo del papel hacia la derecha (ver paso 5º de la figura 2).
6. En un momento dado, uno de los dobleces pasará por encima del otro, tratamos de ajustar todas las capas de papel para que sean iguales entre sí. El doblez suave nos ayudará a comprobar la simetría de los últimos dobleces. Obtenemos así la trisección del ángulo llano (ver paso 6º de la figura 2).

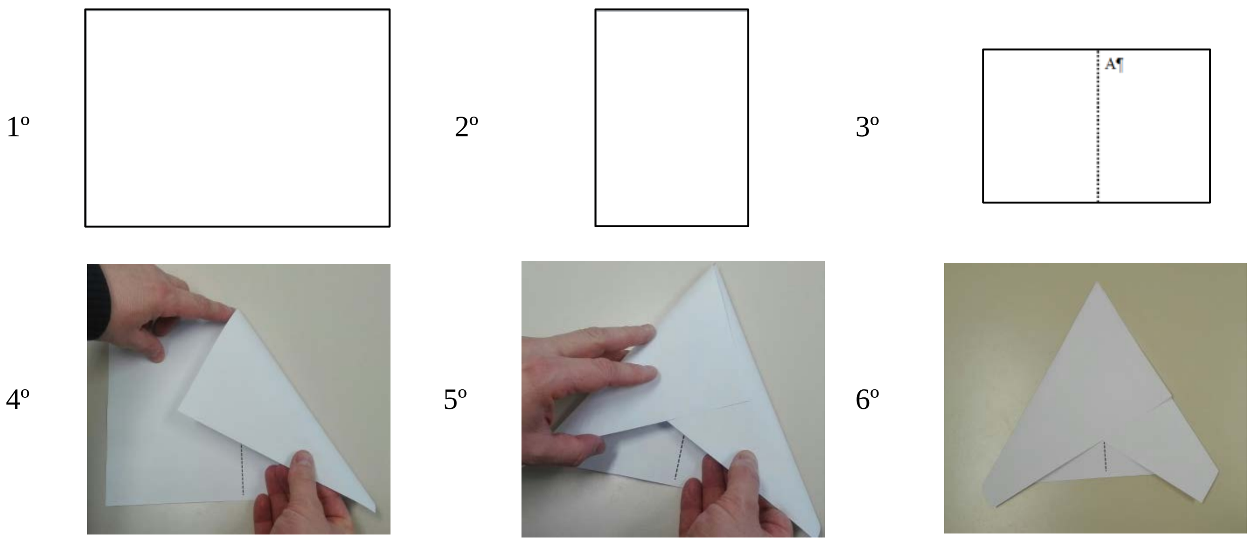


Figura 2. Pasos para el trisecado de un ángulo llano.

Nótese que lo que acabamos de explicar es igualmente aplicable a la trisección de cualquier ángulo. Solo tenemos que hacer la salvedad de que para trisecar el ángulo completo necesitaríamos modificar la técnica dando primero un corte con las tijeras hasta el centro de la hoja de manera que tengamos así dos "lados" del ángulo para poder doblarlos sobre si mismos aplicando los pasos 2 y siguientes.

Consideremos nuevamente el ángulo llano, cada vez que hacemos un doblez, la amplitud de éste queda dividida entre dos o entre tres y el número de lados del polígono regular construido a partir de ese nuevo ángulo central se multiplica por dos o por tres, respectivamente (ver Tabla 2). El máximo número de dobleces que pueden dar un resultado razonable al construirlo físicamente con papel es 3 ó 4, según cuáles sean estos dobleces. Por ejemplo, la construcción con cuatro dobleces que lleva al hexadecágono es realizable, con un resultado razonable, pero el resto al involucrar trisecciones de ángulos no son factibles. Presentamos dos esquemas, ver Tabla 2, analizando los ángulos centrales y los lados construibles con hasta 5 procesos (bisecado o trisecado) a partir del ángulo completo.

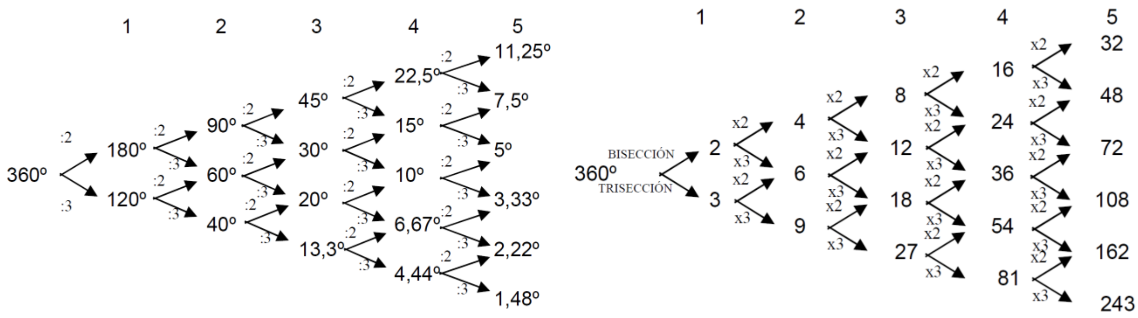


Tabla 1. Ángulo central y número de lados de los polígonos construibles con 5 procesos.

Vemos en la Tabla 2 algunos de los ángulos centrales y polígonos regulares construibles de modo sencillo y exacto a través del bisecado o trisecado del ángulo llano.

Lados	Polígono	Ángulo central	Procesos
3	Triángulo	120º	1
4	Cuadrado	90º	2
6	Hexágono	60º	2
8	Octógono	45º	3
9	Eneágono	40º	2
12	Dodecágono	30º	3
16	Hexadecágono	22,50º	4

Tabla 2. Ángulos centrales y número de procesos de bisecado o trisecado necesarios para construir algunos polígonos regulares.

Para terminar la construcción del polígono que se trate, en este caso un hexágono, necesita un paso más:

7. Dado que un polígono regular de n lados puede verse como un conjunto de n triángulos isósceles, podemos construir el hexágono como 6 triángulos isósceles. Así pues, a partir de la construcción realizada en el

paso 6º, si recortamos un triángulo isósceles con vértice en A y dado que el ángulo en A es de 60º este triángulo será equilátero, base de la construcción del hexágono.Notar que cuando se recorta tenemos varias capas de papel que corresponden cada una con uno de los triángulos isósceles que forman el hexágono, como se podrá ver al desplegarlo (Ver Figura 3).

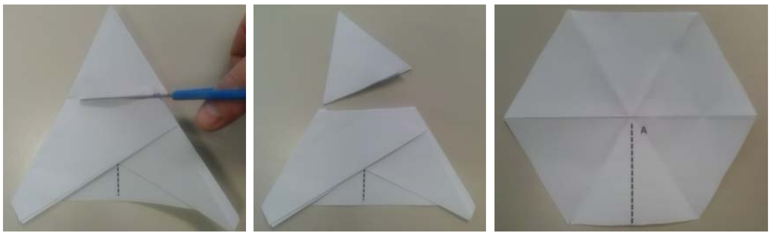


Figura 3. Hexágono dividido en triángulos isósceles.

Tras estas dos construcciones, sería interesante plantearnos qué ocurriría si al hacer el último doblez o recorte no construyéramos un triángulo isósceles, estos serían los resultados con diversos cortes que produjeran, como podemos ver en la figura 4:

1. Un triángulo obtusángulo, produce un hexágono estrellado, cóncavo.
2. Un triángulo acutángulo, produce un hexágono convexo.
3. Un triángulo rectángulo, produce un triángulo equilátero al coincidir dos ángulos rectos consecutivos

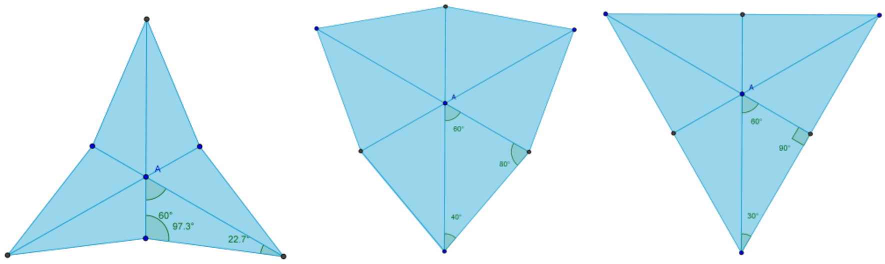


Figura 4. Distintos hexágonos según el corte realizado sobre los pliegues.

Haciendo un análisis similar con los posibles cortes en el cuadrado únicamente obtenemos la posibilidad del rombo cuando el triángulo de corte no es isósceles. Dado que uno de los ángulos es de 90º no podemos obtener ningún triángulo obtusángulo y no encontramos polígonos regulares cóncavos.

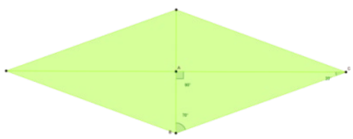


Figura 5. Distintos rombos aparecen según el corte realizado sobre los pliegues.

3. Construcciones aproximadas

3.1. Construyendo polígonos de modo aproximado. Cálculo del error.

Para los casos en los que no es posible realizar una construcción de manera exacta, vamos a exponer un proceso de construcción aproximada, basado en la construcción de un ángulo lo más cercano posible al central del polígono que se trate.

Primero, vamos a construir un triángulo rectángulo con un vértice no recto A situado en el centro de la hoja (cuadriculada) en la que vamos a realizar la construcción. El ángulo en A será la aproximación del ángulo central del polígono que queramos construir. El procedimiento para construir ese ángulo aproximado es buscar una fracción a/b que aproxime la tangente del ángulo de manera que el error sea mínimo. Así, el cateto opuesto a <A tendrá una longitud de a cuadraditos y el cateto adyacente a <A tendrá una longitud de b cuadraditos. Estaremos pues, aproximando la tangente del ángulo exacto por a/b y cometiendo un cierto error, si este error es suficientemente pequeño quedará enmascarado en el proceso de construcción. Damos a continuación una explicación más detallada:

Nos vamos a ayudar de los cuadraditos de la hoja, tomando como unidad el lado de ese cuadradito, para asegurarnos que el ángulo A tiene como tangente la aproximación el número buscado. Dado que el espacio en la hoja cuadriculada es limitado no podemos representar cualquier fracción, ya que no podemos dibujar cualquier triángulo rectángulo. Por debajo del vértice A tendremos unos 30 cuadraditos y a los lados, unos 20, por tanto el cateto adyacente tendrá como máximo esos 30 cuadraditos y el cateto opuesto tendrá como máximo, 20 cuadraditos. Consideramos las fracciones con numeradores y denominadores entre 1 y 20 y entre 1 y 30 respectivamente, siendo estos cocientes las tangentes de los ángulos construibles en ese espacio de la hoja, analizando todas las posibilidades seleccionamos aquellas que dan un menor error relativo. Véase la tabla 3 con las fracciones seleccionadas para cada caso.

Por ejemplo, para construir el pentágono, necesitaríamos un ángulo central de 360º:5=72º, lo que no podemos obtener mediante bisecado o trisecado del ángulo completo, en su lugar construiremos un triángulo rectángulo con el cateto opuesto al ángulo A con una longitud de 12 cuadrados y el cateto contiguo una longitud de 4 cuadrados. De este modo la tangente de <A será 12:4=3. Aplicando la inversa de la tangente: Arctan(3) = 71,565º es el ángulo efectivamente construido (ver Figura 6).

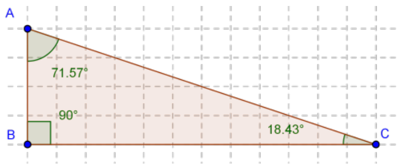


Figura 6. Triángulo rectángulo para aproximar el ángulo central delpentágono (71,565º).

El error cometido ha sido de 0,435º, como posteriormente construiremos por doblado otros 8 ángulos iguales a éste, el error absoluto total cometido será de 2,175º. El error relativo es del 0,6%. Estos errores son perfectamente asumibles en un contexto escolar, además la precisión de la herramienta hace que errores así no sean apreciables. En la tabla 2 se pueden ver estos cálculos aplicados al resto de ángulos.

Lados	Ángulo central	Tangente	Aproximación por una fracción	Ángulo construido	Error absoluto por triángulo	Error total absoluto	Error relativo
5	72º	3,0776835	3/1=12/4= 3	71,565º	0,435º	2,175º	0,604%
7	51,429º	1,2539603	5/4=10/8=1,25	51,340º	0,088º	0,619º	0,172%
10	36º	0,7265425	8/11=0,7272727	36,027º	0,027º	0,274º	0,076%
11	32,727º	0,6426610	9/14=0,6428571	32,735º	0,008º	0,087º	0,024%
13	27,692º	0,5248405	11/21=0,5263158	27,646º	0,046º	0,602º	0,167%
14	25,714º	0,4815746	13/27=0,4814815	25,710º	0,004º	0,061º	0,017%
15	24º	0,4452287	4/9=8/18=0,4444444	23,962º	0,038º	0,563º	0,156%

Tabla 2. Datos exactos y aproximados para la construcción de polígonos regulares.

3.2. Construcción de un pentágono regular de modo aproximado.

Veamos cómo construir efectivamente un pentágono de modo aproximado a partir del ángulo central, conocido el radio de la circunferencia circunscrita y con un error inferior al 1%:

El primer paso esdibujar el triángulo rectángulo explicado en el apartado anterior(ver Figura 6) haciendo coincidir su vértice con el centro de la hoja extendida. (Ver Figura 7).

El primer pliegue es sobre el cateto adyacente al ángulo <A del triángulo rectángulo construido en el paso anterior y dobla la hoja en dos partes iguales si se ha colocado A (vértice A del triángulo, centro del polígono regular) en el centro de la misma. Haremos el pliegue por el cateto hasta los bordes de la hoja, doblando hacia atrás, manteniendo a la vista el ángulo central aproximado construido. (Ver Figura 7).

El segundo pliegue es sobre la hipotenusa del triángulo rectángulo. Lo realizamos colocando dos dedos sobre el vértice A y pasando otros dos por la hipotenusa hasta el borde de la hoja. Haremos este segundo pliegue hacia atrás, manteniendo a la vista el ángulo central aproximado construido. En este momento tenemos dos ángulos centrales aproximados superpuestos.

El tercer pliegue es sobre el cateto adyacente a <A, colocando dos dedos sobre el vértice A y pasando otros dos por el cateto hasta el borde de la hoja. Haremos este tercer pliegue hacia atrás, de manera que vamos creando una suerte de fuelle.

En este momento tenemos cuatro ángulos centrales aproximados superpuestos y dos dobleces en la parte de atrás que determinan cada uno de ellos medio ángulo central aproximadamente.

Para terminar la construcción del pentágono cortamos formando un triángulo isósceles que tendrá como ángulo desigual el <A y desplegamos la construcción. (Ver Figura 7).

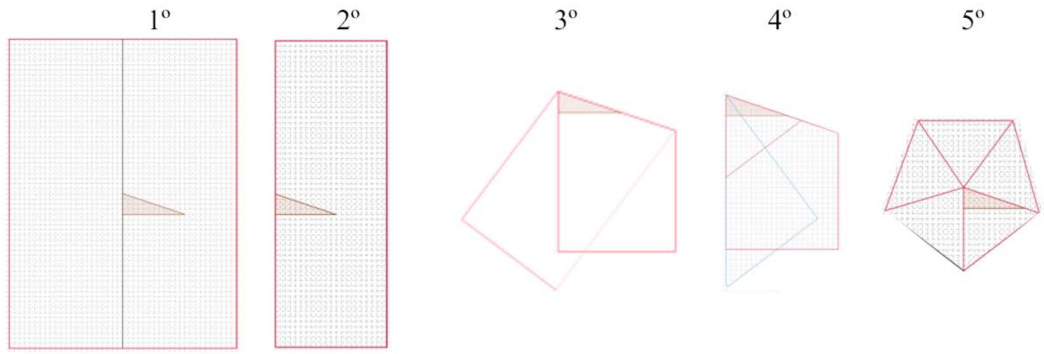


Figura 7. Construcción aproximada del pentágono regular

En los casos de polígonos con un número mayor de lados, tendremos que hacer más pliegues, pero serán del mismo tipo. Repetiremos los pasos iniciales, dibujar el ángulo central y los dobleces iniciales sobre cateto adyacente e hipotenusa. A continuación, doblando alternativamente sobre el cateto adyacente y sobre la hipotenusa, obtenemos una suerte de fuelle en el que vamos añadiendo los ángulos centrales aproximados de dos en dos.

Si el número de lados, n, es par, el fuelle queda completo definiendo n ángulos centrales aproximados, pero si es impar, tras varios pliegues, quedarán definidos n-1 ángulos centrales aproximados y otros dos ángulos que aproximan la mitad del ángulo central. Tras realizar el plegado, cortamos el fuelle, de modo que en cada capa de papel formamos un triángulo isósceles con el ángulo desigual en <A marcando para ello dos veces el radio de la circunferencia circunscrita. De este modo obtenemos n triángulos isósceles que al desplegar la hoja forman el polígono regular de n lados.

Hacemos notar que podríamos tratar de reducir el error en algunas de estas construcciones, podríamos construir el polígono de k lados a partir del de 2k lados o viceversa. Por ejemplo, entre el polígono de 5 lados –error total de 2,175º– y el de 10 lados –error total de 0,274º– podríamos refinar la construcción del pentágono mediante la unión de los vértices alternos del decágono. No exploraremos esta posibilidad en este artículo, ya que la reducción del error podría quedar enmascarada por el mayor número de pliegues necesarios.

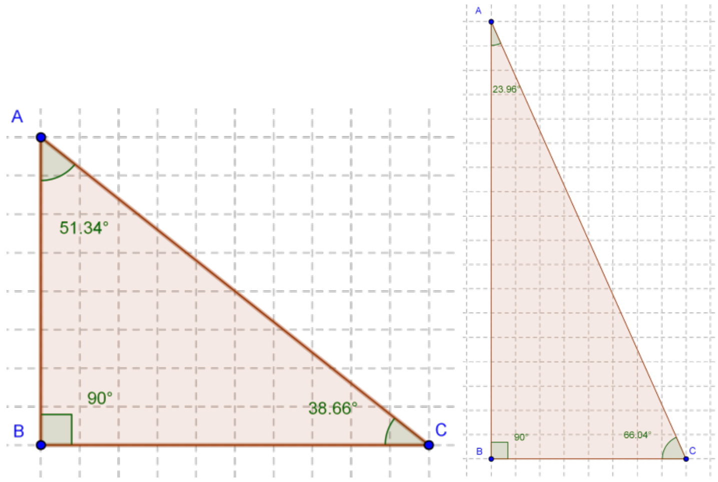


Figura 8. Triángulos rectángulos construidos para aproximar los ángulos centrales de heptágono (51,34º) y pentadecágono (23,96º).

3.3. Comparación con el método escolar habitual.

Una vez construidos los polígonos regulares con el método aproximado, podríamos preguntarnos si realmente hemos ganado respecto al método gráfico que se muestra en muchos manuales escolares. Nos referimos al método en el que se divide el diámetro de la circunferencia circunscrita en tantas partes como lados tendrá el polígono y se traza una semirrecta desde un punto exterior. En la figura 8 podemos ver la construcción de un eneágono realizada mediante este método escolar con ayuda del software de geometría dinámica GeoGebra. Hemos realizado una ampliación para resaltar que dicha construcción es aproximada (ver Figura 9, debajo). Este hecho no se hace notar a los alumnos, lo que es una opción didáctica tradicional que oculta las limitaciones del instrumento “regla y compás” anteriormente expuestas y no favorece la discusión sobre la conveniencia de hacer construcciones aproximadas si esa aproximación es suficientemente buena.

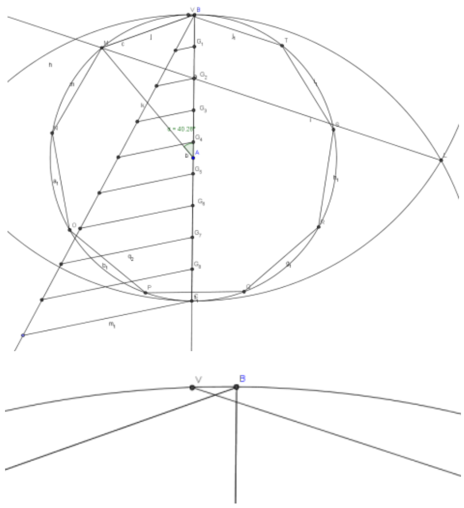


Figura 9. Construcción aproximada del eneágono regular mediante el método escolar.

Mostramos a continuación (ver Tabla 3) los errores absolutos y relativos cometidos al construir diversos polígonos regulares con el método escolar habitual.

Lados	Ángulo central exacto	Ángulo construido escolar	Error absolutopor triángulo	Error total absoluto	Error relativo
5	72º	71,95º	0,05º	0,25º	0,069%
7	51,429º	51,52º	0,091º	0,637º	0,177%
10	36º	36,36º	0,36º	3,6º	1%
11	32,727º	33,15º	0,423º	4,653º	1,293%
13	27,692º	28,21º	0,518º	6,734º	1,871%
14	25,714º	26,26º	0,546º	7,644º	2,123%
15	24º	24,58º	0,58º	8,7º	2,417%

Tabla 3. Errores en la construcción de polígonos regulares – método escolar.

Comparamos en la Tabla 4 los errores absolutos cometidos por el método propuesto aquí –calculados con GeoGebra– y el método escolar habitual que dan idea del desvío entre la construcción exacta y la obtenida con ambos métodos.

Lados	Error total absoluto método propuesto	Error total absoluto escolar
5	2,175º	0,25º
7	0,619º	0,637º
10	0,274º	3,6º
11	0,087º	4,653º
13	0,602º	6,734º
14	0,061º	7,644º
15	0,563º	8,7º

Tabla 4. Comparación de errores entre ambos métodos de construcción de polígonos.

Podemos observar que el método propuesto es más exacto dado que mantiene el error absoluto por debajo de 1º a partir del polígono de 7 lados, mientras que el método escolar es más inexacto cuantos más lados tiene el polígono a construir.

3. Aprovechamiento didáctico en el aula

Consideramos que en alumnos de ESO y particularmente en el último curso, donde ya hay conocimientos básicos de trigonometría, sería posible y conveniente un estudio detallado de estas construcciones aproximadas. Este trabajo permitiría poner en práctica una aplicación tanto de las aproximaciones como de las herramientas básicas de trigonometría. En cursos inferiores no podríamos justificar la procedencia del grado de aproximación de las construcciones, aunque podrían medir los ángulos efectivamente construidos y compararlos con las medidas de los ángulos centrales de los polígonos regulares. Tanto en un caso como en otro habría que hacer referencia a las diferencias entre las matemáticas “formales” que permiten considerar ángulos de 71.57º, por ejemplo, y las limitaciones que impone el doblado de papel con errores dependiendo del tipo de papel utilizado y de las habilidades manuales de cada uno por ejemplo.

Pasamos a describir la actividad propuesta y los objetivos que pretendemos conseguir con ella:

Título: “Construcción de polígonos regulares doblando papel – cálculo de los errores cometidos”.

Objetivos:

-Construir polígonos regulares doblando papel y GeoGebra.

-Calcular los errores absolutos y relativos cometidos.

-Reflexionar sobre la diferencia de precisión según el instrumento empleado.

-Reflexionar sobre la potencia de los cálculos matemáticos para determinar el error de una construcción por encima de un análisis visual.

Conocimientos previos:

-Elementos básicos de un polígono regular.

-Trigonometría elemental: Funciones trigonométricas básicas y sus inversas.

-Conceptos de error absoluto y relativo.

-Manejo básico de GeoGebra: Construcción de polígonos regulares y menú circunferencia, construcción del centro de una circunferencia dados varios puntos de la misma.

Actividades:

1-Construir pentágonos, heptágonos, decágonos y endecágonos con GeoGebra, medir sus ángulos centrales con el programa.

2-Imprimir los polígonos creados con GeoGebra y medir sus ángulos centrales con transportador.

3-Construir pentágonos y heptágonos doblando y cortando papel y medir sus ángulos centrales con transportador. (Se les proporciona el triángulo central aproximado según las figuras 6 y 7)

4-Construir una tabla con los resultados anteriores.

5-Comentar los resultados obtenidos en la tabla. (Todavía sin completar las filas correspondientes a decágono y endecágono)

Es de esperar que la tabla tenga una columna casi idéntica para todos los alumnos en la columna que refleje los datos obtenidos a partir de GeoGebra, y diferencias mayores o menores en las otras dos columnas. Esto puede dar lugar a un debate sobre la exactitud de unos métodos y otros cuando se construyen polígonos regulares.

6-Una vez institucionalizados como exactos los valores obtenidos con GeoGebra, ampliar la tabla con los errores absolutos y relativos cometidos al medir ángulos en una construcción exacta en papel y al medir ángulos en una construcción aproximada.

Es de esperar que el mero hecho de medir con el transportador de lugar a imprecisiones y diferencias entre unos alumnos y otros, lo que debe ser objeto también de debate.

7-Justificación del proceso aproximado propuesto. Se proponen varias cuestiones a discutir:

¿Por qué a partir del triángulo central dibujado en la hoja podemos construir el polígono regular?, ¿esta construcción es aproximada?, ¿porque estamos doblando papel y cometemos inexactitudes?, ¿porque los propios triángulos son algo inexactos?

Dado que se les ha dado los triángulos que generan los polígonos regulares y conocen trigonometría pueden aplicar la función inversa de la tangente –por ejemplo– y deducir el ángulo que efectivamente han utilizado en la actividad 3. En este momento, si no lo han deducido se debe explicar el proceso de elección del triángulo que ayuda a aproximar el ángulo central.

8-Investigación: Proponer distintos triángulos o distintos procesos que sirvan para construir decágonos y endecágonos. Medir el error cometido.

Aun siendo una actividad abierta, se espera que construyan diversos triángulos rectángulos, como los mostrados en la actividad 3, sobre las hojas cuadriculadas tratando de que el cociente entre los lados opuesto y adyacente aproxime la tangente del ángulo central que se trate. Por ejemplo, las parejas siguientes de lados opuesto y adyacente aproximan bien la tangente de 36º (0,726542).

Cateto opuesto: 7 unidades. Cateto adyacente: 10 unidades. 7/10=0,7.

Cateto opuesto: 8 unidades. Cateto adyacente: 11 unidades. 8/11=0,727273.

Esta última es la mejor aproximación construible de la tangente de 36º en la hoja de papel cuadriculado descrita anteriormente. En este caso también es posible que algunos alumnos argumenten que el ángulo central es la mitad que en el caso del pentágono y por tanto ya lo conocemos.

Proponemos la realización de un trabajo conjunto GeoGebra-lápiz/papel, que ya se ha mostrado de gran utilidad, al promover distintos puntos de vista y distintas formas de reflexión de los alumnos (Iranzo y Fortuny, 2009).Se propone que la parte final del trabajo sea un "problema" para los alumnos, en el sentido de que deban buscar una estrategia propia de resolución.

4. Conclusiones

En este artículo hemos propuesto un método parcialmente generalizable para la construcción mediante plegado de papel de polígonos regulares sujeto únicamente a las limitaciones físicas del papel. Este proceso parte de los conceptos de ángulo central y de la construcción exacta o aproximada de estos ángulos. Además hemos comparado este método con el habitualmente mostrado en los manuales escolares.

En las actividades pretendemos aunar la construcción manipulativa de polígonos regulares junto con la construcción con GeoGebra de los mismos y la valoración de las aproximaciones obtenidas comparándolas con el resultado exacto obtenido con el ordenador. Además proponemos una pequeña actividad de investigación que permita una reflexión en mayor profundidad sobre lo realizado.

Consideramos de interés didáctico optar por hacer explícito el hecho de que, en ocasiones, las soluciones matemáticas pueden o deben ser aproximadas. Además consideramos que el conjugar en una misma actividad varios instrumentos (doblado de papel, regla y compás y GeoGebra) enriquece la discusión matemática en clase.

De este modo queremos hacer ver la terna que debe convivir en la enseñanza actual de las Matemáticas: Una parte manipulativa que permita acercarse al problema, un apoyo informático que facilite las tareas y ayude a superar las limitaciones de las técnicas manipulativas y unas técnicas formales que ayuden a demostrar o discutir los hechos matemáticos que sea necesario en cada caso.

Bibliografía

Alegría, P. (2006). *Geometría recortable. Sigma*, 28, 95-115.
Alsina, A., Burgués, C. y Fortuny, J.M. (1988). *Construir la Geometría*. Síntesis, Barcelona. España.
Baena, J. (1991). *Papiroflexia: Actividades para investigar en clase de matemáticas. Suma*, 9, 64-66.
Boakes, N. J. (2009). *Origami Instruction in the Middle School Mathematics Classroom: Its Impact on Spatial Visualization and Geometry Knowledge of Students. RMLE Online: Research in MiddleLevelEducation*, *32*(7), 1-12.

Caboblanco, J. (2010). *Papiroflexia y matemáticas en educación primaria. Uno: Revista de Didáctica de las Matemáticas*, 17(53), 38-44.

Demaine, E.D. y O'Rourke, J. (2007*) Geometric Folding Algorithms: Linkages, Origami, Polyhedra.* Cambridge University Press, New York.EEUU.

Iranzo, N. y Fortuny, J.M. (2009).*La influencia conjunta del uso de GeoGebra y lápiz y papel en la adquisición de competencias del alumnado. Enseñanza de las Ciencias*, 27(3), 433-446.

Oller, A. M. (2008). *De rectángulos y hexágonos. Una actividad para aproximarse a la investigación en matemáticas. UNIÓN [en línea],* recuperado el 15 de febrero de 2015 de http://www.fisem.org/www/union/revista13.php

Royo, J. I. (2002). *Matemáticas y papiroflexia. Sigma*, 21, 175-192.

Agradecimientos

Este trabajo ha sido desarrollado por el grupo de investigación "S119-Investigación en Educación Matemática" financiado por el Gobierno de Aragón y el Fondo Social Europeo. También fue parcialmente financiado por el Ministerio de Economía y Competitividad de España (Proyecto EDU2015-65378-P).

Alberto Arnal-Bailera: Profesor de Didáctica de las Matemáticas en la Universidad de Zaragoza (desde 2009). Profesor de Matemáticas en Enseñanza Secundaria (1996-2012). Doctor en Didáctica de las Matemáticas (2013, Universidad Autónoma de Barcelona). albarnal@unizar.es

- Datos para la publicación:
  - Licenciado en Matemáticas por la Universidad de Zaragoza, España (1995).
  - Doctor en Didáctica de las Matemáticas por la Universidad Autónoma de Barcelona, España (2013).
  - Profesor de Matemáticas en Enseñanza Secundaria (1996-2012).
  - Profesor de Didáctica de las Matemáticas en la Universidad de Zaragoza desde 2009.
  - Residencia en Zaragoza, España.
  - Mis intereses de investigación giran en torno a la Didáctica de la Geometría tanto en Primaria como en Secundaria.
  - Proyectos y grupos de investigación:
    - Proyecto de investigación del Ministerio de Economía y competitividad de España: EDU2012-31464
    - GIPEAM –Grupo de Investigación en Práctica Educativa y Actividad Matemática–
    - Grupo Autonómico S119 –Investigación en Educación Matemática (financiado por el Gobierno de Aragón y el Fondo Social Europeo).

UNIÓN
REVISTA IBEROAMERICANA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA
www.fisem.org/web/union
http://asenmacformacion.com/ojs/index.php/union/index

ISSN: 1815-0640
Número 45. Marzo 2016
Página 285-293

El rincón de los problemas

Estímulo del pensamiento matemático. Una experiencia didáctica con profesores, usando un acertijo.

Uldarico Malaspina Jurado
Pontificia Universidad Católica del Perú – IREM
umalasp@pucp.edu.pe

Problema

*Construir una matriz con más de 15 números naturales, de modo que si alguien selecciona en ella un número **m**, no dice cuál es, sino solamente en qué columna(s) está ubicado, se puede identificar el número **m** sin mirar la matriz.*

Con una solución de este problema, en el contexto que explico a continuación, me propongo ilustrar aspectos importantes del pensamiento matemático, como son *analizar, conjeturar, demostrar o descartar lo conjeturado, y crear.*

Este problema surgió en un taller con profesores de primaria, como un reto nuevo ante la presentación de un conocido juego de "adivinación" que hice usando un arreglo rectangular (una matriz) de números naturales del 1 al 15 (Figura 1), en el cual cualquiera de los participantes en el taller seleccionaba un número y solo me decía en qué columnas estaba ubicado. Sin mirar el arreglo rectangular, yo "adivinaba" qué número había sido seleccionado.

D	C	B	A
8	4	2	1
9	5	3	3
10	6	6	5
11	7	7	7
12	12	10	9
13	13	11	11
14	14	14	13
15	15	15	15

Figura 1. Matriz con números naturales del 1 al 15

Naturalmente, el primer reto era descubrir "el truco" para poder "adivinar" el número seleccionado. El problema y la secuencia en clase en el taller resultó tan interesante, que dio lugar a una historieta que escribí con este tema para el Ministerio de Educación del Perú, en un proyecto que apoyaba UNICEF.

En tal historieta, una pareja de niños de primaria (Carlos y María) hacen "el truco" a su profesor (Pedro) (Figura 2.) y le piden que los ayude a construir un arreglo rectangular con más números para que sus amigos no piensen que el truco consiste simplemente en memorizarse todas las ubicaciones de los números. Partes de esa historieta ilustran este artículo.

Como se ve, el arreglo rectangular de números tiene 8 filas y 4 columnas y estas últimas están identificadas con las letras D, C, B y A, para facilitar el mensaje en el que se diga en qué columnas está el número seleccionado.

El lector queda invitado a usar la matriz de números dada en la Figura 1 y a averiguar cómo, conociendo sólo en qué columnas está ubicado un número, se puede “adivinar” – en verdad deducir – cuál es tal número. Esta es una característica importante del pensamiento matemático: *analizar*; lo cual supone observar, hacerse preguntas, buscar una estructura, examinar casos particulares, buscar relaciones lógicas, practicar el ensayo y error.

A continuación escribiré algunas observaciones, conjeturas y procedimientos que surgieron en el taller con los profesores – algunos de los cuales se plasmaron en la historieta – ante el reto inicial de descubrir el truco.

Observación: (De carácter global). Con 8 filas y 4 columnas hay 32 lugares en la matriz para ser ocupados con números naturales del 1 al 15; esto significa que necesariamente algunos números estarán en más de una columna

Observaciones de casos particulares: Les pedí que me digan en qué columnas estaban algunos números para yo “adivinar” qué número habían escogido y que prestaran mucha atención a esos casos particulares. En la Figura 2, como parte de la historieta, se ilustran dos casos particulares, pues se ve que el profesor escoge el número 5 y comunica a sus alumnos que ha escogido un número que está en las columnas C y A y María le dice inmediatamente que el número que escogió es el 5. Posteriormente escoge el 13, comunica que es un número que está en las columnas D, C y A y Carlitos le dice inmediatamente que el número que escogió es el 13.

Figura 2: María y Carlos juegan con su profesor Pedro

Preguntas a partir de los casos particulares:

- ¿Qué relación hay entre el número 5 y las columnas C y A?
- ¿Qué relación hay entre el número 13 y las columnas D, C y A?

Para responder las preguntas invité a observar con más detenimiento la matriz con los números (Figura 1), formularse nuevas preguntas y hacer alguna(s) *conjetura(s)*. En un grupo de trabajo se llegó a las siguientes *conjeturas*:

- *5 tiene que ser el único número que esté en las columnas C y A.*
- *13 tiene que ser el único número que esté en las columnas D, C y A*.

Usted, amigo lector, se da cuenta por qué se hacen estas conjeturas ¿verdad? Tómese unos segundos para verificar empíricamente las conjeturas mirando la matriz y para encontrar una razón lógica para que las conjeturas sean verdaderas.

Escoja usted un número, o más, diferente(s) de 5 y 13; formule conjetura(s) similar(es) a las anteriores y verifique que se cumplen. Por ejemplo, 11 es el único número que está en las columnas D, B y A.

Luego que los profesores verificaron que las conjeturas enunciadas se cumplen en todos los casos y en consecuencia son verdaderas, formulé la siguiente pregunta:

¿Qué afirmación general se puede inducir a partir de estas proposiciones verdaderas?

Lo invitamos, amigo lector, a hacer una pausa y escribir la afirmación general que usted considera que se puede deducir.

Posiblemente usted llegó a una proposición equivalente a la siguiente:

- *En la matriz dada, no pueden existir dos números naturales **m** y **n** entre 1 y 15 inclusive, (**m** ≠ **n**), que figuren en las mismas columnas*

Observamos que si esta proposición no fuera verdadera, sería imposible deducir qué número se eligió, conociendo solo en qué columnas está, porque, por ejemplo, si los números ***m*** *y* ***n*** están ambos en las columnas A, C y D, y una persona escoge ***m***, deberá decir que se encuentra en tales columnas, pero “el adivinador” tendría información de dos números y no sabría si se trata de ***m*** o de ***n***.

Entonces formulé la siguiente pregunta:

Al construir la matriz de la Figura 1, ¿con qué criterio se ha decidido en qué columna(s) debe figurar cada número?

Para obtener la respuesta, sugerí, nuevamente, analizar casos particulares y hacer algunas conjeturas.

Observaron:

- El número 1 está solamente en la columna A; el número 2 solamente en la columna B; el número 3 en las columnas A y B; ….

Un profesor afirmó:

- Todos los números impares están en la columna A

Una colega hizo una aclaración al respecto: Eso es cierto, pero los impares están también en otras columnas; o sea que no están solamente en la columna A

Un grupo hizo la siguiente *conjetura*:

- Cuanto mayor es el número, en mayor número de columnas está.

¿Esta conjetura es verdadera o falsa? Verificaron que, por ejemplo, 5 es mayor que 4, y 5 está en dos columnas mientras 4 solo en una; 7 es mayor que 5 y figura en tres columnas, mientras que 5 solo figura en dos; sin embargo 8 es mayor que 7 y figura solo en una columna. Esto último es un *contraejemplo* para la conjetura, y en consecuencia **no** es verdadera y la descartamos.

Otro grupo hizo la siguiente *observación*:

- Los únicos números que figuran en una sola columna son el 1, el 2, el 4 y el 8.

Esta observación fue complementada con la siguiente:

- Los números 1, 2, 4 y 8 están solamente en las columnas A, B, C y D respectivamente y encabezan estas columnas:

D	**C**	**B**	**A**
8	4	2	1

Entonces, sugerí examinar qué pasa con los números que están en dos columnas.

Escribieron todos los casos:

El 3 en la B y la A;

El 5 en la C y la A;

El 6 en la C y la B;

El 9 en la D y la A;

El 10 en la D y la B;

El 12 en la D y la C.

Pregunta: ¿Qué relación hay entre el número y las columnas en las que está ubicado?

Retomaron el hecho que 3 está en B y en A y advirtieron que B está encabezado por el 2 y A está encabezado por el 1… ¡y 2 + 1 es 3 !

Similarmente: 5 está en C y A; los números que encabezan estas columnas son 4 y 1; ¡ y 4 + 1 es 5 !

Ante estas verificaciones y otras similares, los invité a formular una conjetura y enunciaron la siguiente:

Conjetura:

- *Los números que están en dos columnas, están en las columnas cuyas "cabezas de columna" suman ese número.*

¿Cómo demostramos o descartamos esta conjetura? Tratándose de una forma de construir la matriz de un conjunto finito de números, verificamos en todos los casos y no encontramos un contraejemplo, por lo cual, la conjetura es verdadera.

Pregunta: ¿Se puede generalizar la proposición enunciada en la conjetura?

Observaciones:

- El 7 está en tres columnas: la A, la B y la C; y la suma de los números que encabezan estas columnas es 1 + 2 + 4, que es 7.

- El 14 está en tres columnas: la B, la C y la D; y la suma de los números que encabezan estas columnas es 2 + 4 + 8, que es 14.

Conjetura:

- Los números que están en tres columnas, están en las columnas cuyas “cabezas de columna” suman ese número.

Esta conjetura fue demostrada como la conjetura anterior y se formuló la siguiente observación:

Observación:

- 15 es el único número que está en las cuatro columnas y la suma de los cuatro números que son cabeza de columna es 1 + 2 + 4 + 8 = 15.

Así se agotó el análisis para todos los números y para los cuatro casos (en una columna, en dos columnas, en tres y en cuatro). Teníamos información suficiente para enunciar las reglas de construcción de la matriz de números. Para llegar a enunciarlas, solicité que cada grupo haga el experimento de construir la matriz de números de la Figura 1, haciendo uso de las observaciones y proposiciones examinadas. Así lo hicieron, con apoyo de la intuición, y luego de propuestas, comentarios y ajustes, se llegó a las siguientes reglas:

Regla 1: Poner como cabeza de las columna A, B, C y D a los números 1, 2, 4 y 8 respectivamente.

Regla 2: Expresar cada uno de los otros once números como una suma de los números cabeza de columna, sin repetir sumandos.

Regla 3: Escribir cada uno de los otros once números solamente en las columnas correspondientes a los sumandos con los que fue expresado tal número usando la regla 2.

Algunos profesores manifestaron que con todo lo hecho ya estaba claro cuál era “el truco” para “adivinar” el número si alguien nos da como información en qué columnas de la matriz está. ¿Usted se anima a enunciarlo, amigo lector?

Llegamos a la siguiente regla para deducir (“adivinar”) de qué número se trata y sugirieron llamarla “regla clave”

Regla clave: Si se tiene la información de las columnas en las que está un número, entonces ese número es la suma de los números que encabezan tales columnas.

Se hicieron algunas verificaciones; por ejemplo, si mirando la matriz, alguien escoge el número 11 y da como información que está en la columnas D, B y A, “el adivinador” suma 8 + 2 + 1 y así “adivina” que el número escogido es el 11. Ciertamente, “el adivinador” debe tener en la memoria qué números encabezan las columnas A, B, C y D.

Luego de la alegría de haber descubierto el truco, surgieron nuevas preguntas:

Pregunta: ¿Por qué este truco funciona así?

Pregunta: ¿Se puede usar cualquier número como cabeza de lista y la regla clave sigue funcionando?

Fue fácil responder a la segunda pregunta haciendo algunas experiencias; por ejemplo con los números 1, 2, 3 y 4 como cabezas de lista. Pronto aparecieron los tropiezos, pues el 5 es 3 + 2 pero también es 4 + 1, lo cual significaría que finalmente se tendría que ubicar en las cuatro columnas… Además los números del 11 al 15 no pueden expresarse como suma de estas cabezas de lista, sin repetir sumandos.

Entonces surge la pregunta:

Pregunta: ¿Qué de especial tienen los números 1, 2, 4 y 8 para que todos los números naturales del 1 al 15 se puedan expresar usando a estos como sumandos y sin repeticiones?

Una primera observación fue la siguiente:

Observación: 2 es el doble de 1; 4 es el doble de 2; y 8 es el doble de 4.

Sugerí usar símbolos matemáticos para expresar esta observación. Así, escribieron:

$$2 = 2x1$$

$$4 = 2x2$$

$$8 = 2\ x4$$

Sugerí que observen la presencia muy especial, muy fuerte del número 2 y que esto se traduzca en la simbolización.

Luego de unos minutos llegaron a lo siguiente:

$$2 = 2x1 = 2$$

$$4 = 2x2 = 2^2$$

$$8 = 2\ x4 = 2x\ 2^2 = 2^3$$

Con lo cual una profesora observó que todos los números cabeza de columna pueden expresarse como potencias de 2:

$$1= 2^0$$

$$2 = 2^1$$

$$4 = 2^2$$

$$8 = 2^3$$

Pregunta: ¿Y para qué sirve esto si lo que tratamos de saber es por qué estos números son buenos para ser cabeza de columna?

Sugerí que recuerden que el sistema de numeración decimal que usamos para escribir los números naturales mayores que 9, en verdad son códigos que resultan de agrupaciones y reagrupaciones de diez en diez y que también pueden usarse códigos que resulten de las agrupaciones y reagrupaciones de dos en dos de los elementos de un conjunto. En concreto, les pedí que escriban el código que expresa la cantidad de vocales de nuestro abecedario castellano, usando solamente agrupaciones de dos en dos y los símbolos 0 y 1. Llegaron al código correspondiente a cinco en el sistema de base dos (binario), como se muestra en la Figura 3.

Como puede observar, amigo lector, el código es 101 y las columnas, de derecha a izquierda, corresponden, según las agrupaciones y reagrupaciones de dos en dos, respectivamente, a elementos sueltos (1); a óvalos sueltos que agrupan a dos elementos (0); y a rectángulos sueltos que agrupan a dos óvalos (1).

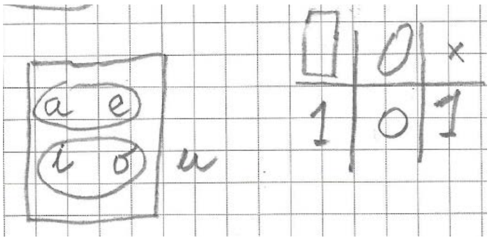


Figura 3. Codificación de un conjunto de cinco elementos, haciendo agrupaciones y reagrupaciones de dos en dos

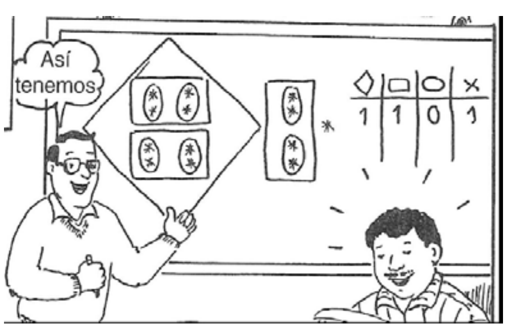


Figura 4. . Codificación de un conjunto de trece elementos, haciendo agrupaciones y reagrupaciones de dos en dos.

Les pedí que hagan algo análogo con el número 13. Tuvieron que añadir una columna más a la izquierda, considerando ahora rombos sueltos agrupando a dos rectángulos (Como se ve en la Figura 4). Tarea importante – espontánea y orientada – fue encontrar las similitudes entre los códigos binarios de los números 5 y 13, con la ubicación del 5 y el 13 en la matriz dada (en qué columnas están). Ciertamente, se usaron las observaciones ya hechas y las reglas que habíamos encontrado.

Luego de una fase de exploración bastante animada, con codificaciones, decodificaciones y comparaciones, los grupos concluyeron que existe gran relación entre las columnas denominadas A, B, C y D y las columnas usadas al escribir códigos haciendo agrupaciones y reagrupaciones de dos en dos.

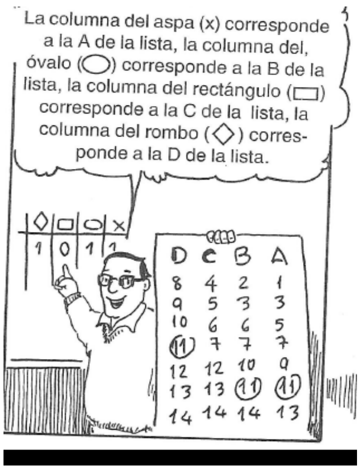


Figura 5. Correspondencia entre el código en base dos de un conjunto de once elementos, y la ubicación del número 11 en la matriz,

Así, el 13 está en las columnas D, C y A; y por otra parte, el 13 en base 2 (haciendo agrupaciones y reagrupaciones de 2 en 2) se codifica 1 1 0 1. Los 1 indican su presencia en la columnas D, C y A y el 0 su no presencia en la columna B. De esta manera, decir que un número está en las columnas D, C y A equivale a decir que se trata de un número que en base 2 se escribe 1101 y para “adivinar” de qué número se trata, basta decodificar y en cualquiera de los casos, eso se hace sumando $1 + 2^2 + 2^3$.

Así quedó aclarado el "misterio" del juego de "adivinar" el número pensado y propuse pasar a otro aspecto importante del pensamiento matemático: *crear*.

Propuse pensar en una manera de modificar el juego, haciendo alguna variación o añadido a la matriz dada. Surgieron dos ideas:

- ampliar la matriz dada escribiendo más números en las columnas
- hacer una matriz usando la base tres

Los grupos que optaron por la primera idea observaron que tendrían que usar por lo menos una columna más y superaron fácilmente la dificultad inicial de escribir el número cabeza de la nueva columna, que la llamaron E. Ud., amigo lector, puede hacer una pausa para encontrar tal número.

¡Claro! Es el 16. Con esta nueva columna, elaboraron la matriz correspondiente, con 31 números naturales, que es una solución del problema planteado al inicio de este artículo. No la escribo para dar paso a la satisfacción personal de los lectores, que estoy seguro podrán escribirla, luego de todo el análisis expuesto y disfrutar "adivinando" números que escojan sus amigos en esa matriz, sabiendo solamente en qué columnas está ubicado.

Los grupos que optaron por la segunda idea, consideraron cuatro columnas y pusieron como cabeza de columna a los números 1, 3, 9 y 27. Encontraron "sorpresas" – situaciones diferentes en relación a la experiencia usando base dos – al escribir los números en un arreglo rectangular y finalmente obtuvieron un conjunto adecuado de números de los cuales escoger para "adivinar".

Amigo lector, queda invitado a vivir estas experiencias.

Consideraciones finales

1. La experiencia didáctica muestra formas de estimular el *pensamiento matemático*, a partir de una situación lúdica, que encierra un problema matemático. Como lo dijimos al inicio del artículo, consideramos cuatro características fundamentales del pensamiento matemático, que las hemos destacado en la experiencia descrita y ahora nos referimos a ellas con más detalle:

    i. *Analizar*, lo cual conlleva observar; plantear(se) preguntas; examinar casos particulares; practicar el ensayo y error así como el tanteo inteligente; descubrir relaciones lógicas; buscar una visión global, una estructura.

    ii. *Conjeturar*, lo cual conlleva formular hipótesis y generalizar; es decir, ir más allá de los casos particulares (intuir "lo general en lo particular"); sistematizar y representar.

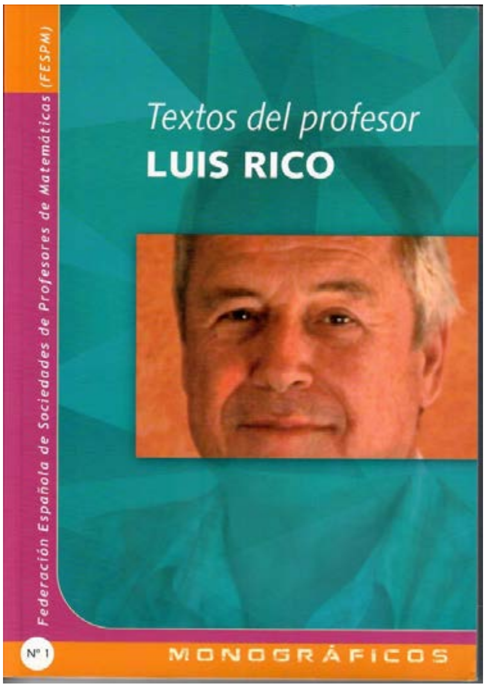
    iii. *Demostrar o descartar lo conjeturado*, lo cual conlleva resolver problemas; argumentar; hacer demostraciones; dar contraejemplos.

    iv. *Crear,* lo cual conlleva establecer conexiones dentro de la propia matemática y con otros campos del conocimiento; hacer contextualizaciones; formular hipótesis; inventar nuevos problemas.

2. La resolución y creación de problemas, así como la comprensión y elaboración de demostraciones de proposiciones, brindan excelentes oportunidades para desarrollar el pensamiento matemático, con el fuerte apoyo de la intuición.
3. Es muy importante que las experiencias de aprendizaje – en todos los niveles educativos – se desarrollen poniendo énfasis en el estímulo del pensamiento matemático. Así se contribuirá a generar una actitud científica de los estudiantes y a una formación para el autoaprendizaje, con espíritu crítico y creativo, lo cual es fundamental no solamente en la matemática, sino en los diversos campos del conocimiento y en la vida cotidiana.
4. Mención especial merece referirse al estímulo del pensamiento matemático en la formación de los futuros profesores y de los profesores en servicio. Es esencial que ellos vivan experiencias de aprendizaje en las que el desarrollo del pensamiento matemático predomine sobre el aprendizaje de reglas o de algoritmos, para que esta forma de aprender sea cultivada con sus estudiantes.

UNIÓN
REVISTA IBEROAMERICANA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA
www.fisem.org/web/union
http://asenmacformacion.com/ojs/index.php/union/index

ISSN: 1815-0640
Número 45. Marzo 2016
Página 294-297



Reseña del libro "Textos del profesor Luis Rico"

Durante los días 27, 28 y 29 de enero de 2016 tuvo lugar en la Facultad de Ciencias de la Educación de la Universidad de Granada un seminario de investigación en Educación Matemática cuyo hilo conductor era el homenaje al profesor Luis Rico Romero con motivo de su jubilación.

El profesor Luis Rico es un referente en la Educación Matemática y su actividad ha sido intensa y variada, desde la publicación de libros de texto a la dirección de tesis doctorales, desde el impulso a la investigación en perspectiva internacional a la participación activa en diversos comités nacionales e internacionales sobre currículos, itinerarios educativos, pruebas PISA, informe TEDS, etc.

Por este motivo, la Federación Española de Sociedades de Profesores de Matemáticas, FESPM, en colaboración con la OEI, la Universidad de Córdoba y la Universidad de Granada, ha publicado el libro "Textos del profesor Luis Rico", que reproduce escritos de Luis Rico representativos de su trayectoria.

En esta obra se han seleccionado trabajos que representan y reconocen la relevante trayectoria profesional e investigadora del profesor Luis Rico. La actividad investigadora de Luis se caracteriza principalmente por su enmarque en equipos de trabajo sin descuidar sus contribuciones personales.

Los trabajos de Luis Rico que se desarrollan en el libro se pueden encuadrar en cinco líneas de investigación de gran relevancia que se pueden clasificar en tres apartados:

1.- Pensamiento Numérico

- *Estudio metodológico del número fraccionario en el 6º nivel de E.G.B.* Es una publicación hecha en colaboración por el Grupo de E.G.B. de la A.P.M.A.

UNIÓN
REVISTA IBEROAMERICANA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA
www.fisem.org/web/union
http://asenmacformacion.com/ojs/index.php/union/index

ISSN: 1815-0640
Número 45. Marzo 2016
Página 294-297

(Asociación de Profesores de Matemáticas de Andalucía) en el año 1984. Ve la luz en la revista Épsilon, voz de una de las dos sociedades de profesores de matemáticas existentes en esos años en Andalucía.

La finalidad de este trabajo no es el estudio de los contenidos relativos al concepto de Número Racional, sino su didáctica. Por ello se considera prioritario dar respuesta a dos cuestiones básicas: por qué deben estudiarse los Números Racionales y cómo debe hacerse este estudio

Para dar respuesta a esta cuestión se destaca el uso social y la necesidad del dominio de los conceptos relativos a las fracciones, y en concreto se centra en la idea de fracción que, históricamente, ha sido su idea fundamental. En la primera parte de este trabajo se recorre la evolución y uso que históricamente ha experimentado la fracción y en una segunda parte se hace una recopilación de los usos actuales de las fracciones.

Se termina con una reflexión final para indicar que este trabajo representa las líneas generales de una metodología activa para el aprendizaje del concepto de fracción, y de sus operaciones, por parte del alumno de 11 años.

- *Conocimiento numérico y formación del profesorado.* Conferencia inaugural del curso académico en la Universidad de Granada el año 1995.

Presenta reflexiones que abordan uno de los campos que es posible y necesario abordar desde la Universidad y desde los departamentos universitarios: la preparación científica y metodológica rigurosa, de profesionales cualificados de la educación.

2.- Diseño, Desarrollo e Innovación en el Currículo de Matemáticas

- *Los organizadores del currículo de Matemáticas.* Publicado en el año 1997 por la editorial Horsori - ICE Universitat de Barcelona.

Se hace una presentación extensa y autónoma de cada uno de dichos organizadores, de sus bases conceptuales y de su aplicación práctica para el estudio de algunos temas. Se toma la opción de presentar cada uno de los organizadores independientemente: currículo oficial, estructura de los contenidos, análisis fenomenológico, errores y dificultades, modelos y

UNIÓN
REVISTA IBEROAMERICANA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA
www.fisem.org/web/union
http://asenmacformacion.com/ojs/index.php/union/index
ISSN: 1815-0640
Número 45. Marzo 2016
Página 294-297

representaciones, materiales y recursos y evolución histórica de los conceptos matemáticos que se pueden contemplar en el diseño de una unidad didáctica.

- *Los procesos de cambio curricular en Matemáticas. Fundamentos y Resultados*. Conferencia impartida el año 2014 en la I Jornada IBERCIENCIA - Matemática en Buenos Aires 17 y 18 julio 2014 y organizada por la OEI (Organización de Estados Iberoamericanos).

Para dar respuesta el autor se centra en dos aproximaciones diferentes y complementarias. La primera se refiere a los aspectos estructurales de la noción de currículo matemático. La segunda aproximación destaca que estamos en una ciencia social, en una ciencia humana, no sólo una ciencia formal. Tiene componentes formales importantes, pero es una ciencia inmersa en la historia, en la sociedad y en los procesos de cambio.

Se considera el currículo una herramienta profesional para el profesor, una estructura conceptual de naturaleza dinámica. Sobre estas ideas se desarrollan las reflexiones sobre el cambio curricular: estructura y dinamismo, estructura y procesos de cambio.

Se termina planteando un debate sobre los diseños curriculares actuales que están principalmente organizados en función de competencias.

3.- Formación del Profesorado de Matemáticas

- *El método del análisis didáctico*. Artículo publicado en Unión, Revista Iberoamericana de Educación Matemática, el año 2013.

Los objetivos y fines del análisis didáctico se estudian desde:

- El análisis en perspectiva didáctica.
- El análisis conceptual.
- El análisis de contenido.

Se presentan sus peculiaridades, se establecen comparaciones entre las distintas perspectivas y se estudia su aplicación al desarrollo curricular.

Análisis conceptual y análisis de contenido son métodos de investigación consolidados en la historia del pensamiento y también en la investigación educativa. Su adecuación a la Didáctica de la Matemática ha hecho surgir en

ISSN: 1815-0640
Número 45. Marzo 2016
Página 294-297
www.fisem.org/web/union
http://asenmacformacion.com/ojs/index.php/union/index

pocos años nuevas ideas en el campo de la investigación en Didáctica de la Matemática.

Como complemento se presenta una Genealogía de la Educación Matemática en España, elaborada por el profesor José Gutiérrez de la Universidad de Granada, en la que a modo de árbol genealógico se presentan las raíces de la Educación Matemática en España hasta la figura de Luis Rico con la primera Cátedra de Didáctica de las Matemáticas.

Quiero aprovechar la ocasión para, de nuevo, felicitar y darle la enhorabuena a Luis por este merecido homenaje a toda una trayectoria de dedicación a la Educación Matemática. Estamos seguros que seguirá en la brecha y que podremos seguir contando con él en el ilusionante empeño de mejorar esa educación.

Y a los que lean estas líneas me permito recordarles el consejo con el que Javier Peralta acaba el epílogo al libro, parafraseando la recomendación de Laplace con respecto a Euler: "*Leed a Luis Rico, él es el maestro de todos nosotros*".

Serapio García Cuesta
Servicio Publicaciones FESPM

UNIÓN
REVISTA IBEROAMERICANA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA

ISSN: 1815-0640
Número 45. Marzo 2016
Páginas 1

www.fisem.org/web/union
http://asenmacformacion.com/ojs/index.php/union/index

Unión. Revista Iberoamericana de Educación Matemática es una publicación de la Federación Iberoamericana de Sociedades de Educación Matemática **(FISEM)**. Tiene una periodicidad trimestral, de modo que se publican cuatro números al año, en los meses de marzo, junio, septiembre y diciembre. Es recensionada en ***Mathematics Education Database*** y está incluida en el catálogo ***Latindex***.

UNIÓN
REVISTA IBEROAMERICANA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA
ISSN: 1815-0640
Número 45. Marzo 2016
Página 02-05
www.fisem.org/web/union
http://asenmacformacion.com/ojs/index.php/union/index

EDITORIAL

Estimados colegas y amigos:

Siempre es motivo de gran satisfacción para nosotros el poder completar otro de los números de nuestra revista. Eso es lo que sentimos en el momento en que proporcionamos a la comunidad Iberoamericana este número 45. Esperamos con él, contemplar las diversas líneas de investigación de nuestros lectores, buscando así ser fieles a los objetivos de Unión.

Al igual que en los números anteriores, la primera sección corresponde siempre a la firma invitada, que presenta un artículo de un invitado especial. En este volumen contamos con la participación de Luc Trouche, investigador de la didáctica de las matemáticas francesas, muy productivas. Es profesor en el Institut Français de l'Éducation, Escuela Normal Superior de Lyon. Es autor de muchos libros y artículos científicos. El artículo que Trouche escribe en este número de UNIÓN lleva por título "*Prendre en compte les métamorphoses du Numérique vers une approche documentaire du didactique*" y está incluido en uno de los temas de investigación de Trouche, que es la del estudio del trabajo documental de profesores, en particular, sus aspectos colectivos. Estudio de los procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas en entornos de computación. Le agradecemos la oportunidad que nos ofrece para difundir en nuestra comunidad un artículo no publicado.

Además del artículo de Trouche, esta edición cuenta con más de trece artículos y un relato de experiencia. El primer artículo de Padrón, presenta un examen de lo que piensan y observan algunos maestros que enseñan matemáticas en Paraguay, en relación con el afecto de sus estudiantes a las matemáticas. El segundo, "*Estrategia para ampliar la visión de las matemáticas y suscitar el Interés por la Investigación*" es un artículo de Cruz-Huertas. Vargas, presenta los resultados de una prueba en dos diferentes grupos de estudiantes del curso de farmacología, área de la salud, con el fin de evaluar las fortalezas y debilidades de las matemáticas básicas. Rosa, Damazio y Dorigon reflejan, en base a los supuestos de la teoría histórico-cultural, "*Propuesta de Davydov y colaboradores para la introducción en la enseñanza del concepto de ecuación*". "*A resistência à transformação do texto* *pedagógico do planejamento do ambiente de modelagem matemática na prática pedagógica escolar*", es el tema del artículo de Silva y Oliveira; Rodríguez presenta una introducción histórica a las matemáticas, y una breve introducción a la biomatemática. "*Cartografía como propuesta metodológica en la educación matemática"* es el título del artículo de Ruidiaz. Larraín discute cómo el análisis del error matemático ayuda a los maestros a incrementar y profundizar en el conocimiento y la comprensión del pensamiento matemático de sus estudiantes. "*Secuencia didáctica para el autoaprendizaje de la Simplificación de Fracciones con el uso de la tecnología en estudiantes universitarios*" es el título del artículo de Salazar, Lagarda, Sánchez y Luque. Además, incluimos un artículo de Baldini y Cyrino que trata sobre "*Elementos de la práctica de un profesor de matemáticas sobre el uso del software GeoGebra*". Y también incluimos, "*Un estudio sobre el uso de las tecnologías digitales en el proceso de visualización y representación geométrica para la comprensión y resolución fotoproblemas con los estudiantes de la escuela primaria*", presentado por Borges y Sales Oliveira. Meneghetti y Bega investigan cómo actualmente los materiales didácticos manipulables (MDM) se utilizan en las clases de matemáticas en la Educación Básica. Por último Martínez-Pañeda nos presenta el artículo con el título: "*MATLAB: Una herramienta para la didáctica del método de elementos finitos*".

El número 45 presenta en su sección "Relato de experiencias", el trabajo de Arnal-Bailera titulado "*Investigación de la construcción de polígonos regulares por doblado de papel*".

En la sección de problemas, los valiosos aportes del profesor Uldarico Malaspina Jurado, están publicados en este volumen, con el título "*Estímulo del Pensamiento matemático. Una experiencia didáctica con profesores usando un acertijo*".

La Reseña foi elaborada por Serapio García Cuesta del libro "*Textos del profesor Luis Rico*". En esta obra se han seleccionado trabajos que representan y reconocen la relevante trayectoria profesional e investigadora del profesor Luis Rico.

Gracias a todos los que contribuyeron de manera directa o indirectamente con este número de la Revista. Buena lectura!

Celina Abar

Sonia Igliori

Estimados colegas e amigos:

Sempre é motivo de muita satisfação, para nós, poder completar mais um número dessa nossa Revista. É assim que sentimos neste momento quando colocamos à disposição da comunidade espano americana esse número 45. Esperamos com ele contemplar os diversos interesses de pesquisa de nosso leitores, buscando dessa forma sermos fiéis aos propositos da UNIÓN.

Como nos demais números nossa primiera seção é sempre aquela da firma invitada, na qual se divulga um artigo de um convidado especial. Neste volume temos a hora de contar com a participação de Luc Trouche, um pesquisador da didática da matemática francesa, muito produtivo. Ele é professor do Institut français de l'Éducation, École Normale Supérieure de Lyon. É autor de livros e de muitos artigos científicos. O artigo que Trouche apresenta neste número da UNIÓN intitula-se: "*Prendre en compte les métamorphoses du Numérique vers une approche documentaire du didactique*" e se insere em uma das temáticas de pesquisa de Trouche, qual seja aquela do "Estudo do trabalho documental dos professores, en particular de seus aspectos coletivos. Estudo dos processos de ensino e da aprendizagem das matemáticas nos ambientes informatizados". Agradecemos a ele a oportunidade que nos ofereceu de divulgar em nossa comunidade um artigo inédito.

Além do artigo de Trouche essa edição conta com mais 13 artigos e um relato de experiência. O primeiro artigo, de Padrón, apresenta um exame do que pensam e observam alguns professores que lecionam Matemática no Paraguai, em ligação com ao afeto de seus alunos à Matemática. O segundo, **"***Estrategia para ampliar la visión de las matemáticas y suscitar el interés por la investigación*" é o artigo de Cruz-Huertas. Vargas apresenta resultados de um teste em dois grupos diferentes de alunos do curso de farmacología, área da saúde, com vistas a avaliar os pontos fortes e fracos em matemática básica. Rosa, Damazio e Dorigon refletem, com base nos pressupostos da Teoria Histórico-Cultural, "*Proposição de Davýdov e colaboradores para introdução ao ensino do conceito de equação*". "*A resistência a transformação do texto pedagógico do planejamento do ambiente de modelagem matemática na prática pedagógica escolar*" é a temática do artigo de Silva e Oliveira; Rodríguez apresenta uma introdução histórica à matemática, e uma breve introdução à biomatemática. "*Cartografia como proposta metodológica na Educação*

Matemática” é o título do artigo de Ruidiaz. Já Larrain discute como a análise de erros matemáticos ajuda os professores a aumentar e aprofundar seu conhecimento e compreensão do pensamento matemático dos seus alunos. *“Secuencia didáctica para el autoaprendizaje de la simplificación de fracciones con uso de tecnología en estudiantes universitários*” é o título do artigo de Salazar, Lagarda, Sánchez, e Luque. Temos ainda o estudo de Baldini e Cyrino que trata de “*Elementos da prática de uma Comunidade de Prática de professores de Matemática na utilização do Software GeoGebra*”. E também “*Um estudo sobre o uso das tecnologias digitais no processo de visualização e representação geométrica para a compreensão e a resolução de fotoproblemas, com alunos do Ensino Fundamental*” foi apresentado por Borges, e Sales Oliveira. Meneghetti e Bega investigaram como atualmente os Materiais Didáticos Maninupáveis (MDM) têm sido utilizados nas aulas de matemática da Educação Básica. E por fim é apresentado o artigo de Martínez-Pañeda com o título: “*MATLAB: Una herramienta para la didáctica del Método de los Elementos Finitos*”

O número 45 reapresenta a seção “Relato de experiência” com o trabalho de Arnal-Bailera intitulado “*Investigando la construcción de polígonos regulares mediante doblado de papel*”.

Na seção de problemas, contribuições preciosas de Uldarico Malaspina Jurado, temos em volumen 45 "*El rincón de los problemas. Estímulo del pensamiento matemático. Una experiencia didáctica con profesores, usando un acertijo*.”

A resenha foi elaborada por Serapio García Cuesta sobre o livro “*Textos del profesor Luis Rico*”. Nesta obra foram selecionados trabalhos que representam e reconhecem a relevante trajetória profissional e investigadora do professor Luis Rico.

Muito obrigada a todos que contribuiram direta o indiretamente com este número da Revista e boa leitura!

Celina Abar

Sonia Igliori

UNIÓN
REVISTA IBEROAMERICANA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA
ISSN: 1815-0640
Número 45. Marzo 2016
Página 06
www.fisem.org/web/union
http://asenmacformacion.com/ojs/index.php/union/index

Firma Invitada: *LUC TROUCHE*

In previous years my research has been dedicated to the study of ICT integration in Mathematics Education. In particular, I have studied the interplay between instrumentation processes and conceptualization processes. This work inspired me to study in particular the teacher's role, introducing the notion of orchestration to model the management of available artefacts (for teaching a particular mathematical topic) in the classroom, and developing this concept in a joint work with Paul Drijvers. Now my focus is resource design and teacher professional development in the time of digitalization. This has led me to introduce, in a joint work with Ghislaine Gueudet, the documentary approach of didactics. With this frame I analyse teacher learning through the 'lens of resources'. In this perspective, the notion of teacher resource system appears crucial in order to understand teacher (developing) knowledge and the coherence of teacher activity.

Breve CV

Luc Trouche est professeur de didactique des mathématiques à l'Institut Français de l'Éducation (Ecole Normale Supérieure de Lyon, France). Il s'est intéressé aux processus d'intégration des technologies dans l'enseignement des mathématiques avant de se consacrer à l'étude des interactions entre les professeurs et les ressources de leur enseignement.

Institut français de l'Éducation, École Normale Supérieure de Lyon, 15 parvis René-Descartes, BP 7000, 69342 Lyon cedex 07
Tel : 00 33 (6) 728 823 75 luc.trouche@ens-lyon.fr
http://ens-lyon.academia.edu/LucTrouche

UNIÓN
REVISTA IBEROAMERICANA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA
www.fisem.org/web/union
http://asenmacformacion.com/ojs/index.php/union/index

ISSN: 1815-0640
Número 45. Marzo 2016
Página 07-23

Prendre en compte les métamorphoses du Numérique : vers une approche documentaire du didactique

Luc Trouche

Resumen	La metamorfosis digital de las condiciones de enseñanza y aprendizaje conduce a un cambio de paradigma. En lugar de pensar en la integración de nuevas herramientas en los procesos de enseñanza, la cuestión es analizar la inmersión de estos procesos en nuevos entornos, ofreciendo así nuevas oportunidades para la búsqueda de recursos y el desarrollo de trabajo colectivo. Este artículo propone un nuevo enfoque teórico para analizar cómo los maestros hacen frente a estas oportunidades, y utiliza este enfoque para describir un proyecto de investigación nacional francés, el cual estudia el trabajo de los profesores con/para los recursos, teniendo en cuenta tanto los componentes individuales y colectivos. El artículo concluye poniendo en evidencia nuevos aspectos que la debe tener en cuenta. **Palabras clave: Enfoque documental didáctico, trabajo colectivo de los profesores, recursos didácticos, instrumentación, instrumentalización**
Abstract	The digital metamorphosis of teaching and learning conditions leads to a change of paradigm. Instead of thinking the integration of new tools in teaching processes, the issue is to analyze the immersion of these processes in new environments, offering new opportunities for searching resources and developing collective work. This paper proposes a new theoretical approach for analyzing how teachers are dealing with these opportunities, and uses this approach for describing a national French research project, studying teachers' work with/for resources, taking into account both individual and collective components. The paper concludes in evidencing new issues the research has to face. **Keywords**: **Documentational approach to didactics, teachers collective work, teaching resources, instrumentation, instrumentalisation**
Resumo	A metamorfose digital, das condições de ensino e aprendizagem, acarreta uma mudança de paradigma. Não se trata mais de pensar em integração de novas ferramentas nos processos de ensino, mas de analisar a imersão desses processos em novos ambientes, oferecendo-se assim novas oportunidades para a busca de recursos e o desenvolvimento do trabalho coletivo. Este artigo propõe um novo enfoque teórico para analisar como os professores estão lidando com essas oportunidades, e utiliza este enfoque para descrever um projeto de investigação nacional francês, o qual estuda o trabalho dos professores com/para os recursos, levando-se em conta os componentes individuais e coletivos. O artigo finaliza evidenciando novas direções que a pesquisa deve enfrentar. **Palavras-chave: Abordagem documental para a didática; trabalho coletivo de professores; instrumentação; instrumentalização.**

1. Introduction

La pratique, l'enseignement et l'apprentissage des mathématiques ont toujours été inséparables des artefacts qui les outillent, depuis les tablettes d'argile des écoles de scribe jusqu'aux tablettes digitales, en passant par les calculatrices. L'influence de ces artefacts sur les formes de l'activité et sur les processus de conceptualisation a été l'objet de nombreuses études et a suscité l'émergence d'approches théoriques spécifiques. Ce sont ces approches théoriques que nous considérerons dans cet article, en montrant comment les métamorphoses du numérique ont conduit à un changement de paradigme dans les recherches du domaine. Dans la deuxième section, nous nous intéresserons à l'évolution des questionnements. Nous proposerons, dans une troisième section, une approche théorique prenant en compte ces évolutions. Dans une quatrième section, nous présenterons un programme national de recherche, en cours, qui exploite cette approche. La cinquième section mettra en évidence les nombreuses pistes de recherche, au niveau international, que ce programme ouvre désormais[1].

2. L'évolution des questionnements

Je montrerai cette évolution de deux façons. D'abord en m'appuyant sur la littérature de recherche internationale, ensuite en considérant mon expérience propre de chercheur.

2.1. D'un Handbook à l'autre

Pour décrire cette évolution, je me baserai d'abord sur les « Handbooks of Mathematics Education », qui, édités tous les dix ans, sont un bon baromètre des recherches du domaine. En 2003 et 2013, ce sont les mêmes éditeurs (A.J. Bishop, M.A. Clements, C. Keitel, J. Kilpatrick, & F.K.S. Leung) qui ont coordonné cet ouvrage. J'ai participé, dans chacun de ces ouvrages, à l'écriture d'un article de synthèse sur les technologies dans l'enseignement des mathématiques (Lagrange *et al.*, 2003; Trouche *et al.,* 2013). Relisant, avec un peu de recul, ces articles, je réalise l'ampleur des évolutions entre ces deux dates.

En 2003, l'article de Lagrange *et al*., basé sur une vaste revue de la littérature de recherche, au niveau international de 1992 à 1998, met en évidence une prise de conscience de : la *complexité* des processus d'intégration de la technologie dans l'enseignement des mathématiques ; de la *nécessité du temps* pour réaliser cette intégration ; de la nécessité de prendre en compte le *potentiel*, mais aussi les *contraintes* des outils ; de l'importance de *repenser les situations mathématiques* pour prendre en compte ce potentiel et ces contraintes ; de l'importance cruciale du *rôle du maître* pour *orchestrer* ces situations au profit des apprentissages mathématiques des élèves. On peut dire que cet article témoigne de la fin d'une certaine naïveté, portée par beaucoup d'enseignants pionniers, mettant dans la technologie l'espoir d'un enseignement et d'un apprentissage des mathématiques plus facile.

---

[1] Cet article est écrit en français. Nous nous en excusons pour les lecteurs de la revue, et nous espérons que cette langue ne sera pas un obstacle à la compréhension : le portuguais et le français sont des langues si proches! Pour des éclairages complémentaires, les lecteurs pourront se référer à deux articles se situant dans le m^me cadre conceptuel, et publiés récemment en portugais (Gueudet & Trouche, 2016; Rocha & Trouche, 2016).

En 2013, dix ans plus tard, l'article que j'ai coordonné était basé sur une étude des curricula de mathématiques dans des contextes culturels et sociaux variés. Les différences entre les deux articles sont flagrantes. Ces différences apparaissent déjà dans le vocabulaire : en 2003 les mots « ressource » et « collectif » ou « communauté » n'apparaissent pas. En 2013, le mots « ressource », « collectif » et « communauté » apparaissent respectivement 40, 15 et 20 fois. Le contexte a clairement changé, marqué désormais par l'essor d'Internet, des ressources en ligne et des nouvelles formes de communication et de partage. L'article lui-même souligne trois évolutions majeures dans les études sur les technologies dans l'enseignement : de l'étude de l'intégration des technologies à l'étude de l'accompagnement des usages ; de l'étude de la diffusion des ressources (du haut vers le bas) à l'étude de la circulation des ressources (prenant en compte la créativité des acteurs) ; de l'étude des processus individuels à l'étude des processus collectifs.

2.2. La dynamique des orchestrations instrumentales

Cette évolution, je la réalise aussi, rétrospectivement, à travers mon expérience de chercheur.

D'abord du point de vue des concepts que j'ai été amenés à travailler. Pour prendre en compte la responsabilité du maître dans la gestion didactique des outils mathématiques pour résoudre un problème mathématiques donné, j'ai proposé (Trouche, 2004) la notion *d'orchestration instrumentale*. Cette notion, décrivant les configurations didactiques pensées par le maître *avant* la classe, puis exploitées *dans* la classe, a été enrichie par Drijvers (Trouche & Drijvers, 2010) avec la notion de « performance didactique », décrivant les ajustements que je maître fait, en interaction avec ses élèves, quand surgissent dans la classe des éléments imprévus. L'analyse du travail du maître conduit alors à prendre en compte un ensemble d'éléments hétérogènes : un répertoire de situations mathématiques déjà appropriées, un ensemble d'artefacts disponibles dans l'environnement de la classe, et un répertoire d'orchestrations déjà expérimentées. Ce point de vue rompt avec une conception linéaire (le professeur a un objectif didactique, il choisit alors une situation mathématique – un problème – adapté à cet objectif, puis il choisit des artefacts pertinents pour soutenir la résolution du problème, et il décide enfin une orchestration de la situation prenant en compte ces artefacts). Le point de vue naturel est alors beaucoup plus ouvert, et conduit à l'utilisation de la notion large de ressources : le professeur à un ensemble de ressources à sa disposition (certaines déjà intégrées, d'autres qu'il va rechercher pour atteindre ses objectifs). C'est alors cet ensemble de ressources, très ouvert, que le professeur va mettre au travail pour construire la matière de son enseignement.

C'est ensuite, et *en même temps* devrait-on dire, l'expérience des dispositifs de recherche dans lesquels j'ai été impliqué. Parmi ceux-ci, l'expérience du SFoDEM[2] a été certainement critique. Le SFoDEM (Guin & Trouche, 2008) a rassemblé, de 2000 à 2006, une centaine d'enseignants de mathématiques du second degré, avec une

---

[2] Suivi de Formation à Distance des Enseignants de Mathématiques, http://www.math.univ-montp2.fr/sfodem

vingtaine de formateurs, répartis dans 4 groupes de formation sur des thèmes variés (renouvellement de l'enseignement de l'analyse avec des calculatrices graphiques, transition entre l'arithmétique et l'algèbre avec des tableurs, statistique et logiciels de simulation, géométrie place et logiciels de géométrie dynamique). L'objectif était d'aider les enseignants à franchir le pas, entre une appropriation personnelle des technologies et leur utilisation dans le cadre de la classe. Pour atteindre cet objectif, trois hypothèses étaient faites : les enseignants ont besoin de ressources adaptées, qui sont pour le moment manquantes ; la réalisation de telles ressources suppose un travail collaboratif entre enseignants, et un aller-retour entre une conception a priori et des expérimentations en classe ; l'exploitation de telles ressources suppose aussi un modèle commun, qui puisse faciliter aussi bien leur conception que leur appropriation. C'est finalement la recherche de ce modèle de ressources (Figura 1) qui a tiré le développement du SFoDEM.

Figura 1. Le modèle de ressources du SFoDEM.

Ce modèle prend en compte les orchestrations à travers la notion de scénario d'usage, mais il fait apparaître plus *qu'une* ressource. Il s'agit bien d'un système articulé de ressources, dont la structure répond à un ensemble d'exigences :

- Permettre le repérage de cette ressource dans un vaste répertoire d'objets pédagogiques grâce à des métadonnées qui sont rassemblées dans une fiche d'identification ;
- prendre en compte les besoins du professeur et ceux des élèves (à travers la fiche élève et la fiche professeur) ;
- séparer les aspects techniques des aspects pédagogiques, en donnant, dans une fiche technique, des éléments permettant de mettre en œuvre cette ressource dans une variété d'environnements technologiques ;
- transmettre l'expérience, aussi des professeurs (grâce aux comptes rendus d'expérimentation) que des élèves (en récupérant des traces critiques de leurs travaux) ;
- inscrire enfin chaque ressource comme élément d'un processus vivant (c'est le rôle du CV, *curriculum vitae*, de la ressource, situant chaque nouvel utilisateur comme co-concepteur d'une œuvre commune).

On le voit bien, à travers l'histoire de ce dispositif, comme à travers l'évolution des problématiques de recherche, c'est, pour l'étude du travail du professeur, un nouveau paysage conceptuel qui se dessine : un professeur utilisateur, créateur et partageur de ressources. L'approche théorique que nous allons présenter maintenant propose une modélisation de ce nouveau paysage.

3. Une approche documentaire du didactique

Présenter une approche théorique suppose de donner à la fois les concepts sur lesquels elle repose, de montrer leur opérationnalité et les outils méthodologiques permettant de la développer, ce que nous allons faire dans les trois paragraphes qui suivent.

3.1. Une dialectique essentielle entre *ressources* et *document*

Aucune théorisation de peut naître du vide : elle se nourrit nécessairement de théorisations antérieures. L'approche documentaire est née de l'approche instrumentale (Rabardel, 1999), intégrée en didactique des mathématiques (Guin & Trouche, 1999) pour analyser le développement *d'instruments* à partir de l'utilisation d'artefacts dans le travail mathématique. Ce développement était vu à travers l'imbrication de deux processus, *instrumentation* (tout artefact ouvre de nouvelles possibilités, et oppose de nouvelles contraintes, à l'action d'un individu), et *instrumentalisation* (tout processus *d'adoption* d'un nouvel artefact est aussi un processus *d'adaptation* de celui-ci). L'instrument est alors défini comme une entité hybride, composée à la fois de l'artefact, ou de la partie de cet artefact mobilisée dans une activité finalisée, et du *schème* qui permet l'organisation de cette activité. La notion de schème est reprise de Vergnaud (1996), qui le définit comme *l'organisation invariante de l'activité* pour résoudre un type de problème ou réaliser un type de tâche. Un élève développe ainsi par exemple, à partir d'une calculatrice, un instrument pour l'étude des variations d'une fonction numérique, ou un instrument pour calculer des limites de fonction.

L'approche documentaire (Figura 2) va travailler ce modèle en l'étendant, pour prendre en compte le nouveau paradigme 'ressources' dont nous avons mis en évidence la pertinence. Au lieu d'artefacts dont il faudrait penser l'intégration, nous nous intéressons aux 'ressources' déjà là, en donnant à ce terme le sens général proposé par Adler (2000), de tout ce qui *re-source*, ou est susceptible de *re-sourcer* l'activité du professeur[3] : un manuel scolaire, les traces d'une interaction avec un collègue ou un élève, un site web, une vidéo, bref, un ensemble de choses de granularités différentes, qui vont être organisées par l'activité finalisée du professeur.

[3] No texto original consta *re-source*, esse jogo de palavras fica bem claro na língua francesa, pois *source* significa *fonte*. Na palavra *ressource* o prefixo *re* tem o sentido de repetição de tornar de novo fonte, ou seja, de reabastecer a atividade do professor (note de la traductrice de l'article Gueudet et Trouche 2016).

Figura 2. Une représentation d'une genèse documentaire (Gueudet & Trouche, 2016).

Cet ensemble de ressources va donc être mis au travail par le professeur pour constituer la matière de son enseignement. Ce travail est finalisé (préparer une leçon donnée par exemple). Ce n'est jamais un travail isolé : tout professeur est pris dans un jeu institutionnel (dans une école) et dans un jeu d'interaction (avec des collègues, des élèves), qui sont, d'une certaine façon, co-auteurs de l'œuvre du professeur. Ce travail est la résultante des processus croisés d'instrumentalisation et d'instrumentation, qui traduisent les influences réciproques des ressources et du professeur. Il donne naissance à ce que nous avons appelé un *document*, pour reprendre un terme central de *l'architecture de l'information* (Pédauque, 2006).

L'architecture de l'information est un nouveau champ scientifique issu du monde digital qui constitue l'environnement de notre conceptualisation : dans ce domaine, un document est une entité développée avec une *intention* et pour un *usage* donné. Nous avons précisé cette notion de document en la définissant comme une entité hybride, composée à la fois *des ressources* qui ont été rassemblées, adaptées, restructurées, et d'un *schème* d'utilisation. Il s'agit ainsi de désigner une nouvelle dialectique : l'approche instrumentale considère la dialectique artefact/instrument, l'approche documentaire considère la dialectique ressources/document. Dans la pratique, nous repérons les schèmes à travers la régularité des usages que le professeur fait des ressources pour résoudre un problème d'enseignement. Ces régularités nous permettent d'inférer les *invariants opératoires* qui pilotent ces usages. Un exemple, dans le paragraphe suivant, va nous permettre de préciser les éléments structurants de cette approche.

3.2. Une illustration de l'opérationnalité de cette approche

Nous avons suivi le travail de Sophie, professeur au collège. Elle veut introduire, après une leçon sur le périmètre du cercle, une leçon sur l'aire d'un disque. Elle dispose d'un ensemble de ressources de différents niveaux : un tableau blanc interactif dans sa classe, son manuel scolaire, des anciennes leçons, un répertoire de sites web qu'elle connaît bien…

Elle commence par une recherche sur Google, avec les mots clés « aire du disque - géométrie dynamique » qui sont, pour elle, caractéristiques de la leçon qu'elle a l'habitude de faire. Elle obtient un ensemble de résultats (Figura 3), qui correspondent, pour les deux premiers, à des sites des IREM (Instituts de recherche sur l'enseignement des mathématiques, voir § 5.2), à qui elle fait confiance, car elle les connaît bien.

Environ 117 000 résultats (0,55 secondes)

Aire du disque - IREM de Lille
irem.univ-lille1.fr › Accueil du site › Collège › Sixième › Géométrie ▾
2 juin 2012 - but de l'activité : découvrir la formule de l'**aire** d'un **disque** ... Initiation à un logiciel de **géométrie dynamique**, ici GeoGebra; Savoir déplacer un ...
Vous avez consulté cette page 3 fois. Dernière visite : 08/12/15

Le pari de la géométrie dynamique pour changer notre ...
www.**irem**.ups-tlse.fr/dahan/ ▾
Le pari de la **géométrie dynamique** pour changer notre manière d'enseigner ..... 2 . **AIRE**. 2.1. **Aire du disque** (Figure 11 et Figure 11 bis : Lien_vers_Figure_11).

Aires de disques - XMaths - Calculatrices et logiciels ...
xmaths.free.fr/tice/**geometrie**/geogebra_**aire**d.htm ▾
Logiciels de **géométrie dynamique** ... Faire afficher la somme des **aires** des deux **disques**. ... La construction géométrique ne pose pas de problème.

La géométrie dynamique au collège
debart.pagesperso-orange.fr/college/ ▾
La géométrie au collège avec GéoPlan et GéoSpace. ... mathématiques du passé, qui grâce au logiciel de **géométrie dynamique**, reprennent le goût du futur . Descartes et les ... Calculs d'**aire** - Théorème de Pick ... triangle, **disque**.

Figura 3. Les premiers résultats d'une recherche sur Internet.

Elle ouvre donc le premier site, qui propose un ensemble d'éléments pour organiser la leçon visée (Figura 4) : une description générale de la leçon, des idées pour la mise en œuvre, une idée d'animation, des fichiers informatiques… On retrouve en fait l'idée du SFoDEM (Figura 1) de penser l'ensemble des aspects du travail du professeur.

Aire du disque

Samedi 2 juin 2012, par Raphaël Petit

Activité informatique dynamique permettant d'établir la formule donnant l'aire d'un disque.

Présentation :

- auteur : Raphaël Petit
- statut : activité clé en main
- but de l'activité : découvrir la formule de l'aire d'un disque

Déroulement :

- lieu : salle pupitre
- durée : 1h
- matériel enseignant : tableau numérique interactif
- matériel élève : poste informatique pour manipuler une figure en géométrie dynamique et fiche à compléter

Figura 4. Un ensemble de ressources pour soutenir le travail du professeur.

Ce site, en fait, ne lui donne rien de nouveau par rapport à ce qu'elle connaissait déjà. Elle retourne alors sur un site web qu'elle connaît bien, réalisé par une collègue pleine d'imagination[4].

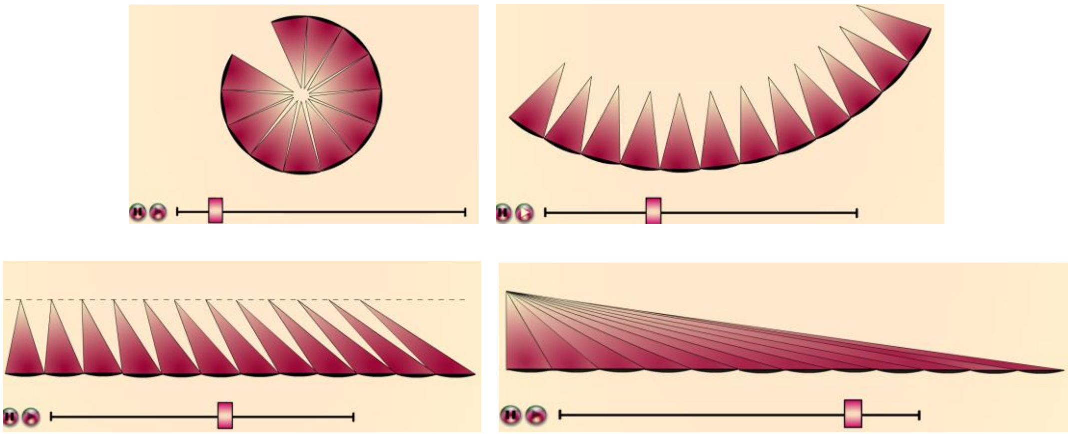


Figura 5. Une animation pour retrouver l'aire d'un disque à partir de l'aire d'un périmètre.

Elle retrouve alors l'animation que le site de l'IREM (Figura 4) exploitait aussi, mais ici dans un contexte familier (Figura 5), avec une présentation et des explications dont elle est familière : l'animation fait voir le découpage d'un disque en triangles de même aire, puis l'ouverture du disque, et le basculement de tous les triangles (sans changer leur hauteur, donc en conservant des triangles de même aire) pour obtenir un seul triangle, qui a donc pour aire le produit de la hauteur (qui est le rayon du cercle) par la base du grand triangle (qui a pour valeur approchée le périmètre du cercle, soit $2\ \pi$), divisé par 2 : on trouve bien πR^2.

La leçon de Sophie va être structurée autour de cette animation. Elle la laisse se dérouler en continu au tableau blanc interactif, sollicite l'observation des élèves, fait passer des élèves au tableau pour qu'ils gèrent eux-mêmes le déroulement de l'animation : ils la stoppent aux moments critiques pour proposer des résultats partiels (le fait que le site permette de stopper l'animation et de suivre son déroulement grâce à un curseur qui se déplace sur l'axe du temps est une fonctionnalité précieuse). Le résultat cherché apparaît alors comme le résultat de tâtonnements collectifs et de partages de conjectures.

On voit bien, à travers cet exemple, les *ressources* que le professeur a mobilisées pour sa leçon. Mais ce n'est pas seulement à partir de cette séance qu'on pourra inférer des éléments structurants du *document* que le professeur a développé. Pour pouvoir les inférer, on aura besoin de suivre le travail du professeur quand il reproduira la même leçon ou des leçons sur un sujet proche. On pourra alors inférer, à partir des invariants qui apparaîtront, des éléments du schème qui organisent son action : des invariants mathématiques (« pour démontrer des formules d'aire, on procède par découpages de surface en surfaces élémentaires dont on connaît les aires »), des invariants didactiques (« appuyer les raisonnements

[4] "Mathématiques magiques" http://therese.eveilleau.pagesperso-orange.fr

sur des animations qui mettent en évidence le passage d’un état 1 à un état 2, en montrant bien toutes les étapes intermédiaires »). Bref : l’analyse de la préparation de la leçon (le choix des ressources et la structuration de la progression) et l’analyse de la mise en œuvre (le choix et le contrôle du scénario) fournissent des informations complémentaires pour comprendre la genèse du document et les connaissances du professeur qui pilotent son travail documentaire. Ce suivi pose cependant de délicates questions méthodologiques que nous allons aborder dans la section suivante.

3.3. Un appareillage méthodologique en construction

Il s’agit en effet de suivre l’activité du professeur, à la fois en classe (ce qui n’est déjà pas si simple) et hors de la classe, dans une grande variété de lieux et de moments où se déploie son travail documentaire. Nous avons développé (Gueudet & Trouche), dans cette perspective, une méthodologie d’investigation réflexive qui consiste à mobiliser le propre regard du professeur pour rassembler les informations nécessaires sur son travail documentaire. Cette méthodologie combine un ensemble d’outils, qui sont adaptés en fonction des contextes et des objectifs particuliers de la recherche : une *visite guidée* des ressources du professeur ; un *journal de bord* dans lequel il consigne les informations concernant la préparation d’un cours particulier, pendant la période précédant le cours ; une « instruction au sosie », dans laquelle il transmet, avant son cours, toutes les informations nécessaires à quelqu’un qui aurait à faire le cours à sa place « sans que les élèves ne se rendent compte de la substitution ».

Pour repérer les éléments structurants du travail du professeur, il est nécessaire de réaliser un suivi sur la durée, permettant de voir la mise en œuvre répétée de la même leçon, ou de leçons proches. On a alors accès au cycle de vie d’une ressource, depuis son appropriation jusqu’à ses adaptations et peut-être un jour son abandon. Il est aussi nécessaire de ne pas considérer les ressources du professeur, et les documents qu’il développe, comme des éléments isolés, mais de les appréhender dans leur cohérence et leurs articulations. C’est l’intérêt de la notion de *système de ressources*, défini comme l’ensemble des ressources que le professeur s’est approprié dans le cadre de son activité finalisée. Ces ressources sont hautement structurées : par niveau de classe, par type d’activité, par ancienneté ou familiarité, par domaine mathématiques… Cette structure est explicite (par dossier, dans l’ordinateur ; sur les étagères, dans la bibliothèque…) ou implicite, dans la conscience du professeur.

Pour avoir accès à cette structure, le chercheur croise ce que lui-même peut analyser « de l’extérieur » et les représentations que le professeur donne à voir lui-même, des cartes réflexives de son système de ressource (Figura 6). Bien sûr, la carte n’est pas le territoire, et il y a sans doute un grand écart entre ce que le professeur choisit de dévoiler de ses ressources, et la réalité de son système de ressources. Mais il s’agit bien d’un élément, à prendre en compte, et à croiser avec ce que donnent les autres outils méthodologiques (visite guidée du système de ressources, suivi du cycle de vie des ressources). Cette carte elle-même doit être considérée comme un outil évolutif, le professeur pouvant la compléter ou la rectifier au fur et à mesure du suivi de son travail.

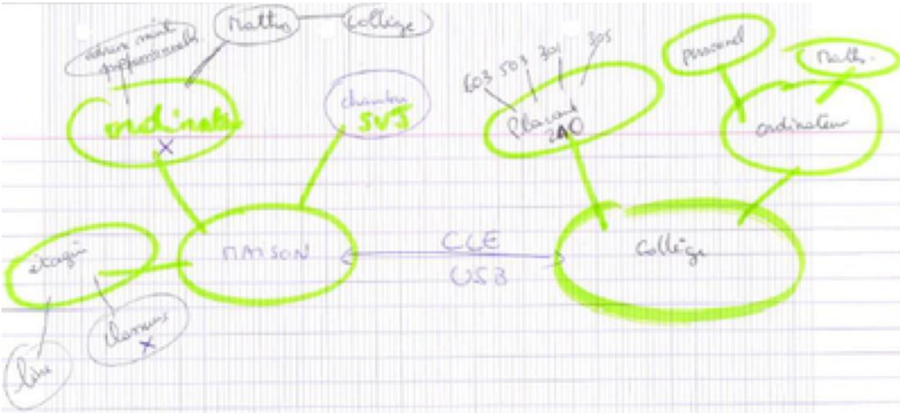


Figura 6. La carte des ressources du professeur, représentée par lui-même.

Ces outils méthodologiques ont été rassemblés, à titre expérimental, dans une « valise documentaire », donnant à voir un ensemble d'éléments que le professeur rassemble pour organiser son enseignement[5]. Cette méthodologie est actuellement mise en œuvre dans le cadre d'un projet national de recherche, que nous présentons dans la section suivante.

4. Le projet ReVEA (Ressources vivantes pour l'enseignement et l'apprentissage)

Le projet ReVEA[6] est un programme de recherche national français, financé par l'ANR (Agence nationale de la recherche). Nous en présentons les grandes lignes ci-dessous, puis proposons un focus sur l'un de ses objets, avant de souligner les nouvelles questions que ce programme de recherche ouvre.

4.1. Comprendre le travail des enseignants dans un moment de transition

Le projet ReVEA rassemble cinq structures de recherche, dont l'Institut français de l'éducation, dans le domaine de la didactique des disciplines, des sciences de l'information et de la communication, et des sciences de l'éducation. Le projet part du constat que le travail que les enseignants font réellement avec les ressources disponibles est fort peu connu. Il s'agit, sur une durée assez longue (de 2013 à 2018) de suivre le travail des enseignants avec les ressources, dans quatre disciplines : anglais, mathématiques, sciences physiques et chimiques (enseignées en France par le même professeur) et enfin technologie. Les hypothèses du projet est que ce travail documentaire des enseignants, va, dans cette période, subir des évolutions fortes, du fait des métamorphoses numériques, que ces évolutions

[5] http://educmath.ens-lyon.fr/Educmath/recherche/approche_documentaire/documentation-valise
[6] https://www.anr-revea.fr

devraient être différenciées suivant les disciplines, et que le repérage de ces variables et de ces invariants devrait permettre de mieux conceptualiser ce qu'est une ressource éducative. Une attention particulière est aussi portée, au cœur de ce projet, aux dimensions collectives du travail des enseignants.

Les analyses reposent sur le croisement de deux recueils de données : celles qui découlent de l'étude de *l'offre de ressources*, et celles qui découlent de l'étude *des usages réels*. L'offre de ressources a été étudiée à partir de l'interrogation des enseignants, formateurs, inspecteurs et chercheurs : quelles sont les ressources (manuels scolaires, logiciels, sites) qui apparaissent cruciales pour l'enseignement de la discipline en question. Les usages réels ont été étudiés à partir du suivi d'enseignants, individuellement ou collectivement, dans les quatre disciplines du projet. Le projet a développé des méthodologies propres, combinant des études quantitatives (concernant par exemple le nombre de photocopies réalisées par les enseignants dans un échantillon très vaste d'établissements scolaires) et des études qualitatives, dans la durée, d'enseignants et de collectifs d'enseignants. Pour ces suivis individuels, les éléments de méthodologie d'investigation réflexive (cf. § 3.3) ont été mis en œuvre, et transposés autant que possible aux suivis de collectifs.

Nous n'en sommes qu'au milieu du projet, mais déjà ressortent certaines tendances. Des différences fortes (elles ne sont pas nouvelles) apparaissent entre les disciplines : en anglais, les professeurs sont à la recherche de « ressources authentiques », faiblement didactisées, permettant aux élèves de pratiquer la langue au plus près de ses usages actuels, et sur des questions d'actualité (dans ces conditions, le manuel scolaire est très marginal) ; en mathématiques, le manuel scolaire reste très présent. Les ressources vidéos (par exemple le répertoire de You tube) sont de plus en plus mobilisées par les enseignants d'anglais ; les animations, par exemple en géométrie, sont de plus en plus sollicitées par les professeurs de mathématiques. Dans toutes les disciplines, le recours aux ressources d'Internet se généralise, à travers des formes de recherche et d'intégration dans les systèmes propres de ressources, très diversifiées, suivant les individus. Mais c'est probablement sur les modes collectifs de travail documentaire que les évolutions sont les plus fortes, ce que nous allons voir dans le paragraphe suivant.

4.2. Sésamath, un cas emblématique des évolutions en cours

Une des branches du programme ReVEA s'intéresse plus particulièrement au travail collectif des enseignants, dans les établissements scolaires, mais aussi en dehors, dans le cadre de dispositifs très divers permis par Internet (listes de diffusion, associations d'enseignants, sites collaboratifs…). C'est dans ce domaine que les évolutions apparaissent les plus significatives. Nous étudions plus particulièrement l'association Sésamath, dont le développement apparaît emblématique des évolutions en cours (Rocha & Trouche 2016).

L'association Sésamath[7] a été créée en 2001. Composée uniquement *d'enseignants* de mathématiques, elle a pour objectif de promouvoir les *mathématiques pour tous*, à partir d'un processus de conception collaborative de ressources pédagogiques (Figura 7).

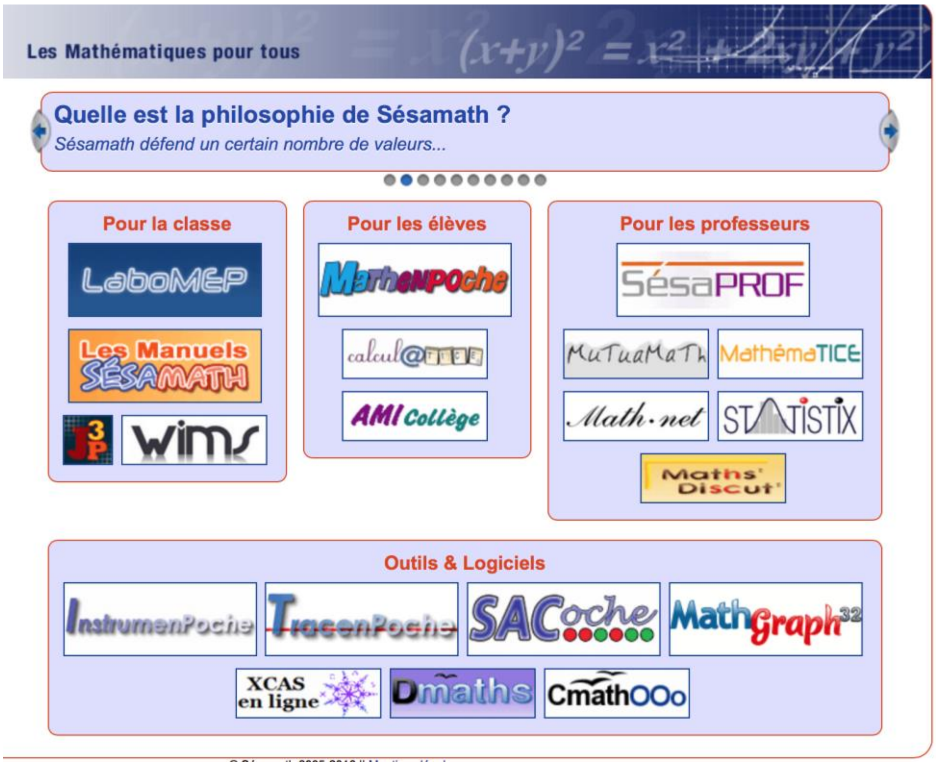


Figura 7. Le site Sésamath, porte ouverte vers un ensemble de ressources.

Sésamath a commencé, sur la base d'un petit groupe très militant, à concevoir une base d'exercices interactifs en ligne (Mathenpoche). Puis elle a agrégé de nombreux enseignants en constituant des groupes de conception de ressources sur des thèmes donnés, correspondant à des besoins réels des enseignants. Ce sont ensuite des manuels scolaires complets qui ont été développés, inter-reliés avec les bases d'exercices en ligne. Finalement, c'est tout un système de ressources (Figure 7) qui a été proposé, permettant aux enseignants de développer eux-mêmes leurs propres « petits fabriques » de ressources : c'est l'objectif de l'application LaboMep, qui permet, au niveau d'un établissement, ou d'un réseau d'enseignants, de personnaliser à partir des ressources de l'association, des recueils de ressources propres. Cela permet par exemple au professeur d'adapter des listes d'exercices aux difficultés propres de tel ou tel élève.

Dans le cadre d'une thèse de doctorat (Rocha 2016), nous suivons actuellement la conception d'un manuel de Sésamath pour le cycle 4 (classes de 5ème, 4ème, et 3ème françaises, c'est-à-dire 7ème, 8ème et 9ème grade), adapté à la

---

[7] Sésamath reprend l'expression des Contes des Mille et une Nuits: Sésame, ouvre-toi! Pour les mathématiques, une intention d'ouverture d'une univers pour sous… http://www.sesamath.net

réforme curriculaire qui devrait se mettre en place en septembre 2016. Une vingtaine d'enseignants sont à l'œuvre pour concevoir ce manuel : certains sont membres de Sésamath, d'autres non ; certains sont des concepteurs novices, d'autre non. La conception de ce manuel les met en face de difficultés inédites :

- pour la première fois, il s'agit de faire, non pas un manuel scolaire pour un niveau scolaire (un an d'enseignement), mais un manuel pour trois niveaux scolaires successifs ; pour éviter de faire des manuels trop lourds, il faut alors nécessairement penser conjointement des éléments « sur papier », et des éléments en ligne ;

- le programme à enseigner intègre des notions nouvelles pour les professeurs, en particulier des éléments d'algorithmique et de programmation. Les professeurs doivent donc concevoir des ressources pour enseigner… des notions qu'ils n'ont pas apprises eux-mêmes.

Dans cette situation, les concepteurs du manuel doivent donc mobiliser beaucoup de ressources nouvelles pour faire face à ces difficultés. Ils doivent, de plus, concevoir simultanément une œuvre commune – un manuel – et leur propre enseignement pour l'année à venir. Il y a donc un jeu entre le système de ressources collectif, qui se construit, et les systèmes individuels de ressources, qui se réorganisent. C'est ce qu'analysent actuellement les chercheurs ReVEA, et qui donne de nouvelles informations sur les systèmes de ressources, leurs structures, et la nature de leurs éléments, qui peuvent jouer des rôles critiques (ressources *génératrices* ou encore ressources *pivots*).

4.3. ReVEA, un incubateur de concepts

A travers le suivi des ressources de Sésamath, comme à travers les autres suivis de ressources, d'enseignants et de collectifs en cours dans le projet, ce sont de nouveaux outils méthodologiques qui sont éprouvés, et de nouveaux concepts qui sont travaillés. Deux d'entre eux apparaissent, aujourd'hui, particulièrement productifs, celui de *trajectoire documentaire*, et celui *d'expertise documentaire*.

Par trajectoire documentaire (Rocha 2016), nous entendons un développement conjoint : le développement professionnel de l'enseignant, et le développement de son système de ressources. L'étude des trajectoires documentaires pourrait permettre de comprendre les choix qu'un enseignant fait pour telle ou telle ressource, et les éléments structurants de son système de ressource.

Par expertise documentaire (Wang 2016), nous entendons les compétences que le professeur construit pour développer son propre système de ressources en interaction avec les systèmes de ressources de ses collègues, en rapport avec les institutions dans lesquelles il organise son enseignement. Dans cette expertise, qu'est-ce qui est spécifique de la discipline enseignée ? Dans cette expertise, qu'est-ce qui est spécifique du travail collectif des enseignants ?

A cette étape du projet, il ne s'agit que de premières ébauches conceptuelles, que le développement de ReVEA devrait permettre de préciser, et d'opérationnaliser.

5. Ouvertures internationales

Un programme de recherche national, ce sont aussi de nouvelles opportunités de collaborations internationales. Dans le cadre du projet ReVEA, par le biais de thèses, ce sont deux collaborations internationales qui se sont dessinées, la première avec le Brésil, la deuxième avec la Chine.

5.1. Le Brésil, une relation particulière des institutions avec les manuels scolaires

Invité par l'UFPE dans le cadre d'une École des hautes études de la CAPES[8], j'ai eu l'occasion de découvrir le programme PNLD[9] qui n'a pas son équivalent en France. Il s'agit d'un programme national d'évaluation des manuels scolaires, et plus généralement des ressources didactiques pour l'enseignement, évaluation d'un point de vue éthique, ergonomique et didactique. Cette évaluation est liée à une perspective d'accompagnement du travail *documentaire des enseignants, se traduisant par exemple par la conception d'un guide* méthodologique pour l'utilisation de ce matériel didactique.

Ce programme ouvre de nombreuses questions : comment les commissions PNLD travaillent-elles dans les différentes disciplines ? Quel est l'usage réel des propositions PNLD par les enseignants ? Quelle est l'influence des travaux du PNLD sur les éditeurs scolaires, et, plus généralement, sur l'offre de ressources pédagogiques ? Une réponse à l'appel d'offres CAPES-COFECUB a été proposée[10], pour traiter ces questions en relation avec le projet ReVEA. Il s'agit à la fois d'analyser les décisions didactiques que les enseignants sont amenés à prendre pour choisir et mettre en œuvre des ressources, et de développer de nouveaux moyens pour structurer cette analyse.

D'ors et déjà un étudiante brésilienne réalise sa thèse dans le cadre du projet ReVEA (Rocha, 2016), et son sujet concerne la conception du manuel Sésamath. Il y aura donc, sur ce point, matière à comparaison de deux processus de conception de manuels scolaires très différents, le premier (au Brésil) soumis à des contraintes institutionnelles fortes, le deuxième (en France) lié aux nouvelles dynamiques du travail collectif des enseignants.

---

[8] http://www.capes.gov.br/component/content/article?id=7337:ufpe-oferece-escola-de-altos-estudos-voltada-a-area-de-matematica
[9] http://portal.mec.gov.br/pnld/apresentacao
[10] Le projet PREM(Professeurs et ressources pour l'enseignement des mathématiques) est porté par l'Université fédérale du Pernambuc au Brésil, et par l'Ecole Normale Supérieure de Lyon en France). Il rassemble des didacticiens des mathématiques et des informaticiens.

5.2. En Chine, le rôle critique du travail collectif des enseignants

Une deuxième thèse (Wang, 2016), celle-ci en co-tutelle entre la Chine et la France, est intégrée dans le programme ReVEA. Il s'agit, dans ce cadre, de comparer les formes collectives du travail des enseignants autour de la conception de ressources.

Ce travail collectif, en France, existe dans des cadres particuliers. Les IREM (Instituts de recherche sur l'enseignement des mathématiques), dont nous avons déjà parlé (§ 3.2), rassemblent ainsi, depuis 1970, dans chaque université, des équipes d'enseignants d'écoles primaires, de collèges, de lycées et d'universités (Trouche 2016). Dans un cadre non hiérarchique, ils conçoivent ensemble des ressources rendues nécessaires par les changements de programme, ou pour rendre les mathématiques plus vivantes. Il s'agit de professeurs volontaires, souvent pionniers pour l'intégration de nouvelles technologies ou pour l'expérimentation de nouveaux dispositifs d'enseignement. Même si cette implication d'enseignants reste minoritaire, elle a une certaine influence dans le milieu à travers les dispositifs de formation continue. D'autres cadres de travail collectif émergent dans le fil du numérique (Sésamath par exemple, § 4.2).

En Chine, le travail collectif est une réalité, depuis de nombreuses années, reconnue institutionnellement comme une partie intégrante du travail des enseignants[11]. Les enseignants travaillent en classe devant leurs élèves moins de 10 heures par semaine, le reste du temps est essentiellement consacré à un travail sur les ressources de leur enseignement. Ce travail prend différentes formes (Pepin *et al.,* soumis) : participation, à l'intérieur de l'établissement scolaire, à des « Groupes de recherche sur l'enseignement » ou à des « Groupes de préparation des leçons », suivi, par tous les professeurs de mathématiques d'une école, d'une leçon d'un de leurs collègues. Il s'agit donc d'un cadre très privilégié pour analyser les interactions entre travail documentaire individuel et collectif, qui n'est pas propre au développement du numérique, mais qui se nourrit aussi de ce développement : le développement de petites communautés de professeurs, hors établissements scolaires, sur des thèmes particuliers, utilisant des applications de partage de vidéos, croise désormais le développement de collectifs à l'intérieur des établissements.

6. Conclusion

Les évolutions des environnements technologiques suscitent de nouveaux questionnements pour l'enseignement des mathématiques, très sensibles aux outils qu'il mobilise. Les métamorphoses numériques constituent un bouleversement complet des formes scolaires, des formes de communication et d'information, et, au-delà des formes mêmes de la connaissance. De nombreux phénomènes apparaissent, en particulier au niveau du travail documentaire des professeurs,

[11] Voir une description dans le bulletin de la CFEM, pp. 10-12 http://www.cfem.asso.fr/liaison-cfem/lettre-cfem-decembre%202015

c'est-à-dire dans leur façon de rassembler, de composer, de partager les ressources de leur enseignement.

L'approche documentaire décrite dans cet article se fixe pour objectif l'analyse de ce travail des enseignants. Elle ne prétend pas se substituer aux théories didactiques qui structurent ce champ scientifique, mais apporter un éclairage complémentaire, et développer des méthodologies qui permettent d'outiller le travail des chercheurs : suivre, dans la durée et au delà de l'espace de la classe, le travail des enseignants, dans ses composantes individuelles et collectives, suppose des outils spécifiques.

Les projets de recherche actuellement en cours dans ce domaine, au niveau national et au niveau international, mettent en évidence la complexité des problèmes et l'intérêt de leur étude. Structure des systèmes de ressources des professeurs, ressources critiques, interactions entre systèmes individuels et collectifs, schèmes de conception et d'utilisation des ressources, trajectoires documentaires, développement de l'expertise documentaire… Un vaste continent de recherche s'ouvre, nous ne sommes qu'au début de son exploration.

Bibliografía

Adler, J. (2000). Conceptualising resources as a theme for teacher education. *Journal of Mathematics Teacher Éducation*, *3*(3), 205-224.

Guin, D., & Trouche, L. (1999). The Complex Process of Converting Tools into Mathematical Instruments. The Case of Calculators, *The International Journal of Computers for Mathematical Learning*, *3*(3), 195-227.

Gueudet, G., & Trouche, L. (2016). Do trabalho documental dos professores : gênesis, coletivos, comunidades. O caso da Matemática (tradução K. Rocha), *EMTEIA*.

Guin D., & Trouche, L. (2008). Un assistant méthodologique pour étayer le travail documentaire des professeurs : le cédérom SFoDEM 2006, *Repères-IREM, 72*, 5-24.

Lagrange, J.-B., Artigue, M., Laborde, C., & Trouche, L. (2003). Technology and Mathematics Education: a Multidimensional Study of the Evolution of Research and Innovation, in A.J. Bishop, M.A. Clements, C. Keitel, J. Kilpatrick, & F.K.S. Leung (eds.). *Second International Handbook of Mathematics Education* 239-271, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht

Monaghan, J., Trouche, L., & Borwein, J. (2016). *Tools and Mathematics: Instruments for Learning*. Springer. New York.

Pédauque, R. T. (coll.) (2006). *Le document à la lumière du numérique*. C & F éditions. Caen.

Pepin, B., Xu, B., Trouche, L., & Wang, C. (soumis). Developing a deeper understanding of *mathematics teaching expertise:* Chinese mathematics teachers' resource systems as windows into their work and expertise. *Educational studies in Mathematics*.

Rabardel, P. (1999). Éléments pour une approche instrumentale en didactique des mathématiques. Actes de la Xe École d'été de didactique des mathématiques. Caen : IUFM. 202-213.

Rocha, K. (2016). Uses of online resources and documentational trajectories: the cases of Sésamath. *13th International Congress on Mathematical Education, Hamburg*, 24-31 July 2016

Rocha, K., & Trouche, L. (2016). Da produção coletiva de livros didáticos digitais aos usos feitos por professores de Matemática: o caso do grupo francês Sésamath. *EMTEIA*.

Trouche, L. (2004). Managing the complexity of human/machine interactions in computerized learning environments: guiding students' command process through instrumental orchestrations. *International Journal of Computers for Mathematical Learning,* 9, 281-307.

Trouche, L., & Drijvers, P. (2010). Handheld technology for mathematics education, flashback to the future, *ZDM, The International Journal on Mathematics Education*, 42(7), 667-681

Trouche, L., Drijvers, P., Gueudet, G., & Sacristan, A. I. (2013). Technology-Driven Developments and Policy Implications for Mathematics Education, in A.J. Bishop, M.A. Clements, C. Keitel, J. Kilpatrick, & F.K.S. Leung (eds.), *Third International Handbook of Mathematics Education* 753-790. Springer.

Trouche, L. (2016). Didactics of Mathematics: Concepts, Roots, Interactions and Dynamics from France, in J. Monaghan, L. Trouche, & J. Borwein, *Tools and mathematics, instruments for learning* (pp. 219-256). Springer

Vergnaud, G. (1996). Au fond de l'apprentissage, la conceptualisation. Actes de la 8ème Ecole d'Eté de Didactique des Mathématiques. Clermont-Ferrand : IREM (Université Clermont-Ferrand 2). 174-185.

Wang, C. (2016). Analysing teachers' expertise, Resources and Collective Work throughout Chinese and French windows. *13th International Congress on Mathematical Education, Hamburg*, 24-31 July 2016

Wenger, E. (1998). *Communities of practice. Learning, meaning, identity*. Cambridge University Press.

Luc Trouche est professeur de didactique des mathématiques à l'Institut Français de l'Éducation (Ecole Normale Supérieure de Lyon, France). Il s'est intéressé aux processus d'intégration des technologies dans l'enseignement des mathématiques avant de se consacrer à l'étude des interactions entre les professeurs et les ressources de leur enseignement.

Institut français de l'Éducation, École Normale Supérieure de Lyon, 15 parvis René-Descartes, BP 7000, 69342 Lyon cedex 07
Tel : 00 33 (6) 728 823 75 luc.trouche@ens-lyon.fr
http://ens-lyon.academia.edu/LucTrouche

UNIÓN
REVISTA IBEROAMERICANA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA
www.fisem.org/web/union
http://asenmacformacion.com/ojs/index.php/union/index

ISSN: 1815-0640
Número 45. Marzo 2016
Página 24-43

¿Qué dicen los docentes paraguayos en cuanto al afecto en el aprendizaje de la Matemática?: Una mirada desde el Curso Ñanduti

Oswaldo Jesús Martínez Padrón

Fecha de recepción: 29/10/2012
Fecha de aceptación: 04/01/2016

Resumen	En esta investigación se analiza lo que opinaron y observaron algunos docentes que enseñan Matemática en Paraguay, en relación con el afecto que tienen sus estudiantes hacia la Matemática. Los insumos fueron sometidos a un análisis de contenido y, entre los hallazgos, los docentes reportaron tener estudiantes que se muestran contrariados en la clase de Matemática. Constantemente se quejan de que es difícil, por eso la repudian y no les gusta como asignatura. También informan sobre la presencia de actitudes adversas y de representaciones sociales ligadas al fracaso. Igual, evitan resolver los problemas que se le plantean por sentir aversión hacia esta asignatura. **Palabras clave**: Afecto hacia la Matemática, Curso Ñanduti, Emociones.
Abstract	This research analyses the remarks and opinions expressed by a group of teachers of mathematics in Paraguay concerning their students' affection for this subject. The inputs were subjected to rigorous content analysis and, between the findings, the teachers reported having students who were discontented in class. They complain constantly that mathematics is a very hard subject and, in consequence, they reject it. Also, these students show a negative attitude in class and social representations linked to academic failure. As a result, they avoid solving the problems proposed in class because of their aversion towards the subject. **Keywords**: Affection towards Mathematics, Ñanduti Course, Emotions.
Resumo	Esta pesquisa examina o que pensam e observam alguns professores que lecionam Matemática no Paraguai, em ligação com ao afeto de seus alunos à Matemática. As informações recolhidas foram submetidas a um estudo de conteúdo e, entre as conclusões, os professores relataram ter estudantes que estavam descontentes na sala aula de Matemática. Eles se queixam de que a Matemática é uma matéria muito difícil é, em consequência, eles a rejeitam. Além disso, estes alunos mostram uma atitude negativa em classe e também exibem representações sociais ligadas ao fracasso escolar. Da mesma forma, eles evitam resolver os problemas propostos na classe devido à sua aversão à matéria. **Palavras-chave**: Afeição em relação à Matemática, Curso Ñanduti, Emoções.

1. Introducción

Este trabajo es una ampliación de otro publicado por Martínez Padrón (2014) donde reportó un avance sobre una experiencia enmarcada en lo que dice un grupo de docentes que laboran en la Educación Secundaria de la República de Paraguay, respecto al afecto hacia el aprendizaje de la Matemática.

Los insumos analizados emergieron de lo reportado por dichos docentes cuando participaron en un curso Iberoamericano de Formación de Profesores de Secundaria, en el área de Matemática, organizado por el Centro de Altos Estudios Universitarios (CEAU) de la Organización de Estados Iberoamericanos para la Educación, la Ciencia y la Cultura (OEI) y apoyado por la Agencia Española de Cooperación Internacional para el Desarrollo, la Federación Iberoamericana de Sociedades de Profesores de Matemáticas (FISEM), la Sociedad Canaria de Profesores de Matemáticas “Isaac Newton” y la Sociedad Andaluza de Educación Matemática “Thales”.

La dirección y diseño de este curso de formación, denominado Ñanduti, fue encomendada al Dr. Luis Balbuena Castellano, de España, quien contó con un amplio equipo de investigadores y docentes encargados de elaborar los materiales para los participantes. En la estructura del Curso Ñanduti existen varios temas y entre ellos uno denominado Afecto hacia la Matemática que, junto con los otros temas constitutivos, se crearon para atender la formación permanente de unos 40.000 docentes mediante el mejoramiento de las competencias científicas, técnicas y didácticas del profesorado de Matemática de toda Iberoamérica. Para lograrlo prevé la muestra de nuevos materiales y recursos a ser utilizados en el aula donde se enseña dicha asignatura. También destaca la necesidad de fomentar el uso de las TIC en los procesos de enseñanza y aprendizaje de contenidos matemáticos, proporcionando ideas para la dinamización de los centros educativos, y procurando, con apoyo de vías educativas no habituales, el acercamiento de los estudiantes hacia la asignatura (Balbuena y Carrillo, 2011).

La investigación que se reporta es de tipo documental, apoyada con un análisis de contenidos, y el objetivo fue analizar lo que observaron y opinaron los docentes participantes del curso respecto al afecto que tienen sus estudiantes en relación con la Matemática que aprenden. Los insumos emergieron de las entrevistas que los docentes respondieron durante el desarrollo del curso, a distancia y en referencia, como parte del Proyecto de Formación Permanente dirigido al profesorado de secundaria de Iberoamérica.

Desde el primer reporte publicado por Martínez Padrón (2014), en relación con lo que dicen los docentes paraguayos respecto al afecto que tienen sus estudiantes cuando aprenden Matemática, se indicó que el número de investigaciones que tocan ese tema y son presentadas en eventos sobre Educación Matemática parece crecer en progresión geométrica. Sin embargo, su impacto en el aprendizaje de la Matemática deja mucho que desear.

En ese documento primer, el autor presentó varios ejemplos tomados de las Reuniones Latinoamericanas de Matemática Educativa (RELME´S) y publicados en las Actas Latinoamericanas de Matemática Educativa (ALME´S). En ALME 25, autores como Rodríguez (2012) y Müller, Engler y Vrancken (2012) aseguraron que aún prevalece el fracaso en el aprendizaje de la Matemática, indicando que quienes estudian esta asignatura continúan desmotivados para aprenderla. Igualmente hizo mención a otros trabajos publicados ALME 26, destacando el de González de

Hernández (2013) y el de Paulino y Marmolejos (2013) quienes insisten en mencionar las continuas fallas que aún existen en el proceso de formación de los docentes que enseñan esta área del saber, acotando que el problema de bajo rendimiento en Matemática no siempre es culpa de los estudiantes. En relación con la RELME 27, celebrada en el año 2014, Martínez Padrón (2014) también mencionó trabajos tales como los de Parra (2013) y Camacho (2013), quienes aludieron, en sus resúmenes, cuestiones concretas que aún no logran impactar, de manera relevante, el mejoramiento del aprendizaje de la Matemática, destacando el fracaso en la formación de los docentes, la desmotivación y el escaso afecto hacia la Matemática.

También destacó que Veiga (2012), quien hace la introducción al capítulo sobre los trabajos publicados sobre la Enseñanza de las Matemática, en el ALME 25, reporta que abundan las propuestas que permiten detectar, prevenir y afrontar los obstáculos a los que se enfrentan los estudiantes en las clases de Matemática. No obstante, acota que aún prevalece el fracaso en el aprendizaje de la Matemática e indica la existencia de estudiantes que continúan desmotivados para aprenderla. La invitación es a que se siga revisando la actuación no sólo de quienes la aprenden sino de quienes la enseñan.

Problemáticas equivalentes siguen presentándose en otras RELME´S y en otros eventos tales como el Congreso Internacional de Educación Matemática (ICME), el Congreso Iberoamericano de Educación Matemática (CIBEM) y el Congreso Interamericano de Educación Matemática (CIAEM). Por tanto, se hace mención a algunos trabajos presentados en sus últimos eventos, para la fecha de esta publicación.

En relación con el ICME 12, Pepin y Son (2012) indican que, desde hace más de 30 años, el afecto ha sido un tema de interés en la investigación de la Educación Matemática y que en el informe correspondiente al ICME 11 se concluyó que el tema pasó de oculto a visible, en vista de que los factores correspondientes al dominio afectivo (motivación, valores, creencias, actitudes y otros) influyen, explícitamente, en el aprendizaje de la Matemática, dando cuenta de diferentes perspectivas de investigación utilizadas en los estudios, los cuales incluyen aspectos psicológicos, sociales, filosóficos y lingüísticos.

En el último CIBEM celebrado en Uruguay, los investigadores Flores, Medina, Peralta y Rodríguez González (2013) relacionaron emociones con el aprendizaje de la Matemática, haciendo hincapié en la necesidad de considerar los efectos de las emociones en la capacidad cognitiva de los estudiantes de bachillerato debido a que favorecen su éxito o fracaso al momento de aprender. No obstante, indican que es un aspecto poco atendido a pesar de que continúan las angustias que no terminan de ayudar en el aprendizaje de la Matemática.

Este tema también ha sido abordado desde el CIAEM. En el recién celebrado en México, en el año 2015, Ávila (2015) reportó una mirada de la investigación en Educación Matemática en México, mencionando que varios autores indican que la exploración de las cuestiones afectivas, vinculadas con la Matemática, es una cuestión reconocida como muy importante por los que enseñan, pero olvidada "conforme se avanza en los niveles escolares, porque la prioridad está en el "aprendizaje efectivo de las matemáticas"" (p. 9). Dicha autora asevera que cuando se habla de mejora del sistema educativo, es probable que los enfoques más comprehensivos requieran incorporar lo cultural, lo social y lo afectivo. Con estos acercamientos se prevé comprender mejor los fenómenos asociados a la clase de Matemática.

Puede corroborarse, en el texto, que aunque el tema de lo afectivo y el aprendizaje de la Matemática se viene desarrollando, con fuerza, desde hace unas cuatro décadas, aún existen muchas situaciones por aclarar y resolver sobre esta problemática. Por tanto, queda en entredicho asegurar que el tema sea parte de una tradición investigativa en vista de que, al parecer, se ha avanzado poco, a pesar de las abundantes investigaciones. Aún pueden concretarse muchas otras contribuciones que también dan a entender que el tema continúa vigente, dado que se eterniza el fracaso en Matemática, tanto de quienes no adquieren las competencias deseadas, como por los que no llegan a enseñarla de manera adecuada. Con frecuencia, se sigue alumbrando que el éxito en el aprendizaje de la Matemática está supeditado al buen manejo de la terna cognitivo-afectivo-social. Siendo las cosas así, se obliga a realizar abordajes más formales, profundos y multi-referenciales que tomen en cuenta la interacción de todos esos dominios y pongan en juego varios tipos de inteligencia tales como la racional, la afectiva/emocional y la social.

En Martínez Padrón (2008b) se indica que el éxito, o el fracaso, en Matemática y en procesos asociados a ella, están supeditados a muchos factores. Se reporta que lo afectivo tiene responsabilidades directas en el proceso de enseñanza-aprendizaje-evaluación de la Matemática, aludiendo a investigaciones que aseguran que su contribución, en el aprendizaje, es mucho mayor que la de otros factores tales como el cognitivo. En ese trabajo se dan evidencias para asegurar que existen creencias que, por ejemplo, pueden ser causantes de aversiones, casi colectivas, hacia la asignatura, hacia quien la enseña y hacia otros procesos concomitantes. Tales creencias, de talante negativo, tienen relación directa con la falta de empatía, las reacciones emocionales en contra de la Matemática y con las actitudes de rechazo que los sujetos expresan hacia dicha asignatura.

En este orden de ideas, Vila y Callejo (2004), Maaß y Schlöglmann (2009) y Martínez Padrón (2011b) también reportan el impacto que tienen las creencias y las actitudes en el aprendizaje de la Matemática, destacando este último que los estudiantes pierden el interés y el gusto por dicha asignatura al notar que sus bases no son suficientes para enfrentar los retos y superar algunos obstáculos que suelen presentarse en su trayectoria escolar, lo cual suele ocurrir cuando no le es posible utilizarla como herramienta para identificar, describir, explicar, contrastar, evaluar, conjeturar y predecir hechos y situaciones en diferentes momentos y contextos.

Otros factores también están presentes en el éxito, o en el fracaso, de los docentes y sus estudiantes, en relación con la Matemática que se enseña, se aprende o se evalúa, y en este documento se abordan algunos, marcando atención desde lo afectivo. A tal efecto, este manuscrito reporta un análisis de lo que observaron y opinaron los docentes participantes del Curso Ñanduti organizado por el CAEU, en relación con el afecto de sus estudiantes respecto al aprendizaje de la Matemática.

2. Metodología

2.1 Para el desarrollo del Curso:

Balbuena y Carrillo (2011) reportan que el Curso Ñanduti es un Proyecto de Formación Permanente dirigido al profesorado de secundaria de Iberoamérica. Se despliega desde una plataforma de formación a distancia y contempla actividades que abordan temas que se desarrollan en foros. Cada tema es presentado en dos fases: **una primera** apoyada en un documento (corto) elaborado por un ponente quien hace la exposición del tema y propone interrogantes a ser respondidas por los participantes, según pautas explícitas en cada caso. **Una segunda**, luego de cerrado el foro, sustentada en otro documento que amplía y profundiza la temática. Este último es entregado al cierre de cada tema del bloque en referencia y forma parte del centro virtual de recursos. Los organizadores advierten que, para efectos de la evaluación, cada participante tiene la obligación de responder las interrogantes de cada tema, lo cual puede hacerlo apoyado en actividades o experiencias.

2.2 Para la construcción del Material:

El primer documento (el corto), sobre el afecto en el aprendizaje de la Matemática, se derivó de una investigación documental que se materializó haciendo un análisis de contenido de lo propuesto sobre el tema por autores tales como Polya (1965), Schoenfeld (1992), McLeod (1992), Ponte (1994; 1999), Gardner (1998), Cooney (1999), Pehkonen (1999), Gómez Chacón (2000), Callejo y Vila (2003), Goleman (1996; 2006), Martínez Padrón (2005; 2008a; 2008b; 2009), Albrecht (2006), Vivas y Gallego (2008) y Maaß y Schlöglmann (2009). De aquí surgió una síntesis de los aspectos teórico-referenciales más relevantes, así como las actividades contentivas de interrogantes relacionadas con el tema.

Con las aportaciones de los docentes participantes del Curso desarrollado en Paraguay, se elaboró un segundo documento, ampliado, que profundizó los referentes mencionados en el primero. Entre otras cosas, se construyó considerando algunos episodios críticos reportados por los participantes, resaltando aquellos conectados con el afecto y el aprendizaje de la Matemática, sin descuidar los que tienen que ver con el dominio cognitivo y el social.

Por cuestiones de espacio no se presenta el documento completo y descrito en Martínez Padrón (2011b). No obstante, se muestran algunos segmentos de episodios críticos generados por las actividades utilizadas para la obtención de insumos analizados e interpretados en esta oportunidad.

2.3 Para el análisis de los contenidos

La consideración de toda la constelación de aspectos, previamente señalados, obliga al docente a tener claridad sobre qué, cómo y para qué procesar y analizar la gran cantidad de aspectos relativos a la Matemática que se enseña y se aprende, por el hecho de ser el responsable directo de los procesos de planificación, desarrollo y evaluación de los contenidos matemáticos que selecciona y moviliza en el aula de clases. En tal sentido, debe concentrar su atención, por ejemplo, en cómo se sienten los sujetos al momento de aprender Matemática, qué dicen, qué hacen, cómo lo hacen, por qué lo hacen o qué piensan, emergiendo de allí una robusta cantidad de datos útiles para describir, comprender o explicar tanto el proceso de aprendizaje como el de enseñanza o evaluación de los contenidos matemáticos. Otros elementos que pertenecen al mundo exterior e interior de los sujetos también son preponderantes al momento del análisis, sobre todo cuando interesa hablar del éxito, o del fracaso, de los estudiantes, de los docentes, de la escuela o del discurso utilizado en la clase.

A pesar de las consideraciones anteriores, no existió la pretensión de abordar todas esas interacciones; tampoco se exigió informaciones que den detalles sobre los tipos de inteligencia involucrados en los procesos ya mencionados. Sin embargo, se solicitó el reporte de algunos aspectos observados y de opiniones que tienen que ver con el papel que juega el afecto de los estudiantes en el aprendizaje de la Matemática, destacando que su tratamiento formal es relativamente reciente, según lo señalado por Schoenfeld (1992), McLeod (1992), Gómez Chacón (2000), Vila y Callejo (2004), Martínez Padrón (2008b; 2014) y Ávila (2015).

3. El Dominio Afectivo en la Educación Matemática

Abordar detalles en relación con el dominio afectivo obliga a revisar sus factores característicos. Bloom y otros (1977), McLeod (1992), Gómez Chacón (2000) y Martínez Padrón (2005) hacen mención de concepciones, ideas, sentimientos, apreciaciones, preferencias, valores, atribuciones, motivaciones, creencias, emociones y actitudes. Sin embargo, este documento centra su atención en los tres últimos, por configurar el conjunto básico de este dominio.

3.1 Las creencias

Cuando el objeto concreto es la Matemática, es común encontrar estudiantes, docentes y otros miembros de la sociedad que le atribuyen propiedades que, por ejemplo, la califican como difícil, aburrida o compleja. Tales calificaciones pueden generarse por impulsos a consecuencia de conocer, vivir o compartir experiencias, positivas o negativas, tanto dentro como fuera del aula donde se desarrolla la clase y confluyen diferentes fuentes que proporcionan elementos para la construcción, desarrollo, fortalecimiento, cambio, disminución o desaparición de creencias en relación con la escuela, con los docentes o con la Matemática y los procesos ligados a ella. En este sentido, están implícitas en lo que se enseña, se aprende o se evalúa, y en lo que es factible, útil o importante para los docentes o para los estudiantes

Según Quintana (2001), las creencias constituyen un elemento de conocimiento y no sólo responden a la razón, sino que también dimanan de otras fuentes tales como: (a) los sentimientos y los deseos: incluyen necesidades y conveniencias al momento de surgir el impulso interior de creer en algo o en alguien; (b) la sociedad y la cultura ambiental, estando mediado por la aculturación o la enculturación y (c) la propia voluntad de creer: los sujetos son influenciables pero poseen decisiones preferenciales en función de su personalidad y de su libertad.

Ponte (1999) agrega que las creencias proporcionan puntos de vista del mundo del sujeto, formando un substrato conceptual de vital importancia en sus pensamientos y en sus acciones. Callejo y Vila (2003) señalan que son conocimientos subjetivos referidos a contenidos concretos sobre los cuales versan; “están ligadas a las situaciones [y] se van construyendo y transformando a lo largo de toda la vida” (pp. 180-181) como producto de experiencias, informaciones y percepciones, desprendiéndose de allí unas prácticas que no siempre son fruto de un consenso, por lo que no requieren satisfacer criterios de verdad. En este sentido, Martínez Padrón (2008b) señala que se comportan como los axiomas en Matemática, por no requerir demostración alguna. La Figura 1 representa una síntesis de su conceptualización.

Creencias

Principios rectores que forman parte del conocimiento adquirido por los sujetos sobre la base de sus experiencias de vida. Tienen un carácter intersubjetivo y representan construcciones que, implícitamente, están presentes al momento de actuar ante el objeto o sujeto que las motivan.

Figura 1. Conceptualización de las creencias

3.2 Las emociones

En la Educación Matemática, el tema de las emociones ya ha sido mencionado desde hace algunas décadas. Polya (1965) venía advirtiendo que la solución de un problema de Matemática es cuestión de voluntad y que la determinación y las emociones juegan un papel importante en su resolución. No obstante, apenas en las últimas cuatro décadas es cuando se han venido concretando, con gran relevancia y profundidad, investigaciones que abordan el campo de las emociones y sus repercusiones en la Educación Matemática, de manera que su estudio puede pensarse como un tema relativamente nuevo, al igual que el de la inteligencia emocional y social. Por cierto, Goleman (2006) menciona que el entrelazamiento socio-emocional no ha permitido tener claro cuáles son las habilidades sociales y cuáles las emocionales, pues, ubica "la inteligencia social dentro del ámbito de lo emocional" (p. 90). En tal sentido, resulta cuesta arriba separar la causa de una emoción del mundo de las relaciones sociales.

Siendo las cosas así, es muy probable que aún queden muchas cosas por investigar al respecto, sobre todo cuando siguen preocupando temas tales como el fracaso escolar que no siempre se corresponde con el desarrollo cognitivo de los estudiantes sino con otros elementos o factores que lo generan, por ejemplo, la angustia, la tensión, el disgusto, la rabia, la inconsciencia social o la falta de empatía. Eso quiere decir que la situación trasciende la consideración de sólo factores debidos a la razón y abre espacios para la puesta en escena de otros debidos a lo social y al afecto, tal es el caso de las emociones que suelen influir y contribuir con la formación, solidificación o eliminación de creencias, actitudes y otros factores del dominio afectivo.

Aunque lo recomendable es tratar la cognitivo, lo social y lo afectivo de manera integral, la discusión en este documento se sesga hacia lo afectivo y, en particular, hacia las emociones por jugar papeles preponderantes en: (a) la facilitación o inhibición del aprendizaje de la Matemática; y (b) el éxito, o el fracaso, tanto profesional como personal de los sujetos, el cual, según Goleman (1996), tiene mayor dependencia en lo emocional que en lo cognitivo.

En primera instancia, las emociones son conceptualizadas como fenómenos afectivos acompañados de conmociones orgánicas características (Lexus, 1997). Se asocian con factores tales como alegría, tristeza, rabia, miedo, temor, placer, amor, sorpresa, ira, enojo, odio, frustración, desagrado, disgusto y vergüenza. Gómez Chacón (2000) las reporta como "respuestas organizadas más allá de la frontera de los sistemas psicológicos, incluyendo lo fisiológico, cognitivo, motivacional y el sistema experiencial. Surgen en respuesta a un suceso, interno o externo, que tiene una carga de significado para el sujeto" (p. 25). González (1997) agrega que cuando son experimentadas por el sujeto son capaces de inhibirlo o estimularlo ante el proceso que las genera. Para Calhoun y Salomón (1989) y Bloch (2007), involucran tanto procesos fisiológicos como psicológicos, siendo los primeros de talante orgánico y los segundos se corresponden con actividades mentales y, por ende, de ámbito cognoscitivo. Goleman (1996) las concreta como sentimientos asociados con, entre otros: (a) pensamientos, (b) estados psicológicos y biológicos, y (c) tendencias de actuar.

Aunque las emociones provienen de una experiencia interna, su análisis no puede agotarse en ese espacio, requiriendo considerar su expresión en la conducta (lo externo) y otras pautas distintivas observando, por ejemplo, las acciones y reacciones de los sujetos que la poseen. En su análisis, Bloch (2007) asevera que lo fisiológico, el comportamiento expresivo y la experiencia interna también deben tomarse en cuenta. Una conceptualización de dichas emociones es sintetizada en la Figura 2.

Emociones

Reacciones psico-fisiológicas que emite un sujeto en respuesta a un suceso, interno o externo, teniendo para él una carga de significado. Son de carácter momentáneo y de tipo afectivo, y suelen estar acompañadas de expresiones orgánicas características asociadas con pensamientos, motivaciones, experiencias, elementos hereditarios, cogniciones, estados psicológicos, estados biológicos y tendencias de actuar.

Figura 2. Conceptualización de las emociones

Como el estudio de las emociones no puede hacerse de manera aislada, es válido plantear algunas situaciones donde están imbricados varios factores de interés. Gómez Chacón (2000) manifiesta que las creencias derivan del significado de los actos emocionales que los estudiantes exhiben al ser enseñados o al aprender algo. Cuando, por ejemplo, aprenden Matemática reciben continuos estímulos “que le generan cierta tensión. Ante ellos reacciona emocionalmente” (p. 26). Tales reacciones están condicionadas por sus creencias acerca de sí mismo y acerca de la Matemática y pueden ser automatizadas y solidificadas en actitudes y emociones que impactan en dichas creencias y contribuyen con su formación. En este sentido, las creencias, las actitudes y las emociones constituyen factores relevantes al momento de desarrollarse asuntos que tienen que ver con el proceso de enseñanza-aprendizaje-evaluación de los contenidos matemáticos, sobre todo cuando se sabe que muchos de los éxitos, o de los fracasos escolares, no siempre dependen de las capacidades cognitivas de los sujetos sino del uso inteligente de las emociones y de otros factores socio-afectivos.

3.3 Las actitudes

Las actitudes pueden abordarse desde muchas aristas, así como son variadas las formas de analizarlas y concretar sus componentes y repercusiones, sobre todo en ámbitos educativos.

Según Gallego Badillo (2000), se pueden discriminar cuatro dimensiones características de las actitudes: (a) la cognitiva (el conocer/el saber): percepciones, ideas, opiniones, concepciones, creencias, etc.; (b) la afectiva: la emoción/el sentir; (c) la conativa o intencional, y (d) la conductual o comportamental**.** Este mismo autor hace mención de un componente axiológico, que forma parte de lo afectivo, debido a que la aceptación o el rechazo hacia un objeto o situación suele estar precedido “de una valoración personal, no sólo si se está en condiciones de realizar el comportamiento perseguido, sino también en términos de los beneficios personales y comunitarios que los resultados de la actuación revierten” (p. 29). En este sentido, se involucra el análisis de los principios que permiten considerar si algo es o no es valioso para el sujeto y el razonar sobre cuáles son los fundamentos que sustentan el juicio de valor.

Martínez Padrón (2005) reporta que las actitudes son: (a) instancias que predisponen y dirigen al sujeto sobre hechos de la realidad, filtran sus percepciones y orientan su pensamiento para adaptarlo al contexto; (b) predisposiciones de valoración emitidas por los sujetos (Clemente, 1995); (c) sentimientos positivos o negativos asociados con algún objeto psicológico que conduce a actuar y expresarse según ellos; (d) organizaciones de creencias focalizadas en un objeto o situación particular capaces de predisponer a la emisión de respuestas preferenciales (Rokeach, citado en Gómez, 1998); y (e) campos de creencias, sentimientos y estados de ánimo que trascienden el dominio de la cognición (McLeod, 1992).

Las consideraciones anteriores y las planteadas por Robbins (1994) y Gómez Chacón (2000) sirvieron de sustento para construir la Figura 3, la cual sintetiza lo que en este documento se concibe como actitudes.

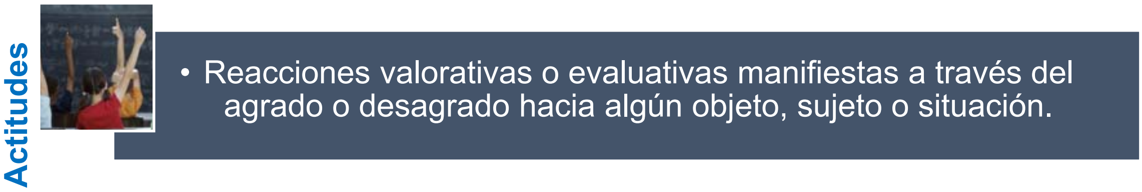


Figura 3. Conceptualización de las actitudes

4. El afecto en el aprendizaje de la Matemática

Los sistemas escolares actuales suelen asumir que los estudiantes poseen diferentes niveles de desarrollo, obligando a configurarles diversidad de competencias que, sin necesidad de estar explícitamente descritas, convergen hacia la consideración de varios tipos de inteligencia por el hecho de abrir espacios donde se indica que el aprendizaje depende, al menos, de variados aspectos cognitivos, afectivos, socioculturales y contextuales. Aunque todos estos aspectos se deben procesar de manera integral, por la inter-relación que se da entre los múltiples factores que los constituyen, esta sección sólo reporta algunas especificaciones que tienen que ver con el afecto en el aprendizaje de la Matemática.

En cuanto al afecto, Gómez Chacón (2000) manifiesta que cuando un estudiante aprende Matemática está expuesto a obtener alguna experiencia que le puede provocar reacciones que influyen en la formación de sus creencias acerca de la Matemática y acerca de sí mismo en relación con dicha asignatura. Martínez Padrón (2008b) agrega que tales creencias pueden afectar sus comportamientos y sus acciones en situaciones de aprendizaje y en su capacidad de aprender Matemática. Estas, a su vez, pueden provocar reacciones emocionales que pudieran automatizarse y convertirse en actitudes que contribuyan con la formación y el mantenimiento de dichas creencias.

Lo planteado es uno de los sustentos que permiten aseverar que el aprendizaje de la Matemática está directamente relacionado con el afecto, pudiéndose establecer conexiones, relaciones o explicaciones funcionales y no funcionales entre los factores comprometidos que subyacen no sólo en quien aprende sino, también, en quien enseña o planifica, sin excluir al resto de sujetos o grupos socioculturales que pueden impactar en esos procesos: los compañeros de clase, los docentes de quienes los estudiantes recibieron clase anteriormente, los padres, la noosfera y la sociedad en general, pues, de acuerdo con Martínez Padrón (2008b), de allí se derivan representaciones personales, puntos de vista, mitos, relaciones de poder, ideologías y representaciones sociales que podrían hacer que los estudiantes terminen pensando de acuerdo con algunas directrices implícitas o explícitamente previstas en cada una de esas instancias.

La conexión entre la Matemática que se aprende y el afecto sustentado en factores tales como emociones, creencias y actitudes hacia la Matemática es eminente y, en consecuencia, cobra interés tanto en quienes aprenden o enseñan, como en el discurso y en el sistema social, económico y político donde están inmersos los protagonistas de la clase. En este sentido, se incluyen momentos de alegría, gusto, insatisfacción, frustración, rabia, disgusto, repugnancia, desapego, incertidumbre, miedo, aversión, desánimo, resistencia o preocupación. Los materiales instruccionales y otros objetos ligados esos procesos también impactan, lo cual es observable al momento de llevarse a cabo la transposición didáctica donde confluyen el afecto de quien enseña y de quien aprende, los contenidos/saberes a transponer y el contexto donde se desarrolla la clase. En consecuencia, se puede aseverar que el aprendizaje de los sujetos está comprometido o influenciado por variados aspectos didácticos, cognitivos, metacognitivos, sociales, afectivos y actuacionales.

Como el aprendizaje de los sujetos también depende del contexto, lo que piensan, hacen o dicen los actores involucrados en la clase delinean, impactan y son impactados con lo que allí acontece. Esto advierte que en toda actividad de aula es necesario que el docente modele, favorablemente, con el ejemplo, puesto que sus actuaciones afectan intelectual y emocionalmente a sus estudiantes. Además, si quien enseña no hila fino en el proceso de enseñanza-aprendizaje-evaluación de los contenidos matemáticos entonces pudiera, entre otras cosas, enseñar a aborrecer u odiar la Matemática, en vez de desarrollar factores que favorezcan su aprendizaje.

5. Lo que dicen y observaron los que enseñan Matemática en la educación media de Paraguay: algunas experiencias

5.1 Sobre la capacidad de aprender Matemática

El centro de discusión de este documento gira en torno al afecto hacia la Matemática; por ende, toma en cuenta la capacidad de aprenderla. A tal efecto, en el curso se desarrollaron actividades donde, por ejemplo, se solicitó a los participantes que asumieran posturas en relación con la siguiente interrogante: *¿considera que la capacidad de aprender matemática es algo innato o puede desarrollarse mediante algunas experiencias particulares?*

El grupo, de casi 200 participantes[1], reportó variadas respuestas, destacando que la capacidad de aprender Matemática puede desarrollarse mediante <<*experiencias*>> (A1-3) y <<*actividades de refuerzo…centradas en informaciones del entorno familiar*>> (A1-4), dado que son muy efectivas. También <<*depende de varios factores… y se relaciona mucho con el aspecto sociocultural de las personas*>> (A2-8). Algunos participantes dijeron que desde que empezaron a conocer los números se interesaron mucho por la Matemática, aunque nunca tuvieron apoyo externo para aprenderla. Uno dijo que aprenderla <<*depende más del interés propio de cada sujeto*>> (A3-8). Otro indicó que conoce <<*personas que se hicieron expertos*

[1] En adelante, los participantes del curso se denotarán como **AN-n**, donde **N** indica el número del aula donde dicho participante hizo el curso, y **n** el número natural asignado a cada uno de ellos, en esa aula particular.

en esta ciencia a base de mucho esfuerzo y dedicación>> (A9-3) propia. Ambos casos asumieron que quienes aprenden Matemática es por poseer una capacidad que, al igual que la inteligencia, puede desarrollarse.

Respecto a lo que dicen los participantes, se observa que en el aprendizaje de la Matemática deben considerarse múltiples factores que abarcan aspectos experienciales, afectivos, actuacionales y socioculturales. Eso abre espacios para trascender el dominio de la cognición que ha venido ennobleciéndose como preponderante al momento de enseñar y evaluar contenidos matemáticos.

5.2 Sobre el aprendizaje de la Matemática y el refuerzo de lo aprendido

Otra interrogante planteaba a los participantes, lo siguiente: *¿qué tipo de actividades suele organizar para concretar actividades de refuerzo y de aprendizaje de la Matemática?, ¿cuáles aspectos toma en cuenta al momento de elaborar estas actividades?*

Antes de analizar la respuesta a tal interrogante, conviene aclarar que el vocablo refuerzo, aquí utilizado, no está acoplado a la acepción de la psicología conductista. Se utiliza para hacer mención a las actividades utilizadas para lograr el mejoramiento del rendimiento escolar y del aprendizaje, al hacerlo más robusto. Por tanto, es para mejorar lo aprendido mediante ejercitaciones o resolución de problemas en el ambiente escolar, por lo que tiene que ver con estrategias que eliminan o disminuyen carencias en el aprendizaje de la Matemática. En este sentido, un docente destaca que utiliza <<*muchos ejercicios de razonamiento y especialmente juegos que hacen que* [los estudiantes] *se entretengan mucho y se sientan despiertos y atentos en la clase de Matemática*>> (A1-8). Este sujeto hace referencia a una motivación necesaria y a la consideración de las emociones que ayudan en el proceso, aunque menciona que es importante prestar atención a lo que hacen los estudiantes, sobre todo con <<*aquellos que no tienen afecto por la matemática*>>, indicando que, en estos casos, vale mucho decirle expresiones como las siguientes: <<*muy bien, lo estás haciendo excelente, viste que vos también podes, ¡Fuerza!… ¡resuélvelo, yo sé que tú puedes!*>>. Otro participante se acopla más a lo que indica la acepción seguida en el curso, indicando que las actividades que suele desarrollar en el aula son, generalmente, <<*la resolución de ejercicios y problemas… donde interactuamos, a veces, a través de actividades lúdicas relacionadas con el tema,… tratando de respetar las diferencias individuales*>> (A3-5).

Un nuevo docente señala que utiliza campamentos y concursos entre los distintos grados, a la luz de los intereses y necesidades de los estudiantes y tomando en cuenta el ritmo sus aprendizajes (A9-5). Otros participantes del curso utilizan <<*guías de estudios, ejercicios…*>> (A2-1) incentivándolos a la lectura de curiosidades y acertijos matemáticos. Este último declara que utiliza juegos, dado que <<*esas cosas les encantan a los alumnos*>>. Otros casos dan fe de lo favorable que puede ser el uso de los juegos en el aula de clase de Matemática, aflorando aspectos actitudinales que se favorecen con el uso de esta técnica de enseñanza. Hay quien reporta que también recurre al contexto inmediato, saliendo del <<*aula al patio para medir perímetro y área de la cancha… les encanta a los alumnos y les motiva a tener más afecto por las matemáticas*>> (A1-6). Señala que toma <<*en cuenta el interés de los alumnos por aplicar los conocimientos a situaciones reales*>>.

En los segmentos de episodios que acaban de mostrarse, y en los reportados por muchos otros participantes no mostrados en el texto, puede notarse que los docentes declaran que lo contextual y lo lúdico ocupan un espacio importante en el aula, al momento de reforzar lo aprendido, propiciar el entretenimiento mediante situaciones matemáticas divertidas, fomentar la participación colectiva y mantener la atención de los estudiantes. Al respecto mencionan, por ejemplo, lo útil de incorporar curiosidades matemáticas durante la clase que, como se sabe, pueden disparar diversión, alegría, euforia e, incluso, el elemento sorpresa requerido para trabajar lo mágico de la Matemática Recreativa. Siendo las cosas así, en la clase de Matemática queda develada la incorporación de la diversión mediante el uso de materiales lúdicos, lo cual impacta en las actitudes y la motivación. Aunque no queda despejado si la ludicidad es o fue propicia para reforzar, para evaluar o para aprender Matemática, es clara la referencia a factores que trascienden lo cognitivo, tal es el caso de lo actitudinal, quedando abierta la posibilidad de tomar en cuenta no sólo a los sujetos que piensan y sienten, como lo indica Goleman (1996), sino a los que, a su vez, se emocionan y se motivan cuando aprenden Matemática.

5.3 Sobre el afecto hacia la Matemática

Posteriormente, se hizo un análisis de lo que plantearon los docentes participantes del curso, luego que observaran a sus estudiantes en situación de resolutores de problemas de Matemática. Las respuestas fueron producto de la siguiente propuesta: *Seleccione algunos problemas de Matemática, organice a sus estudiantes en grupos y colóquelos en situación de resolutores de esos problemas. Obsérvelos, describa lo observado y marque algunos episodios críticos que reporten situaciones de gusto, molestia, placer, aversión u otro factor del dominio afectivo que permita describir, comprender o explicar lo que allí acontece en relación con el aprendizaje de los contenidos matemáticos que conforman la estructura de los problemas dados. De igual manera, solicite que describan algunas situaciones que le ocurrieron durante el proceso de resolución.*

A continuación se reportan algunos eventos observados por los docentes participantes del curso, la mayoría ya reportados en Martínez Padrón (2014):

- A1-1: Existen estudiantes que realizan la tarea en forma rápida y muestran interés en la resolución de problemas matemáticos, representando un desafío y una meta a la cual llegar, incansablemente. Otros no procuran resolverla, no solicitan ayuda y <<*se encierran en sus dudas e inquietudes*>>.
- A2-2: Hay estudiantes que se interesan por buscar la solución del problema, <<*otros demuestran preocupación y hasta desesperación por no entenderlo. También están los que no demuestran ningún interés por aprender y los que se pasan molestando a los que procuran trabajar*>>. Algunos tienen dificultades en explicar el razonamiento realizado para resolver determinados problemas, unos por desconocimiento y otros por la dificultad que tienen para utilizar los términos matemáticos. Durante el desarrollo de los problemas, algunos estudiantes <<*demostraron su satisfacción por las situaciones planteadas*>> y se esmeraron en resolverlas, <<*otros se mostraron contrariados y constantemente se quejan de que es difícil, que no les gusta pensar para resolver las situaciones planteadas y que por estas razones no les gusta la matemática*>>. Una minoría se muestra indiferente, sin mostrar aceptación o rechazo por la tarea a ser realizada.
- A1-4: De los 40 estudiantes, 8 mostraron placer y pusieron <<*su empeño en resolver los problemas presentados*>>. Aproximadamente, un 50% de los restantes,

se esforzó en <<*resolverlos para demostrar que son buenos/as alumnos/as, pero lo hacen por obligación. Los demás esperan la oportunidad para copiar de los otros compañeros del grupo, manifestando que no lo saben hacer*>>. Además, muchos estudiantes manifiestan << *total aversión por la matemática y llegan al 7° grado sin haber aprendido ni siquiera las operaciones básicas*>>.

- A1-5: En el aula hay todo tipo de reacciones, dependiendo de los gustos, capacidades y aptitudes de los estudiantes. <<*Algunos han demostrado gusto al tener que trabajar con los problemas y placer al poder resolverlos, otros siempre están muy molestos e incómodos a la hora de trabajar con esta materia y debo intentar motivarlos constantemente*>>. En estos casos, el docente declara <<*que a estos alumnos les cuesta mucho más aprender los conceptos y aplicarlos en ejercicios o problemas, ya que se nota que tienen una predisposición negativa hacia las matemáticas por diversos motivos y experiencias que debieron haber sucedido posiblemente a lo largo de su vida estudiantil*>>.
- A1-7: Cuando los estudiantes no muestran interés por las actividades desarrolladas en un período dado de la clase, entonces <<*sienten angustia, rabia y miedo*>> al momento que les corresponde resolver sus ejercicios.
- A1-9*:* Mayormente, se observa gusto en el momento de formar grupos para resolver los problemas. Igual sienten placer al llegar a los resultados correctos. Pero aparece la aversión y la molestia, en el momento de razonarlos, resistiéndose a <<*realizar un razonamiento lógico, esperan (algunos/as) que el otro compañero haga el esfuerzo, para luego copiar, ¡nada más!*>>. En estos casos, reportan un manejo deficiente de las herramientas básicas y al no poder con el problema dicen que presentan: (a) angustia de no saber por dónde empezar; y (b) temor de equivocarse en la resolución.
- A1-10: <<*Los estudiantes que gustan de las matemáticas sienten placer, gusto al trabajar y desafían a repetir la experiencia. Los... que no… se sienten molestos dicen aburrirse, preguntan ¿para qué sirve esto?. El razonamiento matemático fue efectivo en los grupos que gustan de la materia. Los otros dicen que no tienen nada contra mi persona pero que no les interesa mejorar su razonamiento matemático*>>.
- A3-6: Entre los estudiantes hubo quienes dijeron que sintieron: (a) <<*angustia de no saber hacer… Nos rompimos la cabeza,…, ¡fue muy difícil!*>>; (b) <<muy bien porque pudimos resolver los tres problemas. Tal vez no estén bien pero la intención es lo que vale>> aunque, según el docente, <<*No hicieron bien ningún problema*>>; (c) <<*muy mal porque los "ejercicios" estuvieron un poco difícil y no hicimos nada… hicimos mucho esfuerzo y no nos salió ninguno*>>; y (d) asustados <<*al ver el primer "ejercicio" porque nunca lo vimos antes, y los otros "ejercicios" tampoco los pudimos resolver porque nos olvidamos del procedimiento de resolución de este tipo de problemas*>>
- A2-4: Las reacciones de los estudiantes son diversas: <<*algunos compiten con otros compañeros y manifiestan euforia al encontrar una solución correcta… otros son más lentos y las reacciones en estos son más emocionantes, la satisfacción que sienten es más profunda porque saben que les llevó un poco más de tiempo pero que el esfuerzo tiene sus frutos*>>. Hay quienes manifiestan que: (a) <<*el razonamiento aplicado en la resolución de situaciones problemáticas… mucho depende del conocimiento, interpretación y correcta aplicación de los conceptos matemáticos*>>; (b) <<*con la práctica constante, se van adquiriendo mayores destrezas,…haciendo… que lo complejo sea más fácil*>>, evitando el aburrimiento y produciendo <<*satisfacciones positivas por el logro obtenido*>>

• A2-4: Cuando los estudiantes solicitan razones sobre la aplicación o uso de lo aprendido o de lo que se les enseña, suelen escucharse expresiones tales como: *<<¿Para qué estudian eso si en la vida diaria no lo van a utilizar?>>* y *<< ¿Para qué sirve la matemática si voy a estudiar leyes?, ¡nunca entendí la matemática!, si voy al súper no voy a pedir la cuenta en progresión aritmética>>.*

Al analizar los segmentos que preceden, puede observarse que los participantes del curso dan cuenta de variados episodios directamente ligados con el afecto hacia la Matemática, haciendo mención al gusto, la molestia, el placer, el aburrimiento, el miedo, la aversión u otros factores constituyentes del dominio afectivo. De igual manera, se encontraron elementos para indicar que cuando se enseña esta asignatura se pueden provocar emociones negativas que hacen que la mente emocional secuestre a la racional, lo cual inhibe el aprendizaje y cierra espacios para el desafío. En varias consideraciones se hace mención a lo motivacional, sin excluir lo social, lo cual indica que la problemática correspondiente al aprendizaje de la Matemática está conectada con esos aspectos, logrando marcarse situaciones que tienen que ver con el interés social, la experiencia, la satisfacción personal, la sincronía y la empatía. Eso se corresponde con lo reportado en otros países, como Venezuela y México, donde se ha investigado que la conexión entre la Matemática que se aprende y lo socio-afectivo es eminente (Martínez Padrón, 2008b; 2009; 2014; Ávila, 2015). De la última autora ya se había reportado la importancia que aún tiene la exploración de las cuestiones afectivas vinculadas con lo sociocultural.

Con esa realidad tan actual, sigue cobrando interés el estudio del fracaso de los que aprenden y, también, de los que enseñan, así como el discurso utilizado durante el desarrollo de la clase. La consideración del sistema social, económico y político donde están inmersos los protagonistas de la clase también es preponderante y, en este caso, lo socio-afectivo viene dando cuenta de las marcadas deficiencias en el aprendizaje de la Matemática, lo cual pudiera ligarse al hecho de seguir ennobleciendo a la razón de los sujetos, aunque en el aula prevalezcan factores desfavorables tales como la ira, la violencia, el desgano, la desmotivación, el aburrimiento, la depresión o la falta de empatía o de autenticidad de quiénes enseñan o aprenden Matemática.

Al cierre de esta sección, vale agregar lo que dijo uno de los participantes: <<he escuchado decir que las cosas no aburren porque son aburridas sino que nos aburren porque somos aburridos>> (A6-1). Esto pudiera acrecentarse si, además, se privilegia lo estrictamente intelectual en detrimento de la carga afectiva que pudiera servir para explicar, describir o comprender lo que acontece, con frecuencia, en las aulas de clase de Matemática.

5.4 Sobre el éxito o el fracaso en el aprendizaje de la Matemática

En otra actividad se pidió a los participantes que describieran situaciones puntuales que tienen que ver con el aprendizaje de la Matemática, a la luz del éxito o del fracaso debido a variados factores del dominio afectivo. Otro planteamiento también solicitó que asumieran posturas en cuanto a lo siguiente: *¿creen posible desterrar el fracaso en el aprendizaje de la Matemática siguiendo, solamente, lo previsto en una instrucción basada en lo racional?* Sobre esta particularidad, se reportan algunos casos.

Se destacó que una instrucción basada en lo netamente racional no sería suficiente para desterrar los problemas del aprendizaje de la Matemática, señalándose que el docente debe garantizar que sus estudiantes comprendan que dicha asignatura

<<*es una herramienta para su vida misma*>> (A1-5) y, en consecuencia, debe <<*crear ambientes adecuados para que surja el interés y el gusto por aprenderla cada día más*>> (A1-5). Igual reportan que <<*los problemas emocionales,… son muchas veces la causa del fracaso…* [y que] *el entorno juega un papel preponderante en el aprendizaje*>> (A1-2). Lo dicho impacta en la mejora del grado de aceptación hacia la asignatura, despertando el interés y el gusto ya mencionado.

De manera particular, A10-1 propone que la sociedad y los padres también tienen mucho que ver con el éxito o con el fracaso de sus representados, en relación con el aprendizaje de la Matemática, dado que lo primero que suelen analizar son las calificaciones obtenidas en dicha asignatura, en desmedro de lo que aprendió, o no, el estudiante: << *¡Si obtuvo buena calificación, el resto no importa!*>>. En caso de que evidencien fracasos por no aprobarse la asignatura o por salir mal en determinadas pruebas, la mayoría de los estudiantes compara este hecho con lo ocurrido con otros de sus semejantes. Hay casos donde dicen: << *¡a mis padres le costaba la Matemática!*>> y, en consecuencia ¡me pasará lo mismo! Según este participante, <<*la mayoría de las personas precisan que la matemática es complicada*>>*,* por eso es rechazada, incluso, antes de ser estudiada. Esta misma idea es sostenida por A8-6 quien indica que la falta de gusto hacia la Matemática está influenciada por los padres: <<*el prejuicio tenido por ser una disciplina difícil, el preconcepto tenido hacia los profesores del área de matemáticas, el concepto que tienen algunos que matemática es sólo para los dotados*>>.

En este orden de ideas, A9-3 señala <<*que el fracaso… no proviene de las experiencias en niveles superiores sino* [que]… *se genera en los… inferiores*>>: en la primaria sólo se aborda lo racional <<*sin respetar el proceso evolutivo, la madurez mental* [y] *emocional del niño*>>*.* Agrega que <<*los docentes en los niveles primarios no están capacitados en la materia*>> y coincide con A8-4, A7-3, A9-1 y Martínez Padrón (2008b) al señalar que las experiencias de aprendizaje que ellos diseñan y desarrollan, en el aula de Matemática, requieren trascender la secuencia: **concepto→ejemplo→ejercicios**. Si para complemento, los únicos recursos que se utilizan son los libros, los cuadernos y las pizarras, entonces, se mutilan otras opciones que hacen que el aprendizaje pueda ser placentero y significativo.

A10-2 estima que <<*lo concerniente al factor afectivo,… es el mayor responsable en el rendimiento del alumnado en matemática*>> y lo considera trascendental tanto en el fracaso como en el éxito en el aprendizaje de la Matemática, destacando que <<*el alumno tiene que querer lo que está haciendo*>> y gracias a ese afecto se facilita la resolución de muchas cuestiones en Matemática. En correspondencia con estos planteamientos: ¿Acaso, existen docentes de Matemática que no les gusta lo que hacen, no aman a la asignatura o no tienen las competencias necesarias para enseñarla? ¡Parece que sí! Martínez Padrón (2008b) reporta evidencias de docentes que no les gusta la Matemática, a pesar de estarse formando para enseñar contenidos matemáticos, y otras áreas del saber, en las Escuelas Primarias venezolanas.

En relación con quienes aprenden, existen docentes <<*que amenazan a sus alumnos con el aplazo y otros tipos de castigo*>> (A1-3). Eso puede ocurrir por <<*falta de seguridad del docente*>> (A1-3). Esta es otra razón por la cual muchos estudiantes sienten aversión por la Matemática y, por ende, fracasan.

Para resolver situaciones como las anteriores y evitar, disminuir o eliminar la predisposición negativa hacia la Matemática, algunos docentes utilizan <<*técnicas de* *persuasión… explicando en lo posible las aplicaciones reales de cada contenido>>* (A1-5). Igual destaca que la modelación es un aspecto de vital interés, pues, si los estudiantes <<*constantemente ven a alguien que valora y ama la materia, tal vez algún día sentirán lo mismo>>.*

En vista de que una instrucción basada en lo <<*netamente cognitivo no soluciona el fracaso de los docentes y* [sus] *estudiantes*>> (A8-8), se hace necesario que la preparación de dichos docentes abarque <<*tanto... lo cognitivo como…lo afectivo*>> (A9-1), pues, <<*es muy importante conocer a los alumnos, su realidad como persona, su familia, sus necesidades. Dedicar un tiempo a dialogar con ellos, conocer sus problemas, sus inquietudes…*>> (A8-8). Lo anterior obliga a considerar, también, lo social por tener elementos que podrían solventar situaciones de fracaso.

El fracaso, según Mora Penagos (2002), puede tener explicaciones psicológicas, sociales, económicas y culturales. Entre sus principales factores "están…los métodos de enseñanza desarrollados cotidianamente en nuestras instituciones escolares en correspondencia con la visión que se tiene sobre la Matemática escolar". Así, pudiera estar conectado tanto con las concepciones que tienen los docentes al momento de organizar y desarrollar las actividades de clase, como con el sistema de creencias intrincado en sus esquemas personales y originado de su propia experiencia.

Existen otros aspectos que pudieran ser relevantes a la hora de garantizar el aprendizaje de la Matemática. A3-3 menciona los siguientes: (a) la empatía con los estudiantes; (b) el conocer las particularidades de los estudiantes; (c) el considerar las diferencias individuales; (d) la motivación, particularmente en aquellos más rezagados; y (e) el manejo del afecto, particularmente de las actitudes y la posibilidad de revertirlas, si es el caso, a favor de la Matemática.

Es trascendente destacar que lo que tiene que ver con la actitud hacia la Matemática a veces se torna alarmante y desalentador. A2-5 señala que <<*es impresionante como el solo escuchar la palabra Matemática, produce una especie de repudio…* [y] *rechazo por parte de algunos estudiantes>>.* Este docente apunta que los principales responsables pudieran ser los mismos docentes, sobre todo aquellos de los primeros grados quienes no siempre inculcan el afecto hacia la Matemática y no tratan de hacerla agradable. También, existen docentes que se contentan con que sus estudiantes transcriban lo que éste copia en la pizarra, pidiéndoles luego un aprendizaje mecánico que no va más allá de <<*recordar la fórmula a emplear*>> (A7-3). Este docente señala que hay algo que está fallando y se hace la siguiente interrogante: <<*¿será que siempre aprendimos mecánicamente y por eso así lo enseñamos o es que no entendemos o nunca nos enseñaron a pensar o no mostraron el camino correcto de deducir, pensar, relacionar y llegar a conclusiones?*>> Lo del aprendizaje mecánico también es respaldado por A7-5 al decir que cuando se formaba <<*todo era mecánico y estructurado*>>, aunque reconoce que aún existen docentes que se desempeñan orientados por este tipo de concepciones.

En cuanto a la posibilidad de cambiar actitudes existen varias evidencias de que eso es posible, pues, de ese grupo de docentes de Matemática hay casos que actualmente la perciben de manera diferente a como la percibían cuando estudiantes. A7-5 indica que <<*hay buenos formadores de formadores* [de lo contrario] *hoy... no sería profesora de matemática>>.* Indica que su experiencia con esta disciplina fue terrible y placentera a la vez. <<*En toda mi etapa de estudiante de Educación Media, jamás aprendí realmente Matemática, es más, me causaba* [una] *angustia terrible*>>.

Luego, cuando estudió docencia se fue por Lengua y durante su preparación para el ingreso a la carrera, tomó un curso de Matemática con una docente que la atrapó con su manera de desarrollar el curso. Posteriormente, decidió cambiarse de Lengua para ser docente de Matemática. Tal situación le planteó un reto: << *¡enseñaría como esa profesora!*>> Aunque es lo que sigue intentando, reconoce que aún hay muchas cosan que afectan su meta: el sistema.

6. Primeras Conclusiones

De acuerdo con los datos reportados por los participantes del curso, se encontraron episodios que advierten que la problemática existente en el aprendizaje de la Matemática continúa efervescente y supeditada a múltiples factores de índole cognitivo, afectivo y social. También depende de aspectos contextuales, culturales y actuacionales, destacando que para poder mejorar dicho aprendizaje es necesario que quienes enseñan contenidos matemáticos deben poseer un conocimiento didáctico-matemático robusto y capaz de enfrentar las situaciones configuradas por ese compendio de factores. En tal sentido, es imperativo revisar las actuaciones de los protagonistas de las clases, a fin de impactar los procesos de formación de quienes enseñan, estudian, aprenden y evalúan contenidos matemáticos. También hay que incluir cambios en la formación de los formadores que enseñan Matemática, en todas las instancias educacionales, sobre todo cuando en este momento se duda de su capacidad para liderizar los cambios que se vienen planteando y gestando en las reformas curriculares de muchos países.

Lo planteado reclama abordajes urgentes, no para incrementar el cúmulo de investigaciones que pudieran hacerse al respecto sino para, definitivamente, impactar el mejoramiento del aprendizaje de los estudiantes que aún sigue reportándose como deficitario.

Respecto al afecto de los estudiantes hacia la Matemática, se puede concluir que a pesar de que la misma sigue siendo considerada como el fundamento formal de la mayoría de las disciplinas de todas las épocas, continúa reportándose como la menos popular de los planes de estudio. Las razones de su impopularidad son variadas, pero, la tendencia a alejarse de ella, de repudiarla, de considerarla complicada, aburrida o sin utilidad aparente sigue marcando acciones de rechazo signado por la presencia de actitudes adversas y por la existencia de representaciones sociales ligadas al fracaso en su aprendizaje. Quizás por eso continúan encontrándose sujetos con una marcada aversión hacia la Matemática que, sin duda, ha contribuido a desfavorecer tanto su aprendizaje como su enseñanza. Es posible que esta problemática tenga su sustento en la dificultad que muchos tienen para comprenderla, en el aún sostenido rigor que caracteriza su manera de enseñarla y en la manera de proceder de muchos docentes que suelen infundir, incluso, hasta temor para controlar la participación de los estudiantes y el orden de la clase, lo cual está íntimamente relacionado con el fracaso de los estudiantes, de sus docentes, del discurso usado en el desarrollo de las actividades escolares y de las instancias educaciones encargadas de formarlos como seres sociales competentes.

Queda presente la necesidad de insistir en el manejo eficiente del afecto hacia la Matemática. No hay que olvidarse de la empatía, de los sentimientos, de las creencias, de los valores, de la asertividad, de las relaciones sociales ni de la motivación si se quiere comprender o explicar, densamente, lo que acontece en aula donde se aprende Matemática. Si se quiere mejorar lo que allí acontece, tampoco hay que dejar de lado a las emociones por ser fundamentales en el logro de mejores aprendizajes de contenidos matemáticos: siempre han sido y serán un factor que arrostrar cuando se trata de mejorar la actuación de los resolutores de los problemas de Matemática.

Referencias bibliográficas

Albrecht, K. (2006). *Inteligencia social*, (G. Dols, Trad.). Colombia: Javier Vergara Editor (Trabajo original publicado en 2006).

Ávila, A. (2015). *La investigación en educación matemática en México: una mirada a 40 años de trabajo en el campo*, Plenaria presentada en el XIV Congreso Interamericano de Educación Matemática, Chiapas, México, 1-16; Recuperado el 28 de Octubre de 2015, de http://xiv.ciaem-redumate.org/index.php/xiv_ ciaem /xiv_ciaem/paper/viewFile/1515/740

Balbuena, L. y Carrillo, A. (2011). Ñandutí, curso on line de formación permanente de profesores de matemáticas de nivel secundario. *UNIÓN* [en línea], 28, 75-83. Recuperado el 18 de Mayo de 2012, de http://www.fisem.org/web/union/images /stories/28/archivo_10_volu men28.pdf.

Bloch, S. (2007). *Al alba de las emociones*. Chile: Uqbar Editores.

Bloom, B. y colaboradores (1977). *Taxonomía de los objetivos de la educación. La clasificación de las metas educacionales* (M. Pérez Rivas, Trad.). Buenos Aires: Editorial El Ateneo.

Calhoun, C. y Salomón, R. (1989). *¿Qué es una emoción? Lecturas clásicas de psicología filosófica*. México: Fondo de Cultura Económica, S. A.

Callejo, M. y Vila, A. (2003). Origen y formación de las creencias sobre la resolución de problemas. Estudio de un grupo de alumnos que comienzan la educación secundaria, *Boletín de la Asociación Matemática Venezolana* [en línea], 10 (2). Recuperado el 31 de Julio de 2004, de http://www.emis.de/journals /BAMV/conten /vol10/mcallejo+vila.pdf.

Camacho, R. (2013). Refletindo a formação Matemática dos profesores dos anos iniciais. Ponencia. *Resúmenes de la XXVII Reunión Latinoamericana de Matemática Educativa*, p. 83.

Clemente, J. (1995). Construcción de una escala de actitudes hacia la Matemática. *Educación y Ciencias Humanas*, 3 (4), 165-189. Caracas.

Cooney, T. (1999). *Examining what we belief about beliefs* [en línea]. Recuperado el 19 de Septiembre de 2002, de http://www.uni-duisburg.de/FB11/PROJECTS/MFO _Beliefs.html.

Flores, D, Medina, B., Peralta, D. y Rodríguez, C. (2013). Las emociones y su impacto en el aprendizaje de las Matemáticas, *Acta del VII Congreso Iberoamericano de Educación Matemática*, 2747-2755. Uruguay.

Gallego Badillo, R. (2000). *Los problemas de las competencias cognoscitivas. Una discusión necesaria.* Colombia: Universidad Pedagógica Nacional.

Gardner, H. (1998). *Inteligencias múltiples*. Barcelona: Editorial Paidós.

Goleman, D. (1996). *La inteligencia emocional*, (E. Mateo, Trad.). España: Javier Vergara Editor (Trabajo original publicado en 1995).

Goleman, D. (2006). *Inteligencia social. La nueva ciencia de las relaciones humanas.* España: Editorial Kairós.

Gómez Chacón, I. (2000). *Matemática emocional. Los afectos en el aprendizaje matemático*. España: Narcea, S.A., Ediciones.

Gómez, P. (1998). *Calculadoras gráficas y precálculo. Las actitudes de los estudiantes* [en línea]. Recuperado el 12 de Octubre de 2000, de http://ued.edu.co/servidor/ued/ libros/libroaportes.htm.

González de Hernández, N. (2013). Factores asociados a una evaluación académica en la enseñanza de Matemática: herramienta estratégica para incrementar la calidad de la enseñanza y el aprendizaje. En R. Flores (Ed), *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa* 26, 897-904, México: Comité Latinoamericano de Matemática Educativa.

González, F. E. (1997). *Procesos cognitivos y metacognitivos que activan los estudiantes universitarios venezolanos cuando resuelven problemas matemáticos*. Tesis de doctorado no publicada, Universidad de Carabobo, Valencia.

Lexus (1997). *Enciclopedia de pedagogía y psicología*. España: Ediciones Trébol.

Maaß, J. y Schlöglmann, W. (2009). *Beliefs and attitudes in Mathematics Education*. New Research Results, Sense Publishers Totterdam / Taipei.

Martínez Padrón, O. (2005). Dominio afectivo en Educación Matemática. *Paradigma*, XXIV (2), 7-34.

Martínez Padrón, O. (2008a). Actitudes hacia la Matemática. *Sapiens*. 9 (2), 237-256.

Martínez Padrón, O. (2008b). *Creencias y concepciones en encuentros edumáticos*. Tesis doctoral no publicada. Universidad Pedagógica Experimental Libertador, Instituto Pedagógico de Caracas, Caracas, Venezuela.

Martínez Padrón, O. (2009). *Sistemas de creencias hacia la mate*mática observados en docentes, en servicio, que se forman en educación integral. Ponencia presentada en el V CIBEM, Puerto Montt, Chile.

Martínez Padrón, O. (2011a, Noviembre). *¿Enseñamos a enseñar Matemática?* Ponencia presentada en la VIII Jornada de Enseñanza de la Matemática en la Educación Básica de la UPEL-El Mácaro, Turmero, Venezuela.

Martínez Padrón, O. (2011b). *El afecto en el aprendizaje de la Matemática*. Documento del Curso Iberoamericano de Formación Permanente de Profesores de Matemática, Centro de Altos Estudios Universitario. Organización de Estados Iberoamericanos.

Martínez Padrón, O. (2014). El afecto en el aprendizaje de la Matemática: una mirada desde los docentes paraguayos. En P. Leston (Ed), *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa*, 27, 1953-1962. México: Comité Latinoamericano de Matemática Educativa

McLeod, D. (1992). Research on affect in mathematics education: A reconceptualisation. In D. A. Grouws (Ed.), *Handbook of research on mathematics teaching and learning*, pp. 575-596. New York: Macmillan Publishing Company.

Mora Penagos, W. (2002). *Modelos de enseñanza-aprendizaje y desarrollo profesional: elementos para la cualificación docente* [en línea]. Recuperado el 4 de Agosto de 2002, de http:/atenea.udistrital.edu.co/grupos/redevac/htlm/r_biblio.htm.

Müller, D., Engler, A. y Vrancken, S. (2012). Propuesta de actividades sobre funciones en un entorno virtual de aprendizaje. Análisis de su implementación. En R. Flores (Ed), *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa* 25, 471-480, México: Comité Latinoamericano de Matemática Educativa.

Parra, H. (2013). Condiciones mínimas necesarias que debe considerar el docente para la contextualización de los contenidos matemáticos. Ponencia. *Resúmenes de la XXVII Reunión Latinoamericana de Matemática Educativa*, p. 110.

Paulino, E. y Marmolejos, J. (2013). Importancia del aprendizaje de la acción del despeje y la sustitución numérica en la interpretación y solución de situaciones problemáticas. En R. Flores (Ed), *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa* 26, 421-428, México: Comité Latinoamericano de Matemática Educativa

Pehkonen, E. (1999, Noviembre). Beliefs as obstacles for implementing an educational change in problem. *Conference at Mathematisches Forschun gsinstitut Oberwolfach: Mathematical Beliefs and their Impact on Teaching and Learning of Mathematics* [en línea]. Recuperado el 16 de febrero de 2003, de http://www.uni-duisburg.de/FB11/PROJECTS/MFO_abstracts.pdf.

Pepin, B. y Son, J. (2012). Motivation, beliefs, and attitudes towards Mathematics and its teaching. En S. J. Cho (Ed), *Proceeding of the 12th International Congress on Mathematical Education,* 523-527.

Polya, G. (1965). *Cómo plantear y resolver problemas* (J. Zagazagoitía, Trad.). México: Editorial Trillas.

Ponte, J. (1994). *Knowledge, beliefs, and conceptions in mathematics teaching and learning* [en línea]. Recuperado el 25 de Septiembre de 2002, de http://www.educ.fc.pt/docentes/ jponte/ind_uk.htm.

Ponte, J. (1999). Teachers´ beliefs and conceptions as a fundamental topic on teacher education. En K. Krainer y F. Goffree (Eds.), *On research in teacher education: From a study of teaching practices to issues in teacher education* [en línea], 43-50, Recuperado el 7 de Septiembre de 2002, de http:www.educ.fc.pt/docentes/ jponte/ind_uk.htm.

Quintana, J. (2001). *Las creencias y la educación*. Pedagogía Cosmovisional. España: Empresa Editorial Herder, S. A.

Robbins, S. (1994). *Comportamiento organizacional. Conceptos, controversias y aplicaciones.* (S. P. Mascaro, Trad.). México: Editorial Prentice Hall Hispanoamericana S. A. (Trabajo original publicado en 1993).

Rodríguez, C. (2012). Compendio alternativo para el estudio independiente. Matemática Superior I y Matemática Superior II. Carrera de contabilidad y finanzas. En R. Flores (Ed), *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa*. 25, 443-450, México: Comité Latinoamericano de Matemática Educativa

Schoenfeld, A. (1992). Learning to think mathematically: Problem solving, metacognition an sense-making in mathematics. En D. Grows (Ed). *Handbook for research on mathematics teaching and learning.* New York: McMillan; pp. 334-370.

Veiga, D. (2012). Introducción al capítulo de propuestas para la enseñanza de las Matemáticas. En R. Flores (Ed), *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa.* 25, 386-387. México: Comité Latinoamericano de Matemática Educativa.

Vila, A. y Callejo, M. (2004). *Matemáticas para aprender a pensar. El papel de las creencias en la resolución de problemas*. España: Narcea, S. A. de Ediciones.

Vivas, M. y Gallego, D. (2008). *La inteligencia emocional: ¿Por qué y cómo desarrollarla?* Venezuela: Universidad de los Andes, Consejo de Desarrollo Científico, Humanístico y Tecnológico.

Oswaldo Jesús Martínez Padrón: Profesor de Matemática, Magíster en Educación Superior: Matemática, Doctor en Educación. Profesor Titular de la Universidad Pedagógica Experimental Libertador (Venezuela). Coordinador del Centro de Investigación para la Participación Crítica (CIPaC) y Miembro del Núcleo de Investigación en Educación Matemática (NIEM) de la UPEL. Contacto: ommadail@gmail.com

UNIÓN
REVISTA IBEROAMERICANA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA
www.fisem.org/web/union
http://asenmacformacion.com/ojs/index.php/union/index

ISSN: 1815-0640
Número 45. Marzo 2016
Página 44-60

Estrategia para ampliar la visión de las matemáticas y suscitar el interés por la investigación

Jaqueline Cruz-Huertas

Fecha de recepción: 05/03/2013
Fecha de aceptación: 04/02/2016

Resumen	Se presentan los resultados de una estrategia aplicada de manera consecutiva desde el año 2006, a estudiantes de primer semestre de Administración de Empresas Comerciales de la Universidad Colegio Mayor de Cundinamarca, Bogotá - Colombia, en el marco del proyecto interdisciplinar: *Matemáticas y comunicación, una forma de promover la investigación formativa en el aula*. La estrategia, es un trabajo interdisciplinar que consiste en la elaboración de un ensayo como producto final. Con ello, se pretende ampliar o cambiar las visiones que los estudiantes traen sobre la importancia de las matemáticas en el desarrollo humano y científico. Así mismo, busca promover una actitud positiva hacia el aprendizaje de esta ciencia a partir de la lectura de material especializado y, propone mejorar habilidades de lectura y escritura para fortalecer los procesos de investigación formativa. **Palabras clave**: Matemática, Comunicación, Interdisciplinar
Abstract	It present the results of a strategy applied consecutively since 2006, to first semester students of Business Administration of the University Business College of Cundinamarca, Bogota - Colombia, as part of the interdisciplinary project: *Mathematics and communication, a how to promote research training in the classroom*. The strategy, is an interdisciplinary work consisting in the development of a test as a final product. With this, we intend to expand or change the views that students bring to the importance of mathematics in human and scientific development. It also seeks to promote a positive attitude towards learning this science from specialized reading materials and aims to improve reading and writing skills to strengthen the processes of formative research**.** **Keywords**: Mathematics, Communication, Interdisciplinary.
Resumo	Neste artigo são apresentados os resultados de uma estratégia aplicada consecutivamente desde 2006, a alunos do primeiro semestre de Administração de Empresas da Faculdade de Negócios da Universidade de Cundinamarca, Bogotá - Colômbia, como parte de um projeto interdisciplinar: Matemática e comunicação, uma forma de promover a formação em pesquisa na

	sala de aula. Trata-se de um trabalho interdisciplinar que consiste em um ensaio, como um produto final. Tem-se a intenção de expandir ou mudar opiniões dos alunos sobre a importancia da Matemática para o desenvolvimento humano e científico. Pretende-se, também, promover uma atitude positiva em relação à aprendizagem dessa ciência a partir da leitura de materiais especializados buscando contribuir com o desenvolvimento de habilidades de leitura e escrita com vistas a fortalecer os processos de investigação. **Palavras-chave**: Matemática, Comunicação, Interdisciplinar.

1. INTRODUCCIÓN

Las matemáticas han jugado un papel crucial en el desarrollo científico y tecnológico lo que ha sido bien reconocido por las distintas culturas a lo largo de la historia. De ahí, su inserción en los planes de estudio de casi todas profesiones que permanentemente se nutren de ella para resolver diversos problemas. Sin embargo, son múltiples las dificultades que se encuentran durante el proceso de enseñanza y aprendizaje de esta ciencia.

En consecuencia, son notorios los escasos conocimientos matemáticos de los estudiantes que inician pregrado, unidos a la falta de motivaciones y conciencia sobre la importancia que esta disciplina tiene para el desarrollo humano y científico. Esto constituye un verdadero obstáculo para avanzar con éxito en la profesión. Igualmente, la falta de integración entre las disciplinas, hace que se diluyan los esfuerzos tanto de docentes y estudiantes durante el proceso de formación.

Es así como mediante este documento, se describe una experiencia pedagógica interdisciplinar que se ha realizado de manera consecutiva desde el año 2006 en la que participan los componentes de Matemáticas, Taller de Comunicación Oral y escrita e Informática. Desde entonces, se ha venido realizando con todos los estudiantes de primer semestre del programa de Administración de Empresas Comerciales de la Universidad Colegio Mayor de Cundinamarca.

La Universidad Colegio Mayor de Cundinamarca, es un establecimiento público de orden nacional, ubicada en la ciudad de Bogotá, Colombia. El programa de Administración de Empresas Comerciales, jornada nocturna, se creó desde el año 1996. En el plan de estudios, el área cuantitativa está compuesta por 8 asignaturas con un total de 25 créditos que representan el 16% del total de créditos del programa que consta de 156.

La estrategia tiene como objetivo central, ampliar la visión que los estudiantes traen sobre la importancia de las matemáticas mediante la lectura crítica y reflexiva de material especializado de modo que mediante la elaboración de un ensayo como producto final, les permita adquirir una actitud más positiva hacia el aprendizaje de esta ciencia y, de manera simultánea, logren mejorar habilidades de lectura y escritura propiciando el fortalecimiento de los procesos de investigación formativa.

En el primer semestre se inicia el estudio de matemáticas como primera asignatura del Área Cuantitativa. Esta, debe sentar las bases necesarias para abordar con éxito, en los siguientes semestres, las demás materias que integran este campo de formación, así como todas aquellas que involucren aplicaciones matemáticas.

A la fecha, más de dos mil estudiantes han participado de esta experiencia pedagógica. Los instrumentos que han servido para el proceso de observación y análisis de la experiencia son: evaluación y análisis de resultados de la evaluación diagnóstica en matemáticas, procesos de lectura y escritura, elaboración de ensayos por los estudiantes, procesos de evaluación y co- evaluación de los ensayos mediante criterios específicos planteados en una matriz y los resultados de una encuesta que se realiza a todos los estudiantes, para evidenciar el impacto del proyecto a la luz de los objetivos propuestos y las variables objeto de estudio.

2. DESCRIPCIÓN DEL PROBLEMA

Dentro de los objetivos de la asignatura de matemáticas, se pretende que el estudiante asuma una actitud positiva hacia las matemáticas, y tenga un pensamiento observador, analítico, lógico y crítico que le facilite en un contexto específico, comprensión, asociación, comparación, clasificación y transformación de situaciones problema mediante el uso del lenguaje matemático, favoreciendo el trabajo en equipo, la práctica de la tolerancia y el liderazgo.

Al finalizar esta asignatura el estudiante debe estar en capacidad de analizar, aplicar e interpretar conceptos matemáticos que le permitan resolver problemas específicos de su área, así como comprender diferentes modelos matemáticos aplicables a la Administración.

La edad de los estudiantes oscila entre los 20 y 26 años. Los grupos son heterogéneos; algunos llevan más de 4 años sin estudiar o recientemente no han tenido estudios relacionados con el área de matemáticas. Otros, sólo cuentan con los escasos recuerdos de lo que vieron en el colegio. En ciertos casos algunos estudiantes habían iniciado otra carrera pero la abandonaron por diversos motivos, como situaciones económicas, laborales, familiares, porque no era lo que buscaban o la exigencia en conocimientos matemáticos era muy alta y ellos no contaban con los niveles requeridos.

Desde hace varios años, se ha observado, cómo el esfuerzo e interés de los jóvenes por el estudio de las matemáticas ha disminuido notablemente. Razón por la que es frecuente encontrar estudiantes que ingresan a la universidad con un gran déficit de conocimientos en este campo, como se puede inferir de los resultados de la prueba diagnóstica que se realiza a los estudiantes que inician primer semestre. Los datos han mostrado tendencias muy similares en todos los semestres. Como ejemplo se presenta en la siguiente tabla 1, los resultados de la prueba realizada en el segundo semestre del año 2012.

FACULTAD: Administración y Economía												**PERIODO: II - 2012**
PROGRAMA ACADÉMICO: Administración de Empresas Comerciales												
RESULTADOS	**TOTAL APLIC.**		**Excelente 4,6-5,0**		**Bueno 4,0 – 4,5**		**Aceptable 3,0 – 3,9**		**Insuficiente 2,0 -2,9**		**Deficiente 0,0-1,9**	
	No.	**%**	**No.**	**%**	**No.**	**%**	**No.**	**%**	**No.**	**%**	**No.**	**%**
GRUPO A	34	100	0	0	1	3	2	6	12	35	19	56
GRUPO B	35	100	0	0	0	0	2	6	10	13	23	66
GRUPO C	34	100	0	0	0	0	2	6	10	29	22	65
TOTAL	103	**100**	**0**	**0**	**1**	**1**	**6**	**6**	**32**	**31**	**64**	**62**

Tabla 1. *Resultados prueba diagnóstica de matemáticas*

En la tabla, se puede ver que el 62% de los estudiantes se encuentran en un rango de *deficiente* y el 31 % en un rango de *insuficiente* y solamente el 7% de los estudiantes logra apenas superar la prueba. Cabe señalar, que la prueba pregunta conocimientos básicos de operaciones matemáticas y algunos problemas sencillos de aplicación.

Por lo anterior, varios estudiantes debían repetir hasta dos veces la asignatura, otros se sentían incapaces de continuar, a tal punto que decidían abandonar sus estudios. Al analizar las posibles causas que contribuían a generar tal desinterés y, por consiguiente, los escasos conocimiento de los estudiantes en matemáticas, se encuentra que éstas son muy diversas y complejas. Saltan a la vista las que tienen que ver con la mirada de la matemática como una ciencia muy complicada, que requiere esfuerzo, disciplina y gran dedicación.

Otras causas radican en la distracción casi generalizada de los estudiantes a causa del inadecuado uso de las nuevas tecnologías, la poca exigencia y ayuda de los padres en el proceso educativo de los hijos. Se podría mencionar además, la pereza, apatía y el facilismo que se observa día a día en las nuevas generaciones, como producto de la poca exigencia en la calidad de la educación secundaria. La alusión a esta última causa, tiene que ver en alguna medida, con el cumplimiento del Decreto 0230 que durante ocho años le significó al país un gran retroceso en materia educativa debido a su laxitud extrema, propiciando graves consecuencias para el país.

El decreto 0230, expedido el 11 de febrero de 2002 por el Ministerio de Educación Nacional, contenía las normas en materia de currículo, evaluación y promoción de los educandos y evaluación institucional. Estipulaba que hasta un máximo del 5% del total de estudiantes de una institución educativa, podían reprobar el año y los estudiantes tenían la posibilidad de presentar actividades de recuperación durante todo el año lectivo y durante todo el año siguiente, si no alcanzaban los logros previstos en un área determinada. De esta forma, muchos estudiantes terminaban pasando el año, más por cansancio de los docentes, quienes debían evaluar infinidad de veces, que por mérito propio.

Pero además, existen otras causas, no menos importantes como son: la falta de metodologías y didácticas adecuadas en los procesos de enseñanza, en especial, aquellas que favorezcan la relación permanente entre la *teoría* y la *práctica*; la insuficiente formación en las facultades de educación en el diseño de buenas estrategias pedagógicas y el uso adecuado de las nuevas tecnologías para propiciar aprendizajes más significativos. Igualmente, los escasos recursos físicos y tecnológicos en las instituciones y el gran número de estudiantes por maestro que en ocasiones supera cualquier intento humano, entre otras.

En lo que respecta al estudio de las matemáticas, éste por lo general se ha visto como un tema de difícil comprensión y de terror, incluso creado por algunos maestros quienes además de no contar con los mecanismos didácticos, tampoco supieron entender el verdadero *valor formativo* de las matemáticas y su importancia como elemento de cultura. Algunos maestros y padres de familia se quedaron con la visión sobre si el estudiante es “bueno” o es “malo” para las matemáticas, dando la idea que las habilidades en este campo son solo genéticas, por consiguiente ¡poco o nada se puede hacer!

Todo esto llevó a crear y reforzar la imagen de una ciencia muy difícil, pero además innecesaria, casi inútil, ¿Esto para qué me sirve? ¿Para qué me desgasto tanto en su aprendizaje si lo que voy a estudiar no tiene que ver con números?, pensamiento avalado incluso por algunos profesionales de otros campos del conocimiento y por la misma sociedad.

De acuerdo con lo anterior, se requiere que maestros, padres, estudiantes y en general la sociedad, puedan reflexionar sobre cuál es la verdadera *importancia* de las matemáticas. Esto con el fin de rescatar y fomentar tanto su *valor formativo* como la *importancia* que tiene en el avance de la ciencia, la tecnología y en general para el desarrollo de cualquier nación.

Por lo anterior, esta experiencia se centra en el estudio de una causa que poco es mencionada por el común de la gente, pero que ya había sido advertida por varios investigadores desde hace varios años como Goleman (1996); McLeod (1992); Gómez-Chacón (2000) y Gil, Blanco y Guerrero (2005), entre otros. Estos autores coinciden en expresar que en la educación matemática, los afectos, creencias, actitudes y emociones, son determinantes en la calidad del aprendizaje. Por tanto, la dimensión afectiva del individuo y *la visión* que los estudiantes tienen de las matemáticas, así como *la importancia* que éstos le proporcionan en sus vidas y en su desarrollo profesional, están ligados a estos factores.

Al llevar la situación descrita a la Universidad Colegio Mayor de Cundinamarca, se observa que los estudiantes que ingresan a primer semestre de Administración de Empresas Comerciales, no son ajenos a las problemáticas referidas. Desde la experiencia docente, se ha podido observar desde el año 2004, las graves deficiencias operatorias y los enormes vacíos conceptuales que la mayoría de los estudiantes presentan en el campo matemático. Muchos estudiantes no imaginan que esta carrera les va a exigir los conocimientos necesarios en esta área, por lo que muchos, desde el comienzo del semestre se van quedando rezagados y con pocas posibilidades de avanzar.

Se percibe además, que la mayoría de los estudiantes no tiene claro por qué son *importantes* las matemáticas para su profesión, expresan que en el colegio no le habían puesto atención a esta materia. Así que solamente al iniciar la carrera se vienen a percatar de sus escasos conocimientos.

Por otra parte, desde la asignatura de Taller de Comunicación, se detecta en los estudiantes pocos conocimientos gramaticales, dificultad para abordar y comprender textos y escribir textos académicos. En la mayoría de los casos, los estudiantes solamente se han acercado a textos narrativos. Además, la mayoría desconoce la importancia de la lectura y la escritura en la universidad y en su vida laboral. En consecuencia, estas dificultades también influyen en el bajo rendimiento académico de otras asignaturas.

De acuerdo con la problemática descrita anteriormente, se planteó la pregunta ¿Cómo diseñar una estrategia pedagógica interdisciplinar, que permita *ampliar* o *cambiar* la *visión* que los estudiantes tienen sobre las matemáticas, y de manera simultánea, mejorar las prácticas de lectura y escritura para suscitar el interés por la investigación?

Como objetivo general se propuso: Ampliar la visión que los estudiantes de primer semestre traen sobre las matemáticas, suscitando interés por la investigación mediante el ensayo como una estrategia interdisciplinaria.

Como objetivos específicos se planteó:

1) Promover una actitud positiva hacia el aprendizaje de las matemáticas mediante la lectura de material especializado.
2) Suscitar interés por la investigación mediante la producción de ensayos y documentos de carácter académico.
3) Fortalecer las competencias comunicativas mediante las prácticas de lectura crítica y escritura reflexiva.

3. REFERENTES TEÓRICOS

Según Leonardo da Vinci, "*el deseo de aprender es natural en los hombres buenos*" (Gelb, 2006, p. 53). En efecto, todos llegamos al mundo llenos de *curiosidad* y desde pequeños, todos nuestros sentidos están enfocados hacia la exploración del mundo y el aprendizaje. Por tanto, la *curiosidad* se convierte en la mayor motivación que surge desde el interior, como ese gran *deseo* de *aprender* o *hacer* algo, animando al individuo a iniciar procesos de investigación.

Cuando el *deseo,* producto de la *curiosidad,* emerge casi de forma natural, impulsa a las personas a hacer los más grandes esfuerzos y sacrificios para lograr las metas propuestas. Pero no es fácil que un *deseo* simplemente aparezca de la nada, como por arte de magia, sino que por lo general éste surge como producto de la interacción con el entorno y la cultura.

Por otro lado, las *visiones* que tienen los maestros frente a *qué son las matemáticas* y *cuál es su importancia en el desarrollo humano y científico,* entre otras, marcan de manera notable la pauta de los métodos empleados para su enseñanza; pero también cabe señalar que algunas investigaciones como las realizadas por (Hidalgo, S., Maroto, A., Palacios, A., 2005) y (Gil, N., Blanco, L., Guerrero, E.,2005) indican que las actitudes, las emociones y las creencias que los estudiantes tienen sobre las matemáticas, influyen tanto en el bajo rendimiento como en el éxito de su aprendizaje.

En cuanto a las *visiones* que los estudiantes tienen sobre las matemáticas, se puede señalar que están correlacionadas, con las emociones, creencias y actitudes, entre otras variables, que cada individuo ha tejido o conformado según las experiencias y vivencias a lo largo de la vida y que están relacionadas con la enseñanza y aprendizaje de esta asignatura. En efecto, "el estudiante en la tarea de aprender, recibe continuos estímulos asociados con las matemáticas (problemas, actuaciones del profesor, mensajes sociales, etc.) que le generan cierta tensión" (Mandler, 1989, citado por Hidalgo, Maroto y Palacios, 2005, p. 91).

Con respecto a la pregunta ¿Qué son las matemáticas?, cabe señalar que su respuesta ha cambiado en el transcurso de la historia. De hecho, para los griegos, 500 años a. C. y hasta el 300 d. C., las matemáticas consistían en el estudio de los *números* y la *forma,* destacado este enfoque con la publicación de *Los Elementos* de Euclides. Posteriormente, hasta mediados del siglo XVII, con el descubrimiento del cálculo con Newton y Leibniz, las matemáticas se convirtieron en el estudio del *número*, la *forma*, el *movimiento*, el *cambio* y el *espacio* (Devlin, 2002, p.10). Esta nueva concepción de las matemáticas, despertó un gran avance e interés por las ciencias físicas y en general por la investigación matemática, convirtiéndola en una actividad próspera y de amplitud mundial. Infortunadamente, esta visión aún es ignorada por muchas personas que desconocen su gran importancia.

Cabe señalar que hacia 1900, las matemáticas constaban solo de unos doce temas distintos entre aritmética, geometría y cálculo. Hoy en día, superan las setenta categorías. Algunas temáticas como el álgebra y la topología se han dividido en varios campos. Otros temas como la teoría de la complejidad y los sistemas dinámicos, se han constituido en nuevas y diversas áreas de estudio.

Dado todo este crecimiento de la actividad matemática, hoy en día, los matemáticos se sienten más cómodos al expresar que las matemáticas son "*la ciencia que estudia las estructuras"* puesto que finalmente lo que ellos hacen, es examinar y crear estructuras: numéricas, algebraicas, geométricas, topológicas, aleatorias, etc. Tales estructuras, pueden ser reales o imaginarias, visuales o mentales, estáticas o dinámicas, cualitativas o cuantitativas, puramente utilitarias o de algo más que un interés recreativo (Devlin, 2002, p. 13).

En cuanto a la las *visiones* sobre la importancia de las matemáticas y siguiendo el pensamiento de Puig (2001), para algunos profesores la más importante misión y tal vez la única que se les asigna, es el *desarrollo del pensamiento lógico*, el cual está relacionado con el *arte de razonar bien*. En consecuencia, la didáctica estará orientada hacia la comprensión de leyes y teoremas, así como la habilidad para usarlos correctamente en otros razonamientos que siguen reglas similares, sin importar mucho el origen de éstos.

Para otros profesores, las matemáticas constituyen ante todo, la ciencia que permite solucionar problemas. Entonces la didáctica que sigue esta visión consiste en solucionar gran cantidad de problemas. Así, muchas veces el docente se dedica a la solución de ejercicios rutinarios, extraídos en su mayoría de libros de texto, que por lo general son realidades inventadas, caducadas o manipuladas y alejadas de la vida cotidiana, como claramente lo expresa Alsina (2007). En consecuencia, tales actividades poco o nada ayudarán a mostrar a la matemática como una ciencia útil para la interpretación y modelización de la realidad. Por supuesto, no es que esto sea totalmente perjudicial, pues nadie duda de la importancia de desarrollar tales habilidades. Pero cuando este pragmatismo cuantitativo se convierte en el único fin, sin preocuparse por analizar siquiera cuáles serían las facultades que el estudiante debe poner en juego en la solución de un problema, ni mucho menos, si esas facultades le van a servir para desarrollarse en su vida futura como ser social, entonces, la importancia de las matemáticas queda reducida al simple utilitarismo o la ciencia ficción.

Desafortunadamente las pruebas estandarizadas que se han implementado en el sistema educativo, como mecanismo de control, han impulsado de manera categórica esta concepción pragmática y por tanto, las técnicas didácticas que le favorecen. En consecuencia, lo que finalmente importa para la mayoría de instituciones educativas es el éxito en los resultados y, por ello, se inculca entre otras motivaciones, el espíritu de competencia y el individualismo.

Otros maestros, quizá con una mayor sensibilidad, consideran que es necesario desarrollar otras facultades adicionales a las ya mencionadas. Para esto, es necesario abordar algunos principios que a lo largo de la historia han caracterizado a esta ciencia. Por ejemplo, de acuerdo con el pensamiento de Pascal una buena educación matemática debería contribuir a cultivar en primer lugar lo que él denominaba el *"esprit de finesse"*[1] concepto tan profundo que no cuenta con una traducción muy exacta, pero que hace referencia a *la finura de espíritu* (Puig, 2001, p. 4).

Se podría decir que una persona ha logrado cultivar *la finura de espíritu*, cuando es capaz de comprender bien unos cuantos principios «poco comunes» y derivar consecuencias, o ser capaz de derivar consecuencias de una gran diversidad de principios. Según Pierre Duhem, los que tienen "*esprit de finesse"* son los espíritus amplios e imaginativos, aquellos que son capaces de abarcar una gran multiplicidad de hechos colocándolos dentro de una perspectiva, y extremadamente dotados para "ver claramente gran número de nociones concretas, y comprender a la vez el conjunto y los detalles" (Ferrater, J. 1979, p.1021).

1 Pascal precisa su pensamiento al respecto: Hay, pues, dos clases de espíritus: uno, que penetra viva y profundamente las consecuencias de los principios, y eso es el espíritu de justeza (justesse); otro, que comprende gran número de principios sin confundirlos, y ése el espíritu de geometría. La diferencia viene a ser ahora la de la fuerza y penetración, por un lado, y la amplitud, por el otro (Ferrater, J. 1979, p.1022).

Por otro lado, con el avance de la ciencia y la tecnología, desde hace varios años, se tiene la posibilidad de utilizar herramientas de software para el estudio de los objetos matemáticos, permitiendo establecer un diálogo amplio entre la visualización y los procedimientos algebraicos que se realizan con lápiz y papel. En este mismo sentido, Villa-Ochoa (2009), expresa que cuando los docentes promueven la enseñanza a partir de situaciones del *mundo real*, hace que se disminuya la brecha que ha existido entre *matemáticas y realidad*. Pero además, es importante apuntar que cuando tales situaciones se logran modelar o simular mediante el uso de herramientas computacionales, conlleva a que tanto maestros como estudiantes puedan explorar los objetos a través de la visualización, la observación y la experimentación, logrando no solo reconocer patrones y comprobar leyes, sino realizar nuevas conjeturas, ya sea relacionadas con el comportamiento de los objetos matemáticos, o sobre el potencial del software como herramienta constructiva.

La aplicación de variadas estrategias de enseñanza y aprendizaje como las descritas anteriormente, hacen posible reducir la brecha entre *realidad* y *matemáticas* que por muchos años desafortunadamente, esta relación para la mayoría de los estudiantes, ha sido muy distante.

4. DESCRIPCIÓN DE LA EXPERIENCIA

Como se mencionó, es difícil para una persona avanzar en algo que no represente suficiente *importancia* y *curiosidad*, pues en concordancia con esta, se ejercerán los esfuerzos necesarios para sortear dificultades.

En consecuencia, desde la experiencia docente y con el ánimo de cambiar o ampliar las visiones que los estudiantes tienen sobre las matemáticas y conjuntamente fortalecer los procesos de investigación, se decidió proponerles la realización de un ensayo sobre ***"la importancia de las matemáticas en el desarrollo humano y científico",*** el cual deben ir elaborando desde el comienzo del semestre para entregarlo a finales de este.

Para la elaboración del ensayo se ha seleccionado un buen número de libros y artículos académicos, entrevistas a matemáticos famosos y videos, que se han dispuesto en la plataforma MOODLE. Además los estudiantes tienen plena libertad de consultar otros libros o fuentes que deseen.

Es así como, desde el comienzo del semestre, los estudiantes reciben las orientaciones necesarias para el desarrollo del ensayo. Además se les da a conocer mediante una matriz los criterios de evaluación que se tendrán en cuenta para su valoración. Esta estrategia, se ha venido trabajando de manera integrada con la asignatura de Taller de Comunicación y Taller de Informática.

Desde el taller de comunicación oral y escrita se realizan diversas actividades encaminadas a fortalecer en los estudiantes procesos relacionados con la estructura de los textos académicos, competencias textuales, la lectura crítica y reflexiva, el uso y manejo de las normas APA como elementos esenciales para la producción de textos críticos. De igual manera, el ensayo se evalúa como parte final del proceso de esta asignatura.

En el Taller de Informática los docentes que imparten esta asignatura, refuerzan las técnicas para la elaboración de trabajos escritos de forma que puedan aplicar a los documentos una estructura apropiada, utilizando las herramientas que proporcionan procesadores de texto como Word y otras herramientas como Google Docs.

Por otra parte, cabe señalar que algunos estudiantes son integrantes activos del ***Semillero Pigmalión*** de la universidad y han participado del curso *"leer para investigar"*, por lo que paralelamente han empezado a interesarse de una manera más consciente por la investigación y desde allí, refuerzan procesos de consulta, lectura y escritura.

Durante las clases de matemáticas, se hace énfasis sobre la importancia que tiene cada una de las temáticas en el campo profesional de los estudiantes. Por otro lado, ellos deben realizar un taller muy práctico denominado *Elaborando cajas y construyendo funciones*[2] . Este plantea una situación real, en la que los estudiantes a partir rectángulos con dimensiones dadas, deben construir varias cajas sin tapa. Con los registros de medición de las cajas organizados mediante una tabla, deben analizar el comportamiento de las distintas variables involucradas en el problema y encontrar los modelos matemáticos y verificarlos.

Para apoyar el desarrollo del taller, se diseñó el recurso virtual denominado "*modelación y simulación interactiva de funciones",* colocado en la dirección www.funciomaticas.com*.* En esta web, se presentan diversos conceptos teóricos sobre el tema, la modelación de las familias de funciones y el modelo de una caja sin tapa en segunda y tercera dimensión, como la que se propone en el taller, de manera que los estudiantes pueden variar las dimensiones de la altura, el largo y el ancho de la caja y analizar las variables implicadas en el modelo. Además, se simulan todas las *funciones matemáticas* que surgen a partir de las variaciones de las diferentes dimensiones relacionadas en el modelo.

A manera de ejemplo, en la figura 1, se muestra el diseño de una de las pantallas de uno de los módulos que compone el recurso virtual mencionado.

[2] Para conocer más sobre este taller, puede visitar la página www.funciomaticas.com

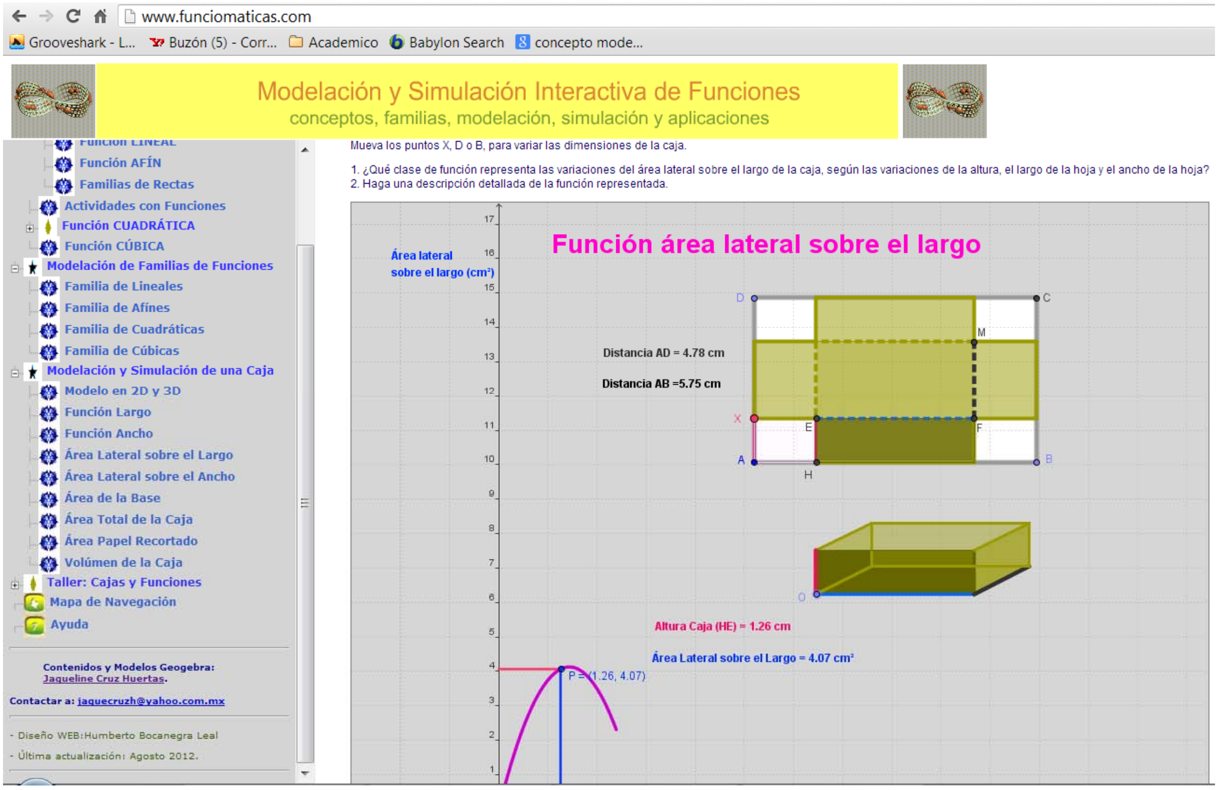


Figura 1. Diseño de una de las pantallas. Autor: Jaqueline Cruz.

Con las estrategias metodológicas aplicadas, se pretende que los estudiantes adviertan por sí mismos, la relación que existe entre el *mundo real* y *las matemáticas*. De tal forma, que vean cómo a través de los modelos matemáticos se puede analizar diversas situaciones y fenómenos de la vida cotidiana.

Una vez que los estudiantes entregan el ensayo, en una de las clases de matemáticas, se les da la oportunidad que lean por parejas, dos de los ensayos de otro grupo. Deben realizar un proceso de co-evaluación apoyados en la matriz de evaluación (ver tabla 2) que se elaboró para este fin. En este espacio, también se aprovecha la oportunidad para indagar con los estudiantes, mediante diversas preguntas, sobre las dificultades y los aspectos positivos de la actividad.

MATRIZ DE EVALUACIÓN PARA EL ENSAYO DE MATEMÁTICAS

Ensayo de: ____

Criterios	Puntos Guía	Valoración					
		0	1	2	3	4	5
1. Documentación previa.	¿Refleja que el autor se ha documentado sobre el tema objeto del ensayo? ¿Tiene referencias bibliográficas sin que ello implique una sobrecarga de éstas?						
2. Relación con el tema.	¿Está claramente centrado en el tema propuesto y aborda plenamente sus aspectos esenciales?						
3. Analiza hechos relevantes, aportando	¿Contrasta sus puntos de vista con los de otros autores?						

juicios de valor e interpretación subjetiva del autor.	¿El punto de vista y los aportes del autor son novedosos?						
4. Concisión.	¿Tiene estructura: organización de ideas, coherencia y cohesión? ¿Se ajusta a la extensión señalada?						
5. Reflexión.	¿Refleja que el autor ha reflexionado sobre el tema? ¿Se cuestiona? ¿Hace preguntas?						
6. Componente Estético.	¿Es agradable o ameno para el lector? ¿Guarda equilibrio entre amenidad y rigurosidad?						
7. Conclusiones.	¿Presenta conclusiones y aportes del autor sobre el tema? (párrafo de cierre).						

TOTAL PUNTOS

Revisado por: ____________________

Tabla 2. Matriz de evaluación para el ensayo. Autor: Jaqueline Cruz.

Finalmente, mediante las herramientas que provee Google Drive, se aplica un instrumento de evaluación mediante una encuesta de 19 preguntas, con la que se pretende recoger información para conocer varios tópicos relacionados con los objetivos del proyecto y de esta forma, evaluar los diferentes aspectos de la estrategia aplicada, desde una perspectiva más amplia.

5. RESULTADOS

En la siguiente tabla, se presentan las preguntas y las repuestas expresadas en porcentaje, que dieron 68 estudiantes durante el primer semestre del año 2012.

Preguntas	***Opciones***	***Respuestas (%)***
1. ¿Me han gustado siempre las matemáticas?	*Si* *No*	*46* ***54***
2. Me considero para las matemáticas	*Muy bueno* *Bueno* *Regular* *Malo*	*1* *35* ***59*** *4*
3. ¿Es la primera vez que leo sobre temas relacionados con la educación matemática?	*Si* *No*	***84*** *16*
4. ¿Es la primera vez que escribo sobre la importancia de las matemáticas?	*Si* *No*	***87*** *13*
5. El tema sugerido para la realización del ensayo me pareció	*Muy importante* *Importante* *Poco importante*	***72*** *26* *1*
6. Entre los aportes más importantes que obtuve con la realización del ensayo fueron. *(puede seleccionar varias opciones)*	*Una visión más amplia sobre la importancia de las matemáticas.* *Comprendí mejor el valor de las matemáticas.* *Entendí mejor las causas sobre las dificultades para su aprendizaje*	***55*** *40* *50*
7. La realización del ensayo, me permitió un acercamiento más afectuoso hacia las matemáticas en:	*Alto grado* *Mediano grado* *Bajo grado* *Ningún grado*	***49*** *47* *3* *1*

8. Con la realización del ensayo logré cambiar algunos mitos que tenía como: Las matemáticas (puede seleccionar varias opciones)	*Son para inteligentes No son lo mío No sirven para nada Son difíciles Son para locos*	***46*** *26 24 40 10*
9. Después de realizar el ensayo, mi interés por el aprendizaje de las matemáticas:	*Aumentó Quedó igual Disminuyó*	***87*** *13 0*
10. En relación con mi actitud frente al aprendizaje de las matemáticas, considero que el ensayo me permitió obtener	*Una actitud más positiva Una actitud menos positiva No hubo cambios en mi actitud*	***92*** *1 7*
11. Mi grado de motivación durante la realización del ensayo fue:	*Alto Medio bajo*	***67*** *32 1*
12. ¿Me agradaría participar en el futuro en alguna investigación relacionada con las matemáticas y la administración?	*Si No*	***90*** *10*
13. Las estrategias didácticas, tanto presenciales como virtuales, empleadas por la profesora de matemáticas, favorecen la formación de un pensamiento analítico e investigativo en:	*Alto grado Mediano grado Bajo grado Ningún grado*	***74*** *22 1 0*
14. Los aportes más importantes relacionados con los procesos de lectura que logré al realizar el ensayo fueron: (puede seleccionar varias opciones)	*Ser más reflexivo Ser más crítico Ser más analítico Abordar lecturas de diversas fuentes y disciplinas*	*49 40* ***56*** *26*
15. El trabajo realizado me permitió reconocer y aplicar la estructura del ensayo en:	*Alto grado Mediano grado Bajo grado Ningún grado*	***56*** *41 3 0*
16. Los aportes más importantes relacionados con los procesos de escritura que logré al realizar el ensayo fueron: (puede seleccionar varias opciones)	*Mejorar la redacción Mejorar la ortografía Aplicar correctamente las normas APA Mejorar la argumentación Aplicar correctamente conectores Tener más respeto por el pensamiento de otros autores*	*66 32 28* ***71*** *31 29*
17. La realización del ensayo me permitió consolidar e integrar saberes relacionados con las matemáticas y la lecto - escritura en:	*Alto grado Mediano grado Bajo grado Ningún grado*	***65*** *34 1 0*
18. Las estrategias didácticas, tanto presenciales como virtuales, empleadas por la profesora de taller de comunicación oral y escrita, contribuyen a fortalecer procesos de investigación en:	*Alto grado Mediano grado Bajo grado Ningún grado*	***76*** *22 0 1*
19. Proyectos interdisciplinares como este, permiten desde los primeros semestres, adquirir herramientas para de investigación en:	*Alto grado Mediano grado Bajo grado Ningún grado*	***96*** *4 0 0*

Tabla 3. Encuesta y respuestas, primer semestre de 2012.

Como se puede inferir de los resultados de la encuesta, la experiencia ha permitido reforzar procesos de lectura y escritura, en un área poco trabajada anteriormente por los estudiantes, como lo es el campo de las matemáticas. Además de reforzar los procesos de investigación formativa en el área, se han podido ampliar y, en algunos casos cambiar paradigmas y visiones que los estudiantes traen sobre las matemáticas al inicio de su carrera, permitiéndoles asumir una actitud más positiva hacia su aprendizaje.

Varios estudiantes expresan que el hecho de haber leído diversos artículos, libros, ver videos sobre el tema, y haber tenido que realizar el proceso de escritura, les permitió acercarse de una manera *más afectiva y positiva* a las matemáticas. Además, les ayudó a ser más conscientes de la importancia que esta ciencia tiene no solo para su carrera, sino como un elemento de cultura vital para el desarrollo humano y los procesos investigativos.

En cada semestre, se hace una preselección de los mejores ensayos para ser presentados a la dirección del Semillero Pigmalión de la Universidad. Esto con el fin que desde allí o desde otras instancias, se continúe con el acompañamiento para mejorar procesos de redacción y escritura para luego ser publicados en algunos medios de comunicación e información de la universidad.

Esta experiencia se ha socializado en varios eventos como: II encuentro de investigación en Administración de Empresas. “La administración y los retos del cambio”. Universidad Cooperativa de Colombia. Octubre 20 de 2011, X encuentro regional de semilleros de investigación. REDCOLSI – nodo Bogotá Cundinamarca “La lectura: una puerta a la investigación” Universidad Central. Mayo 10 de 2012 y IV encuentro de semilleros de investigación: “Acercamiento a perspectivas actuales de la Administración y Economía” -RESFAE. Unipanamericana. Sept 19 de 2012.

6. CONCLUSIONES

Aunque actividades como esta de escribir, leer y corregir pueden resultar dispendiosas tanto para el estudiante como para el docente, sin duda alguna, vale la pena su realización ya que como se puede inferir de los resultados, se ha logrado un impacto muy positivo en los estudiantes.

Se ha observado que cuando se proponen aplicaciones partiendo de entornos reales, y además, se amplían estos contextos con herramientas de modelación, simulación e interacción, las estructuras cognitivas del estudiante se desarrollan mejor, propiciando aprendizajes significativos. Esto porque le permite trabajar de forma simultánea, procesos conceptuales, procesos analíticos y sociales. De esta manera, los estudiantes pueden tener mayor facilidad para transferir los conceptos aprendidos a otros contextos. En efecto, la realización de talleres prácticos relacionados con las temáticas trabajadas, es lo que finalmente muestra si un estudiante es capaz de utilizar sus conocimientos en la solución de problemas en contexto. En otras palabras, si verdaderamente ha desarrollado su competencia matemática.

Las anteriores apreciaciones, han sido estudiadas y analizadas por la autora de este artículo, en un proceso de investigación mucho más amplio cuyos resultados han sido publicados por la Editorial Académica Española en el libro "*Matemáticas y realidad. Una conexión posible con GeoGebra*"

Es importante señalar, que mediante la elaboración del ensayo, es posible propiciar cambios significativos y ampliar o cambiar visiones y paradigmas que traen los estudiantes sobre las matemáticas al inicio de su carrera, favoreciendo una actitud más positiva hacia el estudio de esta ciencia, disminuyendo en gran medida los índices de pérdida y deserción en el programa.

Finalmente, es posible aunar esfuerzos desde diferentes asignaturas y recibir apoyo de los Semilleros de Investigación de las universidades, para avanzar desde los primeros semestres, en el desarrollo de habilidades investigativas, procesos tan necesarios para afianzar la investigación en el país.

Referencias Bibliográficas

Alsina C. (2007). *Si enrique VIII tuvo 6 esposas, ¿cuántas tuvo enrique IV? El realismo en educación matemática y sus implicaciones docentes*. Revista Iberoamericana de Educación. , nº 43, pp. 85-101.

Devlin, K. (2002). *El lenguaje de las matemáticas*. Traducción de Pedro Crespo. Barcelona, MA NON Tropo.

Gelb, M. J. (2006). *Inteligencia Genial. Siete principios claves para desarrollar la inteligencia, inspirados en la vida y obra de Leonardo da Vinci*. Traducción de Margarita Valencia. Grupo Editorial Norma, p. 53.

Ferrater, J. (1979). *Diccionario de filosofía*, tomo segundo. Madrid, Alianza, p. 1021-1022.

Gil, N., Blanco, L.J., Guerrero, E. (2005). *El dominio afectivo en el aprendizaje de las matemáticas. Una revisión de sus descriptores básicos*. *Revista Iberoamericana de Educación Matemática*. UNIÓN, junio, No. 2 p 15-32.

Gómez-Chacón, I.M. (1997). *Procesos de aprendizaje en matemáticas con poblaciones de fracaso escolar en contextos de exclusión social. Las influencias afectivas en el conocimiento matemático*. Tesis Doctoral. Universidad Complutense. Inédita.

Goleman, D. (1996). *Inteligencia emocional.* Barcelona: Kairós

Hidalgo, S., Maroto, A., Palacios, A. (2005). *El perfil emocional matemático como predictor de rechazo escolar: relación con las destrezas y conocimientos desde una perspectiva evolutiva*. Educación Matemática, agosto/vol. 17, número 002. México. Santillana, p. 89-116.

McLeod, D.B. (1992). *Research on affect in mathematics education: A reconceptualization.* Extraído el 30 de septiembre de 2012 desde http://www.peterliljedahl.com/wp-content/uploads/Affect-McLeod.pdf.

Ministerio de Educación Nacional. (2002). Decreto 0230 de Febrero 11 de 2002. Extraído el 30 de septiembre de 2012 desde http://menweb.mineducacion.gov.co/normas/concordadas/jeronimo/ley%20115%20OK/hipervinculos%20115/Decreto_0230_2002.pdf

Núñez, J.C. y González, J. (2002). *Las actitudes hacia las matemáticas: Una perspectiva evolutiva*. Trabajo de investigación financiado por el Ministerio de Ciencia y Tecnología. Universidad de Oviedo. España.

Puig, A. P. (2001, 10 de enero). "*El Valor formativo de las matemáticas en la segunda enseñanza*". Extraído el 21 de Mayo de 2012 desde http://www.google.com/#sclient=psy&hl=es&biw=718&bih=511&source=hp&q=El+valor+formativo+de+las+matematicas&aq=f&aqi=&aql=&oq=&pbx=1&bav=on.2,or.r_gc.r_pw.&fp=44a92051a5c66869 .

Villa-Ochoa J. A., Bustamante C. A., Berrio Arboleda M. D. Osorio J.A. y Ocampo Bedoya D. (2009). *Sentido de realidad y modelación matemática: el caso de Alberto.* ALEXANDRIA Revista de Educação em Ciência e Tecnologia, vol. 2, nº 2, pp. 159-180.

Autor: Licenciada en Matemáticas, Universidad Distrital; Especialista en Computación para la Docencia, Universidad Antonio Nariño; Especialista en Educación, Universidad Complutense de Madrid; Especialista en Edumática, Universidad Autónoma; Magister en Informática Aplica a la Educación, Universidad Cooperativa de Colombia. Docente Universidad Colegio mayor de Cundinamarca. Permio Compartir Gran Maestra 2000. E mail: jcruzh@unicolmayor.edu.co; jaquecruzh@gmail.com; Página personal: www.funciomaticas.com

Dirección: Calle 23 No 68 -59 interior 40.
Cuidad: Bogotá
País: Colombia
Correo personal: jaquecruzh@gmail.com
Teléfono: (571) 80 30 799
Celular: 300 222 59 15

Publicaciones

- **Libro: Matemáticas y realidad-Una conexión posible con GeoGebra**. Editorial Académica Española, ISBN-13: 978-3-659-08309-9. OmniScriptum GmbH & Co. KG. Heinrich-Böcking-Str. 6-8. 66121, Saarbrücken, Germany. Mayo 18 de 2015.
- **Artículo: Ambiente enriquecido con TIC para el aprendizaje de funciones.** Revista Agenda de Calidad. Universidad Colegio Mayor de Cundinamarca. Noviembre -2014

- **Artículo Original tipo 1, clasificación Colciencias:** ***Funciones en Contexto. Una experiencia enriquecida en la modelación y simulación interactiva.*** Revista indexada Sistemas y Telemática. Universidad ICESI. ISSN 1692-5238. Vol 11. No. 26. Septiembre 2013, pág. 59 -80.
- **Artículo:** ***Análisis didáctico de la guía de aprendizaje. Variación de triángulos isósceles de igual perímetro***. Revista indexada Internacional Magisterio. Editor: Cooperativa Editorial Magisterio. ISSN 1692-4053. No. 60, pág. 89 -92. Enero - 2013.
- **Artículo "*Al rescate del valor formativo de las matemáticas*".** Pensamiento Universitario. Revista No. 32. Universidad Colegio Mayor de Cundinamarca. ISSN 0121- 7348. Año 2012. Pág. 8-14.
- **Libro: NUESTROS MEJORES MAESTROS – *Experiencias Educativas Ejemplares 2000.*** ISBN 958-33-9994-7. Co-autora - Editor: COMPARTIR. Bogotá, D.C. Colombia. Oct. 2006
- **Artículo:** ***Cabri Geómetre: Todo un micromundo que crece con los estudiantes*.** Palabra Maestra. ISSN 1657-3102. Vol. 12, pág. 4 - 5. Marzo, 2006.
- **Artículo*: Durmiendo con el Fantasma de las matemáticas*.** Educación y Cultura. Editor FECODE. *ISSN*: 0120-7164. Vol. 54, pág. 32 a 36. Septiembre, 2000.
- **Artículo: "*Exploración acerca de la incidencia de las matemáticas en la formación de estudiantes*".** Revista indexada EMA, Investigación e Innovación en educación matemática. ISSN 0122-5057. Volumen 4. No. 1. Noviembre 1998, pág. 46 - 58. Una empresa Docente, Universidad de los Andes. Bogotá. Colombia.
- **Página WEB:** www.funciomaticas.com.
  Contiene un amplio estudio de las funciones lineales, afines, cuadráticas y cúbicas con talleres y actividades interactivas que favorecen la comprensión significativa de los conceptos.

UNIÓN
REVISTA IBEROAMERICANA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA
www.fisem.org/web/union
http://asenmacformacion.com/ojs/index.php/union/index

ISSN: 1815-0640
Número 45. Marzo 2016
Página 61-75

Habilidades en lecto-escritura matemática en estudiantes del área ciencias de la salud. Prueba de sondeo.

Rafael Antonio Vargas Vargas

Fecha de recepción: 22/10/2012
Fecha de aceptación: 10/06/2014

Resumen	Este trabajo presenta los resultados de una prueba de sondeo realizada a dos grupos diferentes de estudiantes del curso de farmacología, del área de la salud. Aquí se intenta evaluar las habilidades y debilidades en matemática básicas. A pesar de la importancia de las matemáticas en el área de la salud se observan deficiencias en la manipulación de la información matemática, que probablemente está relacionado con deficiencias tempranas en la formación. Con este trabajo se llama la atención sobre el impacto de la educación matemática temprana en la vida de estudiantes avanzados y en su éxito profesional. **Palabras clave**: Cerebro, notación matemática, ciencias de la salud.
Abstract	This paper presents the results of a survey conducted in two different groups of students of pharmacology course. The survey explores skills on reading and writing of mathematical data. Despite the importance of mathematics in the health field, it observed deficiencies in the manipulation of mathematical data that is probably related to deficiencies in early mathematical training. This is intended to draw attention to the impact of early mathematics education in the life of advanced students and their professional success. **Keywords**: Brain, mathematical notation, health sciences
Resumo	Este artigo apresenta os resultados de um teste em dois grupos diferentes de alunos do curso de farmacología, área da saúde. É avaliado os pontos fortes e fracos em matemática básica. Apesar da importância da matemática na área da saúde, são observados deficiencias na manipulação de informações matemáticas, o que provavelmente está relacionado com deficiências da formação inicial. A intenção é chamar a atenção para o impacto da educação matemática no início da vida de estudantes avançados e seu sucesso profissional. **Palavras-chave**: Cérebro, notação matemática, ciências da saúde

1. Introducción

El uso de las matemáticas es fundamental para nuestro desempeño cotidiano, casi todas las actividades humanas están permeadas por las matemáticas; desde que nos levantamos y vemos la hora en el reloj y planeamos nuestro día, hasta cuando programamos el despertador y nos acostamos. Según la actividad que realicemos las matemáticas son más o menos importantes y en algunos situaciones pueden convertirse en elementos vitales que determinan la vida o la muerte de un individuo (Rodríguez, Milagros, 2011). Este es el caso del papel de las matemáticas en el área de la salud en donde la información numérica es clave, pues es la base de procedimientos cotidianos tan simples como la medición de signos vitales (frecuencia cardiaca, presión arterial, temperatura, frecuencia respiratoria), el cálculo en la administración de medicamentos, la programación de su administración, los datos de exámenes de laboratorio, hasta trabajos y procedimientos mucho más complejos que incluyen el análisis de información en diversos tipos de estudios clínicos y epidemiológicos (Olmedo, Victor & Ariza, Raúl, 2012). A pesar de la importancia de las matemáticas con frecuencia los programas académicos no incluyen preparación específica en este tema, pues muchos de los conceptos de matemática aplicada están incorporados en las diversas asignaturas: biofísica, bioquímica, fisiología, farmacología, áreas clínicas, etc. Se asume que el estudiante de pregrado ingresa con un bagaje adecuado en términos de lectura, escritura y conocimiento matemático, y no se tiene en cuenta la probable desigualdad en los niveles de formación entre los estudiantes, debido a diferencias biológicas, sociales, culturales y económicas entre otras (Hutton, 1998a). Pasar por alto este tipo de diferencias puede impactar negativamente tanto el desempeño académico del estudiante universitario del área de ciencias de la salud, como el desempeño laboral del futuro profesional, lo cual en últimas y tal vez esto sea lo más importante, puede impactar negativamente la calidad en la atención de los pacientes que serán atendidos por estos futuros profesionales.

2. Problema

En la práctica clínica los errores de los profesionales de la salud son frecuentes y con frecuencia la mortalidad por esta razón, es más alta que la mortalidad por otro tipo de eventos como los accidentes de tránsito. Muchos de estos errores no son reportados, ni registrados en las historias clínicas de los pacientes, o si son registrados nunca son identificados como causa de muerte dada la gran cantidad de información que a diario se anota en una sola historia clínica. Gran parte de estos errores están relacionados con problemas en lectura e interpretación de datos, muchos de ellos datos matemáticos, que incluyen cifras y unidades de medida, cuya lectura incorrecta trae como consecuencia que la ejecución de las órdenes médicas o de enfermería se realice en forma incorrecta. La falla en los cálculos ocasiona que con relativa frecuencia al paciente se le aplican cantidades insuficientes de medicamentos, con lo que se falla en la terapia, o se administran dosis excesivas de fármacos que pueden causar toxicidad. Tales errores se incrementan en ambientes de alto flujo de pacientes, con alta sobrecarga laboral, como sucede en áreas de urgencias, salas de cirugía, salas de partos, unidades de reanimación y unidades de cuidados intensivos, entre otras, que asociado al estrés del personal, llevan a que el tiempo de lectura y ejecución de las órdenes registradas en la historia clínica sea corto, lo que incrementa la probabilidad de errores. Muchos de estos errores también están relacionados con la deficiente formación en matemáticas del personal, área que en muchas ocasiones es vista con desdén en carreras del área de la salud, en donde se considera que no debe estar incluida en los programas de formación profesional, pues se asume que la formación matemática no es una prioridad y que es más necesaria en las áreas de ingeniería (Baccelli, Sandra, Anchorena, Sergio, Moler, Emilce, & Aznar, María

Andrea, 2013). El resultado de todo esto es que el nivel en formación matemática de muchos egresados del área de la salud sea débil y con bastantes vacios, lo que puede incidir negativamente en el desempeño de sus funciones (Wright, 2010). Para explorar las habilidades o debilidades de lecto-escritura matemática en estudiantes de la salud realizamos con frecuencia un sondeo al inicio del semestre del módulo de farmacología para estudiantes de Ciencias Naturales y Enfermería. Esto con el fin de identificar deficiencias y hacer notar, en los mismos estudiantes, la importancia de la lectura y la notación matemática en el estudio de la farmacología en particular.

3. Objetivos

El objetivo del presente trabajo es realizar un sondeo acerca de las habilidades de lecto-escritura matemática de estudiantes del área de la salud. En la prueba se incluye tanto la representación alfabética, como la simbólica de datos y procedimientos matemáticos.

4. Metodología

Se diseño una prueba con el fin de explorar como los individuos se desempeñan con tareas de procesamiento de la información matemática. La prueba contiene 14 preguntas dividida en dos sesiones: en la primera se pide que se escriban cifras o se realicen procedimientos empleando el lenguaje alfabético (frases o texto) con lo que se pretende evaluar principalmente la actividad del hemisferio izquierdo, el cual es responsable del lenguaje verbal y escrito (figura 1A). En la segunda sesión se piden que a partir de textos se escriban cifras o procedimientos empleando lenguaje simbólico matemático (números, símbolos) con lo que se intenta explorar principalmente la actividad del hemisferio derecho (figura 1B). El tiempo para desarrollar la prueba fue de 10 minutos y no se permitió el empleo de calculadora. La prueba se aplicó en dos grupos de estudiantes: un grupo que ingresa al curso de farmacología por primera vez (nuevos; n=63) y un grupo que tiene conocimientos de farmacología básica (avanzados; n=30). La respuesta a cada pregunta se calificó como acierto (1) o error (0). Como acierto se consideró aquellas respuestas que estaban de acuerdo a la orden y error como aquellas que carecían de respuesta, con respuestas falsas o que sin ser falsas iban en contra de la orden, es decir que por ejemplo la orden indicaba escribir en letras y escribían en números (o viceversa), aunque la información fuera correcta, la respuesta se consideró como error.

A

Escriba en letras las siguientes expresiones numéricas:

Ejemplo: 82 ochenta y dos___________________

69754 ______________________________

0,52 ______________________________

3/8 ______________________________

Ln 32 ______________________________

12^2 ______________________________

Realice las siguientes operaciones (resultado en letras):

6 - 2,45 ______________________________

Que número sumado al 16 da 85? ______________________________

B

Escriba en números las siguientes expresiones numéricas:

Ejemplo: ochenta y dos 82___________________

Tres mil cuatrocientos dos ______________________________

Cuarenta y tres milésimas ______________________________

Raíz cuadrada de cien ______________________________

Dos enteros un tercio ______________________________

Tres menor que ocho ______________________________

Realice las siguientes operaciones (resultado en números):

8 - 2,45 ______________________________

A cuanto equivalen noventa y seis mg en gms? ______________________________

Figura 1. Prueba para evaluar función de los hemisferios cerebrales. A - Datos para evaluar hemisferio izquierdo. B – Datos para explorar la actividad del hemisferio derecho. Cada bloque de datos se presentó en hojas independientes.

Para evaluar si se presentó dominancia de un hemisferio sobre otro se realizó una resta simple entre el total de la prueba para hemisferio izquierdo menos el total de la prueba para hemisferio derecho (figura 8). Un resultado positivo (1 a 7) se interpretó como dominancia del hemisferio cerebral izquierdo (HI) y un valor negativo (-7 a -1) se interpretó como dominancia del hemisferio cerebral derecho (HD).

Dominancia cerebral = HI – HD > 0 Dominancia hemisferio cerebral izquierdo

< 0 Dominancia hemisferio cerebral derecho

Hemisferio izquierdo	Pregunta	Nuevos	Avanzados

(verbal alfabético)			
	1	97%	86%
	2	1,6%	3%
	3	83%	66%
	4	30%	10%
	5	81%	59%
	6	35%	24%
	7	52%	41%
Hemisferio derecho (simbólico numérico)			
	1	95%	79%
	2	7,9%	17%
	3	71%	69%
	4	60%	55%
	5	68%	45%
	6	52%	38%
	7	29%	14%

Tabla 1. Resultado sondeo habilidades matemáticas. La tabla expresa el porcentaje de aciertos en cada grupo para cada pregunta.

5. Resultados

El desempeño de ambos grupos fue similar Tabla 1. Los errores más frecuentes se presentaron con la información que incluye números decimales, preguntas 2 del bloque A y pregunta e del bloque B (figura 1). Está información fue presentada como números o letras, pero los errores fueron más frecuentes especialmente cuando los valores se expresan en letras (figuras 2 y 3). Aparentemente el concepto de numero decimal no es claro, lo cual es difícil de explicar pues es un concepto que en la vida cotidiana se emplea en forma corriente cuando empleamos el dinero, por ejemplo. Los intentos por expresar un número decimal fueron muy variados y discordantes (ver figuras 2 y 3).

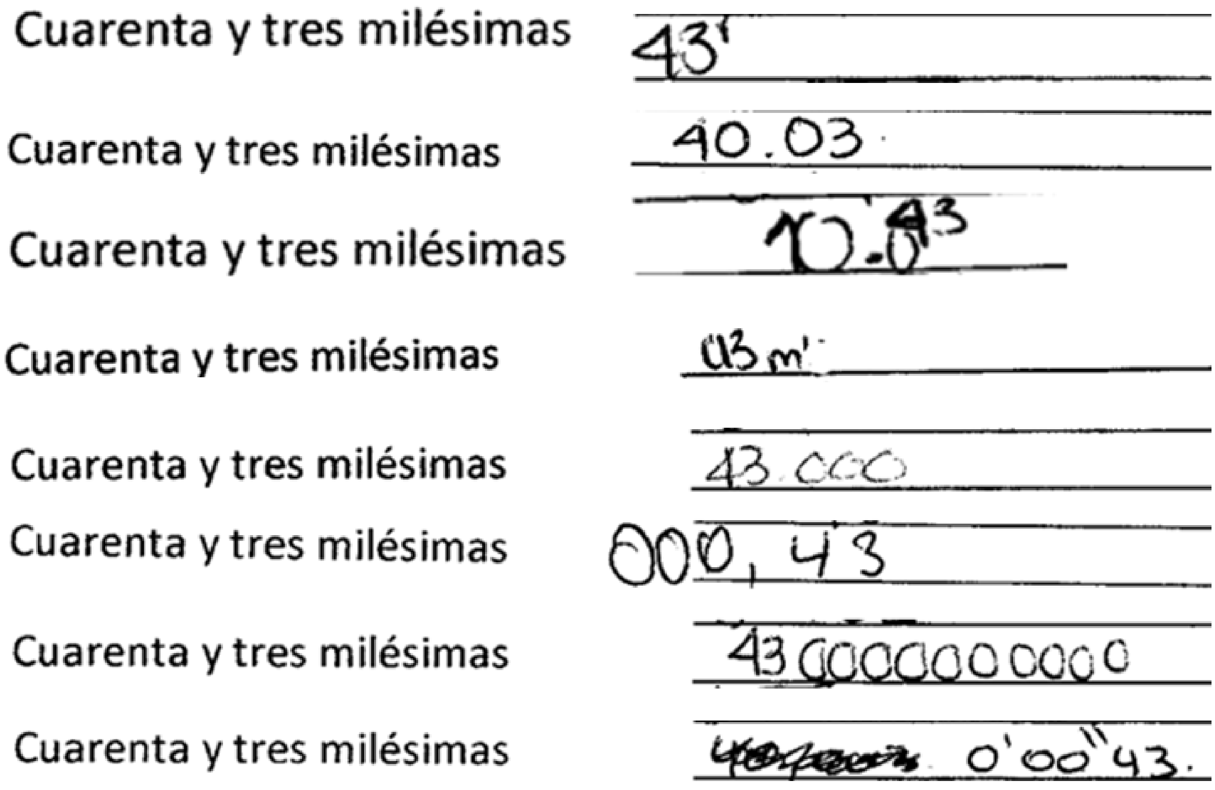


Figura 2. Expresión numérica. En este ejercicio se ordena expresar texto en números. Aquí diferentes intentos por expresar el término "cuarenta y tres milésimas" en forma numérica.

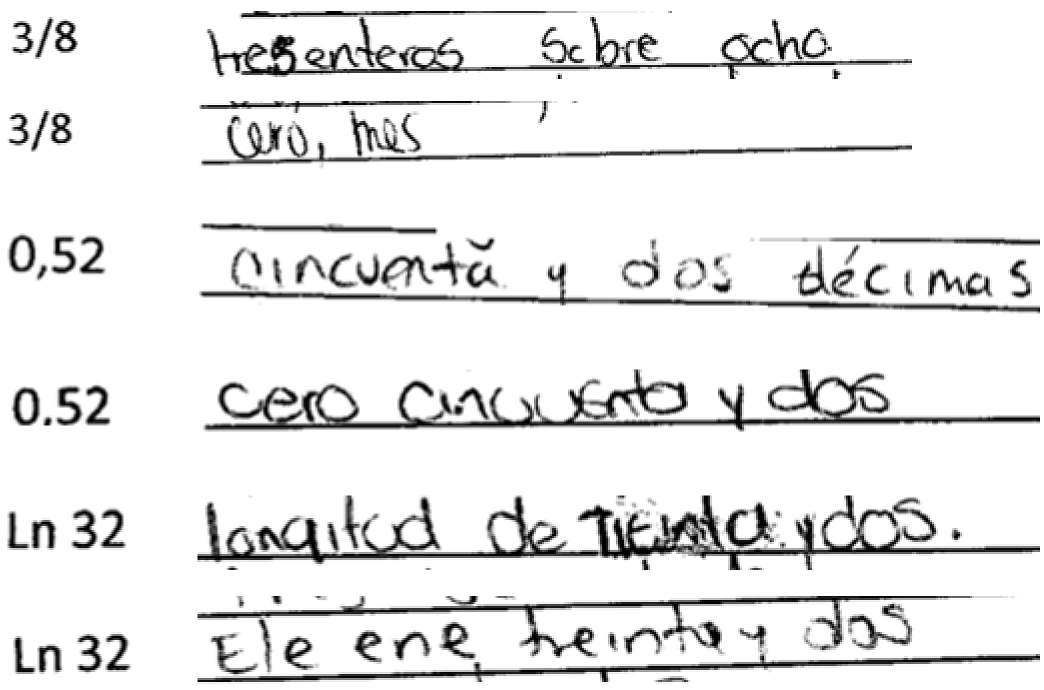


Figura 3. Expresión de datos numéricos en letras. En este ejercicio se pide que se escriban en texto los datos numéricos que aparecen: fracciones, decimales y logaritmos.

También se observaron errores al escribir términos matemáticos de uso universal como el logaritmo natural y radicación (figuras 3 y 4). En algunos casos se confunde el significado con otros términos y símbolos o no se entiende. Probablemente este tipo de errores se presenta porque estos son términos y notaciones tienen menos uso y sobre estos se hace menos énfasis en los programas escolares. Adicionalmente se observaron errores en declaraciones matemáticas que incluyen términos de relación como en las desigualdades (figura 4) y en el momento de expresar múltiplos o submúltiplos de unidades de medición. Todos estos conceptos también son de uso corriente en el lenguaje cotidiano (mayor que, menor que, igual, miligramos, microlitros), pero aparentemente no se logran relacionar las frases con los conceptos matemáticos.

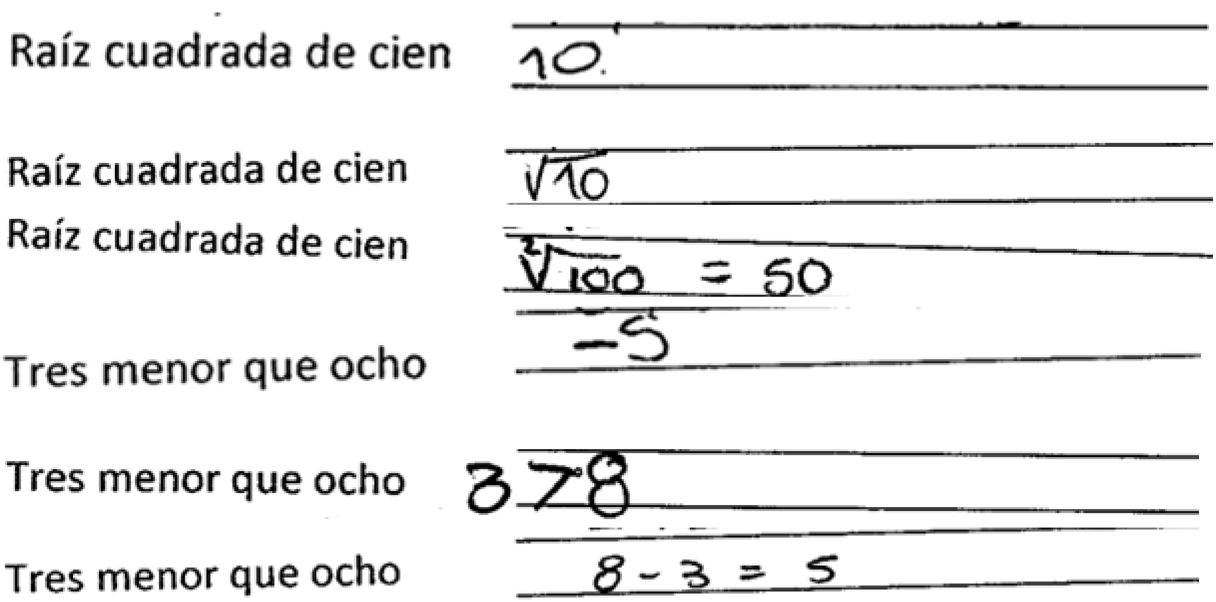
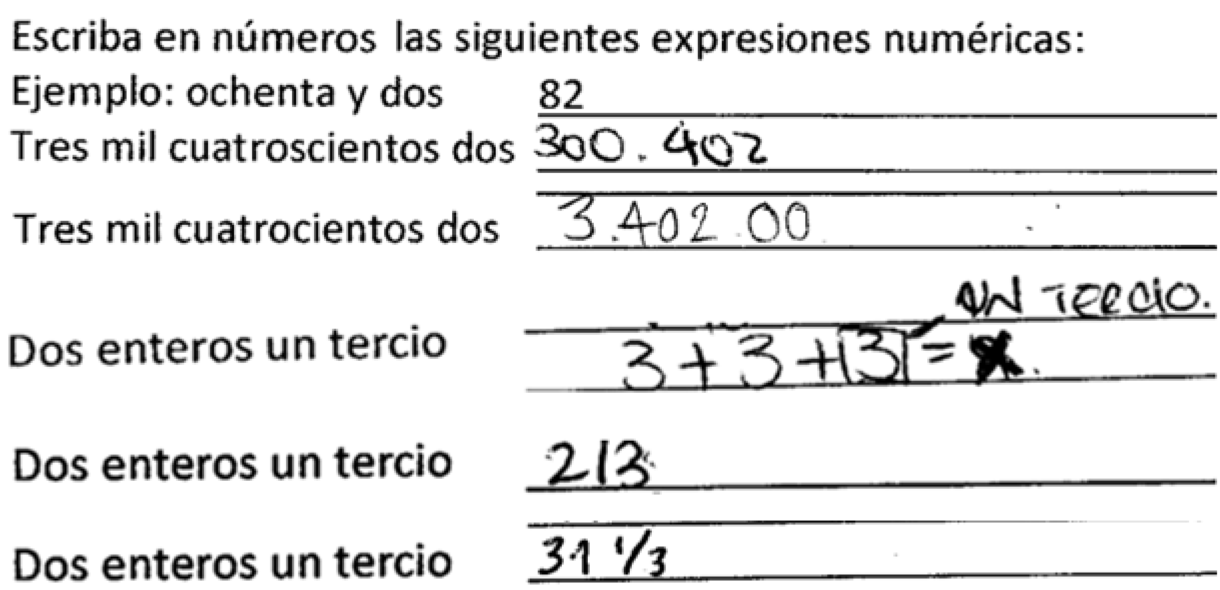


Figura 4. Expresiones en números. En este ejercicio se pide que se escriba en números los valores que aparecen en letras.



Escriba en números las siguientes expresiones numéricas:

Ejemplo: ochenta y dos 82

Tres mil cuatroscientos dos 300.402

Tres mil cuatrocientos dos 3.402 00

Dos enteros un tercio un tercio. 3+3+13=

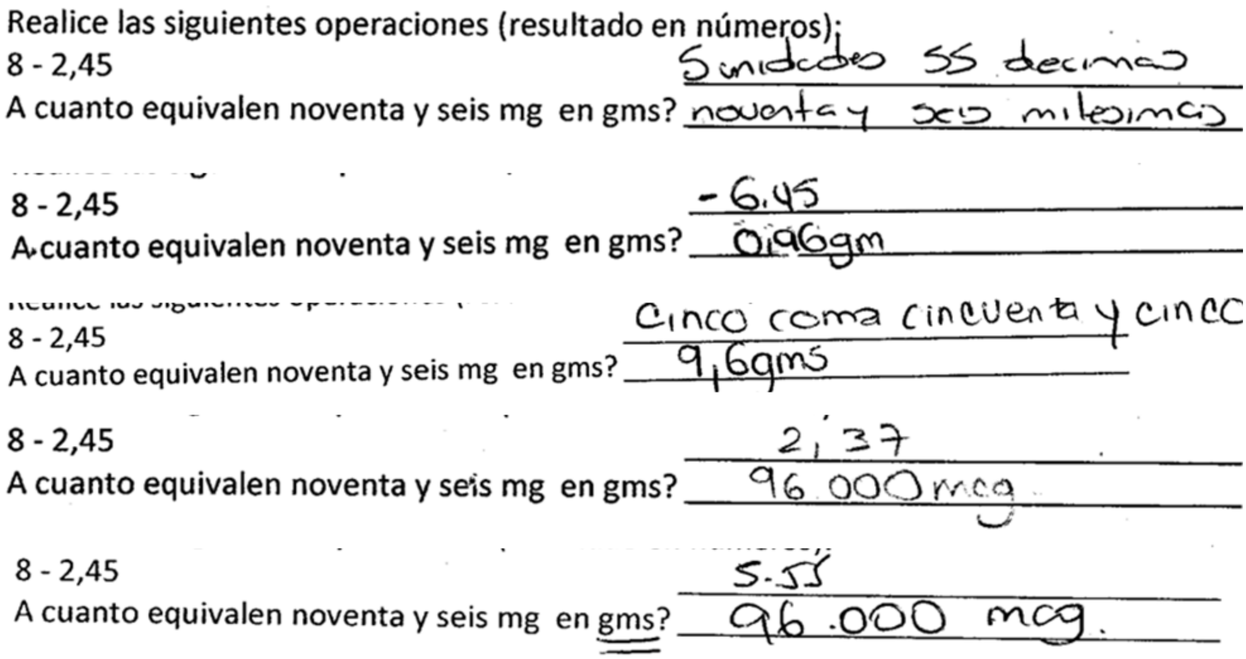
Dos enteros un tercio 2|3

Dos enteros un tercio 31 1/3

Figura 5. Expresiones en números. Otros intentos por expresar diferentes términos en forma numérica: números enteros, mixtos y fracciones.

De igual forma se observaron errores, aunque en menor proporción, con números enteros, fraccionarios y mixtos (figura 5). En cuanto a procedimientos matemáticos sencillos que incluyen sumas o restas con números decimales, o que involucran conversión de unidades, también fueron frecuentes los errores y con frecuencia los participantes expresaban en letras lo que se debía expresar en números o viceversa (figura 6 y 7).

Al solicitar que escriban en letras o símbolos matemáticos cifras o procedimientos se buscaba la participación de ambos hemisferios, pero en forma secuencial y realzando la participación del hemisferio que determina la respuesta, empleando lenguaje alfabético (hemisferio izquierdo) o lenguaje simbólico (hemisferio derecho). La lectura de cifras en texto implica el uso del hemisferio izquierdo y la expresión de cifras con números implica emplear el hemisferio derecho. Lo opuesto la lectura de números implica trabajar con hemisferio derecho y expresarlas en texto implica el uso del hemisferio izquierdo. De acuerdo a los resultados el pasar información de un hemisferio a otro representa un esfuerzo que en algunos casos genera confusión (figuras 6 y 7). Aunque esta parte del ejercicio intentaba evaluar la presencia de dominancia hemisférica, los resultados no permiten llegar a una conclusión acerca de si hay dominancia hemisférica, pues aunque se observa que en algunos participantes predominan la habilidad para interpretar símbolos y en otro para interpretar textos, esto puede estar alterado por muchas causas, en especial la ausencia de respuesta en algunos casos (ver figura 8).



Realice las siguientes operaciones (resultado en números):
8 - 2,45 Sunidades 55 decimas
A cuanto equivalen noventa y seis mg en gms? noventa y seis milesimas

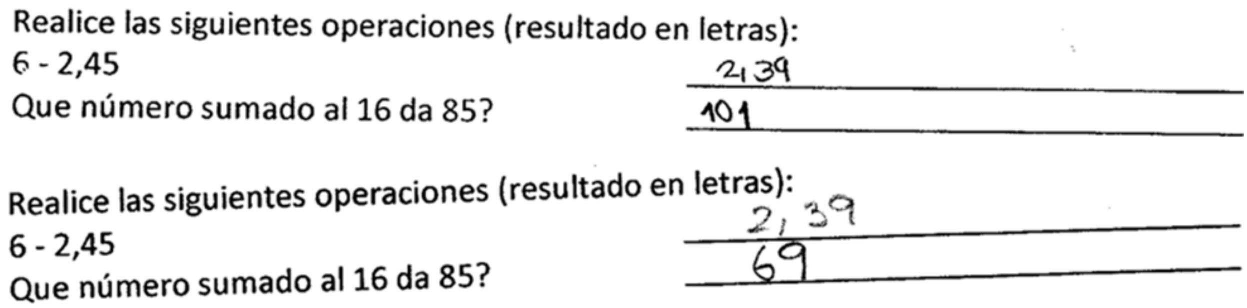
8 - 2,45 -6,45
A cuanto equivalen noventa y seis mg en gms? 0,96gm

8 - 2,45 Cinco coma cincuenta y cinco
A cuanto equivalen noventa y seis mg en gms? 9,6gms

8 - 2,45 2,37
A cuanto equivalen noventa y seis mg en gms? 96 000 mcg

8 - 2,45 5.55
A cuanto equivalen noventa y seis mg en gms? 96.000 mcg.

Figura 6. Resultados de procedimientos expresados en números. En este ejercicio se ordena realizar una operación y expresar sus resultados en números.



Realice las siguientes operaciones (resultado en letras):
6 - 2,45 2,39
Que número sumado al 16 da 85? 101

Realice las siguientes operaciones (resultado en letras):
6 - 2,45 2,39
Que número sumado al 16 da 85? 69

Figura 7. Resultados de procedimientos expresados en letras. En este ejercicio se ordena realizar una operación y expresar sus resultados en texto.

6. Análisis y discusión

Aunque el sondeo es pequeño y puede tener algunas fallas que incluyen heterogeneidad en las preguntas, el sesgo de la copia de las respuestas entre los participantes, el uso de calculadora (no permitido) en algunos casos, el estrés de los participantes (aunque siempre que se aplica se advierte que no es una evaluación, que no es calificable), el no responder la totalidad de la prueba, entre otras; el resultado si permite hacer un llamado de atención sobre la educación en general y la formación matemática en particular.

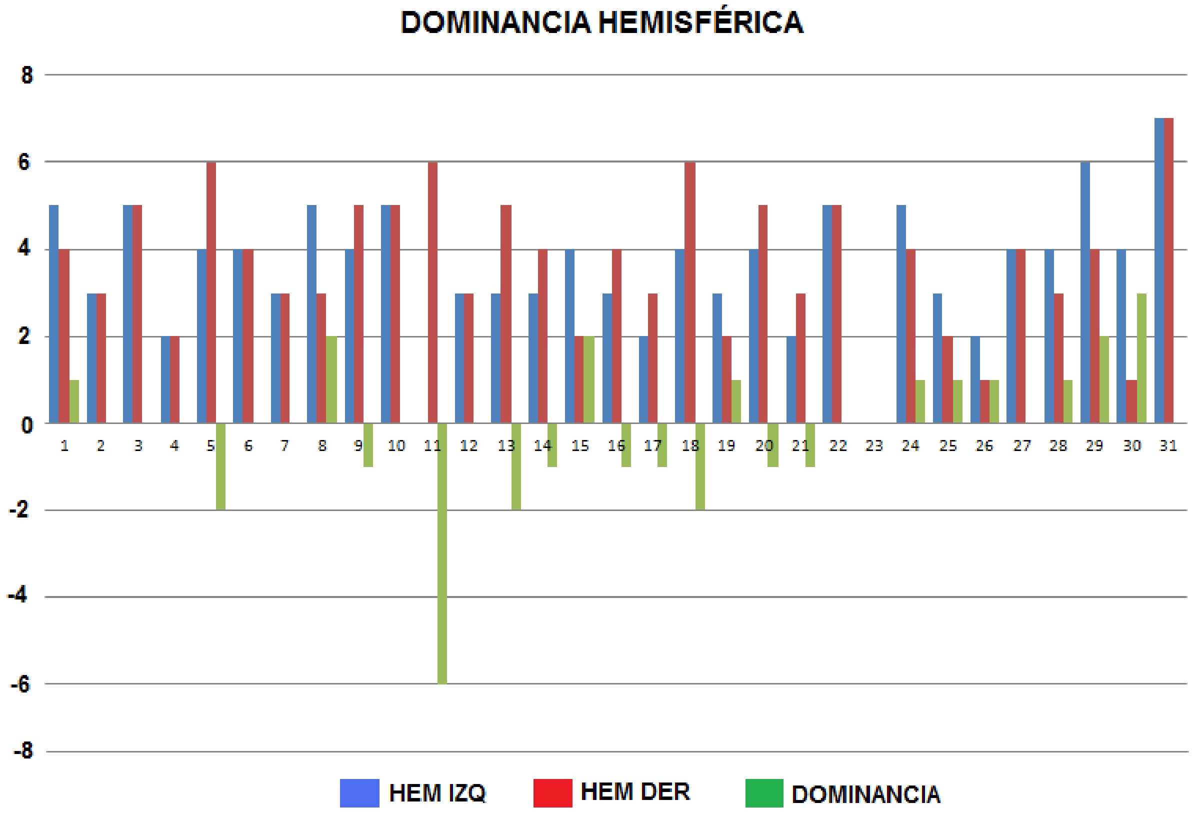


Figura 8. Dominancia hemisférica. El puntaje máximo fue de 7 para cada bloque de preguntas de la prueba, un desempeño máximo en ambas pruebas genera no dominancia sujeto 31 (teórico). Ninguno de los evaluados alcanzo el máximo puntaje. El valor de 0 en algunas pruebas puede corresponder a evaluados que no respondieron esa parte de la prueba.

Diversos autores han planteado que el pensamiento matemático se desarrolla progresivamente con la maduración cerebral determinado por factores biológicos pero también del entorno y que la forma más temprana, o inicial, de este pensamiento involucra el desarrollo de la capacidad de interpretar símbolos y realizar estimaciones o aproximaciones (Butterworth, 2000; De Smedt, Holloway, & Ansari, 2011; Gordon, 2004; Lourenco & Longo, 2010). Esta tarea de realizar estimaciones e interpretar símbolos, depende principalmente del hemisferio cerebral derecho. En forma más tardía, y debido a la educación, se empieza a desarrollar el pensamiento matemático formal, que va paralelo al desarrollo de habilidades y control motor, así como de la adquisición de habilidades comunicativas: lectura, escritura. Estas habilidades incluyen el aprendizaje de símbolos, conceptos, reglas, procedimientos y operaciones matemáticas (Ardila, 2006, 2006; Gallistel & Gelman, 1992; Lourenco & Longo, 2010; Park, Park, & Polk, 2012; Zarnhofer et al., 2012). El desarrollo de las capacidades intelectuales va paralelo al desarrollo de habilidades motoras (movimiento de manos y conteo de dedos, marcha) y la dominancia corporal (zurdo, diestro). En este proceso la apropiación de conceptos como izquierda – derecha, arriba – abajo son claves, en especial en la cultura occidental, pues la escritura tiene una direccionalidad, pues se desarrolla de izquierda a derecha y de arriba hacia abajo (Fischer & Brugger, 2011; Moeller, Martignon, Wessolowski, Engel, & Nuerk, 2011; Price, Mazzocco, & Ansari, 2013). Pero también esto es fundamental en matemáticas pues la posición de los números es clave en cifras de más de un dígito, para construir múltiplos o submúltiplos: unidades, decenas, centenas o decimas, centésimas, milésimas, etc, dependen de estos conceptos. Fallas en el desarrollo psicomotor del individuo, que depende de aspectos biológicos (genes, enfermedades) y ambientales (nutrición, afecto, estrés, sistema educativo), podrían ser razones para que con el tiempo se presenten dificultades, por ejemplo, para la notación de cifras decimales (figuras 2 a 4), un concepto que es clave en el trabajo del personal de salud, cuando realiza mediciones. De igual forma algunos autores plantean que existe una división del trabajo cerebral y que la actividad matemática esta segregada en los hemisferios cerebrales, esto no es fácil identificar dado el trabajo integrado que realizan las diferentes áreas cerebrales. El hemisferio derecho aparentemente realiza actividades relacionadas con estimación de valores y datos e interpretación de símbolos matemáticos, habilidad que se desarrolla en etapas tempranas de la vida, y que algunos autores plantean podría ser una habilidad de otras especies. El hemisferio izquierdo al parecer se encarga de tareas formales relacionadas con operaciones matemáticas (Price et al., 2013; Vallentin, Bongard, & Nieder, 2012) y la verbalización de la información matemática, al emplear el lenguaje alfabético oral o escrito (Zarnhofer et al., 2012). Fallas en la maduración de procesos de estimación y cálculos podrían explicar las notaciones de cifras totalmente desproporcionadas (ver figura 2).

Un adecuado desempeño en tareas matemáticas depende de muchos factores, que pueden estar presentes desde antes del nacimiento. Se requiere de un desarrollo neurológico adecuado (control prenatal, nutrición, desarrollo armónico postnatal), pero que además se tenga formación permanente y estímulos adecuados que generen en el individuo aprecio por el área (depende del entorno, del ambiente familiar, la educación y el entorno social). Sin embargo estas condiciones no siempre son óptimas lo cual puede afectar el desarrollo de un pensamiento matemático. Por otro lado la educación que es clave y las matemáticas, como componente fundamental en todo proceso educativo, con el sinnúmero de reglas, leyes, proposiciones, teoremas, se ve más como una carga en el mundo escolar, que como una herramienta fundamental para que el individuo tenga un desempeño adecuado en sus labores cotidianas. Dado que el conocimiento matemático es un proceso continuo y progresivo, pero que tiene periodos críticos, requiere de estímulo y motivación permanente y fallas durante las diferentes etapas del proceso enseñanza-aprendizaje, en especial durante la infancia y la adolescencia, donde el proceso de aprendizaje es clave y máximo, puede traer consecuencias nefastas. El resultado es que adolescentes y adultos tengan fallas en sus capacidades para entender y resolver tareas matemáticas, lo que pueden incidir negativamente no solo en su formación universitaria, sino en su vida profesional futura. Hasta el momento no existen estudios que demuestren esta relación conocimiento-mal desempeño, y documentar esto puede ser difícil pues reconocer este tipo de errores tiene implicaciones legales, por lo cual debe existir subregistros al respecto. Esto también dificulta que sea identificado como un problema, por lo que corregir fallas en la formación matemática en un nivel de educación superior puede ser una tarea difícil de abordar. Por supuesto no es una tarea imposible, pero si demanda tiempo y esfuerzos institucionales e individuales, dos elementos con los que pocas veces se cuenta, en especial por parte del estudiante universitario dadas las múltiples cargas y compromisos académicos que tiene. Igual cosa sucede con el profesional de la salud, que en muchas ocasiones debe responder por más de un trabajo y/o el hogar; y la capacitación que en pocas ocasiones recibe, se centra en adquirir y desarrollar habilidades prácticas. De igual forma para corregir fallas en procedimientos que requieran el uso de matemáticas, es necesario detectarlas y reconocerlas, lo cual no siempre es fácil, y una vez detectadas tener la voluntad de corregirlas, lo cual tampoco es fácil. Por lo tanto es necesario insistir por una formación matemática bien estructurada, desde los niveles preescolar, básico y secundario, que brinde al ciudadano del futuro la posibilidad y la habilidad de emplear en forma adecuada los conocimientos matemáticos tanto en su vida cotidiana, como en su desempeño profesional.

7. Conclusiones

Aunque en el presente trabajo se muestra el resultado de un sondeo pequeño y se requieren estudios más amplios, se observa deficiencias de lecto-escritura matemática, lo que está acorde con datos de estudios internacionales como PISA que indican que el nivel de formación de estudiantes de países en vías de desarrollo, son bajos, en especial en pruebas de lectura, escritura y razonamiento matemático (Froemel, JE, 2006). Muchos de estos estudiantes ingresan a la universidad con serias deficiencias que difícilmente pueden corregirse. Este problema es común en todas las áreas de formación: ingenierías, ciencias naturales, ciencias de la salud, ciencias sociales, etc. En un intento de corregir estas deficiencia muchos programas han incluido asignaturas orientadas a “nivelar” en conocimientos de matemática aplicada a los estudiantes del área de la salud (Escalona Fernández, González Serra, Tamayo Aguilar, & Velázquez Codina, 2013). Sin embargo, esta capacitación no es constante en todos los programas de salud e incluso la tendencia, en muchas instituciones, es la de eliminar dichas asignaturas en aras de ofrecer al estudiante asignaturas práctica que promuevan un contacto temprano del estudiante con su campo de acción profesional (Hutton, 1998b). Hasta el momento no existen estudios concluyentes que demuestren las bondades de una u otra tendencia en formación en salud (incluir o no cursos de nivelación matemática), por lo tanto es necesario enfatizar en la importancia de la formación temprana ofreciendo educación de calidad y la necesidad de reforzamiento permanente de dicha formación.

BIBLIOGRAFIA

Ardila, A. (2006). [The origins of language: an analysis from the aphasia perspective]. *Revista de neurologia*, *43*(11), 690-698.

Baccelli, Sandra, Anchorena, Sergio, Moler, Emilce, & Aznar, María Andrea. (2013). Análisis exploratorio de las dificultades de alumnado de Ingeniería en la resolución de problemas de optimización. *Números. Revista de Didáctica de las Matemáticas*, *84*, 99-113.

De Smedt, B., Holloway, I. D., & Ansari, D. (2011). Effects of problem size and arithmetic operation on brain activation during calculation in children with varying levels of arithmetical fluency. *NeuroImage*, *57*(3), 771-781. doi:10.1016/j.neuroimage.2010.12.037

Escalona Fernández, L. A., González Serra, Y. Y., Tamayo Aguilar, G. M., & Velázquez Codina, J. R. (2013). Resolución de problemas matemáticos aplicados a la medicina y su impacto en la formación del médico general. *Correo Científico Médico*, *17*(2), 178-185.

Fischer, M. H., & Brugger, P. (2011). When Digits Help Digits: Spatial-Numerical Associations Point to Finger Counting as Prime Example of Embodied Cognition. *Frontiers in Psychology*, *2*. doi:10.3389/fpsyg.2011.00260

Froemel, JE. (2006). Los estudios internacionales del rendimiento y los países en vías de desarrollo: participación, resultados y relevancia. *Revista de Educación*, *1*, 131-152.

Gallistel, C. R., & Gelman, R. (1992). Preverbal and verbal counting and computation. *Cognition*, *44*(1–2), 43-74. doi:10.1016/0010-0277(92)90050-R

Gordon, P. (2004). Numerical cognition without words: evidence from Amazonia. *Science (New York, N.Y.)*, *306*(5695), 496-499. doi:10.1126/science.1094492

Hutton, B. M. (1998a). Do school qualifications predict competence in nursing calculations? *Nurse Education Today*, *18*(1), 25-31. doi:10.1016/S0260-6917(98)80031-2

Hutton, B. M. (1998b). Nursing mathematics: the importance of application. *Nursing Standard*, *13*(11), 35-38. doi:10.7748/ns1998.12.13.11.35.c2567

Lourenco, S. F., & Longo, M. R. (2010). General Magnitude Representation in Human Infants. *Psychological Science*, *21*(6), 873-881. doi:10.1177/0956797610370158

Moeller, K., Martignon, L., Wessolowski, S., Engel, J., & Nuerk, H.-C. (2011). Effects of finger counting on numerical development - the opposing views of neurocognition and mathematics education. *Frontiers in Psychology*, *2*, 328. doi:10.3389/fpsyg.2011.00328

Olmedo, Victor, & Ariza, Raúl. (2012). Matemáticas en medicina: una necesidad de capacitación. *Medicina Interna de México*, *28*(3), 278-281.

Park, J., Park, D. C., & Polk, T. A. (2012). Parietal Functional Connectivity in Numerical Cognition. *Cerebral Cortex*. doi:10.1093/cercor/bhs193

Price, G. R., Mazzocco, M. M. M., & Ansari, D. (2013). Why mental arithmetic counts: brain activation during single digit arithmetic predicts high school math scores. *The Journal of Neuroscience: The Official Journal of the Society for Neuroscience*, *33*(1), 156-163. doi:10.1523/JNEUROSCI.2936-12.2013

Rodríguez, Milagros. (2011). La matemática y su relación con las ciencias como recurso pedagógico. *Números. Revista de Didáctica de las Matemáticas*, *77*, 35-49.

Vallentin, D., Bongard, S., & Nieder, A. (2012). Numerical Rule Coding in the Prefrontal, Premotor, and Posterior Parietal Cortices of Macaques. *The Journal of Neuroscience*, *32*(19), 6621-6630. doi:10.1523/JNEUROSCI.5071-11.2012

Wright, K. (2010). Do calculation errors by nurses cause medication errors in clinical practice? A literature review. *Nurse Education Today*, *30*(1), 85-97. doi:10.1016/j.nedt.2009.06.009

Zarnhofer, S., Braunstein, V., Ebner, F., Koschutnig, K., Neuper, C., Reishofer, G., & Ischebeck, A. (2012). The Influence of verbalization on the pattern of cortical activation during mental arithmetic. *Behavioral and Brain Functions: BBF*, *8*, 13. doi:10.1186/1744-9081-8-13

Autor/es: Rafael Antonio Vargas Vargas. Médico-cirujano e Ingeniero Electrónico. Magister en Fisiología y Doctor en Ciencias Biomédicas. Profesor asistente del Departamento de Ciencias Fisiológicas de la Pontificia Universidad Javeriana, sede Bogotá. Contacto: rvargas3200@hotmail.com; rafael.vargas@javeriana.edu.co

DATOS DE CONTACTO:

Nombre: Rafael Antonio Vargas Vargas.
E-mail: rvargas3200@hotmail.com; rafael.vargas@javeriana.edu.co
Dirección postal: Cra 70F No. 78A 85. Bogotá, Colombia.
Teléfono: 57-3177749194

DATOS PARA LA PUBLICACIÓN
Títulos: Médico-cirujano. Universidad Nacional de Colombia. Ingeniero electrónico. Fundación Universidad Central. Magister en fisiología. Universidad Nacional de Colombia. PhD en Ciencias Biomédicas. Universidad Nacional Autónoma de México.
Institución: Pontificia Universidad Javeriana. Bogotá. Colombia
Lugar de residencia: Bogotá, Colombia
Publicaciones:
Rafael Antonio Vargas Vargas, 2013. Matemáticas y neurociencias: una aproximación al desarrollo del pensamiento matemático desde una perspectiva biológica. Unión. Revista Iberoamericana de Educación Matemática. 36: 37 – 46. ISSN: 1815-0640.
A. Camargo, D. Gutiérrez, S. Gutiérrez, R. Vargas. 2012. Enfermería: simbología, estereotipos e imagen social. "Una visión trasgeneracional" de enfermeras y médicos en la Fundación Santa Fe de Bogotá, un homenaje en sus 40 años. Actualizaciones en Enfermería 15(4): 8 – 20. ISSN: 0123-5583.
R. Vargas, I. Þ. Jóhannesdóttir, B. Sigurgeirsson, H. Þorsteinsson and K. Æ. Karlsson. 2011. Zebrafish brain a simple in vivo and in vitro model for studying spontaneous neural activity during development. Advances in physiology education 35(2):188-196. ISSN: 1522-1229.
R. Vargas, A. Camargo. 2011. El sueño un fenómeno biológico inspirador del arte. Actualizaciones en Enfermería 14(4): 34 – 39. ISSN: 0123-5583.
A. Camargo, R. Vargas. 2011. Ritmos circadianos: una realidad compleja implícita en algunas obras literarias. Actualizaciones en Enfermería 14(2): 42 – 47. ISSN: 0123-5583.

UNIÓN
REVISTA IBEROAMERICANA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA
www.fisem.org/web/union
http://asenmacformacion.com/ojs/index.php/union/index

ISSN: 1815-0640
Número 45. Marzo 2016
Página 76-95

Proposição de Davýdov e colaboradores para introdução ao ensino do conceito de equação

Josélia Euzébio da Rosa, Ademir Damazio, Josiane Cruz Goularte Dorigon

Fecha de recepción: 11/03/2014
Fecha de aceptación: 20/01/2016

Resumen	Es ese trabajo fue investigada la introducción del concepto de ecuación en las proposiciones desarrolladas por Davýdov y sus colegas. La investigación de naturaleza teórica fue desarrollada con base en presuposiciones de la Teoría Histórico-cultural. Durante el análisis de las proposiciones, fueron destacados multiplex relaciones en las proposiciones de Davýdov entre las significaciones aritméticas, geométricas y algébricas en nivel teórico. Características esenciales fueron reveladas en el movimiento entre las dimensiones particular, singular y universal en el procedimiento de ascensión del abstracto para el concreto. Por Davýdov, las ecuaciones son presentadas partiendo de situaciones de análisis interpretadas por medio de esquemas en relación parte-todo. **Palabras clave**: Proposición de Davydov. Relación *todo-partes*. Ecuación.
Abstract	In this work, the introduction of equation concept in the propositions for teaching developed by Davýdov and his co-workers was investigated. The research is theoretical and was developed based on the assumptions of Historical Cultural Theory. Along the analysis of propositions, multiple relations were highlighted on the propositions by Davydov, among arithmetic, geometric and algebraic significations in theoretical level. Essential characteristics were revealed in the movement among particular singular and universal dimensions in the procedure of ascension from abstract to the concrete. By Davýdov, the equations are represented from situations of analysis interpreted by schemes relative to the whole-part relationship. **Keywords**: Proposition by Davydov. Whole-part relationship. Equation.
Resumo	Neste trabalho investigou-se a introdução do conceito de equação conforme proposição de ensino, desenvolvida por Davýdov e colaboradores. A pesquisa, de natureza teórica, foi desenvolvida com base nos pressupostos da Teoria Histórico-Cultural. Durante a análise das proposições, destacaram-se as múltiplas relações na proprosição davydoviana entre as significações aritméticas, geométricas e algébricas em nível teórico. Foram reveladas as características essenciais no movimento entre as dimensões particular, singular e universal no procedimento de ascensão do abstrato ao concreto. Em Davýdov, as equações são apresentadas a partir de situações de análise, interpretadas por meio de esquemas referentes à relação *parte-todo*. **Palavras-chave:** Proposição davydoviana. Relação *todo-partes*. Equação.

1. Introdução

A introdução do conceito de equação foi investigada na proposição de ensino desenvolvida por Davýdov e colaboradores. De acordo com Galperin, Zaporózhets, Elkonin (1987) e Rosa (2012), Davýdov e colaboradores, seguidores de Vygotski, elaboraram uma proposta para o ensino de Matemática que expressa os princípios da Teoria Histórico-Cultural.

A partir dos pressupostos da Teoria Histórico-Cultural, no ensino, os conceitos devem ser organizados de forma orientada do geral e universal para o particular e singular no procedimento de ascensão do abstrato ao concreto. Mas, em que consiste organizar o ensino a partir destes pressupostos?

De acordo com Jardinetti (1996), abstrato e concreto manifestam-se no método dialético como uma tendência no processo de conhecimento. Concreto e abstrato são momentos de pensamentos diferentes de um mesmo objeto.

O procedimento em que se eleva do abstrato ao concreto está apoiado na formação do pensamento teórico, composto pelas dimensões universal, particular e singular do conhecimento. O concreto, como ponto de partida, é o aspecto sincrético dado empiricamente. Neste momento do processo de cognição, o pensamento identifica os aspectos essenciais do objeto e extrai as relações essenciais, universais, que vêm a serem as abstrações teóricas. Estas constituem as mediações que possibilitam a superação do aspecto sincrético do objeto de conhecimento e proporcionam um salto qualitativo, no período analítico, para o concreto como ponto de chegada. O concreto como ponto de chegada, ou concreto como síntese, é um nível superior atingido pelo pensamento no processo de conhecimento: trata-se das suas múltiplas determinações (Jardinetti, 1996).

Considerar esses momentos de pensamento, no ensino, requer um movimento específico. Deste modo, o objetivo, na presente investigação, foi compreender o movimento conceitual inerente a uma proposição fundamentada nos pressupostos da Teria Histórico-Cultural. Especificamente, o movimento conceitual apresentado por Davýdov e colaboradores para introdução ao ensino do conceito de equação no segundo ano do Ensino Fundamental I (Segundo ano escolar).

Os dados da pesquisa, de natureza teórica, foram extraídos do livro didático davydoviano para o segundo ano do Ensino Fundamental (Давыдов, et al. 2012) e do respectivo livro de orientação ao professor (Горбов, Микулина, Савельева, 2009). O material, originalmente escrito na língua russa, foi traduzido para a língua portuguesa por Elvira Kim. No livro didático são apresentadas as tarefas, que correspondem no contexto educacional brasileiro, aos exercícios ou atividades, para serem desenvolvidas pelos estudantes. No livro de orientações constam os direcionamentos teórico-metodológicos para o professor desenvolver as tarefas do livro didático. Ambos foram elaborados com base nos resultados das investigações realizadas por Davýdov e colaboradores, em sala de aula, por mais de vinte e cinco anos.

Foram selecionadas quatro tarefas davydovianas que representam a síntese do movimento conceitual adotado por Davýdov e colaboradores para introdução do conceito de equação no segundo ano do Ensino Fundamental. Tais tarefas são apresentadas, no presente artigo, de modo a colocar o leitor em atividade, por meio de perguntas que o levem a pensar nas possíveis respostas. Durante a análise das tarefas foram reveladas as múltiplas relações entre as significações aritméticas, geométricas e algébricas em nível teórico. Em Davýdov, as equações são apresentadas a partir de situações de análise interpretadas por meio de esquemas referentes à relação *parte-todo*. Tal relação é representada na forma algébrica e constitui o modelo universal de equação referente às operações de adição e subtração, conforme se apresenta na sequência. Vale ressaltar que há todo um movimento conceitual que antecede a introdução do conceito de equação em Davýdov desde o primeiro ano escolar. Neste trabalho, apresentamos apenas um recorte do mesmo. Para os interessados na totalidade das tarefas recomendamos as seguintes leituras: Rosa (2012), Madeira (2012), Alves (2012), Matos (2012), Dorigon (2012), Silveira (2012), Crestani (2012), Souza (2013) e Rosa, Damazio e Alves (2013).

2. Análise do objeto de estudo

Na presente seção descrevemos quatro tarefas extraídas do livro didático davydoviano e as explicamos com base no manual de orientação ao professor. Concomitantemente, procedemos às reflexões teóricas com base nos Fundamentos da Teoria Histórico-Cultural. Tais tarefas fazem parte de um sistema mais amplo que se inicia, na proposição davydoviana de ensino, desde o primeiro ano escolar. Os elementos de álgebra, aritmética e geometria já foram introduzidos, nas tarefas precedentes, a partir do estudo das relações entre grandezas discretas e contínuas (ROSA, 2012). As tarefas apresentadas na sequência contemplam a sistematização da relação parte e todo, já abordada nas tarefas precedentes no plano objetal (Rosa, Damazio e Alves, 2013).

Tarefa 1: Analise o esquema (Figura 1) e escreva as *partes* e o *todo* nos quadros abaixo da igualdade a + b = c (Горбов, Микулина e Савельева, 2009).

Figura 1: Tarefa 1 – Esquema todo-partes e representação algébrica
Fonte: Elaboração com base na proposição davydoviana

A partir da análise do esquema é possível concluir que treze (13) é o valor do *todo*. Então, qual é o valor das duas partes que compõem o *todo*? Inicialmente faz-se necessário identificar qual das significações algébricas, ***a***, ***b*** ou ***c***, representa o *todo* (13) na relação *parte-todo* expressa na igualdade ***a + b = c*** (Горбов, Микулина e Савельева, 2009).

Igualdade, de acordo com Pereira (1986, p. 123), "é o conjunto de duas expressões do mesmo valor unidas pelo sinal = (de igual) [...] dois ou mais termos são iguais quando são exatamente similares em grandeza e quantidade". Quanto aos membros da igualdade, estes "são as expressões ou grandezas separadas pelo sinal de igualdade. O elemento à esquerda do sinal de igualdade é o primeiro membro e o que está à direita é o segundo membro da igualdade" (Pereira, 1986, p. 149).

Na igualdade ***a + b = c***, ***a + b*** constituem o primeiro membro da igualdade e ***c*** o segundo membro da igualdade. Tal igualdade é expressa por meio da operação de adição, a mais simples e da qual todas outras operações dependem (Caraça, 1951). Ao número ***a*** dá-se o nome de *adicionando,* este representa o papel passivo da operação. O número ***b*** é denominado *adicionador:* desempenha o papel ativo. Os dois são as *parcelas* da adição (Caraça, 1951).

Na tarefa em análise, as *partes* juntas (**a** e **b**) compõem o *todo*. A operação que se utiliza para determinar o *todo* a partir das *partes* é a adição. Deste modo, o *todo* é registrado, na operação da adição, após a igualdade. Na presente tarefa, o *todo* (13) corresponde ao valor algébrico ***c*** (Figura 2).

Figura 2: Tarefa 1 – esquema todo-partes: representação algébrica com todo
Fonte: elaboração com base na proposição davydoviana

Se o *todo* (13) corresponde ao valor ***c***, as *partes* ***a*** e ***b*** serão menores que o *todo* ***c***. Assim, atribui-se um valor aleatório para uma das *partes* (Figura 3).

Figura 3: Tarefa 1 – Uma das partes conhecida
Fonte: elaboração com base na proposição davydoviana

Dentre as opções de valores aritméticos para uma das *partes* optou-se pelo número sete (7). Este, pela propriedade comutativa da adição (a + b = b + a), pode representar tanto a parte de valor algébrico ***a*** quanto a parte de valor ***b***. Optou-se, aleatoriamente, a título de exemplificação, por **a = 7**.

Neste estágio de resolução da tarefa já se tem o valor aritmético do *todo* (13) e o valor aritmético da *parte* ***a*** (7). O professor sugere vários valores para representar a outra parte desconhecida (9, 2, 5, etc.). A síntese a ser elaborada, a partir das observações do professor, com base na relação do *todo* com suas *partes*, é que somente um destes números corresponde à *parte* desconhecida. O valor aritmético para ***b*** não pode ser determinado aleatoriamente (Горбов, Микулина е Савельева, 2009).

A sugestão apresentada no manual de orientações ao professor é que continuidade da tarefa seja realizada no plano mental: quanto será necessário adicionar ao número sete (*parte)* para obter o *todo* (13)? (Figura 4).

Figura 4: Tarefa 1 – Esquema e representação algébrica todo-partes
Fonte: elaboração com base na proposição davydoviana

A partir da análise referente à figura 4 (7 + 6 = 13), têm-se as seguintes relações: a *parte* sete (7) adicionada a outra *parte* seis (6) resulta no *todo* treze (13). Ou, comutativamente, a *parte* seis (6) adicionada à *parte* sete (7) resulta no *todo* treze (13). A partir da operação inversa, a subtração, tem-se que a *parte* sete (7) subtraída do *todo* treze (13) resulta em seis (6). Ou a *parte* seis (6) subtraída do *todo* treze (13) resulta em sete (7). Vale o alerta de que poderiam ser outros valores para as partes. A opção pelos números 7 e 6 foi aleatória, a título de exemplificação de uma possível resolução da tarefa.

A segunda questão da tarefa 1 (Figura 5) consiste novamente na análise da relação entre as *partes* e o *todo*.

Figura 5: Tarefa 1 – Questão 2) Esquema todo-partes e representação algébrica
Fonte: elaboração com base na proposição davydoviana

A partir da análise do esquema (Figura 5) conclui-se que o *todo* corresponde ao valor quatorze (14). Para relacionar este *todo* à representação algébrica, faz-se necessário considerar que, na primeira parte da tarefa, a operação considerada foi adição, agora se trata da subtração.

A subtração é a operação pela qual se determina um número ***c*** que, somado com ***b***, resulta em ***a*** **(*c* + *b* = *a*)***,* ou seja: ***a* – *b* = *c***. Para o número ***a***, dá-se o nome de diminuendo, para ***b***, de diminuidor ou subtrativo, e para ***c*** de resto ou diferença.

Para que a operação da subtração seja possível, nos limites dos números inteiros positivos, o aditivo deve ser maior que o subtrativo, ou igual a ele (Caraça, 1951).

Pereira (1986), define a operação de subtração, como a inversa da adição. Dada a soma de dois números (minuendo e subtraendo determinar um outro (resto ou diferença). Para que uma subtração seja possível de ser operada, nos números Naturais, é necessário que o minuendo, representado genericamente por ***m***, seja igual ou maior ao subtraendo, representado por ***s***. Assim, tem-se que m ≥ s. Por meio da operação de subtração entre dois números obtém-se um terceiro que, adicionado ao segundo, resulta no primeiro.

Na tarefa em análise, **m** representa o valor do *todo*, e as duas partes estão representadas por ***n*** e ***k***. Logo, estabelecem-se as seguintes relações subtrativas: ***m – n = k*** ou ***m – k = n*,** nas quais, do *todo* **m** subtrai-se uma das *partes,* **n** ou **k**. Porém, a tarefa já determina que ***n*** é o subtrativo, ***k*** o resto e quatorze (14) o *todo* (Figura 6).

Figura 6: Tarefa 1 – Questão 2) Esquema todo-partes representação algébrica com o todo
Fonte: elaboração com base nas proposições davydovianas

Para representar as *partes* do esquema, entre várias opções escolhe-se um valor aleatoriamente (Figura 7):

Figura 7: Tarefa 1 – Questão 2) Todo e uma parte completa
Fonte: elaboração com base na proposição davydoviana

Optou-se, aleatoriamente, a título de exemplificação, por ***n = 8***. Tem-se o valor aritmético do *todo* (14) e de uma das *partes* (8). Quanto será a outra *parte*? (Figura 8).

Figura 8: Tarefa 1 – Questão 2) Todo-partes completa
Fonte: elaboração com base na proposição davydoviana

Na igualdade formada (**14 - 8 = 6)**, do *todo* quatorze, subtraiu-se a *parte* oito e resultou na outra *parte,* seis.

Escolheu-se o número oito (8), dentre as várias possibilidades, para representar uma das *partes*. Por outro lado, o valor aritmético seis (6) foi determinado a partir dos valores conhecidos. Ou seja, a última *parte* desconhecida não pode ser determinada aleatoriamente. Em síntese, se existem dois valores conhecidos na relação entre *duas partes* e *todo*, o terceiro número não pode surgir de uma escolha arbitrária, este depende estritamente dos valores conhecidos (Горбов, Микулина e Савельева, 2009).

Os modelos abstratos **a + b = c**, e **m – n = k** representam o movimento universal determinado pela relação *todo-partes*. A tarefa pré-determinava um valor singular para cada modelo. Na adição, o valor aritmético era treze (13) e, na subtração, o valor aritmético era quatorze (14). A partir da determinação dos demais valores singulares, obteve-se a representação concreta do modelo universal abstrato. As demais tarefas são pensadas com base na relação universal entre as partes e o todo, conforme segue.

<u>Tarefa 2:</u> A partir do registro **k + b = c**, na sua forma geométrica, elabore o enunciado de um problema (Горбов, Микулина e Савельева, 2009).

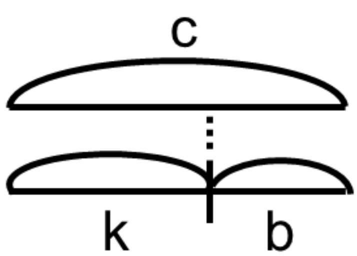


Figura 9: Tarefa 2 – Esquema genérico
Fonte: elaboração com base na proposição davydoviana

Tem-se o registro da representação universal da relação *todo-partes* por meio da operação de adição (**k + b = c)** no esquema (Figura 9). Trata-se de uma representação geométrica da igualdade. Há uma *parte* ***k***, que adicionada à *parte* ***b***, resulta no *todo* ***c***. A título de exemplificação, a história elaborada foi a seguinte: “Há ***c*** lápis na caixa, entre eles ***k*** vermelhos e ***b*** azuis”. Deste modo, ***c*** é o *todo* (total de lápis na caixa). Uma das *partes* é denominada por ***k*** (referente aos lápis vermelhos) e ***b*** é a outra *parte* (para lápis azuis).

A partir da história, com base na relação universal (*todo-partes*), elabora-se o enunciado de um problema particular como, por exemplo: havia na caixa, lápis vermelhos e azuis, em um total de ***c*** lápis. Sabe-se que eram ***k*** vermelhos. Quantos eram azuis?

Elaborado o enunciado do problema, constata-se que há um valor desconhecido a ser calculado, mas qual deles ***c***, ***b*** ou ***k***? Após análises, o valor desconhecido é representado no esquema (Figura 10).

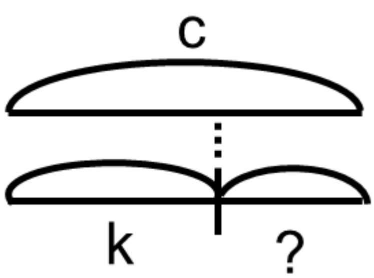


Figura 10: Tarefa 2 – Esquema genérico com interrogação
Fonte: elaboração com base na proposição davydoviana

No problema, a pergunta consistia em "quantos eram azuis?". Sabe-se, a partir da história, que eram ***b*** azuis. Logo, ***b*** é o valor desconhecido. Este é substituído, nas representações, por um sinal de interrogação.

k + b = c

k + ? = c

Em Matemática, quando se pretende calcular um valor desconhecido, costuma-se utilizar uma letra, que designa uma incógnita (Горбов, Микулина e Савельева, 2009). Mas, qual seria esta letra? Geralmente, utiliza-se a letra ***x***. Assim, substitui-se o sinal de interrogação pela incógnita ***x*** (Figura 11):

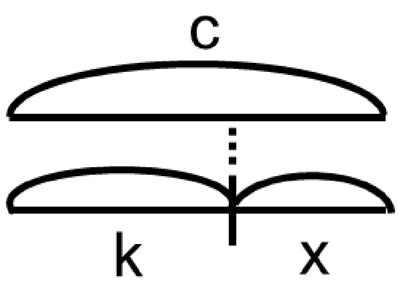


Figura 11: Tarefa 2 – esquema genérico com incógnita x
Fonte: elaboração com base na proposição davydoviana

k + b = c
k + ? = c
k + x = c

Até o momento elaborou-se a história, em seguida o problema, mas somente com valores algébricos no movimento orientado do geral para o particular (o problema). A partir do problema, os valores algébricos (***k*** e ***c***) serão substituídos por valores aritméticos singulares.

Para exemplificação, os números utilizados serão 8 e 15 (Figura 12), estes serão representados tanto na igualdade quanto no esquema (Горбов, Микулина e Савельева, 2009). Os números genéricos ***k*** e ***c*** são substituídos pelos valores aritméticos 8 e 15. Mas 8 representa o valor de ***k*** ou ***c***? O mesmo questionamento também é válido para o número 15.

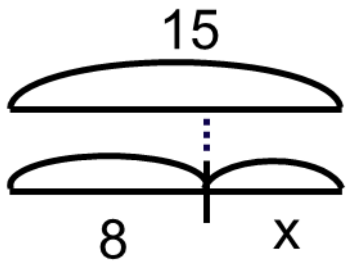


Figura 12: Tarefa 2 – esquema com valores aritméticos
Fonte: elaboração com base na proposição davydoviana

k + x = c
8 + x = 15

Sabe-se que nesta tarefa, com base na relação *todo-partes*, que o valor aritmético de uma das *partes* é desconhecido. Como quinze (15) é maior que oito (8), o primeiro representa o *todo* e o segundo (oito), a outra *parte*. A sugestão apresentada no manual do professor é que este informe às crianças que as igualdades com a incógnita são denominadas, em Matemática, de equações.

Após a alteração da igualdade e do esquema reformula-se, também, o enunciado do problema com a substituição dos valores representados algebricamente pelos aritméticos (Горбов, Микулина e Савельева, 2009).

Enunciado reformulado: havia, na caixa, lápis vermelhos e azuis, em um total de quinze (15) lápis. Sabe-se que eram oito (8) vermelhos. Quantos eram azuis?

O cálculo do valor desconhecido é fundamentado no seguinte raciocínio: qual número que, adicionado a oito (8), resulta em quinze (15)?

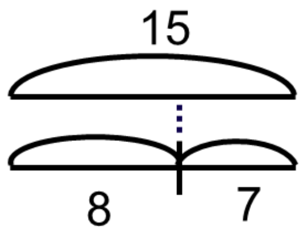


Figura 13: Tarefa 2 – Esquema todo e partes
Fonte: elaboração com base na proposição davydoviana

8 + x = 15
8 + 7 = 15
x = 7

Ao número oito adiciona-se um valor desconhecido para atingir o quinze (**8 + x = 15**). O cálculo deve ser realizado por meio da reta numérica. A partir do número oito, adiciona-se sete unidades para a direita até atingir o número quinze. O total de unidades acrescidas representa o valor de ***x***. Portanto, o valor aritmético que representa a quantidade singular de lápis azuis, neste problema particular, é sete.

De igual maneira, em Davýdov entende-se a equação, em primeiro lugar, como a descrição do problema, e só depois como certo registro. A equação, antes de tudo, é mais um formato de representação do problema junto ao esquema (Горбов, Микулина е Савельева, 2009).

Portanto, a incógnita (representada aqui pela letra ***x***) faz mais o papel do sinal de interrogação do que representa um número e, como as outras letras, trata-se de um número a ser determinado (Горбов, Микулина е Савельева, 2009).

Por conseguinte, Davýdov e colaboradores apresentam o conceito de equação, suas relações com o conceito de incógnita no movimento mediado pela composição e estruturação de um problema, e na inter-relação com um sistema de representações (aritméticas, algébricas e geométricas). Tal movimento seguiu, na especificidade da tarefa em análise, orientado do geral para o particular e singular, o fio condutor desse movimento foi a relação universal.

A forma universal da equação do primeiro grau é expressa por $ax + b = 0, a \neq 0$. Pela propriedade de equivalência, se somar a ambos os membros da igualdade o número $-b$, ela não se altera ($ax + b - b = 0 - b$), o que resulta em: ax = -b. Toda equação do 1º grau, ax + b = 0, tem uma só raiz, e a solução de uma equação é dada pelo valor que satisfaz a igualdade (Caraça, 1951).

Na tarefa 1, Davýdov e colaboradores iniciavam pela representação genérica de uma operação. O desenvolvimento da tarefa culminava em uma representação particular composta por valores aritméticos e valores desconhecidos, mas sem a sistematização da incógnita. Esta é introduzida em Davýdov durante o desenvolvimento do sistema de tarefas, a partir de situações geradoras de necessidade da mesma, durante o cálculo do valor desconhecido. Trata-se de uma introdução teórica, como síntese das múltiplas determinações que a envolvem no movimento entre todas as dimensões conceituais (geral, universal, particular e singular). O procedimento de resolução, ponto de partida predominante nas proposições atuais (Rosa, 2012), é apresentado após o estudo das relações internas entre a parte o o todo, conforme a tarefa 3.

<u>**Tarefa 03:**</u> Determine o valor aritmético da incógnita: **x – 27 = 46** e **84 – x = 52.**

A primeira igualdade (**x – 27 = 46**) é uma equação? Sim, pois possui igualdade e incógnita. Mas, é possível resolvê-la? Sim, pois existe um número que, ao subtrair 27, resulta em 46. Ou seja, 27 e 46 são *partes* que compõem o *todo* ainda desconhecido. Qual operação matemática, nesta equação, pode ser realizada para determinar o valor da incógnita ***x***? (Горбов, Микулина е Савельева, 2009).

Antes do cálculo do valor desconhecido, representa-se o *todo* e as *partes* da equação (Figura 14).

$$\overbrace{x}^{\text{Todo}} - \overbrace{27}^{\text{Parte}} = \overbrace{46}^{\text{Parte}}$$

Figura 14: Tarefa 3 – Todo e partes da equação
Fonte: elaboração com base nas proposições davydovianas

Do *todo* (x) subtrai-se a *parte* (27), e resulta na outra *parte* (46). Qual número que, subtraído de vinte e sete (27), resulta em quarenta e seis (46)? Para responder a esta questão, faz-se necessário, por meio da operação de adição, adicionar as *partes* para resultar no *todo* desconhecido (Figura 15).

$$\overbrace{x}^{\text{Todo}} - \overbrace{27}^{\text{Parte}} = \overbrace{46}^{\text{Parte}}$$
$$x = 46 + 27$$
$$x = 73$$

Figura 15: Tarefa 3 – Cálculo do valor aritmético da incógnita x
Fonte: elaboração com base na proposição davydoviana

Conforme ilustrado anteriormente, para determinar o valor da incógnita ***x*** opera-se com as duas partes (46 + 27) que compõem o *todo*, por meio da operação de adição. O resultado é setenta e três (73). Logo, **x = 73**.

A mesma equação também pode ser representada geometricamente no esquema (Figura 16). Nesta representação, explicita-se a necessidade de se unir as *partes* para compor o *todo* antes desconhecido.

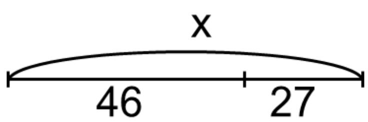


Figura 16: Tarefa 3 – Equação representada por esquema
Fonte: elaboração com base na proposição davydoviana

Por meio do esquema, pode-se visualizar, geometricamente, que à *parte* quarenta e seis (46) se adiciona a outra *parte,* vinte e sete (27). Juntas elas compõem o *todo*, representado por ***x***. A partir do cálculo (46 + 27) determina-se o valor aritmético do *todo* (73). Assim, tem-se que ***x* = 73** (Figura 17).

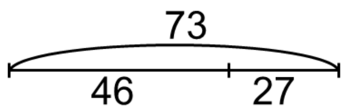


Figura 17: Tarefa 3 – Esquema com valor da incógnita calculado
Fonte: elaboração com base na proposição davydoviana

Em síntese, do *todo* (73) subtrai-se a *parte* (46), e resulta no valor da outra *parte* (27). Ou, do *todo* (73), subtrai-se o valor da *parte* (27) e resulta no valor da outra *parte* (46). Ou, ainda, as *partes* (46 e 27), por meio da adição, compõem o *todo* (73).

A segunda parte da tarefa em análise consiste em determinar se a igualdade **84 – x = 52** é uma equação. Sim, pois possui igualdade e incógnita. É possível resolvê-la? A resposta é afirmativa, pois existe um número que se subtrai de oitenta e quatro (84) resulta em cinquenta e dois (52). Antes de calcular o valor da incógnita, representa-se o *todo* e as *partes* da equação **84 – x = 52**, conforme a figura 18 (Горбов, Микулина e Савельева, 2009).

$$\overbrace{84}^{\text{Todo}} - \overbrace{x}^{\text{Parte}} = \overbrace{52}^{\text{Parte}}$$

Figura 18: Tarefa 3 – Todo e partes da equação
Fonte: elaboração com base na proposição davydoviana

Do *todo* (84) subtrai-se a *parte* de valor aritmético desconhecido, e resulta no valor da outra *parte* (52). Deste modo, quanto se subtrai de 84 (***x***) para resultar 52?

Qual operação deve ser realizada para determinar o valor de ***x***? É a subtração, uma vez que o *todo* e uma das *partes* são conhecidos. Assim, do *todo* (84) subtrai-se a *parte* conhecida (52) e resulta no valor de quanto (Figura 19)?

$$\overbrace{84}^{\text{Todo}} - \overbrace{x}^{\text{Parte}} = \overbrace{52}^{\text{Parte}}$$
$$84 - 52 = x$$
$$32 = x$$

Figura 19: Tarefa 3 – Cálculo do valor aritmético da incógnita x
Fonte: elaboração com base na proposição davydoviana

Do *todo* (84) subtrai-se a *parte* (52) e resulta no valor da outra *parte* (32).

A equação **84 – x = 52** pode ser representada geometricamente pelo esquema (Figura 20). Nele é possível visualizar a relação entre o *todo* e as *partes* que determina a realização da operação de subtração (84 – 52) para obtenção do valor da incógnita ***x*** (32).

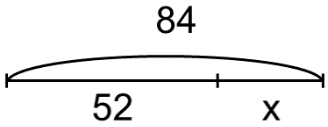


Figura 20: Tarefa 3 - Equação representada por esquema
Fonte: elaboração com base na proposição davydoviana

Do *todo* (84), se subtrai a *parte* (52) e resulta no valor até então desconhecido (32), conforme figura 21.

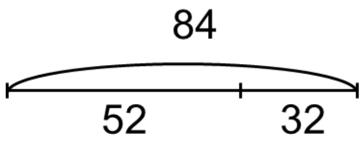


Figura 21: Tarefa 3 – Esquema com valores aritméticos
Fonte: elaboração com base na proposição davydoviana

As duas equações resolvidas na tarefa em análise (x – 27 = 46 e 84 – 52 = 32) são apresentadas com o operador “menos”. Mas a operação utilizada para calcular o valor da incógnita foi diferente. Na primeira foi utilizada a adição e, na segunda, a subtração. Onde está o erro? Na solução da primeira equação ou da segunda? (Горбов, Микулина е Савельева, 2009).

Na primeira equação, as *partes* juntas resultavam no *todo* desconhecido. Ou seja, nesta equação, a incógnita era o *todo* (Figura 22).

x – 27 = 46
x = 46 + 27
73 = 46 + 27

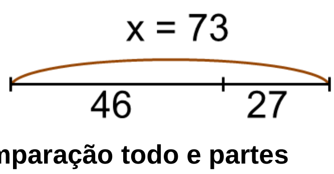
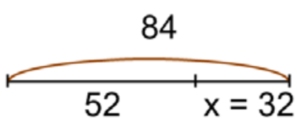


Figura 22 Tarefa 3 – Esquema de comparação todo e partes
Fonte: elaboração com base na proposição davydoviana

Na segunda equação, a incógnita era uma das *partes*: do *todo se* subtrai uma *parte* conhecida e resulta no valor da outra *parte* (Figura 23).



84 - x = 52
84 - 52 = x
84 - 52 = 32

Figura 23 Tarefa 3 – Esquema de comparação todo e partes
Fonte: elaboração com base na proposição davydoviana

Não se trata de um erro. Em um caso o valor desconhecido era o *todo* e, no outro, era a *parte* (Горбов, Микулина e Савельева, 2009). Em Davýdov, o procedimento de resolução de equações não é apresentado por meio de regras do tipo: se está somando, passa para o outro lado da igualdade diminuindo; ou, se está diminuindo, para o outro lado da igualdade somando. Tal orientação é característica do ensino tradicional. Na proposição davydoviana, após as reflexões sobre o procedimento de resolução ocorre a generalização (Tarefa 04)

Tarefa 04: Componha as equações e compare as soluções.

Com base no esquema (Figura 24), devem-se compor as três igualdades da tarefa (Горбов, Микулина e Савельева, 2009).

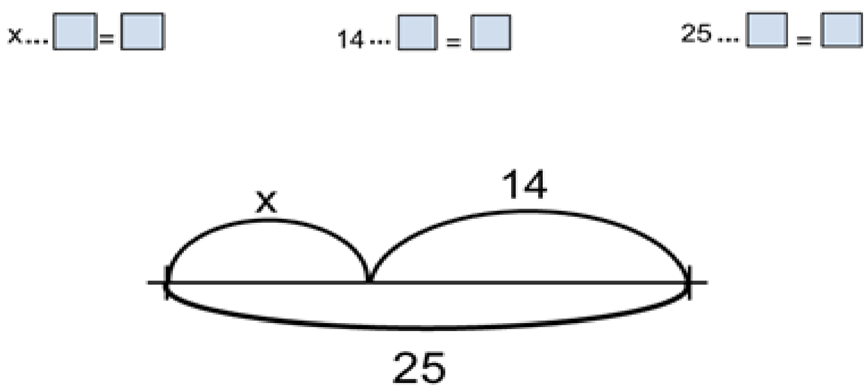


Figura 24: Tarefa 04 – esquema todo e partes
Fonte: elaboração com base na proposição davydoviana

No esquema geométrico, o *todo* de valor aritmético vinte e cinco (25) e as *partes* que compõem este *todo* são o valor desconhecido (***x***) e o valor aritmético quatorze (14).

Primeira igualdade (Figura 25):

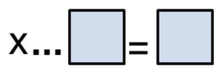


Figura 25: Tarefa 04 - Primeira igualdade para completar
Fonte: elaboração com base na proposição davydoviana

A incógnita (***x***) já está apresentada no primeiro termo da equação. Serão representados, aritmeticamente, o segundo e terceiro termo, juntamente com a operação a ser definida.

Por meio do esquema (Figura 24), constata-se que a incógnita (***x***) é uma *parte* e, para representar a equação, restam o *todo*, vinte e cinco (25), e a *parte* quatorze

(14). Se a incógnita (***x***) é uma *parte*, não poderá ser adicionada ao *todo* vinte e cinco (25).

Logo, para representar a igualdade, a incógnita (***x***), que é uma *parte,* deverá ser unida à outra *parte,* quatorze (14). Juntas, por meio da operação de adição, comporão o *todo,* vinte e cinco (25), conforme figura 26.

$$x \underset{\dots}{+} \boxed{14} = \boxed{25}$$

Figura 26: Tarefa 04 – Todo, parte e operação completos
Fonte: elaboração com base na proposição davydoviana

Qual número que, adicionado a quatorze, resulta em vinte e cinco? Ou, de outro modo, do *todo,* vinte e cinco (25), subtrai-se a *parte* conhecida, quatorze (14), e resulta em quanto (Figura 27)?

$$x \underset{\dots}{+} \boxed{14} = \boxed{25}$$
$$x + 14 = 25$$
$$x = 25 - 14$$
$$x = 11$$

Figura 27: Tarefa 04 – Cálculo da equação
Fonte: elaboração com base na proposição davydoviana

Do *todo,* vinte e cinco (25), subtrai-se a *parte* quatorze (14) e resulta no valor singular da outra *parte,* onze (11). Ou seja, para **x = 11**, temos a *parte* onze (11), adicionada a outra *parte,* quatorze (14), estas compõem o *todo,* vinte e cinco (25).

A segunda igualdade (Figura 28).

$$14 \dots \boxed{} = \boxed{}$$

Figura 28: Tarefa 04 – Segunda igualdade para completar
Fonte: elaboração com base na proposição davydoviana

Na segunda igualdade, já está representado o valor aritmético quatorze (14) no primeiro termo. Serão representados o segundo e terceiro termo, juntamente com a operação a ser definida.

Por meio do esquema, constata-se que quatorze (14) é uma *parte* e, para representar a equação, restam o *todo,* vinte e cinco (25), e a *parte* (***x***).

Se a *parte* quatorze (14) já está representada na igualdade, a operação é adição, visto que as *partes* juntas compõem o *todo*.

Conforme o esquema (Figura 24), a outra *parte* é a incógnita (***x***) e, para representar o segundo membro, resta o *todo* vinte e cinco (25), conforme a figura 29.

$$14 \overset{+}{\dots} \boxed{x} = \boxed{25}$$

Figura 29: Tarefa 04 – Todo, parte e operação completos
Fonte: elaboração com base na proposição davydoviana

Na equação ilustrada anteriormente (Figura 29) tem-se a *parte* quatorze (14) adicionada a outra *parte* de valor desconhecido (***x***). Ambas compõem o *todo*, vinte e cinco (25).

Ao quatorze (14) adiciona-se quanto para resultar em vinte e cinco (25)? Ou, de vinte e cinco (25), ao se subtrair a *parte* quatorze (14), resultará em quanto (Figura 30)?

$$14 \overset{+}{\dots} \boxed{x} = \boxed{25}$$
$$14 + x = 25$$
$$x = 25 - 14$$
$$x = 11$$

Figura 30: Tarefa 04 – Cálculo da equação
Fonte: elaboração com base na proposição davydoviana

Assim, o valor singular da incógnita é 11 (**x = 11).** Quatorze (14) e onze (11) são as *partes* que compõem o *todo*, vinte e cinco (25).

Terceira igualdade (Figura 31):

$$25 \dots \boxed{} = \boxed{}$$

Figura 31: Tarefa 04 – Terceira igualdade para completar
Fonte: elaboração com base na proposição davydoviana

A terceira igualdade está representada, inicialmente, pelo valor aritmético vinte e cinco (25). Por meio do esquema (Figura 24), constata-se que é o *todo.* A operação não poderá ser adição, pois ao *todo* não se adiciona a *parte.*

Do *todo* vinte e cinco (25) subtrai-se uma *parte* para obter o valor de outra *parte*. Logo, o esquema, possui duas partes: quatorze (14) e ***x***. Escolheu-se, aleatoriamente, a *parte* quatorze para o segundo termo, e a incógnita (***x***) foi registrada após a igualdade (Figura 32).

$$25 \,\dot{-}\, \boxed{14} = \boxed{x}$$

Figura 32: Tarefa 04 – Todo, parte e operação completos
Fonte: elaboração com base na proposição davydoviana

Do todo vinte e cinco (25) subtrai-se a *parte* de valor aritmético quatorze (14) e resulta no valor desconhecido (***x***). Assim, de vinte e cinco (25) subtrai-se quatorze (14), e resulta em quanto?

$$25 \,\dot{-}\, \boxed{14} = \boxed{x}$$
$$25 - 14 = x$$
$$11 = x$$
$$x = 11$$

Figura 33: Tarefa 04 – Cálculo da equação
Fonte: elaboração com base na proposição davydoviana

A *parte* referente ao valor aritmético da incógnita (***x***), no esquema, é onze (11), assim como no esquema. Para **x = 11**, tem-se (Figura 34):

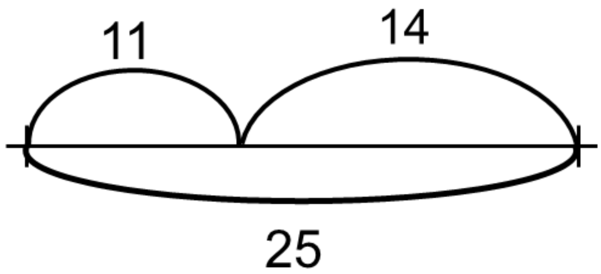


Figura 34: Tarefa 04 – Cálculo da equação
Fonte: elaboração com base na proposição davydoviana

Do *todo* vinte e cinco (25) subtrai-se a *parte* quatorze (14), que resulta no valor da outra *parte*, onze (11). Qual a solução das três equações?

Simultaneamente, para as três equações, a solução resultou no mesmo valor aritmético onze (11). Ou seja, o valor das incógnitas, nas três equações (**x + 14 = 25**, **14 + x = 25** e **25 – 14 = x)** foi o mesmo: **x = 11**.

Cabe o seguinte questionamento: por que este resultado (**x = 11**) repetiu-se para nas três equações? (Горбов, Микулина е Савельева, 2009).

As três equações possuíam os mesmo termos (25, 14 e x). Porém, em cada equação estes estavam posicionados em lugares diferentes. Entretanto, foram elaboradas a partir de um mesmo esquema universal, que continha os mesmos números singulares *parte* (14), *todo* (25) e a *outra parte* desconhecida. Por isso, para cada equação particular, formada com base na relação universal *todo-partes,* obteve-se o mesmo valor aritmético singular onze (11).

O valor numérico de cada termo da equação pode ser determinado a partir do valor numérico dos outros termos. Além disso, é possível construir tantas equações quantos componentes existirem na igualdade (Горбов, Микулина е Савельева, 2009). Tal síntese é elaborada durante o desenvolvimento das tarefas. Neste, reproduz-se o sistema de conexões internas do conceito de equação até atingir sua concretude em nível teórico.

Na proposição davydoviana as diferentes representações da relação *todo-partes* são alternadas e são exploradas as diversas possibilidades. Tal relação fundamenta a representação algébrica e a determinação do valor desconhecido, representado pela letra ***x***.

O movimento interno da relação universal (*todo-partes*), ao ser concretizado, permite a generalização do conceito de equação, no que se refere à operação a ser realizada para resolvê-la. Se as duas *partes* são conhecidas, para determinar o *todo* basta adicioná-las. Por outro lado, se o *todo* e uma das *partes* são conhecidos, para determinar a outra *parte*, faz-se necessário subtrair a *parte* conhecida do *todo*. Em síntese, o valor numérico de cada termo da equação pode ser determinado a partir do valor numérico dos outros termos.

O sistema de tarefas davydovianas, para a introdução ao conceito de equação,

> permite construir, sobre a base da igualdade dada, vários tipos de equações (os estudantes concluem que a quantidade de tais equações é igual à quantidade de elementos incluídos na igualdade: $x + a = c$, $c – x = a$, $c – a = x$. De acordo com estas equações, as crianças transformam qualquer situação inicial na quantidade correspondente dos chamados problemas texto (DAVÍDOV, 1988, p. 211).

Enfim, o conceito de equação é introduzido em Davýdov com base no movimento do geral (representado no modelo geometricamente e algebricamente) para o singular (as significações aritméticas), mediado pelas particularidades (problemas textos). O fio condutor desse movimento é a relação universal entre o todo e as partes. Diferentemente das proposições de ensino que predominam atualmente, cujo foco inside no procedimento de resolução de situações particulares e singulares, sem a devida atenção ao movimento interno da relação entre as partes e o todo. Portanto, considera-se que a proposição davydoviana pode contribuir para se repensar o ensino de matemática.

Com essa finalidade, no Brasil, há um um movimento de articulação entre a proposição davydoviana e a atividade orientadora de ensino, criada inicialmente pelo professor Manoel Oriosvaldo de Moura. Crestani (2016) e Galdino (2016) elaboraram uma história virtual e desenvolveram, matemáticamente, como base no movimento conceitual matemático propoto por Davýdov. Trata-se de estudos iniciais, mas que indicam possibilidades de transformação da Educação Matemática brasileira, que, atualmente, atinge resultados pouco satisfatórios.

Bibliografia

ALVES, E. de S. B. (2012). *Proposições Brasileiras e davydovianas: limites e possibilidades.* Monografia (Especialização em Educação Matemática) - Universidade do Extremo Sul Catarinense, Criciúma. 119 f.

CARAÇA, B. J. (1951). *Conceitos fundamentais da matemática.* Lisboa: Livraria Sá da Costa.

CRESTANI, S. (2012). *Análise conceitual das proposições de Davydov e seus colaboradores para o ensino do conceito de divisão*. Monografia (Especialização em Educação Matemática) - Universidade do Extremo Sul Catarinense, Criciúma. 70 f.

CRESTANI, S. (2016). *Organização do ensino de Matemática na perspectiva do desenvolvimento do pensamento teórico: uma reflexão a partir do conceito de divisão*. Dissertação de Mestrado em Educação, Universidade do Sul de Santa Catarina, Tubarão, SC, Brasil.

DAVIDOV, V. V. (1988). *La enseñanza escolar y el desarrollo psíquico: investigación teórica y experimental.* Trad. Marta Shuare Moscú: Editorial Progreso.

DAVÝDOV, V. V. (1982). *Tipos de generalización en la enseñanza.* Habana: Editorial Pueblo y Educación.

DORIGON, J. C. G. (2012). *Proposições de Davydov para introdução ao conceito de equação.* Monografia (Especialização em Educação Matemática) - Universidade do Extremo Sul Catarinense, Criciúma. 90 f.

GALDINO, A. P. S. 2016. *O conhecimento matemático de estudantes do 3º ano do ensino fundamental sobre o conceito de multiplicação: um estudo com base na Teoria Histórico-Cultural.* Dissertação de Mestrado. Universidade do Sul de Santa Catarina, Tubarão.

GALPERIN, P.; ZAPORÓZHETS A.; ELKONIN, D. (1987). *Los problemas de la formación de conocimientos y capacidades enlos escolares y los nuevos métodos de enseñanza en la escuela.* In: SUARE, M. *La psicología Evolutiva y pedagógica en la URSS*. Moscú, Progreso, p. 300-316.

JARDINETTI, J. R. B. (1996). *Abstrato e o concreto no Ensino da Matemática: algumas reflexões.* Bolema, ano 11, nº 12, p. 45 – 57.

MADEIRA, S. C. (2012). *"Prática": Uma leitura Histórico-Crítica e proposições davydovianas para o conceito de multiplicação.* Dissertação (Mestrado em Educação) - Universidade do Extremo Sul Catarinense, Criciúma. 165 f.

MATOS, C. F. (2012). *Resolução de problemas davydovianos sobre adição e subtração por estudantes brasileiros do sexto ano do ensino fundamental.* Monografia (Especialização em Educação Matemática) - Universidade do Extremo Sul Catarinense, Criciúma. 168 f.

PEREIRA, M. A. M. (1986). (Ed.). *Enciclopédia Sysamérika.* Curitiba: Editora Argos, Ltda.

ROSA, J. E. (2012). *Proposições de Davydov para o ensino de Matemática no primeiro ano escolar: inter-relações dos sistemas de sistema de significações numéricas.* Tese (Doutorado em Educação). Universidade Federal do Paraná 244 f.

ROSA, J. E.; DAMAZIO, A.; ALVES, E. S. B. **(**2013**).** *Adição e subtração em Davydov.* Boletim GEPEM / Grupo de Estudos e Pesquisas em Educação Matemática, Rio de Janeiro, n. 63, p. 61-75, Jul./Dez..

SILVEIRA, G. M. (2012). *Proposições para o ensino do sistema de numeração em Davydov.* Monografia (Especialização em Educação Matemática) - Universidade do Extremo Sul Catarinense, Criciúma. 112 f.

SOUZA, M.B. (2013). *O ensino do conceito de número: objetivações nas proposições davydovianas e formalista moderna.* Dissertação (Mestrado em Educação). Universidade do Extremo Sul Catarinense, Criciúma. 237 f.

ГОРБОВ С. Ф.; МИКУЛИНА Г. Г.; САВЕЛЬЕВА О. В. (2008) *Обучение Математике. 1класс: Пособиедляучителейначальнойшколы* (Система Д.Б. Эльконина – В.В. Давыдова). 2-е ида, перераб. - М.:ВИТА-ПРЕССб. 128р. [GORBOV, S.F.; MIKULINA, G.G.; SAVIELIEV, O.V. (2009). *Ensino de Matemática. 1 ano: livro do professor do ensino fundamental* (Sistema do D.B. Elkonin – V.V. Davidov). 2ª edição redigida, Moscou, Vita-Press.]

ДАВЫДОВ, В. В. О. (2012). et al. *Математика, 1-Кjiacc.* Mockba: Mnpoc - Аргус. [Davidov, V.V. (2012) *Matemática, 1ª série. Livro didático e de exercícios para os estudantes da primeira série.* Moscou: MIROS, Argus.

Josélia Euzébio da Rosa, E-mail: joselia.rosa@unisul.br. Licenciada em Matemática. Doutora em Educação, linha de pesquisa Educação Matemática. Professora do Mestrado em Educação da Universidade do Sul de Santa Catarina – UNISUL. Pesquisa com base na Teoria Histórico-Cultural, cujo foco é para a obra de Davydov.

Ademir Damazio, E-mail: add@unesc.net. Licenciado em Matemática pela UNIPLAC. Especialista Matemático pela FUESS. Especialista em Ciências Matemáticas pela FURB. Mestre em Educação pela UFSC. Doutor em Educação pela UFSC. Professor da UNESC. Pesquisa: Conceitos Matemáticos Científicos, Cotidianos e Histórico-Cultural.

Josiane Cruz Goularte Dorigon, e-mail: josyanecg@yahoo.com.br, Licenciada em Matemática. Pós-graduada em Educação Matemática na Pós-graduação Latu Sensu da Universidade do Extremo Sul Catarinense - UNESC. Especialização em Metodologia da Matemática e Física na faculdade de Ensino Superior Dom Bosco, FDB, Brasil.

REVISTA IBEROAMERICANA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA
www.fisem.org/web/union
http://asenmacformacion.com/ojs/index.php/union/index

ISSN: 1815-0640
Número 45. Marzo 2016
Página 96-116

A resistência à transformação do texto pedagógico do planejamento do ambiente de modelagem matemática na prática pedagógica escolar

Lilian Aragão da Silva, Andréia Maria Pereira de Oliveira

Fecha de Recepción:07/09/2014
Fecha de aceptación:10/02/2016

Resumen	En este artículo, se analiza la resistencia a la transformación del entorno de planificación pedagógica texto modelización matemática en las clases de matemáticas de tres profesores que participan en la investigación. La investigación fue de carácter cualitativo, cuyos datos fueron producidos a través de la observación, entrevistas y documentos. Análisis de los datos sugiere que la resistencia a la transformación de la planificación pedagógica texto estaba condicionada a la fidelidad al texto mismo en la práctica docente de la escuela, los maestros favorecidos cuando sus decisiones a priori y se controlan las decisiones de los estudiantes. Estas construcciones se definieron y caracterizaron utilizando las nociones teóricas de Basil Bernstein. **Palabras clave:** Texto pedagógico, Planificación, Los modelos matemáticos, Práctica de la enseñanza secundaria.
Abstract	In this article, we analyze the resistance to transformation of pedagogical text planning environment mathematical modeling in mathematics lessons of three teachers participating in the research. The research was qualitative in nature, whose data were produced through observation, interviews and documents. Data analysis suggests that resistance to transformation of pedagogic text planning was conditional on fidelity to the text itself in school teaching practice, teachers favored when their decisions a priori and controlled the decisions of students. These constructs were defined and characterized using the theoretical notions of Basil Bernstein. **Keywords:** Pedagogic text, Planning, Mathematical modelling**,** School teaching practice.
Resumo	No presente artigo, analisamos a resistência à transformação do texto pedagógico do planejamento do ambiente de modelagem matemática nas aulas de matemática de três professores participantes da pesquisa. A pesquisa realizada foi de natureza qualitativa, cujos dados foram produzidos por meio da observação, entrevistas e documentos. A análise dos dados sugere que a *resistência a transformação* do texto pedagógico do planejamento foi condicionada a uma *fidelidade* ao próprio texto na prática pedagógica escolar, quando professores privilegiavam suas decisões tomadas *a priori* e controlavam as decisões dos estudantes. Tais constructos foram definidos e caracterizados a partir das noções teóricas de Basil Bernstein. **Palavras-chave:** Texto pedagógico, Planejamento, Modelagem matemática, Prática pedagógica escolar.

1. Introdução

A modelagem[1], no cenário da Educação Matemática, tem se consolidado como um ambiente de aprendizagem favorável para oportunizar um espaço de reflexão, investigação, negociação e problematização ao lidar com problemas provenientes de situações externas à matemática nas aulas (BARBOSA; 2009; ALRØ; SKOVSMOSE, 2006; JACOBINI, 2004). Nessa direção, assumimos a modelagem conforme a compreensão proposta por Barbosa (2009), como um ambiente de aprendizagem, no qual os estudantes são convidados a investigar problemas provenientes do cotidiano, de outras ciências ou de áreas profissionais por meio da matemática.

Com isso, os problemas propostos nas atividades de modelagem são de natureza diferente, a depender da familiaridade do professor[2] com esse ambiente (SANT'ANA; SANT'ANA, 2009). Por outro lado, Alro e Skovsmose (2006) argumentam que a natureza dos problemas, que envolvem dados do dia-a-dia, oferece diferentes condições de comunicação entre professor e estudantes, ao permitir que os estudantes questionem informações contidas na atividade. Essas e outras potencialidades especializam o ambiente citado, bem como fundamentam as razões que levam professores a sentirem desconforto quando planejam atividades dessa natureza, perante os resultados dos estudos já realizados (SILVA; OLIVEIRA; 2012a,b). Nesses estudos, conceituamos o planejamento do ambiente de modelagem, baseado em Vasconcellos (2010), como um processo de tomada de decisões do professor para atingir determinadas finalidades pedagógicas que estão vinculadas ao desenvolvimento do ambiente de modelagem. Nesses estudos, analisamos o momento que antecede a implementação na sala de aula, quando os professores discutiram e elaboraram o planejamento do ambiente de modelagem matemática.

Entretanto, Vasconcellos (2010) argumenta que o planejamento não pode ser caracterizado apenas no agendamento de ações futuras, mas, também, na implementação na sala de aula, uma vez que outras decisões podem ser tomadas quando os estudantes participam da aula. Dessa maneira, o autor considera que o planejamento contempla dois elementos básicos: a antecipação e a realização. Neste artigo, estamos interessados em analisar a realização a partir das decisões já tomadas pelo professor, no momento em que o professor operacionaliza o planejamento do ambiente de modelagem nas aulas de matemática.

Apesar de existirem trabalhos que focam no professor ou na relação entre professores e estudantes ao implementar atividades de modelagem nas aulas de matemática (OLIVEIRA, 2012; SANTANA; BARBOSA; 2012; OLIVEIRA, 2010; MAAB, 2005; entre outros), não há evidências quanto à implementação do ambiente de modelagem colocando lentes na tomada de decisões do professor agendadas a *priori*. Em outras palavras, a transformação do planejamento do ambiente de modelagem.

---

[1] No decorrer deste trabalho, por vezes, omitimos o termo *matemática* da expressão *modelagem matemática* para evitar repetições.

[2] Nesse caso, estamos considerando que as atividades de modelagem foram elaboradas pelo professor.

Para fundamentar esta investigação, utilizaremos alguns conceitos da teoria de Basil Bernstein (1990). Um dos conceitos chave da teoria centra-se na representação pedagógica que comunica alguma coisa, seja ela expressa pela fala, escrita, visual, espacial ou ainda na postura ou na vestimenta. Tal representação traduz princípios de ordenamento interno e relação mútua, a qual foi denominada por Bernstein (1990) de *texto*. Ademais, o autor denominou de *texto pedagógico* como aquele que visa ações pedagógicas. Além disso, o texto pedagógico é comunicado a partir de uma dada relação social. A *prática pedagógica* é conceituada por Bernstein (1990) de uma maneira mais ampla, como a relação social que pode ocorrer entre pais e filhos, professores e estudantes, assim como entre médico e paciente, dentre outros. Neste artigo, acrescentamos o termo *escolar* para denotar as relações sociais estabelecidas entre professor e estudantes na sala de aula. Portanto, aqui, estamos interessados em analisar a *prática pedagógica escolar* e os textos pedagógicos produzidos a partir dela.

Na prática pedagógica escolar, estamos considerando que há, pelo menos, dois textos envolvidos: o primeiro está centrado no professor e que, nesse caso, refere-se às comunicações ou tomada de decisões desse agente, no caso, o *texto pedagógico do planejamento do ambiente de modelagem*. O segundo está relacionado aos estudantes, os quais produzirão um texto referente ao que se espera dele na atividade, isso quer dizer que eles também tomam decisões na prática pedagógica escolar. Portanto, o texto pedagógico do planejamento do ambiente de modelagem comunicado pelo professor podem acarretar eventuais transformações, a partir dos textos produzidos pelos estudantes ou, ainda, de outras situações do contexto. Do ponto de vista teórico, a transformação do texto é um fenômeno inevitável, mas, neste artigo, estamos interessados em analisar as possíveis resistências à transformação do texto pedagógigo do planejamento do ambiente de modelagem, a qual pode ocorrer na comunicação pedagógica entre professores e estudantes.

Na seção seguinte, estabelecemos um diálogo com a literatura sobre a prática pedagógica escolar em modelagem com a lente teórica de Basil Bernstein, a fim de situar o leitor e empregar constructos teóricos que serão utilizados para fundamentar a análise.

2. A comunicação pedagógica no ambiente de modelagem matemática sob a ótica da teoria de Basil Bernstein

As tomadas de decisões tanto dos professores quanto dos estudantes no desenvolvimento do ambiente de modelagem dependem da comunicação estabelecida na prática pedagógica escolar (FERRUZI; ALMEIDA, 2012; OLIVEIRA, 2012; SANTANA; BARBOSA, 2012; BARBOSA; 2007). Isso significa que as tomadas de decisões podem mudar constantemente, mas para que isso aconteça, os professores precisam criar diferentes condições na comunicação a fim de que os estudantes participem ativamente da construção do ambiente de modelagem.

A princípio, temos que o ambiente de modelagem fornece, por si só, diferentes condições na comunicação pedagógica, uma vez que faz referência a realidade dos estudantes. Entretanto, são as formas de comunicação entre professores e estudantes que podem possibilitar ou limitar a participação deles no processo educativo (BARBOSA, 2007). Dessa maneira, entendemos que o ambiente de modelagem permite variações na comunicação na prática pedagógica escolar.

À luz da teoria de Bernstein (1990), as variações na comunicação estabelecidas entre professor e estudantes podem ser traduzidas em termos das *formas de controle* e do *enquadramento*. Por exemplo, quando o professor controla explicitamente a interação comunicativa podemos dizer que o enquadramento é forte. Já quando os estudantes podem assumir algum controle sobre a interação comunicativa dizemos que o enquadramento é fraco. Assim, Bernstein (1990) admite que o enquadramento pode variar entre forte e fraco. Além disso, o autor propõe que a variação no enquadramento acontece mediante as regras que fundamentam a prática pedagógica, a saber: as regras de seleção, as regras de sequenciamento, as regras de compassamento e as regras criteriais.

Segundo Bernstein (1990), as *regras de seleção* dizem respeito aos princípios que estabelecem a seleção do tema, do conteúdo ou dos dados de uma atividade escolar. No estudo de Zbiek e Conner (2006), os estudantes selecionaram algumas informações e descartaram outras para construir a solução de um problema de modelagem. Nesse caso, o professor deixou que os estudantes selecionassem os dados. Com esse exemplo, inferimos que o enquadramento foi fraco na regra de seleção, uma vez que os estudantes tiveram um controle na seleção dos dados.

Já as *regras de sequenciamento* referem-se aos princípios que estabelecem uma progressão ou ordenamento da aprendizagem em/para uma dada atividade escolar, ou seja, ordena o que vem antes e o que vem depois. No trabalho de Araújo e Barbosa (2005), o professor iniciou a aula indicando que primeiro os estudantes deveriam utilizar uma função que representasse uma situação cotidiana e depois estudar essa função com os conteúdos de cálculo diferencial e integral, abordados naquela disciplina. Contudo, no desenvolvimento, os estudantes desafiaram a ordem proposta pelo professor para aplicação dos conteúdos matemáticos utilizados, criando seu próprio ordenamento que, por sinal, resultou na estratégia inversa proposta pelo professor. Nesse caso, o enquadramento foi forte na regra de sequenciamento, pois o professor controlou essa ordem, porém os estudantes enfraqueceram esse enquadramento.

Por sua vez, as *regras de compassamento* dizem respeito aos princípios que estabelecem a velocidade ou uma taxa temporal relacionadas ao período necessário à aprendizagem e às regras de sequenciamento. Como não encontramos exemplos na literatura em modelagem a respeito das regras de compassamento, mostraremos uma possível ilustração. Por exemplo, caso o professor estabeleça que os estudantes desenvolvam toda a atividade de modelagem em duas aulas, mas no final ele reconheceu que os estudantes não apresentaram um ritmo esperado para resolver toda a atividade, daí ele pode dispor de mais uma aula para finalizar a atividade. Assim, podemos dizer que o enquadramento do professor foi forte em termos das regras de compassamento ao controlar explicitamente uma taxa temporal dos estudantes para o desenvolvimento da atividade. Porém, o enquadramento foi enfraquecido quando o professor percebeu que o ritmo dos estudantes não acompanhou o ritmo esperado por ele, fazendo com que o controle fosse reduzido.

Por fim, temos as *regras criteriais* que dizem respeito aos critérios que se espera que os estudantes assumam para avaliar uma comunicação, uma relação social ou uma posição legítima ou ilegítima. Em outras palavras, essas regras permitem que estudantes tomem posse das *regras de reconhecimento*[3] e *regras de realização*[4] para produzir um texto legítimo a um dado contexto comunicativo. Por exemplo, nos trabalhos de Oliveira (2012), Santana e Barbosa (2012) e Silva e Santana (2012), os professores formataram e/ou regularam as tomadas de decisões dos estudantes no ambiente de modelagem. Ao fazer isso, o professor tornou explícitos os critérios que os estudantes deveriam tomar como legítimos para produzir um texto esperado pelo professor, como exemplo, a determinação dos dados, dos procedimentos ou dos conteúdos matemáticos. Assim, os estudantes reconheceram as informações legítimas naquele contexto comunicativo e realizaram o texto a partir das indicações do professor. Nos três casos, o enquadramento foi forte e centrado no professor em relação às regras criteriais.

De modo geral, os estudos de Araújo e Barbosa (2005) e Zbiek e Conner (2006) mostram exemplos de sala de aula em que o professor permitiu que os estudantes tomassem suas próprias decisões e participassem ativamente no desenvolvimento de atividades de modelagem, tendo o professor como mediador de todo esse processo. Enquanto que nos trabalhos de Oliveira (2012), Santana e Barbosa (2012) e Silva e Santana (2012) encontramos evidências que os professores regularam as tomadas de decisões dos estudantes a fim de preservar as suas decisões. Do ponto de vista teórico, compreendemos que as tomadas de decisões do professor e dos estudantes podem ser traduzidas em termos dos *textos pedagógicos*. Em contrapartida, o texto pedagógico do professor refere-se às tomadas de decisões agendadas no planejamento, por isso, diz respeito ao *texto pedagógico do planejamento do ambiente de modelagem*.

Face ao exposto, nos estudos de Araújo e Barbosa (2005) e Zbiek e Conner (2006), o texto pedagógico dos estudantes mudaram o texto pedagógico do planejamento do ambiente de modelagem do professor. Do contrário, os estudos de Oliveira (2012) Santana e Barbosa (2012) e Silva e Santana (2012) mostraram que os professores regularam os textos pedagógicos dos estudantes. Ou seja, os professores privilegiaram o texto pedagógico do planejamento do ambiente de modelagem, não oferecendo condições para eventuais mudanças a partir da produção textual dos estudantes. Bernstein (1990) identifica a mudança no texto como um processo de *transformação*, considerando que tal transformação acontece sempre quando o texto se torna ativo na prática pedagógica escolar.

Entretanto, a partir da análise da literatura reconhecemos que há situações em sala de aula em que os textos foram transformados "em partes" ou, ainda, não foram transformados. Isso acontece porque o professor pode assumir um maior controle na produção textual dos estudantes e establecer claramente as ações dos estudantes. Neste artigo, estamos interessados em analisar a possibilidade dos textos não serem transformados, a qual traduzimos como uma resistência a eventuais transformações. O termo *resistência* tem significado semelhante ao utilizado no senso comum, cuja definição refere-se ao ato de resistir, se opor, repelir um ataque, se defender, reagir a obstáculos, e etc. (ROCHA, 2003).

---

[3] São as regras que permitem fazer a distinção entre contextos, por meio da identificação das características específicas de um dado contexto, distinguindo entre os textos que são considerados legítimos ou não em uma determinada prática pedagógica (BERNSTEIN, 1990).
[4] São as regras que criam os meios para a produção do texto legítimo, elas se referem ao como produzir esse texto (BERNSTEIN, 1990).

A seguir, apresentaremos o contexto que produzimos os dados e o método que viabilizou a produção e análise dos dados.

3. O contexto e os participantes da pesquisa

Nesta pesquisa, utilizamos os dados que foram produzidos nas salas de aula de três professores da Educação Básica. Os três professores estavam vinculados às atividades do curso de extensão[5] para a formação de professores em modelagem matemática, no qual planejaram o ambiente de modelagem para ser desenvolvido nas aulas. Desde o início do curso, os professores aceitaram o convite para participar da pesquisa e disponibilizaram as aulas a fim de serem acompanhadas. A partir daí, os professores assinaram um termo de consentimento tendo a liberdade de escolher um pseudônimo ou o próprio nome para identificá-los nos dados da pesquisa. Os professores participantes da pesquisa foram: Cau, Márcia e Chico.

A professora Cau possui 10 (dez) anos de experiência na docência. Ela planejou o ambiente de modelagem para as turmas do 3º ano do Ensino Médio de uma escola pública e estadual do município de Feira de Santana, na Bahia. A escola localiza-se na zona urbana e central do município. Quanto ao perfil dos estudantes na turma desenvolvida, eles eram jovens que, em sua maioria, tinham a pretensão de prestar vestibular ao concluir a escolaridade. A forma de organização do ambiente de modelagem proposto pela professora Cau foi o *caso 2*, em que a professora selecionou o tema e elaborou os problemas, cabendo aos estudantes a coleta de dados e a resolução dos problemas (BARBOSA, 2009). Assim, o tema consistiu na *reciclagem de lixo* e os problemas objetivavam a investigação da quantidade de lixo produzida na própria escola e a quantidade possível à redução com a coleta seletiva.

A professora Márcia possui 22 (vinte e dois) anos de experiência na docência. Ela planejou o ambiente de modelagem para as turmas da Educação de Jovens e Adultos (EJA) de uma escola pública e municipal de Feira de Santana, na Bahia. A escola estava localizada na zona urbana e periférica do município. Quanto ao perfil dos estudantes na turma desenvolvida, eles eram jovens e adultos que trabalhavam em turnos opostos ao da escola. Nessa turma, a maioria dos estudantes era de ingressos no mercado de trabalho, por isso tinham a intenção de concluir a Educação Básica para comprovar a escolaridade. A professora Márcia propôs o ambiente de modelagem organizado no *caso 1*, no qual ela escolheu o tema, coletou os dados e elaborou os problemas, cabendo aos estudantes a resolução (BARBOSA, 2009). A professora selecionou como tema *a queda do muro da escola* e organizou problemas que visavam à investigação do orçamento de cada material necessário para o levante do muro e o custo total. Por coincidência, na turma havia pedreiros, ajudantes e funcionários de lojas de materiais de construção que entendiam daquela prática.

O professor Chico possui 12 (doze) anos de experiência na docência. Ele planejou o ambiente de modelagem para uma turma do 8º ano do Ensino Fundamental II de uma escola pública e estadual do município de Feira de Santana-Bahia. Essa escola localizava-se na zona urbana e periférica do município. Os estudantes da turma eram adolescentes que ainda não tinham objetivos futuros após a escolaridade. A

[5] O curso é um projeto de extensão (Resolução CONSEPE[5] Nº. 111/2011) certificado pela Universidade Estadual de Feira de Santana (UEFS) que ocorreu no ano de 2012 e foi desenvolvido aos sábados, no turno matutino, perfazendo uma carga horária de 40 horas.

forma de organização do ambiente de modelagem proposto pelo professor Chico enquadrou-se, também, no *caso 1*. Com base nisso, o professor selecionou como tema *a utilização racional da mochila escolar*[6], cujo propósito dos problemas foi investigar a capacidade da mochila e relacionar com a massa corporal dos estudantes.

4. Método

O presente estudo tem como método o qualitativo, pois se pretende analisar as ações desenvolvidas em um contexto particular (JOHNSON; CHRISTENSEN, 2012; ALVES-MAZZOTTI, 2002). Neste caso, temos o objetivo de compreender a resitência à transformação do texto pedagógico do planejamento do ambiente de modelagem nas aulas de matemática dos três professores participantes, bem como as razões subjacentes a tal resistência. Assim, para viabilizar o objetivo, utilizamos observação, entrevistas e documentos como procedimentos de produção dos dados.

De acordo com Johnson e Christensen (2012), a observação é um procedimento que possibilita produzir dados pertinentes, permitindo ao observador acompanhar as experiências desenvolvidas pelos participantes no contexto natural. Em vista disso e do objetivo do estudo, a observação foi o principal procedimento metodológico que viabilizou a análise da resistência a transformação do texto pedagógico do planejamento quando os professores implementaram o ambiente de modelagem nas aulas de matemática. A observação foi registrada com uma câmera de vídeo que permitiu produzir os dados momento a momento.

Após a observação, realizamos entrevistas a fim de entender porque os professores resistiram à transformação do texto pedagógico do planejamento de tal forma. Segundo Alves-Mazzotti (2002), o investigador ao realizar a entrevista está tipicamente preocupado em compreender o significado atribuído pelos sujeitos aos eventos ou às situações que fazem parte daquele contexto ou da sua vida cotidiana. Neste estudo, a entrevista foi utilizada como um procedimento de produção dos dados útil para entender a resistência à transformação do texto pedagógico do planejamento do ambiente de modelagem diante da observação das aulas dos professores.

A entrevista foi inspirada em pesquisas que utilizaram os recortes de vídeos para estimular o entrevistador a remeter à situação original (CALDERHEAD, 1981; DENLEY; BISHOP, 2010). Essas pesquisas utilizaram a entrevista *stimulated recall* (lembrança estimulada) para reavivar a memória dos professores logo após aquela situação vivenciada, explicando como aconteceu e as ações que foram tomadas nas respectivas situações. Assim, inspirados neste tipo de entrevista, utilizamos alguns recortes de vídeos das aulas para resgatar e estimular os professores a argumentarem sobre as possíveis razões que levaram a resistir à transformação do texto pedagógico. Para conduzir a entrevista, utilizamos um roteiro de perguntas que foi elaborado a *priori* acerca das situações de sala de aula recortadas e para registrá-la, utilizamos uma câmera de vídeo.

Ao analisarmos as entrevistas, percebemos que os professores justificavam a resistência à transformação pelas decisões tomadas, explicitamente, no guia do planejamento[7] e, por vezes, referiam-se ao mesmo. Assim, esse documento forneceu

[6] A mochila escolar utilizada nesta atividade de modelagem refere-se àquelas que foram disponibilizadas pelo Governo do Estado da Bahia aos estudantes das escolas estaduais.
[7] Este termo foi criado pelo Grupo Colaborativo em Modelagem Matemática (GCMM-UEFS) para representar um plano para elaborar o ambiente de modelagem na sala de aula.

elementos para compreender o objeto de estudo da presente pesquisa. Dessa maneira, os documentos configuraram-se, também, como um procedimento de produção de dados.

Após a coleta dos dados, iniciamos a transcrição e a análise. Essa última foi inspirada na perspectiva metodológica e analítica de Bernstein (1990), o qual propõe uma *linguagem de descrição* que suscita uma reflexão dialética entre os dados empíricos e os conceitos teóricos. Dessa maneira, os dados não são entendidos apenas do ponto de vista teórico, mas da reflexão e da análise do empírico *versus* o teórico, os quais podem comunicar algo a mais que a própria teoria.

5. Apresentação dos dados

Os dados apresentados nesta seção referem-se aos textos de três professores e dos estudantes no desenvolvimento da aula, bem como as entrevistas realizadas com eles após as aulas. Na apresentação dos dados, os textos dos professores e estudantes foram enumerados para facilitar sua localização e relacionados com as letras O (para os dados provenientes da observação) ou E (para os dados provenientes da entrevista) a fim de identificar procedimentos que viabilizaram a coleta de dados. Ademais, enumeramos os textos dos estudantes a fim de preservar suas identidades.

5.1. A resistência à transformação do texto pedagógico do planejamento do ambiente de modelagem

A professora Cau propôs para os estudantes alguns problemas, os quais estão relacionados ao tema reciclagem. A figura abaixo estão os enuncidos dos problemas que foram investigados na sala:

Qual a quantidade de lixo seria possível reduzir com a coleta seletiva e a prática efetiva da reciclagem na nossa escola?

A partir deste questionamento, podemos abordar as questões a seguir:

- Considerando constante a quantidade média de lixo diária produzida pela escola, qual a quantidade de lixo reciclável pode ser prevista para um mês? E para um ano?
- Qual a quantia, em reais, que pode ser arrecada em um mês com a venda do lixo reciclável da escola?

Figura 1 – Problemas retirados do guia do planejamento da professora Cau

No desenvolvimento da atividade, a professora Cau e os estudantes tinham encontrado uma estratégia para suprir a falta de informações coletadas a fim de solucionar a situação-problema. Após a apresentação dessa estratégia, alguns estudantes indicaram a necessidade de outras informações e, particularmente, um estudante contestou essa estratégia utilizada, conforme podemos observar no recorte abaixo:

> **(O1) Estudante 5:** Eu não estou entendendo, porque vamos estipular se nós temos o reciclável e o reciclável também faz parte do total. Como é que vamos estipular, se já temos o reciclável? Não podemos calcular o total em cima do que já temos que é o reciclável?

> **(O2) Professora Cau:** Vamos entender a falha do nosso trabalho. Deveria ser pesado o lixo total e o lixo reciclável para a gente estabelecer uma relação. Como não fizeram o levantamento do lixo total, só fizeram do reciclável então devemos fazer uma estimativa para o total, considerando o reciclável aqui porque não sabemos do que resta para completar o total. É uma saída!
> **(O3) Estudante 5:** Então está, pró!
> **(O4) Estudante 7:** Pró! E como vamos saber quantos alunos tem na escola para calcular o lixo total?
> **(O5) Estudante 10:** Vai à secretaria ali e pergunta.
> **(O6) Professora Cau:** Não precisa não! Eu tenho aqui! Vamos utilizar as informações que tenho aqui da quantidade de alunos da manhã e da tarde. 339 da manhã [Olhando para a sua agenda].
> **(O7) Estudante 10:** 339, só?
> **(O8) Professora Cau:** Essas são informações oficiais da escola quando eu fiz a inscrição da OBMEP. É dado da secretaria.
> **(O9) Estudante 10:** Parece que tem mais como barulho!
> **(O10) Professora Cau:** Embora com a greve saibamos que alguns alunos saíram, devemos considerar este dado como oficial, pois é uma alteração que não influencia muito. E aqui está constando 280 alunos da tarde. Também não sei se houve alguma alteração, mas vamos considerar o que temos. Então, baseado nisso e baseado na outra informação que cada indivíduo produz 0,5 quilo diariamente. Vocês vão agora calcular quanto em 1 dia seria produzido de lixo aqui na escola.

Nesse recorte, há uma atuação dos estudantes na contestação da estratégia utilizada e na sugestão de outras informações para dar conta dessa estratégia. A princípio, um estudante (O1) contestou a estratégia utilizada para solucionar a falta de informações quantitativas, indicando que o valor correspondente ao lixo total poderia ser estipulado de acordo com o valor do lixo reciclável que eles já possuíam. Porém, a professora Cau (O2) não legitimou essa contestação, justificando a falta de informações como uma falha do trabalho e desconsiderando a sugestão do estudante. Isso mostra que a professora resistiu à contestação do estudante que poderia promover outras mudanças, e sendo assim, induziu qual estratégia eles deveriam seguir para resolver essa falha. Com isso, também, entendemos que a professora exerceu um maior controle nas ações dos estudantes para dar conta da falta de informações.

Após a ação da professora, os estudantes começaram a utilizar essa estratégia e questionar outras informações que seriam necessárias para encontrar o lixo total, como por exemplo, a quantidade de estudantes na escola. Um estudante sugeriu que se encaminhasse a secretaria para obter essa informação, no entanto, a professora Cau (O6) indicou que não seria preciso ir à secretaria, pois ela continha essa informação. Posteriormente, a professora (O10) percebeu que a informação que ela forneceu correspondeu a um dado oficial, mas não estava condizente com a realidade da escola, considerando a evasão estudantil no período da greve. Entretanto, a professora reforçou que os estudantes deveriam legitimar a informação e indicou as ações que eles deveriam seguir para resolver a situação-problema. Ou seja, a professora apontou o que eles deveriam reconhecer e o que ela esperava que os estudantes realizassem na atividade. Abaixo, há uma explicação da professora quanto à contestação do estudante e a necessidade de outras informações:

> **(E1) Professora Cau:** Essa questão da falha, como tinha dito antes, foi minha não deles. Eu tinha planejado trabalhar com dados reais. Se a gente tivesse feito a pesagem do lixo total, a gente teria informações mais concretas. Na hora, eu perguntei aos alunos antes como deveríamos resolver isso, mas na verdade eu já tinha pensado antes em uma solução no guia do planejamento, mas uma solução hipotética. Então, eu me guiei baseado nisso. Minha solução hipotética foi baseada em pesquisas, não foi uma mera hipótese. Por isso que eu não achei relevante a ideia do aluno 5, por que se não cairíamos em uma hipótese sem referência. Poderia também ser uma saída a ideia dele, mas não tem referência alguma. E veja que a saída que nós encontramos acabou sendo mais produtivo, em minha opinião, porque tivemos que relacionar com outros dados da escola, como o tempo que os alunos passam na escola, a quantidade de alunos e tudo mais. Agora, essa questão da quantidade de aluno, eu sabia da

> evasão por causa da greve, mas achei que baseado nos dados oficiais teria soluções mais precisas, até porque nós não tínhamos a informação da quantidade de alunos que saíram. E se fossemos pesquisar isso, na escola, perderíamos muito tempo. A atividade já tinha ultrapassado o tempo que eu tinha organizado.

Nesse trecho da entrevista, a professora apontou que a estratégia utilizada para resolver a falta de informações baseou-se na solução hipotética dada por ela no guia do planejamento. Segundo a professora, a solução hipotética esteve pautada em pesquisas da *internet* cujas informações eram plausíveis e caracterizavam a realidade. Com base nisso, Cau explicou que não considerou cabível a sugestão do estudante. Assim, entendemos que a professora justificou a resistência à sugestão do estudante a fim de conduzir a solução prevista.

Além disso, a professora apontou vantagens em ter desenvolvido a estratégia já conhecida por ela, que resultaram na descoberta de outras informações da escola. Como exemplo disso, a professora citou que a informação referente à quantidade de estudantes consistiu em um dado oficial da escola, embora não estivesse condizente com a realidade, uma vez que a greve gerou uma evasão escolar. Isso mostra que a professora tentou justificar ao máximo a utilização dessa estratégia e de informações oficiais, mas não realística, para percorrer o mesmo caminho proposto por ela na solução hipotética da situação-problema.

Nas aulas dos professores Márcia e Chico, também, encontramos evidências da resistência às mudanças aliada a uma preservação do planejamento a *priori*.

A professora Márcia propôs para os estudantes uma investigação sobre a queda do muro da escola. Essa investigação foi organizada em um problema geral (Ver figura 2 abaixo) e problemas específicos sobre cada material necessário para establecer o levante do muro, tais como: blocos, areia e cimento, brita, ferro, colunas ou pilares e mão de obra do pedreiro.

PROPOSTA: *Qual seria o custo da reconstrução do muro dos fundos da Escola Ana Maria Alves dos Santos sabendo-se que a parte destruída mede 60 metros de comprimento e 2 metros de altura e considerando o alicerce já pronto?*

Figura 2 – Situação-problema retirada do guia do planejamento da professora Márcia

Na aula da professora Márcia, um grupo de estudantes estava resolvendo as situações-problema referentes ao orçamento dos blocos no levante do muro quando a professora interferiu na estratégia de resolução dos estudantes. A fim de compreender a intervenção da professora sob a resolução do problema, mostraremos o que a situação-problema solicitava. A situação-problema foi organizada da seguinte forma:

- **BLOCOS**

1) Sabendo-se que para o levante de 1m² de parede utiliza-se 30 blocos (6 furos, pequeno) determine:

a) Qual a quantidade de blocos necessários ao levante do muro?

b) Quanto será pago pelos blocos, considerando que o milheiro custa R$ 320,00?

Figura 3 – Parte da atividade correspondente ao orçamento de blocos

Nesta questão, os estudantes estavam empenhados em encontrar o valor que seria pago pelos blocos (alternativa b), após descobrir que seriam necessários 3600 blocos (alternativa a). A estratégia inicial dos estudantes para resolver a alternativa b) foi dividir os 3600 em partes, no caso, 1000 + 1000 + 1000 + 500 + 100. Assim, os estudantes calcularam os 3 milheiros e, em seguida, calcularam os 500 a partir da metade do milheiro. Para encontrar o valor correspondente a 100 blocos, os estudantes começaram a dividir 500 pela metade. Nesse momento, a professora Márcia aproximou-se do grupo para mediar a discussão dos estudantes:

(O11) Professora Márcia: Como é que vocês estão pensando?
(O12) Estudante 3: A metade de 500.
(O13) Professora Márcia: Ham!
(O14) Estudante 4: 350.
(O15) Professora Márcia: A metade de 500?
(O16) Estudante 4: Eu acho que é...
(O17) Professora Márcia: É quanto?
[Estudantes param e ficam pensando]
(O18) Professora Márcia: Quanto é a metade de 500?
(O19) Estudante 3: 250.
(O20) Professora Márcia: Isso. 250 está bom, mas 250 é um número com 50, não é? Esse 250 não é bom, não é? Se 500 é 160 [reais], ao invés de você pensar em metade, dividido por 2, que dá 250 um número quebrado, você poderia dividir por quanto para dar um número inteiro e redondo?
(O21) Estudante 5: Oh, meu Deus! [risos]
[Estudantes ficam em silêncio]
(O22) Professora Márcia: Então vamos pensar no 1000. 1000 é 320 [reais]. O 100 dentro dos 1000 são quantos pedacinhos?
[Estudantes ficam em silêncio por alguns segundos pensando]
(O23) Estudante 3: 10.
(O24) Professora Márcia: Hum! O 320 [reais] é o 1000. Quanto é o 320 em 10 pedacinhos? Porque se em cima eu dividi em 10 pedacinhos em baixo eu tenho que dividir em 10 pedacinhos. [A professora gesticula com as mãos referindo-se a 1000 em cima e 320 em baixo]
(O25) Estudante 4: E o 500?
(O26) Professora Márcia: Não, esquece o 500. Trabalhem com o 1000.
(O27) Estudante 3: Certo!

Esse recorte mostra a professora Márcia conduzindo os estudantes para uma estratégia diferente do que eles iniciaram na resolução da atividade. A princípio, a professora Márcia (O20) argumentou que o cálculo partindo da divisão pela metade não representava um valor apropriado, uma vez que o 250 terminava em 50. Assim, a professora Márcia (O20 e O22) induziu outros caminhos para os estudantes seguirem na resolução. Com isso, entendemos que a professora tinha a intenção de fazer com que os estudantes encontrassem com a divisão sucessiva o valor imediato correspondente aos 100 blocos, conforme podemos notar nos novos questionamentos da professora (O22) que conduzem a esse caminho. Notemos que do contrário, ou seja, se os estudantes continuassem aquela divisão sucessiva pela metade, eles encontrariam outros valores, não imediato a 100 blocos, mas que poderiam ser agrupados para descobrir o custo correspondente a esses 100 blocos. Ou seja, os estudantes desenvolveriam um caminho mais longo para encontrar esse orçamento.

A primeira interferência da professora Márcia (O20) não gerou resposta imediata dos estudantes, pois o questionamento não pareceu ter promovido uma compreensão deles. A partir disso, a professora (O22) mudou o questionamento induzindo, precisamente, o que ela esperava que os estudantes realizassem na resolução da atividade. Dessa maneira, a professora indicou quais ações os estudantes deveriam reconhecer como legítima para resolver a situação-problema, abandonando a estratégia inicial. Em (O26), podemos observar esse direcionamento da professora, a qual exerceu um maior controle nas ações dos estudantes. Abaixo, há uma explicação da professora em relação a sua mediação no grupo:

> **(E2) Professora Márcia:** Quando eu percebi que aquela divisão daria mais trabalho e mais cálculo, eu tentei puxar para uma forma mais simples e mais rápida. Então, eu percebi que não era uma boa ideia trabalhar com números nem tanto arredondados. Na verdade, eles têm dificuldades com a divisão. E ensinando uma forma mais simples não enfrentariam essa dificuldade. Foi por isso que eu puxei isso dos estudantes.

Neste trecho, a professora Márcia afirmou que sua intervenção no grupo resultou de sua percepção quanto ao caminho percorrido pelos estudantes. Para ela, esse caminho, seguido por eles, não tinha sido uma boa estratégia, uma vez que esse caminho conduzia para uma solução extensa e que, futuramente, geraria uma dificuldade nos estudantes. A partir disso, entendemos que a professora buscou precaver as dificuldades que seriam enfrentadas pelos estudantes. Embora ela tenha justificado uma precaução, esse direcionamento na estratégia de solução dos estudantes expressou um maior controle por parte da professora, bem como gerou uma interrupção no pensamento dos estudantes quando buscavam uma estratégia de solução própria.

Por outro lado, no guia do planejamento, a professora Márcia tinha estabelecido uma solução ainda mais rápida, ao dividir 3600 por 1000 e multiplicando por 320. Entretanto, na aula, ela conduziu a uma divisão diferente, mas com a mesma intenção de desenvolver uma solução rápida. Isso mostra que a professora mudou, porém preservou os princípios e intencionalidades expressos no guia, bem como exerceu um maior controle na comunicação com os estudantes.

Em outro grupo, a professora Márcia contestou a solução dos estudantes da situação-problema referente à quantidade de areia e cimento necessária para o levante do muro da escola. A situação-problema estava subdividida em duas questões. A primeira consistia em uma tabela que mobilizava o conteúdo matemático de grandezas diretamente proporcionais e, com isso, solicitava a quantidade de latas de cimento e areia. Já a segunda solicitava essas quantidades para o levante do muro da escola, sugerindo que os estudantes considerassem a área do muro da escola que correspondia a 120 m^2, e comparassem com os valores da tabela. Abaixo, apresentamos a situação-problema:

➢ **AREIA E CIMENTO**

O cimento e a areia são usados no preparo da argamassa, mistura utilizada para unir os blocos.
Para o levante do muro prepara-se a argamassa misturando uma lata de cimento e oito latas de areia, que chamamos de TRAÇO da argamassa.
Simbolicamente representamos por 1: 8 → lê-se um para oito.
Com essa quantidade é possível levantar 4m² de muro.

1) Baseado nessas informações complete a tabela abaixo sabendo que as grandezas "quantidade de cimento" e "quantidade de areia" são grandezas diretamente proporcionais.

Levante	4m²	8m²		32m²		128m²
Quantidade de cimento (em latas)	1		4			
Quantidade de areia (em latas)	8				128	

2) Observando os resultados da tabela complete: No levante do muro da nossa escola utilizaremos:
a) ______ latas de cimento
b) ______latas de areia
(Lembre-se que é melhor sobrar do que faltar)

Figura 4 – Partes da atividade correspondente à quantidade de areia e cimento

Notemos que abaixo da alternativa b da segunda questão, a professora enfatizou para os estudantes, na própria atividade, que essas latas podem ser contabilizadas acima da quantidade exata para o levante do muro da escola. Esse lembrete sugere que o resultado encontrado será maior que o necessário. Entretanto, na solução da segunda questão, os estudantes registraram a quantidade exata de latas necessárias para a construção do muro, ou seja, subtraíram as quantidades referentes a 128 m^2 pelas quantidades referentes a 8 m^2, encontrando as quantidades de latas para 120 m^2, o que correspondeu exatamente a área do muro da escola.

A solução dessa questão foi registrada pelos estudantes no final da segunda aula. Na terceira aula, a professora iniciou contestando essa solução dos estudantes:

> **(O28) Professora Márcia:** Aqui você não achou 32? Porque aqui: Observando o resultado da tabela complete. No levante do muro da nossa escola, utilizaremos quantas latas de cimento? Aqui fala a quantidade de cimento em latas. Oh, quantas? [Apontando para a última coluna do quadro]
> **(O29) Estudante 6:** 32.
> **(O30) Professora Márcia:** E porque você colocou 30?
> [Estudantes ficam em silêncio pensando]
> **(O31) Professora Márcia:** Aqui também. Quantidade de areia em latas. Quanto é? [Apontando para a última coluna do quadro]
> **(O32) Estudante 6:** 256.
> **(O33) Professora Márcia:** E porque colocou 240? Entendeu? Você vai colocar os valores corretos e aí a gente vai continuar as próximas questões.
> [Após a intervenção da professora, os estudantes apagaram os valores e colocaram aqueles correspondentes à última coluna]

Nesse recorte, a professora Márcia contestou a solução encontrada pelos estudantes conduzindo para outra que ela almejava que eles realizassem na resolução da atividade. Nesse caso, a professora (O28 e O31) apontou que a quantidade de latas de cimento e areia correspondesse aos valores obtidos na última coluna, ou seja, aos valores relacionados a 128 m^2. Notemos que a natureza da pergunta da professora e a sua ação, inibiram a explicação da questão pelo grupo de estudantes, silenciando-os.

Nessa condução, Márcia (O33), também, declarou que aqueles valores é que estavam corretos e, assim, correspondiam àquelas quantidades. Com isso, ela induziu que os estudantes apagassem e registrassem o que foi ratificado. Isso demonstra que a professora exerceu um maior controle nas soluções dadas pelos estudantes e a partir desse controle, os estudantes realizaram as ações estabelecidas pela professora para atender às suas expectativas.

A partir de outro ponto de vista, notamos que no guia do planejamento a professora tinha agendado a solução que ela induziu para os estudantes. Portanto, a intervenção e comunicação da professora no grupo podem ser entendidas como uma preservação dos resultados encontrados por ela, ou seja, na tentativa de legitimar apenas os resultados que ela planejou para a atividade. Nas aulas da professora Márcia, encontramos evidências, também, de um grupo de estudantes contestando algumas informações da atividade a partir de situações do dia a dia, conforme podemos observar:

> **(O34) Estudante 7:** Professora, a gente está fazendo esta conta errada que uma caçamba não tem 5000 quilos! Eu sei que é 5 metros. Eu trabalho em um material de construção.
> **(O35) Professora Márcia:** 5 metros c-ú-b-i-c-o-s.
> **(O36) Estudante 7:** Então!
> **(O37) Estudante 8:** 5000 quilos só se for em uma caçamba de três eixos.
> **(O38) Professora Márcia:** Espera aí, que agora ele disse que é sabido! Vamos discutir.
> **(O39) Estudante 7:** Uma caçamba pega até 4000 quilos.
> **(O40) Professora Márcia:** Não pega não!
> **(O41) Estudante 7:** Pega! Eu trabalho em um material de construção professora!
> **(O42) Professora Márcia:** Ou ela pega 5 ou ela pega 6.
> **(O43) Estudante 7:** Não, não.
> **(O44) Estudante 8:** Tem umas que pega só 3.
> **(O45) Estudante 7:** Tem no tanque da caçamba o tanto do quilo que ela pode pegar. Se passar da balança a federal multa.
> **(O46) Professora Márcia:** Oh! Psiu! Essa informação aí ela é oficial. Você sabe o que é uma informação oficial?
> **(O47) Estudante 7:** Não.
> **(O48) Estudante 8:** Que é superior, vem de cima.
> **(O49) Professora Márcia:** Vem de cima, muito bem! Vem de cima, não sou eu que estou inventando não. Pode ser que na sua loja as coisas sejam feitas com 4 mil, mas o correto é vender 5.
> **(O50) Estudante 7:** Não é não professora. Mas aqui eu vou considerar assim, porque é a senhora que está dizendo!
> **(O51) Professora Márcia:** A gente pode discutir isso melhor no final da atividade.

Nesse recorte, os estudantes 7 e 8 contestaram a veracidade das informações contidas na atividade, especificamente, a quantidade de areia que uma caçamba pode transportar. Baseados em situações do dia a dia e no mundo do trabalho, os estudantes afirmaram que uma caçamba pode transportar até 4000 quilos e outras conseguem transportar apenas 3000 quilos. Além disso, alegaram que a ultrapassagem dos quilos recomendados nas caçambas pode ocasionar infrações de trânsito.

Entretanto, a professora (O40) discordou da contestação dos estudantes e, posteriormente, em (O46) e (O49), justificou que essa informação da atividade constituiu-se como um dado oficial e por isso sugeriu como verdadeira. A partir da justificativa e da posição da professora naquele contexto, o estudante 7, em (O50), argumentou a favor das considerações da mesma em relação as informações contidas na atividade, não obstante discordasse dela.

Portanto, esse trecho mostra a professora exercendo maior controle sob a legitimidade das informações contidas na atividade. Também, notamos a professora sinalizando que aquelas informações devem ser reconhecidas pelos estudantes naquela prática pedagógica. Abaixo, há uma breve explicação da professora em relação à legitimidade das informações:

> **(E3) Professora Márcia:** Para fazer esta atividade, eu pesquisei e optei por fazer essa pesquisa no bairro da escola. Então, as informações eu coletei no bairro em dois materiais de construção. E, depois, fiz uma entrevista com um pedreiro conhecido e um sobrinho engenheiro, para eu ter noções de algumas coisas que na hora que eu estava organizando esse trabalho me pareceram obscuras. Aí, o pedreiro e o engenheiro me ajudaram, mas o pedreiro pela sua prática me ajudou muito mais. Por isso, que quando os estudantes me perguntaram sobre aqueles dados eu informei que eram oficiais, não eram inventados. Eles podem até saber de outros pesos de caçambas, mas o que continha na atividade era um peso correspondente a uma caçamba que existe, porque foi o material de construção e pedreiro que me confirmaram. Então, não poderiam dizer que eram inventados.

Nesse trecho, a professora Márcia explicou que realizou uma pesquisa para elaborar a atividade e informar os dados quantitativos da mesma. Além disso, pontuou que essas informações eram oficiais e verídicas, pois foram pesquisadas em locais ou com pessoas que entendiam da prática de construção. Portanto, Márcia justificou que a legitimidade das informações estava relacionada à pesquisa que ela realizou com especialistas daquela prática. Isso mostra o porquê ela exerceu um maior controle na legitimidade das informações da atividade, as quais deveriam ser reconhecidas pelos estudantes. Por outro ponto de vista, mostra uma resistência da professora em mudar ou incluir outras informações advindas dos estudantes que entendiam, também, daquela prática, ou seja, em preservar as informações e trabalhar apenas com essas.

O profesor Chico propôs três problemas relacionados ao tema mochila, conforme podemos observar abaixo:

Situação-problema:

O uso da mochila ultrapassa os 10% da massa corporal do adolescente?

A mochila suporta o peso dos 5 livros mais o caderno capa dura de 20 matérias?

A mochila é de boa qualidade?

Figura 5 – Situação-problema retirada do guia do planejamento do professor Chico

Na aula do professor Chico, um grupo de estudantes estava reunido discutindo a veracidade das medidas, do volume da mochila, informadas pelo professor para o desenvolvimento da atividade. Nessa discussão, alguns estudantes concordavam com as medidas estabelecidas pelo professor enquanto outros discordavam dessas medidas. No recorte abaixo, os estudantes solicitaram a presença do professor a fim de encontrar um acordo e prosseguirem no cálculo das medidas:

> **(O52) Estudante 1:** Professor, ele está dizendo que o senhor está errado. Ele diz uma coisa e o senhor outra.
> **(O53) Professor Chico:** Faça o que eu digo!
> **(O54) Estudante 1:** Está vendo?
> **(O55) Estudante 2:** Mas está errado!
> **(O56) Professor Chico:** O quê?
> **(O57) Estudante 2:** A profundidade é para dentro. Lembra da profundidade do mar? Como é que profundidade é para o lado?

(O58) Professor Chico: Mas é assim meu filho! Para calcular o volume da mochila você tem que medir a altura, largura e profundidade [indicando as medidas da forma expressa pela figura 6 abaixo]
(O59) Estudante 2: Está errado!
(O60) Professor Chico: Mas é assim! Olhe, volume é igual a H vezes L vezes P [mostrando o cartaz em suas mãos]. Calculem aí!
[Estudantes começam a calcular o volume enquanto o estudante 2 balança a cabeça representando um não]

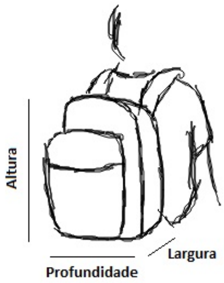


Figura 6 – Representação das medidas do volume indicadas pelo profesor Chico

O recorte acima foi marcado pelo desacordo de alguns estudantes e pela intervenção do professor induzindo os mesmos a concordarem com as suas informações. Notemos que a intervenção do professor Chico (O53) no grupo foi, inicialmente, diretiva ao indicar quem os estudantes deveriam seguir e o que ele (O58 e O60) esperava ser realizado pelos estudantes. Embora o estudante 2, em (O57), tivesse apontado uma incompreensão acerca da localização da profundidade, o professor (O58 e O60) continuou reforçando as suas informações, sinalizando as medidas na mochila e, posteriormente, apresentando as medidas na fórmula em um cartaz. Nesse caso, o professor exerceu explicitamente o controle das ações dos estudantes.

Com isso, entendemos que o professor não se preocupou em entender a explicação do estudante e preservou as informações que ele tinha pesquisado. Portanto, isso mostra que o professor tentou resistir aos textos produzidos pelo estudante, conservando o que ele tinha planejado. Na entrevista, o professor justificou sua intervenção no grupo:

(E4) Professor Chico: Eu fui enfático no grupo, porque aqueles alunos são "retados" e costumam perturbar muito minhas aulas. Eles não prestam muita atenção no que eu dizia durante a aula. Por isso, que eu mediei assim. Agora, quanto às medidas, eu só fui perceber que havia um equívoco em casa. Quando eu olhei as respostas dos alunos e o cartaz, percebi que não estava correto. Daí, em outra aula, expliquei isso melhor a eles e consertei.

O professor Chico argumentou que a intervenção no grupo decorreu da indisciplina dos estudantes. Segundo Chico, os estudantes não prestaram a devida atenção ao que ele comunicava, por isso que sua intervenção foi de natureza mais diretiva e enfática a quem eles deveriam seguir. Essa indisciplina dos estudantes provocou um controle mais explícito por parte do professor, bem como impediu que o professor oportunizasse uma análise dos argumentos do estudante. Notemos que o professor, posteriormente, a partir da análise das soluções dos estudantes, deparou-se com as incompreensões realizadas por ele para representar as medidas do volume da mochila. Isso põe em evidência que o professor não se atentou aos argumentos dos estudantes por conta da indisciplina e resistiu às mudanças e correções das medidas indicadas por ele. Com isso, Chico preservou as informações planejadas a *priori*.

6. Discussão dos dados

Os dados e análises apresentados acima mostram que o texto pedagógico do planejamento do ambiente de modelagem não sofreu algumas modificações quando foi operacionalizado na sala de aula devido à resistência do professor. Baseado na teoria de Bernstein (1990), argumentamos que as modificações refletem a *transformação do texto*. Entretanto, nessa categoria notamos a *resistência à transformação do texto pedagógico do planejamento*, quando o professor evitou que houvesse mudanças textuais.

Aliada a essa resistência, notamos que os profesores tentaram preservar o texto pedagógico do planejamento do ambiente de modelagem planejado *a priori*. Podemos traduzir essa preservação como uma *fidelidade* ao texto pedagógico do planejamento. A partir da análise dos dados, tal fidelidade condicionou as formas de comunicação na prática pedagógica escolar. Ou seja, o professor regulou a comunicação com os estudantes na tentativa de preservar o texto pedagógico do planejamento. Portanto, a resistência à transformação foi condicionada por uma fidelidade ao texto pedagógico do planejamento.

Na tentativa de globalizar os resultados, observamos que os professores Cau, Márcia e Chico mostraram-se resistentes à transformação do texto pedagógico do planejamento do ambiente de modelagem nas seguintes situações: encontrar uma estratégia para a falta de informações coletadas para resolver o problema; contestar as estratégias utilizadas pelos estudantes para solucionar a situação-problema; discordar das contestações advindas dos estudantes em termos da veracidade dos dados contidos na atividade ou a veracidade das informações dadas pelo professor. Em cada uma das resistências, a transformação do texto do planejamento, notamos uma fidelidade ao texto que esteve vinculada às características da relação pedagógica instutuída entre professor e estudantes.

Dessa maneira, a fidelidade ao texto do planejamento ocorreu quando os professores legitimavam apenas: o que eles consideravam como legítimo para os estudantes seguirem, as soluções que eles planejaram a *priori*, as pesquisas realizadas na elaboração do planejamento, o conhecimento matemático mobilizado e suas representações no desenvolvimento da atividade. Nesse contexto, a resistência à transformação e a fidelidade foram marcadas por um maior controle por parte do professor. À luz da teoria de Bernstein (1990), as formas de controle expressam o enquadramento, que no caso desta pesquisa, foi marcado por um enquadramento forte, embora consideremos que os controles assumidos por cada professor apresentaram naturezas diferentes.

Para fundamentarmos isso, traremos outros conceitos teóricos que abordam a lógica de qualquer prática pedagógica. Bernstein (1990) apresenta e examina cinco regras que fundamentam a prática pedagógica. Contudo, notamos que apenas uma dessas perpassou nos dados dessa categoria, a saber: as *regras criteriais*. Essa regra diz respeito aos critérios que se espera que os estudantes (adquirentes) reconheçam e realizem para a produção do texto legítimo àquele contexto comunicativo (BERNSTEIN, 1990). Conforme o teórico, essa regra está relacionada a pelo menos duas outras regras, as quais são denominadas de *regras de reconhecimento* e *regras de realização*. Segundo Bernstein (1990), as regras de reconhecimento dizem respeito às regras que permitem fazer a distinção entre contextos, por meio da identificação das características específicas de um dado contexto, distinguindo entre os textos que são considerados legítimos ou não em uma determinada prática pedagógica. Enquanto que as regras de realização refere-se às regras que criam os meios para a produção do texto legítimo, elas se referem ao como produzir esse texto. Do ponto de vista teórico, as regras de reconhecimento são suficientes, mas não garantem a posse das regras de realização. Isso significa que os estudantes podem reconhecer mas não, necessariamente, realizar o texto legítimo e esperado por aquele contexto comunicativo.

Nas aulas dos professores, observamos que a resistência à transformação aliada à fidelidade ao texto do planejamento foram marcadas por um maior controle por parte do professor às ações dos estudantes ao indicarem o que eles deveriam reconhecer e realizar para atingir as expectativas do professor. Ou seja, o enquadramento foi forte em termos das regras criteriais, de modo que os estudantes produzissem o texto legítimo e considerado como tal pelo professor. Nesse enquadramento forte, os professores explicitavam o quê os estudantes deveriam reconhecer e o quê os estudantes deveriam realizar, em outras palavras, deixavam as regras e critérios claros a fim de que os estudantes tomassem posse das regras de reconhecimento e de realização.

Nos dados, também, encontramos algumas situações particulares que aconteceram nessa categoria. Por exemplo, nas aulas da professora Márcia, notamos que houve diferentes contestações partindo de diferentes sujeitos. Nos dados, referente à solução da quantidade de latas de areia e cimento, a professora contestou a resolução dos estudantes, mostrando uma resistência à transformação do texto e uma fidelidade ao texto. Já nos dados relativo à veracidade das informações, foram os estudantes que contestaram as informações das atividades e dos professores, respectivamente. Em ambos os casos, os professores discordaram das contestações, resistindo às transformações que poderiam ocorrer se concordassem e mostrando uma fidelidade ao texto pedagógico do planejamento.

Segundo Bernstein (1990), qualquer enquadramento carrega consigo os procedimentos para a sua perturbação e contestação, as quais podem provocar mudanças nos princípios de integração social dos estudantes. Entretanto, tanto a perturbação quanto a contestação podem partir do professor ou dos estudantes, podendo subverter as regras de realização. Baseado nisso, entendemos que alguns dados dessa categoria, citados anteriormente, refletem uma tentativa de subverter as regras de realização e as imposições do enquadramento. Porém, analisamos que mesmo a contestação partindo do professor ou dos estudantes havia uma resistência à transformação do texto pedagógico do planejamento, notavelmente, por parte do professor.

Por fim, evidenciamos que as justificativas dadas pelo professor para convencer os estudantes a seguirem o caminho trilhado por eles nem sempre os convenciam, mas a posição instituída por cada sujeito naquele contexto comunicativo fazia os estudantes realizarem o quê os professores almejavam para a atividade.

Além disso, observamos outras particularidades no que tange ás diferentes naturezas do controle assumido pelos professores, embora se caracterizasse por um enquadramento forte. Bernstein (1990) sugere que as variações ou mudanças no enquadramento podem ter graus diferentes. Nessa direção, compreendemos que um mesmo enquadramento pode assumir também graus variados, por exemplo, um enquadramento fraco pode variar em termos do seu grau, ou seja, mais fraco, menos fraco, dentre outros. Nessa categoria, notamos que o enquadramento permaneceu forte em todos os recortes apresentados, entretanto, constatamos que a natureza desse enquadramento teve graus diferentes, a partir da forma como os professores intervieram nos grupos, ou seja, por meio das perguntas ou afirmações colocadas por eles, estando de acordo com a relação pedagógica estabelecida entre professores e estudantes.

A intervenção da professora Cau, por exemplo, tem natureza diferente da intervenção dos demais professores. Devemos tomar a mesma como diferente, pois a professora se preocupava em ouvir as argumentações dos estudantes, embora, por vezes apresentava um enquadramento forte. Já as intervenções dos professores Chico e Márcia são mais diretivas, pois foram marcadas por interrupções nas argumentações ou estratégia dos estudantes a fim de estabelecerem as regras e deixar explícitos os critérios que esperavam ser atingidos. Assim, o controle permaneceu por parte do professor, embora sua natureza fosse diferente.

7. Considerações finais

Do ponto de vista teórico, a transformação textual refere-se a uma característica crucial e inevitável quando o texto se torna ativo no contexto pedagógico, ou seja, quando os estudantes estão envolvidos no processo educativo. Entretanto, uma análise preliminar da literatura sugere que há momentos ou situações em sala de aula que professores foram adeptos “em partes” a transformações textuais ou não foram adeptos a transformação quando os estudantes participam do ambiente de modelagem (ARAÚJO; BARBOSA, 2005; ZBIEK; CONNER, 2006; OLIVEIRA, 2012; SANTANA; BARBOSA, 2012; SILVA; SANTANA, 2012). A análise dos dados apresentadas neste artigo colocou ênfase sobre a *resistência à transformação* do texto pedagógico do planejamento do ambiente de modelagem, ou seja, quando os professores não foram adeptos à transformação.

Além disso, notamos que essa resistência à transformação do texto pedagógico do planejamento foi condicionada pela *fidelidade* ao mesmo. Essa manifestação revela um aspecto novo que não foi localizado pela teoria de Basil Bernstein (1990), mas, neste artigo, essa fidelidade foi analisada a partir de alguns conceitos teóricos, como o enquadramento, o controle, as regras criteriais, as regras de realização e as regras de reconhecimento. Assim, concluímos este artigo fornecendo compreensões teóricas à comunidade de Educação Matemática, lançando novas contribuições as pesquisas que investigam a comunicação pedagógica no ambiente de modelagem matemática.

8. Referências

Alrø, H.; Skovsmose, O. (2006). *O diálogo e a aprendizagem em Educação Matemática.* Belo Horizonte: Autêntica. 158p. (Coleção Tendências em Educação Matemática).

Alves-Mazzotti, A. J. (2002). O método nas ciências sociais. In: ALVES-MAZZOTTI, A. J.; GEWANDSZNAJDER, F. (Orgs.). *O método nas ciências naturais e sociais: pesquisa quantitativa e qualitativa.* 2. ed. São Paulo: Pioneira. Cap. 6-7, p. 129-178.

Araújo, J. L.; Barbosa, J. C. (2005). Face a face com a modelagem matemática: como os alunos interpretam essa atividade? *Bolema: Boletim de Educação Matemática*, Rio Claro (SP), n.23, p. 79-95.

Barbosa, J. C. (2007). Teacher-student interactions in mathematical modeling. In: HAINES, C. ET AL. (Eds.). *Mathematical modeling: education, engineering and economics.* Chischeter: Horwood Publishing. p. 232-240.

Barbosa, J. C. (2009). Integrando Modelagem Matemática nas práticas pedagógicas. *Educação Matemática em Revista*, Sociedade Brasileira de Educação Matemática - SBEM, Ano 14, nº 26, p. 17-25. Março de 2009.

Bernstein, B. (1990). *Class, Codes and Control, volume IV: the structuring of pedagogic discourse.* London: Routledge. 235 p.

Calderhead, J. (1981). *Stimulated recall: a method for research on teaching.* Br. J. Edu. Psychol. 51 211–7.

Denley, P.; Bishop, K. (2010). The potential of using stimulated recall approaches to explore teacher thinking. In: Rodrigues, S. (Ed.). *Using Analytical Frameworks for Classroom Research: Collecting Data and Analysing Narrative.* Abingdon: Routledge, p. 109-124.

Ferruzi, E. C.; Almeida, L. M. W. (2012). Interações dialógicas em atividades de modelagem matemática. *REIEC: Revista electrónica de investigación en educación en ciencias.* (UNICEN), v. 7, nº 1, p. 1-17.

Jacobini, O. R. (2004). *A modelagem matemática como instrumento político na sala de aula.* 215f. Tese (Doutorado em Educação Matemática) – Instituto de Geociências e Ciências Exatas, Universidade Estadual Paulista, Rio Claro.

Johnson, B.; Christensen, L. (2012). *Educational research: quantitative, qualitative, and mixed approaches.* Thousand Oaks: Sage.

Maab, K. (2005). Barriers and opportunities for the integration of modeling in mathematics classes: results of an empirical study. In: BLOMHOJ, M.; BRANDELL, G.; NISS, M. (Eds.). *Teaching mathematics and applications: the 10th ICME*. Conpenhagen. p. 61-74.

Oliveira, A. M. P. (2010). *Modelagem matemática e as tensões nos discursos dos professores.* 199f. Tese (Doutorado em Ensino, Filosofia e História das Ciências) – Instituto de Física, Universidade Federal da Bahia e Universidade Estadual de Feira de Santana, Salvador.

Oliveira, M. L. C. (2012). A formulação das estratégias utilizadas pelos alunos no ambiente de modelagem matemática. *Acta Scientiae: Revista de Ensino de Ciências e Matemática,* Canoas (RS), v. 14, n.2, p. 295-308.

Rocha, R. (2003). *Minidicionário Ruth Rocha*. 2. ed. São Paulo: Scipione.

Santana, T. S.; Barbosa, J. C. (2012). A intervenção do professor em um ambiente de modelagem matemática e a regulação da produção discursiva dos alunos. *Bolema - Boletim de Educação Matemática,* Rio Claro (SP), v. 26, nº 43, p. 219-248.

Sant'Ana, A. A.; Sant'Ana, M. F. (2009). Uma experiência com a elaboração de perguntas em modelagem matemática. In: CONFERÊNCIA NACIONAL SOBRE MODELAGEM MATEMÁTICA NA EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 6., Londrina. *Anais...* Londrina: SBEM, p. 1-13. 1 CD-ROM.

Silva, L. A.; Oliveira, A. M. P. (2012a). As discussões entre formador e professores no planejamento do ambiente de modelagem matemática. *Bolema - Boletim de Educação Matemática,* Rio Claro (SP), v. 26, nº 43, p. 299-329.

Silva, L. A.; Oliveira, A. M. P. (2012b). A tensão da elaboração da situação-problema no planejamento do ambiente de modelagem matemática. In: SEMINÁRIO INTERNACIONAL DE PESQUISA EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 5., Petrópolis. *Anais...* Rio de Janeiro: SBEM. p. 1-21. 1 CD-ROM.

Silva, M. S.; Santana, T. S. (2012). Os “discursos de distanciamento” dos professores no ambiente de modelagem matemática. In: SEMINÁRIO INTERNACIONAL DE PESQUISA EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 5., Petrópolis. *Anais...* Rio de Janeiro: SBEM, p. 1-21. 1 CD-ROM.

Vasconcellos, C. S. (2010). *Planejamento: projeto de ensino-aprendizagem e projeto político pedagógico.* São Paulo: Libertad. 205 p.

Zbiek, R. M.; Conner, A. (2006). Beyond motivation: exploring mathematical modelling as a context for deepening students’ understandings of curricular mathematics. *Educational studies in mathematics.* New York, n.63, p. 89-112.

Lilian Aragão da Silva. Doutoranda do Programa de Pós-Graduação em Ensino, Filosofia e História das Ciências da Universidade Federal da Bahia (UFBA) e da Universidade Estadual de Feira de Santana (UEFS). Docente do Centro de Formação de Professores da Universidade Federal do Recôncavo da Bahia (UFRB), Campus de Amargosa, Bahia, Brasil. *E-mail:* lilianufrb@gmail.com

Andréia Maria Pereira de Oliveira. Doutora em Ensino, Filosofia e História das Ciências pela Universidade Federal da Bahia e Universidade Estadual de Feira de Santana (UFBA/UEFS). Docente do Departamento de Ciências Exatas da Universidade Estadual de Feira de Santana, do Programa de Pós-Graduação em Ensino, Filosofia e História das Ciências da Universidade Federal da Bahia (UFBA) e da Universidade Estadual de Feira de Santana (UEFS) e do Programa de Pós-Graduação em Educação da Universidade Estadual de Feira de Santana (UEFS). *E-mail:* ampodeinha@gmail.com

UNIÓN
REVISTA IBEROAMERICANA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA
www.fisem.org/web/union
http://asenmacformacion.com/ojs/index.php/union/index

ISSN: 1815-0640
Número 45. Marzo 2016
Página 117-131

Matemáticas aplicadas a la biología

Matías Ezequiel Hernández Rodríguez

Fecha de recepción: 26/09/2014
Fecha de aceptación: 11/02/2016

Resumen	En este artículo, después de una introducción histórica a la matemática, presentamos una breve introducción a la biomatemática. Destacamos las áreas donde la matemática contribuye con la biología, y a modo de ejemplo se presentan dos trabajos: Vacunación óptima para un modelo *SIRS* y Optimización de protocolos de quimioterapia. Por último damos la conclusión del trabajo. **Palabras clave**: Biomatemática, Cáncer, Optimización, Modelos *SIRS*.
Abstract	In this work, we present an historical introduction to the mathematics and next we present an short introduction to the biomathematics. We highlight the main areas which the mathematics works with the biology. By way of example, we explain two papers: Optimal vaccination in a *SIRS* model and Optimal cancer chemotherapy. Finally, conclusion of the paper is presented. **Keywords**: Biomathematics, Cancer, Optimization, *SIRS* models.
Resumo	Neste artigo, apresentamos uma introdução histórica à matemática, e uma breve introdução à biomatemática. Destacamos as áreas nas quais a matemática contribui com a biologia, e a título de exemplo e com finalidade pedagógica, trazemos dois trabalhos: Otimização de vacinação para um modelo *SIRS* e Otimização de protocolos de quimioterapia para o câncer. Por último, apresentamos a conclusão do artigo. **Palavras-chave:** Biomatemática, Cáncer, Optimização, Modelos *SIRS*.

1. Introducción

La historia de la Matemática es casi tan antigua como la del hombre. Existe evidencia de que ya en la prehistoria, motivado por necesidades prácticas tales como cuantificar el tiempo u objetos (como la cantidad de individuos de una manada), medir el tamaño de terrenos, la decoración con cerámica o un comercio muy trivial, nuestros primitivos antecesores hicieron uso de algún conocimiento muy rudimentario de matemática (Redondo, Martín y Pobes, 2010, pp. 167 – 195; Seidenberg, 1978, pp. 301 – 342; Tabak, 2010, pp. 1 – 18) Tal vez la prueba más célebre de la existencia de la matemática en la prehistoria sea el hueso de Ishango. Fue descubierto por Jean Heinzelin de Bracout en el año 1960 en la región de Ishango, ubicada entre Uganda y el Congo. Con una antigüedad de entre dieciocho mil y veinte mil años, este artefacto consiste de un hueso color marrón, que fue parte del peroné de un babuino, con una serie de muescas (ver Figura 1). Se cree que este artefacto además de contar permitía realizar algunas operaciones aritméticas (Buriticá, 2010, pp. 167-195; Huylebrouck, 2006, pp. 135-162).

Figura 1. Hueso de Ishango desde distintos ángulos.
Fuente: Ferrer, S. (2014).

La idea de número estuvo entonces siempre ligada al desarrollo de esta ciencia, y a pesar de que tantos siglos nos separan desde aquel entonces, fue en tiempos recientes que la idea de número quedó formalizada de la mano de matemáticos como, entre otros, Peano, Hilbert, Cantor y Frege (Rey Pastor, Pi Calleja, Trejo, 1960, pp. 1 – 152).

A medida que las sociedades se fueron haciendo más complejas, se enfrentaron a problemas más complicados, y esto motivó el desarrollo de métodos matemáticos también más complejos. Además, el comercio extendido entre regiones cada vez más distantes permitió la interacción de matemáticos de distintos lugares, y esto evidentemente también favoreció el desarrollo de la matemática.

Desde las primeras formas tan primigenias hasta lo que en la actualidad se entiende, o mejor dicho se acepta por Matemática han pasado más de setenta mil años. La historia de la Matemática es como vemos muy extensa, y como todos los quehaceres del hombre para nada lineal. Cada civilización ha dejado su impronta característica, y lo siguen haciendo en el desarrollo actual de la matemática a través de diferentes escuelas tales como, entre otras, la francesa, la americana, la inglesa y la alemana, (Huylebrouck, 2006, pp. 135 – 162).

Tanto la historia como la filosofía de la Matemática nos ayudan a comprender en parte su naturaleza así como estudiar cuestiones ontológicas y epistemológicas. En este plano existen diferentes posturas que van desde una visión platónica de la cuestión, inspirada por Kurt Gödel, hasta una visión completamente materialista de la misma. La mirada platónica de la Matemática, en pocas palabras, significa que los objetos de la Matemática tienen una realidad y una existencia por sí mismos, resultando que estos no se inventan sino que se descubren (Ferreirós, 1999, pp. 446 – 473); vale aclarar que muchos científicos tienen una mirada platónica de la ciencia en general y no sólo de la Matemática (Wilber, 2009). La posición materialista sostiene que las teorías de la Matemática, y por lo tanto la Matemática misma son producto de la mente humana (Bunge, 2014, pp. 7 – 8; Russell, 1983).

Es indiscutible el hecho de que muchas de las teorías matemáticas existentes surgieron por abstracción de problemas concretos de la realidad o de otras disciplinas como, entre otras, la Física, la Ingeniería y la Biología. Luego la teoría puede seguir dos senderos: (a) además de modelar con éxito los fenómenos de interés que la motivaron, continúa desarrollándose hasta llegar incluso a un conocimiento a priori de la realidad; entonces, en este mutuamente enriquecedor ida y vuelta entre las ciencias fácticas y la Matemática, muchos científicos han sentido rayano a lo divino el modo en que la Matemática se ajusta tan perfectamente con los fenómenos de la naturaleza. (b) El otro sendero es mucho menos fructífero desde el punto de vista aplicado y desvía a la teoría de sus fuentes empíricas convirtiéndola en un quehacer puramente teórico. John Von Neumann decía al respecto que:

> Cuando una teoría matemática se aleja de sus fuentes empíricas o, más todavía, si pertenece ya a una segunda o tercera generación inspirada sólo de manera indirecta en ideas procedentes de la "realidad", le asechan graves peligros. Irá convirtiéndose cada vez más en algo puramente esteticista, más y más. Esto no es algo necesariamente malo, siempre y cuando esa disciplina esté arropada por temas correlacionados que mantengan más estrechas conexiones empíricas, o esté bajo la influencia de hombres de gusto excepcionalmente bien formado. Ahora bien, entraña un grave riesgo que el tema se desarrolle siguiendo las líneas de menor resistencia, que la corriente, tan lejos ya de sus orígenes, se escinda en multitud de ramales intrascendentes, y que la disciplina acabe desembocando en un cúmulo informe de detalles y complejidades. En otras palabras, a gran distancia de sus fuentes empíricas, o tras excesiva endogamia "abstracta", un tema matemático corre peligro de degeneración (Simmons, 2000, pp. 1).

El debate sobre la naturaleza de la Matemática sigue abierto, más allá de la postura epistemológica que se adopte, a la hora de intentar responder a la pregunta ¿qué es la Matemática?, la siguiente frase de uno de los genios más grande que ha conocido el mundo, nuevamente John Von Neumann, parece ser la más acertada:

> En Matemática uno no entiende las cosas, se acostumbra a ellas.

Llegados a este punto, debemos indicar que no es la intensión de este artículo seguir adentrándose en la epistemología de la matemática sino más bien explorar un proceso que la misma está atravesando en la actualidad, y que en cierta forma nos revela parte de la naturaleza de susodicha ciencia. Este proceso consiste en una apertura por parte de las ciencias fácticas hacia la Matemática como nunca antes se había observado. La relación existente entre la Matemática y ciencias como la Física, la Astronomía y la Economía es algo bien conocido; pero en la actualidad la Matemática está penetrando de manera sorprendente en ciencias como la Biología, la Psicología, la Historia y la Sociología (Britton, 2002; Burt, 2011; Hernández, 2014; McElreath y Boyd, 2007; Momo y Capurro, 2006; Murray, 2001; Ozores, 2014).

El presente artículo se enfoca en la Biomatemática, que es una interdisciplina destinada a estudiar los fenómenos biológicos a partir de las teorías de la Matemática. El conocimiento de esta moderna ciencia, y en particular algunos de los problemas concretos que trata, como los presentados en este artículo, es de vital importancia para el estudiante de matemática pues le proporciona una imagen de la naturaleza de la ciencia que estudia así como su relación con las demás disciplinas y por ende su importancia en la sociedad.

El artículo ha sido organizado como se describe a continuación. En el capítulo 2 realizamos una breve introducción a la Biomatemática, luego ofrecemos dos ejemplos motivadores. Así, en el capítulo 3 presentamos el primer ejemplo: Vacunación óptima para una enfermedad contagiosa (Hernández, 2014, pp. 25 – 35). El capítulo 4 está destinado a presentar el segundo ejemplo: Optimización de protocolos de quimioterapia (Hernández, 2014, pp. 12 – 61). Finalmente en el capítulo 5 daremos la conclusión del artículo.

2. Matemáticas aplicadas a la Biología

Es un hecho innegable que en nuestros días la Matemática está atravesando un momento de gloria en el sentido de que además del desarrollo propio de las teorías abstractas de sus diferentes rama, está teniendo una participación crucial en otras disciplinas de las cuales se nutre y a las cuales, después de dotarlas de un marco teórico adecuado, las impulsa haciéndolas avanzar hacia lugares antes inimaginables.

La Biología es una de esas ciencias, y su vínculo con la Matemática ha tomado un impulso decisivo a principio del siglo XX con las ecuaciones de Lotka – Volterra para modelar la dinámica de un sistema de cazadores y presas, y esto se ha acentuado en las últimas décadas. Es menester aclarar que en siglos pasados ya han existido, aunque en forma más fugaz, encuentros entre la Matemática y la Biología tales como el modelo de Fibonacci, para el crecimiento de conejos; el modelo de Malthus, para el crecimiento de la población humana; el modelo de Verhulst y el modelo de Gompertz para el crecimiento poblacional. La fugacidad de estos encuentros no les quita importancia. Por ejemplo, de las investigaciones de Malthus se inspiró Darwin para desarrollar su teoría de la evolución, la cual es fundamental para la Biología moderna. El modelo de Verhulst ha podido explicar el crecimiento de algunos tipos de bacterias y paramecium (Álvarez, 2006, pp. 73 – 112). La ecuación de Gompertz, por su parte, ha logrado modelar con éxito el crecimiento de tumores (Hernández, 2014, pp. 1 – 8).

Algunas de las áreas de la Biología en las que los modelos matemáticos han contribuido notablemente son, entre otras, las siguientes: crecimiento tumoral (Barrea y Hernández, 2012; pp. 41 – 49; Barrea y Hernández, 2012, pp. 5789 – 5800; Barrea y Hernández, 2013, pp. 35 – 49; Hernández, 2014; Preziosi, 2003; Wodarz y Komarova, 2005), dinámica de poblaciones (Britton, 2002, pp. 1 – 79; Murray, 2001, pp. 1 – 115; Nowak, 2006), modelos para la determinación del sexo según la temperatura de los huevos (Murray, 2001, pp. 119 – 144), epidemología (Allen, 2003, pp. 56 – 153; Bürger, 2010, pp. 7 – 62; Hernández, 2014, pp. 25 – 35), biología celular y molecular (Britton, 2002), farmacodinámica y farmacocinética (Bonate y Howard, 2011; Källén, 2008), dinámica de HIV (Nowak, 2006, pp. 167 – 189) y ecología (Momo y Capurro, 2006).

Podríamos ahondar aún más más en la historia de la biomatemática, así como glosar con más detalle el proceso interdisciplinario que ambas ciencias están viviendo; sin embargo no hay mejor manera para describir este proceso que mediante ejemplos concretos. Para lo primero, se recomienda la lectura de los siguientes trabajos: Engel (1978) y Ozores (2014, pp. 29-38).

3. Vacunación óptima para un modelo *SIRS*

Continuamos ahora con un problema de control óptimo presentado en Hernández (2014, pp. 25-35). Allí se considera un modelo *SIRS*, el cual describe la dinámica de una enfermedad contagiosa sobre una población cuyos individuos pueden estar, respecto a la enfermedad, en uno y solamente uno de los siguientes estados: susceptible, *S*, infectado, *I*, y recuperado, *R*. Las personas susceptibles son aquellas que pueden llegar a enfermarse, las infectadas son las que se encuentran enfermas y las recuperadas son aquellas personas que se curan de la enfermedad. Algunos de estos últimos pueden volver a enfermarse, es decir a ser susceptibles. La retroalimentación de la enfermedad se puede simplificar de la siguiente manera $S \rightarrow I \rightarrow R \rightarrow S$, lo cual da lugar a la notación *SIRS*.

Para la dinámica de la enfermedad se tiene el modelo que figura en el sistema de ecuaciones siguiente:

$$\begin{cases} \dot{S}(t) = \mu\left(1 - \dfrac{S(t)}{K}\right) - \beta S(t)I(t) - (\delta + u(t))S(t)R(t) + vR(t) \\ \dot{I}(t) = \beta S(t)I(t) - (\delta + \varepsilon + \gamma)I(t) \\ \dot{R}(t) = \gamma I(t) - (\delta + v)R(t) + u(t)S(t). \end{cases} \tag{1}$$

En el modelo (1) $S(t)$, $I(t)$ y $R(t)$ denotan respectivamente el número de individuos susceptibles, infectados y recuperados en el tiempo t, y está acompañado por las condiciones iniciales $(S(0),I(0),R(0)) = (S_0,I_0,R_0)$, donde S_0, I_0, $R_0 > 0$, y además se supone que $0 \leq t \leq T$.

En el modelo anterior, los individuos susceptibles tienen una tasa de nacimiento, μ; pero no crecen indefinidamente sino con una capacidad de soporte, K. Debido a los encuentros entre susceptibles e infectados, algunos de primeros pasan a ser infectados, β representa la capacidad de infectar de la enfermedad, y el término $S(t)I(t)$ indica el número de encuentros entre susceptibles e infectados en el tiempo t. Existe además una tasa natural de muerte, δ, y una proporción de susceptibles vacunados en el tiempo t, $u(t)$, que pasan a ser recuperados.

En cuanto a los infectados la tasa de crecimiento se ve afectada positivamente por los individuos susceptibles que pasan a ser infectados, poseen una tasa de muerte natural, δ, una tasa de muerte por la enfermedad, ε, y una cierta proporción, γ, pasa de ser infectado a recuperado.

Finalmente, la población de recuperados posee como fuentes de crecimiento la proporción de infectados que pasan a ser recuperados y la proporción de susceptibles que son vacunados, y por ende pasan a ser recuperados. Tiene la misma mortalidad que los susceptibles y los infectados; pero suponemos que una proporción, *v*, de recuperados pueden volver a ser susceptibles.

Ahora bien, en un principio se podría pensar en vacunar toda la población de susceptibles con el fin de minimizar el número de individuos infectados, es decir considerar $u(t) = 1$, en el período *[0,T]*. Sin embargo, lamentablemente vacunar tiene un precio económico. Esto da lugar al problema de encontrar una función, *u*, definida y acotada en *[0,T]* tal que minimize los siguientes objetivos: (a) el número medio de individuos susceptible, (b) el número medio de individuos infectados, (c) la cantidad media de personas vacunadas y (d) el negativo de la cantidad media de individuos recuperados (o sea que maximice la cantidad media de recuperados). En lenguaje matemático esto se expresa de la siguiente manera:

$$\min_{u \in U_{ad}} J(u), \qquad (2)$$

donde

$$J(u) = \int_{[0,T]} (w_1 S(t) + w_2 I(t) - w_3 R(t) + \tfrac{1}{2} w_4 u^2(t))dt,$$
$$U_{ad} = \{u : [0,T] \rightarrow [0,1] \mid u \text{ es medible}\}.$$

Minimizar *J(u)*, significa encontrar una manera de vacunar a la población, expresada por la función *u(t)* definida en el intervalo de tiempo *[0,T]* de modo tal que se reduscan al mínimo el número de personas susceptibles e infectadas y la proporción de personas vacunadas, lo cual viene dado por $\int_{[0,T]} (w_1 S(t) + w_2 I(t) + 0.5 w_4 u^2(t))dt$. Por otra parte minimizar la cantidad $\int_{[0,T]} -w_3 R(t)dt$, es equivalente a maximizar $\int_{[0,T]} w_3 R(t)dt$, es decir la cantidad de personas recuperadas. Las constantes w_1, w_2, w_3 y w_4 en cierta forma representan el peso que se le da a cada objetivo. Además w_4 habrá de ser un número lo suficientemente grande como para que los integrandos de *J(u)* sean todos del mismo orden de magnitud.

Un problema como el (2), se denomina problema de control óptimo ya que a la función *u*, con la cual en cierta manera controlamos el sistema, se la denomina control. Se busca un control, *u**, que sea óptimo en el sentido de que resuelva (2).

Existen dos maneras de resolver el problema (2): (a) una consiste en discretizar el problema y luego optimizar, que fue el seguido por nosotros luego de haber probado unicidad y existencia de (1) y (2) (Hernández, 2014, pp. 25-35); (b) optimizar y luego discretizar (Hinze, Pinnau y Ulbrich, 2009).

3.1 Resultados numéricos del trabajo

En el artículo Hernández (2014, pp. 25-35) se discretizó el problema, para eso se discretizó el intervalo *[0,T]*, y luego *S*, *I*, *R*, *u*, y *J(u)*. El problema (2) se transforma en lo que se conoce como un problema de optimización finito dimensional que puede ser resuelto utilizando la función fmincon de *MATLAB R2009a*. Allí se considera las siguientes condiciones iniciales: *S*(0) = *1000, I*(0) = *110, R*(0) = 61.

K	***M***	***β***	***Δ***	***N***	***E***
8.000	150	0.0023	0.21	0.1	0.4
Γ	***T***	w_1	w_2	w_3	w_4
0.08	70	10	100	10	10^5

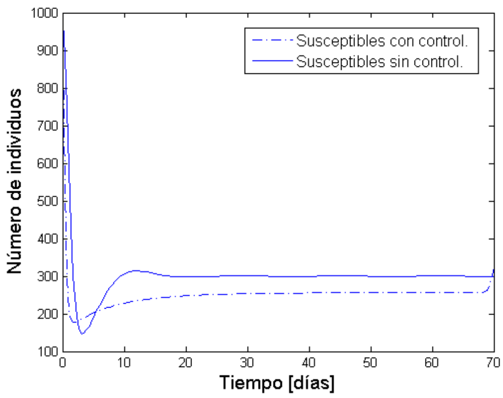
Tabla 1. Parámetros del modelo.

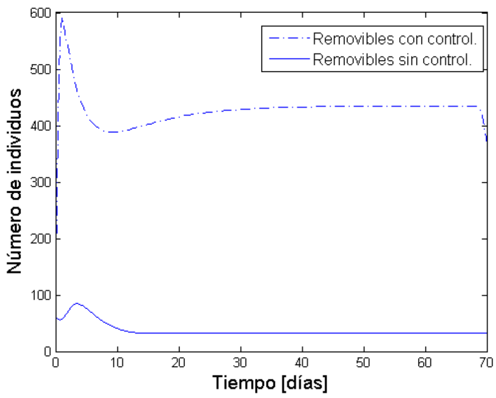
La figura 2 muestra el control óptimo, *u**, la dinámica de la enfermedad sin control, es decir sin vacunar y cuando se vacuna siguiendo *u**.

Como se puede observar en la Figura 2, cuando no se vacuna la población (línea continua), la enfermedad alcanza un estado de equilibrio. En dicho equilibrio la población de infectados se estabiliza cerca de los 125 individuos, la población de susceptibles hace lo propio cerca de los 300 individuos, y la población de recuperados será cercana a los 30 individuos.

Por el contrario, cuando se vacuna siguiendo el control óptimo, la población se estabiliza alrededor de valores bien distintos (línea discontinua). Los susceptibles lo hacen cerca de los 250 individuos, los recuperados superan los 400 individuos, y lo más importante es que la población de infectados desaparece.

Si se observa el control óptimo, este sugiere que inicialmente deben ser vacunados todos los individuos susceptibles; pero cuando la enfermedad evoluciona rápidamente la proporción de individuos a ser vacunados debe ser cercana a 0.55. Esto se mantiene así prácticamente hasta el día 66, donde la proporción desciende abruptamente hasta llegar a cero en el día 70. Se puede observar como a partir de un control que dista de la función constante *u* = *1*, la enfermedad también se puede erradicar, y esto evidentemente a un menor costo.





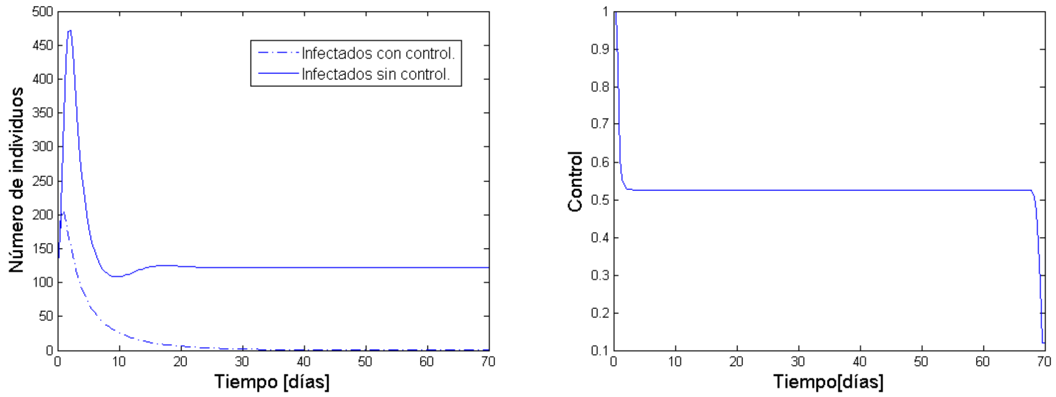


Figura 2. Dinámica de la enfermedad sin control (línea continua) y con el control óptimo. Fuente: Hernández, M. (2014, pp. 25-35).

Por medio de este ejemplo vemos como la matemática puede contribuir a la biología desde diferentes aspectos. El sistema de ecuaciones diferenciales (1) ha probado ser muy efectivo para modelar la propagación de una enfermedad contagiosa, por otro lado la teoría de control óptimo establece la forma de vacunar la población si se desea minimizar los objetivos mencionados anteriormente.

4 Optimización de protocolos de quimioterapia

El último ejemplo que deseamos compartir se refiere a la optimización de protocolos de quimioterapia (Hernández, 2014, pp. 12 – 61). La quimioterapia es una de las técnicas más utilizadas en la lucha contra el cáncer, generalmente los protocolos utilizados, que consisten en la administración de un cóctel de drogas en ciertos instantes de tiempo, están destinados a erradicar la enfermedad, o lo que es lo mismo a eliminar la mayor cantidad de células cancerosas posibles. Esta forma de proceder resulta contraproducente desde varios ángulos, por ejemplo las drogas utilizadas también eliminan células sanas y esto tiene graves efectos secundarios sobre el paciente. Por otro lado, los protocolos destinados a erradicar la enfermedad lo que en realidad eliminan son las células sensibles a la quimioterapia; pero resulta que existe un pequeño grupo de células que son resistentes, y después del tratamiento queda un tumor constituido principalmente por células resistentes. Ese tumor resistente podrá crecer sin que la terapia le haga efecto, el resultado de esto es la muerte del paciente. En la Figura 3 observamos la dinámica de un tumor heterogéneo sometido a una terapia destinada a erradicarlo. El tumor está constituido por células sensibles (verdes) y resistentes (rojas). Inicialmente la mayor parte del tumor está constituida de células sensibles, la terapia tiene efectos sobre estas células y aunque en principio el tumor disminuye después de un tiempo comienza a crecer. Finalmente queda un tumor constituido principalmente por células resistentes.

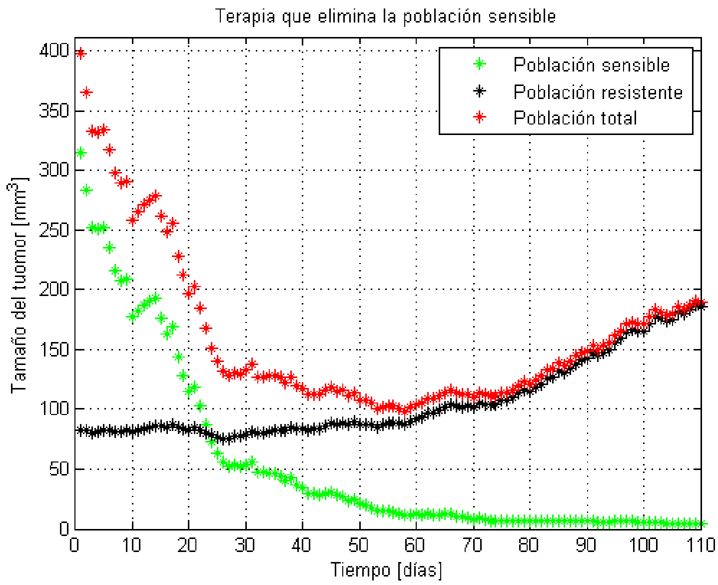


Figura 3. Dinámica de un tumor cuando se aplica una terapia destinada a erradicarlo. Fuente: Hernández, M. (2014).

Se acaba de comentar, son interesantes aquellos protocolos que contemplan no sólo erradicar la enfermedad sino también minimizar la cantidad de drogas utilizadas. Es aquí donde entra en juego la matemática. Lo primero de lo que se debe disponer es de un modelo que describa la dinámica del tumor sometido a terapia. El modelo de Gompertz modela muy bien el crecimiento de tumores (Hernández, 2014, pp. 14) suponiendo un cóctel de *d* drogas que se suministran en los instantes de tiempo $t_1,\dots,t_n$, el modelo adopta la siguiente forma:

$$\begin{cases} \dot{N}(t) = N(t)\left\{\lambda ln\left(\dfrac{N_\infty}{N(t)}\right) - \alpha(C,t)\right\} \\ N(0) = N_0, \end{cases} \tag{2}$$

donde λ es la tasa de crecimiento del tumor, N_∞ la capacidad de soporte más allá de la cual el tumor no podrá crecer, y C es una matriz en la cual el elemento C_{ij} representa la concentración de la droga j suministrada en el tiempo t_i, concentración que se mide en mg/kg. Además α está definida como sigue:

$$\alpha(C,t) = \sum_{j=1}^{d}\sum_{i=1}^{n}\kappa_j C_{ij} e^{-\mu_j \Delta_i t},$$

donde κ_j representa la efectividad de la droga j, c es tal que $t_c \le t \le t_{c+1}$ o $c = n$ si $t > t_n$, μ_j representa el decaimiento en el cuerpo de la concentración C_{ij}, y $\Delta_i t = t - t_i$.

Sobre los posibles protocolos, *C*, se imponen ciertas restricciones que no vamos a describir en detalle para no complicar en demasía lo que queremos explicar; pero si podemos decir que están relacionadas con la cantidad máxima permitida de cada droga en cada instante de tiempo, la cantidad máxima acumulada de cada droga a lo largo de la terapia y el tamaño máximo permitido del tumor. De todos los protocolos que satisfacen esas restricciones, se busca aquel, C^*, junto con un vector de tiempos t^* (cuyas componentes son los instantes de tiempo en los cuales se suministran drogas) que minimicen el funcional $J(C) = w_1 f_1(C) + w_2 f_2(C)$, donde:

$$f_1(C) = \int_0^T N(t)dt,$$

$$f_2(C) = \sum_{j=1}^{d}\sum_{i=1}^{n} C_{ij}.$$

El objetivo f_1 representa el tamaño promedio del tumor a lo largo de la terapia, existen motivos biológicos por el cual elegirlo (Hernández, 2014, pp. 16), y el segundo objetivo, f_2, representa la cantidad total de drogas utilizadas durante la terapia. Entonces, C^* es un protocolo que minimiza el tamaño medio del tumor y la cantidad de drogas utilizadas durante la terapia, cuando se aplica en los instantes de tiempo descritos pos las coordenadas de t^*.

Las constantes w_1 y w_2 representan el peso que se le da a cada objetivo, son números entre 0 y 1, y verifican la siguiente igualdad

$$w_1 + w_2 = 1.$$

4.1 Resultados numéricos del trabajo

El cáncer de vejiga es una de las principales neoplasias en el aparato urinario, para el mismo existe el siguiente protocolo quimioterapia estándar, C_0 :

	Methotrexate	*Vinblastine*	*Doxorubibin*	*Cisplatin*
***t* = 0**	30	0	0	0
***t* = 1**	0	3	30	70
***T* = 14**	30	3	0	0
***T* = 21**	30	3	0	0

Tabla 2. Protocolo estándar C_0

En la tabla anterior el tiempo se mide en días, al primer día en que se suministra drogas se lo considera el día cero.

Puede probarse que este protocolo corresponde a minimizar el funcional $J(C)$ cuando $w_2 = 0$ (Hernández, 2014, pp. 29 – 31, 55), o sea que el protocolo estándar está destinado a erradicar el tumor. La idea es encontrar un par (C^*, t^*) que nos diga cuanta droga suministrar y en qué momento hacerlo con el objetivo de minimizar los objetivos definidos anteriormente. Sobre el vector t^* se supone que su componente inicial es 0, pues es el momento en que comienza a realizarse la terapia, y que, por razones biológicas, su componente final también está fija, y vale T = 28. Esto último significa que se considera la dinámica de la enfermedad durante los 21 días de terapia más una semana de descanso. El papel de las constantes w_1 y w_2 es muy importante, pues permite ponderar con diferentes pesos los objetivos antes definidos De este modo los protocolos óptimos que encontremos tendrán en cuenta la situación del paciente. Por ejemplo ante un paciente muy sensible a las drogas podría utilizar un protocolo que provenga de ponderar el objetivo f_1 por sobre el objetivo f_2, y viceversa.

El siguiente protocolo, C_1, se obtiene cuando $w_1 = 0.7$ y $w_2 = 0.3$. Es un protocolo que pondera erradicar el tumor por sobre minimizar la cantidad de drogas utilizadas, y puede ser útil ante un paciente que tolere el tratamiento.

	Methotrexate	*Vinblastine*	*Doxorubibin*	*Cisplatin*
***t* = 0**	*3.45*	*4.95*	*6.46*	*33.70*
***T* = 4.31**	*0.76*	*1.09*	*1.43*	*7.25*
***T* = 6.58**	*0.71*	*1.02*	*1.34*	*6.91*
***T* = 8.90**	*0.66*	*0.97*	*1.27*	*6.61*

Tabla 3. Protocolo C_1

El protocolo, C_2, que figura a continuación proviene de darle igual importancia a ambos objetivos, es decir cuando $w_1 = w_2 = 0.5$.

	Methotrexate	*Vinblastine*	*Doxorubibin*	*Cisplatin*
***t* = 0**	4.49	6.14	7.86	38.33
***T* = 5.45**	1.13	1.52	1.93	8.84
***T* = 7.91**	1.10	1.43	1.82	8.41
***T* = 11.01**	1.02	1.37	1.75	8.05

Tabla 4. Protocolo C_2

Por último se presenta el protocolo, C_3, obtenido cuando $w_1 = 0.3$, $w_2 = 0.7$. Este protocolo podría ser útil para un paciente que sea muy sensible a las drogas.

	Methotrexate	*Vinblastine*	*Doxorubibin*	*Cisplatin*
***t* = 0**	*5.39*	*7.28*	*9.28*	*44.09*
***T* = 6.97**	*1.47*	*1,91*	*2.42*	*10.86*
***T* = 9.68**	*1.34*	*1.80*	*2.28*	*10.30*
***T* = 12.53**	*1.28*	*1.72*	*2.18*	*9.81*

Tabla 5. Protocolo C_3

Cuando se hace variar w_1 desde 0 hasta 1, con lo cual w_2 varía desde 1 hasta 0, y se va resolviendo el problema de optimización, entonces se obtiene lo que se conoce como frente de Pareto. El frente de Pareto contiene todos los posibles protocolos óptimos. Este se observa en la curva que se muestra en la Figura 4, junto con los protocolos óptimos C_1, C_2 y C_3.

Como se acaba de indicar para calcular numéricamente el frente de Pareto, se hace variar w_1 desde 0 a hasta 1, el paso considerado fue de $h = 1 / 300$.

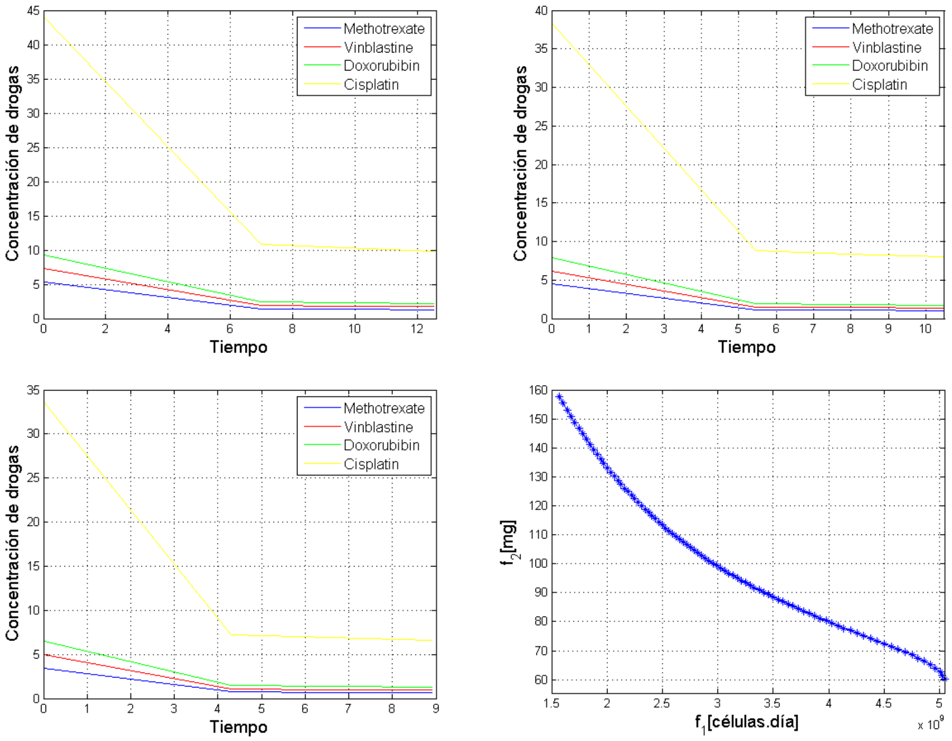


Figura 4. De izquierda a derecha, y de arriba hacia abajo, *C_1*, *C_2*, *C_3* y el frente de Pareto. Fuente: Hernández, M. (2014).

De manera muy particular, este ejemplo ilustra otra aplicación de la matemática a la biología, en este caso más bien a la medicina. Por ejemplo los protocoles obtenidos indican que las drogas deben suministrarse en dosis de mayor a menor, esto es acorde con la experiencia clínica. Además nos dicen cuanta droga exacta suministrar y cuando hacerlo con el fin de minimizar los objetivos que hemos definido anteriormente.

5. Conclusiones

Desde antes del siglo XX han existido encuentros más bien efímeros entre la matemática y la biología tales como el modelo de Fibonacci, para el crecimiento de una población de conejos y los modelos de Malthus, Verhulst y Gompertz para el crecimiento de la población humana. La fugacidad de estos encuentros no les resta importancia en absoluto. Por ejemplo las teorías de Malthus inspiraron a Darwin a formular su teoría de la evolución, el modelo de Verhulst permite explicar el crecimiento de ciertas bacterias y paramecium, y la ecuación de Gompertz describe con exactitud el crecimiento de los tumores.

Desde comienzo del siglo XX, con la aparición de las ecuaciones de Lotka-Volterra, hasta la actualidad, la matemática ha penetrado en ciencias tan diversas como, entre otras, la sociología, la epidemiología, la biología, la psicología y la historia.

En este artículo no hemos entrado en el aspecto fenomenológico ni epistemológico de la biomatemática, sino que después de una breve introducción a la misma presentamos dos ejemplos concretos con el objeto de ilustrar de qué manera la matemática, mediante sus diversas teorías, colabora con la biología.

El primer ejemplo versa sobre como vacunar de manera óptima una población sobre la cual se propaga una enfermedad contagiosa descripta por un modelo *SIRS*. Como pudimos observar es posible erradicar la enfermedad en 70 días sobre los cuales la mayor parte del tiempo solo se necesita vacunar aproximadamente la mitad de los individuos susceptibles.

El segundo ejemplo presentado tiene que ver con la optimización de protocolos de quimioterapia. Los resultados numéricos para un cáncer de vejiga nos brindan protocolos que no sólo están destinados a erradicar la enfermedad sino también a minimizar la cantidad de drogas utilizadas. De esta manera se puede atender las necesidades del paciente dependiendo de su resistencia a las drogas utilizadas. Otra cuestión interesante que los resultados numéricos proporcionan es que las drogas se administran en dosis que van de mayor a menor, y esto coincide con los estudios clínicos.

Bibliografía

Allen, L. (2003)*. An introduction to Stochastic Processes with applications to biology.* Pearson, New Jersey. USA.

Barrea, A., y Hernández, M. (2012*). Fuzzy multiobjective optimization for chemotherapy schedules. Mathematics Applied in Science and Technology,* (4), 1, 41-49.

Barrea, A. y Hernández, M. (2012)*. Pareto front for chemotherapy schedules. Applied Mathematical Sciences,*(6), 116, 5789-5800.

Barrea, A. y Hernández, M. (2013)*. La teoría de control aplicada a la quimioterapia contra el cáncer. Simposio Argentino de Investigación Operativa,* 35-49.

Bonate, P. y Howard, R. (2011)*. Pharmacokinetics in drug development: advance and applications.* Springer, New York. USA.

Britton, N. (2002)*. Essential Mathematical Biology.* Springer, New York. USA.

Bunge, M. (2014)*. La ciencia, su método y su filosofía.* Penguin Random House Grupo Editorial, Bs. As. Argentina.

Bürger, R. (2010)*. Introducción al modelamiento en biomatemática.* Universidad de Concepción, Concepción. Chile.

Buriticá, O. (2010)*. Determinación simple de un número primo aplicando programación funcional a través de DRSCHEME. Scientia et Technica,* 2(45), 155-160.

Burt, G. (2011)*. Conflict, complexity and mathematical social sciences.* Emerald Group Publishing Limited, London. United Kingdom.

Engel, A. (1978)*. Elementos de biomatemática.* Universidad Estadual de Campinas, Campinas. Brasil.

Ferreirós, J. (1999)*. Matemática y platonismo. Gaceta de la Real Matemática Española,* 2, 446-473.

Ferrer, S. (2014). Un viaje en el tiempo en busca de la primera calculadora científica. Sección: Matemáticas, Física y Química. *SINC. La ciencia es noticia* [en línea]. Recuperado el 21 de septiembre de 2014, de http://www.agenciasinc.es/Reportajes/Un-viaje-en-el-tiempo-en-busca-de-la-primera-calculadora-de-la-humanidad.

Hinze, M, Pinnau, R. y Ulbrich, M. (2009). *Optimization with PDE constraints.* Springer, New York. USA.

Hernández, M. (2014). *Optimización y sustentabilidad de protocolos de quimioterapia.* Universidad Nacional de Córdoba, Córdoba. Argentina.

Hernández, M. (2014). *Vacunación óptima de un modelo SIRS. Revista de Educación Matemática Argentina*, (29) 2, 25-35.

Huylebrouck, D. (2006). *Mathematics in (central) Africa before colonization. Anthropologica et praehistorica*, 117, 135-162.

Källén, A. (2014). *Computacional pharmacokinetics.* Chapman & Hall/CRC, New York. USA.

McElreath, R., Boyd, R. y Trejo, C. (2007). *Mathematical models of social evolution: a guide for the perplexed.* The University of Chicago Press, Chicago. USA.

Momo, F. y Capurro, A. (2006). *Ecología matemática: principios y aplicaciones.* Ediciones Cooperativas, Bs. As. Argentina.

Murray, J. (2001). *Mathematical Biology: an introduction.* Springer, New York. USA.

Nowak, M. (2006). *Evolutionary dynamics: exploring the equations of life.* Harvard University Press, Cambridge. USA.

Ozores, A. (2014). *Un vistazo a la Biomatemática. Revista de Didáctica de la matemática Números,* 86, 29-38.

Presiozi, L. (2003). *Cancer modelling and simulation.* Chapman & Hall/CRC, Florida. USA.

Redondo, F., Martín, M. y Pobes, E. (2010). *Prehistoria de la matemática y la mente moderna: Pensamiento matemático y recursividad en el Paleolítico franco-cantábrico. Dynamis*, 30, 167-195.

Rey Pastor, J., Pi Calleja, P. y Trejo, C. (1960). *Análisis Matemático I.* Kapeluz, Bs. As. Argentina.

Russell, B. (1983). *El conocimiento humano.* Orbis S.A., Bs. As. Argentina.

Seidenberg, A. (1978). *The origin of mathematics. Archive for History of Exact Sciences,* 18(4), 301-342.

Simmons, G. (2000). *Ecuaciones diferenciales. Con aplicaciones y notas históricas*. McGraw-Hill, Madrid. España.

Tabak, J. (2010). *Mathematics and the laws of nature: developing the languaje of science*. Facts on File, New York. USA.

Wilber, K. (2009). *Cuestiones cuánticas: escritos místicos de los físicos más famosos del mundo*. Kairós S.A., Barcelona. España.

Wodarz, D. y Komarova, L. (2005). *Computational biology of cancer: lecture notes and mathematical modeling.* World Scientific Publishing, London. United Kingdom.

Autores:

Matías Ezequiel Hernández Rodríguez: Doctor en Matemática por la Universidad Nacional de Córdoba, Argentina. Investiga problemas relacionados a la optimización de quimioterapia contra el cáncer y es catedrático en la Facultad de Ciencias Físico Matemáticas y Naturales de la Universidad Nacional de San Luis, Argentina.
mehernandez@unsl.com.ar

UNIÓN
REVISTA IBEROAMERICANA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA
www.fisem.org/web/union
http://asenmacformacion.com/ojs/index.php/union/index

ISSN: 1815-0640
Número 45. Marzo 2016
Página 132-151

O que podem as oficinas de Geometria? Cartografia de uma sala de aula da Educação de Jovens e Adultos

Paola Judith Amaris Ruidiaz

Fecha de recepción: 12/04/2014
Fecha de aceptación: 03/03/2016

Resumen	Este artículo gira en torno a: *¿Cómo los talleres de Geometría pueden accionar otros modos de estar en la relación educador-educando en una sala de clases de la EJA?* – la EJA es un tipo de educación supletoria a la educación formal, en Brasil. Se practica la cartografía, relacionada a la producción de subjetividad humana, como movimiento metodológico. Así, se cartografía el proceso educador/educando y las posibilidades de la relación dialógica entre ellos. Fueron diseñados y realizados talleres de Geometría, como dispositivo disparador y de intervención durante un semestre de clases. Se analizó la relación dialógica **–** estudios de Paulo Freire – relaciones de poder y dispositivo como propuestas de Michel Foucault y Gilles Deleuze. **Palabras clave**: producción de subjetividad; relaciones de poder; enseñanza geometría; dispositivo.
Abstract	This article is around the following question: What the Geometry workshops can rigger other ways of being in the relationship between educator-student in a classroom of EJA? – EJA is a type of supplementary education to regular education, in Brazil. Mapping practice in relation with human subjectivity as methodological movement. This study is mapping the processes educator/student and the possibilities of dialogue between them. We designed Geometry workshops as a driver and intervention device in the classroom. We analyzed the dialogic relationship, as contextualized in Paulo Freire studies and power relationships as proposed by Michel Foucault and Gilles Deleuze. **Keywords:** production of subjectivity; power relations; geometry education; device.
Resumo	Este artigo gira em torno da seguinte pergunta: *Como as oficinas de Geometria podem disparar outros modos estar na relação educador-educando numa sala de aula da EJA?* – EJA é um tipo de educação supletiva à educação formal, no Brasil. Praticamos a Cartografia como movimento metodológico–relacionada à subjetividade humana. Cartografaram-se o processo educador/educando e as possibilidades da relação dialógica entre estes. Desenharam-se e realizaram-se oficinas de Geometria, olhando-as como um dispositivo acionador e de intervenção dentro da sala de aula. Analisaram-se a relação dialógica –estudos de Paulo Freire –, as relações de poder e de dispositivo propostas por Michel Foucault e Gilles Deleuze. **Palavras-chave**:produção de subjetividade; relações de poder; ensino da geometria; dispositivo.

1. Introducción

Este texto, não pode ser visto como um resultado ou uma conclusão de um processo, pois faz parte das marcas[1] feitas no caminho da pesquisa. Agora é parte de um acúmulo como pesquisadora. Que por aquelas marcas teve que se movimentar para produzir este artigo, em que se mostra a cartografia como uma possibilidade metodológica e, sobretudo, como uma produção de subjetividades quanto dos estudantes participantes desse processo, como da pesquisadora.

Ao longo deste artigo, conceitos foucaultianos e deleuzianos como Dispositivos, Relações de Poder, Cartografia, Subjetividade irão se mostrando como base central da discussão teórica[2]. Paulo Freire (1977,1978) é fundamental nesse trabalho, pois sua proposta de relação educador-educando atravessou toda a pesquisa. Dispositivos outros podem aparecer, causar marcas e podem se tornar parte central da subjetivação produzida por esse texto. Pois a abordagem atravessa suas conexões, pelos seus agenciamentos, pelas suas fissuras, pelo meio. Onde tudo pode acontecer.

No percurso desse texto a escola é atravessada por uma frase de Nietzsche: “familiar é o habitual; e o habitual é o mais difícil de `conhecer´, isto é, de ver como problema, como alheio, distante, `fora de nós´” (2001, p.251). Sendo assim, esta pesquisa foi feita numa Escola Estadual com estudantes pertencentes à Educação de Jovens e Adultos (EJA) da oitava série do Ensino Fundamental (no grupo pesquisado as idades oscilavam entre 17 a 65 anos), num município do Estado de São Paulo – Brasil, chamado Rio Claro.

Assim, diferentes caminhos foram atravessados, diferentes visões foram confrontadas. As multiplicidades e singularidades, produção de subjetividades e demais agenciamentos provocados no processo investigativo estão presentes neste texto e é parte da construção deste artigo e da necessidade de construí-lo. Um devir[3] artigo. Dessa maneira, diversas linhas vão se tecer, sendo a primeira linha a construção narrativa teórica do dispositivo e dos seus agenciamentos. Isto é parte fundamental na compreensão do processo cartográfico, pois “desemaranhar as linhas de um dispositivo é, em cada caso, traçar um mapa, percorrer terras desconhecidas, é o que Foucault chama de trabalho em terreno” (Deleuze, 1990, p. 155). Caminhando pelo dispositivo escola, dispositivo EJA, dispositivo aula de matemática, desdobrando-nos num *caminho através* que faz parte da fissura da investigação, pois abordaremos nosso movimento metodológico junto com a pesquisa de intervenção feita por meio do dispositivo oficina. Ao fim, a Arca russa, a cartografia de alguns “personagens rítmicos” que fizeram parte do território habitado. Nesse caso, serão apresentados dois personagens dos seis feitos no

[1] No entanto, na medida em que fui mergulhando na memória para buscar os fatos e reconstituir sua cronologia, me vi adentrando numa outra espécie de memória, uma memória do invisível feita não de fatos mas de algo que acabei chamando de "marcas (...)”. (Rolnik, 1993).

[2] Teoria é aqui entendida junto a Michel Foucault e Gilles Deleuze quando afirmam que: “as relações teoria-prática são muito mais parciais e fragmentárias. Por um lado a teoria é sempre local, relativa a um pequeno domínio e pode se aplicar a um outro domínio, mais ou menos afastado (...) por outro lado, desde que uma teoria penetre em seu próprio domínio encontra obstáculos que tornam necessário que seja revezada por outro tipo de discurso (é este outro tipo [de discurso] que permite eventualmente passar a um domínio diferente (...) É por isso que a teoria não expressará, não traduzira, não aplicará uma prática: ela é uma prática. Mas local e regional (...) não totalizadora”. (Foucault, 1979, pp.69-71)

[3] Devir é jamais imitar, nem fazer como, nem justar-se a um modelo, seja ele de justiça ou de verdade. Não há um termo de onde se parte, nem um ao qual se chega ou se deve chegar. Tampouco dois termos que se trocam. A questão “o que você está se tornando” é particularmente estúpida. Pois à medida que alguém se torna, o que ele se torna muda quanto ele próprio [...]. (Deleuze & Parnet, 1998, p.10)

trabalho de mestrado já concluído, tentando assim desemaranhar suas linhas e cartografias dos dispositivos.

2. Justificativa e o problema da pesquisa

"A angústia produz conhecimento, produz pesquisa". O pensamento se problematiza no momento que ele é violentado; Deleuze acrescenta: "pensar é experimentar, problematizar. O saber, o poder e o si são a tripla raiz de uma problematização do pensamento" (2005, p.124). O ensinar a matemática, muitas vezes pode cair num revés. Mais ainda quando se pensa na relação educador-educando. E na sua ausência dialógica, pois a maioria das vezes essa comunicação cai num só sentido, essa comunicação se baseia muitas vezes em: Faça os exercícios! Qual foi o resultado? Entenderam? Sim ou não, etc. Não é essa uma comunicação. Esquece-se de argumentar, falar matematicamente, duvidar, gerar perguntas, construir conjuntamente o conhecimento. Dessa maneira, sentimos motivados para realizar estudos e contribuições à educação matemática, na área de ensino da geometria, tendo como eixo primordial a relação dialógica educador-educando, para que se chegue a acionar outros modos de estar dentro da relação possibilitando assim estratégias didáticas cuja finalidade é a de criar processos argumentativos e reflexivos entre eles.

Sabemos da importância da relação dialógica educador-educando planteada por Paulo Freire ─ e Michel Foucault ─ nas implicações pedagógicas do diagrama poder-saber ─ que ajudaram nas análises e fez com que suas linhas se apresentem nas relações de poder que impedem um ambiente dialógico na sala de aula. Assim, entendendo com Foucault a existência de vários dispositivos ─ a escola, em particular e em geral, a EJA, os programas oficiais e todos os ditos e não ditos que percorrem a educação e entre eles as oficinas de geometria como um dispositivo acionador, dentro da sala de aula. Centrou-se nosso trabalho em terreno com a seguinte questão: *Como as oficinas podem disparar outros modos estar na relação educador-educando? Esta pergunta implica responder: É possível, através da relação dialógica e da argumentação, criar um ambiente outro em que micro revoluções possibilite alterar, ao menos localmente, as relações de poder que travam mudanças?* Praticou-se a cartografia como pesquisa de intervenção, um trabalho em terreno para desemaranhar esses ditos e não ditos:

> Amparados em Deleuze (2005), Foucault (2009)[4] e Rolnik (1989), em consonância com o pensamento da Filosofia da Diferença, nos apropriamos do método da *cartografia* na realização da produção de dados. Ressaltando que a semântica da palavra cartografia, aqui, se refere à cartografia da subjetividade humana. (Tuchapesk, 2015, p.1310)

Uma possibilidade metodológica para visibilizar os modos de estar dessas relações. Fazer mapas que permita compreender as produções de subjetividades, um convite aos encontros que foram produzidos nesse processo cartográfico. Portanto, esse artigo procura abrir novos territórios. "Um território. Uma área. Um movimento... Vidas" (Clareto & Miarka, 2015, p.806). Abrir espaços para que a vida seja movimentada, para que seja pensada e aberta aos encontros, esse é um sentido, mas não é um fim da cartografia. Aqui se pretende incomodar, questionar,

---

[4] Foucault 2009, refere-se nesse artigo na Edição de Vigiar e Punir do ano 1999.

pois existe a vida que afirma nosso território, nossos personagens rítmicos. "Vidas que movimentam e se movimentam. Talvez perguntar pela efetividade da área seja perguntar pelo movimento de produção de vida. Que tipo de vida uma educação matemática afirma?" (Clareto & Miarka, 2015, p.806).

3. Narrativas Teóricas

Primeiro, entende-se a Escola[5] como um território existencial[6], um território em que se movimenta a vida, produz-se subjetividades e um espaço em que se geram afetos*.* Para nós a Escola se produz por um fora que faz produzir o lado de dentro dela, vendo esse último como sua dobra. Esboçando:

Fora,

> É preciso distinguir a exterioridade e o lado de fora. A exterioridade é ainda uma forma (...) e mesmo duas formas exteriores uma à outra, pois o saber é feito desses dois meios, luz e linguagem, ver e falar. Mas o lado de fora diz respeito à força: se a força está sempre em relação com outras forças, as forças remetem necessariamente, feitas de distâncias indecomponíveis através das quais uma força age sobre outra ou recebe a ação de outra. É sempre de fora que uma força confere às outras, ou recebe das outras, a afetação variável que só existe a uma tal distância ou sob tal relação(...). (Deleuze, 2005, p.93)

O lado de fora da Escola é tudo aquilo que pode afetar seu funcionamento, neste caso, todas as políticas que a regem, ao menos as mais visíveis. Não são somente as políticas educacionais que no caso do Brasil são "Os Parâmetros Curriculares Nacionais" (PCN), senão também, as obrigações históricas, sociais, culturais e existenciais que carrega. Essas políticas chegam a ser homogeneizantes e impostas, nas quais a educação tem que cumprir com suas exigências. Um exemplo claro são as competências[7], as quais ao final são discursos incompetentes. Segundo Chauí (1982), "esse discurso começa com discurso ideológico onde pretende anular a diferença entre o pensar, o dizer e o ser, engendrando uma lógica de identificação de todos os sujeitos sociais com uma imagem particular de uma classe dominante" (p.13). De certa forma fica claro, para nós, que estes são *parâmetros internacionais* ─ possivelmente engendrados nas políticas de educação, dos organismos financeiros internacionais, para países deles dependentes.

Agora, tratando da nossa escola, o lugar da pesquisa e tentando desdobra-la com a Escola em geral, fizemos algumas perguntas tentando compreender o espaço da nossa pesquisa, pois tínhamos que perceber como funcionava a escola. Como está organizada? Qual é seu movimento? Foram perguntas que surgiram ao habitar esse território. Mas, essas perguntas foram explicitas pela professora de Matemática[8]:

---

[5] Escola com (E maiúscula se faz referência como aparelho de Estado, e escola com "e" minúscula faz referência à nossa escola pesquisada)

[6] Segundo Deleuze e Guattari (1995): (...) Há território a partir do momento em que componentes de meios param de ser direcionais para se tornarem dimensionais, quando eles param de ser funcionais para se tornar expressivos. Há território a partir do momento em que há expressividade do ritmo (...)

[7] (...) As competências, no caso dos PCN são apresentadas como: "Capacidade de abstração, habilidade, desenvolvimento do pensamento sistêmico, (...) Criatividade, curiosidade, capacidade de pensar múltiplas alternativas para a solução de um problema, (...) são competências que devem estar presentes na esfera social, cultural, nas atividades políticas e sociais como um todo" (Brasil, pp.12-13).

[8] Usaram-se os **Mapas narrativos** para entrevistar aos pesquisados: São as marcas/linguagem feitas com os entrevistados, seja um desenho, um escrito, onde se possam visualizar suas marcas, usa-se como meio para fazer as entrevistas como uma forma de expressão dos pesquisados, para narrar suas histórias.

Não sei se eu vou conseguir passar a sensação que eu tenho da escola: ***cadeia*** *pobre*. Pesquisadora: Por que cadeia pobre? *Professora: Aqui, cadeia... não. Fica forte? Você não vai pôr o nome, né? Da escola? Cadeia. Vou por uma janelinha, toda cheia de grade e aqui também, cheio de grade. Várias janelas, todas com grades. Mas é só para gente pobre. Tem cadeia que vai gente rica, mas essa aqui é só para pobre. Ela é muito cheia de regras, ela tenta imprimir um ar de muitas regras e assim, de seriedade, sabe? Tanto a diretora, quanto as coordenadoras... é uma coisa cheia de regras e quando a gente aperta um pouquinho ou a gente tenta ir à levada deles, né? Falando a mesma língua. Já que é para ser cheia de regras vai ser assim e tal... Eles abrem. Daí eles te botam o dedo na cara, né? Dizendo que é para ser um pouco mais aberto, você não pode ser tão ferro e fogo, você não pode ser tão extremista, você acha que está lidando com pessoas de faculdade não é, é gente pobre... Então, eles tentam dar um ar de seriedade no sentido de falar: "Não. Isso aqui é uma escola, os alunos têm que vir, tem que estudar". Cobram umas coisas muito sem sentido e, por outro lado, eles abrem para uma coisa que... para coisas que tem todo o sentido de você fazer.*

Foucault comenta algumas idéias sobre isso:

> As disciplinas, organizando as "celas", os "lugares" e as "fileiras" criam espaços complexos: ao mesmo tempo arquiteturas, funcionais e hierárquicos. São espaços que realizam a fixação e permitem a circulação, recortam segmentos individuais e estabelecem ligações operatórias (...). São espaços mistos: reais que regem a disposição de edifícios, de salas, de móveis, mas ideias, pois se projetam sobre a organização caracterizações, estimativas, hierarquias (...). (1999, p.135)

Pois bem, segundo Foucault (1999) as Escolas são constituídas como uma sociedade disciplinar, pois é muito mais fácil controlar os corpos e sua vigilância – o que ele fala de "localizações funcionais" –, a disciplina exige a cerca, um lugar fechado. Cada indivíduo em seu lugar. A Escola atravessada por ditos e não-ditos, por subjetividades e, sobretudo, por relações de poder, poderia ser pensada como um *dispositivo*, assumindo o conceito foucaultiano:

> Um conjunto decididamente heterogêneo que engloba discursos, instituições, organizações arquitetônicas, decisões regulamentares, leis, medidas administrativas, enunciados científicos, proposições filosóficas, morais e filantrópicas. Em suma, o dito e o não-dito são os elementos do dispositivo. O dispositivo é a rede que se pode estabelecer entre estes elementos. (1979, p.244)

Um dispositivo desempenha funções importantes e definidas nesse funcionamento. É heterogêneo porque sua natureza é desigual ─ pode ser discursiva ou não, visível ou não visível. Poderia ser a escola um dispositivo se se pensasse nos termos heterogêneo, enunciados ou leis? O discurso pode aparecer como programa de uma instituição, ou como lei justificando a implantação de um dispositivo, ou, ao contrário, como elemento que permite justificar e mascarar estas práticas que permanecem mudas.

Foucault distingue no dispositivo, três instâncias (*Saber, Poder e Subjetividade*) que não possuem contornos definitivos, mas constituem um processo que vem desde o Diagrama poder-saber. Ou seja, vai desde o estudo das prisões e só se supera a partir do estudo das subjetivações na História da Sexualidade. Fazendo um pequeno esboço, discutiremos o poder-saber e depois abrangeremos a produção de subjetividade, que é parte central da nossa discussão nesse artigo*:*

> Temos antes que admitir que o poder produz saber (...) que poder e saber estão diretamente implicados, que não há relação de poder sem constituição correlatada de

> um campo de saber, nem saber que não suponha e não constitua ao mesmo tempo relações de poder (...). (Foucault, 1999, p.30)

Nesse trecho, Foucault propõe a relação poder-saber ao falar da primeira instância é importante compreender que não é localizado─ não existe o poder como substância, ele se mostra só em seu próprio exercício─ assim, onde tem poder há resistência. O máximo que pode acontecer é que certos aparelhos capturem o poder como fazem as instituições, mas, o que captura essas instituições são as intensidades de forças, as relações de poder que interagem umas afetando as outras e estão em contínuo movimento. Enquanto ao dispositivo e a subjetivação, aquele está implícito dentro do processo de *subjetivação*, pois devem produzir sujeitos. Falar de subjetivação é um processo de auto afetação, "(...) uma relação de força consigo, um poder de se afetar a si mesmo, um afeto de si por si" (Deleuze, 2005, p.108).

Pergunta-se: por que toda essa colação teórica? Primeiro, devemos compreender que para cartografar é preciso entender do porquê da cartografia, usando palavras de Deleuze "*É preciso instalarmo-nos sobre as próprias linhas, que não se contentam apenas em compor um dispositivo, mas atravessaram-no" (1990, p. 155)* o dispositivo é constituído por diferentes linhas (sendo para nós dispositivo: Escola, EJA, aula de matemática, Oficinas de Geometria), ou setas que atravessam qualquer espaço, relações de poder envolvidas, as quais produzem subjetividades. A cartografia faz visível o não oculto, ou seja, faz visível algumas dessas linhas, essa é a razão principal da sua prática, explicamos o conceito de dispositivo tentando fazer com que os leitores entendam que existe um guarda-chuva teórico onde começa e baseia-se nossa pesquisa. Cartografa-se o dispositivo. Esse método ou caminho praticado nos fez pensar e refletir sobre nossa ação: como pensarmos nessa relação educador-educando? Dessa maneira, a cartografia ajuda-nos a não tentar compreender, mas, sim, produzir outros modos de estarmos nessa relação, objetivo da pesquisa.

3.1. Dispositivo EJA

Nesse caminho, outro território habitado foi a EJA:

> A formação da EJA é atravessada por diversas leis, normas, discursos que transpassam seu caráter educativo, cujo objetivo é alfabetizar aquela população que, por diversas questões culturais, econômicas e sociais, não teve acesso à educação na idade própria ou pelo fato de serem excluídos da escola "normal", o que os coloca à margem do mercado de trabalho pela sua condição de não escolarizados. Desse modo, a EJA está carregada historicamente de cicatrizes sendo que estas indicam como ela tornou-se o que é hoje. (Amaris, 2013, p.188)

A escola habitada funcionava na seguinte ordem: de dia era uma escola para o ensino fundamental, no caso do Brasil está divido em anos, que vão do 1º ao 9º ano e as idades vão de 6 a 14 anos, cronologicamente um ano para cada série. E no caso da EJA só tinha da quinta série até a oitava série. Assim, era destinada àqueles que não tiveram acesso ou continuidade de estudos no ensino fundamental e médio na idade própria.

Outras linhas se apresentaram dentro do *dispositivo EJA.* Eram os incômodos que produziam a palavra analfabeto e seu uso. Para tentar compreender esse conceito é preciso pelo menos, ter presente que a concepção comum de alguma pessoa analfabeta se reduz a não saber ler e escrever, definição literal e imprópria porque deixa de lado uma realidade que traz consigo no fato da pessoa analfabeta. Mesmo assim, não dá lugar a sua realidade de iletrado. Essa definição de analfabeto tem que partir da sua realidade histórica, ou seja, na sociedade onde ele se encontra, porque até o momento a sociedade mesma não exigiu dele a necessidade de saber ler e escrever porque "aquilo que desconhece é o que até agora não teve necessidade de aprender. Se tem vivido até agora é porque a sociedade não exigia dele o conhecimento" (Pinto, 1979, p.63).

Dessa maneira, segundo Álvaro Viera, o analfabeto,

> Em sua essência, não é aquele que não sabe ler, mas sim aquele, que por suas condições concretas de existência, não necessita ler. Esta é sua definição real. É a exposição de sua essência, porque não apresenta o fato de ser iletrado como um acidente, mas como algo original, essencial, que tem que ser assim, dada sua condição de vida, fundamentalmente de trabalho. Porque se assim não fosse, se necessitasse saber ler para sobreviver, ou bem saberia (e então não haveria o problema) ou então simplesmente não existiria. (1979, p.92)

Outro incômodo: a maioria dos professores da EJA não tiveram escolha ao chegar ali. Ou seja, estão na EJA para tentar completar o salário e chegam à sala de aula depois de uma jornada de trabalho de dia todo e, portanto, cansados. Na sala de aula tudo — na escola regular e na EJA — flui como se fosse igual o tempo todo. Por que será que os compreendemos e os nomeamos de diferentes nomes?

Analisando essa situação primeira, o mesmo sistema educativo está fazendo com que a EJA fique dessa forma, que seja uma maneira de completar o salário, e depois de um dia de trabalho e nem ter tempo para fazer algo diferente para os alunos da EJA. Determina, então, a partir destas subjetivações concretas que os professores são afetados, que fiquem limitados a aula tradicional, já que é o jeito mais fácil de brincar "do fazer de conta que ensino". Alguém já disse: giz, lousa e cuspe.

Segundo, aqui também está o descompromisso do professor por não tentar algo contrário. Sabemos que não é fácil escapar aos *novelos* e *linhas emaranhadas* do dispositivo escola ou do dispositivo EJA. Talvez seja mais fácil optar pelo modelo do *Mesmo* porque a escolha figura na *ordem das coisas* e desta forma os professores optam pela reprodução das condições sociais impostas a eles e aos alunos. Muitos estão cientes disso, mas dentro da cotidianidade e do funcionamento das coisas a margem de ação fica muito limitada. Na maioria dos casos, a afetação do dispositivo não dá margem a nenhuma resistência que indique a possibilidade de tentar sair da aula tradicional.

O educador parece ter assumido um *carregador de fardos*[9]. Até onde pode levar esses fardos? Como sair desse mal-estar, desse que carrega fardos, animal pesado, e ir ao leão, esse animal que move a ruptura? Como fazer com que a

[9] (...) Tanto voluntarismo, tanto abnegação, tanta renúncia e, por que não dizer, tanta culpa [...] Quando as coisas não vão bem nas searas da educação, o quanto se acostuma imputar aos professores — alegando-se — da parte dele apatia, despreparo, ineficiência, desinteresse ou mesmo falta de civismo — boa parte das responsabilidades aí implicadas. Como — é o que se lhes aponta — não fazem jus à nobre missão de que foram investidos? Como, a despeito das imensas dificuldades que cercam sua grandiosa tarefa, podem eles furtar-se a ela? (...). (Costa, 2005, p.1265)

educação se movimente para sair dessas brechas? Para abrir novos desafios, novas experiências? Como potencializar esses incômodos?

Afinal, qual é a produção de subjetividade que está sendo criada na escola?

Escutemos as palavras da professora:

É uma cadeia burra, né? Porque está fechada para certas coisas e no fim, quando você vê, não é de rigor nenhum, né? Porque se todo mundo que entra, mesmo tendo estourado de falta... olha, eles me falaram no começo do ano: "Nesse semestre, quem tiver mais de cento e tantas faltas lá no semestre, não adianta nem vir conversar com a gente. A gente já vai reprovar de cara." O que foi feito? Chegou agora no final, muita gente ia reprovar, ia dar problema para a escola... o que eles fizeram? "Olha, manda fazer um trabalhinho, uma pesquisa qualquer e a gente faz, um trabalho de compensação". Um provão no final que é uma compensação de nota. Então eu, quem tinha a mínima condição de passar, foi passando ao longo das provas, né? Ficou quem? Até eles falam: "Ai professora, você é uma santa." Eu procurei facilitar porque eu sei de todas as agruras, eu sei que esse pessoal é o excluído do excluído, né? É a nota da exclusão, né?

A partir dessas perspectivas, olhando essas características tanto históricas, culturais, políticas e humanas, pode-se perceber que a EJA, é um dispositivo. Como qualquer instituição educativa a EJA tem a relação mestre-estudante, que é uma relação de poder que se constrói através da assimetria do saber. Assim, a EJA se constitui em um dos dispositivos educacionais brasileiros e faz parte também do dispositivo escola.

3.2. Dispositivo aula de matemática

Dessa maneira chegamos ao nosso lugar de encontro. A aula de Matemática. Onde sua interação baseava-se em: *Estudante da EJA: A professora passa um exercício e explica, passa outro e a gente tem que se virar e fazer. Aí se a gente não der conta, ela passa outro e passa outro para a gente fazer... ela vai tentando a gente a fazer. Ela passa a conta, explica e a outra, a próxima, a gente faz sozinha. Aí, se ela ver que tem muita dificuldade, ela passa mais uma, duas, explica de novo e passa mais algumas para a gente fazer sozinha.*

A interação educador-educando ficava nula. Usando palavras de Freire, os professores ficavam como meros "narradores": "Narração de conteúdos que, por isto mesmo, tendem a petrificar-se ou fazer-se algo quase morto, sejam valores ou dimensões concretas da realidade. Narração ou dissertação que implica um sujeito ─ o narrador─ e objetos paciente, ouvintes ─ os educandos" (1977, p. 57). Isso mesmo acontecia na sala de aula, a posição dos estudantes era só a de ouvinte, limitando-se a cumprir seu labor, e a consequência disso é que isso conduz à memorização mecânica do conteúdo narrado, algo "normal" nas aulas dessa escola.

Uma estudante da EJA ilustrará melhor o que acontecia na sala de aula: *a professora faz entender. Ela vai na lousa e faz entender. "Vocês entenderam? " "Não. " Ela explica de novo. "Vocês entenderam? " "Não. " Ela explica de novo. Entendeu? Ela é assim. "Então espera aí que eu vou explicar de novo, presta atenção aqui e assim (...)*

Usaremos esta citação:

> A aprendizagem é entendida com Deleuze (1988) como algo não dado ou previsto na ordem das coisas. Ela ocorre quase por "acaso" nos devires e encontros que a

> vida proporciona a cada um. Como um *puzzle*, as faculdades, habilidades ou competências se encaixam não como algo previsto e organizado em um grande quebra-cabeça, mas na forma quebrada daquilo que traz e transmite a diferença. (De Souza, 2013, p.5)

Caberia perguntar como se dá o pensar nessa aula? Como ele se produz? Será que ali existe algum *acontecimento* ou algum *encontro* que nos faça lembrar que estamos no mundo? Os fardos que carregamos às vezes pesam demais quando insistimos e nos apropriarmos da Matemática enquanto repetição, repetir e repetir. Que tal se nós pensássemos como Manoel de Barros (1993), "repetir, repetir até ficar diferente", ou, pelo menos ter presente como disse Deleuze (2006) "Aprender sem sentir é repetir". Então, como se dá a comunicação nessa aula de matemática? Aqui uma estudante responde essa dúvida: *Eu pergunto, ela responde na hora. Se você não entender... ela está explicando, ela acabou de explicar, se você não entendeu, você pergunta e ela responde, explica de novo. Quando você tem muita dúvida, você leva o caderno, ela explica no caderno, entendeu?*

Tem uma citação de Freire para pensar no que se pode fazer numa sala de aula: Como posso dialogar, se alieno a ignorância, isto é, se a vejo sempre no outro, nunca em mim? Como posso dialogar, se me admito como um homem diferente, virtuoso como herança, diante dos outros, meros "isto", em que não reconheço outros eu? (1970, p.80). Lembrando também que "não há diálogo se não há amor, pois é um ato de coragem". Por que não fazer o mínimo, pergunto? Simplesmente uma pequena reflexão.

4. Movimento metodológico

Escolhemos um caminho através, uma prática cartográfica que segundo Deleuze e Félix Guattari,

> É um caminho que nos ajuda no estudo da subjetividade dadas algumas de suas características (...) é um procedimento **ad hoc,** a ser construído caso a caso (...) processual vai se fazendo no acompanhamento dos movimentos das subjetividades e dos territórios (...). (Kastrup & Barros, 2009, p.76)

Uma pesquisa de intervenção, segundo Passos e Barros (2009, p.17). Estes autores indicam que toda pesquisa é pesquisa-intervenção, pois a intervenção sempre se realiza por um mergulho na experiência que agencia pesquisadores e pesquisados, teoria e prática, num mesmo processo de produção-com-o-outro, da emergência-junto que é inventado nos movimentos do plano da experiência. Neste caso, "conhecer o caminho de constituição de dado objeto equivale a caminhar como esse objeto, constituir esse próprio caminho, constituir-se no caminho. Esse é o caminho das pesquisas de intervenção" (Passos & Barros, 2009, p.32).

Desta forma é um processo mais descritivo do que interpretativo, que visa acompanhar o processo dentro da rede, por isso se escolhe este caminho, porque permite mapear o que acontece dentro dela, dentro do dispositivo**.** Faz visível o não oculto, mergulha nas produções de subjetivações, de subjetividades, de linhas de forças, que se podem encontrar dentro da sala de aula, escola, EJA e oficinas de Geometria.

A pesquisadora é uma antropófaga, porque dela vai depender esse olhar fronteiriço dentro da pesquisa. Nesse momento, a pesquisadora devorou as situações, elementos e sensibilidades possíveis dentro da rede, tornou-se um corpo vibrátil[10], cujos afetos são produzidos por e com as pessoas ao seu redor, dentro do território habitado, olhando todas as relações na rede, como um corpo vibrátil, afetada também por essas forças. Assim, ser antropófago significa, antes de tudo, capturar e ser capturado pelos afetos produzidos naquele território existencial, pois neste movimento vai perceber os fluxos, as fraturas, as invenções, as forças dos processos de subjetivação. É assim como Rolnik diz: "O um verdadeiro antropófago: vive de expropriar, se apropriar, devorar e desovar, transvalorado" (1989, p.3).

Quando se fala de uma pesquisa de intervenção é porque a pesquisadora também habita o território a ser mapeado, engajando-se nele, deixa se impregnar, acompanha os processos, isso implica que deve estar com a pesquisa e não acima dela, ou seja, um saber com e não um saber sobre.

> O "*saber sobre*" busca controlar o objeto de estudo em sua manifestação presente e futura. Conhecer aqui é controlar variáveis da realidade, antecipar o futuro, determinar a regularidade do fenômeno (...). O "*saber com*", diferentemente, aprende com os eventos à medida que os acompanha e reconhece neles suas singularidades. Ao invés de controlá-los, os aprendizes-cartógrafos agenciam-se a eles, incluindo-se em sua paisagem, acompanhando os seus ritmos. (Passos & Alvarez, 2009, p.143. Grifo nosso)

Ao habitar o território temos que identificar os movimentos, os fluxos, as linhas de força (de poder e resistência), a produção de subjetividade, etc. Para isto a antropófaga devora, desenha, faz uma escrita, uma narração. Para olhar esses processos dentro da rede, trabalha com mapas narrativos (Bovo, Gasparotto, Rotondo & De Souza, 2012) e (De Souza & Tuchapesk, 2015), cuja intenção é a de estabelecer uma relação dialógica, pois toda narrativa é um relato, uma viagem "é um desenho que acompanha e se faz ao mesmo tempo em que os movimentos de transformação da paisagem" (Rolnik, 1989, p.23). Dessa maneira, produzem-se dados, mas não se está à procura deles, mas, sim, aos encontros ─ como é um procedimento *ad hoc*, caso a caso, *o caminho através* não pode ser pensado como um método linear, mas, sim, pensa-se como processualidade e não como processamento.

Por conseguinte, nosso movimento investigativo usa um *caminho através* para olhar dentro da rede os processos e a estruturação da comunicação na sala de aula da oitava série do ensino fundamental na EJA. As oficinas de Geometria são usadas como foco principal de pesquisa de intervenção para visualizar as relações educador-educando, os processos de subjetivação existentes na sala de aula de matemática. Investigando como as relações de poder impedem ou não a existência de um ambiente dialógico na aula.

Os ambientes das oficinas de Geometria pretenderam ser feitas a partir das artes, da criatividade, qualquer meio possível que contribuiu para evidenciar os processos dialógicos em sala de aula. Essas oficinas de Geometria se constituem como um dispositivo que acionou esses processos dialógicos que colaboraram na produção de resistências e afrontamentos à pedagogia tradicional.

[10] Segundo Rolnik (1997), primeiro o olho vibrátil, que faz com que o olho seja tocado pela força do que vê. Segundo, A pele é um tecido vivo e móvel, feito das forças/fluxos que compõem os meios variáveis que habitam a subjetividade. Nesse momento, nosso olho vibrátil capta na pele uma certa inquietação, como se algo estivesse fora do lugar ou de foco

Dessa maneira, o dispositivo oficina: “é, dessa forma, uma série de práticas e de fundamentos que produzem efeitos” (Katrup & Barros, 2009, p.81). Tomar as oficinas de Geometria como agenciamentos que se estabelecem dentro do movimento investigativo cria também condições concretas para que esse *caminho através* possa desemaranhar o dispositivo. Pois a sala de aula foi um lugar de invenção, de si e do mundo. Segundo Katrup e Barros (2009) é um espaço coletivo, como territórios de fazer juntos, os participantes da oficina estabelecem com os materiais trabalhados agenciamentos, “relações de dupla captura” (Deleuze, 1998), criando e sendo criados, num movimento de (co) engendramento, ao fazer e inventar coisas, se inventam relações com as pessoas, como o material e consigo mesmo, o pesquisador estabelece assim, uma invenção de si, por ser subjetivado ao mesmo tempo com o pesquisado.

Nesse *caminho através* que visa o estudo das subjetividades, a investigação se faz através da habitação do território, o que significa abordá-lo por suas conexões, bifurcações, agenciamentos. Portanto, também há uma produção de realidade, pois abarcam tanto sua produção de subjetividade quanto a dos territórios. Neste caso, o dispositivo oficina de Geometria se caracteriza pelo seguinte:

> Capacidade de irrupção naquilo que se encontra bloqueado pela criação, é seu teor de liberdade em se desfazer de códigos, que dão a tudo o mesmo sentido. O dispositivo tenciona, movimenta, desloca para outro lugar, provoca outros agenciamentos. Ele é feito de conexões e, ao mesmo tempo, produz outras. (Kastrup & Barros, 2009, p.90)

Dessa maneira, intervimos a sala de aula da oitava série com oito oficinas: foram trabalhadas através de dois temas fundamentais da Geometria da Oitava série o Teorema de Pitágoras e Teorema de Tales. Trabalhada por médio do Tangram, regras de Cusinaire, Filme “O Pato Donald’s e o mundo da Matemática”, quebra cabeças, trabalhos em grupos e demais ferramentas que ajudaram a acionar outro tipo de relação educador-educando. Pensando as oficinas como meio de potencializar e conceber a educação matemática como uma produção coletiva de conhecimento permitindo, assim, acionar os modos de subjetivação no movimento aprender dialogicamente a Geometria.

Nessa instância o dispositivo oficina foi um disparador:

> Fazendo que se produzam modos de ser aluno, de ser professor, de aprender e ensinar acordados com uma certa verdade transcendente (...) porém há uma mobilidade nos dispositivos; as linhas são todas linhas de variação (...) então os dispositivos tem as linhas de ruptura, de fratura, que permitem que outros dispositivos sejam acionados. Fraturar, quebrar, inventar. (Rotondo & Marocco, 2012, p. 19)

Quando se fala que outros dispositivos sejam acionados, quer dizer que nossa proposta de pesquisa começou localizando a EJA como dispositivo, agora as oficinas vão ser consideradas como um dispositivo disparador, que se aciona dentro da EJA, produzindo agenciamentos na produção conjunta de aprender a Geometria:

> Produzir um novo corpo sem amarras na imanência do viver. O dispositivo acionando a produção do conhecimento, a invenção, a produção de um si e de um mundo junto à produção matemática. A matemática sendo produzida como problema, com problematização, por necessidade. (Rotondo & Marocco, 2012, p.19)

Um exemplo disso foi no diálogo criado numa oficina ao assistir o filme “O Pato Donald’s e o mundo da Matemática”. A ideia era usar o cinema como uma forma de linguagem histórica e cultural, fornecedor fundamental de qualquer processo educativo, para tentar acionar a relação dialógica por meio das experiências visuais:

Pesquisadora: contem-me o que sentiram ao assistir esse filme, gostaram? Será que a Geometria é assim como a mostra o filme que está em todo lugar?

Estudante 1: eu adorei esse filme pois de uma forma divertida aprendemos que tudo em nossa vida tem Matemática, a parte que mais gostei foi quando ele explicou o jogo das damas de um jeito diferente.

*Estudante 2**:** Eu nunca imaginei que tudo fosse Matemática ou Geometria, foi bom ver que tudo o que está ao nosso redor é Matemática, Por que o que a gente aprende não é assim. Por que não a ensinam desse jeito?*

Estudante 3: Eu acho porque é difícil mesmo perceber a Matemática que está nosso redor, ninguém se detém para pensar nisso, responde ela à pergunta da Estudante 2.

*Estudante 4**:** Eu acho que a Matemática é difícil, mas também é muito importante, em todos os lugares tem Matemática e é preciso usá-la por isso temos que ter presente que ela é importante para nossa vida, pois sem ela não conseguiremos emprego.*

Estudante 5: Eu entendo que existe Matemática em tudo o que imaginamos, achei interessante que até nosso corpo pode ter figuras geométricas, e estão até nas notas musicais.

Pesquisadora: pois é, os pitagóricos ajudaram muito na Geometria e na música.

Estudante 6: Na Grécia, os pitagóricos ensinavam a Matemática que nos ensinam hoje, certo? Por exemplo, o Teorema de Pitágoras que nos estão ensinando.

*Estudante 1**:** pois é, eu fiquei surpreendida com isso também.*

*Estudante 6**:** por exemplo nos pentagramas, a música é só Matemática.*

*Estudante7**:** A descoberta dos pitagóricos foi muito importante para a educação, eu gostei do filme e tem muita coisa boa para pensar como nas figuras geométricas que estão na natureza.*

Estudante 8: gostei muito desse filme, primeira vez que vejo um filme de Matemática, adorei como explicarão a sinuca, não sabia que até nisso tem Matemática.

*Estudante 2**:** Eu também gostei muito da sinuca, agora vou tentar jogar assim (sorrisos de toda a sala)*

Estudante 9: Eu entendi que a Matemática está conosco desde nosso nascimento, na natureza, nas flores, fiquei muito surpreendida com esse filme, gostei muito dessa aula, ou mais curioso para mim foi que a Matemática tem um jeito fácil de ser aprendida por meio desses exemplos que mostraram no filme.

Depois dessa conversa pedi para eles, escreverem sobre o filme e suas apreciações, queria que eles escrevessem já que é alfabetização e qualquer exercício de escrita é bom para eles. Dessa maneira fechamos essa atividade.

Nesse momento quando os modos de subjetivação são potencializados e as relações de poder podem ser acionadas e assim propiciar um movimento, na rede de poder, onde os fluxos de resistência promovam fluxos de invenção, ruptura ou fratura, por intermédio das oficinas. Esses novos modos de olhar a Geometria permitiram quebrar, fraturar e inventar a relação educador/educando, desenvolvendo um modo de ser aluno e ser professor, inventando uma prática. Assim, o dispositivo: "é capaz de uma manipulação das relações de força, através de uma certa racionalidade e organização, com um certo propósito: `seja para desenvolvê-las [as forças] em determinada direção, seja para bloqueá-las, para estabilizá-las, utilizá-las etc´" (Rotondo & Marocco, 2012, p.19).

O dispositivo oficinas de geometria, teve a função de produzir outros modos de estar naquele território existencial, acionando diferentes processos de subjetivação existentes, para compreender esses modos de ser/viver/estar, dito de outra maneira, essas fraturas, invenções existentes no movimento dos fluxos de resistência proporcionados pelo deslocamento transversal da relação dialógica educador/educando na geometria. Uma delas acionou a seguinte história[11]: *eu cheguei na quarta passada à minha casa e brinquei com minha filha de oito anos e pensei muito em você com sua história para fazer o Tangram. Então, no outro dia depois que ela chegou da escola eu lhe ensinei a fazê-lo e mostrar-lhe as figuras geométricas*.

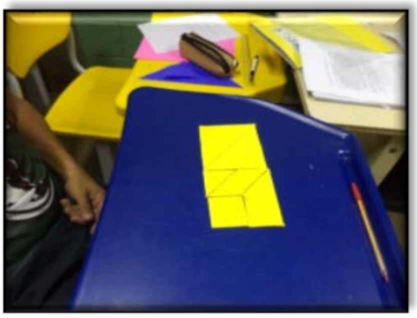


Figura 1. Tangram

5. Cartografias: A Arca Russa[12]

Em que lugar estamos? Foi a primeira frase dita pelo personagem invisível, narrador em *off,* na voz do diretor Alexandr Sokúrov. Durante 90 minutos, um narrador oculto, onde recria a história da Rússia por 35 salas do Museu Hermitage, em São Petersburg. Em um único plano-sequência, comentando e interagindo com cenas e personagens de 300 anos de história russa.

Segundo o conceito antropofágico de Rolnik, o que o diretor fez foi uma antropofagia, um canibalismo cultural, vivenciando cada época da história de seu país, com alguns acontecimentos importantes dentro daquela época. Mas, por que esses acontecimentos? E não outros? Para nossa reflexão, foram aquelas marcas deixadas pelos vazios históricos criados dentro dele.

Em um plano-sequência, ele criou todas as cenas dentro de um só espaço para fazer em 90 minutos a história de Rússia. Um flâneur, mostrando suas obras, os personagens importantes. Foi interagindo e mostrando as obras de arte do museu, visíveis e os não ocultos. Assim, a Arca Russa vai ser nosso barco, onde os

[11]Primeira oficina feita na sala de aula, o Tangram.
[12]Filme Russo do ano 2002 dirigido por Aleksandr Sokurov.

personagens do território habitado, da oitava série, vão aparecendo e mostrando-se dentro da narrativa para, ao final, fazer um plano-sequência para dar língua às marcas visíveis produzidas por eles. Para ao final fazer "o perfeito flâneur, para o observador apaixonado, é um imenso júbilo fixar residência no numeroso, no ondulante, no movimento, no fugidio e no infinito" (Baudelaire, 1997, p.18).

Por esta razão, usando os mapas narrativos decidimos fazer um flâneur nas vidas de algumas pessoas da sala de aula da oitava série. Tais mapas fazem parte fundamental da aproximação daqueles que habitavam nosso território, não sendo motivo principal da cartografia, pois ela é um processo, e também não tentamos descrever, simplesmente narrar o que aconteceu nesse encontro. Assim, nos ajuda a compreender e a escutar cada história de vida e sobretudo, escutar suas vozes. Por esse motivo mostramos dois personagens que faziam parte de nosso grupo de pesquisa.

5.1. Personagem rítmico: Andrea

A juventude, os sonhos, o desejo de ser uma Psicóloga. Era Andrea. Uma menina de 19 anos, com uma energia abrasadora. Muito ativa na sala de aula. Tipo de estudante que ajuda muito os seus colegas. Companheira de trabalho de Laura, as duas sempre no mesmo canto da sala, no fundo. Sorrisos e sonhos. É ela.

Eu comecei a conversa com uma dúvida: por que sempre no mesmo canto em todas as aulas? Pesquisadora: Como é a sua relação com os companheiros dentro da sala de aula*? Eu acho que é bom. É tranquilo. Eu não saio do meu canto, mas... porque eu assento sempre no canto, aí estou sempre no meu cantinho com a Laura. Nem saio de lá. Eu sempre assento ali, então é difícil eu sair daquele cantinho.* E o que você observa na sala de aula desde seu canto? (Mapa Narrativo-sala de aula, sinalizando-se)

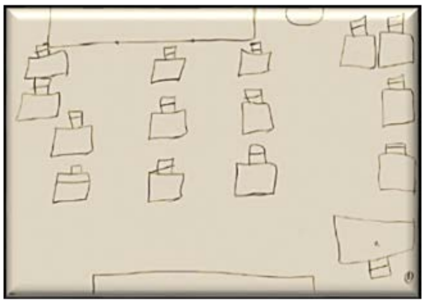


Figura 2. Mapa Narrativo-Sala de aula de Matemática.

Andrea: A sala não muda, cada um continuou no seu mesmo lugar. Ninguém se mistura, você viu? As meninas continuam aqui, nós continuamos aqui... e aqui o Rafael... então não mistura. Não tem jeito de unir ninguém naquela sala. Até porque, tem muita gente ali que não conversa, uma pessoa para outra. Mas, por exemplo uma oficina que você fez, as escalas e a última o quebra cabeça. Senti diferença no espaço. Ninguém se deu conta... "me ensina" e tal. Foi da hora. Todo mundo estava se comunicando mais. Mas mesmo assim, não se misturou.

Daí, foi me contando sobre o que pensava da sala de aula de Matemática. *Andrea: Ela passa um e explica. Passa outro e a gente tem que se virar e fazer. Aí se a gente não der conta, ela passa outro e passa outro para a gente fazer... ela vai tentando a gente fazer. Ela passa a conta, explica e a outra, a próxima, a gente faz sozinha. Aí, se ela ver que tem muita dificuldade, ela passa mais uma, duas, explica de novo e passa mais algumas para a gente fazer sozinha.* Pesquisadora: Como é comunicação na sala de aula? *Andrea: é boa*. Pesquisadora: Essa comunicação é sobre os exercícios? *Ela passa mesmo é falando. Aí a gente vai fazendo, depois que ela fala a gente vai fazendo... ela fala que é mais fácil para a gente entender do que a gente ir lendo. Porque matemática é mais decorar, né? Tem que decorar a fórmula, decorou a fórmula você está de boa... pelo menos eu entendi assim, depois que eu decorei as fórmulas soube fazer as contas. Matemática tudo você tem que decorar. Lembra de tal fórmula? Se você lembrar, você faz a conta todinha. Você lembra da tabuada? Se você decorar a tabuada você faz a conta todinha... então é só decorar. Eu pelo menos decoro tudo.*

Depois continuei com o mapa das oficinas. Ela fez um desenho fazendo uma comparação, um antes e depois das oficinas, na sala de aula.

Figura 3. Mapa narrativo-Sala de aula/Oficinas

Eu comecei com a seguinte pergunta: você, como se sentiu com as oficinas? Gostou? *Andrea: Eu gostei. Eu estava falando para a Laura, eu falei: "A Paola podia* *dar aula para o seu filho Filipe, quando ele começasse a estudar" Eu gostei dos desenhos, é um jeito mais fácil de se aprender, porque só você passar o triângulo, não é fácil, é confuso. E assim deu para a gente aprender como é feito, a gente montou o triângulo, viu como é que faz certinho (risos*). Pesquisadora: Achou mais fácil aprender geometria assim, com as oficinas? *Andrea: É. Com certeza. É mais fácil, porque você vai entender o triângulo como ele é, o que faz ele ser daquele jeito. Só você desenhar e pôr o ângulo, tudo certinho, esquece... você só vai ver aquilo. Tem muita coisa por trás daquilo.* Pesquisadora: Como que? Ah... Como o recheio do triângulo. Para mim triângulo não tinha recheio. Como os triângulos formam quadrado*.*

5.2. Personagem rítmico: Rosa

Na vida, existem aquelas pessoas que a vida toda foi de coragem, sacrifício e luta. Cada passo, cada esforço é feito pensando não nela mesma, senão na sua família, seus filhos. É essa mulher que com 44 anos ainda acredita que um futuro melhor pode ter e não fica esperando que a vida lhe dê alguma coisa. Sabe que os sonhos são alcançáveis e que só precisa um pouco de coragem, amor e vida para consegui-los. Ela na sala de aula, sempre ficava na parte da frente, participava de todas as atividades e sempre tinha o mesmo grupo de trabalho para suas atividades.

O dia da nossa conversa ela me surpreendeu quando lhe perguntei. Como você enxerga a escola? (Fazendo o desenho da escola).

Figura 4. Mapa narrativo-Escola

O futuro, algo melhor para a nossa vida. É um monte de coisas... descoberta, novas descobertas. Oportunidade, recomeço. Pesquisadora: Recomeço? *É, seria um recomeço*. Pesquisadora: Porque acha? Rosa: *Por quê? Porque a pessoa... no meu caso aqui. Eu parei de estudar 20 anos atrás. Então eu retomei os meus estudos agora, com 44 anos já*. Pesquisadora: E porque parou? Trabalho? *Trabalho. Morava com a minha tia, então a minha tia era muito exigente, pegava ônibus lotado, pegava ônibus, depois metrô, chegava no serviço, depois dois metrôs, mais ônibus... até chegar em casa, tomar um banho e ir para a escola, eu não dava conta. Minha cabeça não dava. Aí eu fiz a sexta série, repeti de novo ela, aí desanimei de vez, aí eu parei*. *E ainda mandava dinheiro para Pernambuco, para a minha família, para ajudar, sabe? Larguei para lá o estudo. Então a escola aqui, o EJA, para mim é o recomeço de tudo, de tudo o que eu perdi. Uma chance, uma nova oportunidade talvez, de fazer tudo certo... é isso aí, para mim é um recomeço. E foi uma coisa assim, sabe?*

Assim, ela mesma levou a conversa para falar sobre a sala de aula. Como se sente dentro da sala de aula*? Estressada, às vezes*. Pesquisadora: Sim? E por que? Rosa: *Nossa! Muita bagunça. As pessoas não levam a sério, não levam a* *sério o estudo. Mais as pessoas novas, que não tem muita experiência... a gente que tem mais idade está levando a coisa a sério e eles que estão novos, não percebem que eles estão perdendo uma chance de ter um futuro melhor. Não estão ali no futuro como nós estamos... com mais idade, mais cansados.* Pesquisadora*:* É incômodo para você compartilhar aulas com pessoas mais jovens? *Rosa: Pois às vezes, tem muito jovem na EJA agora e eles só fazem bagunça, não todos. Mas, é mais fácil lidar com pessoas adultas.*

Ela parou de desenhar e suspirou ao terminar essa frase. Continuamos com a sala de Matemática.

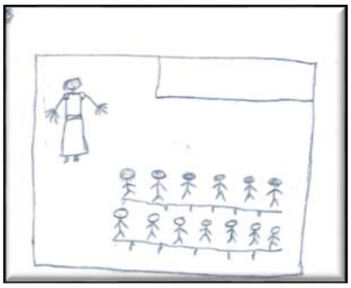


Figura 5. Mapa narrativo-Sala de aula de Matemática.

Ela começou a desenhar e eu perguntei: Como é sua aula de Matemática. Como você aprende Matemática*? Rosa: Ué, faz exercícios, a gente escreve. Presta atenção, os colegas ficam prestando atenção na aula, a professora de matemática dá teste. A matemática... a professora dando aula de matemática e os alunos olhando para a lousa (sinalizando o desenho) É sempre assim, a professora explicando e os estudantes olhando? Tudo na lousa. Olhando para a lousa. Sempre junto um do outro.* Pesquisadora: Então o jeito como a gente trabalhou nas oficinas para você foi novo? *Foi. Foi uma descoberta porque aí eu vi que um traço pode significar muita coisa, né? A maioria das coisas começa com um traço. Um triângulo, um risco com ... então eu vi que tudo hoje é pela técnica, né? Pelas formas. Então triângulo, Pitágoras, essas coisas...através de um traço você pode formar uma pessoa, pode formar... qualquer coisa, né? Então é um caminho. Um aprendizado muito bom para a gente que eu tive. E sabe uma coisa, toda vez que eu olhar para você, eu vou saber que você me ensinou a...assim, passou o filme para a gente, mostrou os traços, mostrou que eles podem fazer tal coisa, fazer um coração, uma estrela, fazer um... sei lá. Um monte de coisas.* Pesquisadora: Como você sentiu na oficina, com seus companheiros como a professora, deu para trocar ideia? *Foi bem. Naquela hora lá de juntar as mesas e fazer em dupla, em grupo, né? Grupo... então assim, juntava até pessoas que não estão se dando bem e teve que fazer, sabe? Ir lá. Dá para aprender mais. Faz ter uma união também, né?*

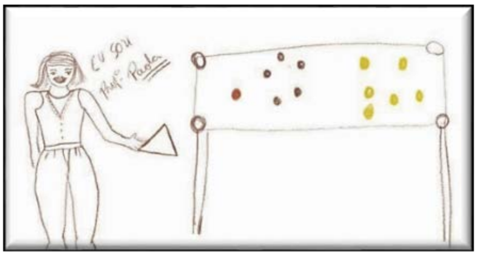


Figura 6. Mapa narrativo-Sala de aula com as oficinas.

6. Conclusões?

“A educação é um ato de amor, por isso, um ato de coragem” frase de Freire que atravessou toda a pesquisa. Até onde é nosso compromisso como educadores? Qual é nosso desejo? “Como o desejo pode e deve despender suas forças na esfera do político e se intensificar no processo de mudança da ordem estabelecida?” (Foucault, 1991, p.81). Temos que resistir? Lutar? Contra o que?

Esse artigo foi um espaço para discutir e questionar aquelas políticas que atravessam nossa educação, nosso espaço habitado e que habitaremos. Também foi um espaço para pensar que existe uma saída, e depende muito das nossas possibilidades criadas na sala de aula, nossa escola, nosso lar. Não acredito num desligamento da nossa realidade na Escola, aliás, é o lugar onde mais visível se torna.

Toda pesquisa de intervenção cumpre o uso do seu verbo, intervir, deslocar, mudar de lugar. A cartografia faz visível aquelas linhas que já estão no ar, aqui não se inventaram histórias, pois já estavam escritas nas marcas das pessoas. Aqui, simplesmente “se deu língua aos afetos que pediam passagem”. Narrou-se os afetos, e aquilo que se fez sentir no processo da pesquisa, acompanhou-se as pegadas das pessoas que habitavam a escola e sobretudo, tentando desemaranhar o dispositivo.

Todavia, dispositivos outros se acionaram e permitiram criar marcas tanto nos estudantes, quanto na pessoa que construiu esse texto, por isso se teve que movimentar, criar, fazer. Isso faz parte de nosso compromisso como educadores, além do nosso compromisso como educadores matemáticos. Não podemos cair no *mesmo,* ou seja, mesmo discurso, mesma aula, mesmo descompromisso, mesmos modos de estar que o próprio sistema faz com que reproduzamos, sendo como máquinas ao caminhar.

O “novo” foi uma palavra bem repetida em toda a pesquisa: repita de novo, faça de novo, não entendi, vai de novo. Mas esse novo, ao qual me refiro, é o novo que Deleuze disse, pois é uma confrontação entre o novo e o tradicional, pois o tradicional não se renova e o novo sempre é novo, essas são as forças de luta que existem dentro da educação tradicional e dentro do sistema educativo.

São importantes nossos desejos, qual é nossa potência de vida? Qual é nossa resistência? As escolhas fazem parte do nosso caminho, o *cuidado de si* deve ser parte do nosso caminho ao andar, disso depende nossa resistência, disso depende como fala Foucault “fazer da nossa vida uma obra de arte”. A cartografia agencia, é difícil não se afetar por qualquer processo investigativo. Por isso é importante tornar todas aquelas marcas numa produção onde se visualize: o que pode uma escola? Nesse caso, foi o que atravessou essa pesquisa e atravessou a visão do mundo da autora desse artigo.

Por isso não se pode falar de conclusões porque ainda há muito por perguntar, por fazer, por errar. Esse artigo se constituiu uma grande estrada para devires outros. Muitas bifurcações por conhecer e sentir. Entretanto, vamos caminhando para fazer caminho ao andar. Fazer o mínimo como falava Deleuze, é isso o que é importante dentro da sala de aula, numa escola, uma vida.

Bibliografía

Amaris, P. (2013). *Dispositivo Educação de Jovens e Adultos*. Linha Mestre, 7(23), 187-191.

Andrei D (Produção), Aleksandr S (Direção). (2002). *A Arca Russa.* Rússia.

Baudelaire, C. (1997). *Sobre modernidade: o pintor da vida moderna*. Rio de Janeiro: Paz e Terra.

Bovo, A., Gasparotto, G., Rotondo, M., De Souza, A. C. C. (2012, Dic.). *Pesquisando Práticas e Táticas em Educação Matemática*. Bolema: Boletim de Educação Matemática, 25(41), 1-41. Recuperado de: http://www.redalyc.org/pdf/2912/291223514003.pdf.

Brasil, PCNEM. (1999).MEC/SEMTEC.

Chaui, M. (1982*). Cultura e Democracia. O Discurso competente e outras falas*. São Paulo: Contemporânea,1-14.

Clareto, S., Miarka, R. (2015). eDucAçÃo MAteMátiCA AefeTIvA: nomes e movimentos em avessos. Bolema, 29(53),704-808.

Costa, S. (2005*). De fardos que podem acompanhar a atividade docente ou de como o mestre pode devir burro (ou camelo).* Educação e sociedade, 26(93), 1257-1272.

De Barros, M. (1993). *O livro das ignorâncias.* Rio de Janeiro: Civilização Brasileira.

De Souza, A.C.C. (2013). *O que pode a Educação Matemática?.* Trabajo presentado en el V Seminário Conexões – Deleuze e Território e Fugas e…XII Simpósio Internacional de Filosofia – Nietzsche/Deleuze, Campinas.

De souza, A. C. C., Tuchapesk, M. (2015). Do conceito à prática da autonomia do professor de matemática. Bolema: boletim de educação matemática, 29(53), 1309-1328.

Deleuze, G. (1990). *¿Qué es un dispositivo*? Michael Foucault, filosofo. Trad. Wanderson Flor do Nascimento. Barcelona: Gedisa, 155-161. Recuperado de: http://escolanomade.org/pensadores-textos-e-videos/deleuze-gilles/o-que-e-um-dispositivo.

Deleuze, G**. (**1992**).** *Conversações* (Trad. P.P. Pelbart). São Paulo: Editora 34.

Deleuze, G**. (**2005**).** *Foucault* **(**Trad. Claudia Sant´Anna Martins). São Paulo: Editora Brasiliense.

Deleuze, G & Parnet, C. (1998). *Diálogos.* São Paulo: Escuta.

Deleuze, G & Guattari, F. (1995). *Mil platôs - Capitalismo e Esquizofrenia*. V.1. Rio de Janeiro: Ed.34.

Foucault, M. (1979). *Microfísica do poder*. Rio de Janeiro: Graal.

Foucault, M. (1999). *Vigiar e Punir*: *nascimento da prisão*. Tradução de Raquel Ramalhete. Petrópolis: Vozes.

Foucault, M. (1991). *O Anti-Édipo: uma introdução à vida não fascista***.** Rio de Janeiro: Hólon, 81-84.

Freire, P. (1977). *Pedagogia do Oprimido*. São Paulo: Paz e Terra.

Freire, P. (1978). *Educação como Pratica da Liberdade*. Rio de Janeiro: Paz e Terra.

Kastrup, V., & Barros, R. (2009). *Movimentos-funções no dispositivo na prática da cartografia.* En Passos, E., Kastrup, V., Escóssia, L. (Eds.), Pistas do método da cartografia: pesquisa intervenção e produção de subjetividade (pp. 76-91). Porto Alegre: Sulina.

Nietzsche, F. (2001). *A Gaia Ciência* (Trad. P. Souza). São Paulo: Companhia de Letras.

Passos, E., & Barros, R. (2009). *A cartografia como método de pesquisa-intervenção*. Em Passos, E., Kastrup, V; Escóssia, L. (org.). Pistas do método da cartografia: pesquisa intervenção e produção de subjetividade (pp.17-31). Porto Alegre: Sulina.

Passos, E., & Barros, R. (2009). *Cartografar é acompanhar processos.* En Passos, E., Kastrup, V., Escóssia, L. (Eds.), Pistas do método da cartografia: pesquisa intervenção e produção de subjetividade (pp. 52-75). Porto Alegre: Sulina.

Passos, E., & Barros, R. (2009)**.** *Cartografar é habitar um território existencial*. En Passos, E., Kastrup, V., Escóssia, L. (Eds.), Pistas do método da cartografia: pesquisa intervenção e produção de subjetividade (pp.131-149). Porto Alegre: Sulina.

Pinto, A. V. (1986). *Sete lições sobre Educação de Adultos***.** São Paulo: Editora Autores Associados.

Rolnik, S. (1987). *Cartografia, ou de como pensar com o corpo vibrátil*. Recuperado en http://www.pucsp.br/nucleodesubjetividade/Textos/SUELY/pensarvibratil.

Rolnik, S. (1993, Sep). *Pensamento, corpo e devir Uma perspectiva ético/estético/política no trabalho acadêmico*. Cadernos de Subjetividade. Núcleo de Estudos e Pesquisas da Subjetividade, Programa de Estudos Pós Graduados de Psicologia Clínica, PUC/SP, 1 (2), 241-251.

Rolnik, S. (1997). *Uma insólita viagem à subjetividade fronteiras com a ética e a cultura*. Cadernos de Subjetividade. Núcleo de Estudos e Pesquisas da Subjetividade, Programa de Estudos Pós Graduados de Psicologia Clínica, PUC/SP. Recuperado em http://www.pucsp.br/nucleodesubjetividade/suely%20rolnik.htm

Rotondo, M. A. S & Marocco, T. (2012). *Dispositivo Experimentoteca de Matemática: Produção na imanência***.** V Seminário Internacional de pesquisa em Educação Matemática. Rio de Janeiro.

Paola Judith Amaris Ruidiaz:. Formada como Licenciada em Matemática na Universidade Pedagógica e Tecnológica da Colômbia. Mestre pelo Programa de Pós-graduação em Educação Matemática UNESP (Bolsista CAPES) e atualmente Doutoranda em Educação Matemática na UNESP (Bolsista CAPES) Campus Rio Claro, Sp. Brasil. Desenvolvendo pesquisas na Educação Matemática na área da Filosofia da Diferença.

Rua 11b, 841. Bairro Bela Vista na Cidade de Rio Claro. Sp. Brasil. E-mail: paolaamaris@gmail.com. Celular: 55 19 98238 8106

UNIÓN
REVISTA IBEROAMERICANA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA
www.fisem.org/web/union
http://asenmacformacion.com/ojs/index.php/union/index

ISSN: 1815-0640
Número 45. Marzo 2016
Página 152-161

Comprensión del razonamiento matemático de los estudiantes: una práctica pedagógica inclusiva

Macarena Larrain

Fecha de recepción: 31/12/2014
Fecha de aceptación: 03/03/2016

Resumen	En este trabajo se examina cómo el análisis de los errores matemáticos que surgen en el aula escolar ayuda a los profesores a incrementar y profundizar su nivel de conocimiento y comprensión del razonamiento matemático de sus alumnos. A la vez, se argumenta que este conocimiento constituye un aporte relevante para el diseño e implementación de estrategias pedagógicas inclusivas, que atiendan a las necesidades diversas de los estudiantes. **Palabras clave**: análisis de errores; razonamiento matemático; inclusión; diversidad
Abstract	This paper discusses how the analysis of mathematical errors arising in the classroom helps teachers to increase and deepen their knowledge and understanding of mathematical thinking of their students. At the same time, it is argued that this knowledge is relevant for the design and implementation of inclusive teaching strategies that address the diverse needs of students. **Keywords**: error analysis; mathematical thinking; inclusion; diversity
Resumo	Este artigo discute como a análise de erros matemáticos que surgem na sala de aula ajuda os professores a aumentar e aprofundar seu conhecimento e compreensão do pensamento matemático dos seus alunos. Ao mesmo tempo, argumenta-se que esse conhecimento é relevante para a concepção e implementação de estratégias de ensino inclusivas que atendam às diversas necessidades de alunos. **Palavras-chave:** análise de erros; raciocínio matemático; inclusão; diversidade

1. Introducción

En las últimas décadas, la mayoría de los países ha suscrito acuerdos internacionales relacionados con la idea de integrar o incluir a los estudiantes con necesidades educativas especiales en las aulas regulares. Especialmente a partir de la Declaración de Salamanca sobre principios, políticas y prácticas para las Necesidades Educativas Especiales (UNESCO, 1994), esto se ha convertido en una meta educativa a nivel internacional. Así, los sistemas educativos actuales en la mayoría de los países, avanzan hacia un enfoque inclusivo, en el que las escuelas regulares son para todos los niños y jóvenes, sin discriminación, y buscan responder a la diversidad del alumnado, mejorando las condiciones de acceso, participación, permanencia y logros de aprendizaje de todos los estudiantes (UNESCO, 2004).

Para dar respuesta a estos desafíos, se requiere de profesores con las habilidades apropiadas y con el conocimiento de estrategias y metodologías que permitan ocuparse de estudiantes con características y necesidades muy diversas.

Entonces, cabe preguntarse ¿qué estrategias resultan apropiadas para atender a la diversidad al interior del aula de matemática?, ¿cómo puede un profesor dar respuesta a las necesidades particulares de todos sus estudiantes para así impulsar su aprendizaje y permitir que cada uno desarrolle al máximo sus capacidades?

2. Desarrollo

2.1 Prácticas pedagógicas inclusivas

A este respecto, Ainscow (1994) ha precisado que las respuestas pedagógicas tradicionales, en las que se busca individualizar la enseñanza para responder a las necesidades particulares de los estudiantes, presentan dificultades puesto que centran la atención en el individuo, en lugar de en el curriculum y no son capaces de identificar aspectos de las estrategias o métodos de enseñanza que resultan problemáticos o poco efectivos.

En esta misma línea, el Diseño Universal para el Aprendizaje (DUA) ofrece a los profesionales de la educación un marco de referencia para atender a la diversidad en el aula. Sus autores señalan que el principal obstáculo para que todos los alumnos logren aprendizajes de calidad son los currículos inflexibles y diseñados para atender a un alumno “promedio” que en realidad no existe, puesto que ellos ponen barreras no intencionadas para el aprendizaje, particularmente para aquellos estudiantes con capacidades y motivaciones diferentes, que no corresponden al prototipo de alumno promedio (CAST, 2011).

El DUA proporciona una respuesta al creciente interés por desarrollar currículos más personalizados, que respondan a la diversidad de aprendices en el entorno escolar. Sin embargo, este marco de referencia hace hincapié en que no es necesario elaborar respuestas educativas personalizadas diseñadas a la medida para aquellos alumnos con necesidades educativas especiales. Por el contrario, ellos proponen que desde el inicio se deben planificar procesos pedagógicos flexibles, que atiendan a las necesidades de grupos que, por su naturaleza humana, son esencialmente diversos (Rappolt-Schlichtmann, Daley & Rose, 2012). Es decir, el foco está puesto en la eliminación de barreras y en el diseño de ambientes de aprendizaje maleables, que sean capaces de ofrecer alternativas y opciones entre las que cada alumno pueda escoger, anticipándose así a la variabilidad y permitiendo que todos los estudiantes progresen desde su propio nivel actual de habilidades (Rose, Harbour, Johnston, Daley & Abarbanell, 2006).

Por tanto, no se trata solo de diferenciar la enseñanza a posteriori para aquellos alumnos que presentan un diagnóstico médico, neurológico o psicopedagógico determinado, sino de diseñar y poner en práctica estrategias pedagógicas que resulten efectivas, que otorguen oportunidades de aprendizaje para todos los alumnos (Ayala, Brace & Stahl, 2012) y que permitan responder a los diferentes ritmos, estilos y necesidades de aprendizaje. Para esto, es necesario que dichas estrategias se fundamenten en el conocimiento y la comprensión de las conceptualizaciones construidas por los alumnos y de los niveles de apoyo y la calidad de los andamiajes que requieren (Empson, 2003; Stough & Palmer, 2003). Asimismo, resulta crucial la forma en que este conocimiento de los procesos cognitivos de los alumnos contribuye al diseño y estructura de las estrategias de enseñanza para que estas promuevan el aprendizaje de todos los estudiantes (Moscardini, 2014).

Aún más, diversos autores (ver por ejemplo Jordan, Schwartz y McGhie-Richmond, 2009; Watson, 2000) argumentan que las estrategias de enseñanza efectivas son útiles para todos los estudiantes, incluyendo a la gran mayoría de aquellos con necesidades educativas especiales y especialmente para los que tienen dificultades de aprendizaje relacionadas a áreas particulares del currículum. La razón de esto reside en que la entrega de oportunidades de aprendizaje flexibles, que se adaptan al nivel de comprensión y habilidades de cada alumno es factible en un aula inclusiva y ayuda a una experiencia de aprendizaje más efectiva para todos los alumnos.

En síntesis, es necesario un cambio de paradigma, que avance desde la concepción de las prácticas pedagógicas como algo que debe resultar efectivo para el estudiante promedio y que se complementa con algo adicional o especial para algunos alumnos, hacia un enfoque centrado en el estudiante, en el que se diseñen oportunidades de aprendizaje en las que todos pueden participar y que permiten el acceso al curriculum para todos.

2.2 Conocimientos de los profesores para las prácticas pedagógicas inclusivas

La aplicación de este enfoque pedagógico a la enseñanza de las matemáticas en los niveles de educación básica requiere de profesores que sepan orquestar muy bien sus conocimientos profesionales, que Shulman (1986) categorizó en tres tipos: conocimientos pedagógicos generales; conocimientos disciplinares, que en este caso se refiere a tener conocimientos generales de la matemática; y conocimientos pedagógicos del contenido, que Shulman definió como una forma particular del conocimiento del contenido disciplinar, que abarca los aspectos afines a su enseñanza, incluyendo diversas formas de representación de los principales conceptos de la disciplina, variedad de ejemplos y explicaciones que permitan hacer el contenido comprensible para los alumnos, comprensión acerca de qué hace que el aprendizaje de un contenido sea más fácil o más difícil, las dificultades o errores más comunes para cada tema y estrategias que permitan reorganizar las estructuras mentales de esos estudiantes para superar las dificultades, entre otros.

Hill y Ball (2009), a partir de la observación de profesores de primaria, determinaron que la interpretación de conceptos y procedimientos matemáticos, su explicación a niños y jóvenes y la comprensión del razonamiento de estos, requiere de una habilidad que no es necesaria en otras profesiones. Así, diferenciaron aún más finamente la categorización propuesta por Shulman y crearon el constructo de Conocimiento Matemático para Enseñar (Ball, Thames y Phelps, 2008), que tiene dos grandes categorías: Conocimiento Común del Contenido y Conocimiento Pedagógico del Contenido; dentro de este último, se incluye el conocimiento del currículum, del contenido y la enseñanza y del contenido y los estudiantes. El conocimiento del contenido y los estudiantes contempla la capacidad para anticipar los aspectos del contenido que los alumnos pueden considerar confusos o el tipo de razonamiento que podrían seguir ante un determinado contenido, la habilidad de interpretar los razonamientos a veces incompletos y expresados en el lenguaje cotidiano de los jóvenes estudiantes y conocimiento sobre los errores que más comúnmente surgen durante el aprendizaje de un determinado contenido matemático. Por su parte, los profesores ponen en práctica el conocimiento del contenido y la enseñanza cuando, por ejemplo, durante las discusiones con toda la clase deben decidir si profundizan o no en la contribución de un alumno, si se detienen para clarificar mejor un asunto, si realizan una pregunta o dan una tarea particular para potenciar o poner en conflicto el razonamiento de un alumno.

Greer y Meyen (2009) también destacan que para que la enseñanza de la matemática a alumnos con necesidades educativas especiales logre desarrollar un aprendizaje comprensivo y no meramente memorístico, es clave que los docentes cuenten con un sólido conocimiento pedagógico del contenido y rescatan la definición que Shulman (1987, p.15) hace de éste como “la capacidad del profesor de transformar el conocimiento del contenido que él o ella posee en formas que son pedagógicamente poderosas, pero a la vez adaptables a las variaciones en habilidad y antecedentes que presentan los alumnos”.

Por lo tanto, son de especial interés el conocimiento y las habilidades que puedan tener los docentes en relación a cómo piensan o razonan los alumnos en edad escolar, lo que facilita la implementación de prácticas pedagógicas centradas en el estudiante y que atiendan a las necesidades educativas de todos ellos (Empson, 2003).

2.3 Comprensión del razonamiento matemático de los alumnos para el diseño de estrategias pedagógicas efectivas

Bajo esta perspectiva, la interpretación del pensamiento y de las formas de razonar de los alumnos resulta crucial para poder desarrollar e implementar prácticas pedagógicas inclusivas, ya que otorga información relevante para la toma de decisiones pedagógicas, información de mayor utilidad que la mera identificación de déficits del alumnado (Elliot y Gibbs, 2008, citado en Moscardini, 2014).

De manera similar, Watson (1996) postula que una manera efectiva de apoyar a los estudiantes con necesidades educativas especiales consiste en utilizar el conocimiento acerca del razonamiento matemático de los alumnos para modificar la enseñanza y diseñar respuestas educativas acordes a sus necesidades. Para acceder a las comprensiones conceptuales de los alumnos, Watson señala que es necesario establecer interacciones focalizadas con los estudiantes, que permitan conocer de mejor manera su pensamiento.

Un estudio realizado por Moscardini (2013), apoya lo propuesto por Watson. El estudio indagó los conocimientos y creencias de doce profesores de primaria en escuelas especiales que atienden a niños con dificultades de aprendizaje moderadas antes y después de un curso de desarrollo profesional sobre razonamiento matemático de los alumnos. Los docentes participantes destacaron que una comprensión más profunda de las formas de pensar de sus estudiantes les proporcionaba una base de conocimientos más sólida para la enseñanza.

Además, este enfoque pedagógico, que busca comprender el razonamiento de los estudiantes en el contexto de las comunidades de aprendizaje que se construyen en el aula, apoya una actitud de indagación que es característica de una pedagogía inclusiva (Moscardini, 2014).

En el ámbito de la educación regular, también existe amplio consenso y vasta evidencia que muestra que la comprensión que tienen los profesores del razonamiento matemático de los alumnos es una poderosa herramienta para mejorar los procesos de enseñanza. Por ejemplo, un estudio longitudinal dirigido por Fennema, Carpenter, Franke, Levi, Jacobs y Empson (1996) examinó cómo cambiaban las creencias y las prácticas pedagógicas de 21 profesores de primaria en un periodo de 4 años en que los docentes participaron en un programa de desarrollo profesional orientado a incrementar su habilidad para comprender el desarrollo del razonamiento matemático de sus alumnos. Encontraron grandes cambios tanto en las creencias como en las prácticas docentes, que evolucionaron desde unas en que el rol del profesor consistía en demostrar procedimientos hacia unas en que el docente ofrecía actividades de resolución de problemas y fomentaba la comunicación y discusión de los razonamientos de los estudiantes, ayudándolos así a construir nuevo conocimiento sobre su propio nivel actual de razonamiento matemático. Aún más, Fennema y su equipo mostraron que estos cambios en las prácticas pedagógicas resultaron en mejores logros de aprendizaje de los alumnos.

Es entonces crucial preguntarse cómo puede un profesor evaluar si el razonamiento de sus alumnos refleja o no una real comprensión del contenido matemático. A este respecto, Barmby, Harries, Higgins y Suggate (2007) señalan que si consideramos que la comprensión de la matemática se basa en el establecimiento de conexiones entre representaciones mentales de conceptos matemáticos, entonces para conocer el grado de comprensión de un alumno respecto de un concepto o procedimiento matemático, primero es necesario admitir que éste no es posible de conocer a cabalidad, pues no es directamente observable. Solo es posible acceder a él considerando algunas muestras o representaciones, que nos ilustren lo que un alumno ha comprendido de manera correcta, aquello que aún le falta por construir y aquello que ha construido o conectado de manera errónea.

Para ello, según Barmby y sus colaboradores (2007), es necesario utilizar tareas o actividades con características particulares, que permitan que los alumnos tengan la oportunidad de expresar dichas representaciones. Por ejemplo, un listado de ejercicios matemáticos construido sin ninguna intención particular más que la práctica de procedimientos matemáticos, puede entregarnos poca o ninguna información acerca del nivel de comprensión matemática de los alumnos, ya que es posible resolver gran parte de los ejercicios matemáticos con una comprensión limitada de los conceptos involucrados, utilizando técnicas memorísticas. De esta manera, el hecho de que un estudiante tenga correcto uno o más ejercicios matemáticos, no proporciona información útil para el profesor que busca desarrollar habilidades de razonamiento matemático en sus alumnos. Sin embargo, cuando un alumno comete un error de manera sistemática, éste podría indicar las limitaciones de su comprensión acerca del contenido matemático implicado.

2.4 Errores matemáticos: una ventana hacia el razonamiento matemático de los estudiantes

Para los efectos de este argumento, se considerarán errores matemáticos aquellos errores sistemáticos, persistentes y profundos, que no son fácilmente identificables y corregibles por el estudiante de manera aislada (Brodie, 2014).

La persistencia y sistematicidad de los errores son explicadas por las teorías constructivistas del aprendizaje como provenientes de concepciones erradas (*misconceptions*), es decir, de estructuras conceptuales construidas por el estudiante, que tienen sentido de acuerdo a sus estructuras mentales actuales, pero que difieren del conocimiento disciplinar (Smith, diSessa & Roschelle, 1993). Se desprende entonces, que los errores tienen sentido para quien los comete, puesto que existe un razonamiento subyacente (errado) que explica lo realizado. Muchas veces estas concepciones erróneas provienen de aprendizajes previos que son transferidos incorrectamente para la realización de tareas o ejercicios matemáticos en un ámbito diferente y es posible identificar dentro de un mismo error elementos matemáticamente válidos y elementos incorrectos (Brodie, 2014).

Las concepciones erróneas, al estar conectadas a estructuras conceptuales correctas en otras áreas, son difíciles de eliminar o de reemplazar mediante la enseñanza, ya que las estructuras mentales deben ser reemplazadas o reorganizadas en otras más apropiadas y acordes al conocimiento proveniente de la disciplina. Sin embargo, esto no significa que los errores no deban ser considerados en el proceso de enseñanza, muy por el contrario, este cambio conceptual implica grandes desafíos para los docentes, quienes deben comprender y enfrentar estas conexiones erróneas (Smith et al., 1993; Brodie, 2014), ya que dar respuesta a los errores matemáticos de los alumnos al interior del aula ha demostrado tener mejores efectos en el aprendizaje que intentar evitar su ocurrencia (Rach, Ufer y Heinze, 2013).

Brodie (2014, p. 224) sintetiza las características de los errores señalando que estos

> ‘son razonables y muestran el razonamiento de los alumnos; son una parte normal y necesaria del aprendizaje de las matemáticas; y los errores de los alumnos dan acceso a los profesores al pensamiento actual de los alumnos acerca de las maneras de hacer matemática’.

2.5 El análisis de errores

Hace ya varias décadas que Hendrik Radatz (1979) señaló que los errores en el aprendizaje de las matemáticas son el resultado de la combinación compleja de diversas variables, incluyendo las características del currículum, del entorno, de los profesores, de los estudiantes y de todas las interacciones entre ellos. Por esta razón, los errores presentan un gran desafío para los profesores, puesto que es necesario dilucidar entre variados factores para poder dar una respuesta pedagógicamente apropiada.

El cómo se lleva a cabo este proceso de análisis, ha sido estudiado por diversos autores y es considerado como un elemento indispensable de la enseñanza de la matemática (Peng y Luo, 2009; Riccomini, 2005).

McGuire (2013) propone un ciclo de análisis de errores organizado en tres etapas. La primera consiste en identificar el patrón de errores o la conceptualización errónea del estudiante. A este respecto, Holmes, Miedema, Nieuwkoop y Haugen (2013) señalan que los profesores, primero deben ser capaces de discernir si un error proviene de una concepción errónea o es simplemente el producto de un descuido. Si el caso es el primero, la naturaleza de los errores y sus causas subyacentes deben ser buscadas, para así poder individualizar la enseñanza y responder a las necesidades particulares de los alumnos (Radatz, 1979; Prediger & Wittmann, 2009; Cox, 1975), lo que constituye la segunda etapa del ciclo de análisis propuesto por McGuire (2013).

Para identificar y comprender los errores de los estudiantes, los profesores deben tener un sólido conocimiento disciplinar de la matemática, pero a la vez deben ser capaces de interpretar los niveles de comprensión del alumno (McGuire, 2013). Esto entrega a los docentes información útil acerca de los procesos cognitivos subyacentes al razonamiento matemático de los alumnos, en lugar de focalizarse exclusivamente en si las respuestas son correctas o incorrectas, lo que no permite visualizar cómo o qué están aprendiendo los alumnos (Ashlock, 2009).

La tercera etapa en el ciclo de análisis de errores (McGuire, 2013) consiste en remediar los errores utilizando estrategias pedagógicas específicamente diseñadas para estos efectos. La habilidad para seleccionar adecuadamente estas estrategias está relacionada con el concepto de conocimiento pedagógico del contenido propuesto por Shulman (1987), ya que se refiere al conocimiento que los profesores tienen de estrategias que tienen un alto potencial para reorganizar las estructuras conceptuales de los estudiantes (McGuire, 2013).

A pesar de la relevancia de esta etapa, diversos estudios han mostrado que tanto los futuros profesores (Cooper, 2009) como muchos profesores en ejercicio (Riccomini, 2005) no han recibido suficiente formación que los ayude a diseñar respuestas pedagógicas apropiadas y focalizadas en la reconstrucción de conceptos, que atienda a las dificultades específicas que presenta el alumno.

7. Conclusiones

La inclusión de todos los estudiantes en un mismo sistema educativo es un objetivo relevante en muchos países. Para lograrlo, es necesario que los docentes diseñen currículos flexibles, que dejen espacio para que los alumnos accedan a los contenidos de estos desde diferentes perspectivas, a ritmos distintos, con formas de aprender diversas. Es decir, que se acerquen al aprendizaje de acuerdo a sus características y necesidades particulares. Es en la flexibilidad de los diseños donde está la clave, ya que ésta permite que cada estudiante tenga una experiencia de aprendizaje particular y ajustada para él.

Para poder diseñar procesos de enseñanza y aprendizaje que se acomoden a las características de los estudiantes, los docentes necesitan poseer conocimientos relevantes acerca de los diversos procesos de razonamiento matemático que suelen tener los estudiantes frente a los contenidos o habilidades que quieren promover. Sin embargo, esto muchas veces no es suficiente, puesto que en la realidad del aula es posible observar que surgen alumnos con razonamientos diversos, originales y diferentes a los esperados por el educador. Por lo tanto, es necesario que los docentes pongan en práctica estrategias que les permitan conocer y comprender los procesos de razonamiento que están siguiendo sus alumnos, para así poder dar respuestas educativas que se ajusten a los niveles actuales de comprensión de sus alumnos y que, a la vez, los ayuden a avanzar en sus aprendizajes.

Una estrategia relevante para conocer el razonamiento matemático de los alumnos consiste en analizar los errores que ellos cometen al realizar ejercicios o tareas matemáticas. El proceso de análisis de errores comienza con la identificación de un patrón de errores, que permite al docente caracterizar el tipo de ejercicios en los que el alumno se equivocaría. Luego, la comprensión de la naturaleza del error y de las concepciones equivocadas que lo subyacen, permiten al educador vislumbrar el razonamiento del estudiante y predecir el tipo de respuesta que daría a un ejercicio o tarea similar. Con esta información, el profesor está en mejores condiciones para crear e implementar respuestas educativas que se ajusten a las distintas características y necesidades de los alumnos diversos que tiene a su cargo, que impulsen el aprendizaje y permitan que todos los estudiantes desarrollen al máximo sus capacidades.

Bibliografía

Ainscow, M. (1994). *Special needs in the classroom: A teacher education guide*. London: Jessica Kingsley Publishers.

Ashlock, R. B. (2009). *Error Patterns in Computation: Using Error Patterns to Help Each Student Learn*. (10th Edition). Upper Saddle River, NJ: Pearson.

Ayala, E., Brace, H.J. & Stahl, S. (2012). Preparing teachers to implement Universal Design for Learning. En T. E. Hall, A. Meyer & D.H. Rose (Eds.) *Universal Design for Learning in the Classroom. Practical Applications.* New York: Guilford.

Ball, D.L., Thames, M.H. & Phelps, G. (2008). Content Knowledge for Teaching: What makes it special? *Journal of teacher Education*, 59(5), 389 – 407.

Barmby, P., Harries, T., Higgins, S. & Suggate, J. (2007) How can we assess mathematical understanding? En J. Woo, H. Lew, K. Park, D. Seo (Eds.), *Proceedings of the 31st Conference of the International Group for the Psychology of Mathematical Education*, Vol. 2, pp. 41–48.

Booth, T., Ainscow, M., Black-Hawkins, K., & Vaughan, M. (2002). *Índice de Inclusión: Desarrollando el aprendizaje y la participación en las escuelas*. Bristol: Centre for Studies on Inclusive Education (CSEI).

Brodie, K. (2014). Learning about learner errors in professional learning communities. *Educational Studies in Mathematics*, 85(2), 221-239.

CAST (2011). Universal Design for Learning Guidelines version 2.0. Wakefield, MA: Autor.

Cox, L. S. (1975). Diagnosing and Remediating Systematic Errors in Addition and Subtraction Computations. *Arithmetic Teacher*, 22(2), 151-157.

Empson, S. B. (2003). Low-performing Students and Teaching Fractions for Understanding: an Interactional Analysis. *Journal for Research in Mathematics Education*, 34(4), 305-343.

Fennema, E., Carpenter, T. P., Franke, M. L., Levi, L., Jacobs, V. R., & Empson, S. B. (1996). A longitudinal study of learning to use children's thinking in mathematics instruction. *Journal for research in mathematics education*, 27(4), 403-434.

Greer, D. L., & Meyen, E. L. (2009). Special education teacher education: A perspective on content knowledge. *Learning Disabilities Research & Practice*, 24(4), 196-203.

Hill, H. C. & Ball, D. L. (2009). *The curious – and crucial – case of mathematical knowledge for teaching*. Phi Delta Kappan, 91(2), 68-71.

Jordan, A., Schwartz, E. & McGhie-Richmond, D. (2009). Preparing teachers for inclusive classrooms. *Teaching and Teacher Education*, 25, 534-542.

Moscardini, L. (2014). Developing equitable elementary mathematics classrooms through teachers learning about children's mathematical thinking: Cognitively Guided Instruction as an inclusive pedagogy. *Teaching and Teacher Education*, 43, 69-79.

Moscardini, L. (2013), Primary special school teachers' knowledge and beliefs about supporting learning in numeracy. *Journal of Research in Special Educational Needs*. doi: 10.1111/1471-3802.12042

Prediger, S., & Wittmann, G. (2009). Aus Fehlern lernen–(wie) ist das möglich. *Praxis der Mathematik in der Schule*, 51(3), 1-8.

Radatz, H. (1979). Error analysis in mathematics education. *Journal for Research in Mathematics Education*, 10(3), 163-172.

Rach, S., Ufer, S., & Heinze, A. (2013). Learning from errors: effects of teachers training on students´ attitudes towards and their individual use of errors. *PNA*, 8(1), 21-30.

Rappolt-Schlichtmann, G., Daley, S.G. & Rose, L.T. (2012). Introduction. En G. Rappolt-Schlichtmann, S.G. Daley & L.T. Rose (Eds.) *A Research Reader in Universal Design for Learning* (pp. 1 – 16). Cambridge: Harvard Education Press.

Rose, D., & Meyer, A. (2000). Universal Design for Learning. *Journal of Special Education Technology*, 15(1), 67-70.

Rose, D. H., Harbour, W. S., Johnston, C. S., Daley, S. G., & Abarbanell, L. (2006). Universal Design for Learning in Postsecondary Education: Reflections on Principles and their Application. *Journal of Postsecondary Education and Disability*, 19(2), 135-151.

Shulman, L. S. (1986). Those who understand: Knowledge growth in teaching. *Educational researcher*, 15(2), 4-14.

Shulman, L. (1987). Knowledge and Teaching: Foundations of the New Reform. *Harvard Educational Review*, 57(1), 1 – 22.

Stough, L. M. & Palmer, D. J. (2003). Special Thinking in Special Settings: a Qualitative Study of Expert Special Educators. *The Journal of Special Education,* 36(4), 206-222.

UNESCO (1994). *Informe final. Conferencia Mundial sobre Necesidades Educativas Especiales: Acceso y Calidad.* Madrid: UNESCO/Ministerio de Educación y Ciencia.

UNESCO (2004). Educación para Todos: el imperativo de la calidad. Informe de Seguimiento de la EPT en el Mundo. París: Autor.

Watson, J. (1996). *Reflection through interaction: The classroom experience of pupils with moderate learning difficulties*. London: Falmer.

Watson, J. (2000). Constructive instruction and learning difficulties. *Support for Learning*, 15(3), 134-140.

Macarena Larrain J.: Master of Arts en Necesidades Educativas Especiales de la Universidad de Leeds, Inglaterra. Licenciada en Educación con mención en Matemática por la Pontificia Universidad Católica de Chile. Profesora en la Facultad de Educación de la Universidad de los Andes. mlarrainj@uandes.cl

Av. Monseñor Álvaro del Portillo 12.455,
Las Condes, Santiago, Chile.

REVISTA IBEROAMERICANA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA

ISSN: 1815-0640
Número 45. Marzo 2016
Página 162-183

www.fisem.org/web/union
http://asenmacformacion.com/ojs/index.php/union/index

Secuencia didáctica para el autoaprendizaje de la simplificación de fracciones con uso de tecnología en estudiantes universitarios

Omar Cuevas Salazar, Edna Myriam Valenzuela Lagarda, Mucio Osorio Sánchez, Evaristo Trujillo Luque

Fecha de recepción: 16/03/2015
Fecha de aceptación: 14/03/2016

Resumen	El objetivo del estudio, fue desarrollar una secuencia didáctica con uso de tecnología, para que estudiantes de nivel universitario, de forma independiente, aprendieran con comprensión la simplificación de fracciones. Participaron 14 alumnos del curso de Fundamentos de Matemáticas de las carreras de ingeniería, inscritos en Enero de 2014. Se aplicaron dos exámenes, diagnóstico y final, así como una encuesta de opinión. Se compararon los promedios de ambos exámenes con una prueba de hipótesis. La secuencia didáctica propuesta, tuvo un impacto favorable en los estudiantes que participaron en la investigación, ya que aumentó significativamente el rendimiento académico de los alumnos. **Palabras clave**: Secuencias didácticas, Autoaprendizaje, Tecnología, Educación Superior
Abstract	The aim of the study was to develop a teaching sequence with use of technology for students at university level, independently, learn with understanding simplifying fractions. Fourteen students attended the course Fundamentals of Mathematics engineering careers, enrolled in January 2014. Two tests, diagnosis and final as well as an opinion poll were applied. The averages of both tests were compared with a hypothesis test. The proposed teaching sequence had a favorable impact on the students who participated in the research, as it significantly increased academic performance of students. **Keywords**: Teaching sequences, self-learning, Technology, Higher Education
Resumo	O objetivo do estudo foi desenvolver uma seqüência de ensino com o uso da tecnologia para estudantes de nível universitário, de forma independente, aprender com a compreensão simplificar frações. Catorze alunos participaram do curso Fundamentos de Matemáticas carreiras de engenharia, matriculados em Janeiro de 2014. Foram aplicados dois testes, diagnóstico e final como uma pesquisa de opinião. As médias de ambos os testes foram comparados com um teste de hipóteses. A seqüência de ensino proposto teve um impacto favorável sobre os estudantes que participaram da pesquisa, uma vez que aumentou significativamente o desempenho acadêmico dos alunos. **Palavras-chave:** seqüências didáticas, a autoaprendizagem, Tecnologia, Ensino Superior

1. Introducción

Uno de los temas centrales de los programas escolares en casi todos los países es, sin lugar a dudas, el de las matemáticas. Las matemáticas amplían la capacidad de comprender, controlar y mejorar el mundo en el que se vive. En las escuelas se depende en gran medida de los conocimientos matemáticos, de modo que muchos alumnos se encuentran en seria desventaja si tienen *lagunas* en matemáticas ya que es una materia interdisciplinaria, es decir, se relaciona con otras áreas del conocimiento, como la biología, química, física, entre otras (Qualding, 1982, p. 445).

Uno, de entre los muchos conocimientos matemáticos que los alumnos deben comprender, en el nivel medio superior, son las fracciones. Tal es su importancia, que en la estructura de la prueba ENLACE, prueba que se realiza anualmente en México en todos los niveles educativos, se encuentran las operaciones básicas con fracciones y la simplificación de fracciones (ENLACE, 2012).

El uso habitual histórico y actual del concepto de fracción es aquel que se asocia con la relación parte-todo. Actualmente las fracciones se aplican en varias situaciones de contexto, esto genera o deriva distintos significados de fracción, tales como la fracción como parte de un todo, como cociente, como razón, como probabilidad, como un número racional, como medida, como porcentaje, entre otros. No obstante, algunos significados carecen de importancia y fuerza para un significado escolar (Peña, 2011, p. 28).

El inicio de la enseñanza de las fracciones en México se da en tercero de primaria. Los aprendizajes esperados con respecto a las fracciones, del libro de texto de la Secretaría de Educación Pública (SEP), que corresponde a este grado son: (a) resolver problemas de reparto cuyo resultado sea una fracción de la forma $\frac{m}{2^n}$, (b) identificar escrituras equivalentes con fracciones, (c) identificar y representar gráficamente fracciones y, (d) resolver problemas al sumar o restar fracciones.

Para abordar el tema de fracciones, se inicia con un problema de partición y reparto. Cabe señalar que no se explica el concepto de fracción ni su representación previo a los problemas, como se haría en una enseñanza tradicional. El libro está elaborado con estrategias innovadoras que promueven el auto-aprendizaje para el desarrollo de competencias básicas para la vida y el trabajo, producto de las propuestas que conforman la Reforma Integral de la Educación Básica (Secretaría de Educación Pública, 2011).

Después del problema de partición y reparto se explica cómo se representa una fracción y cuáles son sus elementos. Se mencionan ejemplos de cosas que se pueden partir como pasteles, chocolates, bolsas de canicas y hojas de papel. Posteriormente se realizan actividades con distintos elementos, como figuras, preguntas e instrucciones que ayudan al estudiante a comprender el concepto de fracción como parte-todo.

De tercero a sexto grado de primaria los libros de texto desarrollados por la SEP tienen una estructura similar para la enseñanza de cualquier tema, la cual es: problema, definiciones, ejemplos y ejercicios, aunque este orden puede cambiar. El tema de fracciones varía a lo largo de la primaria en cuanto a la dificultad de los ejercicios, actividades y ejemplos.

En secundaria el currículo contempla el estudio de las fracciones y sus operaciones en los tres grados. En primero y segundo se estudian las fracciones comunes, significados y operaciones. En tercero se revisan las fracciones comunes y sus operaciones para entrar en el tema de fracciones algebraicas. Para el concepto de fracciones se manejan diferentes problemas de contexto. Estos problemas dan oportunidad a los estudiantes de descubrir los diferentes significados de fracciones y a darle importancia a su uso (Alarcón, Bonilla, Nava, Rojano y Quintero, 1994, p. 81).

Desde el inicio de la investigación en Educación Matemática, el proceso de enseñanza aprendizaje relacionado con las fracciones es uno de los más estudiados, tal vez porque representan una de las áreas de dificultad más comunes en las escuelas de todo el mundo (Fandiño, 2005, citado por Flores, 2012, p. 23). Según Freudenthal (1983, citado por Gallardo, 2011, p. 73), en lo que se refiere a la didáctica de las fracciones, ésta ha sido caracterizada por una tendencia unificadora, suponiendo que los estudiantes ya han comprendido y superado los obstáculos de los números naturales. Esto ocasiona que el tratamiento de las fracciones funcione con menor éxito que el de los números naturales, teniendo como consecuencia que conforme avanzan los estudiantes en los diferentes niveles tengan dificultades para hacer uso de las fracciones en problemas de contexto intra y extamatemáticos.

Peña (2011, pp. 10-11), afirma que el tema de las fracciones es uno de los conceptos matemáticos que presenta mayor dificultad en estudiantes de educación básica y señala que la hipótesis que actualmente ha cobrado importancia acerca de los conflictos en la enseñanza aprendizaje de este tema, es la que establece que la dificultad en el aprendizaje se debe principalmente a la multiplicidad de significados relacionados a las fracciones, lo que se puede llamar de otra forma, a su carácter polisémico.

La enseñanza de los números naturales, que es un tema previo a las fracciones, presenta diferencias epistemológicas que producen obstáculos para su comprensión y aprendizaje. Estos obstáculos perduran hasta el nivel de educación secundaria, e incluso, hasta la educación superior. Pruzzo (2012, pp. 2-4) coincide con Peña al señalar que una gran cantidad alumnos de secundaria no logra representar números fraccionarios, operar con ellos o establecer equivalencias. De manera que los aprendizajes sobre números racionales posteriores se ven comprometidos.

Los maestros de primaria expresan, que a los alumnos se les dificulta la conceptualización de las fracciones al no usarlas en su vida cotidiana, como lo hacen con los números naturales. Comentan que al resolver problemas, los niños tienen dificultades en dar una respuesta numérica, sus particiones carecen de equidad o exhaustividad, no comprenden las equivalencias, confunden los conceptos de numerador y denominador, así como la relación entre ambos, por lo que no saben distinguir si una fracción es menor o mayor que otra (Olguín y Álvarez, 2012, pp. 583-584).

De igual manera ocurre en los niveles medio superior y superior, los maestros se enfrentan con la misma problemática, los alumnos tienen dificultades para simplificar fracciones, comprender equivalencias, resolver operaciones básicas, especialmente si son sumas de fracciones con diferente denominador, esto dificulta la enseñanza de otros temas que incluyen fracciones, razones, proporciones y expresiones racionales. Según Larrazolo, Bacckhoff y Tirado (2013, pp.1151-1152), el 84% de los estudiantes de nivel superior en México conocen el concepto de fracción, el 83% es capaz de convertir decimales en fracciones comunes y apenas 50% puede solucionar problemas que involucren una fracción común como división, los datos fueron arrojados mediante un estudio realizado en cinco universidades de distintos estados del país. El estudio se hizo aplicando el Examen de Habilidades y Conocimientos Básicos (EXHCOBA) a aspirantes a dichas universidades.

Existen investigaciones que fundamentan la problemática en el uso de las fracciones, tal es el caso presentado por Peña (2011, pp. 17-18), quien realizó una investigación titulada "Resignificación del algoritmo para operar aditivamente con fracciones en un contexto escolar". El objetivo general fue construir una propuesta didáctica que a través de un trabajo conceptual resignifique el algoritmo para operar aditivamente con fracciones. Para ello, elaboró una secuencia didáctica de actividades, la cual se aplicó a estudiantes de secundaria de 11 y 12 años, teniendo como resultados que estos lograron resignificar los conceptos y procedimientos experimentados y, desarrollaron un razonamiento argumentativo.

Otro ejemplo de esta problemática, es el estudio relacionado con la noción de fracción aplicado a jóvenes de 12 a 15 años, estudiantes de secundaria del Estado de México, en el que se les planteó un problema relacionado con el reparto de una pizza, en cuya solución interviene el concepto de equivalencia de fracciones, adición, diferencia y multiplicación de fracciones. Flores (2012, pp. 30-31) encontró que las principales dificultades fueron: (a) la interpretación del problema, (b) no considerar las condiciones del problema, (c) enfrentarse con una fracción y repartirla a su vez en partes iguales, y (d) no saber utilizar fracciones equivalentes para realizar el reparto solicitado.

Otra investigación relacionada con el uso de fracciones la realizó López (2012, p. 57), cuyo objetivo fue desarrollar una propuesta didáctica para la enseñanza del concepto de fracción considerando la relación parte-todo, para alumnos del séptimo grado en Colombia. En esta investigación primeramente se aplicó una prueba diagnóstico para identificar los conocimientos que los estudiantes tenían acerca de las fracciones, considerando sus diversos significados y representaciones. En esta prueba se detectaron fallas en relación a la conceptualización de fracción.

En el caso particular de la materia de Fundamentos de Matemáticas que se imparte en el primer semestre en las carreras de ingeniería del Instituto Tecnológico de Sonora, los contenidos de esta materia son principalmente de álgebra y trigonometría. Los alumnos enfrentan dificultades al momento de utilizar fracciones en cualquiera de los contenidos, ya sean productos notables, factorización, operaciones básicas con polinomios, más aún cuando se trata de exponentes fraccionarios, operaciones con expresiones racionales y las razones trigonométricas.

Esta materia tuvo 21.37% de índice de reprobación, 43% alumnos ausentes y

2.21% de alumnos dados de baja en el semestre enero-mayo de 2013 (ver figura 1), solo el 33.42% de los alumnos aprobaron la materia, lo que constituye un cuello de botella, ya que está seriada con otras materias de matemáticas.

Las fracciones forman parte del conjunto de conocimientos previos necesarios para la construcción de nuevos significados. Con el fin de identificar en los alumnos las dificultades que presentan acerca de las fracciones, se elaboró un instrumento diagnóstico. Este instrumento consta de siete reactivos, algunos de los cuales son preguntas abiertas y otros ejercicios que requieren un procedimiento para obtener máximo común divisor o simplificar fracciones.

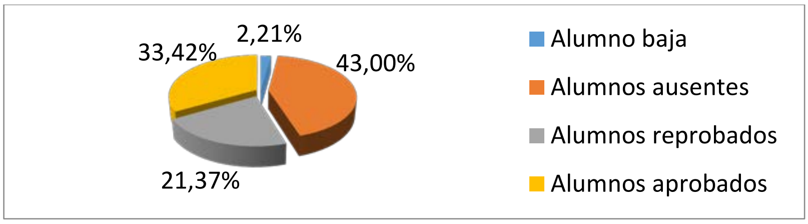


Figura 1. Índices de reprobación y deserción de la materia de Fundamentos de Matemáticas del semestre enero-mayo de 2013.

Se aplicó el instrumento diagnóstico a un grupo de la materia de Fundamentos de Matemáticas en el semestre agosto-diciembre de 2013. En el grupo estaban inscritos 35 alumnos, de los cuales asistieron y resolvieron el instrumento un total de 31 alumnos. Se observó que el 32% de los alumnos desconoce las partes de las fracciones, un 22.6% desconoce el significado de fracciones equivalentes y un 58% no logra simplificar cualquier fracción. Ante esta problemática es prioritario buscar soluciones para que los estudiantes de nivel universitario logren comprender el concepto de fracción, equivalencia y simplificación de fracciones.

El departamento de Matemáticas de ITSON ha realizado esfuerzos para dar solución a esta problemática capacitando profesores y ofreciendo asesorías gratuitas a los estudiantes por maestros y alumnos tutores, sin embargo la problemática persiste. Ya que la enseñanza de las fracciones no está incluida en el plan de estudios se sugiere, como alternativa, desarrollar una propuesta didáctica para autoestudio, con uso de tecnología. Con esta propuesta se pretende que los estudiantes mejoren su rendimiento académico en los aspectos relacionados a este tema. Para fines de este trabajo, el rendimiento académico es medido a través de las calificaciones de exámenes aplicados a los alumnos.

1.1 Objetivo general

Desarrollar una secuencia didáctica con uso de tecnología, para que estudiantes de nivel universitario, de forma independiente, comprendan significativamente la simplificación de fracciones.

1.2 Objetivos específicos

a. Determinar si la secuencia didáctica ayuda a mejorar el rendimiento académico de los estudiantes en relación a la simplificación de fracciones, para evaluar su efectividad.
b. Conocer la opinión de los estudiantes, a través de la aplicación de una

encuesta, para valorar la secuencia didáctica.

1.3 Hipótesis

La implementación de una secuencia didáctica sobre simplificación de fracciones con uso de tecnología, mejora el rendimiento académico de los estudiantes.

1.4 Justificación

"El estudio de las fracciones es importante por sí mismo y porque permite el desarrollo de nociones útiles para el conocimiento de temas más avanzados, tales como el razonamiento proporcional y el estudio de las expresiones racionales en el álgebra" (Alarcón et al., 1994, p. 81). Clarke y Roche (2009, p. 128) comentan al respecto, que es generalmente aceptado que las fracciones formen parte importante del currículo de matemáticas en el nivel básico, sustentando el razonamiento proporcional, así como temas posteriores, como el álgebra y la probabilidad.

Las fracciones intervienen durante la vida universitaria del alumno. Tal es el caso de las carreras de ingeniería de ITSON, donde se utilizan en materias como Cálculo, Probabilidad y Estadística, Ecuaciones Diferenciales y Álgebra Lineal. Además en materias propias de algunas carreras como la de Ingeniería Civil, por ejemplo en Topografía, Estática, Construcción y Análisis Estructural, así como la carrera de Ingeniero Químico, en Balance de Materia y Energía. El número de materias en los que intervienen las fracciones es muy amplio, de ahí la importancia de que el alumno domine este tema, pues es un conocimiento previo interviniente en la construcción de nuevos significados. No únicamente en el ámbito escolar, detrás de las operaciones que cotidianamente se realizan en el comercio, la industria, en los bancos, entre otros, están las fracciones. Por ejemplo, en un cuarto de hora…, medio kilo de…, la medida de…. es tres octavos (Cardoso, Cortina y Pérez, s. f., pp. 1-2).

2. Marco referencial

2.1 Secuencia Didáctica

Según Obaya y Ponce (2007, p. 19), una secuencia didáctica se refiere a un modelo alternativo de enseñanza que permite el logro de los objetivos de una planeación educativa. Una secuencia comprende un conjunto de situaciones didácticas o actividades ordenadas con un grado de dificultad progresivo, en las que interactúan alumnos, profesor y medios, para la comprensión de un objeto matemático específico.

Una secuencia evita la improvisación y la dispersión al tener una estructura definida, esto no quiere decir que la secuencia no sea flexible, ésta puede y debe adaptarse para cumplir los fines para los que fue creada. Es además, es un instrumento útil para organizar los contenidos escolares.

Martínez (s.f., pp. 5-8) indica que la planeación de una secuencia didáctica debe responder a las siguientes preguntas: (a) Qué. Ubicar el contenido que se quiere trabajar, es útil considerar los conocimientos previos de los alumnos para saber con qué nivel iniciar; (b) Por qué. Esto es la justificación o la razón del contenido; (c) Cómo. Señalar las actividades y forma de trabajarlas; (d) Con qué.

Esto es, incluir los recursos necesarios para el logro de las actividades; (e) Dé qué manera. Es la organización de tiempos, así como si será de forma individual o en equipo; y (f) Evaluación. Esta debe contemplar la forma de evaluar el aprendizaje, pero también la evaluación de la secuencia didáctica.

Además de la planeación de la secuencia, Martínez (s. f., pp. 5-8) señala que al diseñar una secuencia didáctica con uso de tecnología se deben tomar en cuenta los siguientes elementos: (a) Asignar un título, (b) Establecer en qué materia y en qué periodo escolar se impartirá, (c) Señalar el propósito de aprendizaje, (d) Señalar los recursos que se utilizarán, (e) Indicar qué actividades se realizarán fuera del salón de clase, (f) Aclarar qué productos se desarrollarán por parte de los alumnos y (g) Indicar bajo qué criterios se evaluará el aprendizaje.

2.2 Tecnologías de la Información y la Comunicación (TIC)

Las tecnologías de la información y la comunicación (TIC) se entienden como un conjunto de técnicas, desarrollos y dispositivos avanzados, en fin, toda forma de tecnología usada (software y hardware) ya sea para crear, almacenar, intercambiar o bien, para procesar información en varias modalidades, tales como datos, imágenes, videos, audios, presentaciones multimedias, páginas Web, sitio Web, y otras formas (Tello, 2007, p. 3).

Según Gómez y Macedo (2010, p. 223), la incorporación de las TIC en la sociedad, especialmente en el ámbito educativo, ha adquirido una progresiva importancia y ha evolucionado durante los últimos años, tanto, que la utilización de estas tecnologías en el aula pasará de ser una posibilidad a instituirse como una necesidad y como una herramienta de trabajo indispensable para el profesorado y el alumnado.

Cuevas-Salazar, García-López y Cruz-Medina (2008, p. 1090), mencionan que en el ámbito universitario, el uso de medios tecnológicos ha incrementado, ya que son un apoyo para promover de manera significativa el procesamiento de información y la construcción del conocimiento. Con ellos, los profesores pueden lograr motivar a sus estudiantes y mejorar las formas de aprendizaje.

Para Ferro, Martínez y Otero (2009, pp. 3-6), la principal ventaja de las TIC es que estas ayudan a crear entornos virtuales de aprendizaje, lo que implica que no exista un lugar específico, donde la educación es posible sin límites temporales, ajustándose al tiempo de aprendizaje de cada estudiante. Además las TIC favorecen la adaptación del proceso de estudio a las características educativas y cognitivas de cada persona, dejando de ser receptores pasivos de la información para ser procesadores activos, lo cual permite hacer conciencia de la información procesada, favoreciendo el conocimiento.

Algunas de las TIC más utilizadas en educación son los programas didácticos o software educativo, Barboza (2005, p. 1) los define como programas computacionales creados específicamente como medio didáctico. Esto quiere decir que se utilizan para facilitar los procesos de enseñanza y aprendizaje. Juegan un importante papel en la enseñanza, ya que entre las ventajas que ofrecen es la presentación de contenidos más dinámicos, flexibilidad de adaptación, facilidad en la actualización de contenidos, interactividad, adaptación a cualquier nivel educativo

(Abánades, Botana, Escribano y Tabera, 2009, pp. 6-8).

Una herramienta tecnológica muy utilizada en educación es la página Web. Según Jiménez, (2009, citado por Pantoja, Lozano y Portillo, 2013, p. 6) una página Web es un documento que contiene información específica de un tema en particular y que es almacenado en algún sistema de cómputo que se encuentre conectado a la red mundial de información denominada Internet conocida como WWW (World Wide Web), que se basa en la tecnología hipertexto/hipermedia. De esta forma, este documento puede ser consultado por cualquier persona que se conecte a esta red mundial de comunicaciones.

Algunas funciones de una página Web en educación pueden ser: (a) Sustitutiva, ya que sustituir la educación presencial por la educación a través de los medios; (b) Complementaria, abarca desde la simple información hasta la modificación profunda de técnicas, métodos o contenidos de la enseñanza, (c) Extensiva, destinada a mejorar la instrucción recibida en las estructuras educativa; y (d) De iniciación y desarrollo, se ejerce sobre la población que no haya estado sometida a la acción de ningún sistema educativo (Aguilera, 1982, citado por Ferrer, 2005, pp. 204-205). Al conjunto de páginas Web relacionadas entre sí por medio de hipervínculos y ordenadas jerárquicamente, se le conoce como sitio Web.

Otra herramienta tecnológica utilizada en educación, específicamente en el área de matemáticas es el Software matemático. Uno de estos es GeoGebra, una aplicación de Software libre, quiere decir que tiene libertad de ejecución, de redistribución, de estudio para modificaciones o mejoras y su publicación (Abánades et al., 2009, p. 5). Las construcciones se pueden exportar fácilmente a páginas Web y ofrece un wiki donde se pueden compartir las construcciones (Losada, 2007, p. 1).

Al exportar las realizaciones o construcciones de Geogebra a una página Web, se genera un Applet. Este es una pequeña aplicación (HTML) escrita en Java y que se puede ejecutar en cualquier navegador que disponga de un intérprete Java, sin la necesidad de intercambiar información con el servidor ya que siempre se ejecuta en el cliente.

GeoGebra cae dentro de dos categorías de software matemático, el CAS (Sistema de Álgebra Computacional) y el DGS (Sistema de Geometría Dinámica) lo que permite combinar las representaciones gráficas y algebraicas y mostrar ambas al mismo tiempo, esto representa un gran valor agregado, ya que los estudiantes pueden articular ambas representaciones (Losada, 2007. pp. 5-6).

Los alumnos pueden realizar diversas actividades con GeoGebra, como construcciones geométricas rápidas y precisas, razonar y comprender acerca de las relaciones geométricas de diferentes objetos, manipular figuras geométricas e identificar las diferencias y semejanzas entre ellas, ejecutar cálculos de medidas, controlar el aspecto gráfico de una figura con el mouse, observar los pasos de una construcción para repetirla cuantas veces sea necesario, hacer conjeturas acerca de esas construcciones, entre otras (Castellanos, 2010, p. 46).

Según García (2011, pp. 392-393), GeoGebra favorece el desarrollo de la autoconfianza de los estudiantes, ya que permite construir y tener actividad en todo momento. La interactividad o retroalimentación inmediata y efectiva que ofrece el software invita a la toma de conciencia y corrección de los errores cometidos. La facilidad de uso y la rapidez de respuesta incitan al estudiante a la búsqueda de diversas formas de encontrar una solución.

3. Metodología

3.1 Participantes y contexto

La presente investigación se desarrolló en el Instituto Tecnológico de Sonora (ITSON), la cual es una universidad pública estatal con sede en Ciudad Obregón, Sonora. La población comprende a todos los alumnos de primer año de las carreras de ingeniería, que cursan la materia de Fundamentos de Matemáticas. Estos alumnos se encuentran en un rango de edad de los 18 a los 20 años. El 20% de estos alumnos es de sexo femenino, el 30% trabaja además de estudiar y el 90% procede de escuelas públicas. En la materia de Fundamentos de Matemáticas se utilizan con bastante frecuencia las fracciones y contiene los temas que son base para cursos posteriores, tanto de las ciencias básicas como los propios de sus carreras. La muestra correspondió a un grupo de 14 alumnos inscritos en esta materia, los cuales no fueron elegidos al azar.

La implementación de la propuesta didáctica se llevó a cabo en cinco sesiones de 50 minutos cada una, en el período escolar Enero-Mayo de 2014. Durante este semestre la mayoría de los alumnos estaba cursando la materia por segunda vez, ya que el período regular de admisiones es en el semestre que corresponde a Agosto-Diciembre.

3.2 Instrumentos

Se elaboraron dos exámenes, uno diagnóstico y otro examen final para determinar las competencias de los estudiantes en cuanto a las fracciones equivalentes y la reducción de fracciones. Estos instrumentos constan de 11 y 12 reactivos respectivamente, algunos son preguntas abiertas y otros son ejercicios que requieren de un procedimiento para obtener máximo común divisor o simplificar fracciones. A estos exámenes se les asignó una calificación para realizar los análisis correspondientes.

Para medir la opinión que los alumnos o participantes tienen sobre la secuencia didáctica acerca de simplificación de fracciones, se elaboró una encuesta, que consta de nueve ítems en Escalamiento Likert y una pregunta abierta. Esta última con el fin de que los participantes expresaran con mayor libertad cualquier opinión, positiva o negativa acerca de la secuencia didáctica.

Las preguntas son acerca de la importancia de la secuencia, la claridad y orden de las instrucciones y el tiempo de ejecución. También se cuestiona la parte tecnológica para evaluar su relevancia y manejabilidad. Otro punto importante es la participación del maestro, si es o no relevante.

La presente investigación contempla el enfoque cuantitativo. Ya que uno de los objetivos de este estudio es determinar si la secuencia didáctica ayuda a mejorar el rendimiento académico de los estudiantes en relación a la simplificación de fracciones, para evaluar su efectividad, se considera que esta investigación es de tipo experimental. El diseño adecuado para esta investigación fue el cuasiexperimental, ya que los participantes no se eligieron al azar, sino que los grupos ya están formados antes del experimento.

Para conocer la opinión de los alumnos sobre la secuencia didáctica, se usó una variable independiente y dos variables dependientes. La variable independiente que se manipuló en el experimento fue la secuencia didáctica, la cual fue aplicada al grupo elegido. El efecto que esta causó en la comprensión de los participantes sobre simplificación de fracciones, fue una de las variables dependientes y el efecto que causó en la actitud hacia la secuencia didáctica de los estudiantes fue la otra.

3.3 Diseño de la secuencia didáctica

Para el diseño de la secuencia didáctica se utilizó el software GeoGebra y se colocó en un sitio Web, para que esta se pudiera acceder a ella por los alumnos desde cualquier computadora con acceso a Internet.

La secuencia contiene instrucciones, conceptos, Applets de GeoGebra, preguntas, llenado de tablas y aplicación dentro de un contexto intramatemático. En los Applets de GeoGebra se utilizan deslizadores, herramienta para cambiar valores que a su vez modifican ciertas condiciones.

La idea principal de los Applets fue tomada de uno elaborado por Colombo (2012), que consiste principalmente en dos deslizadores, uno correspondiente al denominador y otro al numerador de una fracción, con los valores de estos se forma un rectángulo de cierto color, dividido en partes iguales, la cantidad de partes la determina el valor del denominador, con otro color se resalta el valor del numerador en la figura. Otro rectángulo abajo representa una fracción equivalente a la anterior y se forma multiplicando el valor de un tercer deslizador por el numerador y por el denominador. La conversión a números decimales de ambas fracciones se muestra con una flecha en una recta numérica. Para fines de la secuencia didáctica se realizaron algunas modificaciones a la idea original de Colombo, además se diseñaron nuevos Applets, como el de simplificación de fracciones, el de máximo común divisor, entre otros. La secuencia incluye en total seis páginas Web vinculadas, las cuales se nombran de la siguiente manera en el presente trabajo: *Inicio*, *Fracciones*, *Fracciones Equivalentes*, *Simplificación*, *Máximo Común Divisor* y *Aplicación*.

La página Web Inicio es básicamente una bienvenida, en la que se da una breve explicación de la importancia de las fracciones, del uso de los Applets y se indican los materiales que se requieren para realizar las actividades. Además se incluye un mensaje de audio por medio de un avatar en el que se resalta la importancia de leer las instrucciones y se invita a explorar la página.

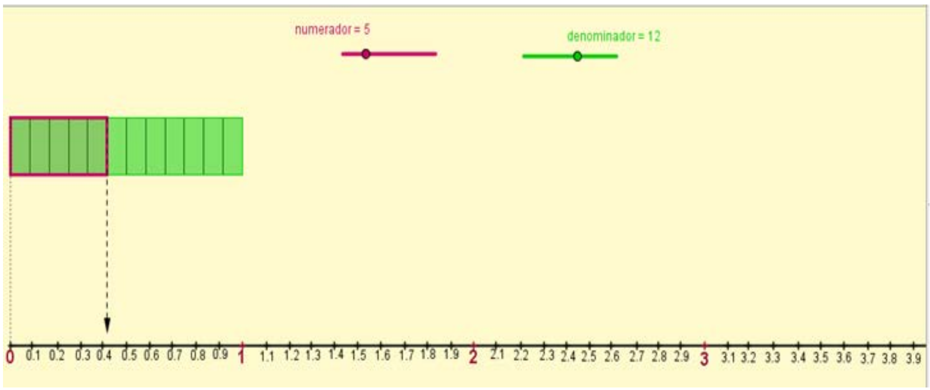


Figura 2. Applet de GeoGebra insertado en la página Web Fracciones. Primer acercamiento del alumno a la actividad matemática relacionada al concepto de fracción.

Las prácticas matemáticas empiezan en la siguiente página que tiene como título Fracciones. Esta parte de la secuencia incluye un Applet (ver figura 2) cuyo fin es que los alumnos identifiquen en el rectángulo el numerador y el denominador, para formar la fracción y que a su vez se familiaricen con el Applet, ya que las actividades posteriores se realizan con la misma representación salvo algunas modificaciones que va requiriendo la actividad.

La página Fracciones equivalentes incluye seis Applets. En la figura 3 muestra dos rectángulos, el primero con una representación geométrica de la fracción que se forma con los deslizadores y el segundo es una representación geométrica similar a la anterior pero sin divisiones, es decir, se desconocen numéricamente el numerador y el denominador.

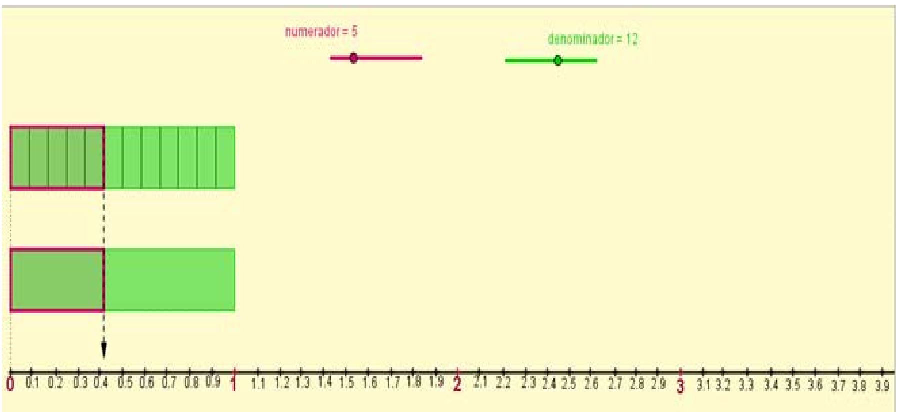


Figura 3. Applet de GeoGebra insertado en el sitio Web que corresponde a la página "Fracciones Equivalentes" sin divisiones.

Esta sección de las Fracciones equivalentes tiene la finalidad de que el alumno visualmente identifique las que son equivalentes en las representaciones geométricas dadas, ya que tienen el mismo valor numérico en la recta. Las partes sombreadas para el numerador y denominador son iguales, la diferencia es que no están divididas de la misma manera.

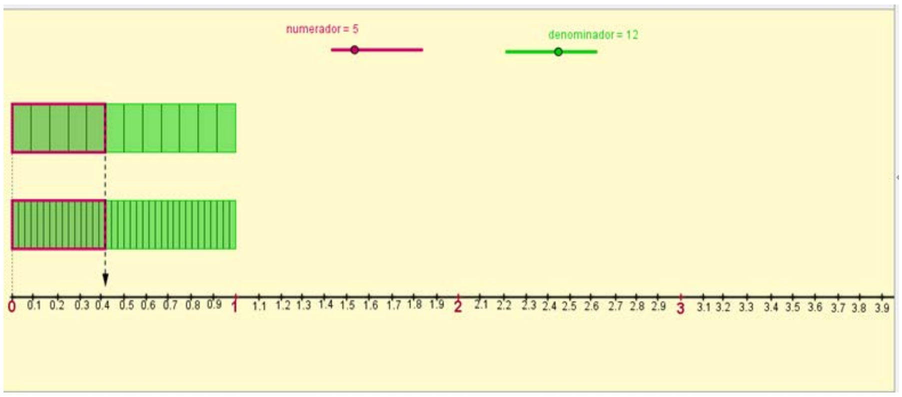


Figura 4. Applet de GeoGebra insertado en el sitio Web que corresponde a la página "Fracciones Equivalentes" con divisiones.

El Applet de la figura 4 contiene los mismos rectángulos pero el segundo ya tiene divisiones, de manera que es posible establecer una cantidad para el numerador y el denominador. Se solicita llenar una tabla formando las fracciones indicadas con los deslizadores y que se encuentre la fracción que representa el segundo rectángulo, esta es una tabla interactiva, ya que es un Applet con el que se puede verificar inmediatamente si las respuestas son correctas o no.

Con el Applet de la figura 5, ha de concretarse la actividad anterior, en el que se agrega la representación aritmética de la equivalencia, mostrando que el numerador y el denominador de la fracción deben multiplicarse por el mismo valor para obtener la fracción del segundo rectángulo. Aritmética y geométricamente se muestra una equivalencia.

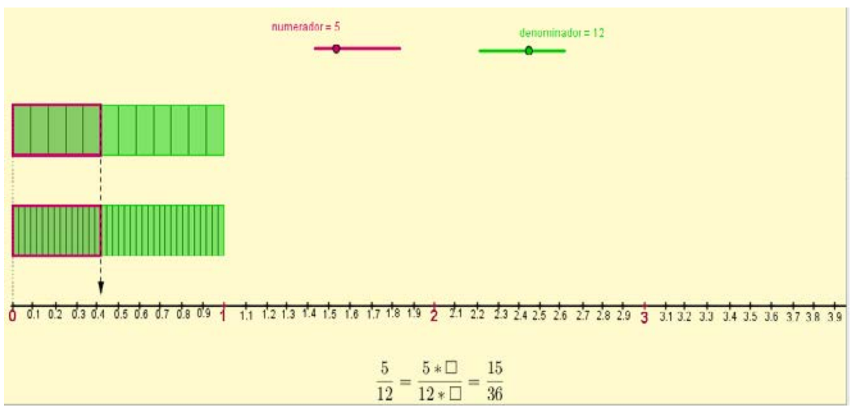


Figura 5. Applet de GeoGebra en el que se muestra la equivalencia aritmética y geométrica.

Haciendo uso del mismo Applet, con el propósito de que establezca la equivalencia de fracciones con números enteros, se pide al estudiante formar varias fracciones: (a) con numerador cero y cualquier denominador, (b) con numerador y denominador iguales, (c) que el numerador sea el doble del denominador y, (d) que el numerador sea el triple del denominador.

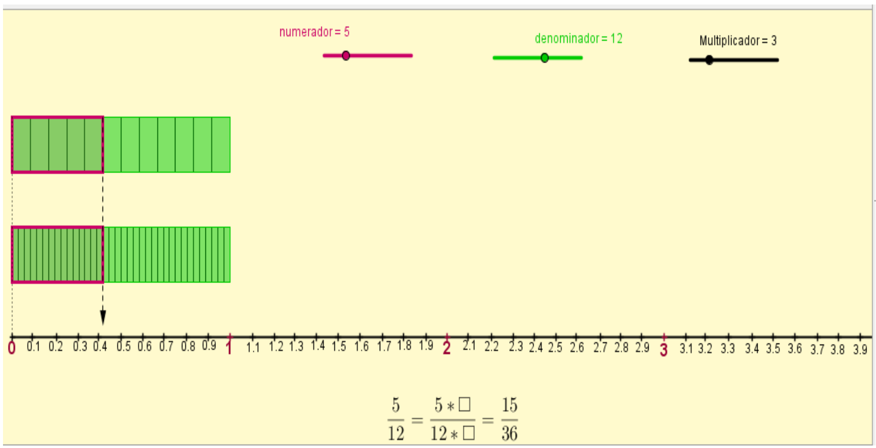


Figura 6. Applet de GeoGebra que incluye un deslizador multiplicador, para modificar la fracción equivalente.

El Applet de la figura 6 tiene como variante un nuevo deslizador, que aumenta o disminuye la cantidad de divisiones del segundo rectángulo. Se pide completar una tabla interactiva (ver figura 7), en la que el alumno debe encontrar valores faltantes, ya sea la fracción equivalente o el valor por el que hay que multiplicar numerador y denominador o finalmente encontrar la fracción inicial, con la finalidad de que intervenga o emerja el procedimiento para establecer equivalencia de fracciones y también para introducirlo a la reducción, ya que en algunos casos tendrá que dividir en lugar de multiplicar para encontrar el valor inicial. Ciertos ejercicios los podrá resolver con apoyo del Applet, pero en la gran mayoría tiene que hacerlo por sí mismo.

Ya que GeoGebra no permite espacios vacíos en las casillas de entrada, fue necesario colocar ceros (ver figura 7) en los lugares en los que el alumno debe introducir un valor para formar las equivalencias. Esto mismo sucede en otros Applets en los que se colocaron distintos valores de forma estratégica en las casillas de entrada.

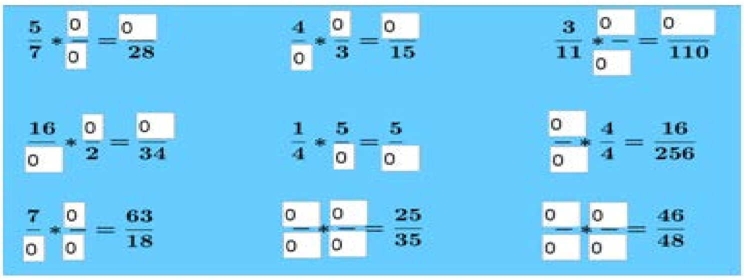


Figura 7. Applet de GeoGebra interactivo para encontrar valores faltantes en las equivalencias.

La página Web Simplificación de fracciones incluye un Applet similar a los anteriores. En este el tercer deslizador es un divisor que reduce la fracción (ver figura 8). Mientras numerador y denominador no sean divisibles por el mismo valor, el segundo rectángulo no se forma, por lo que no se visualiza.

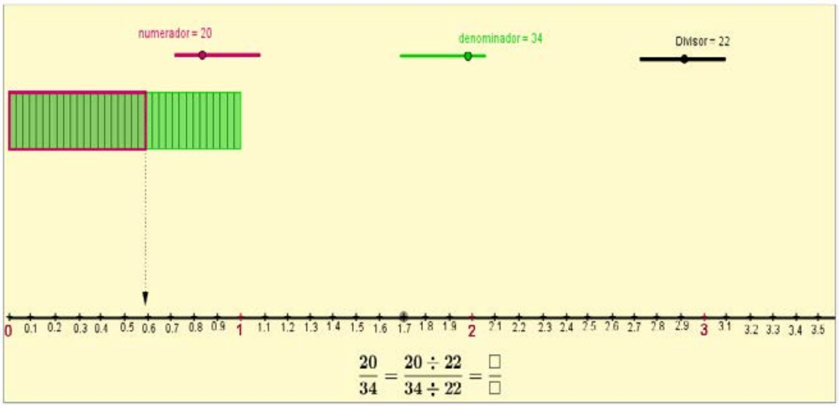


Figura 8. Applet de GeoGebra con un deslizador divisor para simplificar fracciones.

Con el uso del Applet se pide llenar una tabla, para reducir la misma fracción las veces que sea posible, empezando con el divisor más pequeño. Se le pregunta al alumno ¿Con cuál divisor se obtuvo la fracción irreducible? Con la finalidad de que intervenga o emerja el procedimiento para obtener la fracción irreducible y el concepto de máximo común divisor (mcd).

La página Web Máximo común divisor, contiene un Applet con el que se pretende ayudar a encontrar el mcd de 2 números (ver figura 9), con el método de descomposición en factores primos, necesarios para la comprensión y establecimiento de un procedimiento para encontrar el mcd, para reducir fracciones al máximo. Se solicita llenar una tabla para encontrar fracciones irreducibles con apoyo del Applet y otra tabla sin el apoyo de este para verificar que lograron el objetivo final de la propuesta.

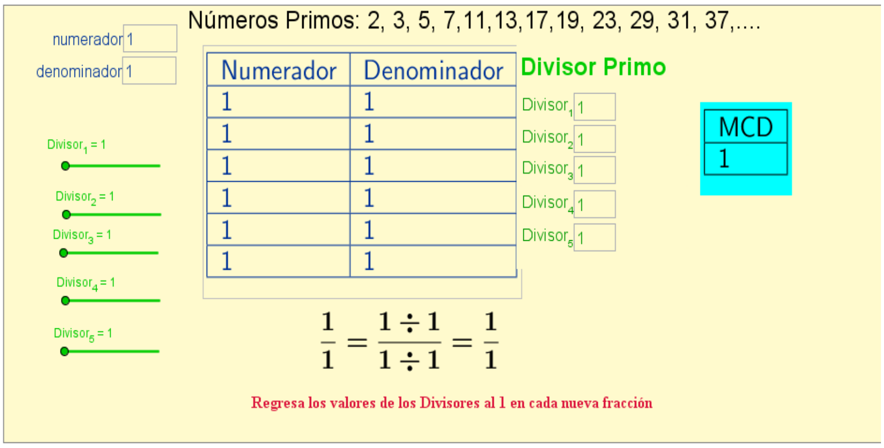


Figura 9. Applet de GeoGebra para encontrar el máximo común divisor.

La página Web Aplicación contiene información sobre las posibles aplicaciones de la simplificación de fracciones tanto en lo cotidiano como en un contexto escolar. Como último ejercicio se pide que identifiquen en diferentes expresiones matemáticas, la fracción y la simplifiquen, con un Applet interactivo con el que pueden verificar sus respuestas (ver figura 10).

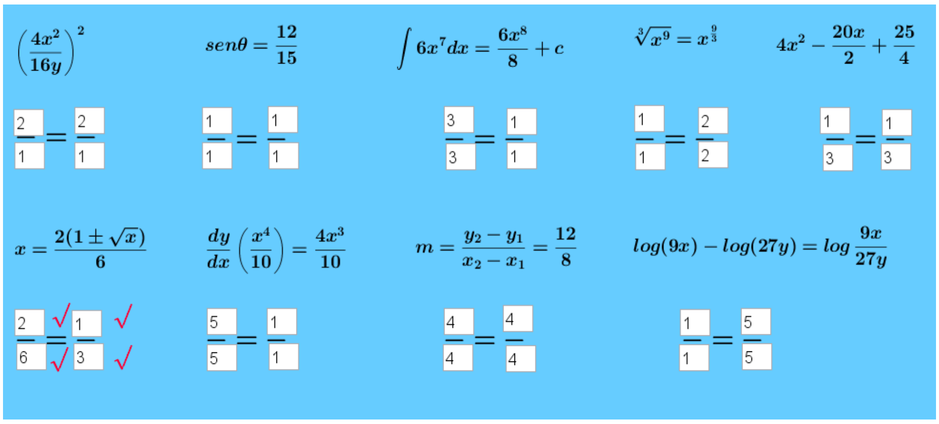


Figura 10. Applet de GeoGebra para identificar una fracción en una expresión algebraica y simplificarla.

3.4 Procedimiento

A continuación se describe el procedimiento que guio la investigación.

1. Elaboración de examen diagnóstico y examen final. Se elaboró un examen diagnóstico para identificar el nivel de comprensión de los estudiantes acerca de la simplificación de fracciones. Además se elaboró el examen final para comparar los sistemas de prácticas declarados en ambos exámenes. El examen final se aplicó después de implementada la secuencia didáctica.
2. Elaboración de la Secuencia didáctica. Para ello se utilizó el software GeoGebra y se colocó en un sitio Web.
3. Elaboración de encuesta de opinión. Para conocer la opinión de los participantes acerca de la secuencia didáctica, se elaboró una encuesta con el escalamiento tipo Likert.
4. Implementación de la secuencia. Este paso se llevó a cabo en varias etapas: (a) Se efectuó la aplicación del examen diagnóstico a 12 de los 14 alumnos participantes, en el aula de clases (tiempo estimado 20 minutos), una semana antes de implementar la secuencia didáctica; (b) se calificaron los exámenes, (c) se citó al grupo al lugar donde se llevaría a cabo la puesta en escena, aula del Centro de Informática y Servicios de Cómputo (CISCO), para que cada alumno dispusiera de una computadora con Internet y pudiera acceder a la secuencia didáctica; (d) Se implementó la secuencia didáctica en tres sesiones de 50 minutos; (e) Se aplicó el examen final (tiempo estimado 20 minutos) y la encuesta de opinión (15 minutos) a los 14 alumnos involucrados en el estudio; y (f) Se calificó el examen final.
5. Análisis de resultados. Se realizó un análisis estadístico de los resultados de los exámenes diagnóstico, con una prueba de hipótesis para decidir si la hipótesis era aceptada, con los datos obtenidos en la muestra. El método utilizado para probar la hipótesis fue la *Prueba t*. Los resultados recolectados por la encuesta de opinión se analizaron utilizando estadística descriptiva,

mediante gráficas de pastel.

4. Análisis y resultados

4.1 Resultados de exámenes

Para evaluar el impacto de la secuencia didáctica en el aprendizaje de los 14 alumnos involucrados sobre simplificación de fracciones, se aplicó un examen diagnóstico y un examen final. Se analizaron los resultados de ambos exámenes con una prueba de hipótesis, por medio de una prueba t, para medias de dos muestras emparejadas. La media y desviación estándar para el examen diagnóstico fueron 24.75 y 15.78 respectivamente, para el examen final fueron 45.5 y 27.31.

Las hipótesis para esta prueba fueron:

H_0: el promedio de las calificaciones de los alumnos en el examen diagnóstico es igual al promedio de las calificaciones de los alumnos en el examen final.

H_1: el promedio de las calificaciones de los alumnos en el examen diagnóstico es menor al promedio de las calificaciones de los alumnos en el examen final.

Esta prueba arrojó un valor $t = -3.319$ y un valor $p = .003$ con 11 grados de libertad, por lo que se rechaza la hipótesis nula con un nivel de significancia de .05 y se acepta la hipótesis alterna, ya que el valor $p < 0.05$.

Como hipótesis preliminar de este estudio se consideró que la implementación de una secuencia didáctica sobre simplificación de fracciones con uso de tecnología, mejora el rendimiento académico de los estudiantes. Con los resultados obtenidos se puede concluir que sí existe una mejora significativa en el rendimiento académico tras implementar la secuencia didáctica. Por lo tanto, se considera que la secuencia didáctica contribuyó a la comprensión de simplificación de fracciones.

4.2 Resultados de la encuesta de opinión

Para el análisis de la encuesta se utilizó el método de Escalamiento Likert y se realizaron gráficas de pastel. En el Escalamiento Likert se asignó a cada respuesta de opción múltiple un valor. Debido a que las afirmaciones de la encuesta son positivas, la respuesta de más alta puntuación es la que implica una actitud favorable hacia la afirmación. Son cinco respuestas por afirmación, de manera que a “muy en desacuerdo” se le asignó el valor 1, ascendiendo los valores conforme las actitudes favorecen la afirmación.

La puntuación se obtiene sumando los valores dados por cada encuestado, dado que la encuesta fue contestada por 14 alumnos, la puntuación más alta que favorece a la afirmación, puede ser de 70 puntos, y la más baja de 14 (ver figura 11).

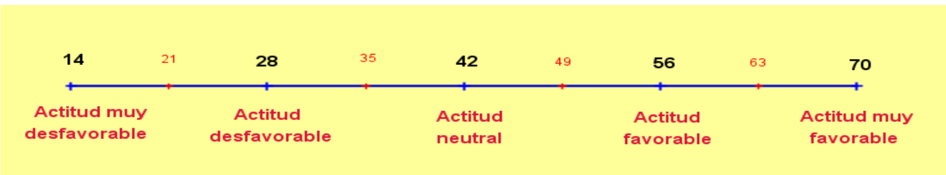


Figura11*. Gráfica de la actitud de los estudiantes hacia una afirmación según la puntuación dada.*

Para efectos de este trabajo, la puntuación de las respuestas se consideró de acuerdo a los siguientes rangos: si la puntuación de las respuestas estuvo en un rango de 14 a 21, se clasificó como muy desfavorable, de 22 a 35 se tomó como desfavorable, de 36 a 49 como neutral, de 50 a 63 como favorable y de 64 a 70 como muy favorable.

La primera afirmación de la encuesta “Hubo claridad en las instrucciones” tuvo un total de 60 puntos. De acuerdo a los rangos propuestos se tiene una actitud favorable por parte de los alumnos. La distribución de los estudiantes hacia esta afirmación, el 93% de los estudiantes opinó que estuvo por lo menos de acuerdo en que las instrucciones fueron claras y solo un 7% tuvo una opinión indecisa. De esto se puede concluir que la redacción de las instrucciones de la secuencia didáctica fue clara.

La segunda afirmación “La secuencia de las actividades tuvo un orden de menor a mayor dificultad” resultó con un total de 56 puntos siendo esta también una puntuación favorable. El 7% de los estudiantes opinó estar en desacuerdo, por lo que es recomendable considerar hacer modificaciones en el orden del grado de dificultad de la secuencia didáctica.

“El grado de dificultad de los ejercicios fue adecuado” es la afirmación 3, en la que los estudiantes, según la escala Likert la favorecieron con 62 puntos. Los resultados muestran que un 86% por lo menos está de acuerdo con esta afirmación, solamente un 14% se mostró neutral y no existe una sola opinión en contra. Se concluye que no es necesario hacer modificaciones en el grado de dificultad de los ejercicios.

En la afirmación 4 que dice “El tiempo de ejecución para lograr el objetivo de las actividades fue adecuado”, tuvo una puntuación de 61, la cual es una puntuación favorable. El 93% consideró estar por lo menos muy de acuerdo con esta afirmación, mientras que el 7% se mantuvo neutral. Por lo que, de acuerdo a la opinión de los estudiantes, el tiempo de ejecución fue adecuado.

La quinta afirmación “La actividad ayudó al entendimiento del tema” tuvo un total de 59 puntos, lo que resultó favorable, según la escala Likert. Un estudiante omitió su respuesta en este ítem. Un alto porcentaje, 84%, estuvo de acuerdo con esta afirmación mientras que el16% se mantuvo neutral. Los estudiantes confirman que la secuencia didáctica ayudó a entender la simplificación de fracciones, sin embargo por el porcentaje de estudiantes que se mostró neutral, es recomendable comparar estos resultados con los del análisis cualitativo para contemplar posibles mejoras.

La afirmación 6 “EL software es amigable” tuvo un puntaje de 63, lo que se considera favorable, cercano a muy favorable. La mayoría de los estudiantes 57% estuvo muy de acuerdo con que el software es amigable, un 36% solo estuvo de acuerdo y un 7% mostró una opinión neutral. Los Applets de GeoGebra y la página Web fueron entendibles y fáciles de usar, por lo que se concluye que el software fue adecuado según la opinión de los estudiantes.

“El uso del software ayudó a la comprensión del tema” es el ítem 7, al cual los estudiantes dieron una puntuación de 60 puntos, lo que resultó favorable. El 86% de los alumnos estuvo por lo menos de acuerdo con esta afirmación, mientras que un 14% se mostró neutral, ni de acuerdo ni en desacuerdo. Con este resultado y el anterior, se confirma que el uso de las TIC facilitan los procesos de enseñanza y aprendizaje, por la presentación de contenidos dinámicos, su flexibilidad de adaptación e interactividad. Sin embrago, es importante poner atención, ya que el 14% manifestó neutralidad en cuanto a que el software fue de ayuda para comprender el tema, por lo que es necesario analizar el uso de la tecnología con otros análisis, por ejemplo el cualitativo.

La siguiente afirmación "la actividad puede realizarse sin la presencia de un maestro" tuvo una puntuación de 50 lo que se considera como favorable. Sin embargo, un 22% de los estudiantes no estuvo de acuerdo con esta afirmación. La secuencia didáctica se diseñó para resolverse sin la presencia de un maestro, un porcentaje importante de alumnos no lo consideró así.

Por último, la afirmación "Recomendarías esta actividad para estudiar la simplificación de fracciones" es la más favorecida con 65 puntos, resultando en la clasificación de muy favorable. El 72% estuvo muy de acuerdo en recomendar la actividad para el estudio de la simplificación de fracciones. Un 21% estuvo de acuerdo y un 7% se mantuvo neutral. Los estudiantes recomiendan estudiar simplificación de fracciones con esta secuencia didáctica.

5. Conclusiones

Una vez analizados los resultados bajo el enfoque cuantitativo, se puede concluir, que la secuencia didáctica sobre simplificación de fracciones propuesta, tuvo un impacto favorable en los estudiantes que participaron en la investigación, ya que el rendimiento académico mejoró significativamente en relación a la simplificación de fracciones, tras su implementación.

Los estudiantes están a favor de la secuencia didáctica, les parece recomendable, por la claridad de las instrucciones, por el grado de dificultad y el tiempo de ejecución fue el adecuado, por el software amigable, aunque un 21% manifestó que no se puede realizar sin maestro.

La movilidad o dinamismo que ofrece el software de GeoGebra, permitió en un tiempo inmediato, obtener la representación geométrica de diferentes fracciones y su equivalencia. También se consiguió obtener el máximo común divisor para varios pares de números, en un tiempo de ejecución menor que si se hiciera de forma manual.

Es importante mencionar que en la figura 7 se utilizó el cero como número en las casillas de entrada y da la impresión de tener una indeterminación de cero sobre cero. Esto no representó ningún conflicto didáctico para los alumnos, ya que lograron realizar la actividad sin problema y sin que el profesor tuviera que intervenir en alguna duda.

Con la visualización se identificó la relación entre el valor de la fracción, su representación geométrica y su representación numérica, permitiendo a su vez, identificar la relación de esa fracción con la fracción equivalente, representada geométricamente. La verificación inmediata brindó confianza al estudiante, dándole seguridad para continuar si acertó, o bien, haciéndolo revisar y corregir en caso de haber errado.

El tiempo propuesto para la realización de la secuencia fue superior al tiempo de estudio, el 93% de los estudiantes ejecutó la secuencia didáctica en un tiempo menor del estimado, es decir, el tiempo de aprendizaje fue menor que el tiempo propuesto. El hecho de que la secuencia didáctica esté disponible en un sitio Web permite al estudiante aprender a su ritmo, revisando la secuencia las veces que sea necesario, ajustando el tiempo de estudio a su tiempo de aprendizaje.

Bibliografía

Abánades, M., Botana, F., Escribano, J. y Tabera, L. (2009). Software matemático libre. *La Gaceta de la RSME* [en línea], 12(2), 325-346. Recuperado el 7 de mayo de 2014, de http://gaceta.rsme.es/abrir.php?id=862

Alarcón, J., Bonilla, E., Nava, R., Rojano, T. y Quintero, R. (1994). *Libro para el Maestro. Matemáticas. Educación Secundaria.* D. F., México: SEP. Recuperado el 10 de marzo de 2014, de http://www.reformasecundaria.sep.gob.mx/matematicas/pdf/orientaciones/libromaestro.pdf

Barboza, L. (2005). Software Educativo: su potencialidad e impacto en los procesos de enseñanza y aprendizaje ¿aliado o adversario del profesor? Recuperado el 7 de mayo de 2014, de http://beceneslp.edu.mx/PLANES2012/2o%20Sem/06%20La%20tecnolog%EDa%20inform%E1tica%20aplicada%20a/Materiales/Unidad%20I/Software%20Educativosu%20potencialidad%20e%20impacto.pdf

Cardoso, E. R., Cortina, J.L., Pérez, L. (s. f.). El conocimiento cuantitativo sobre fracciones en los estudiantes de 6° grado de primaria. Trabajo presentado en el X Congreso Nacional de Investigación Educativa. Recuperado el 12 de junio de 2013, de http://www.comie.org.mx/congreso/memoriaelectronica/v10/pdf/area_tematica_05/ponencias/1587-F.pdf

Castellanos, I. (2010). Visualización y razonamiento en las construcciones geométricas utilizando el software GeoGebra con alumnos de II de Magisterio de la E.N.M.P.N. (Tesis inédita de maestría). Universidad Pedagógica Nacional. Recuperado el 7 de mayo de 2014, de http://www.cervantesvirtual.com/obra/visualizacion-y-razonamiento-en-las-construcciones-geometricas-utilizando-el-software-GeoGebra-con-alumnos-de-ii-de-magisterio-de-la-enmpn/

Clarke, D. & Roche, A. (2009). Students' fraction comparison strategies as a window into robust understanding and possible pointers for instruction. *Springer link*. Vol. 72, p.p. 127-138. Recuperado el 24 de enero de 2013, de http://link.springer.com/article/10.1007/s10649-009-9198-9#page-1

Colombo, F. (2012). GeoGebra. Equivalencia de fracciones. Recuperado el 5 de abril de 2013, de http://www.geogebratube.org/material/show/id/12474

Cuevas-Salazar, O., García-López, R., Cruz-Medina, I. (2008). Evaluación del impacto de una plataforma para la gestión del aprendizaje utilizada en cursos presenciales en el Instituto Tecnológico de Sonora. *Revista Mexicana de Investigación Educativa*. Vol. 13, No. 39, 1085-1107.

ENLACE, (2012). Recuperado el 12 de junio de 2013, de: http://www.enlace.sep.gob.mx/content/ms/pages/ estructura_de_la_prueba/habilidad_matematica.html

Ferrer, R. (2005). Diseño de páginas web en educación. Recuperado el 25 de abril de 2013, de http://www.tendenciaspedagogicas.com/Articulos/2005_10_11.pdf

Ferro, C., Martínez, A., Otero, M. (2009). Ventajas del uso de las TICs en el proceso de enseñanza-aprendizaje desde la óptica de los docentes. *EDUTEC, Revista Electrónica de Tecnología Educativa* [en línea], 29. Recuperado el 10 de marzo de 2014, de http://edutec.rediris.es/Revelec2/ revelec29/articulos_n29_pdf/5Edutec-E_Ferro-Martinez-Otero_n29.pdf

Flores, R. (2012). La noción de fracción como comparador parte-todo. *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa* [en línea], 24. Recuperado el 24 de enero de 2013, de http://www.clame.org.mx/acta.htm

Gallardo, A. (2011). Fracciones negativas y las nociones previas para el reconocimiento de su significado por estudiantes de secundaria. *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa* [en línea], 24. Recuperado el 24 de enero de 2013, de http://www.clame.org.mx/acta.htm

García, M. (2011). Evolución de actitudes y competencias matemáticas en estudiantes de secundaria al introducir GeoGebra en el aula. (Tesis inédita de doctorado). Universidad de Almería. Recuperado el 7 de mayo de 2014, de http://archive.geogebra.org/en/upload/files/Tesis_ MariadelMarGarciaLopez.pdf

Gómez, L. y Macedo, J. (2010). Importancia de las TIC en la educación básica regular. *Tecnología de la Información* [en línea], 14(25), 209-224. Recuperado el 10 de marzo de 2014, de http://sisbib.unmsm.edu.pe/bibvirtual/publicaciones/inv_educativa/2010_n25/pdf/a12v14n25.pdf

Larrazolo, N., Backhoff, E. & Tirado, F. (2013). Habilidades básicas de razonamiento matemático de estudiantes de educación media superior en México. *Revista Mexicana de Investigación Educativa* [en línea], 18(59), pp. 1137-1163. Recuperado el 14 de mayo de 2014, de http://www.comie.org.mx/v1/revista/portal.php?idm=es&sec=SC03&&sub=SBB&criterio=ART59005

López, J. F. (2012). Propuesta didáctica para la enseñanza del concepto de fracción en el grado séptimo considerando la relación parte-todo (Tesis inédita de maestría). Universidad Nacional de Colombia. Recuperado el 27 de abril de 2013, de http*://www.bdigital.unal.edu.co/ 5922/1/8410009.2012.pdf*

Losada, R. (2007). GeoGebra: la eficiencia de la intuición. *La Gaceta de la RSME*. Vol. 10, No. 1, 223-239. Recuperado el 5 de abril de 2013, de http://gaceta.rsme.es/abrir.php?id=619&zw=090333

Martínez, P. (s. f.). Secuencia didáctica. Recuperado el 17 de Junio de 2013, de https://docs.google.com/viewer?a=v&pid=sites&srcid=ZGdlbnAudW5hbS5teHxmaWxvc29maWF8Z3g6Mjk2Mjg3NDBiNDA0MGI3Zg

Obaya, A. y Ponce R. (2007). La Secuencia didáctica como herramienta del proceso enseñanza aprendizaje en el área de Químico Biológicas. *ContactoS* [en línea]. Vol. 63-19-25. Recuperado el 17 de Junio de 2013, de http://www.izt.uam.mx/newpage/contactos/anterior/n63ne/secuencia_v2.pdf

Olguín, E y Álvarez, M. (2012). El reparto con fracciones mediante “escenarios didácticos”. *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa* [en línea], 25. Recuperado el 24 de enero de 2013, de http://www.clame.org.mx/acta.htm

Pantoja, J., Lozano, A. y Portillo, M. (2013). Automatización del control de asistencia del personal docente del departamento de computación de la facultad experimental de ciencias de la universidad de Zulia. *Telematique* [en línea],12(2). Recuperado el 17 de Junio de 2013, de: http://www.redalyc.org/pdf/784/78428243001.pdf

Peña, P. (2011). Resignificación del algoritmo para operar aditivamente con fracciones en un contexto escolar (Tesis inédita de maestría), Instituto Politécnico Nacional. Recuperado el 24 de enero de 2013, de http://www.matedu.cicata.ipn.mx/tesis/maestria/ pena_2011.pdf

Pruzzo, V. (2012). Las fracciones: ¿Problema de aprendizaje o problema de enseñanza? *Revista Pilquen* [en línea]. Sección pedagógica, 16(8). Recuperado el 12 de junio de 2013, de http://www.revistapilquen.com.ar/Psicopedagogia/Psico8/8_Pruzzo_Fracciones.pdf

Qualding, D. (1982). La importancia de las matemáticas. *Perspectivas* [en línea], 12(4). Recuperado el 24 de enero de 2013, de http://unesdoc.unesco.org/images/0005/000524/052474so.pdf

Secretaría de Educación Pública. (2011). Matemáticas. Tercer grado. D. F., México: Editorial SEP.

Tello, E. (2007). Las tecnologías de Información y comunicaciones (TIC) y la brecha digital: su impacto en la sociedad de México*. Revista de Universidad y Sociedad del Conocimiento* [en línea], 4(2). Recuperado el 10 de marzo de 2014, de http://www.uoc.edu/rusc/4/2/dt/esp/ tello.pdf

Autores:

Cuevas Salazar Omar (ocuevas@itson.edu.mx)
Antonio Caso S/N, Col. Villa ITSON
Ciudad Obregón, Sonora, México
Instituto Tecnológico de Sonora
(644) 4109000 Ext. 1730
Doctor en Educación por la NOVA Southestearn University. Actualmente es responsable de la Maestría en Matemática Educativa del Departamento de Matemáticas del Instituto Tecnológico de Sonora. Ha publicado en revistas indizadas de carácter nacional e internacional, como la Revista Mexicana de Investigación Educativa, Revista Iberoamericana de Educación, Revista Electrónica de Investigación Educativa.

Valenzuela Lagarda Edna Myriam (ednamvalezu@hotmail.com)
Nápoles 2236 Col. Bellavista
Ciudad Obregón, Sonora, México
Instituto Tecnológico de Sonora
(644)4137991
Licenciada en Administración de Empresas por el Instituto Tecnológico y de Estudios Superiores de Monterrey, Maestra en Matemática Educativa por el Instituto Tecnológico de Sonora. Actualmente imparte clases a nivel licenciatura y maestría en el Departamento de Matemáticas del Instituto Tecnológico de Sonora.

Osorio Sánchez Mucio (mosorio@itson.edu.mx)
Antonio Caso S/N, Col. Villa ITSON
Ciudad Obregón, Sonora, México
Instituto Tecnológico de Sonora
(644) 4109000 Ext. 1722
Ingeniero Agroindustrial por la Universidad Autónoma Chapingo, Maestro en Enseñanza de las Ciencias por el Centro Interdisciplinario de Investigación y Docencia en Educación Técnica y en Estadística Aplicada por el Colegio de Posgraduados. Actualmente es Jefe del Departamento de Matemáticas del Instituto Tecnológico de Sonora. Ha sido ponente en congresos relacionados con Metodología de la Investigación y Enseñanza de las Matemáticas.

Trujillo Luque Evaristo (evaristo.trujillo@itson.edu.mx)
Antonio Caso S/N, Col. Villa ITSON
Ciudad Obregón, Sonora, México
Instituto Tecnológico de Sonora
(644) 4109000 Ext. 1856
Licenciado en Matemáticas y Maestro en Ciencias especialidad Matemática Educativa por la Universidad de Sonora. Actualmente es profesor interino adscrito al Departamento de Matemáticas del Instituto Tecnológico de Sonora. Ha participado como ponente en diversos congresos de carácter nacional relacionados con Matemática Educativa

UNIÓN
REVISTA IBEROAMERICANA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA
www.fisem.org/web/union
http://asenmacformacion.com/ojs/index.php/union/index

ISSN: 1815-0640
Número 45. Marzo 2016
Página 184-204

Elementos da prática de uma Comunidade de Prática de professores de Matemática na utilização do Software GeoGebra

Loreni Aparecida Ferreira Baldini
Márcia Cristina de Costa Trindade Cyrino

Fecha de recepción: 18/06/2015
Fecha de aceptación: 03/03/2016

Resumen	En este artículo se presentan los elementos de la práctica de una Comunidad de Práctica de Docentes de Matemáticas en la utilización del software GeoGebra que promueve el desarrollo profesional de sus miembros. Los resultados muestran que sus miembros tuvieron la oportunidad de desempeñar un papel activo en su formación; de sentirse desafiado; de compartir experiencias; de exponer errores sin restricciones; de presentar, explicar, explorar y comparar las estrategias; de utilizar las tecnologías digitales y el "lápiz y papel"; y confiar en un experto en el grupo. Estos elementos han permitido que sus miembros establezcan relaciones de respeto, de confianza, de solidaridad y de creatividad. **Palabras clave**: Desarrollo Profesional; Comunidades de Práctica; Software GeoGebra.
Abstract	In this article are presented elements of the practice of a Community of Practice of Mathematics Teachers in the use of GeoGebra that promoted professional development of its members. The results show that its members had the opportunity to play an active role in their formation process; to feel challenged; to share experiences; to expose mistakes without constraints; to present, justify, explore and compare strategies; to use digital technologies and the "pencil and paper"; and to count on the on the presence of the expert group. These elements have allowed its members to establish relationships of respect, trust, solidarity and creativity. **Keywords**: Professional Development; Community of Practice; Software GeoGebra.
Resumo	Nesse artigo são apresentados elementos da prática de uma Comunidade de Prática de Professores de Matemática na utilização do *software* GeoGebra que promoveram o desenvolvimento profissional de seus membros. Os resultados revelam que seus membros tiveram a oportunidade de desempenhar um papel ativo em sua formação; de sentir-se desafiado; de partilhar experiências; de expor erros sem constrangimentos; de apresentar, justificar, explorar e comparar estratégias; de utilizar as tecnologias digitais e o “lápis e papel”; e de contar com um *expert* no grupo. Estes elementos permitiram que seus membros estabelecessem relações de respeito, confiança, solidariedade e criatividade. **Palavras-chave:** Desenvolvimento Profissional; Comunidades de Prática; *Software* GeoGebra.

1. Introdução

Formar o professor para integração das Tecnologias Digitais da Informação e Comunicação – TDIC nas práticas pedagógicas é um dos atuais desafios impostos aos processos de formação de professores que ensinam matemática perspectivando o seu desenvolvimento profissional (Mishra; Kohler, 2006; Cyrino; Baldini, 2012).

Na busca de possibilidades alternativas aos cursos de treinamento, que possam colaborar com uma formação de professores na perspectiva do desenvolvimento profissional, o Grupo de Ensino e Pesquisa sobre a Formação de Professores que Ensinam Matemática - Gepefopem tem desenvolvido estudos e pesquisas acerca de espaços que sejam profícuos para explorar processos de aprendizagem e a mobilização/constituição de conhecimentos de professores (Cyrino, 2009; Cyrino; Caldeira, 2011; Baldini, 2014; Garcia, 2014; Nagy; Cyrino, 2014).

Um desses trabalhos, analisou as aprendizagens e os conhecimentos mobilizados/constituídos do *TPACK* – Conhecimentos Tecnológicos e Pedagógicos do Conteúdo nos empreendimentos da prática de uma Comunidade de Prática de Formação de Professores de Matemática na utilização do *software* GeoGebra - CoP-FoPMat (Baldini, 2014).

No presente artigo, são apresentados os elementos da prática dessa CoP que promoveram o desenvolvimento profissional de professores e de futuros professores de Matemática. Inicialmente são descritas as perspectivas de desenvolvimento profissional de professores, de aprendizagem em Comunidades de Prática - CoP (Wenger, 1998) e do *TPACK* (Mishra; Kohler, 2006) assumidas nessa investigação, bem como os encaminhamentos metodológicos e a análise dos empreendimentos: resolução e discussão de uma tarefa utilizando o *software* GeoGebra e investigação de questões e construções desencadeadas por essa tarefa. Para finalizar, são caracterizados os elementos da prática da CoP-FoPMat que promoveram o desenvolvimento profissional de seus membros.

2. Desenvolvimento Profissional – algumas perspectivas

Para romper com a concepção tradicional de formação que advém de cursos de treinamento no qual o formador é o centro do processo, vários autores têm optado pelo termo desenvolvimento profissional, em detrimento da utilização de termos como “formação” ou “instrução” (Day, 2001; Ponte, 1998; Inbernón, 2010; Ferreira, 2003 e 2006; Cyrino, 2013). No quadro a seguir apresentamos aspectos do desenvolvimento profissional de professores assumidos por alguns desses autores.

Autores	Desenvolvimento Profissional
Day (2001)	Inclui a aprendizagem eminentemente pessoal a partir da experiência pessoal. “Inclui todas as experiências de aprendizagens naturais e aquelas planejadas. [...] É o processo através do qual os professores, enquanto agentes de mudança, reveem, renovam e ampliam individual ou coletivamente o seu compromisso com os propósitos do ensino” (p.21).
Ponte (1998)	Traz a ideia de uma formação com múltiplas etapas em um processo de incompletude na formação docente, é exigido ao longo de toda a carreira; tem a formação ‘formal’ - inicial, contínua, especializada e avançada, como um suporte fundamental; é favorecido por contextos colaborativos - institucionais, associativos, formais ou informais; é de cada professor no essencial da sua responsabilidade; é a chave da competência profissional, a capacidade de equacionar e resolver problemas da prática profissional; e, requer um

	trabalho investigativo em questões relativas à própria prática profissional.
Imbernón (2010)	“[...] pode ser concebido como qualquer intenção sistemática de melhorar a prática profissional, crenças e conhecimentos profissionais, com o objetivo de aumentar a qualidade docente, de pesquisa e de gestão” (p.47).
Ferreira (2003)	“[...] é aprender e caminhar para a mudança, ou seja, ampliar, aprofundar e/ou reconstruir os próprios saberes e prática e desenvolver formas de pensar e agir coerentes” (p.36).
Ferreira (2006)	[...] “um processo que se dá ao longo de toda experiência profissional [...]. Envolve a formação inicial e continuada, bem como a história pessoal como aluno e professor. [...] os estímulos ou pressões que sofre socialmente e sua própria cognição e afeto – crenças, valores, meta” (pp. 149 - 150).
Cyrino (2013)	“uma experiência (LARROSA, 2009) que promove no professor mudanças quanto às suas crenças, conhecimentos e práticas relativas à sua profissão” (p.5189).

Quadro 1 – Aspectos do Desenvolvimento Profissional

De modo geral, esses autores consideram a aprendizagem dos professores em formação como elemento chave para o seu desenvolvimento profissional. Nesse sentido, o desenvolvimento profissional é visto como um processo - individual e/ou coletivo - influenciado por experiências de diferentes naturezas, formais ou informais, que provocam mudanças em suas crenças, conhecimentos e práticas. Evidenciam que para que essas aprendizagens e mudanças ocorram, não basta oferecer aos professores cursos, seminários, oficinas, é preciso incentivá-los a investigar a própria prática, a equacionar os problemas dessa prática, a desenvolver um trabalho colaborativo a fim de que possam gerir e assumir um compromisso com a sua formação. Para tanto, as CoPs podem se constituir como um espaço privilegiado para ouvi-los, entender suas necessidades e tomar como ponto de partida para sua formação suas experiências pessoais e profissionais.

3. Aprendizagem em Comunidades de Prática

Wenger (1998) defende que a aprendizagem é fundamentalmente social e ocorre em contextos de experiência de participação no mundo, com a participação em CoPs. Considera uma CoP como um grupo de pessoas que compartilham uma preocupação ou uma paixão por algo que fazem (domínio), e aprendem como fazê-lo interagindo uns com os outros, “é um espaço de engajamento na ação, de relações interpessoais, de conhecimento compartilhado, e de negociação dos empreendimentos” (Wenger, 1998, p. 85).

A comunidade, de acordo com Wenger, McDermott e Snyder (2002), cria o tecido social da aprendizagem, encoraja interações e relacionamentos por meio de sua prática. A prática é o conhecimento específico desenvolvido, compartilhado e mantido pela CoP, envolve um conjunto de estruturas, ideias, ferramentas, informações, estilos, linguagens, estórias e documentos que os membros compartilham. Para associar prática e comunidade, Wenger (1998) apresenta três dimensões da relação pela qual a prática é fonte de coerência de uma comunidade: engajamento/compromisso mútuo, empreendimento articulado/conjunto e repertório compartilhado.

O engajamento/compromisso mútuo requer, além de fazer coisas juntos, o compromisso com a aprendizagem do outro e o desenvolvimento de relacionamentos que nem sempre implicam em homogeneidade. Envolve competências própria e dos outros e se baseia no que as pessoas fazem e no que conhecem, ou seja, na capacidade de colaborar com conhecimentos dos outros (Wenger, 1998).

O empreendimento articulado de uma CoP é definido em conjunto pelos seus membros a partir do que as pessoas fazem juntas. No entanto, não se trata de um objetivo fixo ou definido inicialmente para ser perseguido sem que possa ser alterado. A negociação de um empreendimento dá origem a relações de responsabilidade mútua entre os envolvidos que incluem o que importa e o que não importa, o que fazer e o que não fazer, o que prestar atenção e o que ignorar, o que falar e o que deixar subentendido, o que justificar e o que não dar valor, o que mostrar e o que ocultar, quando ações e artefatos são bons o suficiente e quando eles precisam de melhoria ou refinamento (Wenger, 1998).

O repertório compartilhado é o conjunto de recursos partilhados por uma comunidade para engajamentos na prática e para a negociação de significados. O repertório de uma CoP "inclui rotinas, palavras, ferramentas, formas de fazer as coisas, histórias, gestos, símbolos, gêneros, ações, ou concepções que a comunidade tem produzido ou adotado no curso de sua existência, e que se tornaram parte de sua prática" (Wenger, 1998, p.83).

De acordo com Cyrino (2009) a negociação de significados, no contexto de uma CoP, é um mecanismo para a aprendizagem. A aprendizagem muda quem somos, modifica nossa habilidade de participar, de pertencer, de negociar significados (Wenger, 1998). A negociação expressa uma interação contínua de conquista, de dar e receber, de influenciar e ser influenciado e o significado é o produto de sua negociação, fonte de energia necessária para a aprendizagem. Nesse sentido, o significado negociado é ao mesmo tempo histórico e dinâmico, contextual e único.

O conceito de negociação de significado é caracterizado por Wenger (1998), como o processo pelo qual se experimenta o mundo e se engaja nele como algo significativo. O processo de negociação de significados é contínuo, envolve interpretar e agir, fazer e pensar, entender e responder, e, assim, produz constantemente novas relações com e no mundo. Aquilo que é feito ou falado pode referir-se ao que foi feito ou falado no passado e, mesmo assim, volta a produzir uma nova situação, uma nova interpretação, uma nova experiência que produz significados que ampliam, redirecionam, ignoram, reinterpretam, modificam ou confirmam a história de significados da qual o sujeito faz parte. Viver é um constante processo de negociação de significados (Wenger, 1998).

O processo de negociação de significados ocorre na interação entre dois outros processos, o de participação e o de reificação (Wenger, 1998). A participação é um processo abrangente que envolve as relações com os outros, é uma forma de ação que significa ser parte de algo. Ela dá forma ao que fazemos, a quem somos e como interpretamos o que fazemos, e ainda descreve uma experiência social de viver em um mundo enquanto membros de comunidades sociais. Esse processo combina fazer, conversar, pensar, sentir e pertencer. Assim sendo, a participação leva a renegociar significados em novos contextos.

O processo de reificação é parte intrínseca das práticas, indispensável para o processo de negociação e para as experiências de significados. Esse termo é usado por Wenger (1998) para referir-se ao processo de dar forma à experiência, para cristalizar tal experiência em uma "coisa". Além de dar forma à experiência a reificação muda a nossa experiência com o mundo. O processo de reificar não envolve somente expressar uma ideia, uma emoção ou construir uma ferramenta, é criar condições para novos significados, uma vez que "inclui fazer, projetar, representar, nomear, codificar, e descrever, assim como perceber, interpretar, usar, reutilizar, decodificar e reformular" continuamente (Wenger, 1998, p.59).

A relação fundamental existente entre os processos de participação e de reificação é de complementariedade e de dualidade, formando uma unidade de maneira dinâmica. Um processo não substitui o outro, não se transforma no outro, embora um transforme o outro. Por meio das várias combinações possíveis entre eles surgem possibilidades de uma variedade de experiências de negociação de significados úteis para descrever o nosso engajamento com o mundo. Enquanto na participação os sujeitos reconhecem-se uns nos outros, na reificação eles se projetam para o mundo atribuindo significados (Wenger, 1998).

A aprendizagem ocorre nessa dualidade entre os processos de participação e de reificação, e é a partir desse cenário que a CoP se constitui como um espaço fecundo para formação de professores e de futuros professores.

4 . TPACK – um quadro para orientar a integração de tecnologias de ensino

Em busca de discutir elementos relacionados aos conhecimentos necessários ao professor para a integração de tecnologias no ensino, Mishra e Koehler (2006), argumentam que o conhecimento tecnológico não pode ser tratado separadamente dos conhecimentos pedagógicos e dos conhecimentos do conteúdo. Esses autores estendem as ideias de Shulman (1986, 1987), e propõem uma integração do conhecimento do conteúdo e do conhecimento pedagógico com o conhecimento tecnológico, por meio de uma estrutura teórica para a utilização da tecnologia educacional no desenvolvimento profissional dos professores, o *TPACK* - Conhecimento Tecnológico Pedagógico de Conteúdo (*Technological Pedagogical Content Knowledge – TPACK* – Figura 1*)*.

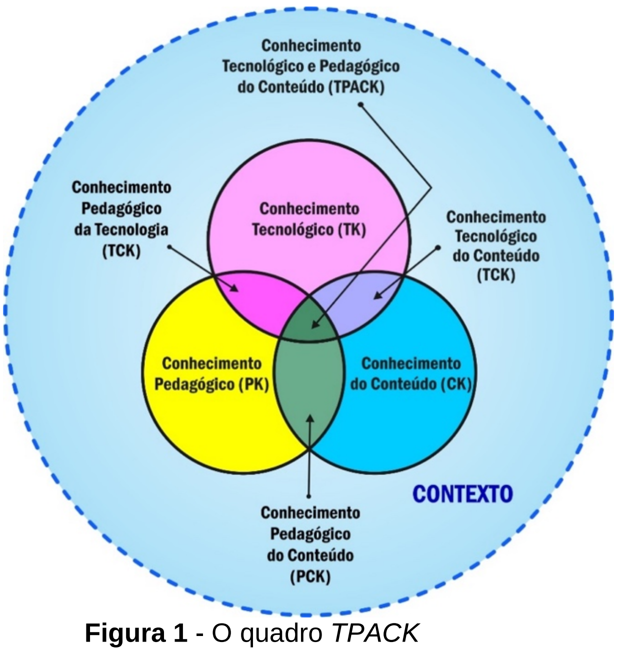


Figura 1 - O quadro *TPACK*
Fonte: Adaptado de Koehler e Mishra (2006).

Nesse quadro conceitual (Quadro 2), os conhecimentos sobre o conteúdo, a pedagogia e a tecnologia são considerados essenciais para o desenvolvimento de um “bom ensino”. No entanto, em vez de tratar esses conhecimentos separadamente, a proposta dos autores insere três pares de interseção e uma tríade, nas quais são consideradas conexões e interações, duas a duas, entre conteúdo, tecnologia e pedagogia, e, a interação entre esses três conhecimentos. Isso não significa que não se possa olhar para cada um deles isoladamente, mas que é indicado, também, olhar para suas relações.

Conhecimento do Conteúdo (*CK*) - É o conhecimento que os professores precisam ter sobre o assunto, objeto de ensino e aprendizagem. Inclui conhecimento de fatos centrais como conceitos, teorias e procedimentos (SHULMAN, 1986).
Conhecimento Pedagógico (*PK*) - É o conhecimento sobre os processos de aprendizagem e de práticas de ensino, ou seja, dos métodos e teorias de ensino e de aprendizagem (SHULMAN, 1986).
Conhecimento Pedagógico do Conteúdo (*PCK*) - É o conhecimento do conteúdo incorporando os aspectos mais apropriados para seu ensino. Inclui saber como um conteúdo pode ser organizado para o ensino, as formas de representação de ideias, analogias, ilustrações, exemplos e demonstrações (SHULMAN, 1986).
Conhecimento Tecnológico (*TK*) - Refere-se ao conhecimento de tecnologias que são ou podem ser utilizadas em ambientes de aprendizagem. Inclui as habilidades necessárias para operar tecnologias específicas (MISHRA e KOEHLER, 2006).
Conhecimento Tecnológico do Conteúdo (*TCK*) - Refere-se à forma como tecnologia e o conteúdo se influenciam mutuamente, como uma tecnologia pode ser usada para fornecer novas maneiras de ensinar um conteúdo (MISHRA e KOEHLER, 2006).
Conhecimento Pedagógico da Tecnologia (*TPK*) - É o conhecimento das possibilidades e limitações da tecnologia para diferentes abordagens de ensino, e, ainda, saber como o ensino e a aprendizagem podem mudar a partir do uso de tecnologias específicas e com o uso de uma determinada estratégia pedagógica (MISHRA e KOEHLER, 2006).
Conhecimento Tecnológico e Pedagógico do Conteúdo (*TPACK*) - Refere-se a um conhecimento que vai além de todos os três componentes (tecnologia, pedagogia e conteúdo). O *TPACK* oferece uma maneira de conceituar o conhecimento que professores precisam, a fim de integrar a tecnologia em práticas de ensino. Implica em usar a tecnologia para explorar relações matemáticas e não para repetir práticas tradicionais por meio de outra tecnologia (MISHRA e KOEHLER, 2006).

Quadro 2 – Conhecimentos necessários ao professor de Matemática

Desse modo, o *TPACK* pode colaborar para o desenvolvimento profissional dos professores, de modo que eles possam se apropriar de “hábitos tecnológicos” a fim de compreender e descrever a matemática e as relações existentes “por trás” dos resultados mostrados em uma tela de computador. Esse conceito deve ser valorizado nos processos de formação, porque o domínio do *TPACK* propicia compreensão de questões pedagógicas que possibilitam que as tecnologias sejam usadas para a constituição de conhecimentos em sala de aula.

5. Encaminhamento da pesquisa

Com o objetivo de identificar elementos da prática de uma CoP que promoveram o desenvolvimento profissional de seus membros, foi feita a analise das aprendizagens e dos conhecimentos mobilizados/constituídos na prática dessa CoP por meio de uma pesquisa qualitativa, na perspectiva da pesquisa intervenção (Krainer, 2003).

A pesquisa foi desenvolvida no contexto da CoP–FoPMat constituída por doze professores, nove futuros professores e pela formadora (primeira autora deste artigo). Os encontros da CoP ocorreram em um Colégio Estadual da cidade de Arapongas – PR, que atende o Ensino Fundamental II e o Ensino Médio. Foram realizados 25 encontros, no período de 05/2012 a 06/2013, com duração média de 1h e 40 min.

Nesse artigo são apresentados os processos de negociação de significados que foram desencadeados pela proposição de uma tarefa que envolve o Teorema de Pitágoras (Quadro 3).

"Os babilônios dos tempos de Hamurabi (c. 1700 a.C.) provavelmente já sabiam que o quadrado sobre a hipotenusa de um triângulo retângulo é igual à soma dos quadrados sobre os catetos. Entretanto, acredita-se que a primeira demonstração geral desse fato foi dada por Pitágoras de Samos (c. 585 – c. 500 a.C.) ou um de seus discípulos. Por essa razão, o teorema ficou universalmente conhecido como Teorema de Pitágoras." (SILVA, C.M.S. e LORENZONI, C.A.C.A. O velho conhecido Teorema de Pitágoras e suas demonstrações. *História & Educação Matemática.* São Paulo, v. 2, n. 2, p. 112, 2002.)

A história da matemática, assim como o estudo de diferentes demonstrações, são recursos importantes para o trabalho com o Teorema de Pitágoras em sala de aula. Esses recursos permitem evidenciar a matemática como uma construção humana, bem como articular diferentes conteúdos que compõem o currículo de Matemática. Com base nos conhecimentos sobre o Teorema de Pitágoras e nas propostas pedagógicas atuais para o Ensino Fundamental e Ensino Médio, considere as afirmativas a seguir.

I. As palavras sublinhadas no enunciado: "o **quadrado** sobre a hipotenusa de um triângulo retângulo é igual à soma dos quadrados sobre os catetos" justificam o fato de podermos construir somente **quadrados** sobre os lados de um triângulo retângulo para demonstração do teorema.
II. O Teorema de Pitágoras deve ser trabalhado em sala de aula, necessariamente, após a compreensão, pelos alunos, do conceito de semelhança de triângulos.
III. É possível constatar o Teorema de Pitágoras comparando as áreas de semicírculos construídos sobre os lados de um triângulo retângulo, ou seja, em um triângulo retângulo, a área do semicírculo construído sobre a hipotenusa é igual à soma das áreas dos semicírculos construídos sobre os catetos.
IV. O Teorema de Pitágoras pode ser verificado comparando-se as áreas de quaisquer polígonos regulares construídos sobre os lados de um triângulo retângulo.

Estão corretas apenas as afirmativas:

a) I e II. b) II e III. c) III e IV. d) I, II e IV. e) I, III e IV.

Quadro 3 – Tarefa
Fonte: Prova do PDE/2006 - Secretaria de Estado da Educação.

Os membros da CoP resolveram a tarefa em pequenos grupos (3 ou 4 pessoas) e depois apresentaram/discutiram suas resoluções no grande grupo (todos os membros da CoP). Em um primeiro momento utilizaram lápis e papel para resolução da tarefa e em seguida o GeoGebra para construir figuras perspectivando a constatação do Teorema de Pitágoras. Durante a resolução e as discussões da tarefa, a CoP se engajou nos empreendimentos e compartilhou seus repertórios.

Os encontros foram audiogravados, cujas transcrições foram complementadas com: registros escritos dos membros da CoP em um diário digital disponibilizado na plataforma Moodle, no qual eles registravam suas reflexões sobre os encontros; notas de campo produzidas pela formadora; discussões ou comentários registrados nos fóruns de socialização (Plataforma Moodle); figuras construídas no *software* GeoGebra, enviadas para a formadora por e-mail. Com o intuito de manter o sigilo dos nomes dos membros da CoP, utilizamos P para indicar os professores e a coordenadora, e FP para indicar futuros professores, seguidos de nomes fictícios[1].

A seguir são apresentadas análises de alguns episódios que revelam processos de negociação de significados dos membros da CoP nos empreendimentos: resolução e discussão de uma tarefa utilizando o *software* GeoGebra e investigação de questões e construções desencadeadas por essa tarefa. Nessa análise explicita-se as aprendizagens e os conhecimentos do *TPACK* mobilizados/constituídos pelos professores e futuros professores na prática dessa CoP.

6. Aprendizagens e Conhecimentos do TPACK mobilizados na resolução e discussão da tarefa utilizando o *software* GeoGebra

Após a leitura da tarefa, os pequenos grupos se envolveram em investigar as afirmativas, desencadeando negociações de significados relativas ao Teorema de Pitágoras, como mostra o episódio a seguir.

1.	*P-Alice:*	*A quatro é verdadeira.*
2.	*FP-Carol:*	*A primeira é verdade. Não é verdade?*
3.	*P-Aline:*	*Somente quadrados!? Não, então não.*
4.	*P-Maura:*	*Por quê?*
5.	*P-Aline:*	<u>*Se a quatro for verdadeira a primeira não pode ser*</u>*. Porque é* (está escrito) *somente quadrados.*
6.	*P-Alice:*	*Semicírculo* (referindo-se a afirmativa III)*? Por que semicírculo?* (Pausa). <u>*Vamos construir o semicírculo no rascunho sobre os lados do triângulo. Se são semicírculos, isso*</u> <u>(lado do triângulo)</u> <u>*vai ser o diâmetro*</u>*?*
7.	*P-Maura:*	*É.*
8.	*P-Alice:*	*A área* (do semicírculo) *vai ser* πr^2 *dividido ao meio. Se aqui é 3* (medida do lado)*, vai ser 2,25π. No lado 4 vai ser 4π. Agora esse aqui, 2,5 ao quadrado é igual a 6,25π. Após calcular a medida das áreas dos círculos, dividiram por dois para obter as medidas das áreas dos semicírculos.*
9.	*P-Aline:*	*Agora soma esse com esse* (somam a medida das áreas dos semicírculos referente aos catetos).
10.	*P-Alice:*	*É. Vai dar sim. Deu* (risos)*. Que legal*. (Comparam a soma obtida com a medida da área do semicírculo referente à hipotenusa).
11.	*FP-Carol:*	<u>*E essa quatro*</u> (afirmativa IV)*? Como que você já viu?* <u>*Comparando a área de quaisquer polígonos regulares?*</u>
12.	*P-Alice:*	*Foi no PDE. P*<u>*ode ser qualquer figura. Desde que seja regular. Não precisa ser só quadrado.*</u>
13.	*FP-Carol:*	<u>*Desde que seja regular*</u>*?*
14.	*P-Alice:*	*Sim. Dá certinho.*
15.	*FP-Carol:*	*Então quer dizer* <u>*não precisa ser só quadrado, pode ser qualquer polígono regular!? Então por isso que a número 1*</u> (afirmativa I) <u>*não vai ser verdade, porque diz somente quadrado*</u>*.*
16.	*P-Alice:*	<u>*É isso mesmo, porque usou somente quadrado.*</u>
17.	*FP-Carol:*	<u>*E esse dois*</u> (afirmativa II)<u>*, também não*</u>*?*

[1] Todos os membros da CoP assinaram um Termo de Consentimento Livre e Esclarecido, e projeto foi aprovado pelo Comitê de Ética em Pesquisa (UEL).

18. *P-Alice: Não, não tem necessidade. Só a 3 e 4.*

A interação entre P-Alice, P-Aline, P-Maura e FP-Carol na busca pela alternativa correta da tarefa revela que mobilizaram conhecimentos do conteúdo a respeito da identificação do raio a partir do diâmetro, do cálculo da área do círculo e da área do semicírculo. Revela também que constituíram o conhecimento de que o Teorema de Pitágoras pode ser constatado comparando as áreas de semicírculos construídos sobre os lados de um triângulo retângulo. Esses conhecimentos são evidenciados, por exemplo, quando P-Alice (6, 8, 10) demonstra não conhecer essa forma de verificar esse teorema e busca, junto com as demais, a verificação a partir de suas experiências, surpreendendo-se com a relação encontrada.

No decorrer da interação, a FP-Carol (2 e 15), a P-Aline (3 e 5) e a P-Alice (16) também manifestaram conhecimento de que é possível constatar o Teorema de Pitágoras comparando áreas de quadrados construídos sobre os lados do triângulo retângulo. A projeção de P-Alice (1 e 12), bem como, os questionamentos da FP- Carol (11, 13 e 15), revelam a constituição do conhecimento de que é possível constatar o teorema comparando área de polígonos regulares (Conhecimento do Conteúdo).

FP-Carol evidenciou confiança ao expor suas dúvidas, fazendo questionamentos e aceitando as respostas de P-Alice e P-Aline. Ela demonstrou menos experiência com relação ao Teorema de Pitágoras, porém, sua atitude de ouvir e questionar as professoras experientes, sobre a resolução e conceitos envolvidos na tarefa, sinaliza um processo de participação que combina fazer, conversar, pensar (WENGER, 1998).

As reificações referentes ao Teorema de Pitágoras foram evidenciadas nos registros realizados nos diários, na folha de tarefa e nas figuras construídas no software GeoGebra (Quadro 4), uma vez que, após a resolução da tarefa na folha e a discussão coletiva, os grupos iniciaram o trabalho com o GeoGebra construindo figuras, inspirados nas afirmativas da tarefa.

As figuras do Quadro 4 ilustram que o trabalho com a tarefa possibilitou a mobilização/constituição de conhecimentos relacionados ao modo de construir triângulo retângulo, polígonos regulares, setor circular no GeoGebra, tais figuras são resultado de escolhas adequadas de suas ferramentas (Conhecimento Tecnológico). Além disso, o fragmento de diário exposto pela P-Alice (Quadro 4) sinaliza que utilizaram o GeoGebra pautados em propriedades matemáticas (Conhecimento Tecnológico do Conteúdo), nomeadamente: construção do triângulo retângulo – uso da ferramentas “Reta Perpendicular” que garante o ângulo reto; construção do pentágono regular sobre o lado do triângulo retângulo – uso da ferramenta “Polígono Regular” que mantém a propriedade com o “Mover” dos vértices; construção do semicírculo – uso da ferramenta “Setor Circular” que permite obter a área do semicírculo.

As ferramentas utilizadas permitiram que o grupo construísse figuras dinâmicas, de modo que, com o “Mover”, é possível transformá-las mantendo suas propriedades e, com isso, testar hipóteses, perceber regularidades e viabilizar aprendizagens (Conhecimento Pedagógico da Tecnologia).

Observamos que P-Aline, que havia se envolvido em uma generalização numérica para o cálculo da área do semicírculo, durante as apresentações e discussões da resolução da Tarefa no grande grupo, apresenta uma generalização algébrica (Quadro 4) envolvendo a comparação de áreas de semicírculos e de triângulos equiláteros. Ao explicar ao grande grupo, relatou que usaria a mesma ideia para outros polígonos regulares, deixando rastros de mobilização/constituição de conhecimento concernente a generalizar algebricamente esse teorema, por meio de comparação de áreas e a passagem do particular para o geral no processo de sistematização (Conhecimento do Conteúdo).

O grupo discutiu e concluiu que podemos construir sobre os lados de um triângulo retângulo quaisquer polígonos regulares, esta definição foi confirmada no GeoGebra, comparando a soma das áreas dos polígonos dos catetos com a área do polígono sobre a hipotenusa (P-Maura, diário do 13º encontro, 30/08/12)
No 3º item fizemos os cálculos utilizando as medidas 3, 4 e 5 (lado 3 = 2,25pi/2, lado 4 = 4pi/2 e lado 5 = 6,25pi/2). Depois fizemos no GeoGebra utilizando o semicírculo, (descobrimos que, para encontrarmos a área do semicírculo, temos que fazer o setor circular). Utilizamos o pentágono regular, fizemos um triângulo retângulo fixo com retas e retas perpendiculares e depois utilizamos a ferramenta polígono regular para fazermos os pentágonos, e no teste ele permaneceu fixo (P-Alice, diário do 13º encontro, 30/08/12).

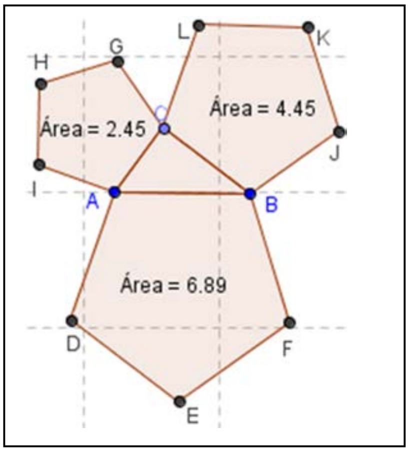


Figura (1) realizada pelo grupo e enviada pela P-Alice

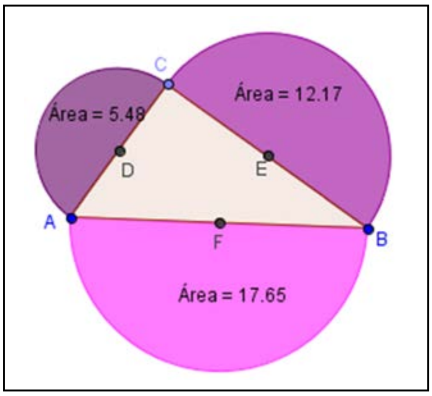
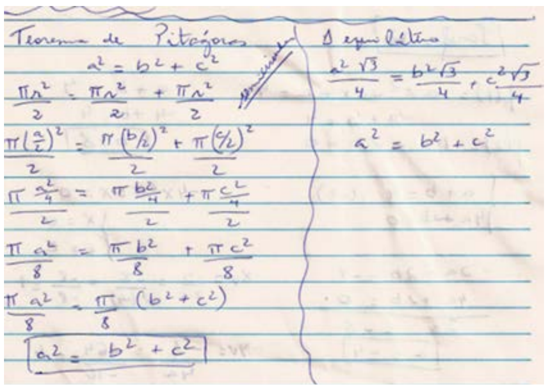


Figura (2) enviada pela P-Aline



Folha de tarefa da P-Aline

Quadro 4 – Reificações referentes ao Teorema de Pitágoras

Diante das informações do Quadro 4 e do episódio, infere-se que as participantes do grupo reificaram que é possível constatar o Teorema de Pitágoras geometricamente comparando áreas de semicírculos e de polígonos regulares.

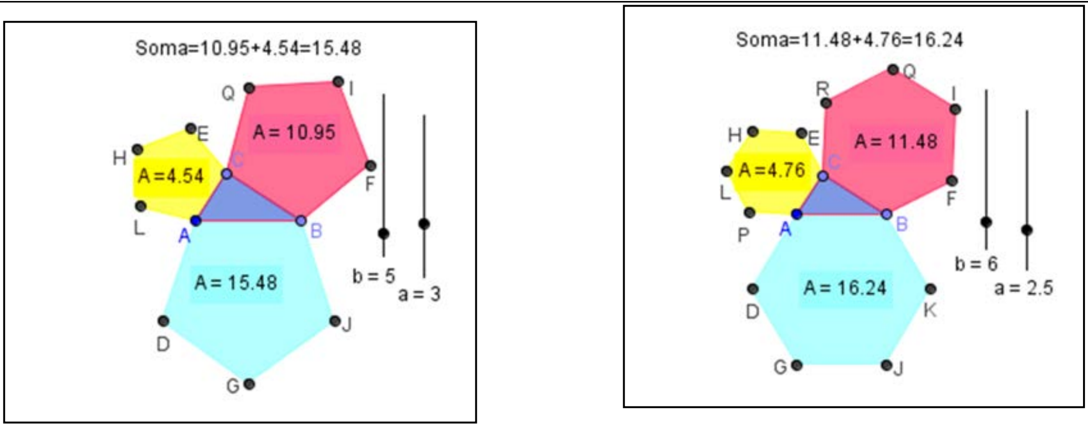
À medida que os grupos descobriam novos encaminhamentos para construir figuras relativas às afirmativas da tarefa, esses foram expostos ao grande grupo, desencadeando negociações de significados em torno dos procedimentos.

1.	*P-Rosa:*	*Nós fizemos variar o lado do triângulo retângulo* (suas medidas) *e dos polígonos* (número de lados)*. Tudo de uma vez.*
2.	*FP-Jorge:*	*O que você fez com o seletor?*
3.	*P-Rosa:*	*Nós construímos um seletor para o triângulo* (retângulo) *e outro para os polígonos.*
4.	*FP-Jonas:*	*Mexe para a gente ver.*
5.	*P-Rosa:*	*Vamos por animação* (usa o recurso do GeoGebra que proporciona o mover

		automático).
6.	*FP-Jorge:*	*O que muda com o seletor?*
7.	*P-Clara:*	*Muda o número de lados do polígono e a medida dos catetos e da hipotenusa.*
8.	*FP-Jorge:*	*Como faz isso? Eu não sei fazer...*
9.	*FP-Jonas:*	*Espera...*
10.	*FP-Jorge:*	*Você fez um polígono regular de **a** lados, usando o seletor **a**?*
11.	*P-Rosa:*	*Isso mesmo. Oh,* (move o seletor) *está diminuindo os lados* (número de vértices) *até chegar num triângulo.*
12.	*FP-Jorge:*	*Ah, entendi! Você fez um polígono regular de **a** lados e **a** é o seletor.*
13.	*P-Rosa:*	*O lado do triângulo também muda, pois está em função do seletor **b**.*
14.	*FP-Jorge:*	*Ah... você fez um seletor para o triângulo também! Muito louco!*
15.	*P-Rosa:*	*E a soma das áreas fica sempre igual.*

Essa negociação em relação ao uso do "Seletor" deixa indícios de que P-Rosa e os outros integrantes de seu grupo mobilizaram/constituíram conhecimentos na escolha assertiva das ferramentas do *software*, uma vez que optaram por aquelas ("Seletor") que têm potencial para representar o objeto matemático (triângulo retângulo e polígonos regulares sobre seus lados) de modo dinâmico (Conhecimento Tecnológico do Conteúdo).

Na socialização do modo como construiu a figura (Quadro 5), a P-Rosa (1, 3, 11, e 15) evidencia a interação entre seus processos de participação e de reificação. Demonstra que compreende aspectos da tecnologia que podem mudar o modo de ensinar o Teorema de Pitágoras e a existência de diversas ferramentas para a realização da tarefa aliada à estratégia pedagógica. Compreende que, a partir de um tipo de construção, obtêm-se várias figuras e que isso permite investigar regularidades e a realização de generalização, evidenciando, assim, sua aprendizagem do modo de construir figuras dinâmicas que validam esse teorema (Conhecimento Pedagógico da Tecnologia).



Figuras obtidas com a variação dos seletores ($a = 3$ e $b = 5$; $a = 2,5$ e $b = 6$), realizadas pelo grupo e enviadas pela P-Rosa.

"A construção do triângulo (retângulo) e dos polígonos com dois seletores foi fascinante. Ficou show, fácil para os alunos construírem e compreenderem os conceitos".

P-Rosa, diário do 13º encontro, 20/09/12

Quadro 5 – Indicativos de mobilização/constituição do TPACK

P-Rosa, neste episódio, assume a posição do *expert.* Em uma CoP o *expert* varia conforme a necessidade de partilhar e negociar conhecimentos mais aprofundados de uma ideia, situação, ou conceito. A comunidade, ao legitimar esses conhecimentos, elege, formalmente ou não, um membro como *expert*, que nem sempre foi a formadora. Assim, não se trata de um membro ter um papel fixo, visto que ele pode ser *expert* em um determinado tema e em outro não.

No fragmento de diário (Quadro 5), P-Rosa reconhece que os alunos podem facilmente realizar a construção de figuras como esta, porque envolve poucas ferramentas do *software*. Reconhece também que a figura dinâmica, usando dois seletores, pode viabilizar a compreensão dos conceitos, uma vez que, ao mover o seletor *a,* alteram-se as dimensões do triângulo retângulo e, por conseguinte, as dos polígonos e respectivas áreas. Ao mover o seletor *b,* altera-se o número de vértices do polígono e suas áreas, no entanto, nos dois casos, mantém-se a regularidade sobre as áreas.

Os procedimentos utilizados na construção da figura, sua sofisticação e a declaração da P-Rosa de que, desse modo, a figura se torna “fácil” de ser construída e proporciona a compreensão dos conceitos envolvidos permitem inferir que a figura foi pensada de modo que os estudantes pudessem sondar relações matemáticas a partir do movimento dos seletores. Infere-se, também, que P-Rosa e os membros de seu grupo encontraram um modo mais eficiente para construir a figura, ou seja, que aprenderam a utilizar a tecnologia (GeoGebra) imersos no conteúdo e na pedagogia - *TPACK* (Mishra; Koehler, 2006).

A socialização da P-Rosa (episódio anterior) propiciou aos participantes (re) significar o modo de construir triângulo retângulo e polígonos regulares sobre seus lados. Os conhecimentos tecnológicos socializados pela P-Rosa foram legitimados pelos participantes e incentivaram os pequenos grupos a construírem novas figuras associadas à afirmativa IV da tarefa.

7. Aprendizagens e Conhecimentos do TPACK mobilizados a partir de questões e construções desencadeadas pela tarefa

O uso do GeoGebra permitiu que novas questões e construções desencadeadas pela tarefa fossem investigadas. Os processos de negociação de significados focalizaram a construção de polígonos/figuras irregulares sobre os lados do triângulo retângulo com o objetivo de investigar a possibilidade de generalizar o Teorema de Pitágoras a partir de figuras irregulares/semelhantes. As investigações tiveram início com uma provocação da formadora, após a discussão da resolução da tarefa, na busca de outras reflexões a respeito do Teorema de Pitágoras.

P-Loreni: *Quais outras figuras podem ser construídas sobre os lados do triângulo retângulo que permitem constatar o teorema?*
FP-Jorge: *Retângulos...*

O FP-Jorge surpreendeu os membros da comunidade ao construir uma figura no GeoGebra para mostrar tal possibilidade. Os procedimentos utilizados pelo FP-Jorge desencadearam uma negociação de significados acerca da construção de retângulos sobre os lados de um triângulo retângulo.

1. *FP-Jorge:* *Vou pôr a malha* (insere a malha quadriculada na tela de visualização do GeoGebra).

2.	*P-Loreni:*	*Por quê?*
3.	*FP-Jorge:*	*Vou usar a malha para fazer o 3, 4, 5* (triângulo retângulo)*. Vamos medir.*
4.	*P-Rosa:*	*Deu certinho.*
5.	*FP-Jorge:*	*Agora faz um retângulo aqui e aqui* (sobre os catetos) *e outro aqui* (sobre a hipotenusa)*. Aqui complicou* (sobre a hipotenusa)*. Tem que usar alguma propriedade* (matemática).
6.	*P-Loreni:*	*A construção do triângulo retângulo é eficiente?*
7.	*P-Rosa:*	*Não.*
8.	*P-Loreni:*	*Por que não?*
9.	*FP-Jorge:*	*Porque não é fixa.*
10.	*P-Rosa:*	*Ele fez um desenho, é um esboço.*
11.	*P-Loreni:*	*Em uma investigação com aluno, ao movimentar* (o vértice) *o que vai acontecer?*
12.	*P-Isabela:*	*Vai deixar de ser um triângulo retângulo. O ângulo deixa de ser reto.*
13.	*P-Loreni:*	*Então, para fazer uma figura temos que garantir que com o movimento a figura não perderá as propriedades, neste caso, o ângulo de 90º.*
14.	*P-Rosa:*	*Ele está tentando fazer um retângulo com o dobro do lado do triângulo?*
15.	*FP-Jorge:*	*É, só que aqui na hipotenusa não certo.*
16.	*P-Rosa:*	*Ficou um paralelogramo, um trapézio... Sei lá. Você tem que fazer retas perpendiculares pelos vértices e usar o círculo [...]*
17.	*FP-Jorge:*	*Agora deu certo* (Usa a sugestão de P-Rosa*).*
18.	*P-Loreni:*	*Compare as áreas. Deu?*

O procedimento utilizado pelo FP-Jorge na construção da figura levou a P-Rosa (10) a distinguir uma figura de um desenho/esboço quando se usa um *software* de geometria dinâmica. Considera-se uma figura como um objeto teórico que representa relações geométricas, portanto, mantêm suas propriedades ao mover seus vértices e, no caso do triângulo retângulo feito pelo FP-Jorge, deixaria de ser retângulo, como afirma P-Isabela (12), por isso foi considerado um esboço da figura, por não respeitar rigorosamente as relações geométricas. A interferência da formadora (6, 8, 11 e 13) confirmou e evidenciou os significados produzidos para esse procedimento, que uma figura dinâmica carrega suas propriedades (Conhecimento Tecnológico do Conteúdo).

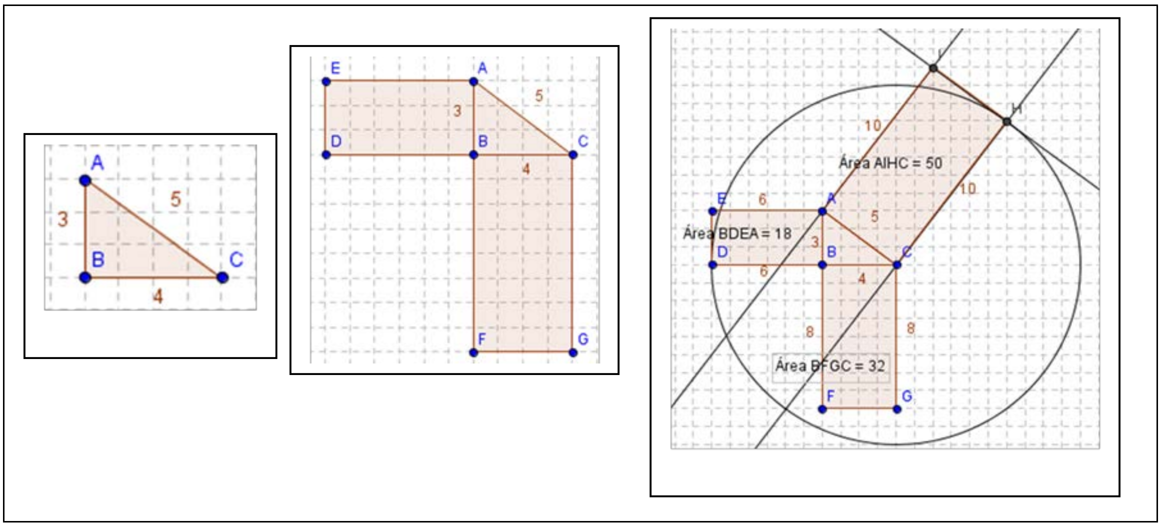
A P-Rosa (14 e 16), ao compreender a relação de proporcionalidade entre os lados dos retângulos e do triângulo retângulo, sugerindo o uso das ferramentas “Retas Perpendiculares” e “Círculo dados Centro e Raio”, revela que mobilizou conhecimentos a respeito do retângulo associados à tecnologia, uso das retas perpendiculares para obter o ângulo reto e a escolha da ferramenta adequada para transportar a medida do comprimento (Conhecimento Tecnológico do Conteúdo).

O engajamento mútuo dos membros da CoP-FoPMat com relação ao empreendimento de resolver tarefas utilizando o *software* GeoGebra, possibilitou observar a prática de um grupo livre de pressões institucionais que busca aprendizagens de um domínio, aspecto peculiar de uma CoP. Como pontuam Wenger e Snyder (2001), em uma CoP seus membros compartilham conhecimentos com liberdade e criatividade, incentivando novas abordagens para os problemas enfrentados.

Os professores e os futuros professores buscaram a própria aprendizagem, que é considerada como chave para o desenvolvimento profissional. De acordo com o episódio anterior, inferimos que os membros aprenderam que:

- o teorema pode ser constatado geometricamente comparando as áreas de retângulos de lados proporcionais aos lados do triângulo retângulo;
- uma figura dinâmica carrega suas propriedades quando movimentada;

- há modos adequados para construir uma figura para que mantenha invariantes suas propriedades;
- algumas ferramentas são adequadas para a construção de retângulos por garantir suas propriedades, como "Retas", "Retas Perpendiculares", "Círculo dados Centro e um dos seus Pontos".



Quadro 6 – Sequência de figuras construídas pelo FP-Jorge

Nos diários, os membros relataram que desconheciam a possibilidade de constatar o Teorema de Pitágoras comparando área de retângulos.

> *A questão da proporcionalidade ficou muito clara depois que o FP-Jorge usou o GeoGebra para mostrar que funcionava para um polígono não regular* (FP-Andrea, diário do 13º encontro, 30/08/12).
>
> *Quando o vi fazendo com retângulos, tinha certeza de que não daria certo.* (P-Aline, diário do 13º encontro, 30/08/12).
>
> *Neste dia [...] deu para entender perfeitamente que podemos usar qualquer polígono para constatar o Teorema de Pitágoras. Lembrando que ele deverá ser proporcional* (P-Maura, diário do 13º encontro, 30/08/12).

A FP-Andrea e a FP-Karen reconheceram a importância do GeoGebra para que o grupo confirmasse que é possível constatar o teorema com polígonos irregulares. Elas e a P-Maura também demonstraram, em seus diários, compreensão de que os lados do retângulo possuem uma relação de proporcionalidade com o triângulo retângulo. P-Aline, por sua vez, deixou indícios de seus conhecimentos matemáticos quando afirmou que não acreditava ser possível constatar desse modo o Teorema de Pitágoras.

Atitudes como a do FP-Jorge, de socializar ao grande grupo "novas descobertas", foram comuns na prática da CoP-FoPMat. Pensar na possibilidade de constatar o teorema usando figuras que não fossem regulares energizou a comunidade para a aprendizagem da utilização do GeoGebra e de outras possibilidades de verificar geometricamente o teorema.

Diferentes polígonos irregulares foram investigados e possibilitaram a exploração das potencialidades do *software* GeoGebra, à generalização do Teorema de Pitágoras comparando áreas de figuras irregulares e discussões de cunho pedagógico. Enquanto os grupos trabalhavam, a formadora passava pelos grupos e interagia com os membros, questionando ou orientando, cuidando para não validar respostas de modo que o grupo continuasse a investigação. O episódio a seguir retrata um desses momentos.

1.	P-Loreni:	*O que vocês estão fazendo?*
2.	P-Elisa:	*Eu pensei no isósceles, fiz aqui, qual é a relação* (de proporcionalidade) *desses lados* (do triângulo isósceles construídos sobre os lados do triângulo retângulo) *com a base* (lados do triângulo retângulo), *mas não deu.*
3.	P-Loreni:	*Essa relação não poderia ser com outro elemento do triângulo* (do triângulo *isósceles)? A altura com os lados* (do triângulo retângulo)*? [...]*
4.	P-Elisa:	*Em relação à altura?*
6.	P-Elisa:	*Vou tentar* (construir no GeoGebra) *no isósceles.*
7.	P-Loreni:	*E se a gente tivesse uma altura que variasse em função do lado* (do triângulo retângulo)*, por exemplo: ora a altura fosse* $^1/_3$ *ora ¼?.*
8.	P-Elisa:	*Não precisaria trabalhar exatamente com isósceles* (triângulo)*. Porque estaria preocupado com a altura, aí poderia ser qualquer* (polígono).

P-Elisa (2) declarou que testou a relação de proporcionalidade entre os lados do triângulo isósceles e os lados (base) do triângulo retângulo usando o GeoGebra, mas que o modo utilizado não mostrou a relação entre as áreas. Por meio de questionamentos, a formadora (3, 5 e 7) provocou o grupo a investigar a relação entre a altura do triângulo isósceles e os lados do triângulo retângulo, fator que auxilia P-Elisa (8) a verbalizar sua compreensão de que, a partir da altura, pode-se verificar a relação de proporcionalidade para qualquer polígono.

Eu falei aqui na sala que eu estava com dúvidas porque eu não estava usando embasamento matemático, estava apenas desenhando por desenhar e aí começa a não dar certo. [...] Aí a P-Rosa ainda falou "é pelos ângulos". Eu cheguei em casa e fiz. Fiz dois ângulos de 45°, achei o ponto médio, lá no encontro é o vértice do triângulo... aí deu certo. Então tem que usar as propriedades matemáticas sempre. Senão não vai dar certo... (P-Clara, 16º encontro, 04/10/12).

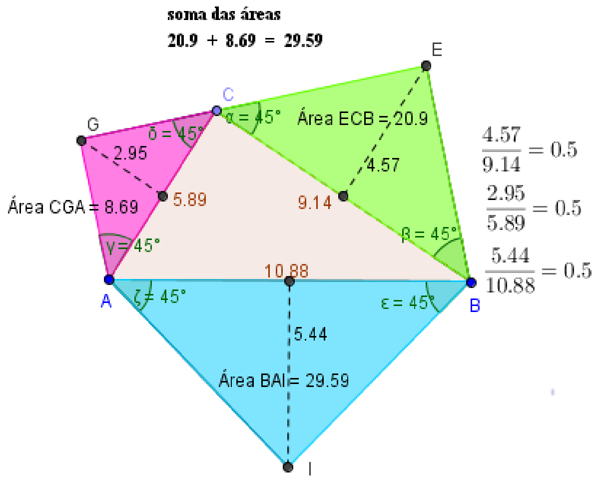


Figura enviada pela P-Clara

Quadro 7 – Reificação do Teorema de Pitágoras por meio do triângulo isósceles

A formadora sempre usou a ferramenta "Mover" para transformar as figuras e procurou questioná-los para observar suas compreensões. Essa atitude propiciou que eles reificassem o Teorema de Pitágoras comparando áreas de polígonos irregulares que possuem uma relação de proporcionalidade com os lados do triângulo retângulo, como no caso dos trapézios.

1.	FP-Jorge:	*Eu estou pensando neste trapézio aqui, para construir outro aqui e outro aqui* (nos catetos do triângulo retângulo), *proporcional. Só que aqui deu um quadrado e na verdade tem que ser uma secção do quadrado [...].*
2.	FP-Jonas:	*Como assim, vai ser proporcional?*
3.	FP-Jorge:	*AE vai ser proporcional ao AD* (AE metade de AD). *[...] E é o ponto médio, vou passar uma perpendicular aqui. Se aqui vai ser igual, eu duplico isso aqui.*

Não sei se vai chegar a algum lugar...
4. *P-Marilene:* *<u>Esse aqui vai ser semelhante</u>* (trapézio sobre o cateto)*?*
5. *FP-Jorge:* *Essa é minha ideia. Agora eu sei que <u>isso aqui é metade de um lado do quadrado e eu só tenho que ter certeza que isso aqui é o dobro disso aqui</u>.*

[...] Testam modos de construir os trapézios sobre os catetos.

6. *P-Marilene:* *Então você pega essa medida e <u>faz uma paralela aqui</u>.*
7. *FP-Jorge:* *<u>É uma perpendicular</u> em cada vértice.*
8. *P-Marilene:* *É <u>a paralela que dá certo.</u>*
9. *FP-Jorge:* *É verdade. Agora vou passar no ponto A. Agora tenho que esticar esse e passar aqui.*
10. *FP-Jonas:* *Fazendo uma perpendicular.*

[...] seguem testando modos de obter o trapézio e negociando as ferramentas.

11. *FP-Jorge:* *<u>Aí no final a gente vai ver se a área bate</u>.*

[...] terminam a construção e obtêm as áreas dos trapézios.

12. *P-Marilene:* *Isso, 41,8 mais quanto aí? Mais 167,2.*
13. *FP-Jorge:* *<u>Vê se dá 209</u>?*
14. *P-Marilene:* *<u>Pimba!!</u>* (risos).
15. *FP-Jorge:* *Massa, né?*

O episódio explicita que o grupo iniciou o trabalho com trapézios utilizando a “tentativa e erro”. A partir da observação do FP-Jorge (1) de que o trapézio era uma secção do quadrado o grupo se engajou na busca por procedimentos para construir trapézios sobre os lados do triângulo retângulo que permitissem constatar o Teorema de Pitágoras.

No episódio há rastros de que o FP-Jorge (1, 2 e 5) mobilizou conhecimentos de proporcionalidade quando explicou que os segmentos $\overline{AE}$ e $\overline{AD}$ têm uma relação de proporcionalidade, uma vez que estão divididos pelo ponto *E* - ponto médio (Conhecimento do Conteúdo). P-Marilene (6 e 8), FP-Jorge (7 e 9) e FP-Jonas (10) negociaram o uso de ferramentas do GeoGebra associadas aos procedimentos para construção da figura, como o uso de retas perpendiculares e paralelas (Conhecimento Tecnológico).

Para confirmar a relação entre as áreas e validar o teorema, o grupo, como indicam FP-Jorge (11 e 13) e P-Marlene (14), utilizou as medidas propiciadas pelo GeoGebra e as comparou com os cálculos na folha de papel, evidenciando que utilizar a tecnologia digital não dispensa as convencionais como lápis e papel. A interação revela também que, ao utilizar o GeoGebra, o grupo construiu conhecimentos de que o Teorema de Pitágoras pode ser confirmado geometricamente por meio de trapézios semelhantes (Conhecimento Tecnológico do Conteúdo).

De modo geral, na negociação de significados evidenciada nesse episódio também há indícios de mobilização/constituição de Conhecimentos Tecnológico do Conteúdo, entre eles:

- a busca por um modo adequado para construir, utilizando o GeoGebra, os trapézios sobre os catetos utilizando uma relação de proporcionalidade;
- o fato de não seguirem instruções para a construção das figuras e se sentirem desafiados, o que pode levar às aprendizagens.

Wenger (1998) salienta que a negociação de significados ocorre em várias situações, sobretudo, quando há uma desafiadora. O episódio retrata um grupo desafiado pela situação em que se envolveram, ou seja, em descobrir outras possibilidades para verificar o teorema. Para esse autor, a negociação de significados não se limita à linguagem, inclui relações sociais e esse grupo desenvolveu um relacionamento de confiança, no qual o FP-Jorge, que teve a ideia inicial de construir trapézios, conduziu a construção da figura e a discussão se posicionando no grupo como *expert*. P-Marilene e FP-Jonas ao questionar e sugerir possibilidades, demonstram um papel ativo na aprendizagem sua e de seus colegas, visto que a P-Marta e a P-Rose acompanharam o que eles disseram e tentaram reproduzir no computador o que viram e, assim, manifestaram suas participações nesse desafio.

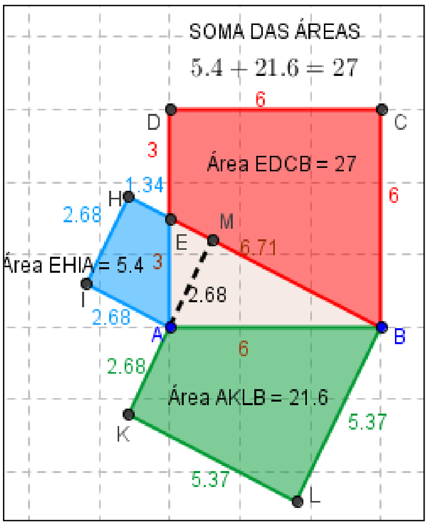


Figura enviada pelo FP-Jorge.

Razões observadas no grande grupo com relação as bases dos trapézios:

$$\frac{DE}{BC} = \frac{AK}{BL} = \frac{HE}{AI} = \frac{1}{2}$$

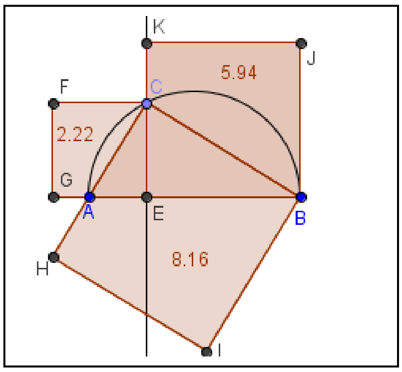


Figura enviada pela P-Maura. Ela construiu o triângulo retângulo, traçou a altura relativa à hipotenusa e inseriu quadrados que determinaram os trapézios.

Quadro 8 – Reificações referentes ao Teorema de Pitágoras e de proporcionalidade.

Os registros realizados nos diários também evidenciaram que a atitude da formadora, após a apresentação desse grupo, em (re)construir passo-a-passo a figura do trapézio e discutir os aspectos matemáticos associado às ferramentas do *software,* proporcionou diferentes reflexões, tais como:

> *O que você fez no início do encontro de hoje, foi muito bom. É importante entender matematicamente o que estamos fazendo.* (P-Aline, diário do 15º encontro, 27/09/12).

> *Achei muito válida a discussão que tivemos no início do encontro, porque me fez refletir o quanto eu estava querendo que o GeoGebra me desse solução que só o embasamento matemático pode dar* (P-Clara, diário do 15º encontro, 27/09/12).

> *Loreni, sempre eu acho que entendi, mas vem você que, além de mostrar uma maneira mais fácil de construir, ainda fala de conteúdos novos que eu não tinha pensado, por exemplo: usar as alturas do triângulo para construir os trapézios* (P-Maura, diário do 15º encontro, 27/09/12).

> *Achei interessante a construção [...]. Conforme comentamos, a maioria dos cursistas prefere fazer primeiro as construções no papel, parece que pensamos melhor fazendo os cálculos e as construções na "unha"* (P-Alice, diário do 15º encontro, 27/09/12).

As professoras destacadas nos fragmentos de diários supracitados reconheceram a necessidade de refletir as relações matemáticas envolvidas na construção de uma figura e nos conteúdos que podem ser discutidos/explorados a partir da figura. Indicaram, também, que o *software* colaborou para a compreensão da proporcionalidade e que ele requer reflexões do conhecimento matemático para a construção de uma figura. Ainda, P-Alice reconhece a necessidade de o grupo utilizar primeiro "o lápis e papel" para depois o *software*, o que evidencia a dificuldade de o grupo transpor a "matemática do lápis e papel" para a tecnologia digital.

Os membros da CoP-FoPMat construíram diferentes figuras (Quadro 9) sobre os lados do triângulo retângulo, e com isso, reificaram que é possível generalizar geometricamente o Teorema de Pitágoras a partir de figuras semelhantes.

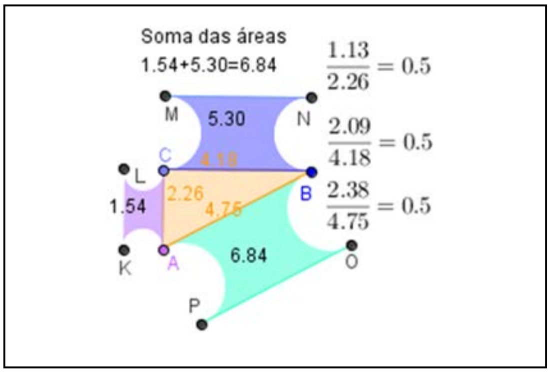


Figura enviada pela P-Maura inspirada no texto da Kaleff, Rei, Garcia (1999).

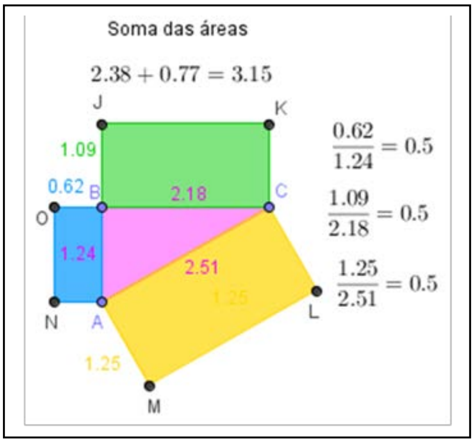


Figura enviada pela P-Aline.

Quadro 9 - Reificações do Teorema de Pitágoras usando figuras semelhantes

As discussões no grande grupo, foram essencias para mobilizar os membros da CoP a investigar, testar hipóteses, experimentar possibilidades utilizando o *software* GeoGebra. Além das figuras do Quadro 9, outras foram construídas para verificação das razões que possibilitaram a retificação de que o teorema pode ser constatado por meio de figuras semelhantes construídas sobre os lados de um triângulo retângulo.

8. Algumas considerações

Esta comunidade firmou sua prática nos empreendimentos negociados e articulados (Wenger, 2002) que possibilitaram abordar diversas questões acerca das TDIC, mais especificamente, explorar o potencial do *software* GeoGebra para a aprendizagem, enfatizando a resolução da tarefa e a discussão de relações matemáticas subjacentes às suas resoluções.

A partir da resolução e da discussão da tarefa e das questões e construções desencadeadas por ela, os membros da CoP-FoPMat puderam negociar suas reificações relacionadas aos significados produzidos concernentes ao Teorema de Pitágoras e, outros conteúdos envolvidos e também, a respeito do uso das TDIC. As reificações não se limitaram aos conhecimentos do conteúdo, da tecnologia e do pedagógico, mas envolveram aspectos do ensino e da aprendizagem matemática na utilização das tecnologias digitais, portanto, das conexões (interações) entre estes três conhecimentos. Dessa forma, os membros da comunidade mobilizaram/constituíram conhecimentos constituintes do *TPACK*, perspectiva assumida nesse estudo como uma possibilidade para orientar a formação do professor para o uso das TDIC.

O estudo das aprendizagens e conhecimentos do *TPACK* mobilizados/constituídos na prática da CoP-FoPMat, na utilização do *software* GeoGebra, nos permitiu identificar (Quadro 10) elementos desta prática que promoveram o desenvolvimento profissional de seus membros.

Os membros da da CoP-FoPMat tiveram oportunidade de:

Desempenhar um papel ativo no seu processo de formação - As ações do formador não foram impostas verticalmente, ou seja, não foram direcionadas apenas pelo formador. Os professores e futuros professores influenciaram, diretamente, na configuração dos empreendimentos negociados. Tiveram liberdade para opinar, discutir, concordar, discordar, expor suas ideias, negociar significados em um processo dinâmico que favoreceu que os participantes se tornassem agentes de sua aprendizagem, proporcionando a constituição de conhecimentos profissionais relativos ao conteúdo, à organização e à condução de uma aula usando a tecnologia digital. Desse modo, desempenharam um papel ativo em seus processos de formação.

Sentir-se desafiado a partir da resolução da tarefa - A partir das dinâmicas de resolução e discussão de tarefas, os membros da CoP foram desafiados com relação aos seus conhecimentos matemáticos e aos conhecimentos profissionais relacionados à tecnologia, ensino e aprendizagem. Outros fatores também colaboraram para que se sentissem e se mantivessem desafiados: a dinâmica do grupo, as atitudes da formadora que procurou questioná-los, o uso da tecnologia digital que propiciou experimentar e confirmar conjecturas, o engajamento mútuo do grupo, a prática da comunidade que manteve o desafio e possibilitou autonomia para que investigassem e atribuíssem novos significados aos conhecimentos mobilizados.

Compartilhar experiência - A resolução de tarefas nessa comunidade ocorria em pequenos grupos, formados por professores experientes e futuros professores. A pluralidade de pessoas, com diferentes histórias de vida, permitiu o compartilhamento de diferentes experiências, com isso, puderam negociar e produzir significados que podem possibilitar mudanças em sua prática pedagógica. Os futuros professores deixaram evidente a importância do conhecimento constituído na prática, partilhado pelos professores. Os professores também reconheceram que as diferentes formas dos futuros professores abordarem uma ideia matemática, o uso que fazem da tecnologia digital, enriquecem as discussões do grande grupo.

Expor erros sem constrangimentos - As dificuldades em construir figuras utilizando o software GeoGebra, em relacionar as figuras com as ideias matemáticas associadas a tarefa, colaborou para que os membros desta comunidade pudessem expor seus erros sem constragimento. Os erros mobilizados eram discutidos, por vezes nos pequenos grupos e em outros momentos nas plenárias. As discussões relacionadas aos erros suscitaram reflexões sobre a importância de analisar erros nos processos de ensino e de aprendizagem, que se explorados adequadamente podem ser fontes de aprendizagens.

Apresentar, justificar, explorar e comparar estratégias - Após o trabalho nos pequenos grupos, os membros apresentavam, ao grande grupo, suas resoluções feitas na folha de tarefa ou figuras construídas no GeoGebra, assim como, justificações de suas estratégias, comparando diferentes modos de explorar ideias matemáticas subjacentes à figura.

Utilizar de tecnologias digitais e o "lápis e papel", integrados ou não - A utilização de tecnologias digitais integradas ou não ao lápis e papel, possibilitaram reflexões por parte dos membros sobre conceitos matemáticos. Ao resolver ou esboçar figuras na folha, os participantes tiveram a possibilidade de refletir acerca da ideia matemática presente no processo de construir uma figura no GeoGebra, de verificar quais relações matemáticas podem ser exploradas e quais conhecimentos matemáticos podem ser generalizados, além de outras questões relacionadas ao conhecimento pedagógico.

Valorizar a presença do *expert* no grupo - A presença de um *expert* no grupo, que por vezes não era o formador/investigador, possibilitou a discussão de novas abordagens para os problemas enfrentados e promoveu a negociação de significados entre os membros. O *expert*, tinha o papel, dentre outros, de legitimar os conhecimentos que eram mobilizados/constituidos no decorrer dos encontros da comunidade, assumindo com suas ações uma participação central no grupo.

Quadro 10 - Elementos da prática da CoP-FoPMat que permitiram o desenvolvimento profissional.

A análise do repertório partilhado na CoP-FoPMat ao longo dos encontros nos permite inferir que o desenvolvimento profissional para a integração das tecnologias digitais envolve a constituição de diferentes conhecimentos consoantes ao *TPACK* e que estes não são integrados rapidamente à prática; são complexos e constituídos por meio de interações que demandam negociações e tempo. Contudo, os membros dessa comunidade sinalizaram que ampliaram os significados que foram atribuídos às questões relacionadas aos seus conhecimentos profissionais e ao uso de tecnologias digitais.

A prática da CoP-FoPMat revelou que a formação de professores para a integração das TDIC no ensino de Matemática requer um espaço que incentive a promoção de interações sociais regulares que privilegie compartilhar ideias, práticas e principalmente a liberdade de seus membros para (re)negociar os empreendimentos e significados, expor seus problemas, suas crenças e suas expectativas.

Os elementos identificados na prática da CoP-FoPMat, além de promoverem o desenvolvimento profissional de seus membros, a partir das aprendizagens e conhecimento mobilizados, permitiram o estabelecimento de relações de respeito, confiança, solidariedade e criatividade, que são profícuas para o desenvolvimento da identidade profissional de professores, na medida em que incentivaram os seus membros a refletir sobre suas crenças/concepções interconectadas com os conhecimentos a respeito do seu ofício na busca de desenvolver sua autonomia e seu compromisso político (Cyrino, 2013), para o uso adequado das TDIC no ensino de Matemática.

Espera-se que os elementos da prática da CoP-FoPMat apresentados neste trabalho colaborem para desencadear reflexões que indiquem outras formas de pensar, compreender e promover ambientes de formação na perspectiva do desenvolvimento profissional, em particular no que tange à integração das TDIC nas práticas pedagógicas.

Agradecimentos

As autoras agradecem ao CNPq e à Fundação Araucária pelo apoio financeiro.

Bibliografía

Baldini, L. A. F. (2014). *Elementos de uma Comunidade de Prática que permitem o desenvolvimento profissional de professores e futuros professores de Matemática na utilização do Software GeoGebra*. Tese (Doutorado) – Universidade Estadual de Londrina, Londrina.

Cyrino, M. C. C. T.; Baldini, L. A. F. (2012). *Software GeoGebra na Formação de Professores de Matemática – uma visão a partir de dissertações e teses. Revista Paranaense de Educação Matemática,* 1, 42-61.

Coutinho, C. P. (2011). TPACK: Em Busca de um Referencial Teórico para a Formação de Professores em Tecnologia Educativa. *Revista Paidéi@. UNIMES VIRTUAL*. Recuperado em 05 de dezembro de 2012 de http://revistapaideia.unimesvirtual.com.br.

Cyrino, M. C. C. T. (2009). Comunidades de prática de professores como espaço de investigação sobre a formação de professores de matemática. In: BATISTA, I. L.; SALVI, R. F. *Pós-graduação em ensino de ciências e educação matemática:* perfil de pesquisas. Londrina: EDUEL, 95-110.

Cyrino, M. C. C. T. (2013). Formação de Professores que Ensinam Matemática em Comunidades de Prática. In: Congresso Iberoamericano de Educación Matemática. Montevideo, Uruguay: *Actas*... del VII CIBEM. 5195-5188.

Day, C. (2001). *Desenvolvimento profissional de professores. Os desafios da aprendizagem permanente*. Porto Editora, Porto.

Ferreira, A. C. (2003). *Metacognicão e Desenvolvimento Profissional de Professores de Matemática:* uma experiência de trabalho colaborativo*.* Tese (Doutorado) - Universidade Estadual de Campinas. Campinas.

Ferreira, A. C. (2006) O trabalho colaborativo como ferramenta e contexto para desenvolvimento profissional: compartilhando experiências. In: Nacarato, A. M.; Paiva, M. A. V. (Org.). *A formação do professor que ensina Matemática:* perspectivas e pesquisas. Belo Horizonte: Autêntica, 149-166.

Imbernón, F. (2010). *Formação docente e profissional: formar-se para a mudança e a incerteza.* Trad. Leite, S. C. Cortez. São Paulo.

Kaleff, A. M.; Rei, D. M.; Garcia, S. dos S. (1999). *Quebra-cabeças Geométricos e Formas Planas*. EdUFF, Niterói. Rio de Janeiro.

Krainer, K. (2003). *Teams, communities & networks. Journal of Mathematics Teacher Education, Netherlands*, 2, 93-105.

Mishra, P.; Koelhler, M. J. (2006). *Technological pedagogical content knowledge: a framework for teacher knowledge. Teachers College Record*, 6, 1017– 1054.

Ponte, J. P. (1998). *Da formação ao desenvolvimento profissional*. In *Actas do ProfMat***,** Lisboa: APM. 27-44.

Shulman, L. (1986). *Those Who Understand: knowledge growth in teaching. Educational Research.* Washington, 2, 4–14.

Shulman, L. (1987). *Knowledge an Teaching: foundations of the new reform. Harvard Educational Review,* 1, 1- 22.

Wenger, E. (1998). *Communities of practice:* learning, meaning and identity*.* Cambridge University Press. New York.

Wenger, E. C.; Snyder, W. M. (2001). *Comunidades de prática: a fronteira organizacional*. In: *Aprendizagem organizacional.* Tradução de: Cássia Maria Nasser. *Harvard Business Review*. Rio de Janeiro: Campus, 9-26.

Wenger, E.; Mcdermott, R.; Snyder, W. M. (2002*). Cultivating communities of practice*. Harvard Business School Press. Boston.

Autores:

Loreni Aparecida Ferreira Baldini. Licenciada em Matemática, mestre e doutora pela Universidade Estadual de Londrina – PR (Programa de Ensino de Ciências e Educação Matemática). Professora da SEED Secretaria de Educação do Estado do Paraná, Brasil. Apucarana. loreni@ibest.com.br.

Márcia Cristina de Costa Trindade Cyrino. Doutora em Educação USP/SP. Professora do Departamento de Matemática e do Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Educação Matemática da Universidade Estadual de Londrina (UEL). Londrina, Paraná, Brasil. marciacyrino@uel.br

ISSN: 1815-0640
Número 45. Marzo 2016
Página 205-224
www.fisem.org/web/union
http://asenmacformacion.com/ojs/index.php/union/index

As Tecnologias Digitais e o Processo de Visualização e Representação Geométrica na Resolução de Fotoproblemas

Rosimeire Aparecida Soares Borges, Sandra Maria da Silva Sales de Oliveira

Fecha de recepción: 23/06/2015
Fecha de aceptación: 03/02/2016

Resumen	Este estudio investigó el uso das tecnologías digitales en el proceso de visualización y representación geométrica para la comprensión y la resolución de fotoproblemas, con alumnos de Educación Primaria. Fue realizada una sesión de fotos de objetos en la escuela con cámara digital; elaboración, digitación y resolución de fotoproblemas geométricos, con institucionalización de los conceptos y exposición de los trabajos producidos por los alumnos. Este estudio sugiere que la innovación de metodologías de enseñanza de Geometría con uso de herramientas tecnológicas auxilia los alumnos en la comprensión de los conceptos geométricos. **Palabras clave**: Tecnologías digitales. Resolución de fotoproblemas. Geometría.
Abstract	This study investigated the use of digital technologies in the process of geometric visualization and representation in order promote the understanding and resolution of photoproblems, with elementary school students. There was a session of photo shooting of objects at the school with a digital camera, and elaboration, typing and resolution of geometric photoproblems, with the institutionalization of the concepts and exhibition of the works produced by the students. This study suggests that the innovation of methodologies for Geometry teaching with the use of technological tools assists students in understanding of geometric concepts. **Keywords**: Digital Technologies. Photo-problem solutions. Geometry.
Resumo	Este estudo investigou o uso das tecnologias digitais no processo de visualização e representação geométrica para a compreensão e a resolução de fotoproblemas, com alunos do Ensino Fundamental. Foi realizada uma sessão de fotos de objetos na escola com máquina digital; elaboração, digitação e resolução de fotoproblemas geométricos, com institucionalização dos conceitos e exposição dos trabalhos produzidos pelos alunos. Este estudo sugere que a inovação de metodologias de ensino da Geometria com uso de ferramentas tecnológicas auxilia os alunos na compreensão dos conceitos geométricos. **Palavras-chave:** Tecnologias digitais. Resolução de fotoproblemas. Geometria.

1. Introdução

No mundo moderno, a rápida evolução tecnológica consiste em um dos desafios da Educação, que necessita auxiliar o aluno na construção dos conhecimentos, para que possa solucionar problemas e argumentar, desenvolvendo sua autonomia. Para Gadotti (2010, p.13), "educar significa, então, capacitar, potencializar, para que o educando seja capaz de buscar a resposta do que pergunta, significa formar para a autonomia". Nesse contexto, o uso das Tecnologias Digitais de Comunicação e Informação-TDIC como recurso em sala de aula tem-se revelado de fundamental importância, como facilitador e motivador para o ensino dos conceitos e suas aplicações.

Presencia-se a necessidade da utilização de diferentes metodologias que não distem do uso dessas tecnologias e que subsidiem o processo de ensino e de aprendizagem nas escolas. Nóvoa (1999, p.12) evidenciou a relação da complexidade da ação educativa com as tecnologias de informação e comunicação:

> A acção educativa sempre se revestiu de uma grande complexidade e de margens significativas de imprevisibilidade. Estas características são ainda mais marcadas [...] devido à presença na escola de crianças de todas as origens sociais e culturais, bem como à democratização do acesso às mais variadas tecnologias de informação e comunicação [...] O reforço de práticas pedagógicas inovadoras, construídas pelos professores a partir de uma reflexão sobre a experiência, parece ser a única saída possível.

Nessa direção, para um redimensionar das práticas educativas, ao educador cabe desenvolver sua consciência crítica e a apropriação dos benefícios que podem ser obtidos pelas TDIC para o ensino dos conceitos em sala de aula, que, em suas múltiplas formas de utilização e manifestação, assumem um importante papel na área educacional (Guimarães, 2007). Assim sendo, a escola deve propiciar ao aluno novas formas de aprendizagem que incluam essas tecnologias em prol da agilidade e versatilidade do processo de ensino e de aprendizagem dos conceitos.

No ambiente escolar, o computador tem auxiliado os educadores em suas aulas e atividades com seus alunos. Nesse contexto, de acordo com Valente (1999, p.6), o professor deixa de repassar conhecimento, e seu papel é o de criar ambientes de aprendizagem e facilitar o "processo de desenvolvimento intelectual do aluno". Assim, é urgente superar as barreiras criadas, ligadas a dois movimentos: a ação do professor enquanto sujeito do processo de ensino e de aprendizagem, no sentido de se preparar para uma incorporação tecnológica e; o papel do sistema educacional, então responsável pela implementação de condições favoráveis à incorporação da tecnologia no ambiente escolar (Frota, 2010).

A interconexão dessas tecnologias subsidia as discussões e argumentações acerca dos temas estudados pelos alunos nas diferentes áreas do conhecimento" (Brasil, 2002, pp. 117-118). Entretanto, é necessário que o aluno seja estimulado a desenvolver posturas e raciocínios autônomos, o que poderá auxiliá-lo em sua formação (Cláudio; Cunha, 2001). Essas discussões põem em cena a relação dos atores, professor e aluno, que no ato de aprender e ensinar não poderá "estar desvinculada do processo de informática" (Ens, 2002, p.38). A produção dos conhecimentos também deve estar atrelada a resolução de problemas em situações reais que possam despertar o interesse dos alunos e auxiliá-los no desenvolvimento do raciocínio (Dante, 2000). Desse modo, a relação aluno, professor, tecnologia, conteúdos e metodologias deverá estar baseada em teorias que privilegiem a emancipação humana.

As TDIC podem estar inerentes ao estudo da matemática em sala de aula através da resolução de problemas que envolvam os conceitos. Para D'Ambrósio (1996, p.80), esse tipo de estudo exige do educador uma contribuição relevante, pois ele "terá o papel de gerenciar/facilitar o processo de aprendizagem e naturalmente interagir com o aluno na produção crítica de novos conhecimentos". Polya (1978) defendeu que o desenvolvimento de habilidades e técnicas matemáticas deveria ser privilegiado, para que o aluno descobrisse por si só a solução dos problemas estudados. Segundo Dante (2000, p.11) "[...] um dos principais objetivos do ensino da matemática é fazer o aluno pensar produtivamente e, para isso, nada melhor que lhe apresentar situações que o envolvam, o desafiem e o motivem a querer resolvê-las". Entretanto, D'Ambrosio (1996) adverte que a matemática nas escolas é estudada de forma mecânica e descontextualizada dos problemas da vida social dos alunos.

Em relação ao ensino de Geometria, Vargas e Barrios (2014) afirmam que se constitui em um ambiente para desenvolver o pensamento espacial, os processos de nível superior e diversas formas de argumentação. Para Abrantes (2000) nos últimos anos tem havido um empenho, em nível mundial, para revalorizar o processo de ensino e de aprendizagem dessa disciplina. Evidencia-se, a importância de se discutir e refletir sobre a atualização das metodologias de ensino e de aprendizagem de Geometria, visto que, a compreensão dos conceitos implica em conhecer o significado dos conceitos, a partir do uso de metodologias próprias. Passar o conhecimento conceitual para a representação simbólica requer uma estruturação do pensamento e reflexão sobre a ação (Morelatti; Souza, 2006).

Nesse contexto, o professor precisa se preparar teoricamente para utilizar metodologias de ensino que incluam o uso das TDIC, essencialmente as que colocam os alunos em contato com essas tecnologias. A resolução de problemas se destaca como uma das metodologias de ensino de relevância na formação dos alunos. Consiste "em um exercício coletivo de memória, imaginação, percepção, raciocínios e competências para a produção e transmissão de conhecimentos" (Brasil, 1999, p. 83). Além disso, desenvolve nos alunos competências para compreender conceitos e procedimentos, que são essenciais para se tirar conclusões e efetuar argumentações, necessárias à formação de cidadãos, capazes de agir e tomar decisões.

É preciso que se reconheça a relevância do ensino de Geometria a partir de ambientes cotidianos e culturais e de materiais didáticos para que possam analisar as ações propostas (Vargas; Barrios, 2014). As TDIC têm auxiliado na resolução de problemas de Geometria e na compreensão dos conceitos geométricos. Existem várias metodologias de ensino que incluem as TDIC, no entanto, a criação de um ambiente de aprendizagem que possa favorecer a construção do conhecimento geométrico não depende somente da tecnologia escolhida, mas também do professor.

A Geometria desempenha um papel fundamental na formação do aluno, propiciando-lhe a oportunidade de construção de um modelo de pensamento próprio que lhe permita "compreender, descrever e representar, de forma organizada, o mundo em que vive" (Brasil, 1997, p.55). A resolução de problemas geométricos poderá trazer aos alunos uma melhor compreensão dos conceitos, visto que a visualização e a representação de conceitos geométricos constituem-se em formas efetivas para a construção e exploração de conceitos abstratos e estabelecem relação desses conceitos com a realidade. Assim sendo, a utilização de uma imagem pode ser empregada na construção e resolução de problemas geométricos. Essa interação pode ser realizada por meio de fotoproblemas fixados numa fotografia. A utilização de fotoproblemas como metodologia de ensino da Geometria pode trazer a realidade para dentro da sala de aula e permitir aos alunos saírem da aula para a realidade. Uma das vantagens desse método é a valorização das capacidades de visualização dos alunos no processo de raciocínio (Almeida; Santos, 2007).

A resolução de problemas pode auxiliar no desenvolvimento das habilidades dos alunos em visualização, desenho, argumentação lógica e aplicação na busca de soluções (Brasil, 1999) e ainda na construção da imagem mental, permitindo ao aluno pensar no objeto geométrico, mesmo na sua ausência, e a diferenciar suas características conceituais. Assim, o objetivo deste estudo foi investigar a eficácia do uso das TDIC para a visualização e a representação de conceitos geométricos na resolução de fotoproblemas em alunos dos dois anos iniciais do Ensino Fundamental II[1], e está pautado no ensino da Geometria, realizado de um modo criativo, que possa estimular a curiosidade dos alunos e favorecer- lhes a organização do pensamento e o desenvolvimento do raciocínio lógico por meio da resolução de fotoproblemas.

O estudo da Geometria coloca as estruturas mentais dos alunos em atividade, possibilitando-lhes um caminhar do estágio de desenvolvimento cognitivo, passando das operações concretas para o estágio das operações abstratas. Nesse sentido, o aluno poderá conhecer e explorar o espaço em que se insere, identificando as formas geométricas (Kaleff, 2008).

2. Considerações Teóricas

O processo de desenvolvimento do raciocínio geométrico está presente em estudos da geometria gráfica, que consiste na interpretação e representação da figura que corresponde a uma imagem do objeto matemático. A geometria gráfica é um conhecimento que privilegia a 'forma' e a visualização, tornando-se um dos suportes na aprendizagem dos conceitos geométricos, um dos principais canais da percepção (Almeida; Santos, 2007). A forma pela qual o objeto é interpretado pela mente humana influencia na própria cognição em Geometria. Um estudo envolvendo figuras geométricas precisa basicamente levantar considerações relacionadas ao aspecto da

[1] Alunos com idades entre 11 (onze) e 12(doze) anos.

visualização, quando esse raciocínio será todo desenvolvido por tal indivíduo, sendo estruturado, e, a partir da interpretação que o indivíduo faz do modelo que representa o objeto geométrico, tanto no que se refere à imagem mental, através de um diagrama, ou mesmo por um modelo concreto (Kaleff, 2008). Na resolução de problemas geométricos, das dificuldades apresentadas pelos alunos, algumas se devem à essa dificuldade de visualização. O que ocorre é que muitas vezes esses alunos não conseguem relacionar diversos sistemas.

O desenvolvimento do pensamento em Geometria foi estudado pelos professores holandeses Pierre Van Hiele e sua esposa, Dina Van Hiele-Geldof. Os resultados das investigações desses professores começaram a ser publicados no ano de 1959. Entretanto, foi Pierre Van Hiele que reformulou e desenvolveu essa teoria, que vem despertando a atenção internacional. Foram feitas traduções para o inglês, em 1984, por Geddes, Fuys e Tischler, deflagrando o interesse por essa contribuição (Kaleff, 2008). Esse Modelo é utilizado para a avaliação das habilidades e como guia sobre a aprendizagem dos alunos em Geometria, pois se fundamenta em cinco níveis do desenvolvimento do pensamento geométrico que descrevem as características do processo do pensamento: Reconhecimento ou Visualização, Análise, Dedução informal ou Ordenação, Dedução Formal e Rigor (Villiers, 2010).

Aos alunos, frequentemente, são apresentadas tarefas que requerem vocabulário, conceitos ou conhecimentos de propriedades, além do nível de pensamento que possuem, problema esse percebido por Van Hiele. Investigando, ele percebeu que há uma alarmante falta de harmonia entre o ensino e a aprendizagem em Matemática, visto que em uma sala de aula os alunos pensam em níveis diferentes dos colegas e também do professor, e, frequentemente, usam palavras e objetos de formas diferenciadas das referidas pelos seus professores e pelo livro didático. Quando o ensino ocorre em um nível de pensamento acima ao do aluno, o conceito não fica gravado por muito tempo e não é bem assimilado, assim como as concepções erradas persistem, quando apreendidas. Van Hiele verificou ainda que, apesar do crescimento cronológico das idades, automaticamente não ocorre um crescimento nos níveis de pensamento e que poucos estudantes decididamente atingem o último nível (Villiers, 2010).

Nos trabalhos iniciais, os Van Hiele desenvolveram a estrutura para uma experiência com os níveis de pensamento, com o objetivo de auxiliar o aluno a desenvolver um *insight* em Geometria. Para eles, um aluno desenvolve um insight se: a) for capaz de se desempenhar numa possível situação não usual; b) desenvolve correta e adequadamente as ações requeridas pela situação; c) desenvolve deliberada e conscientemente um método que resolva essa situação. Desse modo, para que os estudantes tenham um *insight,* precisam entender o que estão fazendo, por que estão fazendo e quando o fazem. Dessa forma, os alunos são capazes de aplicar seu conhecimento ordenadamente para resolver os problemas propostos (Villiers, 2010). Os níveis de desenvolvimento do pensamento geométrico atribuídos por Van Hiele são:

- NÍVEL 0 – Reconhecimento: inicialmente, os alunos basicamente raciocinam por meio de considerações visuais. Sem considerações explícitas das propriedades dos seus componentes, os conceitos geométricos são levados em conta como um todo. Entretanto, as figuras geométricas são reconhecidas pela sua aparência global, podendo ser denominadas por triângulo, quadrado, etc. Nesse nível, o aluno pode identificar formas específicas, aprender o vocabulário geométrico, reproduzir uma figura dada, etc.

- NÍVEL 1 – Análise: os alunos pensam por meio de observação e experimentação e através de uma análise informal sobre os conceitos geométricos. Para que os alunos possam entender conceitos de classes e formas, estabelecem propriedades que constituem as figuras geométricas. Porém, nesse nível, os alunos ainda não são capazes de compreender as relações entre as figuras ou entre as propriedades.
- NÍVEL 2 – Dedução informal ou Ordenação: os alunos, nesse nível, já são capazes de definir e relacionar as figuras e suas propriedades, podendo, no entanto, distingui-las se necessário para a formação de um conceito geométrico. Assim, reconhecem classes de figuras e entendem a inclusão e a intersecção de classes, entretanto, nesse nível, os alunos ainda não compreendem o que significa uma dedução ou axiomas, não percebem como elaborar provas formais e partem de pontos diferentes.
- NÍVEL 3 – Dedução: os alunos nesse nível deduzem uma afirmação a partir de outra ou de outras que foram sequenciais. Tais deduções são entendidas como um caminho que guia para a consignação de uma teoria geométrica, dentro de um contexto matematicamente formal em que aparecem termos indefinidos, como os axiomas, com teoremas e definições.
- NÍVEL 4 – Rigor: nesse nível, os alunos conseguem avaliar rigorosamente sistemas dedutivos, comparando diferentes axiomas na ausência dos modelos concretos estudados nas diversas geometrias. Os alunos possuem a capacidade de aprofundar na análise das propriedades de um sistema dedutivo (Villiers, 2010).

Os Van Hiele identificaram algumas generalizações, propriedades características desse Modelo, e que fornecem um roteiro quanto à metodologia a ser aplicada:

> (1) O Modelo é parte de uma teoria de desenvolvimento e, portanto, presume que um aluno, para atuar com sucesso em um determinado nível, necessita ter adquirido (através de experiências de aprendizagem apropriadas) as estratégias dos níveis anteriores, não permitindo aos alunos saltar níveis;
> (2) O processo, ou a falta dele, de um nível para outro, depende mais dos conteúdos e métodos de ensino recebidos do que da idade. Van Hiele chama a atenção para o fato de que é possível ensinar a um aluno habilidades acima de seu nível real.
> (3) No mecanismo entre os níveis, os objetos inerentes a um nível se transformam em objetos de estudo para o nível posterior.
> (4) Cada nível tem seus próprios símbolos linguísticos e seu próprio sistema de relações conectando esses símbolos. Assim, uma relação que é aceita como correta em um nível pode ser modificada (Kaleff *et al*., 1994, p.27).

As cinco fases sequenciais existentes no decorrer da aprendizagem geométrica, segundo Van Hiele, se seguidas corretamente, favorecem ao indivíduo adquirir conhecimento sobre um determinado conceito geométrico em um nível de pensamento, quais sejam:

- FASE 1 – Questionamento ou Informação: estabelece-se um diálogo entre o professor e o aluno, fazem-se observações e questões, e se institui um vocabulário específico. Com esse diálogo, o professor terá a possibilidade de perceber quais os conhecimentos anteriores que os alunos têm do assunto, e assim, perceber a direção dos estudos que deverá tomar.
- FASE 2 – Orientação Direta: o professor tem a tarefa de selecionar um material para que os alunos possam analisar e se familiarizar com as estruturas e características deste nível. Os exercícios, em sua maioria, são tarefas de uma só etapa, que possibilitam respostas exclusivas e objetivas.
- FASE 3 – Explicitação: os alunos refinam o uso de seus vocabulários, podendo expressar verbalmente suas ideias, referentes às estruturas que observam. A ajuda do professor deve ser mínima, pois deverá deixar o aluno independente em busca de formar um sistema das relações em estudo.
- FASE 4 – Orientação Livre: as atividades apresentadas ao aluno devem possuir diferentes formas de resolução, ou seja, múltiplas etapas, tornando-se possível que o aluno ganhe experiência na busca da individualização na resolução de atividades. Dessa maneira, muitas relações tornam-se mais claras entre os objetos de estudo.
- FASE 5 – Integração: consiste na observação e revisão do que já foi estudado, visando à integração global entre os objetos e relações com a consequente união e internalização em um novo domínio de pensamento. O papel do professor é o de auxiliar no processo de síntese, no entanto, sem introduzir novidades ou discordâncias. Os alunos devem ter alcançado um novo nível de pensamento e, no nível seguinte, estarão preparados para repetir as fases de aprendizagem (Kaleff *et al*., 1994).

Considerando esses pressupostos, a teoria de Van Hiele será utilizada para subsidiar as análises das atividades desenvolvidas nesta investigação, referentes à compreensão dos alunos participantes no estudo dos conceitos da Geometria Plana por meio de resolução de fotoproblemas.

3. Procedimentos metodológicos

A aprendizagem da Geometria deve envolver professores, alunos e a comunidade escolar. Assim sendo, o presente estudo se utilizou da investigação do tipo qualitativa. Esse tipo de estudo fundamenta-se na especificidade do objeto das ciências sociais, atribuindo valor às manifestações específicas e comportamentais dos participantes deste estudo, para o entendimento dos fenômenos. Esse tipo de investigação estabelece que tudo seja observado, e permite construir pontos que auxiliem uma maior compreensão do objeto de estudo (Bogdan; Biklen, 1994).

A concepção de que o conceito é evocado, e de forma significativa, nas situações, levou à proposição, como atividades essenciais desta investigação, da elaboração e resolução de fotoproblemas envolvendo os conceitos geométricos, a partir das fotos tiradas pelos alunos no cotidiano escolar.

3.1. Participantes

Como local para realização desta pesquisa elegeu-se uma Escola Estadual do Estado de Minas Gerais, que atende a um público de alunos abrangendo todos os anos do Ensino Fundamental. Participaram deste estudo todos os 160 alunos[2] matriculados e frequentes nos dois anos iniciais do Ensino Fundamental II, com idades entre 11 (onze) e 12(doze) anos, como já referido.

3.2. Procedimentos

A compreensão e ampliação da percepção de espaço e a construção de modelos para interpretar questões da Matemática e de outras disciplinas é uma competência a ser desenvolvida com os alunos. Nesse sentido, cogitou-se que atividades geométricas em situações problema poderiam facilitar a percepção das relações existentes entre as representações das figuras geométricas planas com os objetos que estas representam. Pensando por essa lente, o primeiro passo foi a aplicação de um Teste Diagnóstico aos alunos, com o intuito de conhecer as habilidades e competências em Geometria que eles já possuíam, as quais seriam pré-requisitos nas fases posteriores.

De posse da análise dos resultados desse teste foram ministrados encontros de reforço dos conceitos geométricos pela professora pesquisadora. A terceira etapa foi uma sessão de fotos por meio de uma máquina digital, realizada dentro da escola, ação dos alunos. Na quarta etapa, foram realizadas duas oficinas, de elaboração, digitação e resolução de fotoproblemas geométricos, a partir das fotos obtidas na sessão anterior, também pelos alunos. Na quinta etapa, uma sessão de institucionalização dos conceitos geométricos envolvidos e a correção dos fotoproblemas elaborados pelos alunos. Por fim, a sexta etapa compreendeu a apresentação dos trabalhos realizados pelos alunos participantes da pesquisa em uma “Exposição dos Fotoproblemas”.

4. Desenvolvimento e Resultados

De início os alunos participantes dessa investigação não se mostraram muito interessados, o que mudou significativamente quando foi mencionada a metodologia que seria utilizada. A aplicação do Teste Diagnóstico para cada turma foi feita em horário de aula e teve duração de 50 minutos. Teve como objetivo identificar quais os conhecimentos básicos da Geometria Plana que esses alunos já apresentavam. Composto por cinco questões abertas, esse teste foi respondido individualmente pelos 160 alunos participantes.

Na primeira questão desse teste os alunos classificaram, em curvas abertas ou curvas fechadas, quatro curvas apresentadas. O que se pode notar, nas respostas obtidas, é que todos os alunos (100%) acertaram mostrando ter compreendido os conceitos envolvidos. Já na segunda questão foram apresentados diferenciados

[2] Esses alunos estavam sempre divididos em turmas de 40 alunos e cada turma em grupos de 4 alunos.

polígonos para que os alunos os classificassem de acordo com o número de lados. Os resultados, considerando por classes de figuras, mostram que os alunos apresentaram dificuldades em reconhecer os quadriláteros, quando somente 60,71% dos participantes acertaram essas classificações.

De modo mais específico, os octógonos foram reconhecidos por 46,42% dos participantes. 39,28% dos alunos pesquisados identificaram os triângulos. Já os pentágonos, hexágonos e heptágonos, apenas 25% acertaram a classificação. Pode-se notar nessas duas questões que, embora reconhecessem bem as curvas abertas e fechadas na primeira questão do Teste Diagnóstico, a maioria dos alunos ainda não se encontrava no nível 0 (zero) (Visualização ou Reconhecimento) conforme teoria de Van Hiele, pois na segunda questão, ficaram nítidas suas dificuldades em reconhecer os polígonos apresentados. Esses resultados mostram que ainda não conheciam as propriedades das figuras geométricas. Já os alunos que acertaram essas questões conseguiram identificar as formas específicas das figuras geométricas apresentadas, por meio de suas propriedades, o que indica que já estavam no nível 0 (zero) (Visualização ou Reconhecimento), segundo a teoria de Van Hiele.

Na terceira questão do Teste Diagnóstico, em que foi proposta aos alunos a classificação dos quadriláteros da segunda questão, as dificuldades se evidenciaram. Somente 12,5% dos alunos reconheceram um quadrado e 15 % classificaram, corretamente, um paralelogramo. Na classificação de retângulos, 25% dos alunos acertaram e de losangos, apenas 14,28 %. O que se percebeu é que uma maioria dos alunos não soube diferenciar e classificar os quadriláteros por não conhecer as propriedades dessas figuras geométricas, o que vem confirmar que esses alunos ainda não se encontravam no nível 0 (zero) (Visualização ou Reconhecimento). Os alunos que acertaram essa questão, já se encontravam no nível 0 (zero), visto que conseguiram raciocinar por meio de considerações visuais, levando em conta a aparência global das figuras geométricas envolvidas na atividade, o que mostra que identificaram as formas específicas e propriedades das figuras que classificaram. Nota-se assim, que nessa questão houve valorização das capacidades de visualização dos alunos, o que auxilia no processo de raciocínio, de acordo com estudo de Almeida e Santos (2007).

Em relação à quarta questão do Teste Diagnóstico, na qual deveriam classificar os triângulos apresentados na segunda questão, o que se pode verificar foi que a maioria dos alunos não conseguiu identificar e classificar os triângulos. Apenas 28,56% dos participantes conseguiram classificar os triângulos, ou seja, uma minoria. Na quinta questão, foi apresentada uma figura com a imagem de um campo de futebol e foi solicitado que os alunos citassem as figuras geométricas que integravam essa imagem. Os resultados dessa atividade permitiram notar que a maioria dos alunos não conseguiu identificar todas as figuras geométricas presentes. Uma minoria dos alunos 32,14% afirmou tratar-se de: círculo, semicírculos e retângulos. Quanto aos alunos que erraram, há evidências que não reconheceram as figuras geométricas e não conseguiram diferenciá-las.

Os resultados dessas duas questões mostraram que a maioria dos alunos (67,86%) ainda não se encontrava no nível 0 (zero) de desenvolvimento do pensamento geométrico, conforme teoria de Van Hiele. Mais especificamente, em relação à quarta questão, notou-se que uma maioria dos alunos não soube classificar os triângulos e na quinta questão esses alunos afirmaram a presença de figuras geométricas que não estavam na figura dada, o que aparentou terem feito confusão entre as figuras e não conhecimento das suas propriedades. Já os alunos que acertaram essas duas questões (32,14%) mostraram ter considerações explícitas das propriedades dessas figuras o que lhes permitiu classificá-las acertadamente. Reconhece-se assim, que esses alunos já estavam no nível 1 "Análise" de desenvolvimento do pensamento geométrico, estabelecido por Van Hiele, em que os alunos pensam por meio de análise informal sobre os conceitos geométricos, conhecendo as propriedades das figuras geométricas.

Em virtude desses resultados do Teste Diagnóstico, antes de dar continuidade às atividades previstas na investigação, tornou-se necessária a realização de cinco encontros com o objetivo de oferecer aos alunos participantes da referida pesquisa atividades de reforço relacionadas aos conceitos geométricos envolvidos no Teste Diagnóstico. Esses encontros foram divididos em três momentos: a) uma apresentação dos conceitos geométricos em Power Point; b) uma atividade com a resolução de problemas envolvendo os conceitos geométricos que seriam abordados na investigação e, c) um momento de institucionalização dos conceitos envolvidos, seguido de discussões e reflexões. Essas atividades foram pensadas com base em Nóvoa (1999), que defende uma saída possível para a melhoria da ação educativa, pensar e realizar práticas pedagógicas inovadoras que podem ser construídas pelos próprios professores. Além disso, foram propostas atividades de resolução de fotoproblemas, de modo a contribuir na formação dos alunos para o desenvolvimento da autonomia, conforme Gadotti (2010), para quem educar significa preparar os alunos para que sejam capazes de buscar respostas para as perguntas que lhes são colocadas.

De um modo geral, nesses encontros os alunos participantes da investigação apresentaram inúmeras dúvidas, tanto em relação à classificação das figuras geométricas, quanto em relação aos conceitos matemáticos envolvidos nas resoluções dos problemas estudados. No entanto, ao final dos cinco encontros, observou-se que houve progresso na aprendizagem dos conceitos geométricos envolvidos. Mais especificamente nos três primeiros, as atividades propiciaram aos alunos identificar as figuras geométricas e estabelecer as propriedades específicas de cada uma delas. Assim, reconhece-se que nesse momento da investigação os alunos conseguiram raciocinar através de considerações visuais sobre as figuras geométricas planas, embora ainda não explicitassem todas as propriedades dos seus componentes, o que indica terem passado para o nível 0 (zero) de desenvolvimento do pensamento geométrico, conforme a teoria de Van Hiele.

De modo mais detalhado, observou-se que os alunos, estando no nível 0 (zero) de desenvolvimento do pensamento geométrico (Kaleff *et al*., 1994), perpassaram pelas duas primeiras fases desse nível: fase 1 "Questionamento ou Informação", estabelecendo diálogo com a professora pesquisadora, levantando questões e instituindo um vocabulário mais específico, quando ela pode perceber os conhecimentos adquiridos por esses alunos e decidir que direcionamento deveria ser dado aos estudos; e fase 2 "Orientação Direta" do nível 0(zero), quando foram apresentadas as diretivas para a compreensão das atividades e os procedimentos dessa etapa, com base nos conhecimentos geométricos adquiridos até então.

No quarto encontro de atividades de reforço dos conceitos geométricos pode-se perceber que os alunos já expressavam verbalmente suas ideias referentes às estruturas geométricas estudadas, o que mostra terem perpassado pela fase 3 do nível 0 (zero): "Explicitação". Nessa fase, a ajuda da professora foi mínima, deixando os alunos independentes na busca de formar um sistema de relações em estudo. Pode-se afirmar ainda que foi cumprida a fase 4 desse nível: "Orientação Livre", pois as atividades possuíam diferentes formas de resolução, o que tornou possível que ganhassem experiência na busca da individualização para a resolução dessas atividades, sem interferência direta da professora pesquisadora.

No quinto encontro de reforço, os alunos observaram e revisaram o que já havia sido estudado, objetivando estabelecer relações entre as figuras geométricas estudadas. Como consequência, houve união e internalização desses conceitos num novo domínio de pensamento. Estavam na fase 5 "Integração", última fase do nível 0 (zero), conforme teoria de Van Hiele. Nesse momento da pesquisa, o papel da professora investigadora foi o de auxiliar na sintetização dos conceitos já estudados, não introduzindo novos conceitos. Notou-se, que os alunos alcançaram condições para avançar para um novo nível de pensamento (Kaleff *et al*. 1994).

Na continuidade da investigação ocorreu a sessão de fotos, que consistiu em um momento muito esperado pela maioria dos alunos participantes, pelo fato de poderem sair do ambiente da sala de aula. A pesquisadora apresentou aos alunos as instruções de como seria essa etapa da investigação. Nessa sessão de fotos foram utilizadas duas câmeras digitais. Eles saíram da sala de aula, em grupos de quatro alunos, para o pátio da escola, acompanhados pela pesquisadora, respeitando a vez da utilização individual de uma câmera digital. Durante essa sessão de fotos, os alunos mostraram interesse em desenvolver a atividade, tirar uma foto no pátio escolar que abrangesse uma figura geométrica. O interesse dos alunos foi abordado por Ens (2002), que defende que as situações reais, além de despertar o interesse dos alunos, propiciam a construção do conhecimento e auxiliam no desenvolvimento do raciocínio, o que é reafirmado por Valente (1999) quando refere ao uso das tecnologias na educação, que podem despertar o interesse e facilitar o processo de desenvolvimento intelectual dos alunos.

Observando a sessão de fotos, nota-se também que os alunos tiveram a oportunidade de reconhecer as formas geométricas observadas no cotidiano escolar, passando pela fase 3 "Explicitação" do nível 0 (zero). Nessa fase os alunos puderam expressar verbalmente suas ideias, relativas às estruturas geométricas que observavam. Observou-se a independência dos alunos para tirar as fotos de objetos que visualizaram no cenário escolar, que remetessem à Geometria. As atividades ocorreram sem a interferência da professora, o que corresponde a fase 4: "Orientação Livre", na qual os alunos agem sem interferência direta e as relações entre as figuras geométricas tornam-se mais claras. Foi dada a oportunidade de observação e de revisão do que já haviam estudado, caracterizando a fase 5 “Integração”, ocorrendo a relação global entre os objetos geométricos estudados e a união e internalização em um novo domínio de pensamento (Kaleff, *et. al*,1994). Desse modo, pode-se dizer que revelaram capacidade para entrar no nível 1).

No laboratório de informática da escola, os alunos pesquisados participaram de uma sessão de seleção das fotos tiradas por eles na sessão de fotos. Foram selecionadas (160) cento e sessenta fotos[3] envolvendo conceitos geométricos diversificados para serem utilizadas na oficina de elaboração e resolução de fotoproblemas. Com o auxílio da ferramenta *Paint*, após reconhecerem as figuras geométricas presentes nas fotos, os alunos marcaram, em cores vermelho e verde, os limites externos dessas figuras (conforme Figuras 1 e 2) e em seguida essas fotos foram impressas para serem utilizadas na oficina de elaboração dos fotoproblemas.

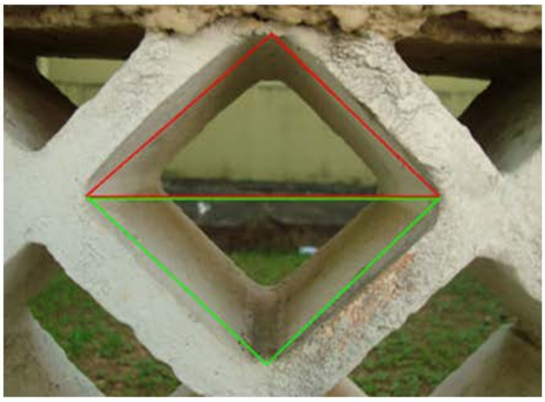


Fig. 1. Foto do muro da escola feita pelos alunos.

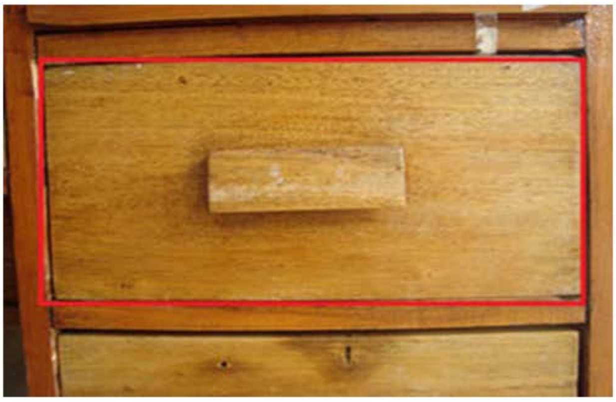


Fig. 2. Foto da gaveta da mesa do professor feita pelos alunos.

Nessa atividade, os alunos se utilizaram da visualização e observação das fotos, no momento em que precisaram estabelecer e marcar os limites de cada figura geométrica identificada e realizar uma análise informal, utilizando os conceitos estudados para reconhecer as características que constituíam as figuras geométricas identificadas. Observa-se assim que nessa atividade, eles perpassaram pelas cinco fases do nível 1: fase 1 – questionamento ou informação; fase 2 – orientação direta; fase 3 – explicitação; fase 4 – orientação livre e fase 5 – integração, como considerado pela teoria de Van Hiele. Ao reconhecer que eles passaram pelas cinco fases do nível 1, entende-se que estavam preparados para repetir as fases de aprendizagem em um novo nível de desenvolvimento do pensamento geométrico, o nível 2 (Kaleff *et al*., 1994). Pode-se dizer ainda que a visualização das formas geométricas constantes nas fotos por eles tiradas veio auxiliar na construção e exploração dos conceitos abstratos que estariam envolvidos, posteriormente, na elaboração de problemas, a partir das fotos (Almeida; Santos, 2007).

---

[3] Cada aluno selecionou uma das fotos que tirou, ficando 4 fotos de cada grupo.

Na próxima etapa da investigação, nas oficinas de elaboração dos problemas envolvendo conceitos geométricos, os alunos receberam as fotos marcadas na sessão anterior. De início a professora pesquisadora explicou a proposta da oficina que era a de elaborar um problema tendo como referência uma das fotos. Nessa atividade, os alunos necessitaram estabelecer a proporção das medidas das figuras geométricas contidas nas referidas fotos com as medidas reais dos objetos fotografados. Assim, identificando as figuras geométricas planas envolvidas nas fotos, atribuíram valores proporcionais das medidas reais para os lados das figuras e criaram problemas geométricos utilizando os conceitos estudados e revistos nas atividades de reforço. Os problemas criados pelos alunos foram, primeiramente, registrados por eles manualmente em uma folha A4, para depois digitarem e imprimirem.

Reconhece-se que a proposta dessa oficina de elaboração dos fotoproblemas vem ao encontro do que defende D'Ambrosio (1996), que aos alunos devem ser oferecidas diferenciadas situações de aprendizagem e que o ensino não deve se dar de forma mecânica e descontextualizada da vida dos alunos. Os alunos foram capazes de definir e relacionar as figuras geométricas presentes nas fotos, reconhecendo-as por meio de suas propriedades, podendo, no entanto, distingui-las para a formação de um conceito geométrico. Observou-se assim que, nessa etapa da investigação, os alunos atingiram o nível 2 de desenvolvimento do pensamento geométrico: "Dedução Informal ou Ordenação", como estabelecido pela teoria de Van Hiele, quando reconheceram as classes de figuras e entenderam a inclusão e a intersecção de classes. Em relação às fases inerentes a esse nível 2, pode-se afirmar que perpassaram pela fase 1 "Questionamento ou Informação" quando dirigiram várias questões para a professora pesquisadora.

Nessa etapa, a professora explicitou as diretivas que deveriam ser seguidas, salientando a necessidade de tomarem por base os conhecimentos geométricos já adquiridos para elaborarem os fotoproblemas geométricos, características da fase 2: "Orientação Direta". Foi um momento de discussões e de expressividade do pensamento geométrico em que foram capazes de definir e de relacionar as figuras geométricas por meio das respectivas propriedades, necessárias e suficientes para a formação de um conceito geométrico, o que caracteriza a fase 3 do nível 2: "Explicitação". Além disso, essa etapa da investigação propiciou aos alunos estarem em contato com a Geometria de um modo diferenciado, uma oportunidade de construir um modelo de pensamento próprio, o que pode auxiliá-los na compreensão, descrição e representação, de modo organizado dos conceitos estudados (Brasil, 1997).

Na sequência dessa investigação, no laboratório de informática da escola, os alunos digitaram e imprimiram os problemas elaborados na oficina anterior, para posteriormente utilizá-los na oficina de resolução dos fotoproblemas. Nessa oficina as resoluções foram feitas manualmente, em folhas A4 em cor azul, conforme exemplos constantes nas Figuras 3 e 4. Cabe salientar que as folhas contendo os fotoproblemas foram trocadas entre os grupos de alunos para que cada grupo resolvesse problemas diferentes dos que elaborou. Como fonte de pesquisa, eles utilizaram um livro didático de matemática, em busca das fórmulas geométricas necessárias para as resoluções dos problemas elaborados. Essa proposta veio privilegiar o desenvolvimento de habilidades e técnicas matemáticas pelos alunos, visto que tiveram que pensar um problema a partir da foto do cotidiano escolar, e ainda os conceitos geométricos e matemáticos envolvidos na resolução (POLYA, 1978).

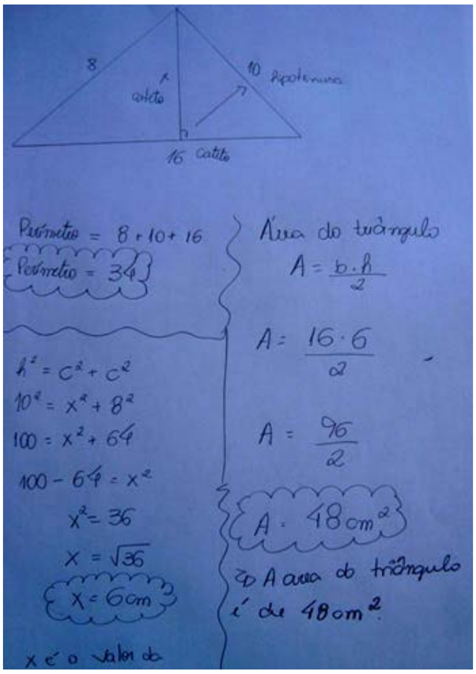


Fig. 5. Resolução de problemas pelos alunos.

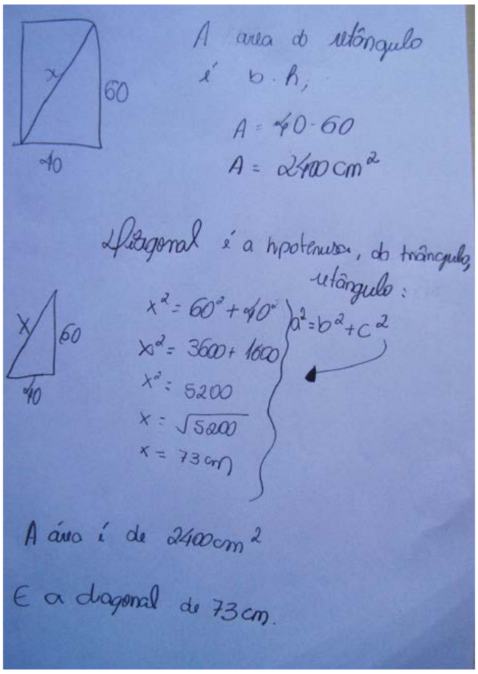


Fig. 6. Resolução de problemas pelos alunos.

A resolução dos fotoproblemas elaborados pelos alunos foi uma atividade de interação entre eles, em que conseguiram definir e reconhecer as fórmulas necessárias para efetuar os cálculos, como aquelas envolvendo perímetro e área, por exemplo, na direção de obter respostas para os problemas. Essa atividade de resolução lhes exigiu a passagem do conhecimento conceitual para o a representação simbólica o que, segundo Morelatti e Souza (2006), requer uma estruturação do pensamento e reflexão sobre a ação. Os alunos não apresentaram dúvidas em relação aos conceitos geométricos, mas sim referentes aos cálculos, as quais foram remediadas pela professora pesquisadora. Todas essas características indicam que os alunos continuaram no nível 2 “Dedução informal ou Ordenação”, como estabelecido pela teoria de Van Hiele.

Pode-se ainda reconhecer que os alunos estavam no nível 2, passaram pela fase 4 “Orientação Livre” desse nível, visto que as atividades realizadas possuíam diferentes formas de resolução, o que tornou mais claras as relações entre os objetos geométricos em estudo e oportunizou que eles vivenciassem a resolução dos fotoproblemas. Além disso, foi uma situação que os envolveu, em que se sentiram desafiados, porém motivados a querer resolvê-los pensando produtivamente (DANTE, 2000).

Dando sequência à investigação, foi realizada uma oficina de correção dos problemas e institucionalização dos conceitos envolvidos pela professora pesquisadora, em sala de aula, com os alunos, os quais participaram discutindo e refletindo sobre as resoluções por eles efetuadas, demonstrando permanecer no nível 2: “Dedução informal ou Ordenação”, conforme estabelecido pela teoria de Van Hiele, porém, passando pela fase 5 “Integração”. Nessa fase, foram capazes de observar e fazer uma revisão do que foi estudado, o que lhes permitiu uma integração global entre os objetos estudados. Os alunos estabeleceram relações entre os objetos de estudo em um novo domínio de pensamento. Nessa etapa, o papel da pesquisadora foi o de auxiliar no processo de institucionalização e sintetização dos conceitos geométricos abordados pelos alunos nos problemas, contudo, sem introduzir novidades ou discordâncias.

A próxima etapa da investigação foi a oficina de confecção dos cartazes (Figuras 5 e 6) referentes aos fotoproblemas resolvidos anteriormente, com duração de duas aulas de 45 minutos.

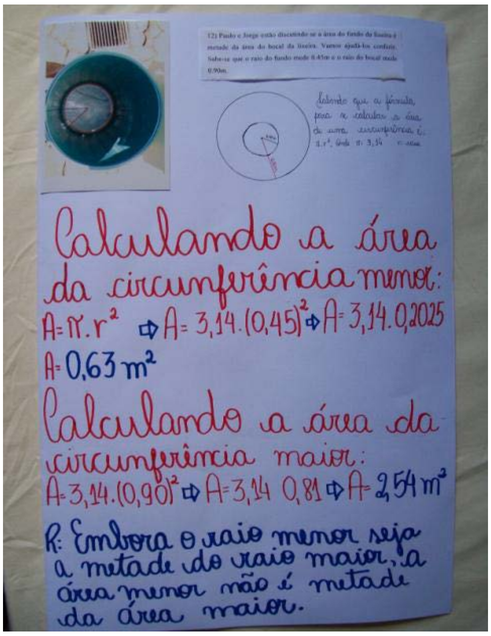


Fig.5. Cartaz feito pelos alunos.

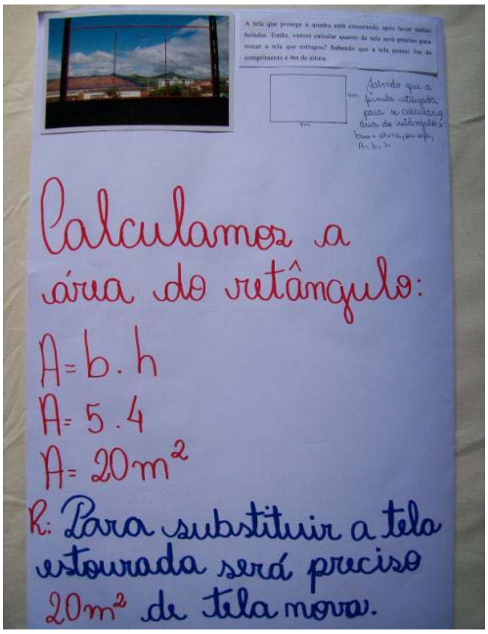


Fig.6. Cartaz feito pelos alunos.

Para a elaboração desses cartazes, os alunos levaram as fotos e os problemas impressos, as resoluções em folhas A4, cartolinas, além de lápis, borracha, caneta, pincel atômico e régua. Nessa oficina, colaram a foto no canto superior esquerdo da cartolina e, abaixo ou ao lado da foto, colaram o problema já digitalizado em papel A4. Abaixo ou ao lado das colagens os alunos fizeram o desenho esquemático da resolução e utilizaram o restante da cartolina para a reprodução, no cartaz, daquela resolução do problema que havia sido feita em A4.

Os cartazes elaborados foram apresentados em um mural da referida escola em uma “Exposição”. Mais especificamente, no centro do mural, os alunos colocaram um cartaz em cor vermelha com o título “Fotoproblemas”, acompanhado da definição desse termo e, ao lado desse cartaz, todos os cartazes por eles produzidos (Figura

7). Cada uma das turmas de alunos que foi visitar essa “Exposição” colocou suas dúvidas em relação aos problemas e à atividade de pesquisa em si para os alunos que fizeram os trabalhos, que ficaram próximos ao mural e explicaram sinteticamente como a pesquisa foi realizada, seus resultados e impressões.

Fig. 7. Exposição dos cartazes feitos pelos alunos.

O que pode ser notado pela professora pesquisadora é que, para os alunos participantes da pesquisa, essa Exposição foi um momento em que puderam apresentar, para toda a escola, o resultado do trabalho por eles realizado: as habilidades desenvolvidas, de interpretação e resolução dos problemas, que culminaram na compreensão dos conceitos geométricos estudados; suas impressões sobre essa metodologia diferenciada de estudar um conceito geométrico com uso das tecnologias digitais; as possibilidades de interação com os colegas e professor; bem como a arte e a criatividade empreendidas para apresentarem, nos cartazes, os fotoproblemas por eles elaborados e resolvidos.

Além disso, percebeu-se que essa Exposição foi um momento em que se despertou a atenção dos alunos, professores e funcionários da escola, ou seja, da comunidade escolar, para a observação e o entendimento sobre como as tecnologias podem ser empregadas em novas metodologias que venham a auxiliar no processo de ensino e de aprendizagem dos conceitos. Isto vem ao encontro do que foi defendido nos estudos de Ens (2002) que afirma que o processo de ensino não poderá estar desvinculado do uso da informática.

Pode-se dizer que essa Exposição consistiu, para os alunos, em um momento de observação e revisão do que já haviam estudado, visando a uma integração entre os objetos geométricos, o que indica que permaneceram no nível 2: “Dedução informal ou Ordenação”, porém passando pela fase 5 “Integração”. Entende-se, assim, que esses alunos ficaram preparados para um novo nível de desenvolvimento do pensamento geométrico e para repetir as cinco fases de aprendizagem no próximo nível, conforme teoria de Van Hiele (Kaleff *et al*., 1994).

Avaliando todas as etapas desta investigação, depreende-se que, de acordo com a teoria de Van Hiele, consistiu em uma experiência com os níveis de desenvolvimento do pensamento geométrico dos alunos, o que veio auxiliá-los no desenvolvimento de um *insight* em Geometria, visto que, foram capazes de mostrar desempenho em situações não usuais; realizaram correta e adequadamente as ações requeridas em todas as situações e ainda desenvolveram, deliberada e conscientemente, o método que subsidiasse a resolução das situações. Assim, ao que parece, houve entendimento, por parte dos alunos, do que estavam fazendo, por que estavam fazendo e quando deveriam fazer, o que os tornou capazes de aplicar os conhecimentos geométricos de forma ordenada para a elaboração e resolução dos fotoproblemas (Villiers, 2010).

5. Considerações finais

Remetendo ao objetivo primeiro, esta investigação teve como foco essencial o uso das tecnologias digitais de informação e comunicação no processo de visualização e representação para a compreensão dos conceitos geométricos. Nessa direção, os alunos de uma escola pública, participantes deste estudo, trabalharam conceitos da Geometria Plana, por meio da elaboração e resolução de fotoproblemas.

Este estudo permite afirmar que, de modo geral, os alunos têm dificuldades na compreensão dos conceitos geométricos e a visualização é um fator fundamental. Como formas efetivas na construção e exploração dos conceitos geométricos pelos alunos nas atividades, a visualização e a representação de conceitos geométricos os auxiliou a estabelecem relação desses conceitos com a realidade escolar, visto que as fotos utilizadas foram obtidas nesse cenário (Almeida; Santos, 2007). Desse modo, observou-se a importância da visualização, pois foram capazes de estruturar o pensamento geométrico por meio desse construto. Partiram da interpretação dos objetos do cotidiano escolar e estabeleceram relação com os conceitos geométricos estudados. A máquina digital e o computador auxiliaram os alunos a relacionar os conceitos geométricos já construídos aos novos, o que corrobora o estudo de Gadotti (2010), para quem as tecnologias, enquanto recurso em sala de aula, facilitam e motivam a aprendizagem dos conceitos e suas aplicações. Essa tentativa de redimensionamento das práticas educativas remete ao que foi defendido por Guimarães (2007), para quem o professor deve se apropriar dos benefícios das TDIC em sala de aula, explorando suas diversificadas formas de utilização. Destaca-se, assim, que utilizar a visualização combinada com o uso das tecnologias de informação e comunicação como elementos essenciais na elaboração e resolução de fotoproblemas consistiu em uma metodologia diferenciada que propiciou aos alunos vivenciarem situações diversificadas, que certamente podem auxiliar na melhoria da qualidade do processo de ensino.

O papel da professora pesquisadora nas atividades envolvendo fotoproblemas foi de mediadora e orientadora, o que remete ao que foi defendido por D'Ambrosio (1996) como papel do professor, de contribuir com os alunos na produção crítica de novos conhecimentos. A pesquisa de campo oportunizou à professora pesquisadora conhecer a realidade dos alunos dos dois anos iniciais do Ensino Fundamental II, em relação ao processo de ensino e de aprendizagem de Geometria. Iniciando pelos encontros com atividades de reforço, o que se pode notar é que permitiu aos alunos participantes da investigação um nivelamento dos conhecimentos geométricos que iriam utilizar como pré-requisitos para as atividades das oficinas. A sessão de fotos indicou que houve o interesse dos alunos em relação às atividades interativas e diferenciadas, bem como a satisfação pela liberdade e autonomia que tiveram para participar da investigação, o que vem ao encontro dos estudos de Gadotti (2010), que defende a necessidade de auxiliar os alunos no processo de construção dos conhecimentos, de modo a capacitá-los na resolução de problemas, argumentação e desenvolvimento da autonomia.

As oficinas de elaboração e resolução dos fotoproblemas e confecção dos cartazes, a partir das fotos tiradas pelos próprios alunos, mostrou a importância de oferecer-lhes a oportunidade de, usando ferramentas tecnológicas, criar e utilizar seus conhecimentos. A exposição dos cartazes, etapa final do trabalho, mostrou a satisfação dos alunos em expor o trabalho por eles realizado para toda escola. Atividades como estas, realizadas por professores e alunos, podem ser socializadas, de modo que as experiências sejam compartilhadas e possam ser replicadas. A visualização por meio das fotos permitiu que os alunos participantes avançassem nos estudos sobre os objetos geométricos, auxiliando-os na construção de esquemas utilizados na elaboração e resolução dos fotoproblemas. Todas essas etapas vão ao encontro dos estudos realizados por Vargas e Barrios (2014), que se referem ao ensino de Geometria afirmando que o mesmo propicia o desenvolvimento do pensamento espacial, dos processos de nível superior e das diferentes formas de argumentação.

A teoria de Van Hiele permitiu avaliar os níveis de compreensão dos alunos participantes do estudo aqui referido, constituindo-se de fundamental importância para nortear as análises realizadas. No decorrer das atividades realizadas nas oficinas, o que se pode perceber é que, segundo o Modelo de Van Hiele, os alunos participantes partiram do nível 0 “Reconhecimento” de desenvolvimento do pensamento geométrico, no qual levam em conta como um todo os conceitos geométricos, passaram para o nível 1 “Análise”, em que, por meio da visualização, efetuam uma análise informal de um conceito geométrico; em seguida atingiram o nível 2 da “Dedução informal ou Ordenação”, quando entendem e relacionam os conceitos geométricos abstratos (Kaleff *et al*., 1994). Ainda ficou evidente que os alunos participantes da pesquisa não atingiram o nível 3 “Dedução formal” e o nível 4 “Rigor” da conceituação do ente geométrico. Depreende-se que o Modelo de Van Hiele foi ideal para avaliar as habilidades dos alunos em Geometria, além de ter sido um guia sobre a aprendizagem dos conceitos estudados nas oficinas, permitindo à professora pesquisadora as análises de cada etapa e planejamento da próxima etapa, fundamentando todas as atividades nos níveis de desenvolvimento do pensamento geométrico, conforme apresentado por Villiers (2010) e Kallef (1994).

Pode-se afirmar que este estudo pode contribuir para o desenvolvimento de habilidades e técnicas matemáticas por parte dos alunos, visto que, desde a elaboração até a resolução dos fotoproblemas, os alunos tiveram que buscar fórmulas e compreender os conceitos de base para construírem os novos conceitos (Polya, 1978). Essa metodologia de resolução de fotoproblemas pode propiciar ao aluno pensar produtivamente, pois vive situações que o envolvem, um dos principais objetivos do ensino da matemática, de acordo com Dante (2000). Tudo leva a crer que a construção e resolução de fotoproblemas, com o auxílio de ferramentas tecnológicas, constituem-se em um método que pode auxiliar no processo de ensino e de aprendizagem da Geometria no nível fundamental de ensino. Essa experiência vem confirmar o atual papel do professor, no sentido de propiciar aos alunos metodologias de ensino que incluam as TDIC, de modo a agilizar e tornar versátil o processo de ensino e de aprendizagem dos conceitos, conforme revela Garcia (2006).

Em suma, para atender às necessidades dos alunos, as metodologias de ensino da Geometria precisam incluir as ferramentas tecnológicas da atualidade. Ao professor cabe fundamentar teoricamente suas ações em teorias que subsidiem sua compreensão de como se dá o desenvolvimento do pensamento geométrico do aluno. É preciso que os alunos sejam estimulados a desenvolver posturas e raciocínios autônomos, conforme Cláudio e Cunha (2001) evidenciam em seus estudos. Cabe, ainda, inovar continuamente essas metodologias, de modo a contribuir para a melhoria do processo de ensino e aprendizagem dos conceitos em sala de aula e fora dela, o que vem influenciar na formação crítica e criativa dos alunos para atuarem com autonomia.

Bibliografia

Abrantes, P. (2000). *Investigações em Geometria na Sala de Aula.* Recuperado em 15 de setembro de 2014, de: http://www. prof 2000.pt/ users/j.pinto/ textos/ texto1.pdf.

Almeida, I. A. C.; Santos, M. C. A. (2007). *A visualização como fator de ruptura nos conceitos geométricos*. UFPE. Curitiba. Recuperado em 15 de outubro de 2014, de: www.degraf.ufpr.br/artigos_graphica/AVISUALIZAÇÃO.pdf

Brasil, Ministério da educação e Cultura (1997). *Parâmetros Curriculares Nacionais*: matemática /. Secretaria de Educação Fundamental. Brasília: MEC/SEF, 1997**.**

Cláudio, D.; Cunha, M. L. (2001). As novas tecnologias na formação de professores de Matemática. In: CURY, Helena N. (org.), *Formação de professores de Matemática uma visão multifacetada.* Porto Alegre: Edipucrs.

D' Ambrosio, U. (1996). *Educação matemática:* da teoria à prática. São Paulo: Papirus.

Dante, L. R. (2000). *Didática da Resolução de Problemas de Matemática*. São Paulo: Ática.

Ens, R. T. (2002). *Relação Professor, Aluno, Tecnologia*: um espaço para saber fazer, o saber conviver e o saber ser. Prado Velho PR, Curitiba, v.1, n.3 – p. 37- 44, fevereiro 2002. Recuperado em 22 de novembro de 2014, de: http://homer.nuted.edu.ufrgs.br/ObjetosPEAD2006/tics/tics.pdf

Frota, M. C. R. (2003). *Perfis de entendimento sobre o uso da tecnologia na educação matemática.* Recuperado em 19 de dezembro de 2014, de:http://www.ufrrj.br/emanped/paginas/conteudo_producoes/docs_27/perfis.pdf

Gadotti, M. (2010). *Escola Cidadã.* São Paulo: Editora Cortez e Autores Associados.

Garcia, L. M. I. (2006). *A visualização e a representação geométrica de conceitos matemáticos e suas influências na constituição do conceito matemático.*

IGCE/UNESP. Rio Claro. Recuperado em 18 de novembro de 2014, de: www.fae.ufmg.br/ebrapem/completos/08-06.pdf

Guimarães, J. M. de M. (2007). Educação, globalização e educação à distância. *Revista Lusófona de Educação*. Portugal. n. 9, p.139-158. Recuperado em 22 de novembro de 2014, de: http://www.scielo.oces.mctes.pt/pdf/rle/n9/n9a09.pdf

Kaleff, A M.M. R; Henriques, A; Rei, D. M; Figueiredo, L.G. (1994). Desenvolvimento do pensamento geométrico: modelo de Van Hiele. *Bolema*, v.10. 21-30. Recuperado em 25 de novembro de 2014, de: http://www.uff.br/leg/publicacoes/01_18_Desenvolvimento_do_Pensamento_Geom%E9trico_-_O_Modelo_de_Van_Hiele.pdf

Kaleff, A. M. M. R. (2008). *Novas Tecnologias no Ensino da matemática-Tópicos em Ensino de Geometria:* a sala de aula frente ao laboratório de ensino e à história da Geometria. Rio de Janeiro: UAB/CEDERJ, v. 1. 223p.

Morelatti, M. R. M; Souza, L. H.G.de. (2006). Aprendizagem de conceitos geométricos pelo futuro professor das séries iniciais do Ensino Fundamental e as novas tecnologias. *Educar*, Curitiba, n. 28, p. 263-275, Editora UFPR.

Nóvoa, A. (1999). *Os professores na virada do milênio*: do excesso dos discursos à pobreza das práticas. F.E.U.S.P. 1999. Recuperado em 25 de novembro de 2014, de: http://hdl.handle.net/10451/690

Polya, G.(1978). *A arte de resolver problemas.* Trad. e adapt.: Heitor Lisboa de Araújo. Rio de Janeiro: Interciência.

Valente,J.A. (org.).(1999). O computador na sociedade do conhecimento. Campinas, SP: UNICAMP/NIED, 1999.

Vargas, H. O. C.; Barrios, D. V. (2014). Ideas para enseñar: Propuesta didáctica de la sección áurea manifestada en la pintura y la fotografia. *Revista Iberoamericana de Educação Matemática*, n. 40, Dez. 2014. pp.147-157.

Villiers, M. de (2010). Algumas Reflexões sobre a Teoria de Van Hiele. *Revista Educação Matemática Pesquisa*. São Paulo, v. 12, n 3, p. 400-31. ISSN 1983-3156. Recuperado em 25 de novembro de 2014, de: http://revistas.pucsp.br/index.php/emp/issue/view/192

Autores:
Primer autor: **Rosimeire Aparecida Soares Borges**

Doutora em Educação Matemática. Professora do Mestrado em Educação da Universidade do Vale do Sapucaí/Pouso Alegre/ MG/Brasil. Atua na área de História da Educação Matemática, Tecnologias Digitais de Comunicação e Informação na Educação, Formação de professores e Seminários de Pesquisa.

Segundo autor: **Sandra Maria da Silva Sales Oliveira**

Doutora em Psicologia. Professora do Mestrado em Educação da Universidade do Vale do Sapucaí/ Pouso Alegre/ MG/Brasil. Atua na área de Psicologia da Educação, Aprendizagem, Dificuldades de Aprendizagem e Formação de Professores.

UNIÓN
REVISTA IBEROAMERICANA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA
www.fisem.org/web/union
http://asenmacformacion.com/ojs/index.php/union/index

ISSN: 1815-0640
Número 45. Marzo 2016
Página 24-43

Sobre a utilização de materiais didáticos manipuláveis na educação básica na visão dos professores[1]

Renata Cristina Geromel Meneghetti, Marina Ferruci Bega

Fecha de recepción: 04/06/2014
Fecha de aceptación: 04/03/2016

Resumen	Esta investigación tuvo como objetivo investigar el uso de los materiales didácticos manipulables (MDM) en las clases de matemáticas en la educación básica, según el punto de vista del maestro. Participaron en esta investigación, respondiendo a un cuestionario abierto sobre el tema, cuarenta y dos maestros que enseñan las matemáticas en la Educación Básica en una ciudad brasileña. Esta investigación indica que a pesar de la presencia y la importancia de la innovación tecnológica en el entorno educativo, los profesores entrevistados hacen uso de MDM en la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas especialmente para el desarrollo de contenidos y ellos destacan que los MDM son de suma importancia para hacer las matemáticas más cerca del real, más touchable y mejor entendida por los estudiantes. **Palabras clave**: materiales didácticos manipulables; enseñanza y aprendizaje de las matemáticas; educación básica; maestros.
Abstract	This manuscript addresses the use of didactic manipulative materials (DMM) in elementary school, according to the teacher's point of view. Forty-two Mathematics teachers of a Brazilian city answered an open questionnaire about the topic. The results show, despite the presence and importance of technological innovations in the educational context, the teachers claim to use DMM in the teaching and learning of mathematics, especially for the development of contents, as they enable Mathematics to become more significant and palpabel, closer to the real world and better understood by students. **Keywords**: instructional materials manipulatives; the teaching and learning of mathematics; elementary scholl; teachers.
Resumo	Esta pesquisa teve como propósito investigar o uso de materiais didáticos manipuláveis (MDM) nas aulas de matemática da educação básica, do ponto de vista do professor. Participaram nesta investigação, respondendo a um questionário aberto sobre o tema, quarenta e dois professores que ministram a disciplina de matemática em escolas de Educação Básica de uma cidade brasileira. Esta pesquisa indica que apesar da presença e importância das inovações tecnológicas no cenário

[1] Uma versão preliminar e parcial deste artigo foi apresentada no CIBEM/2013.

educacional, os professores entrevistados afirmam fazer uso de MDM no processo de ensino e aprendizagem de matemática, em especial para o desenvolvimento dos conteúdos e reforçam que os MDM são importantes para tornar a matemática mais próxima do real, mais palpável e melhor compreendida pelos alunos.
Palavras-chave: materiais didáticos manipuláveis; ensino e aprendizagem de matemática; educação básica; professores.

1. Introdução

Conteúdos relacionados com a disciplina de matemática geralmente são responsáveis por uma parte considerável das dificuldades de aprendizagem por parte dos alunos. Isso pode estar associado ao grau de abstração com que esses conteúdos são abordados em sala de aula, muitas vezes desvinculados do mundo material e da vida diária.

> O caráter abstrato dos estudos matemáticos surpreende os principiantes nos primeiros contatos com um mundo de ideias e representações, desprovidas das particularidades das coisas materiais. Apesar de a matemática ser utilizada e estar presente na vida diária, exceto para quem já compartilha deste saber, as ideias e os procedimentos matemáticos parecem muito diferentes dos utilizados na experiência prática ou na vida diária. (Micotti, 1999, p. 162).

Para haver compreensão dos conceitos matemáticos é necessário buscar algo que desperte no estudante o prazer pela aprendizagem da matemática, que torne esta aprendizagem mais prazerosa. Como enfatizam Turrioni e Perez (2006, p. 144): “Um ensino de matemática visando o prazer de aprender, garantindo participação e interesse dos alunos, a participação da comunidade, é fundamental para um aprendizado mais eficiente e de qualidade”. Uma alternativa para alcançar tal finalidade é a utilização de materiais didáticos manipuláveis (MDM), de maneira a estimular o aluno a participar da aula e a compreender o conteúdo focado.

Nesta pesquisa, materiais didáticos manipuláveis são entendidos como aqueles que os alunos podem manipular por meio do tato (da experiência), compreendendo materiais concretos, atividades experimentais, jogos etc. Considera-se ainda que:

> Os materiais didácticos não podem servir apenas para o professor fazer demonstrações, os alunos devem ter oportunidade de manipulá-los e descobrirem por si próprios os conhecimentos matemáticos (...) o professor adquire um novo papel, o de orientador das aprendizagens (...) é a partir de experiências pessoais, individuais e concretas que o aluno desenvolve uma aprendizagem dos conteúdos matemáticos. (Candeias, 2007, p. 319)

Dentro de uma perspectiva construtivista de conhecimento compreende-se que os MDM podem favorecer a construção do conhecimento pelo aluno, auxiliando-o na socialização das ideias, na motivação para aprender, na apresentação do conteúdo por meio de situações desafiadoras; tornando o aluno integrante ativo no processo de ensino e aprendizagem. Assim, a utilização de MDM, incluindo aqueles que favorecem atividades lúdicas, pode ser vista como um facilitador da aprendizagem, na medida em que for bem elaborado e usado adequadamente pelo professor junto a seus alunos.

Esta pesquisa teve como propósito investigar, sob a perspectiva do professor, como os MDM têm sido utilizados nas aulas de matemática da Educação Básica e qual a importância desses materiais no processo de ensino e aprendizagem de matemática,

2. Considerações Teóricas

Os MDM conquistaram um espaço importante no contexto da educação matemática, pois sua utilização pode tornar as aulas de matemática mais dinâmicas e favorecer a compreensão dos conteúdos abordados.

> É necessário que haja por partes dos educadores uma revisão sobre a situação atual da prática docente, identificando novos meios e propostas de tornar sua aula mais proveitosa, visando à interação do aluno com o conteúdo estudado e fazendo com que ele tenha uma maior afinidade com os conteúdos matemáticos ensinados em sala de aula. Por esse motivo apresentamos o uso de materiais manipuláveis e jogos como uma proposta pedagógica para tornar as aulas de Matemática mais dinâmicas e proveitosas. (Sousa & Oliveira, 2010, p. 2)

Uma forma de classificar os diversos materiais para ensino foi apresentada por Sowell (1989) da seguinte maneira: (i) Materiais concretos: são aqueles que os alunos trabalham diretamente com eles, por exemplo, o Cuisinaire, o geoplano, dobraduras com papeis etc; tais materiais são sempre trabalhados com a supervisão de um instrutor; (ii) Materiais pictóricos: os estudantes não trabalham diretamente com eles, mas assistem demonstrações de seu uso, seja por animações ou pelo uso do material manipulável apenas pelo professor, em demonstração na sala de aula; (iii) Materiais abstratos ou simbólicos: são utilizados pelos alunos de maneira simbólica, por exemplo, preenchendo atividades com lápis e papel, a partir de suposições propostas nos livros-texto ou ouvindo uma aula e lendo em livros didáticos.

Uttal, Scudder e DeLoache (1997) reconhecem que tanto professores quanto pesquisadores têm sugerido que objetos concretos permitem à criança estabelecer conexões entre suas experiências diárias e seu aprendizado sobre conceitos e símbolos matemáticos. Em essência, é observado que os objetos concretos se tornam um caminho para a aprendizagem de símbolos abstratos.

Segundo Matos e Serrazina (1996, p. 3, citado por Nacarato, 2004-2005), materiais manipuláveis são “objectos ou coisas que o aluno é capaz de sentir, tocar, manipular e movimentar. Podem ser objetos reais que têm aplicação no dia-a-dia ou podem ser objectos que são usados para representar uma idéia”. Assim, o material manipulável nos permite representar algo que tem uma aplicação no dia a dia ou até mesmo uma ideia.

A utilização de materiais dessa natureza ajuda no desenvolvimento habilidades como a criatividade, a interação social e a confiança em si, como relata Brandalise e Lubeck (2007):

> Pudemos ver que pelos esforços coletivos, a educação matemática se efetiva, mostrando pela transdisciplinaridade e criatividade, que a aprendizagem ocorre; contextualizada e diferenciada, participando eficazmente na formação de indivíduos críticos e atuantes. (Brandalise & Lubeck, 2007, p. 7).

Enfatizando a importância dos aspectos sociais proporcionados pelos MDM, Sousa e Oliveira (2010, p. 7) também afirmam que:

> Quando usamos os materiais manipuláveis e jogos em sala de aula, podemos aumentar o leque de possibilidades a serem trabalhadas, não apenas com conceitos matemáticos, mas também com conceitos sociais, como o convívio, a colaboração do aluno com os seus colegas, o respeito ao próximo, convívio com ganhos e perdas, entre outros. (Souza & Oliveira, 2010, p.7).

Assim, a utilização de MDM pode favorecer não somente a aprendizagem de novos conteúdos como também o desenvolvimento de outros conhecimentos e habilidades importantes para a formação do cidadão como um todo.

Outra característica marcante da utilização de MDM, principalmente quando estes envolvem jogos ou atividades lúdicas, é de serem meios de cativar os aprendizes e incentivá-los a abandonar a concepção de matemática como uma disciplina teórica e maçante, e passar a percebê-la como uma ciência viva e acessível; como algo mais prazeroso de se aprender. O que faz do aprendizado atraente é o sentimento de ser capaz que suscita no ser humano, quando este se vê desvendando algo através de sua capacidade motora ou intelectual, quando este percebe que conseguiu chegar a uma conclusão sobre o conteúdo ensinado, e entendeu o que lhe foi proposto.

Araújo (2000, p. 15) destaca que através de atividades lúdicas as aulas de matemática podem se tornar “[...] dinâmicas e prazerosas facilitando assim, o ensino-aprendizagem e levando o aluno a se apropriar do conhecimento, vivenciando, experimentando e se tornando uma pessoa autônoma para poder aplicar seus conhecimentos na vida”.

Essa autora ainda acrescenta que:

> Difundir e desmistificar o uso de atividades lúdicas, com fundamentações pedagógicas adequadas, favorece um aprendizado efetivo, representando estratégias altamente proveitosas para que o aluno tenha acesso ao conhecimento e ao desenvolvimento de suas capacidades. (Araújo, 2000, p. 11).

No Brasil, as diretrizes curriculares para o ensino de matemática visando à compreensão de conceitos apontam para a necessidade de se trabalhar com o aluno realidades cotidianas, de maneira a concretizar situações e manipular objetos. (Secretaria da Educação, 1989, 1994). Por sua vez, os Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN) enfatizam a importância da atenção do professor às necessidades dos alunos, de saber relacionar o conteúdo aprendido em sala de aula com a realidade por eles vivida. Isso requer traquejo do professor na busca por novas estratégias a serem utilizadas em sala de aula, visando facilitar o processo de ensino e aprendizagem da matemática e a compreensão dos alunos em relação aos conceitos focados. A utilização de materiais didáticos manipuláveis pode ser vista como uma dessas estratégias de ensino e aprendizagem. Ainda segundo os PCN, atividades como os jogos e materiais concretos:

> (...) podem contribuir para um trabalho de formação de atitudes – enfrentar desafios, lançar-se à busca de soluções, desenvolvimento da crítica, da intuição, da criação de estratégias e da possibilidade de alterá-las quando o resultado não é satisfatório – necessário para aprendizagem da Matemática. (Ministério da Educação, 1998, p. 47).

Além disso, os PCN também destacam o papel da história e das tecnologias da comunicação como recursos importantes no processo de ensino e aprendizagem da matemática. A utilização de recursos tecnológicos também são destaques na “nova” proposta curricular do Estado de São Paulo e dos PCN. (Ministério da Educação, 1998; Secretaria da Educação, 1994).

Por fim há um alerta das diretrizes curriculares para o fato de que nem sempre a utilização de materiais manipuláveis torna-se coerente com o conteúdo trabalhado. Por isso deve haver um discernimento do professor quanto a este fato. Segundo Farias (2010), “(...) o professor deve selecionar e dimensionar bem o material concreto para que obtenha êxito em sua aplicação, sabendo de seu potencial e de suas limitações” (p.3). Além disso, no preparo e na seleção do material a se utilizar, é preciso também estar atento às necessidades e particularidades do público alvo, ou seja, dos alunos para os quais o material será empregado.

Assim, pode-se ressaltar, como coloca Nacarato (2005), que nenhum objeto didático por si próprio melhorará o ensino de Matemática, pois para alcançar esse propósito é preciso também considerar a forma como esse objeto é utilizado, bem como as concepções pedagógicas do professor. Ball (1992) também adverte sobre a importância do professor neste processo ao enfatizar que os alunos não adquirem imediatamente os conceitos matemáticos com o uso de materiais manipuláveis. A instrução extensiva e a prática, com orientação do professor, são necessárias para que os resultados sejam, de fato, efetivos.

Assim, faz-se importante que o objeto didático (materiais manipulativos, jogos ou outros) esteja integrado às propostas alternativas de ensino e aprendizagem e que o professor esteja em consonância com estas, tal como já fora apontado por Meneghetti e Nunes (2006).

3. Metodologia

A pesquisa seguiu uma abordagem qualitativa de investigação, que tem o ambiente natural como fonte direta de dados e o pesquisador como principal instrumento (Lüdke & André, 1986). O levantamento dos dados se deu por meio da aplicação de um questionário à professores de matemática da educação básica, considerado vantajoso neste caso, pois possibilita que se atinja um número maior de participantes; permite que as pessoas o respondam no momento que julgarem conveniente e; não expõe os participantes à interferência da opinião do entrevistador na hora das respostas (Gil, 2008).

O questionário foi aplicado a 63 professores da educação básica de escolas de uma cidade do estado de São Paulo, Brasil. Tal questionário constituiu-se de sete questões abertas (ver anexo)[2]; em busca de compreender quando e como materiais didáticos manipuláveis estão sendo usados para auxiliar no ensino e na aprendizagem de matemática. Nesse caso entende-se por questões abertas as que possibilitam liberdade de respostas e possibilita respostas diferentes dos participantes, ou seja, cada participante pode responder livremente às perguntas[3].

Com tais questões buscou-se investigar: se os professores fazem ou não uso de MDM em suas aulas, bem como, a maneira como o fazem; se sentem diferenças (em relação à aprendizagem do aluno) quando empregam este tipo de material; se acham válido empregar MDM e sobre a forma como obtêm os MDM para utilização em sala de aula.

O critério de escolha dos professores para responderem ao questionário foi o de estarem atuando em escolas que contemplassem os três níveis de ensino da Educação Básica: Ensino Fundamental I (do primeiro ao quinto ano), Ensino Fundamental II (do sexto ao nono ano) e Ensino Médio (constituído de três anos). Foram contatadas e convidadas a participar da pesquisa onze escolas (sete particulares e quatro públicas) do município de São Carlos, São Paulo/Brasil; tais escolas estavam registradas na Diretoria de Ensino deste município como escolas que atendiam aos três níveis da Educação Básica. Para as escolas particulares usamos a sigla PA e para as públicas PU. Quatro dessas escolas (denotadas por PA-2, PA-5, PA-7 e PU-4) não concordaram em participar da pesquisa. Das sete escolas que aceitaram participar da investigação, quatro são particulares (denotadas por PA-1, PA-3, PA-4 e PA-6) e três são públicas (denominadas PU-1, PU-2 e PU-3).

---

[2] Antes da aplicação propriamente dita, o questionário foi apresentado e discutido (simulando sua aplicação) junto membros a um grupo de pesquisa de educação matemática coordenado pela primeira autora deste trabalho, do qual participam alunos do curso de licenciatura em matemática (futuros professores) e alunos da pós-graduação educação Matemática (ou áreas afins) que já atuavam como professores da Educação Básica. Tal procedimento feito visando avaliar se as questões propostas atingiriam os objetivos que se pretendia na pesquisa. Isso possibilitou o aprimoramento das questões.

[3] As questões abertas diferenciam-se das fechadas, sendo que essas últimas, em geral, referem-se às questões de alternativas, que conferem maior uniformidade as respostas (Gil, 2008).

Dessas escolas, foram convidados os seus 63 professores de matemática que atuavam nos três níveis da Educação Básica, ou seja, incluindo tanto os professores específicos da disciplina de matemática (séries finais do Ensino Fundamental e Ensino Médio), quanto os professores das séries iniciais do Ensino Fundamental; neste último caso o aluno tem um único professor por ano. Dos questionários entregues, retornaram 42 preenchidos (e foram designados por P1... P42), e 21 não responderam alegando não fazerem uso de MDM, e por isso, foram computados na análise como professores que não usam MDM em suas aulas. Foram feitas tabelas relacionando as respostas de maneira a ser possível uma conclusão sobre a opinião dos professores em relação ao uso deste tipo de material.

A partir das respostas dos sujeitos procedeu-se a uma análise qualitativa dos dados buscando agrupamento das respostas por meio de convergências, procurando salientar os aspectos mais relevantes ao propósito da investigação. Vale salientar que foram também utilizamos dados quantitativos para auxiliar na interpretação dos resultados. Através da análise das respostas dadas aos questionários pôde-se analisar a utilização de MDM nas aulas de matemática da Educação Básica.

4. Análise dos questionários

A fim de que fossem mantidos em sigilo os nomes dos professores e escolas, foi feita a relação a seguir, em que PA denotam escolas particulares, PU escolas públicas e P o respectivo professor de acordo com a numeração.

ESCOLAS	PU-1	PU-2	PU-3	PU-4	PA-1	PA-2	PA-3	PA-4	PA-5	PA-6	PA-7
Professores	P1	P7	P10	-	P13	-	P21	P36	-	P37	-
	P2	P8	P11	-	P14	-	P22	-	-	P38	-
	P3	P9	P12	-	P15	-	P23	-	-	P39	-
	P4	-	-	-	P16	-	P24	-	-	P40	-
	P5	-	-	-	P17	-	P25	-	-	P41	-
	P6	-	-	-	P18	-	P26	-	-	P42	-
	-	-	-	-	P19	-	P27	-	-	-	-
	-	-	-	-	P20	-	P28	-	-	-	-
	-	-	-	-	-	-	P29	-	-	-	-
	-	-	-	-	-	-	P30	-	-	-	-
	-	-	-	-	-	-	P31	-	-	-	-
	-	-	-	-	-	-	P32	-	-	-	-
	-	-	-	-	-	-	P33	-	-	-	-
	-	-	-	-	-	-	P34	-	-	-	-
	-	-	-	-	-	-	P35	-	-	-	-

Tabela 1: relação das escolas e dos professores participantes da investigação

No que segue apresentamos algumas tabelas com os dados obtidos em relação a cada questão realizada. Após a apresentação de cada tabela, procedeu-se à interpretação dos resultados.

Os dados da tabela 2 representam as respostas dos professores em relação à primeira questão, na qual se perguntou aos professores se eles utilizavam ou não MDM em suas aulas de matemática.

Utiliza MDM em suas aulas?						
	Escolas Públicas		Escolas Particulares		TOTAL	
SIM	12	80%	30	62,5%	42	66,6%
NÃO	3	20%	18	37,5%	21	33,3%

Tabela 2: Sobre a utilização de MDM nas aulas de matemática

Através desta tabela percebemos que a maioria dos professores alegou fazer uso de MDM em suas aulas de matemática; o que parece indicar que eles consideram importantes e de valia utilizar esse tipo de material nas aulas. Pode-se ainda observar, de acordo com as respostas dos professores, que a utilização de MDM em escolas públicas é maior do que em escolas particulares, aqui não foi possível saber qual o motivo pelo qual isso ocorre, entretanto uma possibilidade é a de o material estar associado ao incentivo e/ou à liberdade que o professor tem em utilizar este tipo de recurso didático.

A tabela 3 expressa os materiais utilizados pelos professores que responderam ao questionário e o número de vezes que estes materiais aparecem nas respostas deles, juntamente com a porcentagem relativa a estas aparições. Lembramos que o professor pode fazer uso de um ou mais materiais e, por isso, as porcentagens ultrapassam 100%.

Tipos de materiais utilizados		
Material	Utilizações	Percentual (%)
Material Dourado	27	64,3
Jogos	19	45,2
Sólidos Geométricos	13	30,9
Materiais Recicláveis	13	30,9
Encarte da apostila / Atividades com Papel	12	28,6
Jornais/Panfletos	8	19
Tangran	6	14,3
Ábaco	5	11,9
Régua, compasso, etc.	5	11,9
Blocos Lógicos	5	11,9
Material Cusinare	4	9,5
Softwares Educativos	4	9,5
Atividades simulando o uso de Dinheiro	3	7,1
Utilização de Balança	3	7,1
Atividade de Mercado	2	4,8

Tecnologias (recursos tecnológicos)	2	4,8
Carpete (atividades com flanelógrafo)	2	4,8
Geoplano	2	4,8
Atividades com Massa de Modelar	1	2,4
Literatura Infantil (livros)	1	2,4
Pentaminós	1	2,4
Espelhos (caleidoscópio)	1	2,4

Tabela 3: Tipos de materiais utilizados

Os resultados expressos na Tabela 3 indicam uma porcentagem maior de professores utiliza materiais concretos feitos de madeira e jogos. Os softwares educativos e a utilização de recursos tecnológicos por sua vez, não tiveram tanto destaque, o que, a nosso ver, pode estar relacionado à questão da acessibilidade em relação ao uso do material (disponibilidade ao professor e ao aluno ou se o material é fácil de ser confeccionado pelo professor ou pelo aluno, etc.).

Observamos ainda que dos quatro professores que admitiram utilizar-se de recursos tecnológicos a maioria são professores de escolas particulares, sendo apenas um professor de escola pública. O que pode indicar tanto a falta de artefatos para a utilização desses recursos, quanto à cobrança, ou falta dela, exercida pela instituição de ensino da qual o professor faz parte.

Na tabela 4 apresentam-se os dados obtidos sobre a maneira como os MDM são empregados nas aulas de Matemática, neste caso as respostas obtidas possibilitaram uma análise quanto à finalidade da utilização dos MDM em sala de aula:

De que maneira os MDM são empregados?		
Finalidade	Utilizações	Percentual (%)
Para Desenvolvimento de Conceitos	26	61,9
Para Fixar/Praticar Conteúdos	8	19
Como Motivação	6	14,3
Para auxiliar nas atividades	5	11,9
Como diversão/ Lazer	3	7,1
Não responderam	1	2,4

Tabela 4: Como os MDM são empregados

Através da Tabela 4 é possível perceber que a maioria dos professores alegou utilizar MDM para o desenvolvimento de conceitos ou para auxiliar na realização de atividades; o que vai ao encontro com o que a literatura tem colocado, ou seja, de se usar materiais deste tipo para auxiliar na construção e/ou na compreensão de conceitos. A preocupação com a compreensão dos conceitos é retratada, por exemplo, através do depoimento de P5, da escola PU1: “Utilizo esses materiais algumas vezes de acordo com o conteúdo proposto, outras após o término de alguma outra atividade. Antes, porém as crianças devem compreender o sentido e motivo de jogar e/ou manipular os materiais. Assim, procuro garantir com intenção condições adequadas para a constituição de vivências pelas crianças com os objetos trabalhados”. Um número expressivo também apontou que utilizam MDM para fixar os conteúdos, isto é, como forma de concretizar a matéria já aprendida, colocando-a em prática, assim como forma de motivar os alunos tanto a participar das aulas quanto para perceberem como aplicar o conteúdo. Como expressa P16 da escola PA1: “São empregados como uma motivação que realizamos todo o início da aula para despertar o interesse e dar sequência aos conteúdos estudados. São utilizados também como estratégias para que o aluno se lembre de tudo o que foi estudado”. Por fim, pode-se perceber que poucos associaram essa utilização como um momento de lazer ou descanso dos alunos.

A tabela 5 retrata as respostas quanto à percepção dos professores sobre se há ou não diferença na aprendizagem dos alunos quando os MDM são empregados.

O que sentem ao trabalhar com esse tipo de material		
	Utilizações	Percentual (%)
Que o aluno assimila melhor e mais fácil o conteúdo; com o material o aluno visualiza melhor a matemática e fica mais fácil de explicá-la	13	30,1
Torna útil a matemática no uso social	8	19
Desperta maior interesse dos alunos	7	16,7
Não responderam	5	11,9
Tornam as aulas mais criativas/dinâmicas	5	11,9
Favorecem o desenvolvimento de habilidades, tais como: concentração, atenção, percepção etc.	4	9,5
TOTAL	42	100

Tabela 5: O que sentem ao trabalhar com esse tipo de material

Na tabela 5 estão expressos os principais motivos pelos quais os professores dizem uitlizar MDM em suas aulas de matemática. Nesta, podemos perceber que a maioria dos professores acredita que os MDM são ferramentas que auxiliam na interpretação do conteúdo por parte do aprendiz, além de fazê-lo compreender a relação da matemática com seu cotidiano e encontrar assim uma utilidade para essa ciência. Como se vê na resposta de P16, da escola PA-1: "Trabalhando com esses materiais o conteúdo adquire um significado que vai auxiliar no processo de aprendizagem dos alunos. Quando inserimos jogos e material concreto em nossas aulas, ganhamos o aluno que vê um significado em aprender. Ele entende o valor que ela tem em seu dia a dia". Segundo P6 da escola PU1: "Com o material o aluno assimila o conteúdo com mais facilidade e melhor entendimento. Os alunos ficam bem mais motivados, pois eles adoram situações dinâmicas e que saem da rotina de lousa, caderno e professor."

Outros docentes também destacaram que os MDM tornam as aulas mais motivadoras, proporciona dinamismo nas aulas e favorece o trabalho do professor. De acordo com P42 da escola PA-6: "Favorece a motivação do aluno em aprender matemática, porque os materiais propiciam uma abordagem de maneira clara e dinâmica, favorecendo o trabalho do professor e sendo assim a compreensão do aluno. Um grupo de professores destacou também que o uso de MDM auxilia também no desenvolvimento de outras habilidades. Segundo P5, da escola PU-1: "Além dos conteúdos propostos as crianças adquirem habilidades de concentração, atenção, noção espaciais, lateralidade, entre outras. Além disso, percebe-se que as crianças aprendem à medida que atuam sobre os objetos (...)."

A tabela 6 apresenta dados em relação ao questionamento sobre se o uso de MDM favorece ou não a motivação do aluno em aprender matemática.

Sobre MDM favorecer ou não a motivação do aluno em aprender matemática		
	Utilizações	Percentual (%)
SIM	40	95,2
NÃO	1	2,4
Não responderam	1	2,4
TOTAL	42	100

Tabela 6: Sobre a motivação dos alunos

Pela tabela 6 percebemos que dos 42 professores que responderam ao questionário, o único que colocou crer que os MDM não são motivadores, alegou isso em função do número de alunos que geral se tem numa sala de aula. Para ele, quando esse número é grande, o efeito de se empregar MDM pode ser contrário ao proposto inicialmente (ou seja, ao desejado), podendo dar a impressão de bagunça ou descanso.

Dos outros 40 professores que concordaram que a utilização de MDM favorece a motivação em sala de aula, as justificativas estão postas na Tabela 7.

Porque usar MDM favorece a motivação		
	Utilizações	Percentual (%)
Tornam os alunos agentes construtores do conhecimento	11	27,5
Favorecem a aprendizagem	10	25,0
Dão significado ao conteúdo	10	25,0
Tornam a aula mais interessante	4	10,0
Os alunos aprendem brincando	3	7,5
É uma atividade diferenciada (sai da rotina)	1	2,4
TOTAL	40	100

Tabela 7: Porque usar MDM favorece a motivação

Analisando a Tabela 7, pode-se concluir que as respostas culminam para um mesmo objetivo, ou seja, os professores ao trabalharem com esse tipo de material em suas aulas percebem que os alunos são motivados pelo fato de se sentirem construtores do conhecimento, autores das suas descobertas. Isso torna a aula mais interessante, dá significado ao conteúdo e facilita a aprendizagem, tal como colocado por P22, da escola PA-3: “Ao trabalhar com MDM, a aprendizagem se torna mais atrativa, pois as crianças participam da construção do conhecimento”.

A tabela 8 apresenta os dados em relação a como os professores obtêm os MDM por eles utilizados:

Origem dos materiais		
	Frequência	Percentual (%)
A escola disponibiliza	30	39,47
Os alunos confeccionam	13	17,10
Material do professor	13	17,10
Os alunos levam	9	11,85
Tem no material do aluno	7	9,21
Através de representantes que visitam o colégio	2	2,63
A secretaria da educação disponibiliza	1	1,32
Redes de supermercado	1	1,32
TOTAL	76	100

Tabela 8: Como os materiais são obtidos

A maioria dos professores pega da própria escola os materiais com que trabalha ou obtém por meio dos alunos ou deles próprios. Como diz P25 da escola PA-3: “Existem poucos materiais, prefiro construir o material a ser trabalhado, durante a aula, pois assim os alunos participam mais”.

Em relação ao que os professores acham sobre os MDM existentes no mercado, obtivemos os dados colocados na Tabela 9:

Sobre os Materiais existentes no mercado		
	Frequência	Percentual (%)
São bons	20	37,73
Prefere confeccionar o material	14	26,41
São de difícil acesso	7	13,21
Faltam opções	7	13,21
Precisam ser adaptados	3	5,67
Há variedade	2	3,77
TOTAL	53	100

Tabela 9: Sobre os materiais existentes no mercado

Pelas respostas quanto a este item percebe-se que apesar da maioria dos professores acharem que os materiais existentes no mercado sejam bons, eles preferem confeccionar seus próprios materiais; um número considerável também apontou a falta de acessibilidade às novidades do mercado ou de opção (faltam novos materiais), tal como posto nas seguintes respostas: “São bons, porém gostaria de ter acesso a mais novidades” (P28, escola PA-3) e “Gosto dos materiais que tenho conhecimento, porém acho que faltam novos materiais nessa área” (P17, escola PA-1).

5. Considerações finais

Através dessa pesquisa pudemos observar que a maioria dos professores da Educação Básica afirma fazer uso de MDM em suas aulas de matemática e reconhecem a importância desse tipo de material no processo de ensino e aprendizagem de matemática, principalmente para o desenvolvimento dos conteúdos. Além disso, um número expressivo de professores salientou também a importância do MDM para fixar os conteúdos, ou seja, como forma de concretizar o conteúdo já aprendido, colocando-o em prática, assim como forma de motivar os alunos tanto a participar das aulas quanto a perceberem como aplicar o conteúdo. Para a maioria dos professores os MDM são ferramentas que auxiliam na interpretação do conteúdo por parte do aprendiz, além de fazê-lo compreender a relação da matemática com seu cotidiano e encontrar uma utilidade para essa ciência.

Assim, percebe-se que os professores indicam usar MDM para auxiliar os alunos na construção do conhecimento e/ou na em sua aplicação, pois dão significado aos conteúdos de matemática. Houve destaque também para outras habilidades e conhecimentos de âmbito mais gerais que podem ser adquiridos com a utilização dos MDM, tais como: concentração, atenção, percepção etc. Além disso, a maioria dos entrevistados concorda que os MDM favorecem a motivação do aluno em aprender, devido, principalmente, aos seguintes fatos: (i) atribui ao aluno um papel mais ativo, favorece a aprendizagem, dá significado ao conteúdo e torna a aula mais dinâmica, interessante e prazerosa.

Essas colocações vêm ao encontro do que tem sido apontado pelas pesquisas em relação à utilização dos MDM em sala de aula. Nessa direção, por exemplo, Souza e Oliveira (2010) ao falarem do desinteresse do aluno em aprender matemática aliado ao desânimo do professor em não ver suas aulas surtirem o efeito desejado, traz à tona a necessidade de algo diferente e, como alternativa, esses autores destacam a utilização de MDM. Eles ainda salientam que “(...) esses recursos podem, além de despertar o interesse dos alunos, fazer com que eles tenham uma maior interação com o conteúdo estudado.” (Sousa & Oliveira, 2010, p. 2).

Percebe-se então que há uma grande necessidade de se trabalhar com materiais que fujam do contexto lousa e giz, principalmente nas aulas de matemática. Este fato é enfatizado pela literatura e também se fez nítido nesta pesquisa com a posição dos professores de Educação Básica que sentem a realidade das escolas dia a dia e expressam a necessidade de se contribuir para que a educação caminhe de acordo com a evolução de um mundo mais atrativo e dinâmico. Como mostra P6 da escola PU1, quando é questionado sobre a contribuição de MDM nas aulas de matemática: “Com o material o aluno assimila o conteúdo com mais facilidade e melhor entendimento. Os alunos ficam bem mais motivados, pois eles adoram situações dinâmicas e que saem da rotina de lousa, caderno e professor”.

Por fim, observamos que apesar das inovações tecnológicas, que sem dúvida nenhuma, são importantes para o processo de ensino e aprendizagem em matemática, o uso dos MDM no processo de ensino e aprendizagem de matemática são ainda muito valorizados pelos professores, como forma de tornar a matemática mais próxima do real, mais palpável e melhor compreendida pelos alunos e comunidade em geral.

Agradecimentos: A autora agradece aos professores participantes desta pesquisa; à Pró-reitoria de Graduação da Universidade de São Paulo (Programa: ensinar com pesquisa) que possibilitou a coleta de dados mediante desenvolvimento de projeto de iniciação científica, que teve a participação da segunda autora deste trabalho.

6. Bibliografía

Araújo, I. R. O. (2000). *A utilização de lúdicos para auxiliar a aprendizagem e desmistificar o ensino da matemática*. Dissertação de Mestrado, Departamento de Engenharia de Produção, Universidade Federal de Santa Catarina, Santa Catarina, Brasil.

Ball, D. L. (1992). Magical hopes: manipulatives and the reform of math education. *American Educator*, 16(2), 14-18.

Brandalise, C.R., & Lubeck, M.(2007). O lúdico na educação matemática: um jogo da memória para ensino dos números racionais. In *IX ENEM: Encontro Nacional De Educação Matemática*, 9 (pp. 1-8). Belo Horizonte, Minas Gerais: SBEM.

Candeias, R.P.C.B.B. (2007). *Contributo para a história das inovações no ensino da matemática no primário:* João António Nabais e o Ensino da Matemática no Colégio Vasco da Gama. Dissertação (Mestrado em Educação Didática da Matemática) – Departamento de Educação, Universidade de Lisboa Faculdade de Ciências, Lisboa, Portugal.

Farias, S. A. D. (2010). Usando materiais manipuláveis no ensino superior. In X *ENEM: Encontro Nacional de Educação Matemática*, 10 (pp. 1-5). Salvador, Bahia: SBEM.

Gil, A. (2008). *Métodos e Técnicas de Pesquisa Social*. São Paulo: Atlas.

Lüdke, M., & André, M. E. D. A.(1986). *Pesquisa em educação: Abordagens qualitativas.* São Paulo: EPU.

Matos, J. M., & Serrazina, M. L. (1996). Didáctica da Matemática. Lisboa: Universidade Aberta.

Meneghetti, R.C.G., & Nunes, A.C.A. (2006). Aplicação de uma Proposta Pedagógica no Ensino dos Números Racionais. *Educação Matemática em Revista* (Revista da Sociedade Brasileira de Educação Matemática), 13(20/21), 77-86.

Micotti, M. C. O. O. (1999). Ensino e as propostas pedagógicas. In Bicudo, M. A. V. (Org.). *Pesquisa em educação matemática: concepções e perspectivas* (pp. 153-167). São Paulo: UNESP.

Ministério da Educação. (1998). *Parâmetros curriculares nacionais: matemática. Secretaria de Educação Fundamental*. Brasília, DF: MEC/ SEF.

Nacarato, A. M. (2004-2005). Eu trabalho primeiro no concreto. *Revista de Educação Matemática*, 9(9), 1-6.

Secretaria da Educação. (1989). *Proposta curricular para o ensino de matemática: 2º grau*. (2a ed.). Coordenadoria de Estudos e Normas Pedagógicas. São Paulo: SE/CENP.

Secretaria da Educação. (1994). *Proposta curricular para o ensino de matemática: 2º grau.* (3a ed.). Coordenadoria de Estudos e Normas Pedagógicas. São Paulo: SE/CENP.

Sousa, G. C., & Oliveira, J. D. S. (2010). O uso de materiais manipuláveis e jogos no ensino de matemática. In *Encontro Nacional de Educação Matemática*, 10 (pp. 1-11). Salvador, Bahia: SBEM.

Sowell, E. J. (1989). Effects of Manipulative Materials in Mathematics Instruction. *Journal for Research in Mathematics Education*, 20(5), 498-505.

Turrioni, A. M. S., & Perez, G. (2006). Implementando um laboratório de educação matemática para apoio na formação de professores. In Lorenzato, S. (Org.). *O laboratório de ensino de matemática na formação de professores* (pp. 57-76). Campinas: Autores Associados.

Uttal, D. H., Scudder, K. V., & Deloache, J. S. (1997). Manipulatives as symbols: a new perspective on the use of concrete objects to teach mathematics. *Journal of Applied Developmental Psychology*, 18(1), 37-54.

Renata Cristina Geromel Meneghetti: doutora em Educação Matemática. Docente da Universidade de São Paulo (USP/Brasil). Professora colaboradora junto ao Programa de Pós-Graduação em Educação para a Ciência da FC (Faculdade de Ciências) da UNESP (Universidade Estadual Paulista “Júlio de Mesquita Filho). rcgm@icmc.usp.br

Marina Ferruci Bega: Professora da Educação Básica. Cursou licenciatura em ciências exatas (com habilitação em Matemática pela Universidade de São Paulo (USP/Brasil). marinabega@hotmail.com

Anexo

Questionário aplicado a professores da educação básica ou questionário

1. Você utiliza de materiais didáticos manipuláveis em suas aulas? Quais e quando você faz uso desses materiais? Se não utiliza, porquê?

2. De que maneira eles são empregados?

3. Quais as diferenças que você sente ao trabalhar com, ou sem, estes materiais? Você acha que o uso do mesmo favorece ou desfavorece a motivação do aluno em aprender matemática? Por quê?

4. Em quais situações você acha válido o uso de materiais desse tipo? Cite exemplos.

5. O que você acha dos materiais didáticos existentes no mercado? Atende a suas necessidades?

6. Como você obtém os materiais didáticos (manipuláveis) que usa para ensinar conteúdos matemáticos?

7. Gostaria de acrescentar mais algum comentário?

REVISTA IBEROAMERICANA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA
www.fisem.org/web/union
http://asenmacformacion.com/ojs/index.php/union/index

ISSN: 1815-0640
Número 45. Marzo 2016
Página 242-268

MATLAB: Una herramienta para la didáctica del Método de los Elementos Finitos

Emilio Martínez-Pañeda

Fecha de recepción: 20/10/2015
Fecha de aceptación: 19/03/2016

Resumen	El método de los elementos finitos (MEF) es a día de hoy el método numérico más utilizado en aplicaciones de ciencia e ingeniería. Sin embargo, el desarrollo de procedimientos efectivos para la enseñanza del mismo continúa siendo un desafío para los docentes de todo el mundo. En el presente trabajo se plantea el uso del software matemático MATLAB para el desarrollo de códigos con orientación docente. Los ejemplos presentados revelan la idoneidad del enfoque adoptado para reducir la brecha existente entre el sustento matemático del método y la sencillez de uso de los potentes programas comerciales. **Palabras clave**: Método de los Elementos Finitos, didáctica, MATLAB
Abstract	The finite element method (FEM) is nowadays the most widely used numerical method in science and engineering applications. However, the development of effective ways to teach it remains a challenge for teachers worldwide. In the present work, the use of the mathematical software MATLAB is proposed for the development of teaching-oriented codes. The examples presented reveal the suitability of the suggested approach to close the gap between the mathematical theory of the method and the ease of use of the powerful commercial programs. **Keywords**: Finite Element Method, teaching, MATLAB
Resumo	O método dos elementos finitos (FEM) é hoje o método numérico mais amplamente utilizado em aplicações científicas e de engenharia. No entanto, o desenvolvimento de maneiras eficazes de ensinar continua a ser um desafio para os professores em todo o mundo. No presente trabalho, é proposta a utilização do software MATLAB para o desenvolvimento de códigos orientada para o ensino. Os exemplos apresentados revelam a aptidão da abordagem sugerida para fechar o espaço entre a teoria matemática do método e a facilidade de utilização dos programas comerciais. **Palavras-chave:** Método dos elementos finitos, Ensino, MATLAB

1. Introducción: La docencia del Método de los Elementos Finitos

Desarrollado en la década de los 60 para el análisis de estructuras, el método de los elementos finitos (MEF) se ha convertido en la herramienta computacional más utilizada en aplicaciones de ciencia e ingeniería, extendiendo su uso más allá del análisis de solicitaciones tensionales para abarcar un amplio rango de áreas de conocimiento, que van desde el análisis de vibraciones hasta la transferencia de calor, pasando por el flujo de fluidos o los campos electromagnéticos, entre otras (ver, p. ej., Martínez-Pañeda y Gallego, 2015, Martínez-Pañeda y Betegón, 2015, Martínez-Pañeda y Niordson, 2015).

El MEF es un método numérico general para la aproximación de soluciones de ecuaciones diferenciales parciales. A grandes rasgos, el proceder del método radica en la división del dominio, cuerpo o estructura en elementos o parcelas de reducido tamaño (elementos finitos) en los que se define la variable a calcular y sobre los que se aplica la aproximación. El procedimiento implica la caracterización y correspondiente definición del comportamiento de cada elemento por separado y el posterior ensamblaje de los mismos, obteniendo una solución aproximada del comportamiento global del sistema discretizado (Oñate, 1995).

De manera que la obtención, en determinadas aplicaciones, de una solución razonablemente precisa mediante el MEF conlleva la resolución de una enorme cantidad de ecuaciones diferenciales y en consecuencia, un uso efectivo y práctico del método está ligado al uso de ordenadores. El vertiginoso desarrollo de la tecnología informática ha traído consigo una rápida popularización del MEF en la industria y una extensa proliferación de programas comerciales con capacidad para modelizar geometrías complejas y resolver mediante el MEF un sinfín de problemas prácticos de ingeniería. De manera que un profundo conocimiento del MEF se postula a día de hoy como indispensable para cualquier ingeniero y en consecuencia el análisis por elementos finitos es ya objeto de estudio en casi la totalidad de las carreras técnicas en España y en el resto del mundo.

Sin embargo, el desarrollo de procedimientos efectivos para la enseñanza del MEF continúa siendo un desafío para los docentes (Kosasih, 2010). El proceder habitual en la docencia de la asignatura consiste en combinar las clases teóricas en el aula con sesiones de prácticas en ordenador. Siendo usual en estas últimas el uso de uno o varios de los programas comerciales de elementos finitos más populares (ABAQUS, ANSYS, etc.), a los que tienen acceso con licencia educativa muchas universidades. Este software comercial posee una interfaz de usuario muy sencilla de entender y manejar, lo que trae consigo una rápida familiarización del alumnado con los programas. Sin embargo este hecho, al contrario de lo que pudiera parecer, se transforma en numerosas ocasiones en un inconveniente para la docencia de la asignatura. Y es que uno de los principales obstáculos observados durante la docencia del método radica en la fuerte brecha existente entre la sencillez de uso de los programas comerciales y la teoría matemática del MEF, ya que el asequible manejo del software comercial de elementos finitos permite al usuario desarrollar con éxito numerosos cálculos sin haber adquirido previamente los conocimientos de base del método. Así, en vista de la dificultad intrínseca al aprendizaje de un método con una fuerte carga matemática, los estudiantes tienden a elegir el camino más fácil, rehuyendo en lo posible el estudio del sustento matemático del MEF y adquiriendo vertiginosamente el conocimiento del uso del software comercial disponible.

Si este comportamiento no se remedia mediante los métodos de evaluación pertinentes, muchos estudiantes de ingeniería asumen la lógica errónea de estar capacitados para realizar cálculos por medio del MEF en sus futuros centros de trabajo por el hecho de poseer la habilidad de manejar correctamente el software comercial de elementos finitos sin comprender el procesamiento de los datos que realiza el mismo. Debido a que sólo un profundo conocimiento de la teoría que sustenta el MEF permite garantizar la validez de los resultados obtenidos y su posterior utilización en un diseño y dimensionamiento seguro, es necesario descubrir nuevas herramientas de docencia que ayuden a reducir la brecha existente entre el fundamento teórico del MEF y la cada día más sencilla interfaz de usuario que plantean los programas comerciales. Y es que aunque los métodos numéricos relacionados con el análisis por elementos finitos han sido desarrollados, investigados y discutidos en profundidad, las técnicas de enseñanza del MEF no han recibido aún la atención necesaria. En un primer momento varios autores (Zecher, 2002; Jolley, Rencis, & Grandlin, 2003) investigaron al respecto del enfoque más apropiado para la docencia del MEF en el contexto de asignaturas relacionadas con el estudio de la mecánica de los sólidos o los materiales, más tradicionales en los planes de estudio de las ingenierías. Sin embargo, debido a la rápida expansión de aplicaciones del MEF, la comunidad educativa ha adoptado un claro consenso al respecto de la necesidad de asignar a la docencia del MEF un espacio propio.

2. MATLAB como herramienta docente

Habida cuenta de que para una aplicación práctica del MEF es imprescindible el uso de ordenadores, la docencia del método debe obligatoriamente incluir el manejo de programas informáticos que basen sus cálculos en el MEF. En esa línea, varias propuestas han surgido en la comunidad académica. Así, mientras algunos autores se inclinan por la docencia mediante software comercial de elementos finitos como ANSYS (Earley, 1998; Backer, Capece, & Lee, 2001), ALGOR (Howard, Musto, & Prantil, 2001; Logue & Hall, 2001), COSMOS (Pike, 2001) o Pro/MECHANICA (Lissenden, Wagle, & Salamon, 2002), otros apuestan por el uso de programas de algebra computacional como Maple (Connell, Blyth, May, & Zorzan, 1999) o Mathematica (Jiang, & Wang, 2008), e incluso algunos docentes han recurrido a la utilización de las hojas de cálculo de Microsoft Excel (Teh, & Morgan, 2005).

Como ya se ha resaltado, los futuros profesionales de la ingeniería deben ser capaces no sólo de obtener resultados por medio de software comercial, sino de conocer los detalles de la formulación matemática y las herramientas numéricas de cálculo que utilizan estos códigos. Los estudiantes deben tener la oportunidad de acceder al código fuente, lo que no es posible en los programas comerciales, que actúan como cajas negras. O, mejor aún, deben ser capaces de desarrollar sencillos códigos de elementos finitos que sirvan de nexo de unión entre la formulación matemática de las clases teóricas y la aplicación práctica. Para ello, el software matemático MATLAB es la herramienta más apropiada.

MATLAB es un programa de cálculo numérico orientado a matrices con un lenguaje de programación propio (lenguaje M). Su capacidad para manipular matrices y resolver ecuaciones matriciales hace del mismo un instrumento idóneo para la implementación y desarrollo de un código de elementos finitos. MATLAB se emplea en más de 5000 universidades a lo largo del mundo y su creciente popularidad y versatilidad hacen que sea utilizado en numerosas asignaturas de las carreras de ciencia e ingeniería. Esta circunstancia facilita en gran medida la tarea docente, ya que los alumnos se han familiarizado previamente con el software y su lenguaje de programación.

En los últimos años se han publicado numerosos trabajos de investigación que emplean el paquete de software MATLAB para el análisis por elementos finitos (Alberty, Carstensen, Funken, & Klose, 2002) y el desarrollo de mejoras en las prestaciones del programa con el objetivo de reducir el tiempo de cálculo mediante el MEF ha sido una constante en la comunidad científica (Rahman, & Valdman, 2013). Existen varios libros publicados dedicados exclusivamente al desarrollo de códigos de elementos finitos en el software matemático MATLAB (Kwon, & Bang, 1996; Kattan, 2007; Ferreira, 2009; Baaser, 2010), cuyas características se han tenido en consideración en la elaboración del presente código, aunque con el objetivo de adecuar el mismo a la didáctica del método, éste difiere significativamente de todos los trabajos citados.

En el presente artículo el código de elementos finitos desarrollado se emplea para resolver mediante diferentes perspectivas un sencillo problema de cálculo estructural que servirá para ilustrar las capacidades docentes del uso de MATLAB en la enseñanza del MEF. Así, por medio de elementos finitos lineales y cuadráticos se obtienen los campos de tensiones y desplazamientos de una barra a tracción de sección constante empotrada en un extremo que está sometida a una carga uniformemente distribuida. El código se ha implementado en la versión 8 de MATLAB (R2012b) y para facilitar una mejor comprensión y reutilización del mismo se muestran íntegramente en los apéndices los códigos correspondientes a cada enfoque y se citan y detallan a continuación los aspectos más relevantes de los mismos. A medida que se resuelve el problema mediante diferentes planteamientos se van introduciendo de forma progresiva diferentes características intrínsecas al método, de manera que el código no está planteado como un instrumento para resolver problemas estructurales reales mediante el MEF sino como una herramienta docente del mismo. A diferencia del primer ejemplo, que ha sido implementado en versiones anteriores de MATLAB con éxito, en el segundo caso es necesario utilizar una versión actualizada del programa, con el fin de evitar el error de software que se produce en el comando MuPAD intrínseco a las versiones anteriores de MATLAB. El uso de MATLAB como herramienta de enseñanza requiere, como es obvio, de un conocimiento previo del manejo del programa por parte de los estudiantes. Sin embargo, esto no suele suponer un problema, ya que la utilización de MATLAB es habitual en las clases prácticas de las asignaturas relacionadas con el cálculo numérico de los primeros cursos de las carreras técnicas. Y en cualquier caso, para abordar plenamente los problemas que aquí se plantean sólo sería necesario adquirir unas nociones básicas de su uso, que podrían instruirse sin dificultades en una clase introductoria.

3. Planteamiento del problema

La configuración analizada se muestra en la Figura 1. La barra tiene una longitud L de 4 metros, está empotrada en el extremo x=0 y está sometida a una carga distribuida de s = 1000 N/m a lo largo del eje x. La sección transversal es constante con una superficie de A=0.5 m^2 y el módulo elástico tiene un valor de E = 5 MPa.

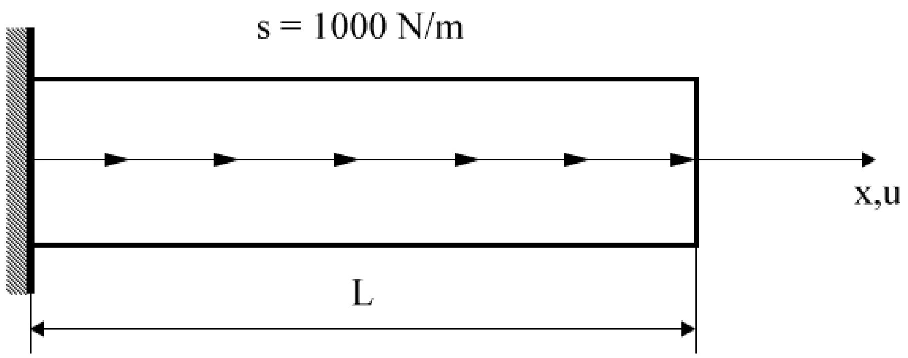


Figura 1. Barra de sección constante empotrada en un extremo sometido a una carga uniformemente distribuida.

3.1. Ejemplo 1: Elementos lineales

En el primer planteamiento del problema la barra se discretiza mediante cuatro elementos lineales de tipo barra con el objetivo de exponer el ensamblaje matricial característico del método y los campos de desplazamientos y tensiones calculados mediante el MEF se comparan a posteriori con la solución analítica. Este sencillo ejemplo permitirá al alumno comprender la formulación matricial del MEF y familiarizarse con las etapas de pre-proceso, proceso y post-proceso intrínsecas al método y al proceder del software comercial. La versión completa del código con comentarios se puede encontrar en el Apéndice 1. Es preciso comentar alguno de los aspectos relacionados con la programación que no han sido suficientemente detallados en el código. En la matriz *Nodos_elemento* se definen las conexiones entre elementos. Cada fila se corresponde con un elemento y en cada columna se especifican los nodos que forman parte del mismo (línea 23, Apéndice 1).

En el vector *Coord_nodos* se almacenan las coordenadas de cada nodo en el espacio. En este caso se sitúa el origen del eje x en el empotramiento de la barra y se asigna a cada elemento una longitud de un metro (línea 31, Apéndice 1). Se definen el vector de desplazamientos (*Desplazamientos*), el vector de fuerzas (*Fuerza*) y la matriz de rigidez (*Rigidez*). Asimismo se inicializan todos ellos mediante la función *zeros* de Matlab, lo que permite agilizar el proceso de cálculo del programa en los bucles (líneas 40-42, Apéndice 1).

Para facilitar las operaciones entre matrices es conveniente definir un vector con los grados de libertad prescritos en el sistema global (*GDL_prescritos*), que a posteriori se descuentan del número total de grados de libertad del sistema para obtener un vector que almacene los grados de libertad activos en el mismo (*GDL_libres*). Esta operación se lleva a cabo mediante la función de MATLAB *setdiff*, una herramienta especialmente apropiada para la diferencia de vectores (líneas 50-54, Apéndice 1).

Se introduce la carga distribuida sobre la barra en el sistema en base al vector de fuerzas nodales equivalentes. Para ello es necesario programar un bucle del tipo *for/end* que distribuya el efecto de la carga en los nodos, quedando ésta almacenada en el vector de fuerzas (líneas 60-67, Apéndice 1). Una vez discretizado el problema e impuestas las condiciones de contorno finaliza la parte correspondiente al pre-procesador y se inicia la etapa de cálculo o procesador, donde se obtienen la matriz de rigidez, los desplazamientos nodales y las tensiones en cada elemento. Por medio de un bucle del tipo *for/end* se calculan la matrices de rigidez de cada elemento y se ensamblan en la matriz de rigidez global. Para obtener la matriz de rigidez de cada elemento es necesario almacenar los grados de libertad (*GDL_elemento*) y la longitud (*Lon*) del mismo (líneas 75-83, Apéndice 1). La matriz de rigidez de un elemento lineal de tipo barra es función únicamente de la geometría de la misma (*Lon, A*) y de sus propiedades mecánicas (*E*). De manera que en el presente ejemplo, donde el módulo de Young y la sección de la barra son constantes, la matriz de rigidez de cada elemento se corresponde con la siguiente expresión:

$$K^{(e)} = \left(\frac{EA}{Lon}\right)^{(e)} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \tag{1}$$

Las matrices de rigidez de cada elemento, que han sido calculadas según (1) y que tienen un tamaño 2x2, se distribuyen para formar la matriz de rigidez global de acuerdo con el vector *GDL_elemento*. El proceso de ensamblaje se lleva a cabo mediante la siguiente línea de código: (líneas 80-81, Apéndice 1)

Rigidez(GDL_elemento,GDL_elemento)=...

Rigidez(GDL_elemento,GDL_elemento)+EA(e)[1 -1;-1 1];*

De manera que para este caso, donde la barra se ha discretizado mediante cuatro elementos finitos, la matriz de rigidez global toma la siguiente forma:

$$K=\begin{bmatrix} \left(\frac{EA}{Lon}\right)^{(1)} & -\left(\frac{EA}{Lon}\right)^{(1)} & 0 & 0 & 0 \\ -\left(\frac{EA}{Lon}\right)^{(1)} & \left[\left(\frac{EA}{Lon}\right)^{(1)}+\left(\frac{EA}{Lon}\right)^{(2)}\right] & -\left(\frac{EA}{Lon}\right)^{(2)} & 0 & 0 \\ 0 & -\left(\frac{EA}{Lon}\right)^{(2)} & \left[\left(\frac{EA}{Lon}\right)^{(2)}+\left(\frac{EA}{Lon}\right)^{(3)}\right] & -\left(\frac{EA}{Lon}\right)^{(3)} & 0 \\ 0 & 0 & -\left(\frac{EA}{Lon}\right)^{(3)} & \left[\left(\frac{EA}{Lon}\right)^{(3)}+\left(\frac{EA}{Lon}\right)^{(4)}\right] & -\left(\frac{EA}{Lon}\right)^{(4)} \\ 0 & 0 & 0 & -\left(\frac{EA}{Lon}\right)^{(4)} & \left(\frac{EA}{Lon}\right)^{(4)} \end{bmatrix}$$

Una vez calculada la matriz de rigidez global es posible resolver el sistema global de ecuaciones intrínseco al método de los elementos finitos: $K\cdot f=a$. Siendo K la matriz de rigidez global, f el vector de fuerzas global y a los desplazamientos nodales.

Si consideramos un sistema lineal tal que $A\cdot X=B$, el vector solución X puede ser obtenido en MATLAB empleando la barra inversa (\): X=A\B. En consecuencia, se aplica el mismo sistema para obtener los desplazamientos en cada nodo de la barra (líneas 87-89, Apéndice 1). A diferencia del resto de operaciones del código, en la obtención de los desplazamientos no se ha añadido un punto y coma (;) al final de la instrucción, éste se emplea para indicar a MATLAB que realice el cálculo sin presentar en pantalla el procedimiento o el resultado. De manera que se ordena al programa que muestre en pantalla los desplazamientos obtenidos en cada nodo. A partir de los valores de los desplazamientos nodales es posible calcular otros parámetros de interés, como las tensiones en cada elemento, que serán almacenadas en el vector *Tensiones*. Éstas se calculan a partir de las deformaciones, que a su vez se calculan a partir de los desplazamientos nodales (líneas 93-101, Apéndice 1).

Una vez que se ha obtenido toda la información que se necesitaba a partir de los desplazamientos nodales finaliza la etapa de cálculo o procesador y da paso a la etapa de visualización o post-procesador, donde se muestran con detalle los resultados obtenidos. Esta fase es muy importante cuando se resuelven geometrías complejas y el software comercial de elementos finitos incluye poderosas herramientas para visualizar los resultados obtenidos. En el presente ejemplo, al ser una sencilla configuración unidimensional, la solución analítica es conocida y en consecuencia existe la posibilidad de establecer comparaciones con la misma. Así, mediante la herramienta *plot* se representan gráficamente los desplazamientos calculados mediante el MEF y sobre la misma figura se sobreimprime la solución analítica. Es preciso utilizar el comando *hold on* para que la nueva representación gráfica se realice sobre la misma figura (líneas 111-122, Apéndice 1). De igual forma, se representan gráficamente en una nueva figura los campos tensionales obtenidos analíticamente y por medio del MEF (líneas 126-145, Apéndice 1).

Las gráficas obtenidas para el campo de desplazamientos y el campo de tensiones se muestran en las figuras 2 y 3 respectivamente. Los resultados se han representado de forma sencilla y funcional con el objetivo de eliminar obstáculos en la docencia, pero MATLAB ofrece un amplio abanico de herramientas para mejorar y complementar la estética y el detalle de las gráficas. Como se puede apreciar, se representan los valores obtenidos para los desplazamientos (Figura 2) y las tensiones (Figura 3) a partir de los datos del problema planteado en función de la posición en la barra. La solución obtenida mediante el MEF se reproduce mediante una línea roja discontinua, donde la posición de los nodos viene señalizada por pequeñas circunferencias del mismo color. Mientras que la solución exacta viene representada por una línea continua de color azul, tal y como se describe en la leyenda de ambas imágenes.

En la Figura 2 se observa que los desplazamientos nodales coinciden con los valores exactos y que, de acuerdo con la elección de elementos finitos del tipo lineal, en el interior de los mismos los desplazamientos varían linealmente aproximando razonablemente bien la solución analítica.

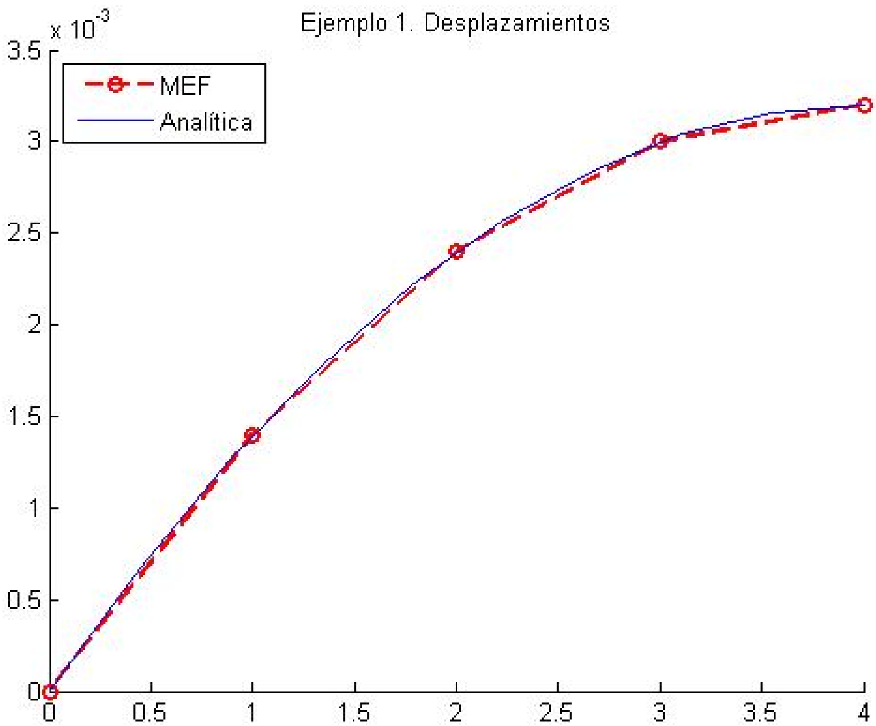


Figura 2. Desplazamientos obtenidos en función de la posición en el Ejemplo 1.

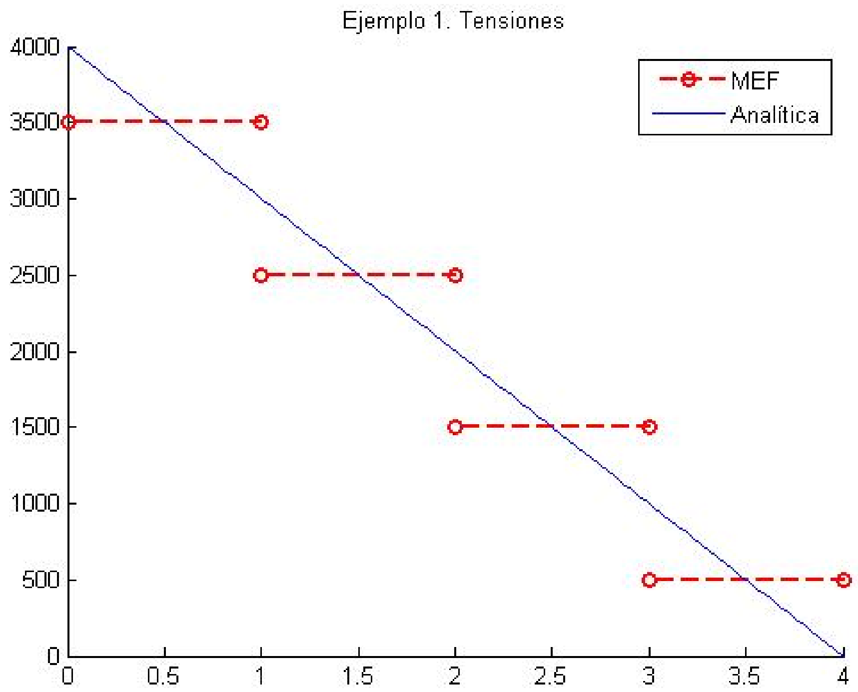


Figura 3. Tensiones obtenidas en función de la posición en el Ejemplo 1.

El alumno podrá apreciar cómo la compatibilidad se satisface siempre en los nodos y en consecuencia existe un campo de desplazamientos continuo. Sin embargo, en la aproximación del campo tensional de la Figura 3 se aprecian mayores diferencias entre la solución exacta y la obtenida mediante el MEF y por consiguiente es conveniente discretizar la barra con un mayor número de elementos para reducir el error en el cálculo del esfuerzo axil. El alumno podrá observar que en el MEF, generalmente, no existe equilibrio de tensiones en los nodos. Y es que las tensiones en los nodos se obtienen en cada elemento a partir de los valores de los desplazamientos en sus nodos y en consecuencia, las tensiones en un nodo común a varios elementos pueden tomar valores diferentes. De manera que a partir del presente ejemplo el alumno rápidamente podrá deducir que, al obtenerse las deformaciones y tensiones a partir de las derivadas del campo de desplazamientos, los errores en la aproximación de los campos de deformaciones y tensiones serán siempre superiores.

Además, el presente ejemplo permite modificar el mallado del problema con facilidad, requiriendo únicamente modificar las variables *Coord_nodos*, *Nodos_elemento* y *L*. Lo que permitirá al alumno obtener la solución mediante el MEF para diferentes discretizaciones, observando como la solución obtenida se aproxima cada vez más a la solución exacta a medida que aumenta el número de elementos empleado. Pero sobre todo, el presente ejercicio permitirá al alumno familiarizarse con las etapas básicas del MEF. Esto es:

- Discretizar el problema en una serie de elementos finitos conectados entre sí en los nodos (mallado).
- Calcular la matriz de rigidez $\left(K^{(e)}\right)$ y el vector de fuerzas nodales $\left(f^{(e)}\right)$ para cada elemento del sistema.
- Ensamblar y resolver la ecuación matricial de equilibrio global $(K \cdot f = a)$ para, una vez impuestas las condiciones de contorno, calcular los valores de los desplazamientos en los nodos.
- Calcular los parámetros que resulten de interés en cada caso a partir de los desplazamientos nodales obtenidos.
- Visualizar los resultados con claridad para tomar decisiones acertadas con respecto al diseño del componente analizado.

Una realización satisfactoria del ejemplo por parte del alumno le ayudará a comprender la estructura básica del método y esto le permitirá desarrollar el código para dar respuesta a problemas más complicados. En el segundo enfoque de este problema se introduce otro tipo de elemento finito a la par que se abordan dos aspectos claves del método que no se han considerado en el primer caso: la formulación isoparamétrica y la integración numérica de Gauss-Legendre.

3.2. Elementos cuadráticos

En este segundo enfoque la barra se discretiza mediante un solo elemento cuadrático de tipo barra con el objetivo de reflejar la importancia de una elección apropiada del grado de distribución de los desplazamientos en los elementos mediante el uso de diferentes funciones de interpolación o forma. Asimismo, este ejemplo permitirá al alumno familiarizarse con las transformaciones isoparamétricas intrínsecas al MEF y comprender el uso de la integración numérica más común en los análisis por elementos finitos: la cuadratura de Gauss-Legendre. Al igual que en el caso anterior, los campos de desplazamientos y tensiones calculados mediante el MEF se comparan con la conocida solución analítica.

La estructura del código apenas difiere de la concerniente al primer ejemplo, con la intención de que el programa pueda ser empleado, con la introducción de pequeños cambios, como herramienta docente para la resolución de una amplia variedad de ejercicios. A pesar de que las características del código se han comentado convenientemente en su interior, es preciso explicar con detalle algunas partes del mismo que no son comunes al primer ejemplo y sobre las que es fundamental hacer especial énfasis. En lo que a la etapa del pre-proceso se refiere, el único aspecto que difiere significativamente radica en la introducción en el vector de fuerzas del efecto de la carga distribuida sobre la barra. De acuerdo con los conceptos de equilibrio del Principio de los Trabajos Virtuales (PTV) se obtiene que, en un elemento aislado, cualquier fuerza T que actúe sobre un contorno Γ se puede expresar tal que:

$$F = \int_{\Gamma^e} N^T \cdot T \cdot d\Gamma^e \qquad (2)$$

Siendo N^T la transformada de la matriz de funciones de forma. Las funciones de forma son unas funciones de interpolación que toman el valor 1 en el nodo de referencia y 0 en el resto, de manera que las variables a calcular se pueden obtener como la suma de los productos de estas funciones de interpolación o forma por los valores de la función en los nodos. Así, por medio de la interpolación, la distribución de la variable a calcular (por ejemplo, el desplazamiento) queda definida en todo el dominio mientras que el problema se ha reducido a un número finito de grados de libertad. Las funciones de forma conocidas se corresponden con formas geométricas muy sencillas, pero en la práctica la geometría de los elementos en los que se divide el dominio es más compleja. Para transformar estos perfiles complejos en las formas simples conocidas se emplea la formulación isoparamétrica. Con el objetivo de no alterar en exceso la base del código y para resaltar su relevancia, la transformación isoparamétrica del presente ejemplo se lleva a cabo en una función de MATLAB que se ha programado por separado y que recibe el nombre de *TransIso*. Esta función recibe la posición de los nodos en el espacio (*Coord_nodos*) y entrega al código principal el vector de funciones de forma (*Fforma*), el determinante (*detJacobiano*) y el inverso (*invJacobiano*) del Jacobiano y la coordenada natural (xi) correspondiente a la coordenada cartesiana x. Lo que nos permite obtener el vector de Fuerzas a partir de la expresión (2):

$$F = \int_{\Gamma^e} N^T \cdot T \cdot d\Gamma^e = \int_L \; N^T \cdot s \cdot dx = \int_{-1}^{+1} \begin{bmatrix} 0.5 \cdot \xi \cdot (\xi - 1) \\ 1 - \xi^2 \\ 0.5 \cdot \xi \cdot (\xi + 1) \end{bmatrix} \cdot s \cdot |J| d\xi \qquad (3)$$

Siendo s el valor de la carga distribuida, ξ la coordenada natural y $|J|$ el determinante del Jacobiano. De manera que el vector de fuerzas nodales equivalentes se calcula en el código directamente de acuerdo con (3) y se almacena, al igual que en el primer ejemplo, en el vector *Fuerza*. La integral se resuelve directamente por medio del operador *int* de MATLAB (líneas 62-73, Apéndice 2). La transformación isoparamétrica se lleva a cabo en la función *TransIso* (líneas 1-18, Apéndice 3). Y, al igual que en el código principal, es preciso hacer hincapié en algunos aspectos de la misma. La transformación isoparamétrica que se pretende llevar a cabo se describe en la Figura 4. De acuerdo con la notación empleada en la misma, las funciones de forma en el caso de un elemento cuadrático unidimensional, que han sido obtenidas mediante interpolaciones de Lagrange, son las siguientes:

$$N_1(\xi) = \frac{1}{2}\xi(\xi - 1) \quad ; \quad N_2(\xi) = (1 - \xi)(1 + \xi) \quad ; \quad N_3(\xi) = \frac{1}{2}\xi(\xi + 1)$$

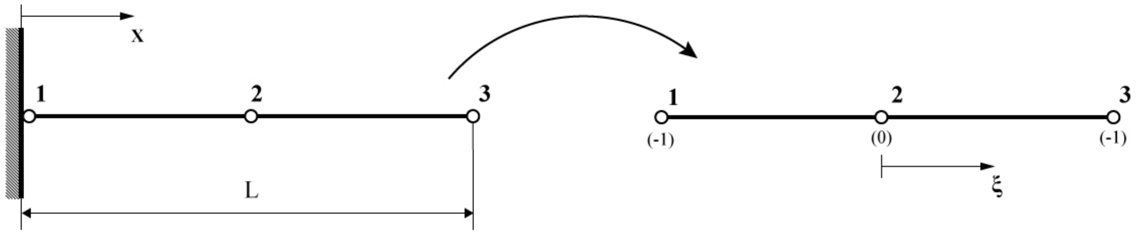


Figura 4. Transformación isoparamétrica para el problema planteado en el Ejemplo 2.

De manera que, definiendo *xi* como variable simbólica por medio del operador *syms*, las funciones de forma se almacenan en el vector *Fforma*. Y, de acuerdo con la formulación isoparamétrica, la matriz Jacobiano que define la transformación de coordenadas $x \rightarrow \xi$ en un elemento unidimensional es: $dx = J^{(e)} \cdot d\xi$. Y así, tal y como se procede en la función, el determinante del Jacobiano (*detJacobiano*) se obtiene fácilmente despejando en la expresión (4). Las derivadas presentes en la misma se resuelven por medio del comando de MATLAB *diff*.

$$x = N_1 \cdot x_1 + N_2 \cdot x_2 + N_3 \cdot x_3 \Rightarrow \frac{dx}{d\xi} = \frac{dN_1}{d\xi} \cdot x_1 + \frac{dN_2}{d\xi} \cdot x_2 + \frac{dN_3}{d\xi} \cdot x_3 \tag{4}$$

Siguiendo con el análisis del código, se da paso a la etapa del procesador, donde se calculan la matriz de rigidez, los desplazamientos en los nodos y las tensiones en el elemento. Para no modificar en exceso el esqueleto del programa, la matriz de rigidez (*Rigidez*) se obtiene, al igual que en el primer ejemplo, por medio de un bucle del tipo *for/end*. Sin embargo en esta ocasión su uso no es necesario, ya que no hace falta realizar el proceso de ensamblaje al haber discretizado el dominio con un solo elemento. De acuerdo con las relaciones de equilibrio del PTV la matriz de rigidez de un elemento en un volumen Ω se puede obtener en base a:

$$K^{(e)} = \int_{\Omega^e} B^T \cdot D \cdot B \cdot d\Omega^e \tag{5}$$

Donde K es la matriz de rigidez, D la matriz constitutiva y B la matriz de deformación del elemento. En el presente caso, aplicando la transformación isoparamétrica y teniendo en cuenta que el área y el módulo de Young son constantes en todo el elemento, la expresión (5) quedaría tal que:

$$K^{(e)} = \int_{\Omega^e} B^T \cdot D \cdot B \cdot d\Omega^e = EA \int_L B^T \cdot B \cdot dx = EA \int_{-1}^{1} B^T \cdot B \cdot |J| d\xi \tag{6}$$

La matriz de deformación del elemento relaciona el vector deformación con el vector de desplazamientos nodales, y en consecuencia, para un elemento de tres nodos se corresponde con la siguiente expresión:

$$B = \left[\frac{dN_1}{dx}, \frac{dN_2}{dx}, \frac{dN_3}{dx}\right] \tag{7}$$

De manera que aplicando la transformación isoparamétrica quedaría tal que:

$$B = \left[\frac{dN_1}{dx}, \frac{dN_2}{dx}, \frac{dN_3}{dx}\right] = \left[\frac{dN_1}{d\xi}, \frac{dN_2}{d\xi}, \frac{dN_3}{d\xi}\right] \cdot \frac{d\xi}{dx} = \left[\frac{dN_1}{d\xi}, \frac{dN_2}{d\xi}, \frac{dN_3}{d\xi}\right] \cdot \frac{1}{|J|} \tag{8}$$

Sustituyendo (8) en (6) y operando se obtiene la siguiente expresión para la matriz de rigidez:

$$K^{(e)} = EA \int_{-1}^{1} B^T \cdot B \cdot |J| d\xi = EA \cdot \frac{L}{2} \int_{-1}^{1} \begin{bmatrix} \xi - 0.5 \\ -2\xi \\ \xi + 0.5 \end{bmatrix} \cdot [\xi - 0.5 \quad -2\xi \quad \xi + 0.5] d\xi \tag{9}$$

En este sencillo ejemplo, el producto matricial en el interior de la integral trae consigo expresiones polinómicas de segundo orden en función de ξ que no son difíciles de integrar. Sin embargo, en problemas de interés práctico será necesario el cálculo de integrales mucho más complejas en las que será imprescindible el uso de la integración numérica. En el MEF es especialmente popular la integración numérica de Gauss-Legendre y, por su singularidad, ésta se lleva a cabo en el presente ejemplo en una función programada en MATLAB externa al programa principal. Esta función, que recibe el nombre de *IntGauss*, recibe la variable de la coordenada natural (*xi*) y la matriz resultante del producto matricial en el interior de la integral de la matriz de rigidez (*R*), y devuelve la matriz resultante del proceso de integración (*H*), lo que permite resolver (9) para cada elemento y obtener la matriz de rigidez global (líneas 81-91 Apéndice 2 y líneas 1-11, Apéndice 4).

Aunque la función es sencilla, dada la relevancia de la integración Gaussiana en el MEF es preciso examinar en detalle sus características. Si se realiza el producto matricial del integrando en (9) queda:

$$K^{(e)} = EA \cdot \frac{L}{2} \int_{-1}^{1} \cdot \begin{bmatrix} (\xi - 0.5)^2 & -2\xi(\xi - 0.5) & (\xi - 0.5)(\xi + 0.5) \\ -2\xi(\xi - 0.5) & 4\xi^2 & -2\xi(\xi + 0.5) \\ (\xi - 0.5)(\xi + 0.5) & -2\xi(\xi + 0.5) & (0.5 + \xi)^2 \end{bmatrix} d\xi \tag{10}$$

La regla de integración o cuadratura de Gauss-Legendre expresa el valor de dicha integral como suma de los productos de los valores del integrando en una serie de puntos conocidos en el interior del intervalo (puntos de integración de Gauss) por unos coeficientes determinados (pesos). Habida cuenta de que la matriz de (10) contiene polinomios de segundo grado y teniendo en consideración que una cuadratura de Gauss-Legendre de orden n integra exactamente un polinomio de grado 2n-1 o menor, es obvio que será necesario recurrir a una cuadratura de orden 2 para integrar de forma exacta las expresiones del presente ejemplo. En la Tabla 1 se muestran las coordenadas y los pesos para elementos lineales.

n	$\pm\xi_i$	W_i
1	0	2
2	$1/\sqrt{3}$	1
3	$\sqrt{3/5}$ 0	$5/9$ $8/9$

Tabla 1. Coordenadas naturales ξ_i y factores de peso W_i en elementos unidimensionales

De manera que el elemento cuadrático con el que se ha discretizado la barra tiene 2 puntos de integración de Gauss ubicados en las coordenadas $\xi_i = \pm 1/\sqrt{3}$. Los desplazamientos nodales se obtienen resolviendo el sistema $K \cdot f = a$, tal y como se ha detallado en el caso anterior. Sin embargo, en esta ocasión se ha discretizado el dominio mediante un elemento finito cuadrático y por consiguiente, los desplazamientos en el interior del mismo no varían de forma lineal entre los valores obtenidos en los nodos, tal y como sucedía en el primer ejemplo, sino que la distribución de desplazamientos viene caracterizada por las funciones de forma cuadráticas empleadas. De manera que el campo de desplazamientos (u) en el interior del elemento se calcula en base a: (líneas 101-102, Apéndice 2)

*u=Desplazamientos(1)*Fforma(1)+Desplazamientos(2)*Fforma(2)+...*

*Desplazamientos(3)*Fforma(3);*

Y el campo tensional (*n*), al igual que en el caso anterior, se obtiene a partir de las deformaciones, que están directamente relacionadas con los desplazamientos por medio de la matriz de deformación (*B*) (línea 106, Apéndice 2). Una vez resuelto el sistema matricial y obtenidos, a partir de los desplazamientos, todos los parámetros de interés, es importante reflejar convenientemente los resultados, en lo que se denomina la etapa de post-procesado. En este caso, a diferencia del primer ejemplo, al haber utilizado la transformación isoparamétrica será necesario realizar de nuevo el cambio de variable para reflejar los resultados de las variables de interés sobre el sistema de coordenadas cartesiano (líneas 117-126, Apéndice 2). El cambio de variable en la expresión de los desplazamientos (*u*) se lleva a cabo mediante el operador *subs* teniendo en consideración la relación existente entre la coordenada natural y la coordenada cartesiana (ver Figura 4):

$$\xi = 2\frac{x - x_c}{l^{(e)}} \tag{11}$$

Siendo x_c la coordenada cartesiana en el centro del elemento. Para representar gráficamente una función se emplea el comando *ezplot*. Se procede de idéntica forma para reproducir el campo tensional calculado. Las gráficas obtenidas con MATLAB se muestran en las Figuras 5 y 6. En las mismas se comparan, por medio de la misma señalización que la empleada en el primer ejemplo, los desplazamientos y las tensiones calculados mediante el MEF con la solución analítica.

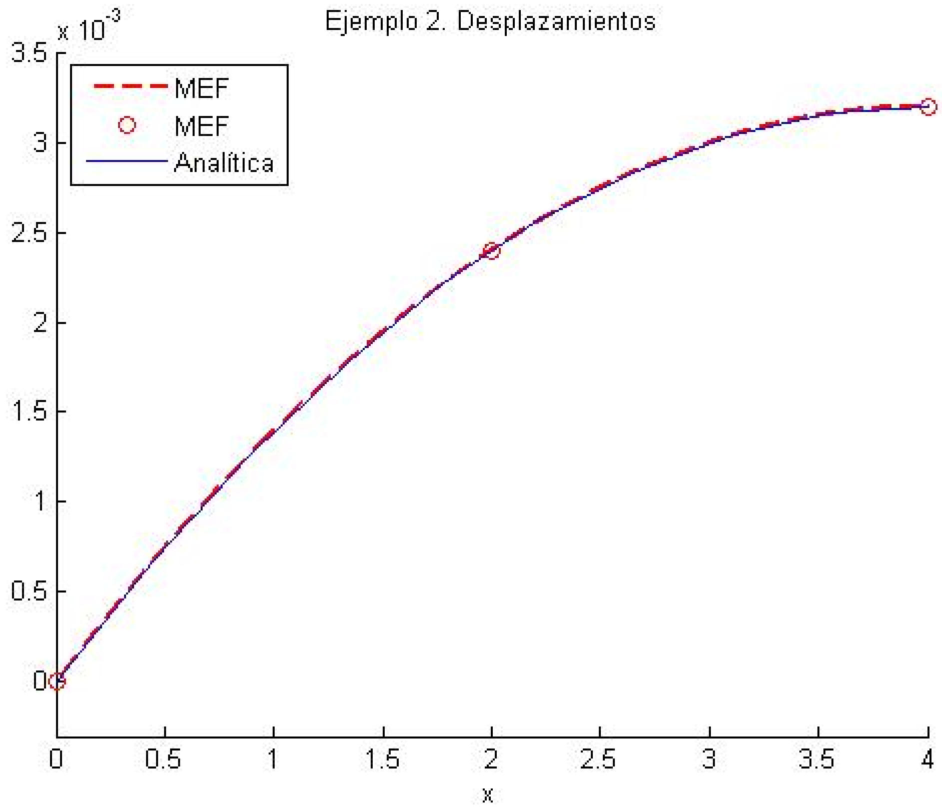


Figura 5. Desplazamientos obtenidos en función de la posición en el Ejemplo 2.

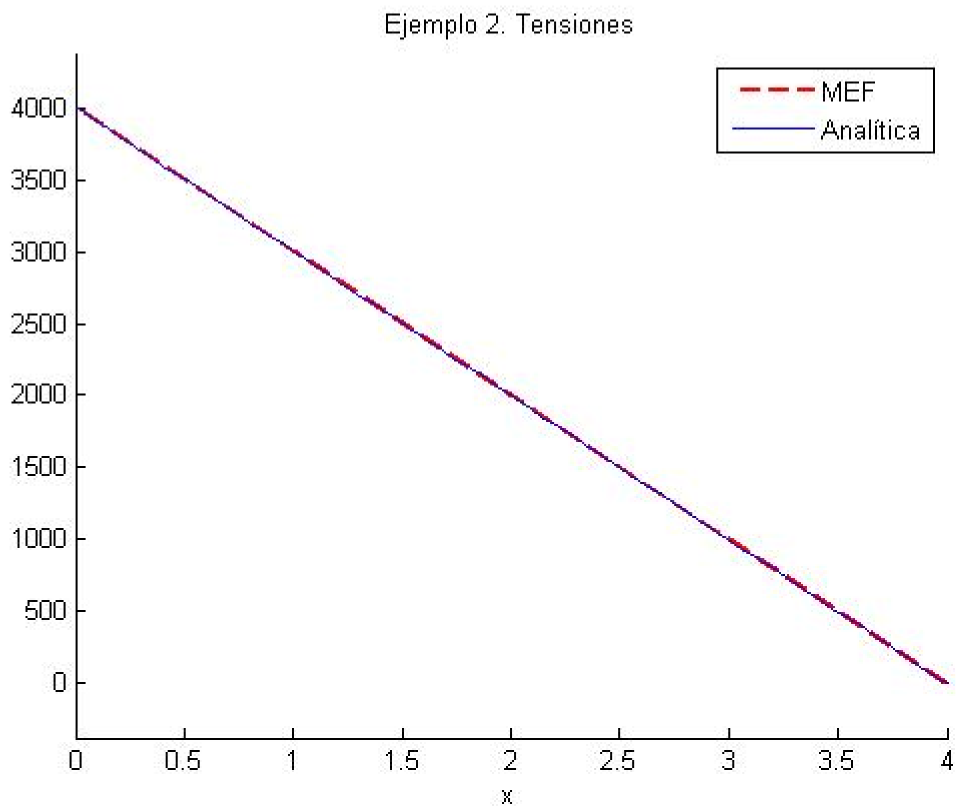


Figura 6. Tensiones obtenidas en función de la posición en el Ejemplo 2.

En la Figura 5 se observa que tanto los valores del desplazamiento en los nodos como el campo de desplazamientos en el interior del elemento coinciden con la solución exacta. Este resultado era previsible, pues se está aproximando una solución polinómica de segundo orden mediante un elemento finito cuadrático. De igual manera, en la Figura 6 se puede apreciar como el campo tensional en el interior del elemento reproduce fielmente la solución analítica. Con lo que en este segundo ejemplo no tendría sentido discretizar el dominio mediante un número mayor de elementos, ya que la solución obtenida mediante el MEF coincide con la exacta. Este hecho posibilita que el alumno fácilmente alcance la conclusión de que, en el caso de que el orden polinomial de la solución sea conocido, resulta conveniente el uso de elementos finitos con funciones de forma del mismo grado que la solución. Ya que esto garantiza no sólo que la solución en los nodos sea correcta, sino que la variación de los desplazamientos en el interior de cada elemento coincida con la exacta. Sin embargo, es necesario advertir a los estudiantes de que esta coyuntura rara vez se encuentra en un caso de aplicación práctica.

Observando las soluciones obtenidas para el primer (Figuras 2 y 3) y segundo (Figuras 5 y 6) ejemplo es posible establecer una comparativa entre los resultados obtenidos para diferentes tipos de elementos. De manera que el alumno rápidamente puede deducir que, para el problema evaluado en el presente trabajo, la precisión del elemento cuadrático es superior a la del elemento lineal. Ésta es una conclusión acertada, puesto que cuanto más simple es el elemento, menos capacidad tiene de aproximar soluciones en las que el campo de desplazamientos sea una función polinómica de un orden alto. Sin embargo, el uso de elementos finitos de menor orden permite ahorrar tiempo en el cálculo de las matrices del elemento. De manera que, en líneas generales y desde el punto de vista de la eficiencia computacional, es recomendable el uso de elementos finitos con menos nodos, aunque sea en mayor número, frente a elementos de orden superior. Y es que, dado el vertiginoso avance de la tecnología informática en los últimos años, los problemas asociados a una mayor cantidad de variables son cada vez menos importantes. El uso de elementos de orden superior se recomienda únicamente en aquellas regiones en las que se pueda intuir que la variable a calcular varía significativamente. En cualquier caso, en la mayoría de las ocasiones será la experiencia del calculista la que determine el tipo de elemento a utilizar.

4. Conclusiones

Por medio del software matemático MATLAB se ha desarrollado un inteligible código de elementos finitos capaz de resolver sencillos problemas estructurales abordando gradualmente las características más relevantes del MEF. El mismo se ha utilizado para obtener, mediante los dos tipos de elementos finitos más comunes, los campos de desplazamientos y tensiones en una barra a tracción de sección constante empotrada en un extremo que está sometida a una carga uniformemente distribuida. El problema resuelto, el orden de los ejemplos y la secuencia de operaciones desarrolladas en el proceso de resolución de los mismos obedecen exclusivamente a fines puramente didácticos, con el objetivo de que el alumno se enfrente de forma progresiva a las particularidades inherentes al MEF.

La estructura del código se ha desarrollado con el objetivo de que pueda ser extendido, sin necesidad de realizar grandes modificaciones, para dar respuesta a problemas más complejos, ya sea por la dimensión de los mismos (2D, 3D) o por el tipo de elemento finito a utilizar (viga, placa, etc.). En cualquier caso, los ejemplos reflejados en el presente artículo han demostrado ser más que suficientes para introducir el MEF a alumnos de ingeniería, sirviendo de enlace entre la formulación matemática del método y el proceder del software comercial. Por su sencillez de uso y programación, el software matemático MATLAB ha evidenciado ser una herramienta didáctica muy valiosa a la hora de trasmitir a los alumnos los fundamentos básicos del MEF.

A1. Apéndice 1: Código correspondiente al 1er ejemplo – elementos lineales

```
%...................................................................

% MATLAB: Una herramienta para la didáctica del método de los
% elementos finitos.
% Ejemplo1

% Se resetea la memoria del programa y se limpia el espacio de trabajo

clear all

% Se definen las propiedades del material:
% E: módulo elástico.
% A: área de la sección transversal.

E=5000000;
A=0.5;

% Pre-procesador: Se discretiza el problema y se imponen las
% condiciones de contorno.

% Se asignan los nodos correspondientes a cada elemento:

Nodos_elemento=[1 2;2 3;3 4;4 5];

% Se define el número de elementos:

Numero_elementos=size(Nodos_elemento,1);

% Se posicionan los nodos en el espacio:

Coord_nodos=[0 1 2 3 4];

% Se define el número de nodos:

Numero_nodos=size(Coord_nodos,2);

% Se definen e inicializan el vector de desplazamientos, el vector de
% fuerzas y la matriz de rigidez:

Desplazamientos=zeros(Numero_nodos,1);
Fuerza=zeros(Numero_nodos,1);
Rigidez=zeros(Numero_nodos);

% Se introducen las condiciones de contorno.

% De acuerdo a las condiciones del problema, se restringen los grados
```

```
% de libertad (GDL) necesarios, en este caso están restringidos los
% desplazamientos en el primer nodo.

GDL_prescritos=[1];

% Se designan los GDL libres (GDL_libres).

GDL_libres=setdiff([1:Numero_nodos]',[GDL_prescritos]);

% Se introduce la carga aplicada.
% L es la longitud de la barra y s=1000 N/m es la carga distribuida
% del presente ejemplo.

s=1000; L=Coord_nodos(5)-Coord_nodos(1);
b=s*L/Numero_elementos;

for j=1:Numero_nodos

Fuerza(j)=b*sum(sum(Nodos_elemento == j))/size(Nodos_elemento,2);

end

% Procesador: Se calcula la matriz de rigidez, los desplazamientos en
% los nodos y las tensiones en cada elemento.

% Se calcula la matriz de rigidez (Rigidez), siendo GDL_elemento los
% grados de libertad y Lon la longitud de cada elemento.

for e=1:Numero_elementos

GDL_elemento=Nodos_elemento(e,:);
Lon=Coord_nodos(GDL_elemento(2))-Coord_nodos(GDL_elemento(1));
EA(e)=E*A/Lon;
Rigidez(GDL_elemento,GDL_elemento)=...
Rigidez(GDL_elemento,GDL_elemento)+EA(e)*[1 -1;-1 1];

end

% Se calculan los desplazamientos:

Desp=Rigidez(GDL_libres,GDL_libres)\Fuerza(GDL_libres);
Desplazamientos=zeros(Numero_nodos,1);
Desplazamientos(GDL_libres)=Desp

% Se calcula el vector de tensiones (Tensiones):

for k=1:Numero_elementos

Dif_desp=Desplazamientos(Nodos_elemento(k,2))-...
Desplazamientos(Nodos_elemento(k,1));
Lon=Coord_nodos(Nodos_elemento(k,2))-...
Coord_nodos(Nodos_elemento(k,1));
Tensiones(k)=E*A*Dif_desp/Lon;

end
```

```matlab
% Postprocesador: se muestran los resultados obtenidos.
% En el presente trabajo se conoce la solución analítica, por lo que
% los resultados obtenidos mediante el MEF se comparan con la misma:

% Desplazamientos

% Solución mediante el MEF

plot(Coord_nodos,Desplazamientos,'Marker','o','LineWidth',1.5,...
'LineStyle','--','Color',[1 0 0],'DisplayName','MEF');

% Solución analítica

x=linspace(0,L,10);
u=(-s*x.^2/2+s*L*x)/(E*A);
hold on
plot(x,u,'LineWidth',1,'DisplayName','Analítica');
h=legend('MEF','Analítica',2);
set(gca,'box','off')
title('Ejemplo 1. Desplazamientos');

% Tensiones

figure
hold on

% Solución mediante el MEF

f1=zeros(Numero_elementos,1);
for i=1:Numero_elementos
 p=Nodos_elemento(i,:);
 f1(i)=plot(Coord_nodos(p),repmat(Tensiones(i),1,...

length(Coord_nodos(p))),'Marker','o','LineWidth',1.5,'LineStyle',...
     '--','Color',[1 0 0],'DisplayName','MEF');
end

% Solución analítica

x=linspace(0,L,100);
y=s*(L-x);
f2=plot(x,y,'LineWidth',1,'DisplayName','Analítica');
h=legend([f1(end),f2],'MEF','Analítica');
title('Ejemplo 1. Tensiones');

% Fin Ejemplo1
```

A2. Apéndice 2: Código correspondiente al 2º ejemplo – elementos cuadráticos

```
%.......................................................................

% MATLAB: Una herramienta para la didáctica del método de los
% elementos finitos.
% Ejemplo2

% Se resetea la memoria del programa y se limpia el espacio de trabajo

clear all

% Se definen las propiedades del material:
% E: módulo elástico.
% A: área de la sección transversal.

E=5000000;
A=0.5;

% Pre-procesador: Se discretiza el problema y se imponen las
% condiciones de contorno.

% Se asignan los nodos correspondientes a cada elemento:

Nodos_elemento=[1 2 3];

% Se define el número de elementos:

Numero_elementos=size(Nodos_elemento,1);

% Se posicionan los nodos en el espacio:

Coord_nodos=[0 2 4];

% Se define el número de nodos:

Numero_nodos=size(Coord_nodos,2);

% Se definen e inicializan el vector de desplazamientos, el vector de
% fuerzas y la matriz de rigidez:

Desplazamientos=zeros(Numero_nodos,1);
Fuerza=zeros(Numero_nodos,1);
Rigidez=zeros(Numero_nodos);

% Se introducen las condiciones de contorno.

% De acuerdo a las condiciones del problema, se restringen los grados
% de libertad (GDL) necesarios, en este caso están restringidos los
% desplazamientos en el primer nodo.

GDL_prescritos=[1];
```

```

% Se designan los GDL libres (GDL_libres).

GDL_libres=setdiff([1:Numero_nodos]',[GDL_prescritos]);

% Se introduce la carga aplicada, formulando matricialmente el
% problema y haciendo uso de la transformación isoparamétrica.

% L es la longitud de la barra y s=1000 N/m es la carga distribuida
% del presente ejemplo.

s=1000;L=Coord_nodos(3)-Coord_nodos(1);

% Se realiza la transformación isoparamétrica por medio de la función
% TransIso

[Fforma,detJacobiano,invJacobiano,xi]=TransIso(Coord_nodos);

for j=1:Numero_nodos

Fuerza(j)=s*detJacobiano*int(Fforma(j),xi,-1,1);

end

% Procesador: Se calcula la matriz de rigidez, los desplazamientos en
% los nodos y las tensiones en cada elemento.

% Se calcula la matriz de rigidez (Rigidez), siendo GDL_elemento los
% grados de libertad de cada elemento.

for e=1:Numero_elementos

 GDL_elemento=Nodos_elemento(e,:);

B(xi)=[diff(Fforma(1)),diff(Fforma(2)),diff(Fforma(3))]*invJacobiano;
 R(xi)=B'*B;
 [H]=IntGauss(R,xi);
 EA(e)=E*A;
 Rigidez(GDL_elemento,GDL_elemento)=...
 Rigidez(GDL_elemento,GDL_elemento)+EA(e)*H*detJacobiano;

end

% Se calculan los desplazamientos:

Desp=Rigidez(GDL_libres,GDL_libres)\Fuerza(GDL_libres);
Desplazamientos=zeros(Numero_nodos,1);
Desplazamientos(GDL_libres)=Desp

% Se obtiene el campo de desplazamientos en el interior del elemento:

u=Desplazamientos(1)*Fforma(1)+Desplazamientos(2)*Fforma(2)+...
    Desplazamientos(3)*Fforma(3);

% Se obtiene el campo tensional en el interior del elemento:

```

```
n=E*A*B*Desplazamientos;

% Postprocesador: se muestran los resultados obtenidos.
% En el presente trabajo se conoce la solución analítica, por lo que
% los resultados obtenidos mediante el MEF se comparan con la misma:

% Desplazamientos

% Se obtiene el campo de desplazamientos haciendo el cambio de
% variable al sistema cartesiano

syms x;
u=subs(u,xi,(2*(x-L/2)/L));

% Solución mediante el MEF

hold on
a=ezplot(u,[0,L]);
set(a,'LineWidth',1.5,'LineStyle','--','Color', [1 0 0]);
plot(Coord_nodos,Desplazamientos,'o','Color', [1 0 0]);
title('Ejemplo 2. Desplazamientos');

% Solución analítica

y=linspace(0,L,10);
u=(-s*y.^2/2+s*L*y)/(E*A);
plot(y,u,'LineWidth',1,'DisplayName','Analítica');
h=legend('MEF','MEF','Analítica',2);

% Tensiones

% Se obtiene el campo de tensiones haciendo el cambio de variable al
% sistema cartesiano

n=subs(n,xi,(2*(x-L/2)/L));

% Solución mediante el MEF

figure;
hold on;
b=ezplot(n,[0,L]);
set(b,'LineWidth',1.5,'LineStyle','--','Color', [1 0 0]);

% Solución analítica

x=linspace(0,L,100);
y=s*(L-x);
f2=plot(x,y,'LineWidth',1,'DisplayName','Analítica');
h=legend([b(end),f2],'MEF','Analítica');
title('Ejemplo 2. Tensiones');

% Fin Ejemplo
```

A3. Apéndice 3: Código correspondiente a la función *TransIso*

```
function [Fforma,detJacobiano,invJacobiano,xi]=TransIso(Coord_nodos)

% En esta función se lleva a cabo la transformación isoparamétrica

% Se define el vector de funciones de forma (Fforma), siendo z la
% coordenada natural correspondiente a la coordenada cartesiana x.

syms xi

Fforma=[0.5*xi*(xi-1);(1-xi)*(1+xi);0.5*xi*(1+xi)];

% Se calculan el determinante y el inverso del Jacobiano (detJacobiano):

detJacobiano = diff(Fforma(1))*Coord_nodos(1) + ...
       diff(Fforma(2))*Coord_nodos(2) + diff(Fforma(3))*Coord_nodos(3);

invJacobiano=1/detJacobiano

```

A4. Apéndice 4: Código correspondiente a la función *IntGauss*

```
function [H] = IntGauss(R,xi)

% En esta función se lleva a cabo la integración Gaussiana.

% Se integra numéricamente por Gauss-Legendre con precisión
% cuadrática, siendo W el peso correspondiente al punto de
% integración.

W=1;

H=W*R(-1/(sqrt(3)))+W*R(1/(sqrt(3)))
```

UNIÓN
REVISTA IBEROAMERICANA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA

ISSN: 1815-0640
Número XX. Noviembre 2015
Páginas XX-XX

www.fisem.org/web/union

Bibliografía

Alberty, J., Cartensen, C., Funken, S.A., & Klose, R. (2002). MATLAB implementation of the finite element method in elasticity. *Computing*, 69, 239-263.

Baaser, H. (2010). *Development and Application of the Finite Element Method based on MatLab*. Springer.

Backer, J.R., Capece, V.R., & Lee J.R. (2001). Integration of finite element software in undergraduate engineering courses. *ASEE Annual Conference Proceedings*, Session 1520.

Connell, H., Blyth, B., May, R., & Zorzan, C. (1999). Teaching the finite element method using software. *Proceedings of the Delta'99 Symposium on Undergraduate Mathematics*, 65-68.

Earley, R.D. (1998). Use of FEA in an introductory strength of materials course. *ASEE Annual Conference Proceedings*, Session 3648.

Ferreira, A.J.M. (2009). *MATLAB Codes for Finite Element Analysis*. Solid Mechanics and its Applications, Springer.

Howard, W.E., Musto, J.C., & Prantil, V. (2001). Finite element analysis in a mechanics course sequence. *ASEE Annual Conference Proceedings*, Session 2793.

Jiang, Y., & Wang, C. (2008). On teaching finite element method in plasticity with Mathematica. *Computer Applications in Engineering Education*, 16, 233-242.

Jolley, W.O., Rencis J.J., & Grandin H.T. (2003). A module for teaching fundamentals of finite-element theory and practice using elementary mechanics of materials. *ASEE Annual Conference Proceedings*, Session 3268.

Kattan, P.I. (2007). *MATLAB Guide to finite elements, an interactive approach*. Springer, Berlin, 2nd ed.

Kosashi, P.B. (2010). Learning finite element methods by building applications. *International Journal of Mechanical Engineering Education*, 38 (2), 167-184.

Kwon, Y. W., & Bang H. (1996). *Finite element method using MATLAB*. CRC Press, Boca Raton, FL.

Lissenden, C.J., Wagle, G.S., & Salamon, N.J. (2002). Applications of finite element analysis for undergraduates. *ASEE Annual Conference Proceedings*, Session 3568.

Logue, L.J., & Hall, K.A. (2001). Introducing finite element analysis in an MET strength of materials course. *ASEE Annual Conference Proceedings*, Session 3248.

Martínez-Pañeda, E., & Betegón, C., (2015). Modeling damage and fracture within strain- gradient plasticity. *International Journal of Solids and Structures,* 59, 208-215.

Martínez-Pañeda, E., & Gallego, R., (2015). Numerical analysis of quasi-static fracture in functionally graded materials. *International Journal of Mechanics and Materials in Design,* 11, 405-424.

Martínez-Pañeda, E., & Niordson, C., (2015). On fracture in finite strain gradient plasticity. *International Journal of Plasticity,* (in press)

Oñate, E. (1995). *Cálculo de estructuras por el método de elementos finitos.* Centro Internacional de Métodos Numéricos en Ingeniería, UPC.

Pike, M. (2001). Introducing Finite Element Analysis in Statics*. Proceedings of the 2001 American Society for Engineering Education Annual Conference & Exposition*, Session 2268.

Rahman, T., & Valdman, J. (2013). Fast MATLAB assembly of FEM matrices in 2D and 3D: Nodal elements. *Applied Mathematics and Computation*, 219 (13), 7151-7158.

Teh, K., & Morgan, L. (2005). The application of Excel in teaching finite element analysis to final year engineering students. *Proceedings of the 2005 ASEE 4th Global Colloquium on Engineering Education*, paper 50.

Zecher, J. (2002). Teaching finite element analysis in an MET program. *ASEE Annual Conference Proceedings*, Session 3448

Emilio Martínez Pañeda es actualmente investigador visitante en la Universidad de Cambridge. Ha publicado numerosos artículos en revistas de prestigio en el ámbito de la mecánica computacional y ha impartido charlas como ponente invitado en varios congresos y universidades.
Email: mail@empaneda.com

UNIÓN
REVISTA IBEROAMERICANA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA
www.fisem.org/web/union
http://asenmacformacion.com/ojs/index.php/union/index

ISSN: 1815-0640
Número 45. Marzo 2016
Página 269-284

Investigando la construcción de polígonos regulares mediante doblado de papel.

Alberto Arnal-Bailera

Fecha de recepción: 15/02/2015
Fecha de aceptación: 04/03/2016

Resumen	Consideramos de vital importancia reforzar la enseñanza de la Geometría a través de la manipulación de papel. Presentamos para ello un método aproximado de construcción de polígonos regulares mediante doblado de papel y unas actividades para promover alrededor de la construcción la reflexión matemática. **Palabras clave**: Geometría, Construcciones, Doblado de papel, Secundaria, GeoGebra.
Abstract	We do consider vitally important the manipulation of paper to strengthen the teaching of geometry. We introduce an approximate method for building regular polygons by bending paper. Also, we propose some activities to promote the mathematical thinking around the constructions. **Keywords**: Geometry, Constructions, Paper folding, Secondary, GeoGebra.
Resumo	Consideramos a manipulação de papel vital para reforçar o ensino da geometria. Apresentamos um método para a construção de polígonos regulares por dobradura de papel. As atividades apresentadas visam promover o pensamento matemático sobre o processo da construção. **Palavras-chave:** Geometria, construções, dobradura de papel, secundária, GeoGebra.

1. Introducción

Aunque en estos momentos en España estamos –de nuevo– inmersos en un proceso de reformas educativas en todas las etapas preuniversitarias, podemos afirmar que, en lo formal, los currículos de matemáticas en secundaria optan por la utilización de materiales en Geometría y la promoción de actividades de investigación o resolución de problemas. El Real Decreto 1105/2014, de 26 de diciembre, por el que se establece el próximo currículo básico de las matemáticas en la etapa de secundaria afirma que los procesos de investigación integran todas las competencias deseables en un alumno: "La resolución de problemas y los proyectos de investigación constituyen los ejes fundamentales en el proceso de enseñanza y aprendizaje de las Matemáticas…" Este decreto está a día de hoy por desarrollar por la Comunidad Autónoma de Aragón, donde lo que rige todavía es la Orden de 9 de mayo de 2007, en el que podemos encontrar ya consideraciones didácticas similares: "Puesto que las dificultades en el aprendizaje de las matemáticas no se superan con la práctica reiterada de rutinas, también conviene proponer a todo el alumnado actividades que exijan creatividad, que resulten motivadoras y que supongan un desafío, y no reservarlas únicamente para los estudiantes más capaces, (…) facilitar, mediante el uso de materiales educativos, la construcción de los conceptos matemáticos…”

Así pues, en el currículo se sugiere tanto la utilización de actividades de tipo investigación como el uso de materiales. No obstante, recae en los profesores la creación de materiales realmente interesantes para el alumnado y que superen las actividades muchas veces repetitivas y poco motivadoras de los manuales escolares.

La utilización de materiales diversos en la enseñanza de las matemáticas favorece una mejor comprensión de los conceptos estudiados, al observar estos desde diversos puntos de vista. La Geometría se presta de un modo especial a la experimentación con material. Cuando éste es adecuadamente elegido, se puede desarrollar un proceso rico de enseñanza-aprendizaje superando enfoques excesivamente formales o algebraicos, (Alsina, Burgues y Fortuny, 1988). Particularmente, el doblado de papel permite estudiar muchos de los conceptos matemáticos básicos e investigar sobre ellos (Baena, 1991; Caboblanco, 2010; Oller, 2007). El doblado de papel contribuye de modo positivo a la aprehensión de conceptos geométricos, siendo además bien aceptado por los alumnos como una alternativa motivadora a una instrucción al modo clásico (Boakes, 2009)

Aunque para el profesorado puede ser también interesante hacer un recorrido por la literatura que explora las construcciones geométricas planas con papel y tijeras desde un punto de vista lúdico (Alegría, 2006), nuestro interés en este artículo será curricular, por tanto, prestaremos atención a la interpretación matemática de cada una de las acciones que realicemos, bien doblando papel, bien cortando con las tijeras (Demaine y O’Rourke, 2007; Royo, 2002).

El objetivo de este artículo es mostrar un proceso de construcción análogo para todos los polígonos regulares a partir del concepto de ángulo central, conocido el radio de la circunferencia circunscrita. El hecho de que sea un proceso homogéneo tiene como propósito facilitar su utilización en el aula, ya que la explicación de una construcción será válida para el resto.

Dividiremos el artículo en tres partes:

La primera de ellas será relativa a los polígonos construibles de modo exacto con este proceso, son aquellos en los que podemos construir el ángulo central a través de disecciones y trisecciones sucesivas del ángulo completo (ver Tabla 2).

En la segunda parte nos dedicaremos a la construcción aproximada del resto, presentaremos un proceso de construcción aproximada del ángulo central, aproximando con un error relativo menor del 1% que quedará oculto por las limitaciones manuales del propio proceso de doblado del papel.

En la tercera parte expondremos cuál puede ser el aprovechamiento didáctico de estas construcciones y cómo integrarlo en las asignaturas de matemáticas de 4º de ESO.

Asumimos que, en algunos casos, el origami -arte de realizar figuras doblando papel- propone soluciones más elegantes o espectaculares, pero nuestro objetivo es hacer lo más sencillo posible el proceso de construcción y centrarnos en hacer visibles las propiedades matemáticas empleadas, de modo que puedan ser más fácilmente analizadas por los alumnos.Desarrollaremos esta construcción de un modo ordenado y justificado matemáticamente, de manera que se favorezca una actividad manual aprovechable didácticamente en un contexto de aula de matemáticas de segundo ciclo de secundaria.

2. Construcciones exactas

Caracterizar los polígonos regulares construibles con un determinado instrumento nos da idea de la potencia del mismo (Demaine y O'Rourke, 2007). Por ejemplo, sabemos que con regla y compás podemos construir un polígono regular de n lados cuando n es de la forma $2^r p_1 \ldots p_k$donde los p_i son primos de Fermat distintos (números primos de la forma 2^n+1). El origami tiene una caracterización similar: con origami se puede construir un polígono regular de n lados, cuando n es de la forma $2^r 3^s p_1 \ldots p_k$siendo los p_i primos distintos de la forma $2^n 3^m+1$. Estos son precisamente los polígonos regulares construibles con regla, compás y un instrumento que permitiera trisecar un ángulo.

Con las técnicas clásicas de origami se pueden construir muchos más polígonos regulares que con regla y compás únicamente, pero no todos. Listamos a continuación los polígonos regulares de menos de 30 lados no construibles con ambos instrumentos:

Regla y compás: 7, 9, 11, 13, 14, 18, 19, 21, 22, 23, 25, 26, 27, 28, 29.

Origami: 11, 22, 23, 25, 29.

Con las técnicas que presentaremos a continuación podremos construir de manera exacta los polígonos regulares de n lados cuando n es de la forma $2^{r+1}3^s$ con r y s mayores o iguales que 0, conocido el radio de la circunferencia circunscrita. Asumimos, por tanto, que la técnica es más limitada que el origami, por ello complementaremos, para los demás polígonos regulares, las técnicas de construcción exacta con técnicas de construcción aproximada. El proceso que vamos a utilizar implica en ambos casos encontrar primero el ángulo central y a partir de él construir el polígono regular.

Refiriéndonos a los ángulos, el doblado de papel permite la bisección y la trisección de un ángulo. Si queremos construir el ángulo central de un polígono de $2^r 3^s$ lados debemos, partiendo del ángulo llano, realizar r bisecciones del ángulo llano y s trisecciones del mismo, cada una de estas acciones divide el ángulo de 180 grados entre 2 o entre 3, con lo que obtendremos el ángulo de $360/2^r 3^s$ grados (Ver Tabla 1). Reiterando el trabajo de bisección o trisección de los ángulos que obtenemos a partir del llano podemos construir de manera exacta, entre otros un cuadrado, un hexágono o un octógono (ver Tabla 2) conocido el radio de la circunferencia circunscrita. No podemos construir de manera exacta, por ejemplo, el pentágono o el heptágono, por ejemplo.

Pasamos ahora a explicar las técnicas implicadas en el proceso de construcción exacta: Disección y Trisección, de cada una de ellas pondremos un ejemplo adecuado:

2.1. Bisección de un ángulo llano, construyendo un cuadrado.

En general, para dividir un ángulo en dos iguales basta con poner el dedo sobre el vértice y llevar una de las semirrectas que lo delimitan sobre la otra.

Comenzaremos todas las construcciones a partir de una hoja tamaño dinA4, por ser el papel más accesible a nivel escolar. En general utilizaremos papel en blanco para las construcciones exactas, y papel cuadriculado para las construcciones aproximadas.

Como ya hemos dicho, el propósito de cada construcción es la obtención de un polígono regular de un número dado de lados, conocido el radio de la circunferencia circunscrita.Consideraremos construcciones exactas las de los polígonos regulares cuyo ángulo central es resultado de sucesivas divisiones entre dos o entre tres del llano. Por ejemplo, podemos construir de modo exacto el cuadrado, ya que su ángulo central es de 90º y lo obtenemos dividendo en dos el ángulo llano, el proceso sería:

1. Tomo la hoja (usualmente de tamaño din A4) y la doblo en dos partes iguales. El doblez marca un ángulo de 180º.
2. Llevo la mitad de ese doblez sobre la otra mitad haciendo coincidir los extremos del papel, ahora el doblez marca un ángulo de 90º.
3. Marcar el radio de la circunferencia circunscrita en los extremos de la construcción, al doblar por estas marcas, que resultará un triángulo rectángulo e isósceles. Para ver más claramente el producto, podemos recortar en lugar de doblar. Al desplegar obtengo el cuadrado. Ver Figura 1.

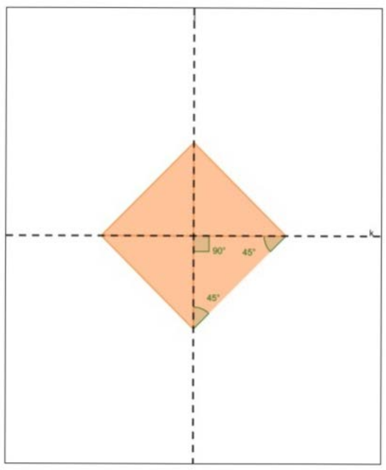


Figura 1. Cuadrado construido mediante doblado en tres pasos.

2.2. Trisección de un ángulo llano, construyendo un hexágono.

Para construir los ángulos centrales de $360/2^r3^s$ grados con s>0, necesitaremos trisecar un ángulo. Para ello debemos poner un dedo sobre el vértice y arrastrar simultáneamente hacia el interior del ángulo las dos semirrectas que lo delimitan(ver Figura 2). De modo que terminemos superponiendo tres superficies en forma de ángulo. Por ejemplo, para construir el hexágono conocido el radio de la circunferencia circunscrita, debemos obtener el ángulo central, $360/2^1 3^1$=60º como la tercera parte del ángulo llano. Explicamos a continuación cómo construir dicho ángulo paso a paso:

1. Utilizaremos una hoja inicialmente sin doblar (ver paso 1º de la figura 2).
2. La doblamos en dos partes iguales (ver paso 1º de la figura 2). Nótese que el doblez marca un ángulo de 180º.
3. Giramos la hoja y marcamos suavemente un doblez perpendicular al obtenido en 1, que divida en dos la hoja doblada, podemos para más claridad dibujar una fina línea de puntos sobre este doblez. Llamamos A al punto superior de este doblez(ver línea de puntos en el paso 3º de la figura 2).
4. Ponemos un dedo en A y arrastramos el extremo derecho del papel hacia la izquierda (ver paso 4º de la figura 2).
5. Con la mano con la que presionábamos el punto A, arrastramos el extremo izquierdo del papel hacia la derecha (ver paso 5º de la figura 2).
6. En un momento dado, uno de los dobleces pasará por encima del otro, tratamos de ajustar todas las capas de papel para que sean iguales entre sí. El doblez suave nos ayudará a comprobar la simetría de los últimos dobleces. Obtenemos así la trisección del ángulo llano (ver paso 6º de la figura 2).

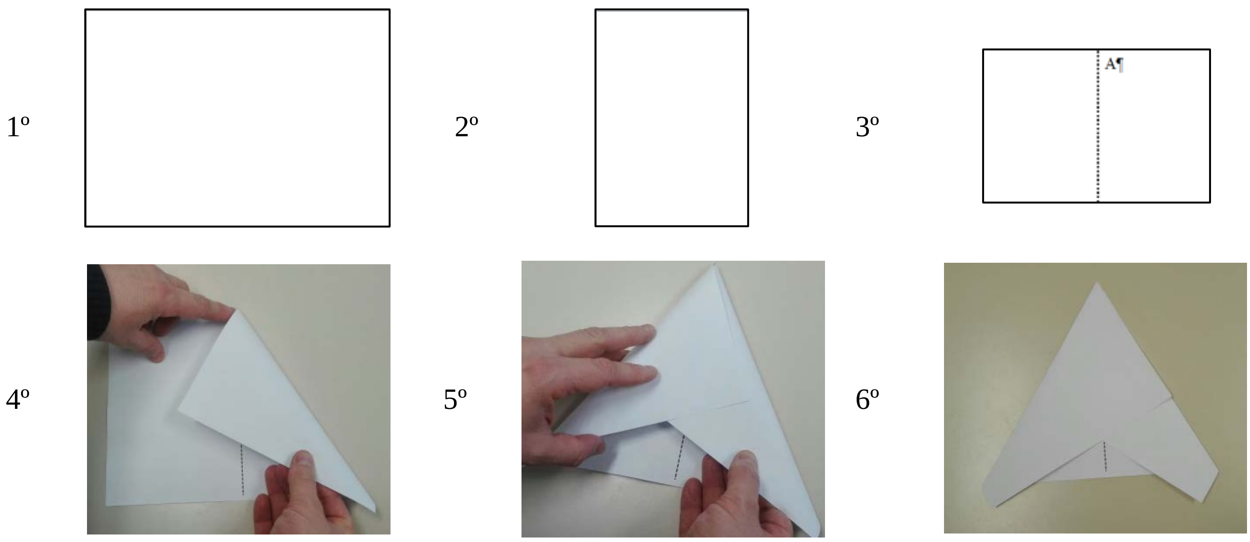


Figura 2. Pasos para el trisecado de un ángulo llano.

Nótese que lo que acabamos de explicar es igualmente aplicable a la trisección de cualquier ángulo. Solo tenemos que hacer la salvedad de que para trisecar el ángulo completo necesitaríamos modificar la técnica dando primero un corte con las tijeras hasta el centro de la hoja de manera que tengamos así dos “lados” del ángulo para poder doblarlos sobre si mismos aplicando los pasos 2 y siguientes.

Consideremos nuevamente el ángulo llano, cada vez que hacemos un doblez, la amplitud de éste queda dividida entre dos o entre tres y el número de lados del polígono regular construido a partir de ese nuevo ángulo central se multiplica por dos o por tres, respectivamente (ver Tabla 2). El máximo número de dobleces que pueden dar un resultado razonable al construirlo físicamente con papel es 3 ó 4, según cuáles sean estos dobleces. Por ejemplo, la construcción con cuatro dobleces que lleva al hexadecágono es realizable, con un resultado razonable, pero el resto al involucrar trisecciones de ángulos no son factibles. Presentamos dos esquemas, ver Tabla 2, analizando los ángulos centrales y los lados construibles con hasta 5 procesos (bisecado o trisecado) a partir del ángulo completo.

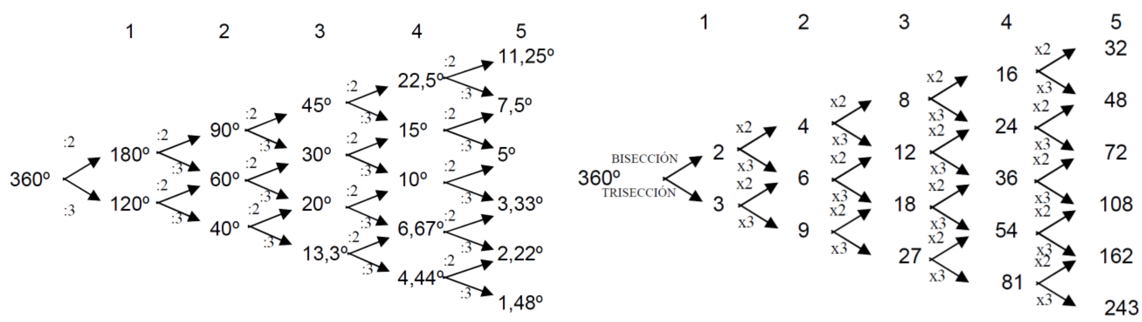


Tabla 1. Ángulo central y número de lados de los polígonos construibles con 5 procesos.

Vemos en la Tabla 2 algunos de los ángulos centrales y polígonos regulares construibles de modo sencillo y exacto a través del bisecado o trisecado del ángulo llano.

Lados	Polígono	Ángulo central	Procesos
3	Triángulo	120º	1
4	Cuadrado	90º	2
6	Hexágono	60º	2
8	Octógono	45º	3
9	Eneágono	40º	2
12	Dodecágono	30º	3
16	Hexadecágono	22,50º	4

Tabla 2. Ángulos centrales y número de procesos de bisecado o trisecado necesarios para construir algunos polígonos regulares.

Para terminar la construcción del polígono que se trate, en este caso un hexágono, necesita un paso más:

7. Dado que un polígono regular de n lados puede verse como un conjunto de n triángulos isósceles, podemos construir el hexágono como 6 triángulos isósceles. Así pues, a partir de la construcción realizada en el

paso 6º, si recortamos un triángulo isósceles con vértice en A y dado que el ángulo en A es de 60º este triángulo será equilátero, base de la construcción del hexágono.Notar que cuando se recorta tenemos varias capas de papel que corresponden cada una con uno de los triángulos isósceles que forman el hexágono, como se podrá ver al desplegarlo (Ver Figura 3).

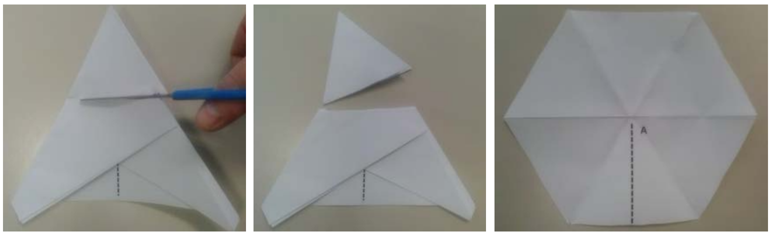


Figura 3. Hexágono dividido en triángulos isósceles.

Tras estas dos construcciones, sería interesante plantearnos qué ocurriría si al hacer el último doblez o recorte no construyéramos un triángulo isósceles, estos serían los resultados con diversos cortes que produjeran, como podemos ver en la figura 4:

1. Un triángulo obtusángulo, produce un hexágono estrellado, cóncavo.
2. Un triángulo acutángulo, produce un hexágono convexo.
3. Un triángulo rectángulo, produce un triángulo equilátero al coincidir dos ángulos rectos consecutivos

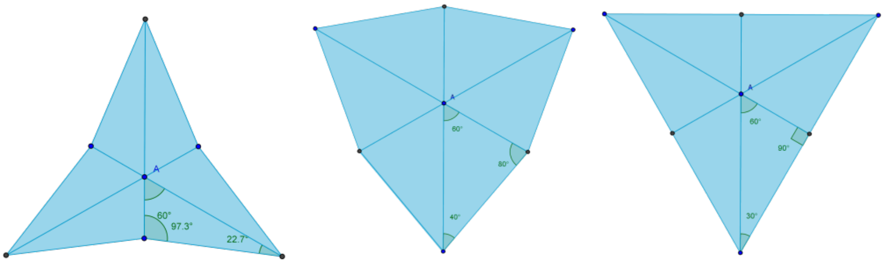


Figura 4. Distintos hexágonos según el corte realizado sobre los pliegues.

Haciendo un análisis similar con los posibles cortes en el cuadrado únicamente obtenemos la posibilidad del rombo cuando el triángulo de corte no es isósceles. Dado que uno de los ángulos es de 90º no podemos obtener ningún triángulo obtusángulo y no encontramos polígonos regulares cóncavos.

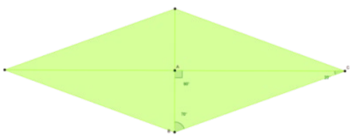


Figura 5. Distintos rombos aparecen según el corte realizado sobre los pliegues.

3. Construcciones aproximadas

3.1. Construyendo polígonos de modo aproximado. Cálculo del error.

Para los casos en los que no es posible realizar una construcción de manera exacta, vamos a exponer un proceso de construcción aproximada, basado en la construcción de un ángulo lo más cercano posible al central del polígono que se trate.

Primero, vamos a construir un triángulo rectángulo con un vértice no recto A situado en el centro de la hoja (cuadriculada) en la que vamos a realizar la construcción. El ángulo en A será la aproximación del ángulo central del polígono que queramos construir. El procedimiento para construir ese ángulo aproximado es buscar una fracción a/b que aproxime la tangente del ángulo de manera que el error sea mínimo. Así, el cateto opuesto a <A tendrá una longitud de a cuadraditos y el cateto adyacente a <A tendrá una longitud de b cuadraditos. Estaremos pues, aproximando la tangente del ángulo exacto por a/b y cometiendo un cierto error, si este error es suficientemente pequeño quedará enmascarado en el proceso de construcción. Damos a continuación una explicación más detallada:

Nos vamos a ayudar de los cuadraditos de la hoja, tomando como unidad el lado de ese cuadradito, para asegurarnos que el ángulo A tiene como tangente la aproximación el número buscado. Dado que el espacio en la hoja cuadriculada es limitado no podemos representar cualquier fracción, ya que no podemos dibujar cualquier triángulo rectángulo. Por debajo del vértice A tendremos unos 30 cuadraditos y a los lados, unos 20, por tanto el cateto adyacente tendrá como máximo esos 30 cuadraditos y el cateto opuesto tendrá como máximo, 20 cuadraditos. Consideramos las fracciones con numeradores y denominadores entre 1 y 20 y entre 1 y 30 respectivamente, siendo estos cocientes las tangentes de los ángulos construibles en ese espacio de la hoja, analizando todas las posibilidades seleccionamos aquellas que dan un menor error relativo. Véase la tabla 3 con las fracciones seleccionadas para cada caso.

Por ejemplo, para construir el pentágono, necesitaríamos un ángulo central de 360º:5=72º, lo que no podemos obtener mediante bisecado o trisecado del ángulo completo, en su lugar construiremos un triángulo rectángulo con el cateto opuesto al ángulo A con una longitud de 12 cuadrados y el cateto contiguo una longitud de 4 cuadrados. De este modo la tangente de <A será 12:4=3. Aplicando la inversa de la tangente: Arctan(3) = 71,565º es el ángulo efectivamente construido (ver Figura 6).

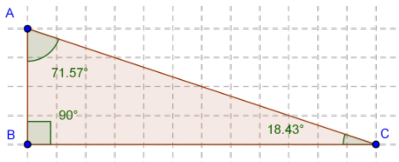


Figura 6. Triángulo rectángulo para aproximar el ángulo central delpentágono (71,565º).

El error cometido ha sido de 0,435º, como posteriormente construiremos por doblado otros 8 ángulos iguales a éste, el error absoluto total cometido será de 2,175º. El error relativo es del 0,6%. Estos errores son perfectamente asumibles en un contexto escolar, además la precisión de la herramienta hace que errores así no sean apreciables. En la tabla 2 se pueden ver estos cálculos aplicados al resto de ángulos.

Lados	Ángulo central	Tangente	Aproximación por una fracción	Ángulo construido	Error absoluto por triángulo	Error total absoluto	Error relativo
5	72º	3,0776835	3/1=12/4= 3	71,565º	0,435º	2,175º	0,604%
7	51,429º	1,2539603	5/4=10/8=1,25	51,340º	0,088º	0,619º	0,172%
10	36º	0,7265425	8/11=0,7272727	36,027º	0,027º	0,274º	0,076%
11	32,727º	0,6426610	9/14=0,6428571	32,735º	0,008º	0,087º	0,024%
13	27,692º	0,5248405	11/21=0,5263158	27,646º	0,046º	0,602º	0,167%
14	25,714º	0,4815746	13/27=0,4814815	25,710º	0,004º	0,061º	0,017%
15	24º	0,4452287	4/9=8/18=0,4444444	23,962º	0,038º	0,563º	0,156%

Tabla 2. Datos exactos y aproximados para la construcción de polígonos regulares.

3.2. Construcción de un pentágono regular de modo aproximado.

Veamos cómo construir efectivamente un pentágono de modo aproximado a partir del ángulo central, conocido el radio de la circunferencia circunscrita y con un error inferior al 1%:

El primer paso esdibujar el triángulo rectángulo explicado en el apartado anterior(ver Figura 6) haciendo coincidir su vértice con el centro de la hoja extendida. (Ver Figura 7).

El primer pliegue es sobre el cateto adyacente al ángulo <A del triángulo rectángulo construido en el paso anterior y dobla la hoja en dos partes iguales si se ha colocado A (vértice A del triángulo, centro del polígono regular) en el centro de la misma. Haremos el pliegue por el cateto hasta los bordes de la hoja, doblando hacia atrás, manteniendo a la vista el ángulo central aproximado construido. (Ver Figura 7).

El segundo pliegue es sobre la hipotenusa del triángulo rectángulo. Lo realizamos colocando dos dedos sobre el vértice A y pasando otros dos por la hipotenusa hasta el borde de la hoja. Haremos este segundo pliegue hacia atrás, manteniendo a la vista el ángulo central aproximado construido. En este momento tenemos dos ángulos centrales aproximados superpuestos.

El tercer pliegue es sobre el cateto adyacente a <A, colocando dos dedos sobre el vértice A y pasando otros dos por el cateto hasta el borde de la hoja. Haremos este tercer pliegue hacia atrás, de manera que vamos creando una suerte de fuelle.

En este momento tenemos cuatro ángulos centrales aproximados superpuestos y dos dobleces en la parte de atrás que determinan cada uno de ellos medio ángulo central aproximadamente.

Para terminar la construcción del pentágono cortamos formando un triángulo isósceles que tendrá como ángulo desigual el <A y desplegamos la construcción. (Ver Figura 7).

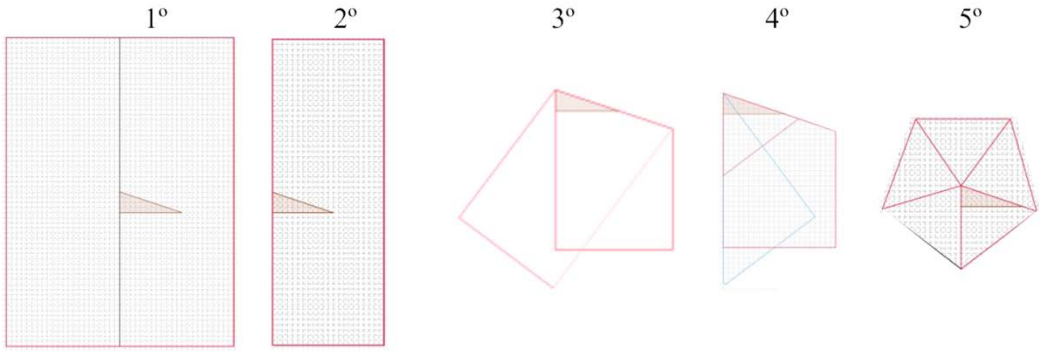


Figura 7. Construcción aproximada del pentágono regular

En los casos de polígonos con un número mayor de lados, tendremos que hacer más pliegues, pero serán del mismo tipo. Repetiremos los pasos iniciales, dibujar el ángulo central y los dobleces iniciales sobre cateto adyacente e hipotenusa. A continuación, doblando alternativamente sobre el cateto adyacente y sobre la hipotenusa, obtenemos una suerte de fuelle en el que vamos añadiendo los ángulos centrales aproximados de dos en dos.

Si el número de lados, n, es par, el fuelle queda completo definiendo n ángulos centrales aproximados, pero si es impar, tras varios pliegues, quedarán definidos n-1 ángulos centrales aproximados y otros dos ángulos que aproximan la mitad del ángulo central. Tras realizar el plegado, cortamos el fuelle, de modo que en cada capa de papel formamos un triángulo isósceles con el ángulo desigual en <A marcando para ello dos veces el radio de la circunferencia circunscrita. De este modo obtenemos n triángulos isósceles que al desplegar la hoja forman el polígono regular de n lados.

Hacemos notar que podríamos tratar de reducir el error en algunas de estas construcciones, podríamos construir el polígono de k lados a partir del de 2k lados o viceversa. Por ejemplo, entre el polígono de 5 lados –error total de 2,175º– y el de 10 lados –error total de 0,274º– podríamos refinar la construcción del pentágono mediante la unión de los vértices alternos del decágono. No exploraremos esta posibilidad en este artículo, ya que la reducción del error podría quedar enmascarada por el mayor número de pliegues necesarios.

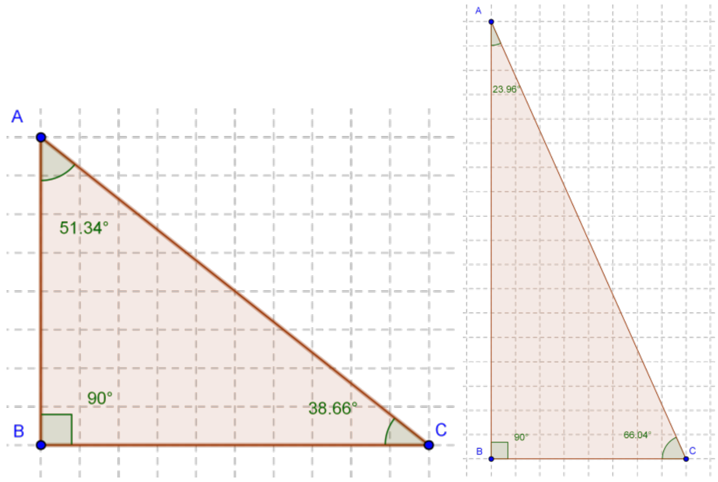


Figura 8. Triángulos rectángulos construidos para aproximar los ángulos centrales de heptágono (51,34º) y pentadecágono (23,96º).

3.3. Comparación con el método escolar habitual.

Una vez construidos los polígonos regulares con el método aproximado, podríamos preguntarnos si realmente hemos ganado respecto al método gráfico que se muestra en muchos manuales escolares. Nos referimos al método en el que se divide el diámetro de la circunferencia circunscrita en tantas partes como lados tendrá el polígono y se traza una semirrecta desde un punto exterior. En la figura 8 podemos ver la construcción de un eneágono realizada mediante este método escolar con ayuda del software de geometría dinámica GeoGebra. Hemos realizado una ampliación para resaltar que dicha construcción es aproximada (ver Figura 9, debajo). Este hecho no se hace notar a los alumnos, lo que es una opción didáctica tradicional que oculta las limitaciones del instrumento "regla y compás" anteriormente expuestas y no favorece la discusión sobre la conveniencia de hacer construcciones aproximadas si esa aproximación es suficientemente buena.

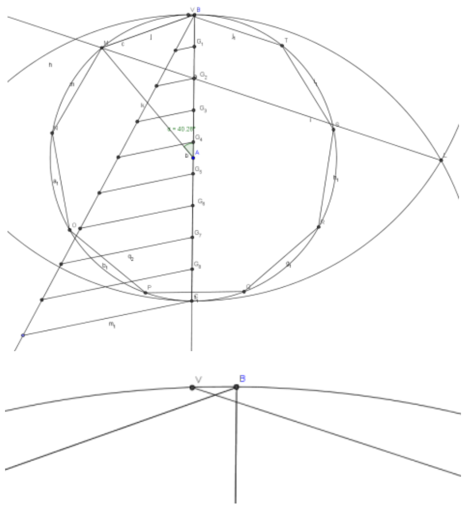


Figura 9. Construcción aproximada del eneágono regular mediante el método escolar.

Mostramos a continuación (ver Tabla 3) los errores absolutos y relativos cometidos al construir diversos polígonos regulares con el método escolar habitual.

Lados	Ángulo central exacto	Ángulo construido escolar	Error absolutopor triángulo	Error total absoluto	Error relativo
5	72º	71,95º	0,05º	0,25º	0,069%
7	51,429º	51,52º	0,091º	0,637º	0,177%
10	36º	36,36º	0,36º	3,6º	1%
11	32,727º	33,15º	0,423º	4,653º	1,293%
13	27,692º	28,21º	0,518º	6,734º	1,871%
14	25,714º	26,26º	0,546º	7,644º	2,123%
15	24º	24,58º	0,58º	8,7º	2,417%

Tabla 3. Errores en la construcción de polígonos regulares – método escolar.

Comparamos en la Tabla 4 los errores absolutos cometidos por el método propuesto aquí –calculados con GeoGebra– y el método escolar habitual que dan idea del desvío entre la construcción exacta y la obtenida con ambos métodos.

Lados	Error total absoluto método propuesto	Error total absoluto escolar
5	2,175º	0,25º
7	0,619º	0,637º
10	0,274º	3,6º
11	0,087º	4,653º
13	0,602º	6,734º
14	0,061º	7,644º
15	0,563º	8,7º

Tabla 4. Comparación de errores entre ambos métodos de construcción de polígonos.

Podemos observar que el método propuesto es más exacto dado que mantiene el error absoluto por debajo de 1º a partir del polígono de 7 lados, mientras que el método escolar es más inexacto cuantos más lados tiene el polígono a construir.

3. Aprovechamiento didáctico en el aula

Consideramos que en alumnos de ESO y particularmente en el último curso, donde ya hay conocimientos básicos de trigonometría, sería posible y conveniente un estudio detallado de estas construcciones aproximadas. Este trabajo permitiría poner en práctica una aplicación tanto de las aproximaciones como de las herramientas básicas de trigonometría. En cursos inferiores no podríamos justificar la procedencia del grado de aproximación de las construcciones, aunque podrían medir los ángulos efectivamente construidos y compararlos con las medidas de los ángulos centrales de los polígonos regulares. Tanto en un caso como en otro habría que hacer referencia a las diferencias entre las matemáticas "formales" que permiten considerar ángulos de 71.57º, por ejemplo, y las limitaciones que impone el doblado de papel con errores dependiendo del tipo de papel utilizado y de las habilidades manuales de cada uno por ejemplo.

Pasamos a describir la actividad propuesta y los objetivos que pretendemos conseguir con ella:

Título: "Construcción de polígonos regulares doblando papel – cálculo de los errores cometidos".

Objetivos:

-Construir polígonos regulares doblando papel y GeoGebra.

-Calcular los errores absolutos y relativos cometidos.

-Reflexionar sobre la diferencia de precisión según el instrumento empleado.

-Reflexionar sobre la potencia de los cálculos matemáticos para determinar el error de una construcción por encima de un análisis visual.

Conocimientos previos:

-Elementos básicos de un polígono regular.

-Trigonometría elemental: Funciones trigonométricas básicas y sus inversas.

-Conceptos de error absoluto y relativo.

-Manejo básico de GeoGebra: Construcción de polígonos regulares y menú circunferencia, construcción del centro de una circunferencia dados varios puntos de la misma.

Actividades:

1-Construir pentágonos, heptágonos, decágonos y endecágonos con GeoGebra, medir sus ángulos centrales con el programa.

2-Imprimir los polígonos creados con GeoGebra y medir sus ángulos centrales con transportador.

3-Construir pentágonos y heptágonos doblando y cortando papel y medir sus ángulos centrales con transportador. (Se les proporciona el triángulo central aproximado según las figuras 6 y 7)

4-Construir una tabla con los resultados anteriores.

5-Comentar los resultados obtenidos en la tabla. (Todavía sin completar las filas correspondientes a decágono y endecágono)

Es de esperar que la tabla tenga una columna casi idéntica para todos los alumnos en la columna que refleje los datos obtenidos a partir de GeoGebra, y diferencias mayores o menores en las otras dos columnas. Esto puede dar lugar a un debate sobre la exactitud de unos métodos y otros cuando se construyen polígonos regulares.

6-Una vez institucionalizados como exactos los valores obtenidos con GeoGebra, ampliar la tabla con los errores absolutos y relativos cometidos al medir ángulos en una construcción exacta en papel y al medir ángulos en una construcción aproximada.

Es de esperar que el mero hecho de medir con el transportador de lugar a imprecisiones y diferencias entre unos alumnos y otros, lo que debe ser objeto también de debate.

7-Justificación del proceso aproximado propuesto. Se proponen varias cuestiones a discutir:

¿Por qué a partir del triángulo central dibujado en la hoja podemos construir el polígono regular?, ¿esta construcción es aproximada?, ¿porque estamos doblando papel y cometemos inexactitudes?, ¿porque los propios triángulos son algo inexactos?

Dado que se les ha dado los triángulos que generan los polígonos regulares y conocen trigonometría pueden aplicar la función inversa de la tangente –por ejemplo– y deducir el ángulo que efectivamente han utilizado en la actividad 3. En este momento, si no lo han deducido se debe explicar el proceso de elección del triángulo que ayuda a aproximar el ángulo central.

8-Investigación: Proponer distintos triángulos o distintos procesos que sirvan para construir decágonos y endecágonos. Medir el error cometido.

Aun siendo una actividad abierta, se espera que construyan diversos triángulos rectángulos, como los mostrados en la actividad 3, sobre las hojas cuadriculadas tratando de que el cociente entre los lados opuesto y adyacente aproxime la tangente del ángulo central que se trate. Por ejemplo, las parejas siguientes de lados opuesto y adyacente aproximan bien la tangente de 36º (0,726542).

Cateto opuesto: 7 unidades. Cateto adyacente: 10 unidades. 7/10=0,7.

Cateto opuesto: 8 unidades. Cateto adyacente: 11 unidades. 8/11=0,727273.

Esta última es la mejor aproximación construible de la tangente de 36º en la hoja de papel cuadriculado descrita anteriormente. En este caso también es posible que algunos alumnos argumenten que el ángulo central es la mitad que en el caso del pentágono y por tanto ya lo conocemos.

Proponemos la realización de un trabajo conjunto GeoGebra-lápiz/papel, que ya se ha mostrado de gran utilidad, al promover distintos puntos de vista y distintas formas de reflexión de los alumnos (Iranzo y Fortuny, 2009).Se propone que la parte final del trabajo sea un "problema" para los alumnos, en el sentido de que deban buscar una estrategia propia de resolución.

4. Conclusiones

En este artículo hemos propuesto un método parcialmente generalizable para la construcción mediante plegado de papel de polígonos regulares sujeto únicamente a las limitaciones físicas del papel. Este proceso parte de los conceptos de ángulo central y de la construcción exacta o aproximada de estos ángulos. Además hemos comparado este método con el habitualmente mostrado en los manuales escolares.

En las actividades pretendemos aunar la construcción manipulativa de polígonos regulares junto con la construcción con GeoGebra de los mismos y la valoración de las aproximaciones obtenidas comparándolas con el resultado exacto obtenido con el ordenador. Además proponemos una pequeña actividad de investigación que permita una reflexión en mayor profundidad sobre lo realizado.

Consideramos de interés didáctico optar por hacer explícito el hecho de que, en ocasiones, las soluciones matemáticas pueden o deben ser aproximadas. Además consideramos que el conjugar en una misma actividad varios instrumentos (doblado de papel, regla y compás y GeoGebra) enriquece la discusión matemática en clase.

De este modo queremos hacer ver la terna que debe convivir en la enseñanza actual de las Matemáticas: Una parte manipulativa que permita acercarse al problema, un apoyo informático que facilite las tareas y ayude a superar las limitaciones de las técnicas manipulativas y unas técnicas formales que ayuden a demostrar o discutir los hechos matemáticos que sea necesario en cada caso.

Bibliografía

Alegría, P. (2006). *Geometría recortable. Sigma*, 28, 95-115.
Alsina, A., Burgués, C. y Fortuny, J.M. (1988). *Construir la Geometría*. Síntesis, Barcelona. España.
Baena, J. (1991). *Papiroflexia: Actividades para investigar en clase de matemáticas. Suma*, 9, 64-66.
Boakes, N. J. (2009). *Origami Instruction in the Middle School Mathematics Classroom: Its Impact on Spatial Visualization and Geometry Knowledge of Students. RMLE Online: Research in MiddleLevelEducation*, *32*(7), 1-12.

Caboblanco, J. (2010). *Papiroflexia y matemáticas en educación primaria. Uno: Revista de Didáctica de las Matemáticas*, 17(53), 38-44.

Demaine, E.D. y O'Rourke, J. (2007*) Geometric Folding Algorithms: Linkages, Origami, Polyhedra.* Cambridge University Press, New York.EEUU.

Iranzo, N. y Fortuny, J.M. (2009).*La influencia conjunta del uso de GeoGebra y lápiz y papel en la adquisición de competencias del alumnado. Enseñanza de las Ciencias*, 27(3), 433-446.

Oller, A. M. (2008). *De rectángulos y hexágonos. Una actividad para aproximarse a la investigación en matemáticas. UNIÓN [en línea],* recuperado el 15 de febrero de 2015 de http://www.fisem.org/www/union/revista13.php

Royo, J. I. (2002). *Matemáticas y papiroflexia. Sigma*, 21, 175-192.

Agradecimientos

Este trabajo ha sido desarrollado por el grupo de investigación "S119-Investigación en Educación Matemática" financiado por el Gobierno de Aragón y el Fondo Social Europeo. También fue parcialmente financiado por el Ministerio de Economía y Competitividad de España (Proyecto EDU2015-65378-P).

Alberto Arnal-Bailera: Profesor de Didáctica de las Matemáticas en la Universidad de Zaragoza (desde 2009). Profesor de Matemáticas en Enseñanza Secundaria (1996-2012). Doctor en Didáctica de las Matemáticas (2013, Universidad Autónoma de Barcelona). albarnal@unizar.es

- Datos para la publicación:
  - Licenciado en Matemáticas por la Universidad de Zaragoza, España (1995).
  - Doctor en Didáctica de las Matemáticas por la Universidad Autónoma de Barcelona, España (2013).
  - Profesor de Matemáticas en Enseñanza Secundaria (1996-2012).
  - Profesor de Didáctica de las Matemáticas en la Universidad de Zaragoza desde 2009.
  - Residencia en Zaragoza, España.
  - Mis intereses de investigación giran en torno a la Didáctica de la Geometría tanto en Primaria como en Secundaria.
  - Proyectos y grupos de investigación:
    - Proyecto de investigación del Ministerio de Economía y competitividad de España: EDU2012-31464
    - GIPEAM –Grupo de Investigación en Práctica Educativa y Actividad Matemática–
    - Grupo Autonómico S119 –Investigación en Educación Matemática (financiado por el Gobierno de Aragón y el Fondo Social Europeo).

UNIÓN
REVISTA IBEROAMERICANA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA
www.fisem.org/web/union
http://asenmacformacion.com/ojs/index.php/union/index

ISSN: 1815-0640
Número 45. Marzo 2016
Página 285-293

El rincón de los problemas

Estímulo del pensamiento matemático. Una experiencia didáctica con profesores, usando un acertijo.

Uldarico Malaspina Jurado
Pontificia Universidad Católica del Perú – IREM
umalasp@pucp.edu.pe

Problema

Construir una matriz con más de 15 números naturales, de modo que si alguien selecciona en ella un número ***m****, no dice cuál es, sino solamente en qué columna(s) está ubicado, se puede identificar el número* ***m*** *sin mirar la matriz.*

Con una solución de este problema, en el contexto que explico a continuación, me propongo ilustrar aspectos importantes del pensamiento matemático, como son *analizar, conjeturar, demostrar o descartar lo conjeturado, y crear.*

Este problema surgió en un taller con profesores de primaria, como un reto nuevo ante la presentación de un conocido juego de "adivinación" que hice usando un arreglo rectangular (una matriz) de números naturales del 1 al 15 (Figura 1), en el cual cualquiera de los participantes en el taller seleccionaba un número y solo me decía en qué columnas estaba ubicado. Sin mirar el arreglo rectangular, yo "adivinaba" qué número había sido seleccionado.

D	C	B	A
8	4	2	1
9	5	3	3
10	6	6	5
11	7	7	7
12	12	10	9
13	13	11	11
14	14	14	13
15	15	15	15

Figura 1. Matriz con números naturales del 1 al 15

Naturalmente, el primer reto era descubrir "el truco" para poder "adivinar" el número seleccionado. El problema y la secuencia en clase en el taller resultó tan interesante, que dio lugar a una historieta que escribí con este tema para el Ministerio de Educación del Perú, en un proyecto que apoyaba UNICEF.

En tal historieta, una pareja de niños de primaria (Carlos y María) hacen "el truco" a su profesor (Pedro) (Figura 2.) y le piden que los ayude a construir un arreglo rectangular con más números para que sus amigos no piensen que el truco consiste simplemente en memorizarse todas las ubicaciones de los números. Partes de esa historieta ilustran este artículo.

Como se ve, el arreglo rectangular de números tiene 8 filas y 4 columnas y estas últimas están identificadas con las letras D, C, B y A, para facilitar el mensaje en el que se diga en qué columnas está el número seleccionado.

El lector queda invitado a usar la matriz de números dada en la Figura 1 y a averiguar cómo, conociendo sólo en qué columnas está ubicado un número, se puede "adivinar" – en verdad deducir – cuál es tal número. Esta es una característica importante del pensamiento matemático: *analizar*; lo cual supone observar, hacerse preguntas, buscar una estructura, examinar casos particulares, buscar relaciones lógicas, practicar el ensayo y error.

A continuación escribiré algunas observaciones, conjeturas y procedimientos que surgieron en el taller con los profesores – algunos de los cuales se plasmaron en la historieta – ante el reto inicial de descubrir el truco.

Observación: (De carácter global). Con 8 filas y 4 columnas hay 32 lugares en la matriz para ser ocupados con números naturales del 1 al 15; esto significa que necesariamente algunos números estarán en más de una columna

Observaciones de casos particulares: Les pedí que me digan en qué columnas estaban algunos números para yo "adivinar" qué número habían escogido y que prestaran mucha atención a esos casos particulares. En la Figura 2, como parte de la historieta, se ilustran dos casos particulares, pues se ve que el profesor escoge el número 5 y comunica a sus alumnos que ha escogido un número que está en las columnas C y A y María le dice inmediatamente que el número que escogió es el 5. Posteriormente escoge el 13, comunica que es un número que está en las columnas D, C y A y Carlitos le dice inmediatamente que el número que escogió es el 13.

Figura 2: María y Carlos juegan con su profesor Pedro

Preguntas a partir de los casos particulares:

- ¿Qué relación hay entre el número 5 y las columnas C y A?
- ¿Qué relación hay entre el número 13 y las columnas D, C y A?

Para responder las preguntas invité a observar con más detenimiento la matriz con los números (Figura 1), formularse nuevas preguntas y hacer alguna(s) *conjetura(s)*. En un grupo de trabajo se llegó a las siguientes *conjeturas*:

- *5 tiene que ser el único número que esté en las columnas C y A.*
- *13 tiene que ser el único número que esté en las columnas D, C y A*.

Usted, amigo lector, se da cuenta por qué se hacen estas conjeturas ¿verdad? Tómese unos segundos para verificar empíricamente las conjeturas mirando la matriz y para encontrar una razón lógica para que las conjeturas sean verdaderas.

Escoja usted un número, o más, diferente(s) de 5 y 13; formule conjetura(s) similar(es) a las anteriores y verifique que se cumplen. Por ejemplo, 11 es el único número que está en las columnas D, B y A.

Luego que los profesores verificaron que las conjeturas enunciadas se cumplen en todos los casos y en consecuencia son verdaderas, formulé la siguiente pregunta:

¿Qué afirmación general se puede inducir a partir de estas proposiciones verdaderas?

Lo invitamos, amigo lector, a hacer una pausa y escribir la afirmación general que usted considera que se puede deducir.

Posiblemente usted llegó a una proposición equivalente a la siguiente:

- *En la matriz dada, no pueden existir dos números naturales **m** y **n** entre 1 y 15 inclusive, (**m** ≠ **n**), que figuren en las mismas columnas*

Observamos que si esta proposición no fuera verdadera, sería imposible deducir qué número se eligió, conociendo solo en qué columnas está, porque, por ejemplo, si los números ***m*** y ***n*** están ambos en las columnas A, C y D, y una persona escoge ***m***, deberá decir que se encuentra en tales columnas, pero “el adivinador” tendría información de dos números y no sabría si se trata de ***m*** o de ***n***.

Entonces formulé la siguiente pregunta:

Al construir la matriz de la Figura 1, ¿con qué criterio se ha decidido en qué columna(s) debe figurar cada número?

Para obtener la respuesta, sugerí, nuevamente, analizar casos particulares y hacer algunas conjeturas.

Observaron:

- El número 1 está solamente en la columna A; el número 2 solamente en la columna B; el número 3 en las columnas A y B; ….

Un profesor afirmó:

- Todos los números impares están en la columna A

Una colega hizo una aclaración al respecto: Eso es cierto, pero los impares están también en otras columnas; o sea que no están solamente en la columna A

Un grupo hizo la siguiente *conjetura*:

- Cuanto mayor es el número, en mayor número de columnas está.

¿Esta conjetura es verdadera o falsa? Verificaron que, por ejemplo, 5 es mayor que 4, y 5 está en dos columnas mientras 4 solo en una; 7 es mayor que 5 y figura en tres columnas, mientras que 5 solo figura en dos; sin embargo 8 es mayor que 7 y figura solo en una columna. Esto último es un *contraejemplo* para la conjetura, y en consecuencia **no** es verdadera y la descartamos.

Otro grupo hizo la siguiente *observación*:

- Los únicos números que figuran en una sola columna son el 1, el 2, el 4 y el 8.

Esta observación fue complementada con la siguiente:

- Los números 1, 2, 4 y 8 están solamente en las columnas A, B, C y D respectivamente y encabezan estas columnas:

D	**C**	**B**	**A**
8	4	2	1

Entonces, sugerí examinar qué pasa con los números que están en dos columnas.

Escribieron todos los casos:

El 3 en la B y la A;

El 5 en la C y la A;

El 6 en la C y la B;

El 9 en la D y la A;

El 10 en la D y la B;

El 12 en la D y la C.

Pregunta: ¿Qué relación hay entre el número y las columnas en las que está ubicado?

Retomaron el hecho que 3 está en B y en A y advirtieron que B está encabezado por el 2 y A está encabezado por el 1… ¡y 2 + 1 es 3 !

Similarmente: 5 está en C y A; los números que encabezan estas columnas son 4 y 1; ¡ y 4 + 1 es 5 !

Ante estas verificaciones y otras similares, los invité a formular una conjetura y enunciaron la siguiente:

Conjetura:

- *Los números que están en dos columnas, están en las columnas cuyas "cabezas de columna" suman ese número.*

¿Cómo demostramos o descartamos esta conjetura? Tratándose de una forma de construir la matriz de un conjunto finito de números, verificamos en todos los casos y no encontramos un contraejemplo, por lo cual, la conjetura es verdadera.

Pregunta: ¿Se puede generalizar la proposición enunciada en la conjetura?

Observaciones:

- El 7 está en tres columnas: la A, la B y la C; y la suma de los números que encabezan estas columnas es 1 + 2 + 4, que es 7.

- El 14 está en tres columnas: la B, la C y la D; y la suma de los números que encabezan estas columnas es 2 + 4 + 8, que es 14.

Conjetura:

- Los números que están en tres columnas, están en las columnas cuyas "cabezas de columna" suman ese número.

Esta conjetura fue demostrada como la conjetura anterior y se formuló la siguiente observación:

Observación:

- 15 es el único número que está en las cuatro columnas y la suma de los cuatro números que son cabeza de columna es 1 + 2 + 4 + 8 = 15.

Así se agotó el análisis para todos los números y para los cuatro casos (en una columna, en dos columnas, en tres y en cuatro). Teníamos información suficiente para enunciar las reglas de construcción de la matriz de números. Para llegar a enunciarlas, solicité que cada grupo haga el experimento de construir la matriz de números de la Figura 1, haciendo uso de las observaciones y proposiciones examinadas. Así lo hicieron, con apoyo de la intuición, y luego de propuestas, comentarios y ajustes, se llegó a las siguientes reglas:

Regla 1: Poner como cabeza de las columna A, B, C y D a los números 1, 2, 4 y 8 respectivamente.

Regla 2: Expresar cada uno de los otros once números como una suma de los números cabeza de columna, sin repetir sumandos.

Regla 3: Escribir cada uno de los otros once números solamente en las columnas correspondientes a los sumandos con los que fue expresado tal número usando la regla 2.

Algunos profesores manifestaron que con todo lo hecho ya estaba claro cuál era "el truco" para "adivinar" el número si alguien nos da como información en qué columnas de la matriz está. ¿Usted se anima a enunciarlo, amigo lector?

Llegamos a la siguiente regla para deducir ("adivinar") de qué número se trata y sugirieron llamarla "regla clave"

Regla clave: Si se tiene la información de las columnas en las que está un número, entonces ese número es la suma de los números que encabezan tales columnas.

Se hicieron algunas verificaciones; por ejemplo, si mirando la matriz, alguien escoge el número 11 y da como información que está en la columnas D, B y A, "el adivinador" suma 8 + 2 + 1 y así "adivina" que el número escogido es el 11. Ciertamente, "el adivinador" debe tener en la memoria qué números encabezan las columnas A, B, C y D.

Luego de la alegría de haber descubierto el truco, surgieron nuevas preguntas:

Pregunta: ¿Por qué este truco funciona así?

Pregunta: ¿Se puede usar cualquier número como cabeza de lista y la regla clave sigue funcionando?

Fue fácil responder a la segunda pregunta haciendo algunas experiencias; por ejemplo con los números 1, 2, 3 y 4 como cabezas de lista. Pronto aparecieron los tropiezos, pues el 5 es 3 + 2 pero también es 4 + 1, lo cual significaría que finalmente se tendría que ubicar en las cuatro columnas… Además los números del 11 al 15 no pueden expresarse como suma de estas cabezas de lista, sin repetir sumandos.

Entonces surge la pregunta:

Pregunta: ¿Qué de especial tienen los números 1, 2, 4 y 8 para que todos los números naturales del 1 al 15 se puedan expresar usando a estos como sumandos y sin repeticiones?

Una primera observación fue la siguiente:

Observación: 2 es el doble de 1; 4 es el doble de 2; y 8 es el doble de 4.

Sugerí usar símbolos matemáticos para expresar esta observación. Así, escribieron:

$$2 = 2x1$$

$$4 = 2x2$$

$$8 = 2\ x4$$

Sugerí que observen la presencia muy especial, muy fuerte del número 2 y que esto se traduzca en la simbolización.

Luego de unos minutos llegaron a lo siguiente:

$$2 = 2x1 = 2$$

$$4 = 2x2 = 2^2$$

$$8 = 2\ x4 = 2x\ 2^2 = 2^3$$

Con lo cual una profesora observó que todos los números cabeza de columna pueden expresarse como potencias de 2:

$$1= 2^0$$

$$2 = 2^1$$

$$4 = 2^2$$

$$8 = 2^3$$

Pregunta: ¿Y para qué sirve esto si lo que tratamos de saber es por qué estos números son buenos para ser cabeza de columna?

Sugerí que recuerden que el sistema de numeración decimal que usamos para escribir los números naturales mayores que 9, en verdad son códigos que resultan de agrupaciones y reagrupaciones de diez en diez y que también pueden usarse códigos que resulten de las agrupaciones y reagrupaciones de dos en dos de los elementos de un conjunto. En concreto, les pedí que escriban el código que expresa la cantidad de vocales de nuestro abecedario castellano, usando solamente agrupaciones de dos en dos y los símbolos 0 y 1. Llegaron al código correspondiente a cinco en el sistema de base dos (binario), como se muestra en la Figura 3.

Como puede observar, amigo lector, el código es 101 y las columnas, de derecha a izquierda, corresponden, según las agrupaciones y reagrupaciones de dos en dos, respectivamente, a elementos sueltos (1); a óvalos sueltos que agrupan a dos elementos (0); y a rectángulos sueltos que agrupan a dos óvalos (1).

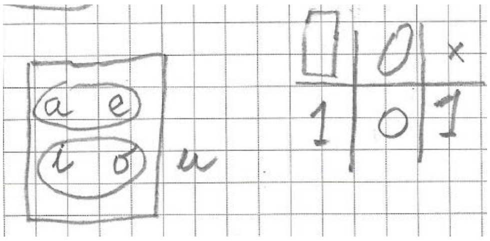


Figura 3. Codificación de un conjunto de cinco elementos, haciendo agrupaciones y reagrupaciones de dos en dos

Les pedí que hagan algo análogo con el número 13. Tuvieron que añadir una columna más a la izquierda, considerando ahora rombos sueltos agrupando a dos rectángulos (Como se ve en la Figura 4). Tarea importante – espontánea y orientada – fue encontrar las similitudes entre los códigos binarios de los números 5 y 13, con la ubicación del 5 y el 13 en la matriz dada (en qué columnas están). Ciertamente, se usaron las observaciones ya hechas y las reglas que habíamos encontrado.

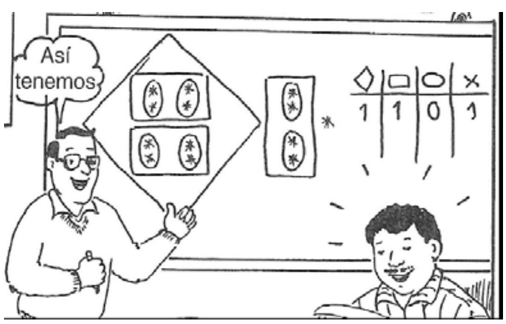


Figura 4. . Codificación de un conjunto de trece elementos, haciendo agrupaciones y reagrupaciones de dos en dos.

Luego de una fase de exploración bastante animada, con codificaciones, decodificaciones y comparaciones, los grupos concluyeron que existe gran relación entre las columnas denominadas A, B, C y D y las columnas usadas al escribir códigos haciendo agrupaciones y reagrupaciones de dos en dos.

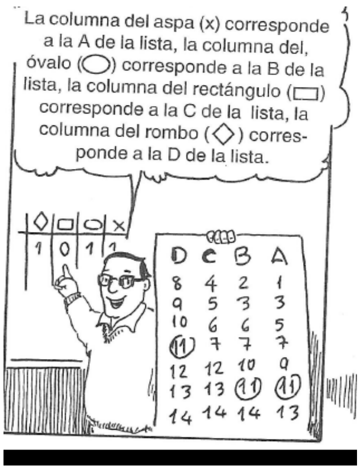


Figura 5. Correspondencia entre el código en base dos de un conjunto de once elementos, y la ubicación del número 11 en la matriz,

Así, el 13 está en las columnas D, C y A; y por otra parte, el 13 en base 2 (haciendo agrupaciones y reagrupaciones de 2 en 2) se codifica 1 1 0 1. Los 1 indican su presencia en la columnas D, C y A y el 0 su no presencia en la columna B. De esta manera, decir que un número está en las columnas D, C y A equivale a decir que se trata de un número que en base 2 se escribe 1101 y para “adivinar” de qué número se trata, basta decodificar y en cualquiera de los casos, eso se hace sumando $1 + 2^2 + 2^3$.

Así quedó aclarado el "misterio" del juego de "adivinar" el número pensado y propuse pasar a otro aspecto importante del pensamiento matemático: *crear*.

Propuse pensar en una manera de modificar el juego, haciendo alguna variación o añadido a la matriz dada. Surgieron dos ideas:

- ampliar la matriz dada escribiendo más números en las columnas
- hacer una matriz usando la base tres

Los grupos que optaron por la primera idea observaron que tendrían que usar por lo menos una columna más y superaron fácilmente la dificultad inicial de escribir el número cabeza de la nueva columna, que la llamaron E. Ud., amigo lector, puede hacer una pausa para encontrar tal número.

¡Claro! Es el 16. Con esta nueva columna, elaboraron la matriz correspondiente, con 31 números naturales, que es una solución del problema planteado al inicio de este artículo. No la escribo para dar paso a la satisfacción personal de los lectores, que estoy seguro podrán escribirla, luego de todo el análisis expuesto y disfrutar "adivinando" números que escojan sus amigos en esa matriz, sabiendo solamente en qué columnas está ubicado.

Los grupos que optaron por la segunda idea, consideraron cuatro columnas y pusieron como cabeza de columna a los números 1, 3, 9 y 27. Encontraron "sorpresas" – situaciones diferentes en relación a la experiencia usando base dos – al escribir los números en un arreglo rectangular y finalmente obtuvieron un conjunto adecuado de números de los cuales escoger para "adivinar".

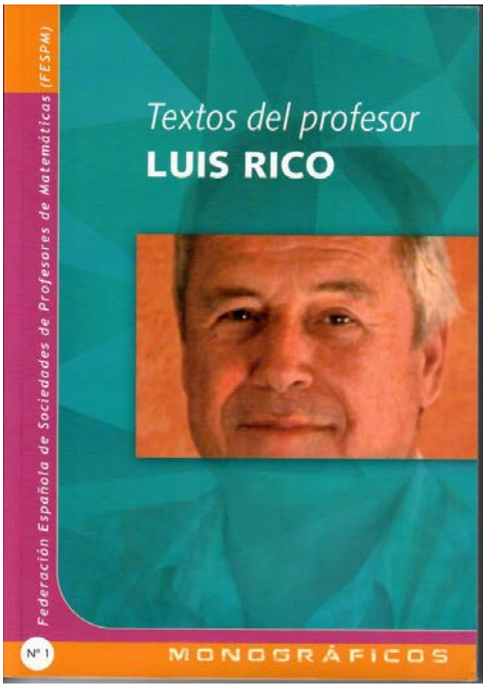
Amigo lector, queda invitado a vivir estas experiencias.

Consideraciones finales

1. La experiencia didáctica muestra formas de estimular el *pensamiento matemático*, a partir de una situación lúdica, que encierra un problema matemático. Como lo dijimos al inicio del artículo, consideramos cuatro características fundamentales del pensamiento matemático, que las hemos destacado en la experiencia descrita y ahora nos referimos a ellas con más detalle:
    1. *Analizar*, lo cual conlleva observar; plantear(se) preguntas; examinar casos particulares; practicar el ensayo y error así como el tanteo inteligente; descubrir relaciones lógicas; buscar una visión global, una estructura.
    2. *Conjeturar*, lo cual conlleva formular hipótesis y generalizar; es decir, ir más allá de los casos particulares (intuir "lo general en lo particular"); sistematizar y representar.
    3. *Demostrar o descartar lo conjeturado*, lo cual conlleva resolver problemas; argumentar; hacer demostraciones; dar contraejemplos.
    4. *Crear,* lo cual conlleva establecer conexiones dentro de la propia matemática y con otros campos del conocimiento; hacer contextualizaciones; formular hipótesis; inventar nuevos problemas.

2. La resolución y creación de problemas, así como la comprensión y elaboración de demostraciones de proposiciones, brindan excelentes oportunidades para desarrollar el pensamiento matemático, con el fuerte apoyo de la intuición.
3. Es muy importante que las experiencias de aprendizaje – en todos los niveles educativos – se desarrollen poniendo énfasis en el estímulo del pensamiento matemático. Así se contribuirá a generar una actitud científica de los estudiantes y a una formación para el autoaprendizaje, con espíritu crítico y creativo, lo cual es fundamental no solamente en la matemática, sino en los diversos campos del conocimiento y en la vida cotidiana.
4. Mención especial merece referirse al estímulo del pensamiento matemático en la formación de los futuros profesores y de los profesores en servicio. Es esencial que ellos vivan experiencias de aprendizaje en las que el desarrollo del pensamiento matemático predomine sobre el aprendizaje de reglas o de algoritmos, para que esta forma de aprender sea cultivada con sus estudiantes.

UNIÓN
REVISTA IBEROAMERICANA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA
www.fisem.org/web/union
http://asenmacformacion.com/ojs/index.php/union/index
ISSN: 1815-0640
Número 45. Marzo 2016
Página 294-297



Reseña del libro "Textos del profesor Luis Rico"

Durante los días 27, 28 y 29 de enero de 2016 tuvo lugar en la Facultad de Ciencias de la Educación de la Universidad de Granada un seminario de investigación en Educación Matemática cuyo hilo conductor era el homenaje al profesor Luis Rico Romero con motivo de su jubilación.

El profesor Luis Rico es un referente en la Educación Matemática y su actividad ha sido intensa y variada, desde la publicación de libros de texto a la dirección de tesis doctorales, desde el impulso a la investigación en perspectiva internacional a la participación activa en diversos comités nacionales e internacionales sobre currículos, itinerarios educativos, pruebas PISA, informe TEDS, etc.

Por este motivo, la Federación Española de Sociedades de Profesores de Matemáticas, FESPM, en colaboración con la OEI, la Universidad de Córdoba y la Universidad de Granada, ha publicado el libro "Textos del profesor Luis Rico", que reproduce escritos de Luis Rico representativos de su trayectoria.

En esta obra se han seleccionado trabajos que representan y reconocen la relevante trayectoria profesional e investigadora del profesor Luis Rico. La actividad investigadora de Luis se caracteriza principalmente por su enmarque en equipos de trabajo sin descuidar sus contribuciones personales.

Los trabajos de Luis Rico que se desarrollan en el libro se pueden encuadrar en cinco líneas de investigación de gran relevancia que se pueden clasificar en tres apartados:

1.- Pensamiento Numérico

- *Estudio metodológico del número fraccionario en el 6º nivel de E.G.B.* Es una publicación hecha en colaboración por el Grupo de E.G.B. de la A.P.M.A.

ISSN: 1815-0640
Número 45. Marzo 2016
Página 294-297

(Asociación de Profesores de Matemáticas de Andalucía) en el año 1984. Ve la luz en la revista Épsilon, voz de una de las dos sociedades de profesores de matemáticas existentes en esos años en Andalucía.

La finalidad de este trabajo no es el estudio de los contenidos relativos al concepto de Número Racional, sino su didáctica. Por ello se considera prioritario dar respuesta a dos cuestiones básicas: por qué deben estudiarse los Números Racionales y cómo debe hacerse este estudio

Para dar respuesta a esta cuestión se destaca el uso social y la necesidad del dominio de los conceptos relativos a las fracciones, y en concreto se centra en la idea de fracción que, históricamente, ha sido su idea fundamental. En la primera parte de este trabajo se recorre la evolución y uso que históricamente ha experimentado la fracción y en una segunda parte se hace una recopilación de los usos actuales de las fracciones.

Se termina con una reflexión final para indicar que este trabajo representa las líneas generales de una metodología activa para el aprendizaje del concepto de fracción, y de sus operaciones, por parte del alumno de 11 años.

- *Conocimiento numérico y formación del profesorado.* Conferencia inaugural del curso académico en la Universidad de Granada el año 1995.

Presenta reflexiones que abordan uno de los campos que es posible y necesario abordar desde la Universidad y desde los departamentos universitarios: la preparación científica y metodológica rigurosa, de profesionales cualificados de la educación.

2.- Diseño, Desarrollo e Innovación en el Currículo de Matemáticas

- *Los organizadores del currículo de Matemáticas.* Publicado en el año 1997 por la editorial Horsori - ICE Universitat de Barcelona.

Se hace una presentación extensa y autónoma de cada uno de dichos organizadores, de sus bases conceptuales y de su aplicación práctica para el estudio de algunos temas. Se toma la opción de presentar cada uno de los organizadores independientemente: currículo oficial, estructura de los contenidos, análisis fenomenológico, errores y dificultades, modelos y

ISSN: 1815-0640
Número 45. Marzo 2016
Página 294-297

representaciones, materiales y recursos y evolución histórica de los conceptos matemáticos que se pueden contemplar en el diseño de una unidad didáctica.

- *Los procesos de cambio curricular en Matemáticas. Fundamentos y Resultados*. Conferencia impartida el año 2014 en la I Jornada IBERCIENCIA - Matemática en Buenos Aires 17 y 18 julio 2014 y organizada por la OEI (Organización de Estados Iberoamericanos).

Para dar respuesta el autor se centra en dos aproximaciones diferentes y complementarias. La primera se refiere a los aspectos estructurales de la noción de currículo matemático. La segunda aproximación destaca que estamos en una ciencia social, en una ciencia humana, no sólo una ciencia formal. Tiene componentes formales importantes, pero es una ciencia inmersa en la historia, en la sociedad y en los procesos de cambio.

Se considera el currículo una herramienta profesional para el profesor, una estructura conceptual de naturaleza dinámica. Sobre estas ideas se desarrollan las reflexiones sobre el cambio curricular: estructura y dinamismo, estructura y procesos de cambio.

Se termina planteando un debate sobre los diseños curriculares actuales que están principalmente organizados en función de competencias.

3.- Formación del Profesorado de Matemáticas

- *El método del análisis didáctico*. Artículo publicado en Unión, Revista Iberoamericana de Educación Matemática, el año 2013.

Los objetivos y fines del análisis didáctico se estudian desde:

- El análisis en perspectiva didáctica.
- El análisis conceptual.
- El análisis de contenido.

Se presentan sus peculiaridades, se establecen comparaciones entre las distintas perspectivas y se estudia su aplicación al desarrollo curricular.

Análisis conceptual y análisis de contenido son métodos de investigación consolidados en la historia del pensamiento y también en la investigación educativa. Su adecuación a la Didáctica de la Matemática ha hecho surgir en

ISSN: 1815-0640
Número 45. Marzo 2016
Página 294-297
www.fisem.org/web/union
http://asenmacformacion.com/ojs/index.php/union/index

pocos años nuevas ideas en el campo de la investigación en Didáctica de la Matemática.

Como complemento se presenta una Genealogía de la Educación Matemática en España, elaborada por el profesor José Gutiérrez de la Universidad de Granada, en la que a modo de árbol genealógico se presentan las raíces de la Educación Matemática en España hasta la figura de Luis Rico con la primera Cátedra de Didáctica de las Matemáticas.

Quiero aprovechar la ocasión para, de nuevo, felicitar y darle la enhorabuena a Luis por este merecido homenaje a toda una trayectoria de dedicación a la Educación Matemática. Estamos seguros que seguirá en la brecha y que podremos seguir contando con él en el ilusionante empeño de mejorar esa educación.

Y a los que lean estas líneas me permito recordarles el consejo con el que Javier Peralta acaba el epílogo al libro, parafraseando la recomendación de Laplace con respecto a Euler: "*Leed a Luis Rico, él es el maestro de todos nosotros*".

Serapio García Cuesta
Servicio Publicaciones FESPM