UNIÓN

REVISTA IBEROAMERICANA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA

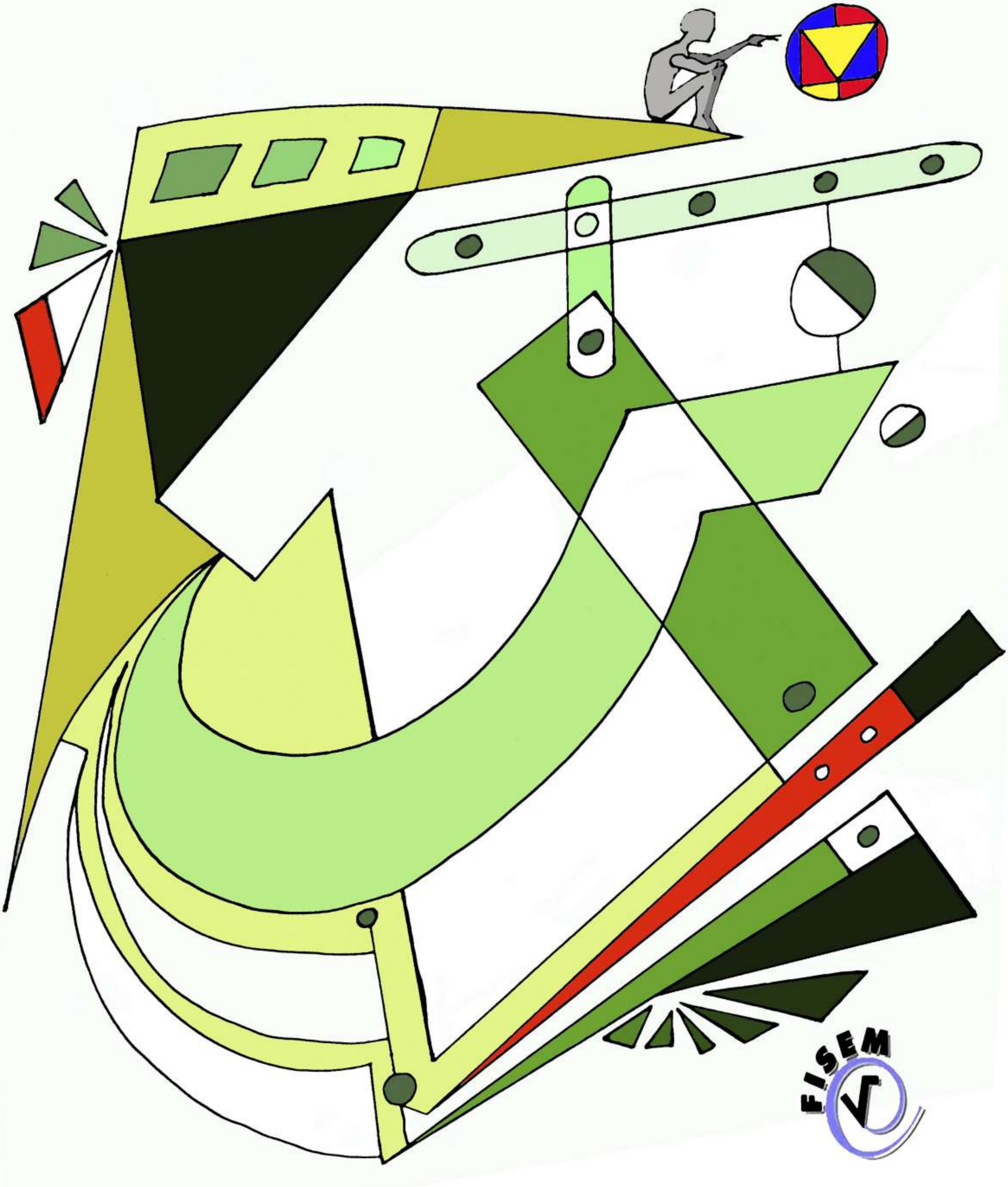
http//union.fespm.es/index.php

UNIÓN

REVISTA IBEROAMERICANA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA

ISSN: 1815-0640
Año XVIII Número 64
Abril 2022

http://union.fespm.es/index.php



REVISTA IBEROAMERICANA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA

Año XVIII – Número 64 – Abril 2022

http://union.fespm.es/index.php

ÍNDICE

UNIÓN- Revista IberoAmericana de Educación Matemática
http://union.fespm.es/index.php
ISSNe 1815-0640 | Publicación con periodicidad cuatrimestral

Federación Iberoamericana de Sociedades de Educación Matemática (FISEM)
España
revistaunion@fisem.org

UNIÓN

REVISTA IBEROAMERICANA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA

http//union.fespm.es/index.php

REVISTA IBEROAMERICANA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA

ISSN: 1815-0640

Número 64. Abril 2022

Páginas 1-2

EDITORIAL

Estimados lectores

¡Hoy tenemos el placer de publicar el primer número del 2022!

En esta oportunidad nos complace comentar que se ha llevado adelante una reunión con los Asesores de UNIÓN, siendo esta la primera desde nuestra gestión. Ha sido un honor poder continuar con la colaboración de todos ellos. En la misma, se acordó sostener: el espíritu de la revista y sus pilares/bases con que fue creada (una revista útil para los "profesores de a pie"), dando continuidad a los artículos de investigación y los de prácticas de aula. Se conversó, además, acerca de algunas acciones para la mejora de la revista en su conjunto.

Por un lado, a raíz de una propuesta de las editoras, se resolvió que el último número de cada año sea Especial dedicado a una temática a proponer. Por ello, para el de este año (diciembre, 2022), se convocará próximamente al envío de artículos en la temática que hemos elegido: Educación STEM y STEAM. Pronto se estará enviando el anuncio y su pedido de difusión.

Por otro lado, observando la escasa cantidad de artículos en la sección Propuestas Áulicas, y dada su importancia, Antonio Martinón, asesor y primer codirector de esta revista, se ofreció a impartir el "Taller de escritura sobre experiencias de aula de Matemáticas", con el objetivo de lograr que una mayor cantidad de profesores se animen a narrar experiencias para dicho espacio. Es grato comunicar que este Taller ya está en marcha y que Agustín Carillo lo ha difundido y apoyado desde FISEM. El enlace al mismo es https://fisem.org/2022/03/24/taller-de-escritura-sobre-experiencias-de-aula-de-matematicas/ y también pueden acceder desde el apartado Novedades del sitio web de UNIÓN.

Con relación al sitio web continuamos con sus mejoras. En esta oportunidad hemos añadido en la barra lateral derecha dos íconos, uno de notificación que enlaza con una invitación para lectores a registrarse en el sitio y otro que conduce a las estadísticas de las visitas de la revista en las últimas ediciones. Esto último nos permitirá a futuro hacer un análisis respecto del crecimiento y del alcance de la misma. Cabe destacar que, debido a que el sitio actual donde se aloja la revista cambió en 2019, lo que podremos analizar será el período desde ese año en adelante.

En cuanto a la organización, permanecen las secciones con sus portadas:

●**Editorial**

●**Firma Invitada:** destinada a la publicación del material de una persona que represente a la Educación Matemática en cada uno de los países miembro de FISEM y de otros lugares.

●**Artículos**: destinada a la publicación de artículos de investigación y de experiencias educativas, en Educación Matemática en todos los niveles educativos.

●**Propuestas áulicas**: en la que se ofrecen recursos motivadores para utilizar en forma creativa que surgen de las aportaciones recibidas.

●**El Rincón de los Problemas**: en este espacio a cargo del profesor Uldarico Malaspina Jurado (Pontificia Universidad Católica del Perú) se ofrece en cada número una situación problemática y sus formas de abordarlo.

●**GeoGebra en UNIÓN**: en la que contamos con la colaboración de Alejandro Gallardo (Licenciado en Matemática por la Universidad de Málaga). En esta se invita a un profesor/investigador a presentar novedades, problemas, actividades, entre otras, que vinculen GeoGebra con los procesos educativos en matemática.

En particular, en este nuevo volumen se publican catorce artículos, de autores que representan a los siguientes países: Argentina, Brasil, Chile, Colombia, Ecuador, España, México, Perú y Uruguay. Uno corresponde a la **Firma Invitada,** a cargo de Eduardo Mancera, que nos relata sobre “La recta, sin fórmulas”. Luego, se encuentran ocho trabajos que corresponden a la sección **Artículos**, y tres a **Propuestas Áulicas.** En **Rincón de los Problemas**, el profesor Uldarico Victor Malaspina Jurado presenta y comenta problemas creados en el marco de un taller con profesores de secundaria de Jaén (Cajamarca, Perú). La intención fue crearlos a partir de alguna situación cotidiana, como una manera de enseñar las matemáticas sobre la base de la indagación. En **GeoGebra en UNIÓN**, Alejandro Gallardo nos comparte en su editorial las novedades de GeoGebra y menciona detalles de la firma invitada, en la que, en esta oportunidad, la profesora Laura del Río nos relata sobre Microjuegos creados con GeoGebra.

Deseando tengan buena lectura, agradecemos la labor invaluable de los revisores de los artículos y a los autores que han elegido esta revista para difundir sus trabajos.

Karina y Viviana

Equipo Editorial

UNIÓN
REVISTA IBEROAMERICANA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA

ISSN: 1815-0640

Número 64. Abril 2022

Páginas 1-2

EDITORIAL

Caros leitores

Hoje temos o prazer de publicar o primeiro número de 2022!

Nesta ocasião temos o prazer de comentar que foi realizada uma reunião com os Assessores da UNIÓN, sendo esta a primeira desde nossa administração. Foi uma honra poder continuar com a colaboração de todos eles. Nela, concordou-se em manter: o espírito da revista e seus pilares/bases com os quais foi criada (uma revista útil para "professores comuns"), dando continuidade aos artigos de pesquisa e às práticas de sala de aula. Eles também discutiram algumas ações para melhorar a revista como um todo.

Por um lado, por proposta das editoras, decidiu-se que o último número de cada ano seria um Especial dedicado a um tema a ser proposto. Por isso, para este ano (dezembro de 2022), a submissão de artigos sobre o tema que escolhemos em breve será chamada: STEM e STEAM Education. Em breve o anúncio e sua solicitação de transmissão serão enviados.

Por outro lado, observando o escasso número de artigos na seção de Propostas Áulicas, e dada a sua importância, Antonio Martinón, orientador e primeiro codiretor desta revista, ofereceu-se para ministrar a "Oficina de redação sobre experiências em sala de aula de Matemática", com a objetivo de conseguir que um maior número de professores seja estimulado a narrar experiências para o referido espaço. É com satisfação que anuncio que este Workshop já está em andamento e que Agustín Carillo o difundiu e apoiou desde o FISEM. O link é https://fisem.org/2022/03/24/taller-de-ecritura-sobre-experiencias-de-aula-de-matematicas/ e também pode ser acessado na seção Notícias do site da UNIÓN .

Em relação ao site continuamos com suas melhorias. Desta vez, adicionamos dois ícones na barra lateral direita, um ícone de notificação que leva a um convite para que os leitores se registrem no site e outro que leva às estatísticas de visitas da revista nas últimas edições. Este último nos permitirá no futuro fazer uma análise quanto ao seu crescimento e alcance. Note-se que, uma vez que o atual site onde a revista está hospedada mudou em 2019, o que poderemos analisar será o período a partir desse ano.

Quanto à organização, as seções com suas capas permanecem:

- **Editorial**

- **Assinatura Convidada:** destinada à publicação do material de um representante da Educação Matemática em cada um dos países membros do FISEM e demais localidades.

● **Artigos:** destina-se à publicação de artigos de pesquisa e experiências educativas em Educação Matemática em todos os níveis de ensino.

● **Propostas de sala de aula:** em que são oferecidos recursos motivadores para serem utilizados de forma criativa que surgem das contribuições recebidas.

● **A esquina dos problemas:** neste espaço do professor Uldarico Malaspina Jurado (Pontifícia Universidade Católica do Peru), cada questão oferece uma situação problemática e formas de abordá-la.

● **GeoGebra em UNIÓN:** no qual contamos com a colaboração de Alejandro Gallardo (Graduado em Matemática pela Universidade de Málaga). Nele, um professor/pesquisador é convidado a apresentar notícias, problemas, atividades, entre outros, que vinculem o GeoGebra aos processos educacionais em matemática.

Em particular, catorze artigos são publicados neste novo volume, de autores representando os seguintes países: Argentina, Brasil, Chile, Colômbia, Equador, Espanha, México, Peru e Uruguai. Uma corresponde à Assinatura Convidada, de Eduardo Mancera, que nos fala sobre "A linha reta, sem fórmulas". Em seguida, há oito trabalhos que correspondem à seção de Artigos e três a Propostas Áulicas. Em Canto dos problemas, o professor Uldarico Victor Malaspina Jurado apresenta e comenta problemas criados no âmbito de uma oficina com professores do ensino médio de Jaén (Cajamarca, Peru). A intenção era criá-los a partir de alguma situação cotidiana, como forma de ensinar matemática a partir da investigação. No GeoGebra da UNIÓN, Alejandro Gallardo compartilha conosco em seu editorial as últimas notícias do GeoGebra e menciona detalhes da assinatura do convidado, na qual, nesta ocasião, a professora Laura del Río nos fala sobre os Microgames criados com o GeoGebra.

Desejando-lhe uma boa leitura, agradecemos o inestimável trabalho dos revisores dos artigos e dos autores que escolheram esta revista para divulgar seus trabalhos.

Karina y Viviana

Equipe Editorial

UNIÓN

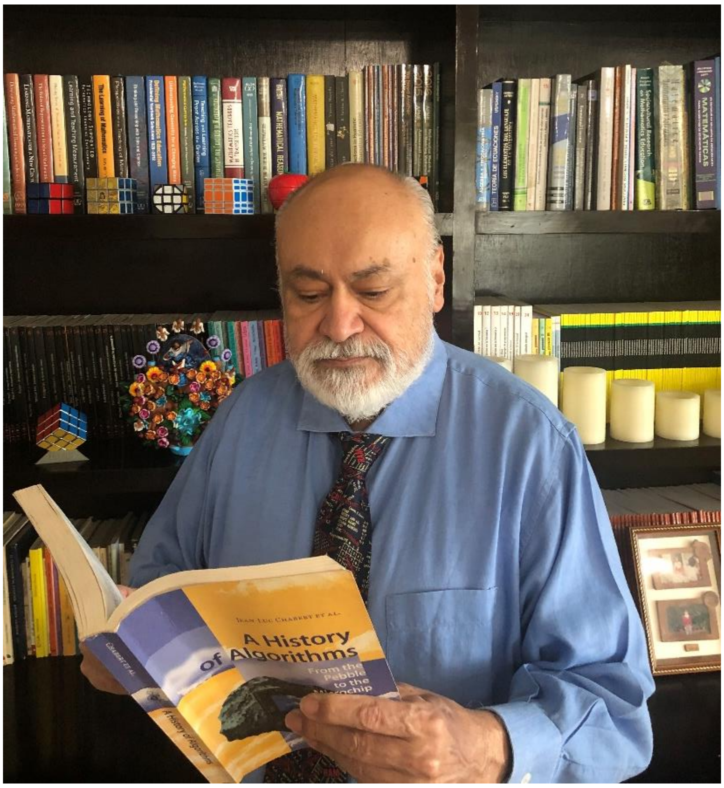
REVISTA IBEROAMERICANA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA

http//union.fespm.es/index.php

REVISTA IBEROAMERICANA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA
firma invitada
Abril de 2022, Número 64
ISSN: 1815-0640

Eduardo Mancera Martínez

Breve Reseña



Licenciatura en Física y Matemáticas por la Escuela Superior de Física y Matemáticas del Instituto Politécnico Nacional. Maestría y Doctorado en Ciencias por el Centro de Investigación y Estudios Avanzados del Instituto Politécnico Nacional. Se ha desempeñado como docente o investigador, funcionario público del sector educativo en diferentes niveles o modalidades como Educación Básica (primaria y secundaria), Educación Tecnológica, Educación Superior, Educación para los Adultos, Educación en Comunidades Rurales, Educación Especial, Formación inicial servicio de Maestros, Formación de Maestros en Servicio, Comunicación e Innovación Educativa. También ha sido profesor e investigador invitado en varias instituciones.

Fue consultor de empresas como CASIO, Texas Instruments y Hewlett Packard Inc y autor o coautor de varios libros de texto para primaria, secundaria (aprobados por las autoridades educativas), bachillerato, educación superior y formación de maestros.

Ha participado en múltiples reuniones académicas como ponente invitado en América y Europa y fue parte del grupo fundador de la Revista Educación Matemática.

Participó en organizaciones de docentes o investigadores, fue Presidente de la Asociación Nacional de Profesores de Matemáticas y de Maestros Enseñando con Tecnología Avanzada. Actualmente. Es miembro y Gestor Internacional de la Asociación Mexicana de Matemática Educativa (AMME), miembro del Consejo Asesor de la Red de Educación Matemática para América Central y El Caribe (REDUMATE) y Vicepresidente del Comité Interamericano de Educación Matemática (CIAEM), Grupo Regional de la International Commission on Mathematical Instruction (ICMI).

ISSN: 1815-0640
Número 64. Abril 2022
Páginas 1-23

REVISTA IBEROAMERICANA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA
firma invitada

La recta, sin fórmulas

Eduardo Mancera Martínez

Resumen	Se presentan algunas ideas del proyecto “Matemáticas sin fórmulas” en el tema de la ecuación de recta y su enseñanza, sin partir de fórmulas, solamente siguiendo ideas geométricas y mostrando que se pueden resolver el mismo tipo de actividades que las que se piden cuando se usan fórmulas. Adicionalmente, se muestra que se puede obtener mayor comprensión sobre los conjuntos de puntos en el plano cartesiano al considerarlos como “lugares geométricos” a partir de las relaciones entre las ordenadas y abscisas de los puntos que los conforman, además de mostrar la función que tienen las literales en este contexto. Finalmente se presentan algunos comentarios sobre la ampliación de las ideas para el manejo de funciones algebraicas. **Palabras clave**: recta, funciones lineales, pendiente, transformaciones del plano.
Abstract	Some ideas of the project "Mathematics without formulas" are presented on the subject of the equation of a straight line and its teaching, without starting from formulas, only following geometric ideas and showing that the same type of activities can be solved as those that are requested when They use formulas. Additionally, it is shown that greater understanding can be obtained about the sets of points in the Cartesian plane by considering them as "geometric locations" from the relationships between the ordinates and abscissas of the points that make them up, in addition to showing the function they have. literals in this context. Finally, some comments are presented on the extension of the ideas for the handling of algebraic functions. **Keywords**: straight line, linear functions, slope, plane transformations.
Resumo	São apresentadas algumas ideias do projeto "Matemática sem fórmulas" sobre o tema da equação de uma reta e seu ensino, sem partir de fórmulas, apenas seguindo ideias geométricas e mostrando que o mesmo tipo de atividades podem ser resolvidas como aquelas que são solicitados quando eles usam fórmulas. Além disso, mostra-se que se pode obter maior compreensão sobre os conjuntos de pontos do plano cartesiano ao considerá-los como "localizações geométricas" a partir das relações entre as ordenadas e abcissas dos pontos que os compõem, além de mostrar a função eles têm literais neste contexto. Por fim, são apresentados alguns comentários sobre a extensão das ideias para o tratamento de funções algébricas. **Palabras chave**: linha reta, funções lineares, inclinação, transformações no plano.

1. Introducción

Cuando los estudiantes se enfrentan a relaciones en el plano cartesiano, se topan con tres tipos de representaciones por integrar: algebraicas, numéricas y gráficas. En particular, en el caso de la “linealidad” o las rectas, se omite el tratamiento de significados en torno a los conjuntos de punto en el plano, lo cual es relevante para vincular las representaciones aludidas. De acuerdo con Abric (1987), la representación puede considerarse como un sistema coherente con una jerarquía, que se organiza de acuerdo con la perspectiva del mundo. En este sentido las representaciones deben conformarse en un sistema coherente, pero las representaciones por lo general se manejan de manera independiente, este es un problema frecuente en la enseñanza y esto conduce a una perspectiva de la matemática que no corresponde.

Basta un vistazo a los textos para observar que las representaciones algebraicas predominan, dejando subordinadas a las otras. Por ejemplo, a partir de una “ecuación” o “expresión algebraica” se elaboran tablas de valores y a partir de éstas se dibujan gráficas. La manipulación algebraica es preferida en el contexto escolar, en realidad es la concepción más frecuente en las concepciones sobre el pensamiento matemático y la propia disciplina. Una consecuencia de esto, es la confusión sobre el manejo conceptual, pues se piensa que muestra de alta comprensión de la matemática es la operatividad con símbolos, saber matemáticas se traduce a “saber hacer operaciones aritméticas o algebraicas”. Pero, esta posición es poco consistente con la historia de la matemática.

Las relaciones espaciales ayudaron a la formulación de conocimientos matemáticos y aún siguen orientando ideas fundamentales. A partir de las relaciones geométricas se han configurado conocimientos relevantes y se da sentido a ideas importantes de la matemática.

En el presente documento, a partir de revisar algunas ideas sobre la recta, se trata de mostrar un tratamiento de las relaciones entre expresiones algebraicas, gráficas y tabulaciones (tablas de valores), orientado a evitar el uso de fórmulas y dar significado geométrico principalmente a las ideas.

Cambiar el énfasis en el tratamiento de un contenido no basta para impulsar cambios, se requiere reemplazar la secuencia de enseñanza denominada didáctica tradicional, la cual tuvo una función preponderante y se ha mantenido con varios matices, a pesar de los discursos educativos y los intentos de las reformas educativas recientes.

La secuencia didáctica tradicional se identifica con presentar primero la “teoría” (en realidad es un conjunto de definiciones y exposiciones de procedimientos estereotipados que a veces se disfrazan con un problema o el análisis de una situación, pero que al fin de cuentas solamente es circulación de información), desarrollo de “ejemplos” (que son casos con datos sencillos que permiten ilustrar paso a paso lo que debe hacerse en casos ideales, lo que frecuentemente conduce a la idea de que una buena enseñanza dependerá de la explicación detallada de la ejecución de los pasos requeridos para aplicar un método o una fórmula) y finalmente listados de ejercicios (que generalmente incluyen casos con datos como los vistos en clase y otros que requieren manejo de otros procedimientos más complicados que se trabajan en clase ocasionalmente y suelen incorporarse a los exámenes).

En lo que se desarrollará en estas notas, se promoverá la inducción de prácticas educativas fundamentadas en exploraciones y búsqueda de regularidades al principio, sin pretender usar símbolos o representaciones “tradicionales”, sino aquellas que tienen sentido para los estudiantes y concluir con acuerdos sobre denominaciones convencionales y detección de etapas para realizar un procedimiento. Es decir, llegar a los procedimientos sobre la base de la reflexión y la construcción de significados.

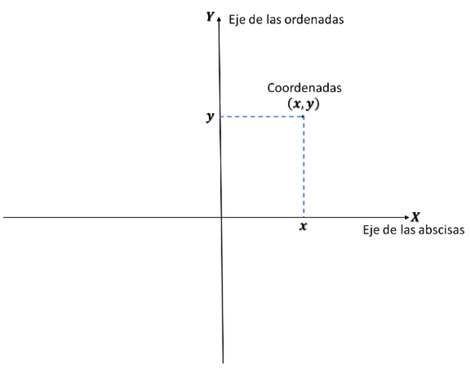
Esta perspectiva surgió el proyecto “Matemática sin fórmulas” y uno de sus productos: “La danza de las rectas” (Mancera, 2005), tema publicado en algunas revistas o difundido en algunos videos como “El baile de las rectas” (https://www.youtube.com/watch?v=XLsjGWZuD-c), esta forma de enseñanza a logrado tres asignaciones de la Cátedra Diego Bricio Hernández, del Colegio de Sinaloa, importante institución mexicana. Esta forma de trabajar las relaciones n el plano se ha trabajado con estudiantes de bachillerato (15 a 18 años de edad), además de aplicaciones reiteradas con estudiantes con bajo rendimiento escolar en cálculo diferencial e integral con funciones reales de una variable real, de la carrera de economía, en una prestigiosa universidad privada (Mancera, 2004).

Dado el espacio limitado para un escrito como el presente, es difícil abordar exhaustivamente todos los contenidos matemáticos o discutir suficientemente todas las componentes teóricas y metodológicas implicadas, por ello la atención se centrará la recta, a partir de lo cual se podrán conocer los principios básicos del enfoque, atendiendo principalmente la integración de una representación a otra, los significados asociados y la estructura algebraica subyacente.

No se presenta como un reporte de investigación, sino como una perspectiva de intervención educativa, lo cual corresponde con las directrices principales de la Revista Unión. Los contenidos que se presentarán pueden ampliarse al tratamiento de cónicas (para un curso de geometría analítica) o para funciones algebraicas.

2. Acotaciones

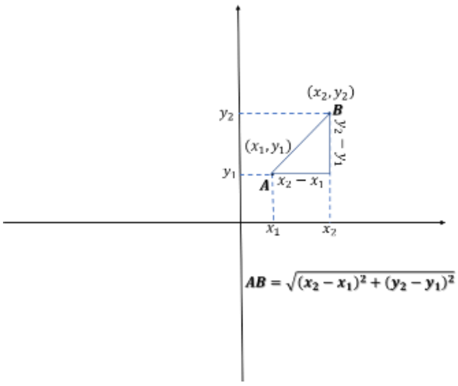
Para tener un punto de partida común, se considera al plano cartesiano, conformado por ejes numéricos perpendiculares con orientación “canónica de los ejes” (partes positivas a la derecha y superior), al eje “horizontal” se le llamará “eje de las abscisas” y al “vertical “eje de las “ordenadas”, cada uno se representarán por X y Y,respectivamente. Cada valor numérico asociado a un punto del eje de las abscisas se representará por x, similarmente los valores asociados a puntos del eje de las ordenadas se representarán por y. Así, cada punto en el plano se representa genéricamente, por una pareja ordenada (x, y).

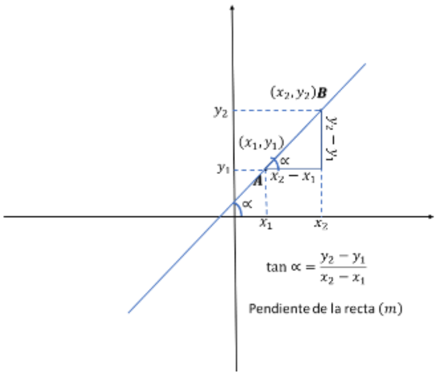


Son convenciones que seguramente conocen los lectores o no será complicado consultarlas.

Preguntas de alumnos que dieron origen a la reflexión.

Las fórmulas de la distancia entre puntos y de la pendiente de una recta (definida como el valor de la tangente del ángulo α, que forma la recta con el eje de las abscisas) se "encuentran", o se dice que se "deducen" o "demuestran", a partir del trazo de un triángulo rectángulo, Constituido con puntos en el primer cuadrante, colocados en una disposición similar en todos los textos y con diferentes apoyos visuales. A partir de esas imágenes se utilizan propiedades entre los lados del triángulo rectángulo para expresar la obtención de la distancia entre dos puntos y a partir de un triángulo igual o similar, se usan las magnitudes de los catetos para hacer referencia a la tangente de uno de los ángulos agudos del dicho triángulo.

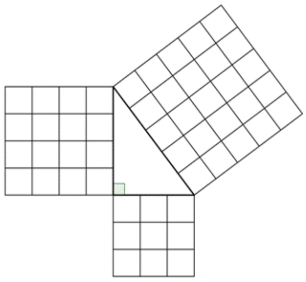




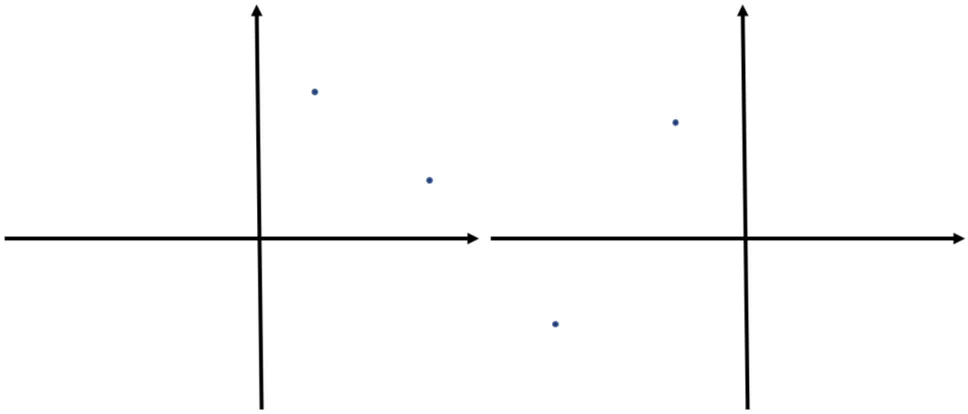
Después, con figuras similares, se genera una fórmula para determinar la ecuación de una recta que pasa por dos puntos o conociendo la pendiente y un punto:

$$y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1) \qquad\qquad y - y_1 = m(x - x_1)$$

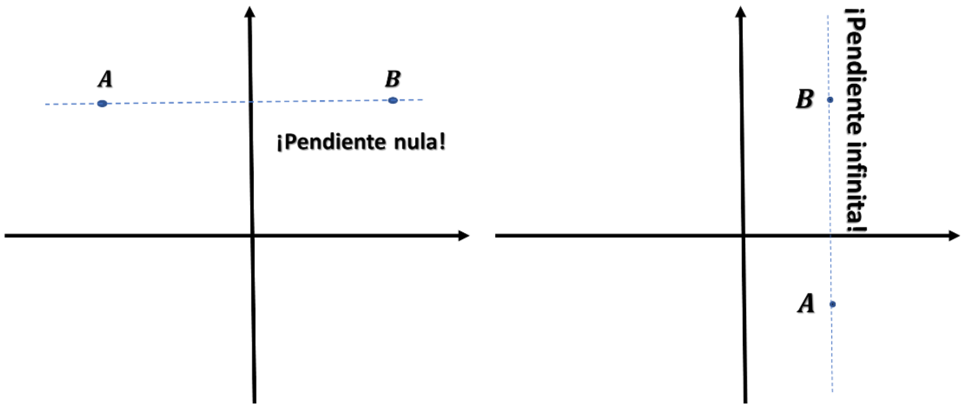
Se piensa que los estudiantes pasan por alto muchos aspectos del tratamiento descrito, como partir de un solo caso (dos puntos en el primer cuadrante uno de ellos arriba del otro y en cierta posición) para obtener fórmulas de aplicación generalizada, para cualesquiera puntos del plano. Puede no ser significativa para los "expertos" o "especialistas", pero confunde a los estudiantes. Esta manera de proceder se le llama "inducción inmediata", de hecho, se trata de una falacia conocida: generalización apresurada, conocida como *secundum quid*. Es algo frecuente en la enseñanza de la matemática, se demuestran proposiciones sobre cuadriláteros usando solamente uno, o sobre triángulos, a partir de un caso, incluso provoca errores, pues varios alumnos piensan que el teorema de Pitágoras es solamente la relación que se da entre un triángulo rectángulo de lados, 3, 4 y 5.



Si se permite plantear dudas libremente, algunos alumnos preguntan ¿cuál debe ser el punto con subíndices 1 o 2? ¿el que está más cerca de los ejes? pues está por debajo del otro ¿los dos puntos deben estar en el primer cuadrante? ¿qué sucede si los puntos no tienen ese tipo de posición? ¿cómo se debe proceder en casos diferentes? ¿Qué hacer cuando unos tengan coordenadas con signos negativos? ¿se tendrán que considerar distancias negativas? ¿Cómo influirán los signos en esos casos?, entre otras preguntas.



El colmo es cuando no se forma un triángulo, pero hay que aplicar una fórmula que depende de ello, al menos así se determinó. Aunque, en el caso de la distancia entre puntos se pase por alto pues se facilitan los cálculos, cuando se trata de las pendientes, sin escrúpulos se dice: la pendiente es negativa, cero o infinita. En estos casos, los alumnos, por lo general, guardan prudente silencio, pero piensan ¿de dónde se infiere esto?



Con la intención de tranquilizarlos a veces se les dice: No se preocupen, apliquen la fórmula tal y cómo está, considerando los signos de las componentes. Pero varios estudiantes piensan ¿dónde está eso de que en la matemática todo tiene explicación? ¿por qué dicen que no se debe hacer un enfoque memorístico? ¿qué pasa?

3. Recursos para atender los problemas

Cuando se enfrentan este tipo de cuestionamientos debe buscarse alguna forma de convencer, incluso a uno mismo, porque son temas que seguramente no se han explorado ni se han cuestionado. Pero, se reiteran cada ciclo escolar, sembrando continuamente confusiones e imágenes de la matemática no adecuadas.

Los primero que se requiere es revisar nuestra concepción de la matemática y modificar los recursos y secuencias que se utilizan en la enseñanza tradicional, en este contexto se puede avanzar si se presta atención a “los trucos” (sumar, restar, multiplicar o dividir, la misma cantidad, en ambos lados de una igualdad, cambiar una variable, etc.) o se siguen “las reglas” (paso uno, paso dos, …), aunque no se tiene claro por qué funcionan o de dónde provienen, aunque ayudan a minimizar el trabajo operativo. Sin embargo, la matemática no se genera así, depende más de las ideas y los significados en torno a los objetos matemáticos y las relaciones entre ellos, como se puede constatar en la historia de las matemáticas y los resultados de la investigación en educación matemática.

Lo primero fue revisar libros de textos de geometría analítica, casi todos, son muy similares, siguen secuencias temáticas parecidas. Llama la atención que varios concluyen con translaciones y rotaciones, es raro que traten simetrías o reflexiones, a partir de lo cual se encuentran relaciones entre diversos tipos de representaciones algebraicas. Pero, el tratamiento es fundamentalmente algebraico, la geometría casi no se trata, o se incluye apara comprobar, a modo de ejercicio, algunas relaciones geométricas por métodos “analíticos”.

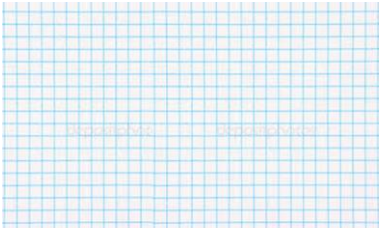
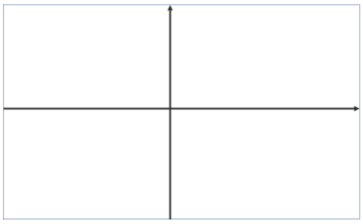
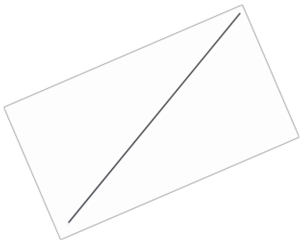
De acuerdo con una frase adjudicada a Einstein: si quieres resultados diferentes, hay que hacer proceder diferente. No obstante, son muy persistentes los procedimientos tradicionales, las nuevas ideas no vienen por sí solas, es necesario, además de entender el problema, buscar lo que se ha podido plantear al respecto. Las fuentes de ideas principales se fueron generando a partir de algunas ideas del programa Erlangen propuesto por Felix Kline (Rodríguez, 2017), el efecto de la percepción en el marco de la Teoría de la Gestalt y las ideas de Bruner y Dienes (Resnik, y Ford, W., 1991) quienes promovieron el uso de materiales manipulativos para invertir el proceso tradicional de enseñanza.

Sobre el tratamiento de las gráficas, los procedimientos se fueron definiendo a partir de varias fuentes como un curso de geometría analítica con un enfoque particular (Rees, 1970), el desarrollo del tema en un curso de aeronáutica (Sánchez – Serrano, 1962) y un libro con ideas muy importantes sobre el trazado de gráficas (Shilov, 1976).

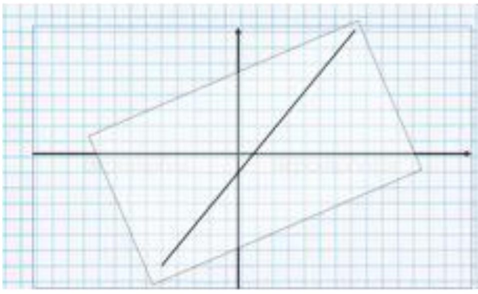
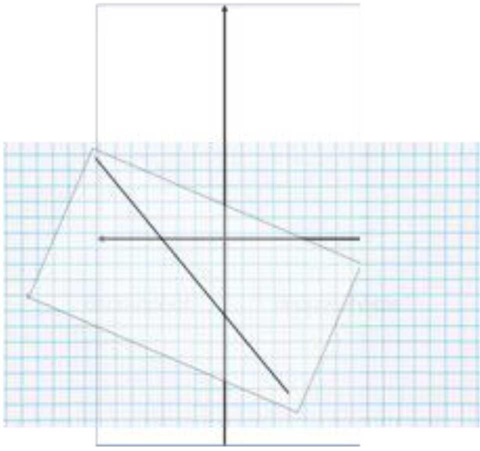
Se consideró importante iniciar con ideas básicas sobre transformaciones geométricas, sin llegar a excesos, para asegurar preponderancia de ideas geométricas. Por lo que se iniciaría de manera “informal” o “intuitiva”, con rotaciones de 90° solamente, simetrías o reflexiones, translaciones con movimientos paralelos a los ejes originales, aunque también se usaron cambios de escala en los ejes para el tratamiento de la elipse desde la circunferencia.

Con materiales manipulativos se plantearon actividades para que los estudiantes pudieran experimentar movimientos del plano y buscaran regularidades o patrones. Pero no se plantearon símbolos o igualdades para explicar los movimientos, solamente se pidió comunicar oralmente o con recursos simbólicos propios.

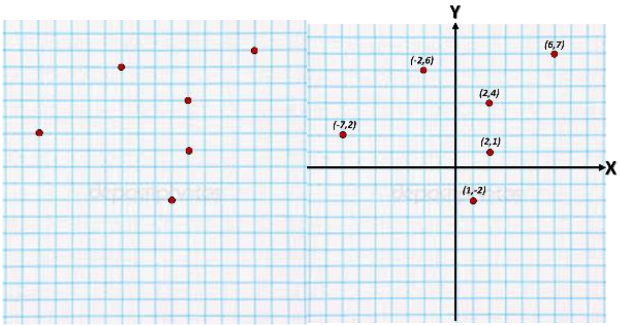
Para este propósito se utilizaron materiales al alcance: hojas de papel transparente y hojas cuadriculadas, pero también se usaron acetatos (material transparente que se emplea en la industria gráfica y se destina a la fabricación de películas fotográficas) transparentes con una base de cartón o madera cuadriculada, adicionalmente se usaron plumones de distintos colores para el trazo de ejes, puntos y líneas.

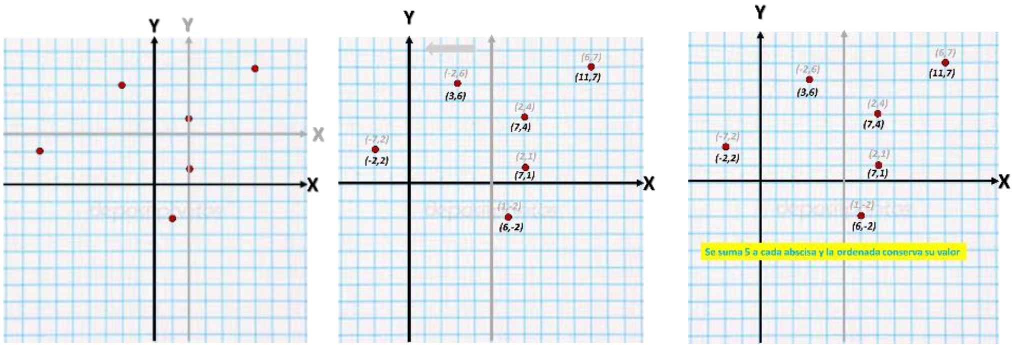
La base cuadriculada sirvió para sobreponer ejes en distintas posiciones y analizar el efecto en la asignación a puntos del plano, además de resaltar que se conservan las distancias y hay algunas regularidades sobre las inclinaciones de rectas con respecto a los ejes.

En un primer momento se colocan al azar puntos en la cuadrícula y después se colocan ejes cartesianos para determinar las coordenadas de los puntos



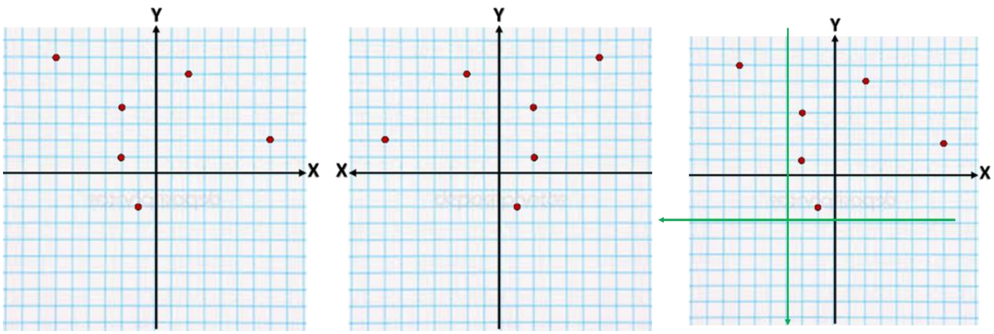
Después, se cambian de posición los ejes y se determinan las nuevas coordenadas de los puntos.



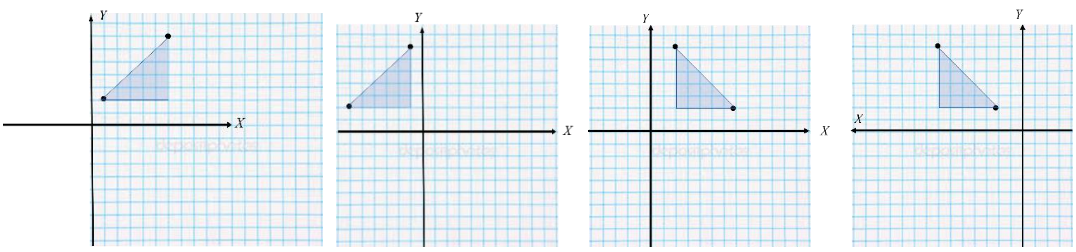
Esto se aplica a distintos tipos de movimientos de los ejes, buscando relaciones o regularidades entre movimientos de los ejes conservando un sistema de ejes y moviendo otro.

La atención se concentra en la afectación de coordenadas realizando ciertos movimientos, sumando o restando las mismas cantidades o se cambian signos o intercambian los papeles de los ejes de coordenadas, etcétera. Es importante reiterar que al principio se expresaron los resultados de manera oral, posteriormente, se induce a que simbolicen lo expresado verbalmente. Se puede influir paulatinamente a expresar dichos movimientos con alguna notación que hasta el final se puedan estandarizar los símbolos empleados.

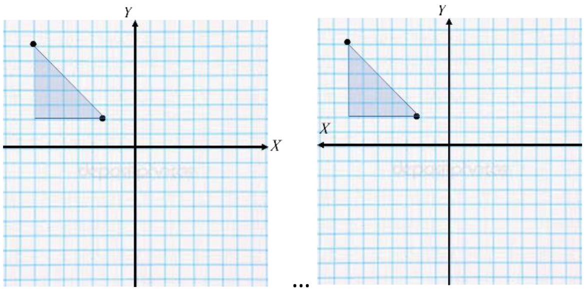
Así se entiende que un cambio de orientación de un eje puede representarse como reflexión o simetría y puede indicar un cambio de signo en las coordenadas, de tal modo que si expresan las coordenadas de un punto en un sistema y luego se indique que se realizó un movimiento de ejes, se puedan indicar las nuevas coordenadas, sin hacer dibujos o emplear símbolos, como un juego.



A partir de esto se puede argumentar que la distancia entre puntos, independientemente de su posición, se conserva y se pueden colocar los puntos en posiciones deseadas solamente moviendo los ejes, mostrando que los puntos en otras posiciones se pueden tener en la misma posición empleada en la obtención de fórmulas.



Algo similar pasa con la fórmula de la pendiente, considerada como la inclinación respecto al eje X. Cuando se hace referencia a la pendiente se requiere un triángulo similar y obtener la misma posición relativa de la que se usa para obtener la fórmula. Pero en el caso de inclinaciones entre 90° y 180° respecto al eje de las abscisas, se requiere una reflexión del eje X respecto al eje Y, por lo que habrá un cambio de signo, así que en ese caso las pendientes serán negativas.



Tratar movimientos de los ejes de manera intuitiva desde el inicio ayuda a dar certeza a las fórmulas que se trabajan, pero también prepara a los estudiantes para entender que esos movimientos se pueden expresar simbólicamente por medio de expresiones algebraicas.

4. Los significados de conjuntos de puntos en el plano: lugares geométricos

Una forma de abordar los conjuntos de puntos en el plano es atender a las relaciones entre las coordenadas dichos puntos. Es decir, tratar a dichos conjuntos de puntos del plano como “lugares geométricos”, en sentido amplio.

Cuando se hace referencia a este sentido de lugar geométrico, la atención se concentra en las propiedades que deben satisfacer las coordenadas de los puntos, lo que se puede constatar gráficamente y expresar con ayuda de números y literales.

Por ejemplo, que la ordenada de los puntos es el triple de la abscisa o que la ordenada sea igual al doble de la abscisa menos ocho, etcétera.

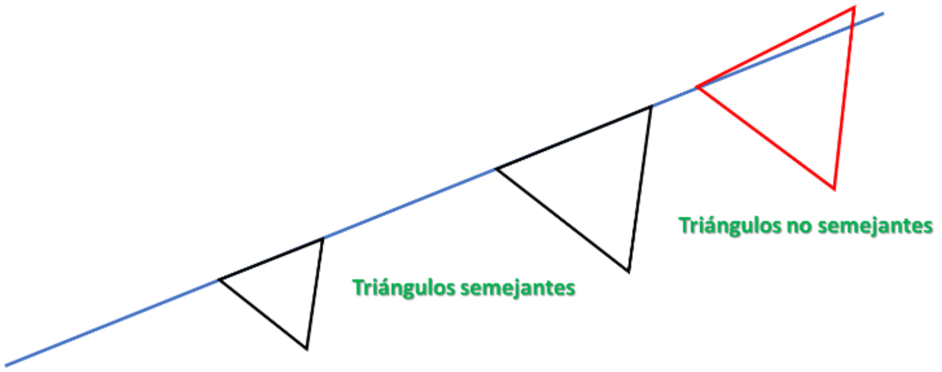
5. La recta sin fórmulas

En la “ecuación canónica de la recta” la pendiente tiene un lugar especial, pero depende de convenciones y ampliaciones de conceptos. En efecto, la tangente de un ángulo se calcula por un cociente de las magnitudes de dos lados. Las razones trigonométricas se trabajan en triángulos rectángulos, se definen en ese contexto, para ángulos agudos, pues son cocientes de lados del triángulo rectángulo, pero para abarcar ángulos mayores que 90°, se amplía esa noción y se puede entender la extensión del concepto con ayuda del círculo trigonométrico, aunque parece que se están considerando “distancias negativas”, lo cual, por lo menos parece incongruente, esa imagen tienen muchos alumnos, pero es una convención adecuada para hablar de los valores de funciones trigonométricas para ángulos de todo tipo y poder definir una función trigonométrica. Así con esas extensiones “convencionales” o “inventadas” (que funcionan muy bien) se habla de pendientes negativas, lo que genera confusiones, al menos dudas. A los alumnos solamente se les informa lo que se hace y se pide seguir reglas que afectan su intuición.

Esta extensión ayuda definir funciones elípticas o hiperbólicas que son muy importantes en la matemática y lo mejor de todo es que funcionan. Pero, eso no lo pueden valorar los estudiantes, está fuera de su alcance.

Otro tema son las imágenes que se tiene de un objeto matemático como el de la recta, que se puede prolongar infinitamente y donde entre dos puntos hay una infinidad de puntos, convenciones necesarias, al interior de la disciplina, que se pasan por alto y no necesariamente tendrían que abordarse con los alumnos, por eso se pasa con disimulo ese tipo de temas.

También cuando se habla de "linealidad", aunque se provoca una imagen un tanto "borrosa" de lo que se quiere indicar con ello, sobre todo a nivel geométrico. Así que hay que hacer plausible esa noción de linealidad geométrica, para ello se puede considerar que, al trazar triángulos con dos vértices en una recta, al tomar otros dos puntos de la recta se podrían trazar triángulos semejantes trazando paralelas a los lados del primer triángulo, pero si solamente se traza un triángulo con un punto sobre la recta esto no se podría lograr.



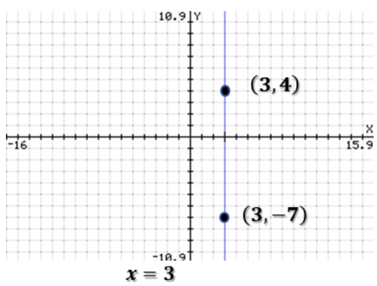
Se puede usar ese sentido de linealidad para trabajar las gráficas de rectas.

6. Los casos más sencillos sin fórmulas ni convenciones.

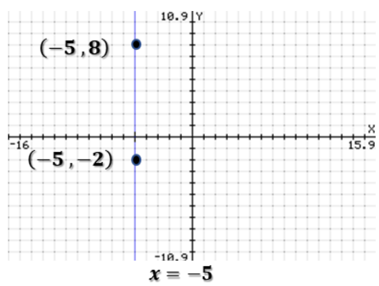
Para iniciar, podemos abordar casos "degenerados", aquellos que los conjuntos de puntos tienen la misma abscisa, o la misma ordenada. Donde no se puede trazar un triángulo rectángulo con dos vértices sobre la recta y lados paralelos a los ejes.

Se puede considerar un conjunto de puntos con abscisa x igual a 3 (la ordenada puede tener cualquier valor) es decir, en cada punto la abscisa (x) tiene valor 3, así que no será extraño representar simbólicamente esta situación por: $x = 3$, una expresión así indica la condición establecida para el conjunto de puntos.

Así mismo, si la abscisa de todos los puntos es -5, se podrá representar por $x = -5$



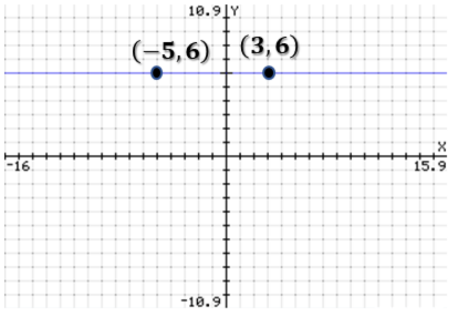
Conjunto de puntos en el plano que tienen abscisa igual a 3 y la ordenada cualquier valor.



Conjunto de puntos en el plano que tienen abscisa igual a -5 y la ordenada cualquier valor.

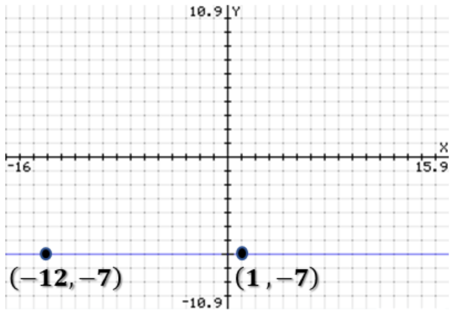
No será necesario mencionar que la pendiente de la recta es infinita ni utilizar algún triángulo rectángulo **¡Se tenía que decir y se dijo!**

Similarmente, si la ordenada tiene el mismo valor no será complicado asociarle una representación simbólica.



$y = 6$

Conjunto de puntos en el plano que tienen ordenada igual a 6 y la abscisa cualquier valor.



$y = -7$

Conjunto de puntos en el plano que tienen ordenada igual a -7 y la abscisa cualquier valor.

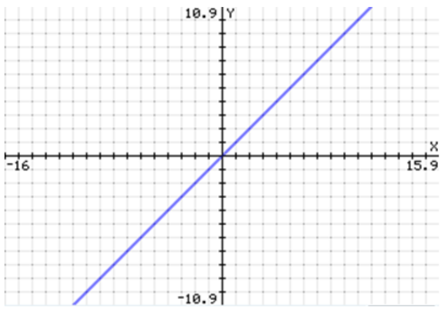
También se hace innecesario de hablar de una pendiente nula, en un caso donde en realidad “no hay pendiente”.

Estos casos se tratan en los libros de texto casi siempre con varios artilugios y se ubican al final de las secciones dedicadas a las rectas. Es muestra del prurito a seguir un “orden disciplinario” en vez de considerar al estudiante y su condición de lego en el tema.

7. Recta sólo hay una: la madre de todas las rectas

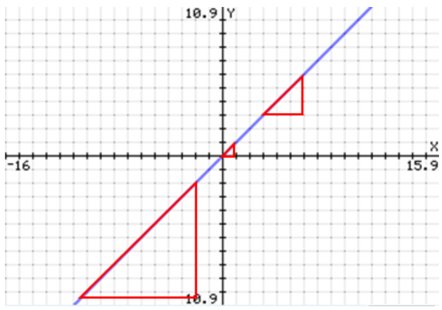
Otro conjunto sencillo de puntos en el plano puede obtenerse considerando los puntos que tienen sus coordenadas iguales. Podemos escribir una expresión del tipo $y = x$ o $x = y$ para representar esta relación, tiene sentido en los dos casos.

En una situación así no es necesario referirse a la tangente de un ángulo de 45°, pero si se podrá constatar que pueden formar triángulos especiales con dos vértices en puntos de la recta. En efecto, es posible trazar triángulos rectángulos isósceles, con dos lados paralelos a los ejes, la hipotenusa de estos triángulos es el segmento con extremos los puntos elegidos de la recta, todos los triángulos conformados así, serán semejantes, lo cual será de gran ayuda para determinar si un punto está o no sobre la recta, desde una perspectiva exclusivamente geométrica.



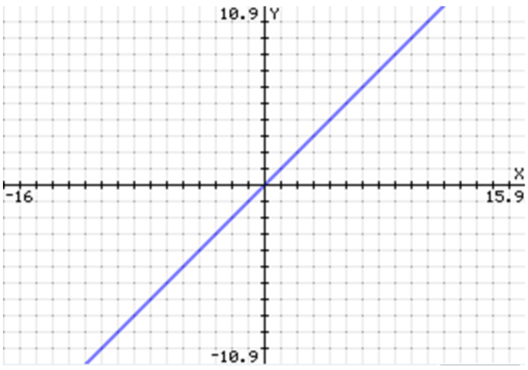
$y = x$ o $x = y$

Conjunto de puntos en el plano que tienen sus coordenadas iguales.



Con dos puntos sobre la recta se forma un triángulo rectángulo isósceles

Estos triángulos sirven de base para poder dar sentido a la “pendiente”. Las representaciones gráfica, algebraica y numérica. Ofrecen, a primera vista, la misma información: un conjunto de puntos del plano que tienen su ordenada igual a su abscisa.

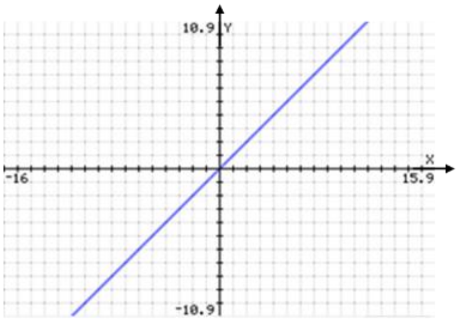


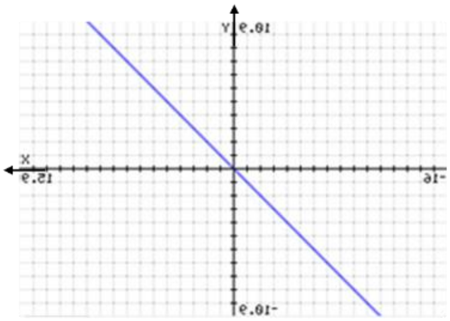
$$y = x$$

x	y
-9	-9
-8	-8
-7	-7
-6	-6
-5	-5
-4	-4
-3	-3
-2	-2
-1	-1
0	0
1	1
2	2
3	3
4	4
5	5
6	6
7	7
8	8
9	9

A esta recta le llamaremos la *recta madre o madre recta*, esto se entenderá después.

También se puede pensar en que las coordenadas tengan signos contrarios, lo cual se puede representar por $y = -x$. Pero, también se puede considerar como un caso relacionado con el anterior, con la recta madre, pues implica que la gráfica será un "reflejo" de $y = x$ respecto al eje de las ordenadas. Se resalta que dicho efecto se lograría si se cambiara la orientación del eje de las abscisas (lo cual se logra cambiando el signo de las referencias numéricas del eje).





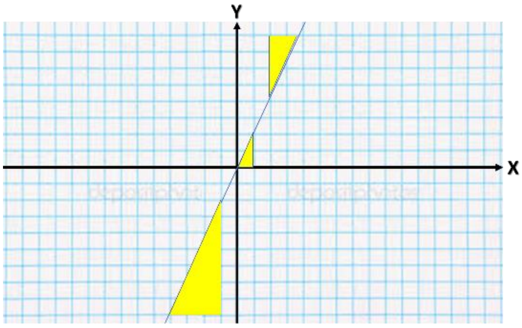
Se cambia la orientación del eje X, es decir, la parte positiva se cambia a la parte negativa, y la negativa a la positiva (hubo un cambio de signo en las abscisas).

Se hace innecesario el uso de valores negativos de la tangente "extendida".

8. La descendencia de la recta madre

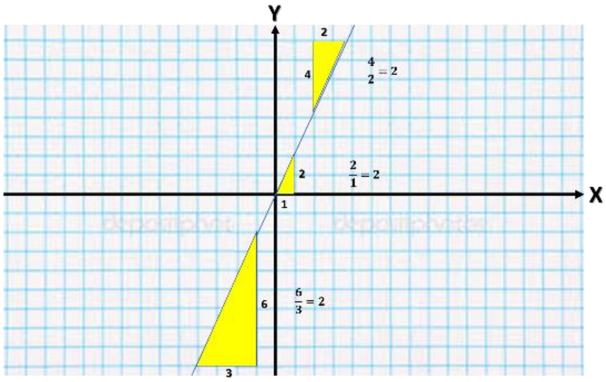
Todas las rectas se explican por movimientos de la madre recta ($y = x$). A partir de ella se explican las posiciones de todas las rectas del plano (excepto cuando las rectas son paralelas a alguno de los ejes de coordenadas). En efecto, si se inclina la recta madre para que se acerque al eje de las ordenadas (se hace más vertical) el triángulo de referencia alarga uno de sus lados. Es como una rotación de la recta respecto al origen de coordenadas. Por ejemplo, girar la recta madre para que el punto (1,1) se coloque ahora en el punto (1,2)

$y = 2x$



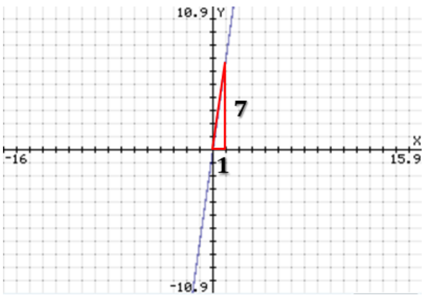
Lo cual conduce a otro tipo de relación entre las coordenadas de los puntos, que indica la expresión algebraica que corresponde:

$y = 2x$



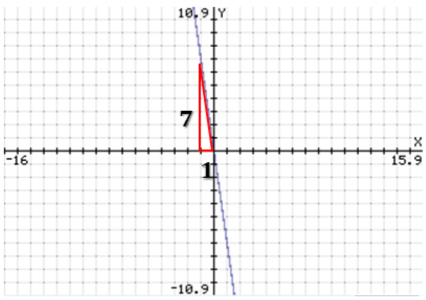
Es esta recta sus puntos cumplen la condición: la ordenada es el doble de la abscisa.

Esto puede hacerse con otras inclinaciones, cada vez más verticales y con las rectas de este tipo con pendiente negativa, que resultan de un reflejo respecto al eje de las ordenadas.



$y = 7x$

Conjunto de puntos en el plano que tienen sus ordenadas igual a siete veces la abscisa.

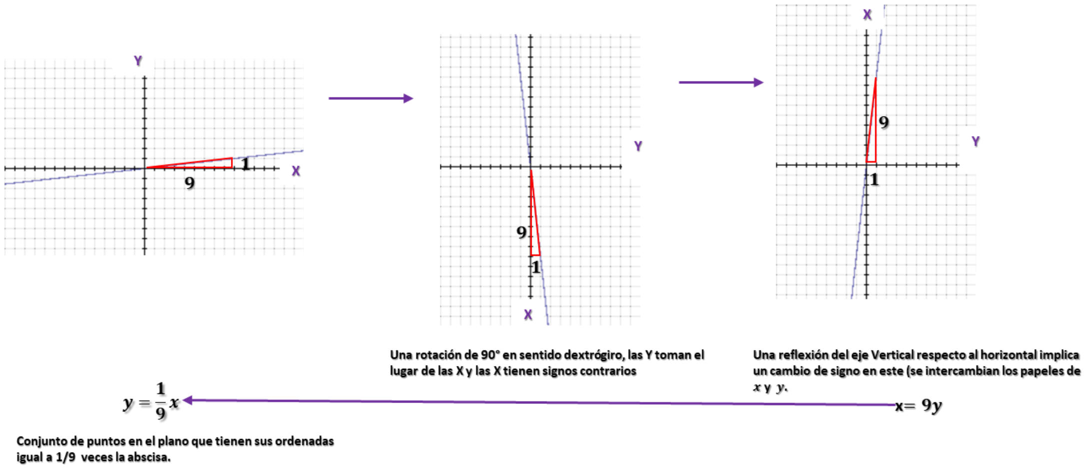


$y = -7x$

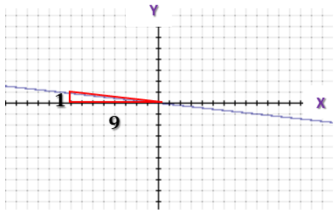
Conjunto de puntos en el plano que tienen sus ordenadas igual a menos siete veces la abscisa.

También se aplican movimientos de ejes para rectas que se "acuestan" (se acercan más al eje X). Se pueden transformar en rectas más verticales con movimientos de los ejes (una rotación y una reflexión).

Aprovechando esto se pueden obtener las expresiones algebraicas correspondientes. Después de una rotación y una reflexión, se llega a que los papeles de los ejes se intercambian y puede expresarse esta relación por: $x = 9y$ de lo cual se determina que la expresión correspondiente a los ejes originales es: $y = \frac{1}{9}x$.

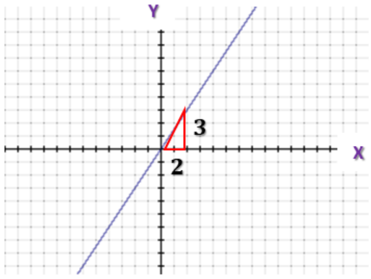


También será posible encontrar las expresiones algebraicas cuando la inclinación se obtiene por una reflexión y solamente implicará un cambio de signo.

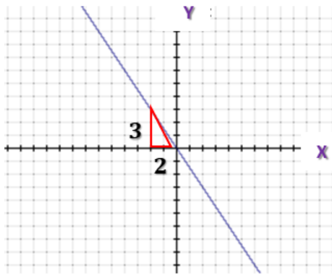


$$y=-\frac{1}{9}x$$

Las mismas ideas se aplican a otras pendientes que se expresan como fracciones:



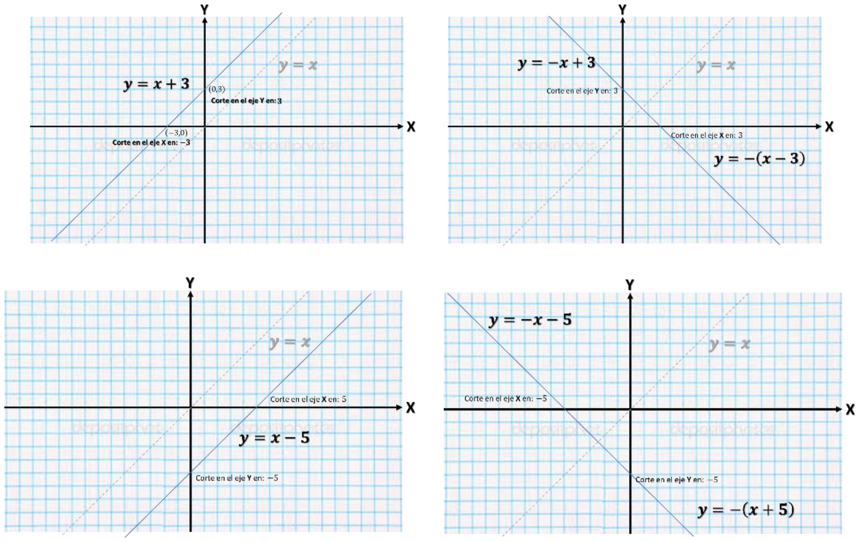
$$y=\frac{3}{2}x$$



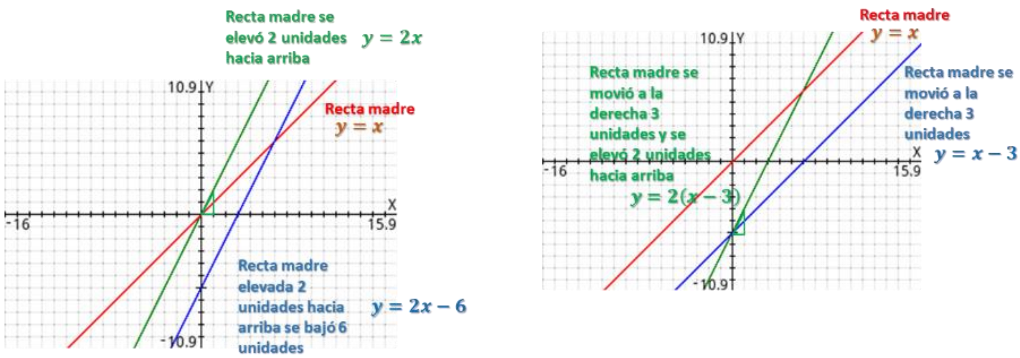
$$y=-\frac{3}{2}x$$

No se han hecho de lado el uso de representaciones numéricas, se trabajan directamente en la gráfica al contar valores de las escalas de los ejes para ubicar puntos o trazar los triángulos.

Ahora esas rectas se pueden “bajar” o “subir” respecto a los ejes, lo cual se explica por translaciones de los ejes o simplemente por sumar o restar una cantidad:

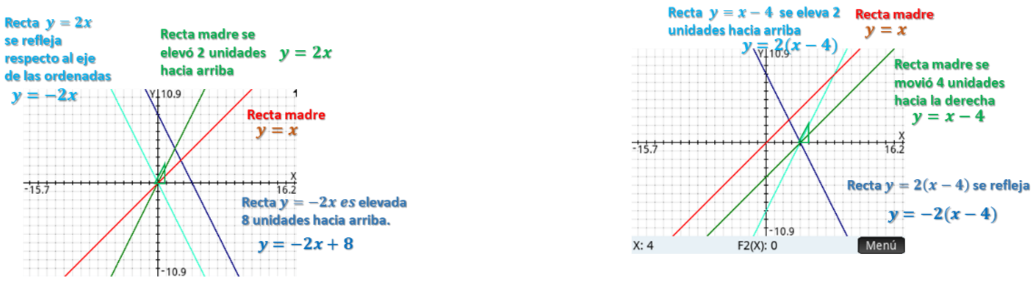


De esta forma se entiende el sentido de los números en las expresiones algebraicas:



Con la misma gráfica de una recta se pueden obtener dos expresiones algebraicas que implican diferentes transformaciones: $y = 2x - 6$ y $y = 2(x - 3)$

Análogamente, se procede cuando la inclinación es mayor que 90°:



Así se encuentran las expresiones algebraicas: $y = -2x + 8$ y, $y = -2(x - 4)$.

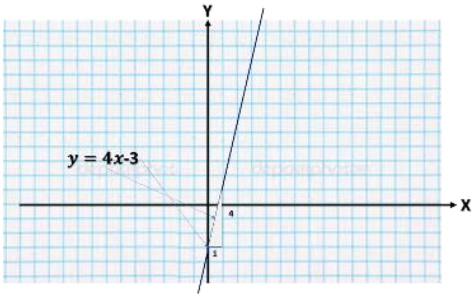
Después de analizar varios casos se constata que: $y = mx + b$ y $y = m(x - a)$, representan rectas donde m indica la inclinación o pendiente, b el valor del eje Y donde la recta “corta” al eje de las ordenadas (que se conoce como ordenada al origen) y a el valor del eje de las abscisas donde la recta lo “interseca”.

Es así como, usando solamente transformaciones geométricas sencillas se da sentido a los elementos de expresiones algebraicas como: $y = mx + b$ o $y = m(x - a)$. Es decir, es posible abordar las representaciones algebraicas de la recta, sin trigonometría, ni convenciones sobre las razones trigonométricas de ángulos mayores que 90° (lo cual implica incorporar el círculo trigonométrico y dar valores sensatos, pero "extraños" en ciertos casos).

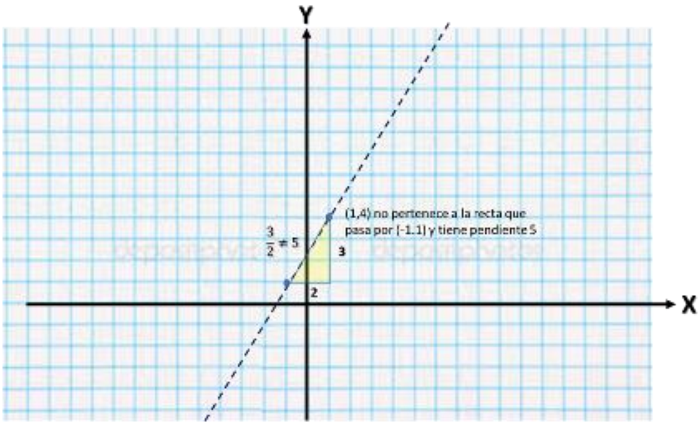
Tal vez aún no quede claro que hay otra ventaja. Se puede partir de las gráficas o relaciones numéricas para determinar ecuaciones de rectas, razonando y utilizando más elementos de geometría, modificando el uso exclusivo del álgebra y substituciones en fórmulas.

9. Encontrando expresiones algebraicas a partir de razonamientos geométricos

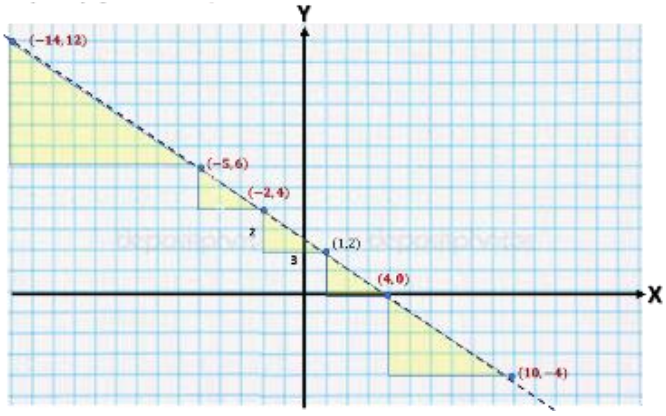
Graficar una recta se realiza normalmente tabulando valores a partir de la representación algebraica, y con los valores calculados se ubican puntos en el plano cartesiano para traza la gráfica (en realidad solamente se requieren dos puntos, aunque varios tabulan más de dos valores, es decir no se tiene clara la idea de lo que es una recta). Si se conocen valores de los cortes a los ejes, es muy sencillo determinar la expresión algebraica correspondiente. También se puede determinar si un punto está o no en la recta o determinar puntos sobre la recta solamente considerando triángulos semejantes. Por ejemplo, si se requiere graficar la recta: $y = 4x - 3$, con lo visto se realiza sin tabular, aunque el conteo de valores en la escala y las coordenadas de puntos se refieren a las relaciones numéricas.



O si se desea determinar si el punto (1,4) pertenece o no a la recta que pasa por (-1.1) y tiene pendiente 5, basta revisar la gráfica de la recta que pasa por (1,4) y (-1,1) y determinar si tiene pendiente 5.



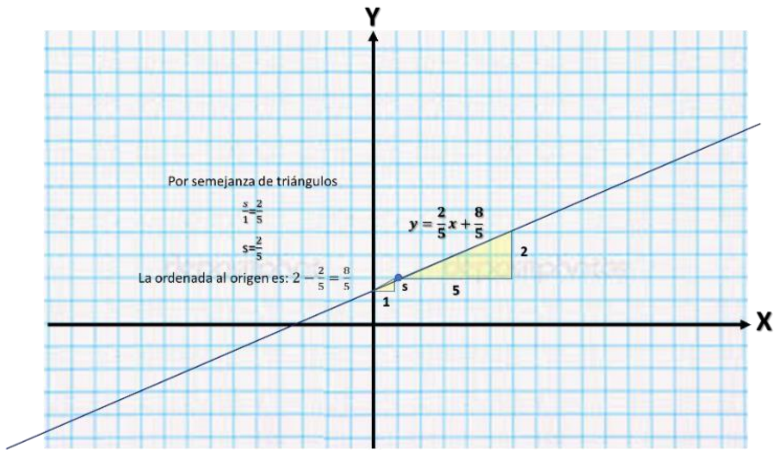
Si se desean puntos de una recta que pase por (1,2) y tenga pendiente $-\frac{2}{3}$



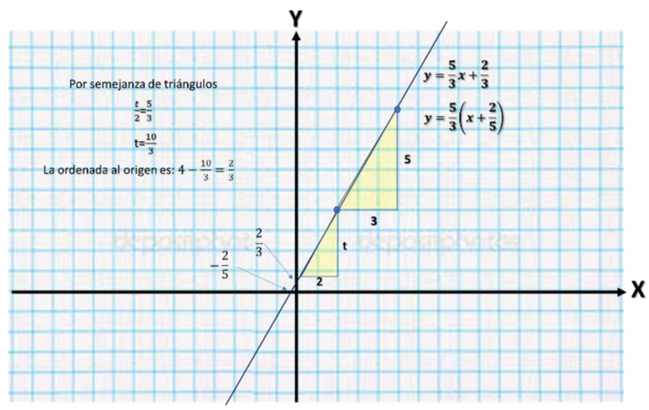
En los casos anteriores solamente se requiere una buena idea de lo que es una recta y no será necesario encontrar la expresión algebraica y después tabular.

Pero si se trata de determinar expresiones algebraicas de las ecuaciones de rectas que satisfacen ciertas condiciones será posible hacerlo solamente con elementos geométricos, principalmente utilizando la semejanza de triángulos.

Por ejemplo, encontrar la ecuación de la recta que pasa por (1,2) y tiene pendiente 2/5, se puede resolver partiendo de la gráfica y usando semejanza de triángulos para determinar la "ordenada al origen".



O cuando se desea determinar la ecuación de la recta que pasa por los puntos (2,4) y (5,10), puede determinar la ordenada al origen por semejanza de triángulos, razonando sobre la figura y no simplemente realizando substituciones y manipulaciones algebraicas.



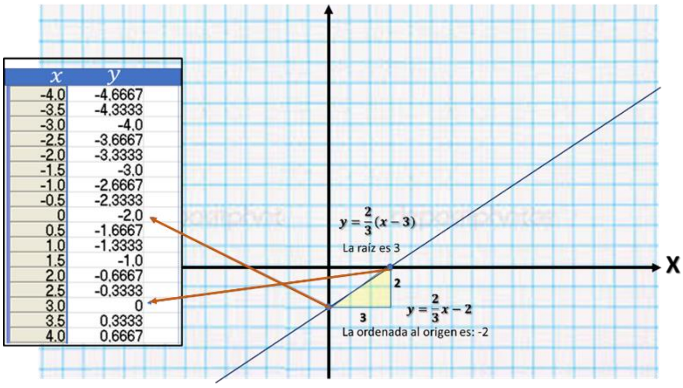
También dada una tabla de valores, si se sabe que la gráfica debe corresponder con una recta, se contarán con los elementos necesarios para encontrar una expresión, usando adecuadamente los valores que se proporcionan en la tabla.

Por ejemplo, dada la table:

x	y
-4.0	-4.6667
-3.5	-4.3333
-3.0	-4.0
-2.5	-3.6667
-2.0	-3.3333
-1.5	-3.0
-1.0	-2.6667
-0.5	-2.3333
0	-2.0
0.5	-1.6667
1.0	-1.3333
1.5	-1.0
2.0	-0.6667
2.5	-0.3333
3.0	0
3.5	0.3333
4.0	0.6667

Se puede encontrar la "ecuación de la recta" solamente usando recursos geométricos.

Si la tabla incluye los valores donde la recta "corta" a los ejes será muy sencillo hacerlo:



Si la tabla no incluye dichos valores solamente se requiere decidir tomar los más "cómodos", digamos el (-3.-4) y el (1.5,-1) u otros. No importa la elección, sino que se puedan utilizar las relaciones geométricas para dar sentido a las expresiones algebraicas.

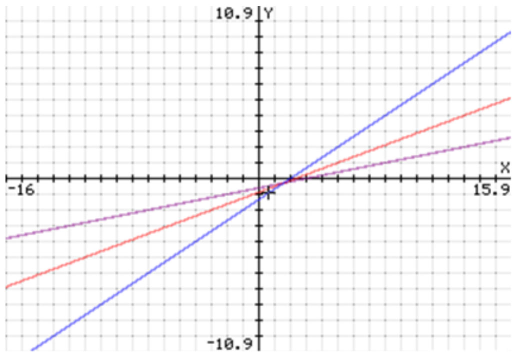
9. Manipulaciones algebraicas centradas en los "lugares geométricos"

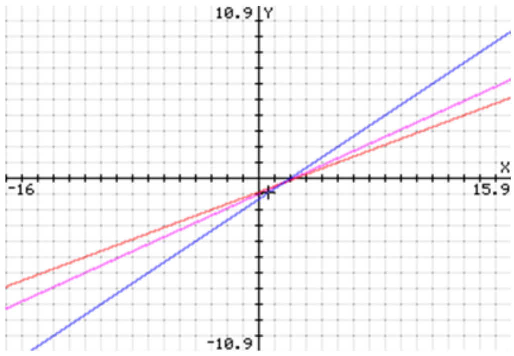
Un problema, dado el carácter numérico, hay que tener claro que x y y se asocian con valores numéricos de las coordenadas de puntos en el plano de las literales, por ello cuando se desea utilizar el álgebra para manipular el tipo de expresiones algebraicas de las rectas, las literales se comportan con las mismas propiedades de los números., tal y como se realizan las manipulaciones algebraicas para resolver sistemas de ecuaciones lineales:

$$\begin{array}{r} 2x - 3y = 4 \\ + \; -3x + 8y = -7 \\ \hline -x + 5y = -3 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 2x - 3y = 4 \\ - \; -3x + 8y = -7 \\ \hline 5x - 11y = 11 \end{array}$$

Lo cual también conduce a gráficas que no se pueden interpretar como "suma" de expresiones algebraicas "completas", sino como operaciones entre números.

Quedando gráficas para la suma o substracción ajenas a lo que debería darse con otro significado de las relaciones en el plano que corresponden con el concepto de funciones reales de una variable real.





$$+\ \begin{array}{r} 2x-3y=4 \\ -3x+8y=-7 \\ \hline -x\ +5y=-3 \end{array} \qquad\qquad -\ \begin{array}{r} 2x-3y=4 \\ -3x+8y=-7 \\ \hline 5x\ -11y=11 \end{array}$$

En este caso, las gráficas de las tres rectas concurren en un punto, lo cual es de esperarse, pues las expresiones algebraicas representan relaciones entre números, de tal modo que la solución de ecuaciones que se suman o se restan deberá ser también solución de la suma de las dos ecuaciones o su diferencia.

Comprobemos esto con una calculadora con CAS

solve({2*x−3*y=4, -3*x+8*y=−7},{x, y})

$$\left\{\begin{bmatrix} \frac{11}{7} & \frac{-2}{7} \end{bmatrix}\right\}$$

solve({2*x−3*y=4, −1*x+5*y=−3},{x, y})

$$\left\{\begin{bmatrix} \frac{11}{7} & \frac{-2}{7} \end{bmatrix}\right\}$$

solve({−3*x+8*y=−7, −1*x+5*y=−3},{x, y})

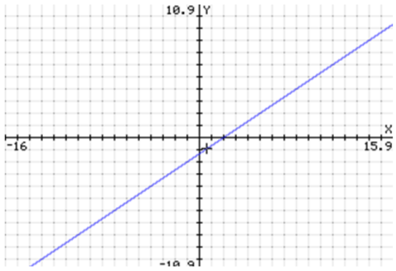
$$\left\{\begin{bmatrix} \frac{11}{7} & \frac{-2}{7} \end{bmatrix}\right\}$$

La multiplicación o división de este tipo de expresiones resulta difícil de incorporar.

Sin embargo, una expresión como: $(\mathbf{2x-3y-4})(\mathbf{-3x+8y+7})=\mathbf{0}$, donde se usan las mismas ecuaciones, se interpreta simplemente como un producto de dos números.

Sabemos que, si el producto de dos números es cero, uno es cero, el otro es cero o ambos son cero.

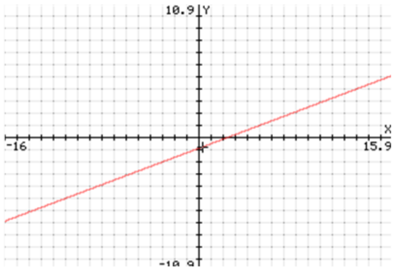
El efecto es interesante al graficar. Pues se puede igualar a cero cada factor y nos darían las mismas gráficas que presentamos antes:



$2x - 3y = 4$

Conjunto de puntos del plano cartesiano donde el doble de su abscisa menos el triple de su ordenada es igual a cuatro

A

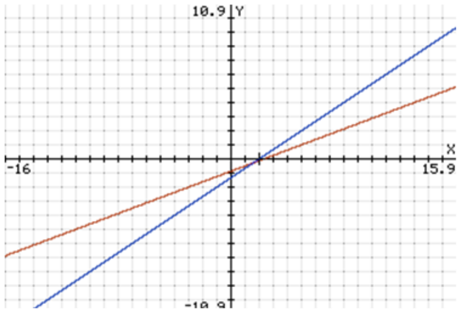


$-3x + 8y = -7$

Conjunto de puntos del plano cartesiano donde el negativo del triple de su abscisa más 8 veces el valor de su ordenada es igual a menos siete

B

Pero al graficar la expresión del producto, se obtienen las gráficas de las dos rectas al mismo tiempo.



$(2x - 3y - 4)(-3x + 8y + 7) = 0$

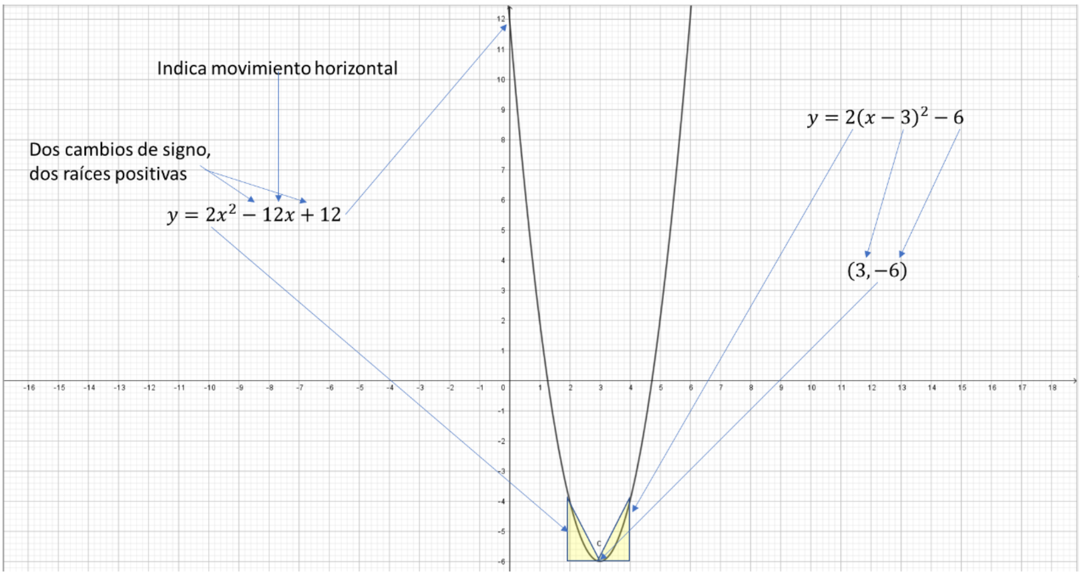
Conjunto de puntos del plano cartesiano donde el producto del número obtenido por doble de su abscisa menos el triple de su ordenada menos cuatro por el negativo del triple de su abscisa más 8 veces el valor de su ordenada más siete es igual a cero

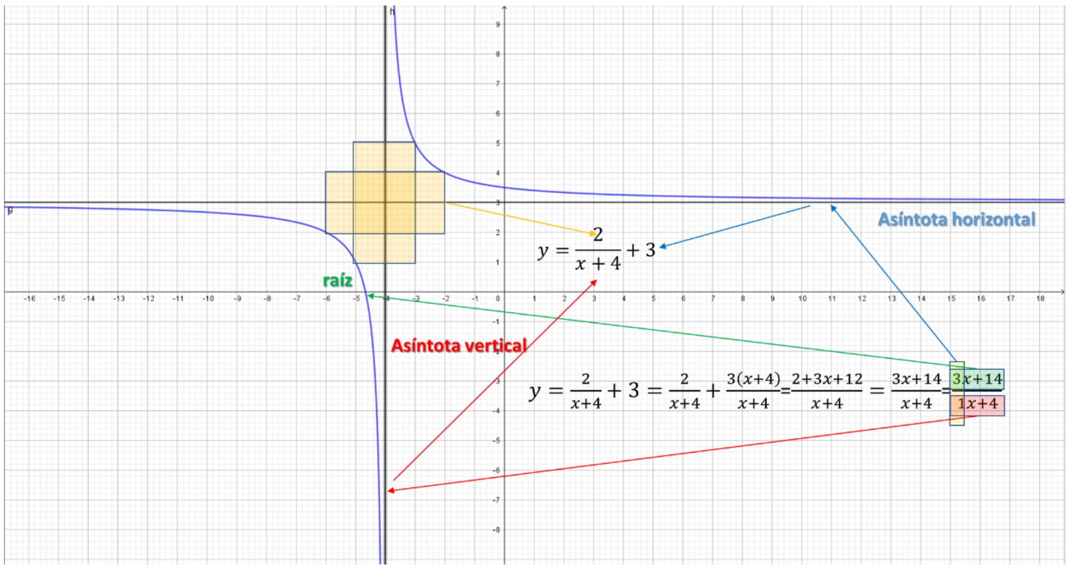
$$A \times B = 0$$
$$A = 0 \; o \; B = 0$$

Hay muchos aspectos interesantes de trabajar con las rectas como se ha enfocado en estas notas, por espacio no se pueden abordar, pero se deja como reto para el lector.

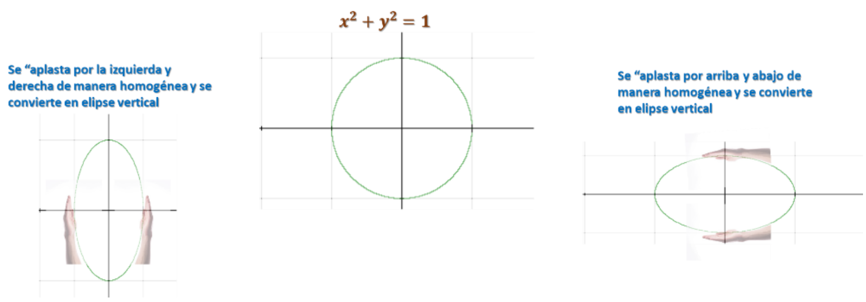
10. Las otras madres

De manera similar se pueden trabajar “lugares geométricos” la ordenada es igual al cuadrado de la abscisa ($y = x^2$) o la ordenada es igual al recíproco de la abscisa ($y = \frac{1}{x}$).





El caso de la circunferencia y la elipse se pueden abordar juntos pues una elipse se puede obtener al “aplastar una circunferencia” y se puede partir de la circunferencia unitaria.



Después de dar sentido a las relaciones numéricas, algebraicas y gráficas, se tienen mejores elementos para abordar con mayor profundidad y en menos tiempo, los contenidos de geometría analítica, quedando la posibilidad de dar a conocer otro tratamiento de las cónicas definidas como los lugares geométricos conocidos y justificarlos como cortes de un plano a un cono utilizando las esferas de Dandelin.

Comentarios finales

Generalmente, un curso de geometría euclidiana plana antecede al curso de geometría analítica, lo cual sucede con la tendencia a usar el álgebra, así las relaciones geométricas pasan a un segundo plano, ya no se usan de manera importante.

Así las ideas fundamentales de "lugares geométricos" que se asocian con sencillez a expresiones algebraicas, pueden llevarse a otro significado, como el de función real de una variable real. que se trabajarán después (como en los cursos de cálculo). Además, se puede resaltar la importancia de la notación pues la estructura algebraica de las funciones se parece más a la de los números:

Operaciones de funciones definidas a través de los valores de ellas

$f \pm g$	$(f \pm g)(x) = f(x) \pm g(x)$	
$f \times g$	$(f \times g)(x) = f(x) \times g(x)$	
$f \div g$	$(f \div g)(x) = f(x) \div g(x)$	$g(x) \neq 0$

Para graficar las funciones lineales se hace de la misma forma que en lo anterior.

Eso ayuda a analizar polinomios y funciones racionales por medio de productos o divisiones de funciones lineales, dando sentido a muchos teoremas importantes y a límites infinitos analizando comportamientos asintóticos.

Se desarrolla el pensamiento gráfico, lo cual puede ser de mucha utilidad en la vida profesional pues muchas aplicaciones dependen de interpretar adecuadamente las gráficas que se obtienen por distintos medios, sobre todo cuando no se cuenta con un modelo algebraico.

Un enfoque como el propuesto permite desarrollar diversas habilidades matemáticas que tienen relación con la flexibilidad o la reversibilidad del pensamiento, además de favorecer el desarrollo de una memoria matemática, que implica reconocer estructuras y no casos específicos.

También, se favorece el uso de la inducción y la analogía que son dos elementos fundamentales para el desarrollo del pensamiento matemático.

Es importante indicar que resulta adecuado ir abandonando los acetatos y la base de papel cuadriculado, es una idea fundamental en el uso de manipulativos, pues se deben desarrollar habilidades para pensar en las gráficas y sus representaciones mentalmente sin manipular objetos, con dibujos propios. Para un mejor trazo de líneas o ejes se pueden utilizar otros recursos como graficadores (ya sea software como Graphmatica, GeoGebra, etc. o del que poseen algunas calculadoras gráficas), con estos recursos se pueden abordar de ecuaciones diferencial, entre otros.

Referencias

Abric, JC (1987). Coopération, compétition et représentations sociales. Cousset, Suiza.

Mancera, E. (2004). Notas del curso Métodos Cuantitativos Aplicados a la Economía. UIA. México.

Mancera, E. (2005). La danza de las rectas. Innovaciones Educativas, 7ª edición, Education TI, USA.

Resnik, L. y Ford, W. (1991). A enseñanza de las matemáticas y sus fundamentos psicológicos. Temas de Educación, Paidós. España.

Rees, P. (1970), Geometría Analítica. Reverté. España.

Rodríguez, R. (2017). Una nueva visión de la Geometría Fleix Kline. Serie Genios Matemáticos, RBA, España.

Sánchez – Serrano, A. (1962). Representación de curvas problemas y aplicaciones. Escuela Superior de Ingenieros Aeronáuticos, España.

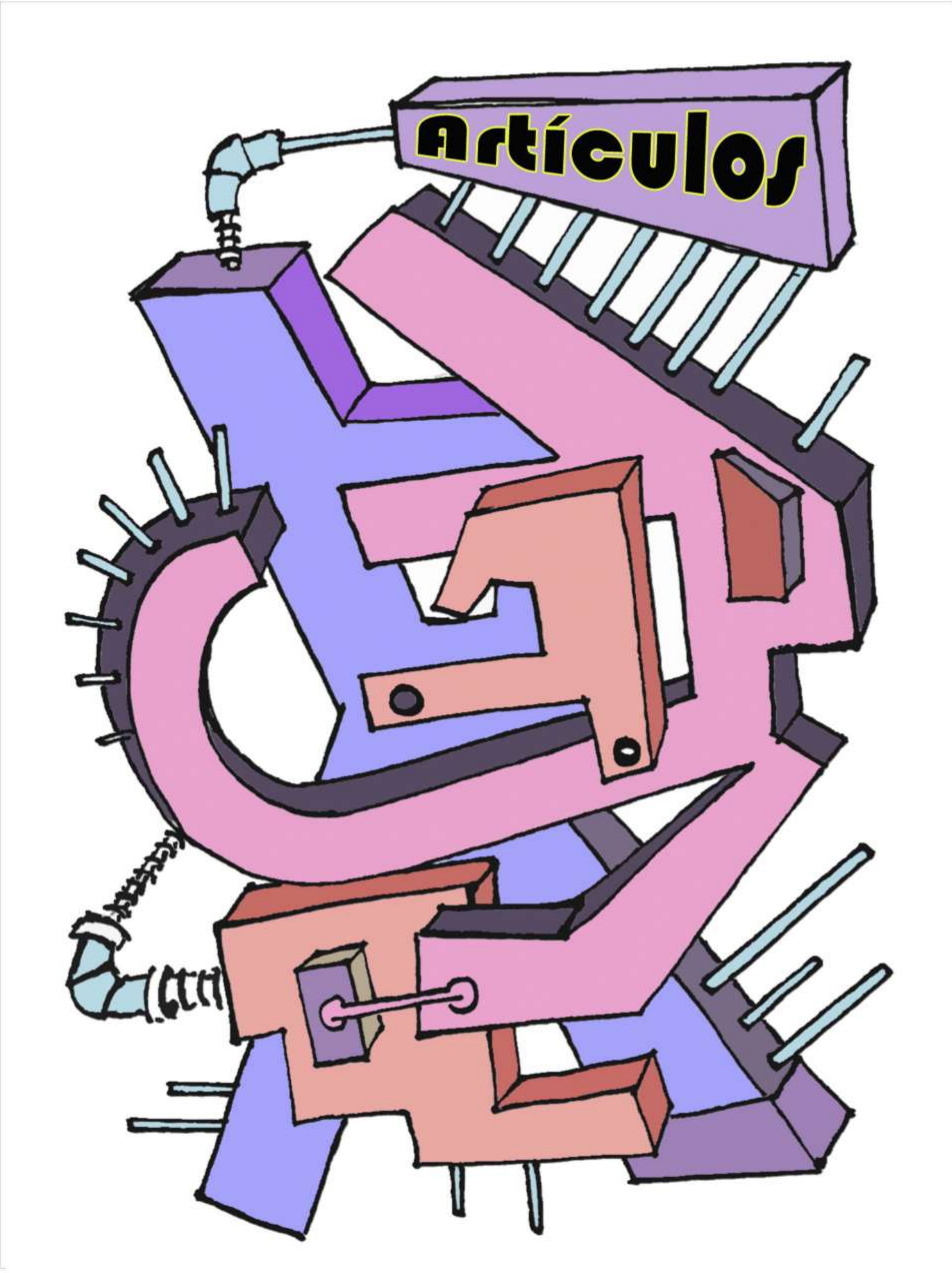
Shilov G. E. (1976); Cómo construir gráficas. Temas Matemáticos, Limusa, México

Eduardo Mancera. Se ha dedicado a la enseñanza de varios niveles educativos, como docente e investigador, sus áreas de investigación son la resolución de problemas, el uso de recursos tecnológicos en la enseñanza, la enseñanza de la matemática con manipulativos, tanto a nivel de propuestas en el aula, como elaboración de textos de matemáticas y formación de docentes. mancera.eduardo@gmail.com

UNIÓN

REVISTA IBEROAMERICANA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA

http//union.fespm.es/index.php



UNIÓN
REVISTA IBEROAMERICANA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA

ISSN: 1815-0640
Número 64. Abril 2022
Páginas 1-17

Creación de materiales educativos STEM abiertos y reproducibles con RStudio.

Irma Noemi No, Julián Eloy Tornillo, Guadalupe Pascal

Fecha de recepción: 24/6/2021
Fecha de aceptación: 11/10/2021

Resumen	La actualización de los objetos de aprendizaje presentes en los materiales de enseñanza del área STEM (Ciencia, Tecnología, Ingeniería y Matemáticas) requiere de un importante esfuerzo colaborativo para asegurar su vigencia tecnológica, pero esto sólo es posible bajo condiciones de reproducibilidad y apertura. El uso de lenguajes de edición como "*Markdown*", y en particular, el entorno de desarrollo "*RStudio*" y su recurso "*Rmarkdown*" posibilitan la generación de materiales educativos reproducibles y abiertos basados en documentos integrados "*texto – código – resultados*", de una manera ágil y gratuita. En esta investigación se exponen recursos para la confección y la publicación de materiales docentes del área matemática. **Palabras clave**: Reproducibilidad, RStudio, STEM, Rmarkdown
Abstract	Updating the learning objects present in STEM teaching materials (Science, Technology, Engineering and Mathematics) requires a significant collaborative effort to ensure their technological validity, but this is only possible under conditions of reproducibility and openness. The use of editing languages such as "Markdown", and in particular, the development environment "RStudio" and its resource "Rmarkdown" allow the generation of reproducible and open educational materials based on integrated documents "text - code - results", of an agile and free of charge way. This research presents resources for the preparation and publication of teaching materials in mathematics. **Keywords**: Reproducibility, RStudio, STEM, Rmarkdown
Resumo	A atualização dos objetos de aprendizagem presentes nos materiais didáticos STEM (Ciências, Tecnologia, Engenharia e Matemática) requer um significativo esforço colaborativo para garantir sua validade tecnológica, mas isso só é possível em condições de reprodutibilidade e abertura. O uso de linguagens de edição como "Markdown" e, em particular, o ambiente de desenvolvimento "RStudio" e seu recurso "Rmarkdown" permitem a geração de materiais educacionais reproduzíveis e abertos baseados em documentos integrados "texto - código - resultados", de uma forma ágil e gratuita. Nesta pesquisa, são expostos recursos para a preparação e publicação de materiais didáticos na área de matemática. **Palavras-chave:** Reprodutibilidade, RStudio, STEM, Rmarkdown

1. Introducción

El diseño curricular expresado en los planes de estudio actuales posee una marcada orientación a la formación por competencias, respaldando de esta manera los numerosos requisitos de ingreso al sistema del mercado laboral. Para validar las competencias desarrolladas y fortalecidas durante la formación universitaria se deben incorporar estrategias de enseñanza dinámicas que acompañen los perfiles laborales solicitados en la actualidad y en el futuro cercano. La noción de una formación académica sostenible en el tiempo no alude a un corpus de contenidos y prácticas de enseñanza estático, sino a un conjunto de materiales educativos editables y reproducibles a través del buen uso de plataformas, lenguajes informáticos y documentación de respaldo.

La noción de reproducibilidad es parte de la definición de método científico que la propia academia aplica y divulga, según Ynoub (2017) ”*Las principales características de un método científico válido son la falsabilidad, la reproducibilidad y la repetibilidad de los resultados, corroborada por revisión por pares”* (p.15) . La reproducibilidad alude directamente a la posibilidad de obtener idénticos resultados a los divulgados por el docente utilizando los recursos, las indicaciones y la documentación por él informados. En este sentido, un material creado se considera reproducible si lo acompaña un texto interpretable por computadora (código) o el detalle preciso de la metodología utilizada, que permita recrear exactamente todos los resultados y figuras a partir de los datos originales (Peng, 2011; Marwick, 2016). La reproducibilidad es entonces una medida que acompaña a todo material educativo en cuanto exista una recolección, tratamiento y análisis de datos expresados en el mismo, que recorre un gradiente de valores (Ver figura 1), desde la imposibilidad de reproducir lo expresado, hasta la perfecta posibilidad de hacerlo a través de los datos, códigos y protocolos expuestos (Peng, 2011; FitzJohn et al., 2014). Cabe destacar que la bibliografía sobre replicabilidad contiene los propios conceptos que impulsa, es decir, se basa en material replicable y disponible en formato abierto, tanto para el uso, como para la reformulación y avance de sus contenidos (Rodriguez-Sanchez et al., 2016).

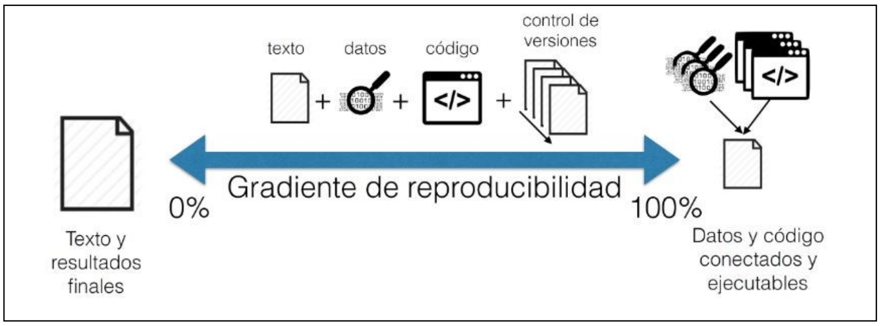


Figura 1. Gradiente de Reproducibilidad.
Fuente: Rodríguez-Sánchez et al.(2016).

> “*La reproducibilidad no es una cualidad binaria sino un gradiente. Los artículos científicos que sólo contienen el texto, resultados y figuras finales (por ejemplo, en un único archivo pdf) son los menos reproducibles: es imposible reconstruir detalladamente el proceso de análisis desde los datos originales hasta los resultados finales. La publicación de los datos y/o el código empleado para el análisis*

> *contribuyen a mejorar la reproducibilidad. Igualmente, la existencia de un sistema de control de versiones (como git) permite reconstruir perfectamente la historia del proyecto. Finalmente, en el extremo del gradiente de reproducibilidad se encuentran los documentos dinámicos (por ejemplo, Rmarkdown) que integran perfectamente texto, datos y código ejecutable*". (Rodríguez-Sánchez et al., 2016, pág. 84)

Algunos de los factores que afectan a la posibilidad de reproducir las experiencias y resultados publicados en materiales de enseñanza suelen ser: los sesgos (de "selección" o de "inflación" provocando el conocido "sesgo de exceso de significación"), el error en los análisis de datos, la metodología o el diseño, las políticas editoriales de extrema confidencialidad, la existencia de un resguardo de financiamiento previsto, las prácticas computacionales irreproducibles y los protocolos cuestionables, entre otros (Monterrey, 2018).

Específicamente la reproducibilidad en los contextos de enseñanza del área STEM (Ciencia, Tecnología, Ingeniería y Matemáticas) se sitúa en el campo teórico de la didáctica, bajo líneas de estudio sobre temáticas de transposición y obsolescencia de las situaciones de enseñanza-aprendizaje. Puede encontrarse en autores como Brousseau planteos del tipo "*Saber lo que se reproduce en una situación de enseñanza es justamente el objetivo de la didáctica*" (Brousseau, 1986, p. 93), considerando para ello dos subsistemas interrelacionados (el del docente y el del alumno). De esta manera, diversos autores investigan la noción de reproducibilidad en el campo didáctico (mediante el planteo de problemas abiertos, cambios de escenarios y en la propia formación docente) encontrándose un hilo histórico, común y conducente sobre el "envejecimiento" de los materiales creados y las propuestas de enseñanza diseñadas (Artigue et al., 1995; Arsac, 1992; Lezama, 2005).

Desde una mirada global es muy difícil poder asegurar la perfecta replicabilidad educativa por existir numerosas variables intervinientes ("externas" (ligadas a la estructura/ingeniería didáctica de la propuesta) e "internas"(ligadas a la significación de los aprendizajes para cada grupo de estudiantes) (Lezama, 2005; Montoya y Lezama, 2016), todas ellas inmersas además en un contexto de formación por competencias en constante evolución. Esta variabilidad aporta a la veloz obsolescencia de los instrumentos didácticos en el área matemática, haciéndose necesario el conocimiento de diferentes recursos tecnológicos como los que desarrollaremos a continuación, que sirvan de soporte a la tarea docente contra el "envejecimiento" de los materiales educativos y favorezcan la colaboración.

2. Soportes para materiales de enseñanza reproducibles

Los docentes de las áreas STEM, siempre han tenido que vencer obstáculos comunicacionales relacionados a la elaboración de sus materiales didácticos. Crear un apunte de cátedra en este campo de conocimientos, involucra (por lo menos) el uso de procesador de textos, un editor de ecuaciones y la incorporación de visualizaciones gráficas (estáticas o dinámicas/interactivas) en algún utilitario o lenguaje informático (Excel, Graphmatica, Maple, Mathematica, Matlab, GeoGebra, R, Minitab, SPSS, Python, etc.). Posteriormente a su creación, la publicación de este material puede realizarse en diversos soportes (digitales o físicos).

Numerosos instrumentos tecnológicos, informáticos y de comunicación han sido incorporados para enriquecer la ingeniería didáctica que subyace a la elaboración de materiales educativos en el área STEM. Las plataformas multimediales (YouTube, Vimeo, y Twitch, entre otras) se han esforzado por incorporar herramientas de interactividad entre sus recursos, mejorando notablemente las experiencias de aprendizaje asociadas a estos sitios gratuitos. Los applets y widgets creados por docentes en diferentes programas, y embebidos en sitios abiertos (geogebra.org, wolframalpha.com, shinyapps.io, entre otros), facilitan el aprendizaje y aumentan la motivación de los estudiantes. La interacción de los alumnos con estos objetos se basa en acciones de ejecución (run o play) bajo la elección de un conjunto de parámetros destinados a enriquecer el aprendizaje de los contenidos involucrados. Las metodologías de enseñanza que incorporan estrategias de "Storytelling" y "Gamificación" contienen un componente adicional de emoción y han sido recientemente incorporadas a los objetos de aprendizaje con soporte tecnológico (Torrente et al., 2018; Tse et al., 2020).

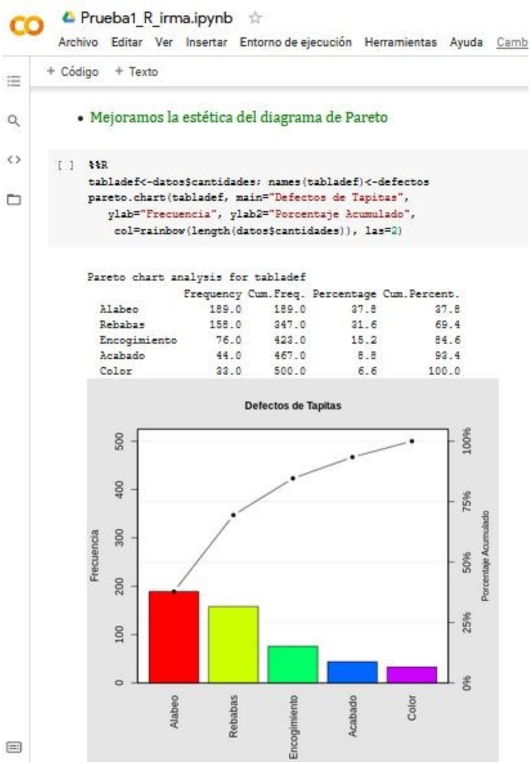
Las actividades de aprendizaje interactivo generalmente utilizan cinco tipos básicos de operatividad, concretamente: diálogo, control, manipulación, búsqueda y navegación; estas competencias tecnológicas fortalecidas mediante el uso de los recursos anteriormente mencionados podrían profundizarse en todo el profesorado haciendo visible el código que interviene en el objeto, es decir, favoreciendo la reproducibilidad del material.

En general, la actualización de los materiales y los objetos de aprendizaje tecnológicos requieren de un importante esfuerzo de reelaboración y republicación para evitar su envejecimiento y posibilitar la reproducibilidad de los significados asociados a los recorridos didácticos propuestos. La reformulación y adecuación de los materiales se facilita en gran medida mediante el uso de lenguajes de edición como "Markdown" (markdown.es). La sintaxis Markdown se encuentra disponible online en plataformas abiertas y gratuitas del tipo "Google Colaboratory" (colab.research.google) y "Jupyter Notebooks" (jupyter.org) (ver ejemplos en Tabla 1), y también forma parte de entornos de desarrollo integrados (IDEs) de descarga y uso gratuitos, instalables en el computador como "RStudio" (rstudio.com) y "JupyterLab" (jupyter.org). Estos recursos posibilitan la creación de documentos integrados "*texto – código – resultados (tablas y gráficos)*" altamente reproducibles por alumnos y por docentes.

Los documentos creados en los entornos RStudio y Jupyter mencionados, posibilitan incorporar celdas de texto, imágenes, links, tablas, expresiones LaTeX, y también código de programación (en lenguaje R o Python) que al ejecutarse incrusta en el propio documento la salida correspondiente (gráficas, soluciones de problemas, mapas, listas, elementos interactivos, u otros). El documento producido por lo tanto posee la ventaja de ser un "todo en uno", y al necesitar el docente renovarlo para incorporar un ajuste a nuevos contextos, puede lograrlo tan sólo cambiando alguna sentencia de programa o dato de entrada.

Los documentos además pueden ser compartidos en línea (en versión .html -que el propio entorno genera-) por lo cual los cambios que se produzcan tendrán efecto inmediato a la vista de los usuarios (alumnos, pares docentes y lectores en general).

Google Colaboratory



Jupyter Notebook

Tabla 1. Documentos reproducibles realizados en plataformas online (link al video y materiales) .

3. Creación de Documentos reproducibles con RMarkdown en RStudio

Uno de los entornos de desarrollo integrado (IDE) más difundido y utilizado para el lenguaje de código abierto “R” es RStudio. El IDE RStudio puede descargarse de forma gratuita y ser utilizado en cualquier sistema operativo (Windows, Linux o Mac). La nueva versión de RStudio (1.4) incorpora características de “visualización” otorgando vistas previas del resultado final del documento y desplegando opciones de edición ubicadas en un menú superior (emulando los íconos de Word: elección de fuentes, alineación, inserción, citas, etc.).

Para crear un archivo reproducible en RStudio se debe seleccionar la opción RMarkdown; se desplegará entonces un menú de elección para diferentes formatos: Documento, Presentación, Shiny y Plantilla (ver Figura 2), cada uno de ellos con diferentes alcances y finalidades, el menú también se ofrece la posibilidad de elegir entre diferentes extensiones de salida (Html, Pdf, Word). En la sección “Cheatsheets” del “Help” existe una guía rápida de uso, funcionalidades y librerías.

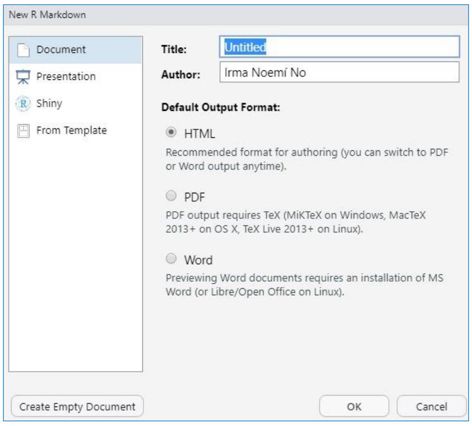


Figura 2. Creación de Documentos reproducibles en RStudio.

Muy sintéticamente, explicaremos los diferentes tipos de documentos RMarkdown útiles para el docente en la enseñanza.

Los documentos *Shiny* crean objetos de aprendizaje interactivos (similares a los applets de GeoGebra) que pueden ejecutarse en línea (requieren RStudio en el servidor alojamiento) o bien pueden correrse localmente (en computadores que posean RStudio instalado). Un ejemplo de aplicación Shiny elaborada para un ejercicio de test de hipótesis sobre la durabilidad de lámparas puede verse en la Figura 3.

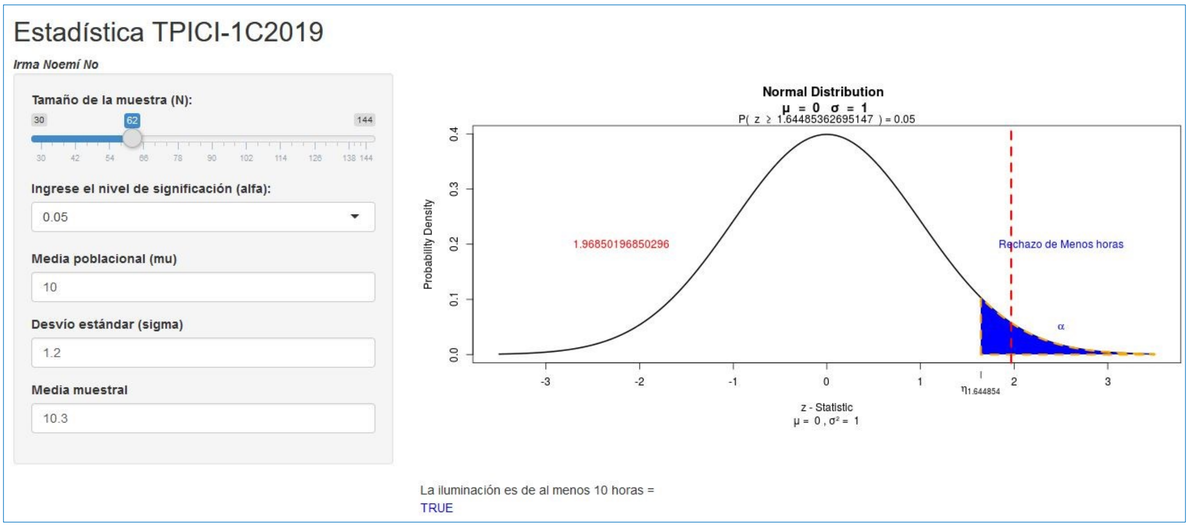


Figura 3. Aplicación Shiny como objeto de aprendizaje interactivo (link al recurso)

Los archivos Rmarkdown de tipo *Presentación* tienen por objetivo generar Slides (filminas) codificadas. Al correr estos archivos se generan automáticamente presentaciones con salidas de código embebidas (soluciones, tablas, gráficos, etc.), visualizables en la propia presentación (ejemplo: No, Pascal y Tornillo (2021)). De esta manera RStudio ofrece un soporte gratuito y mejorado para la creación de presentaciones de elevada funcionalidad (y con diversos formatos de salida logrados mediante la sentencia "Knit" (Fig. 4 derecha)), que son de gran utilidad en las diferentes áreas STEM y sus aplicaciones. Es interesante observar que también se puede generar una salida de tipo PowerPoint, para docentes que prefieran difundir materiales en soporte tradicional.

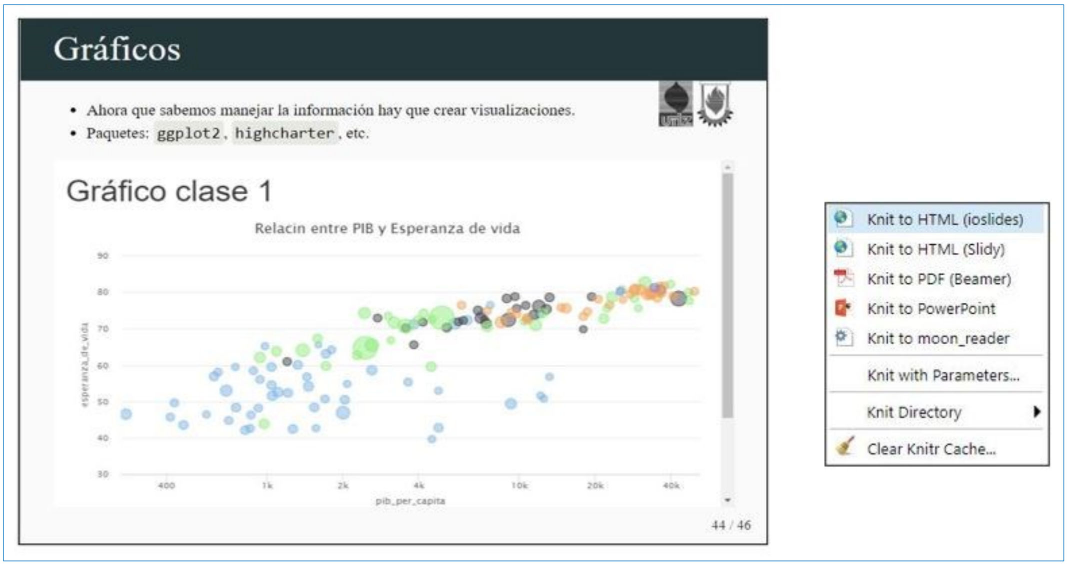


Figura 4. Slide de presentación con gráfico interactivo embebido (sitio) – Opciones de salida (der.)

La creación de archivos Rmarkdown a través de la opción “*Template”*, se basa en formatos preestablecidos, disponibles para descargar desde paquetes/librerías instalables dentro de RStudio. Algunos de los Templates más utilizados a la fecha, (entre muchos otros) son:

- “FlexDashboard”: posee la capacidad de crear desde widgets y aplicaciones Shiny tipo applets, hasta páginas web completas.
- “Learnr”: es una plantilla para la creación de tutoriales interactivos con celdas de código editable y ejecutable, otorga la posibilidad de incorporar ayudas (hint) y salidas evaluables por el propio documento. El formato de salida html, posibilita su publicación online (ver un ejemplo en la Figura 5).
- “Prettydoc” y “Xaringan”: otorgan presentaciones de base estética con funcionalidades extendidas y mejoradas.
- “Rticles”: son plantillas correspondientes a los formatos de presentación de artículos en importantes congresos y revistas científicas.

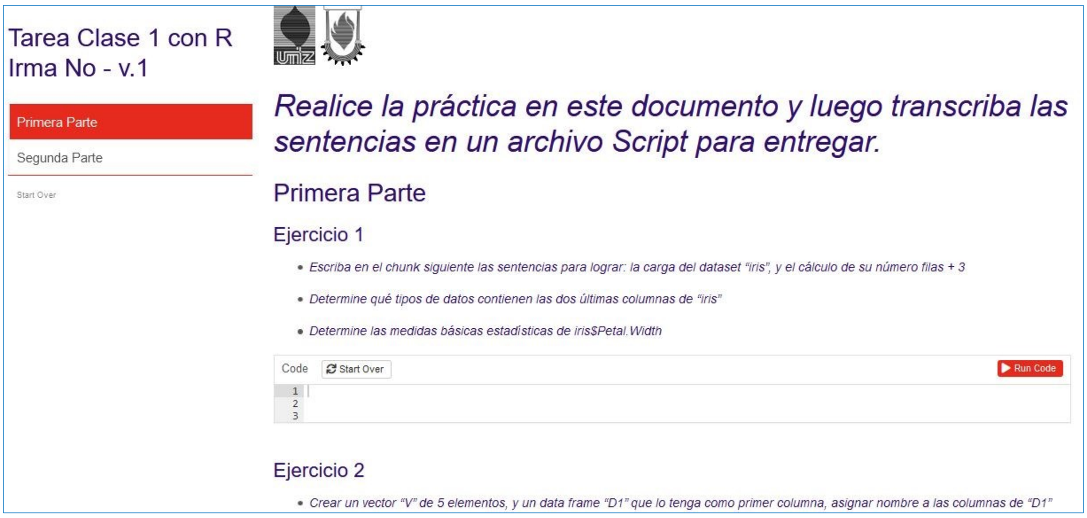


Figura 5. Ejercitación interactiva de codificación en R publicada en web (No, (s.f.))

La primera opción de la Figura 2 se utiliza para crear un *Documento* simple de tipo Rmardown. Se selecciona un tipo de salida desde el menú inicial visible (html, pdf, o Word), aunque esta elección se podrá cambiar y reconfigurar a posteriori. Para ello, se puede editar el encabezado (Yaml) del documento creado y/o seleccionar entre las diferentes opciones de salida al ejecutar el comando "Knit". En la Tabla 2 se muestran trozos de documentos simples creados a través de Rmarkdown en los cuales se ha optado por salidas de tipo HTML, publicadas en web como parte de informes de investigación (No, 2020).

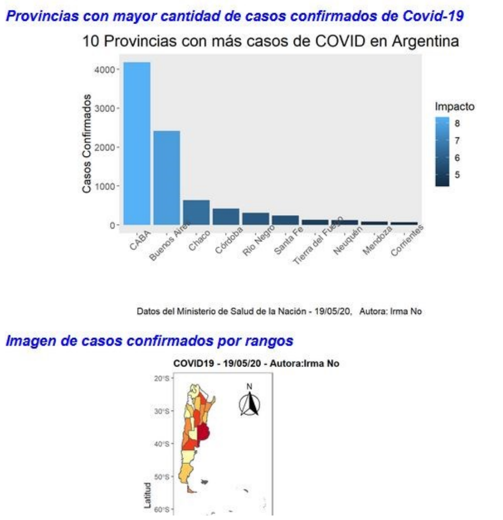
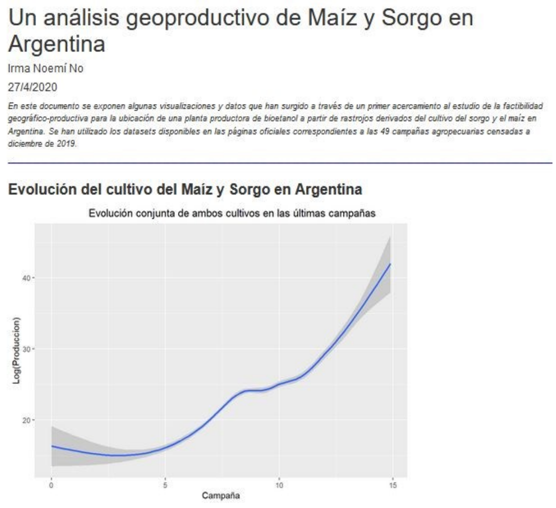
Informe de Coronavirus en Argentina - Mayo/2020	**Estudio para la Geolocalización de una planta de bioetanol**
	

Tabla 2. Vistas de Documentos HTML creados con Rmarkdown (link1, link2)

Al comenzar la creación de un material educativo en RStudio siempre es conveniente generar una carpeta específica en la cual se guardarán de forma ordenada los datos, archivos, imágenes y otros elementos que formarán parte del documento final Rmarkdown. Como se muestra en la Figura 6 se podrán crear *proyectos* asociados a cada carpeta contenedora de un material de enseñanza u objeto de aprendizaje específico. También a futuro se podrán "controlar" diferentes versiones del material creado (generando una trazabilidad en los cambios).

Se mencionan a continuación dos paquetes/librerías de gran utilidad en la producción de materiales educativos, estos paquetes se hacen visibles en el menú de creación de proyectos de RStudio (Ver Figura 6):

- "Bookdown" (bookdown.org): es una librería que permite crear libros fácilmente. Al crear un proyecto del tipo *"Book Project using Bookdown"* se visualiza una plantilla completa (de capítulos, figuras, estilos, etc.) lista para ser editada por el docente/autor y redactar su material sobre el esquema precargado.
- "Blogdown": es un paquete de soporte para la creación de páginas web, como alternativa a los tradicionales blogs estáticos (Yihui Xie, Amber y Hill, 2021).

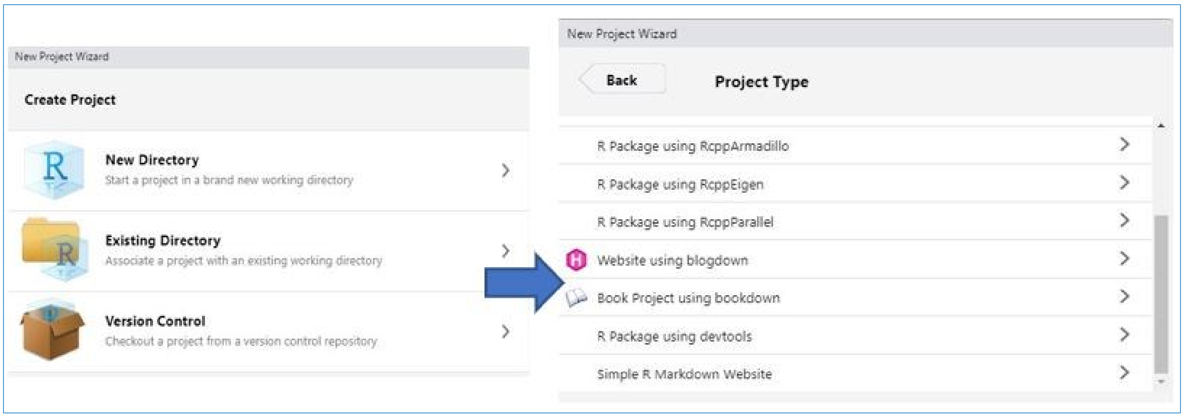


Figura 6. Proyectos de RStudio para la generación de sitios y materiales educativos

Una vez creado el material de enseñanza mediante los recursos de RStudio y Rmarkdown anteriormente mencionados, es necesario seleccionar la metodología de publicación y divulgación para compartirlo con los diferentes grupos de estudiantes y con la comunidad de pares docentes.

4. Publicar y compartir el material de enseñanza creado con RStudio

Para publicar y compartir los documentos producidos con Rmarkdown existen varias opciones, se mencionarán algunas de ellas a continuación.

4.1 Sitio "RPubs"

RPubs (Figura 7) es un sitio web abierto y gratuito para la publicación y difusión de materiales didácticos; es mantenido y actualizado por RStudio.com. El sitio contiene una galería de documentos desarrollados en el IDE "*RStudio*"; los documentos publicados han sido creados y compartidos por diferentes usuarios registrados. Este sitio es de gran utilidad para la comunidad de usuarios del lenguaje R y para los docentes de matemática superior, actuando como repositorio para la consulta de diferentes casos de uso.

Los documentos cargados en RPubs son alojados en una dirección específica (link) que es comunicada al autor. De esta manera, los docentes que utilicen esta herramienta como alojamiento de sus materiales de enseñanza pueden compartir el link provisto con sus alumnos y pares, sin costo alguno y a largo plazo.

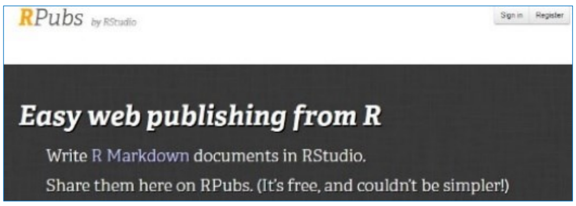


Figura 7. Sitio RPubs para compartir materiales de enseñanza creados en lenguaje R - https://rpubs.com/

4.2 Sitio "Shinyapp"

Los archivos interactivos creados bajo el formato Shiny de Rmarkdown podrán cargarse en el sitio Shinyapp.io (Figura 8) mantenido por RStudio.com. Tanto el registro como el uso de esta nube son gratuitos, y de manera similar a lo mencionado en el punto anterior, el material cargado correrá en una dirección específica, cuyo link podrá ser compartido por el autor con terceros (alumnos y pares) para su visualización y uso.

Para los docentes resultará muy enriquecedor visitar el sitio "*Galería de aplicativos Shiny*" (https://shiny.rstudio.com/gallery/) en el cual se pueden hallar numerosos ejemplos disponibles en forma abierta, gratuita y con código descargable.

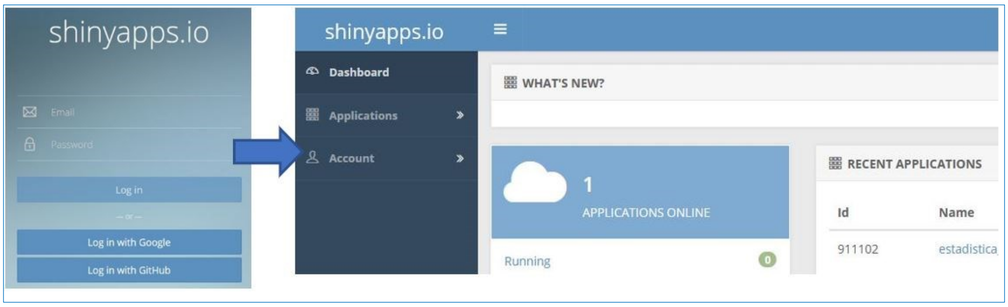


Figura 8. Sitio gratuito para subir y compartir documentos interactivos tipo Shiny - https://www.shinyapps.io/

4.3 Sitio "RStudio Cloud"

El sitio RStudio Cloud es un sitio gratuito mantenido por RStudio.com. En él, cualquier persona puede registrarse y gozar del uso de este entorno de desarrollo para crear sus propios proyectos y mantenerlos almacenados en la nube (Figura 9). Existe una restricción de cantidad de horas de uso al mes y una capacidad de hasta 15 proyectos.

Es una excelente herramienta para el dictado de talleres, pues se puede compartir el link del material de enseñanza creado y utilizarlo en tiempo real con el alumnado a través de esta plataforma. Cualquier usuario con el link, podrá guardar una copia del material, correrlo y editarlo en su propio entorno *RStudio Cloud.*

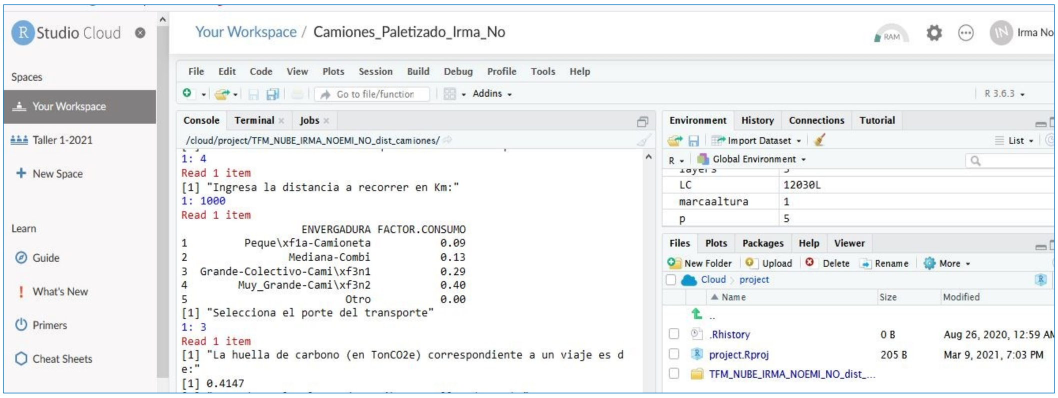


Figura 9. Sitio para compartir material disponible en tiempo real con alumnos RStudio Cloud https://rstudio.cloud/

4.4 Repositorios abiertos

Trabajar confeccionando material educativo en el campo STEM y sus aplicaciones siempre ha requerido de un manejo de tecnologías informáticas que soporten los cálculos y las visualizaciones. En la actualidad este requerimiento se ha profundizado, y es imposible pensar en crear un material sin incorporar sentencias y código pertenecientes a algún lenguaje de programación.

Compartir un material de enseñanza que incluye código de programación impulsó a los docentes a hacer uso de plataformas que originariamente eran sólo utilizadas por programadores, informáticos y profesionales de sistemas. Tal es el caso de sitios como "GitHub"(https://github.com/) entre otros. En GitHub cualquier persona puede registrarse de forma gratuita y crear repositorios (directorios) para almacenar sus trabajos. Para los materiales alojados se dispone de varios tipos de licencias, el autor elegirá cuál de ellas atribuir a su trabajo; también puede resguardarse la autoría del material, utilizando plataformas de otorgamiento de *DOI* (identificador de objeto digital), como la muy popular "*Zenodo*" (https://zenodo.org/) que se halla interconectada con GitHub. Otro aliado de GitHub es la aplicación "*Netlify*" (https://app.netlify.com/) que permite construir/publicar sitios web a través de los recursos disponibles en los repositorios de GitHub.

Un ejemplo completo de lo anterior es el material creado en RStudio, que es utilizado para introducir código R en la temática de programación lineal en diferentes cátedras de las carreras de Ingeniería de UNLZ. Este material fue subido a un repositorio público de GitHub (Figura 10) y publicado en las "páginas de GitHub" ("gh-pages") como puede verse en la Figura 11.

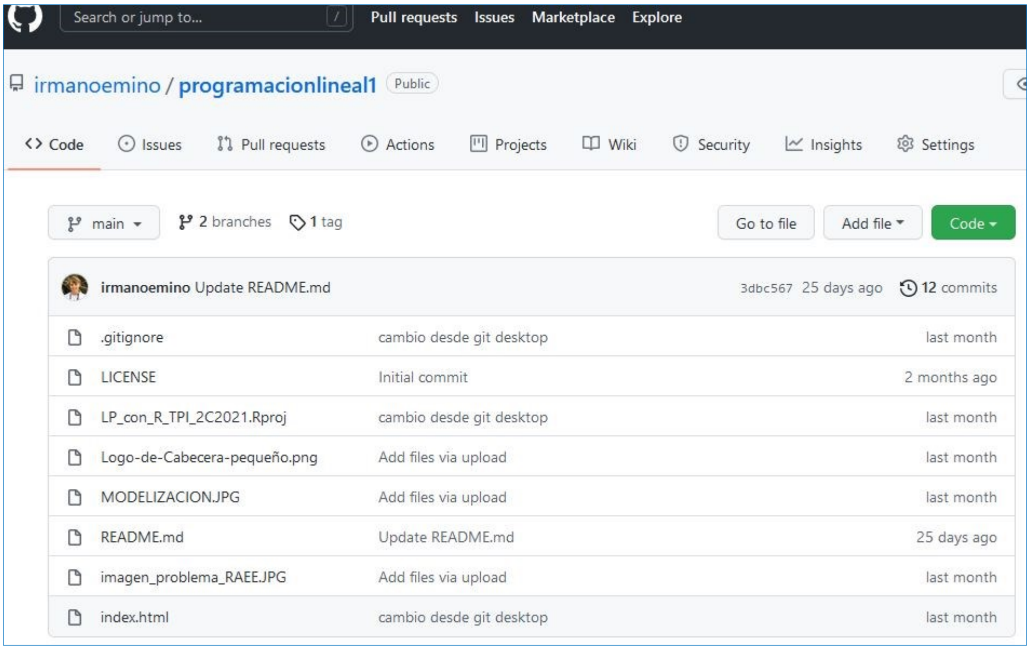


Figura 10. Repositorio de GitHub en el cual se alojan datos, imágenes y código asociado al recurso educativo de programación lineal (link al recurso).

Este recurso puede ser citado mediante el DOI generado por "Zenodo" (10.5281/zenodo.5606108), y se encuentra disponible y abierto para el uso público en versión HTML (ver Figura 11) en el link creado por "gh-pages".

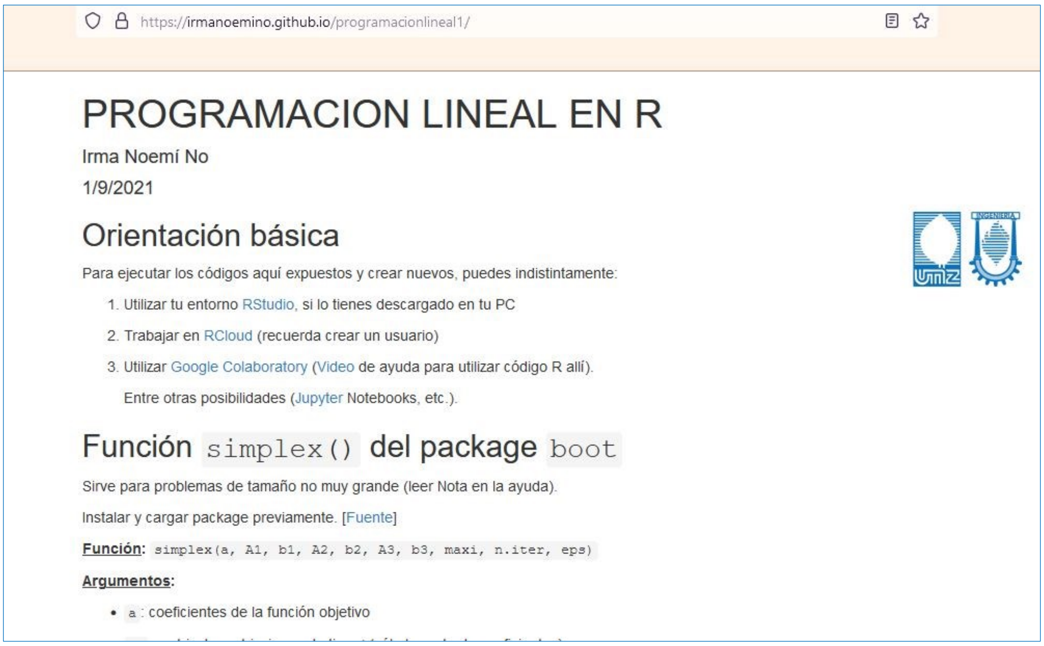


Figura 11. Recurso educativo creado en RStudio alojado en página de GitHub (link al recurso)

Por último, en cuanto a la metodología de carga en GitHub, los materiales de enseñanza creados en RStudio pueden ser alojados, publicados y compartidos en repositorios de GitHub de una manera muy eficiente, pues existe una fuerte conexión (API) entre RStudio y las cuentas de usuario de GitHub (Bryan y Hester, s.f.).

4.5 "Blogdown – Bookdown"

La comunidad de usuarios de R ha desarrollado maravillosos paquetes que empoderan a los autores de materiales educativos en el proceso de su publicación; ejemplos de ello son las librerías y recursos de Blogdown y Bookdown *(*Hill y De León, 2020).

Los paquetes Blogdown y Bookdown se han mencionado en un párrafo del punto 3. Las herramientas de publicación que se han detallado hasta ahora sirven para los productos Rmarkdown en general, pero existen caminos más directos para las publicaciones de estos dos recursos en particular.

Los libros creados mediante plantillas Bookdown pueden publicarse automáticamente a través de RStudio (si se posee una cuenta "RStudio Connect"); y también pueden ser publicados gratuitamente mediante la creación de repositorios en GitHub, considerando algunas modificaciones en la plantilla bookdown original *(*Fernández-Casal, R. y Cotos Yañez, 2018*)*. Por último, es posible publicarlos en cualquier sitio web al cual se tuviera acceso en carácter de "administrador de archivos", incorporándolos al directorio público del mismo; para ello, se debe crear una salida .HTML desde RStudio con la función Knit y subir el libro junto con todas sus dependencias (enlaces internos) de imágenes, archivos de datos, etc.

En el caso de Blogdown desde su creación han surgido variantes de código que generan cierta desestabilización según las versiones utilizadas para crear y publicar el material *(*Hill, 2020*)*. Básicamente en la Figura 12 se observan las recomendaciones para salvar dificultades y lograr publicar un sitio web construido a través de esta herramienta, aportando nuevas entradas (posts) y controlando los cambios de versión mediante GitHub, manteniendo la estructura y estéticas provistas por el paquete Blogdown.

Figura 12. Proceso para la creación y publicación de un sitio tipo "Blog" con RStudio. (Elementos extraídos y editados de Hill, (2020))

4.6 Sitios de Pago

RStudio.com ofrece servidores para el uso online de los lenguajes R y Python, y para el alojamiento de materiales y documentos producidos en RStudio, a través de su producto "RStudio Server". Existe una versión gratuita de *RStudio Server*, que limita la cantidad de usuarios a 100 (cien) y es instalable en el sistema operativo

Linux. El mantenimiento y soporte de esta versión gratuita *no* queda a cargo de la empresa RStudio.com, sino del usuario.

Otra solución de pago es el alquiler de un servidor privado propio (para instalar RStudio en el sistema operativo que corresponda al servidor) y realizar allí materiales, alojamientos y publicaciones. En este último caso el docente debe poseer algunos conocimientos sobre el manejo de sitios web (vista en Figura 13).

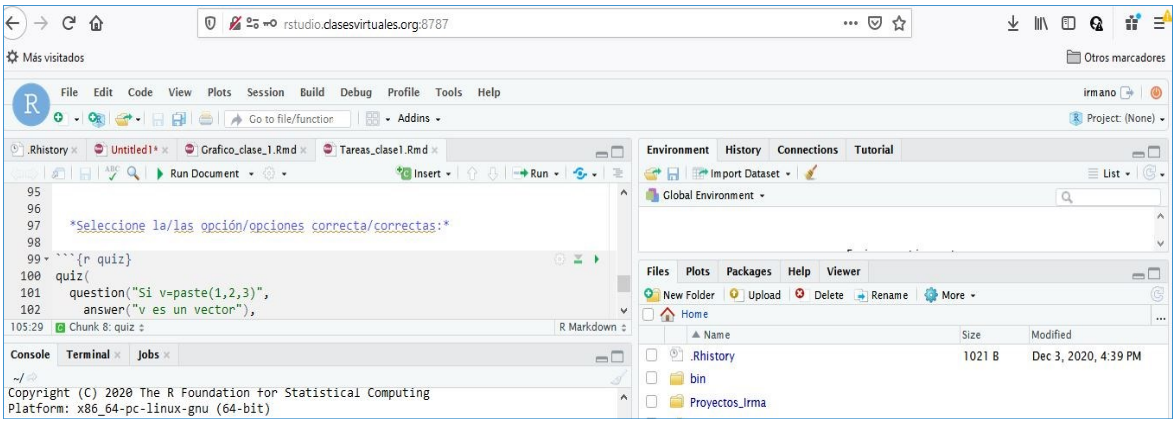


Figura 13. RStudio alojado en un servidor privado virtual (VPS) de pago.

5. Consideraciones finales

El recorrido desarrollado es una síntesis específica de los recursos gratuitos disponibles en RStudio y otras plataformas relacionadas para la elaboración de materiales educativos reproducibles de base tecnológica, que son además: funcionales, renovables y de elevada estética. Un ejemplo de la utilización de estos recursos para la *enseñanza de estadística* puede verse en Walum y De León (s.f.).

Las herramientas que nos ofrece el entorno de desarrollo RStudio para crear materiales reproducibles y gratuitos, con posibilidades de ser compartidos y publicados bajo diferentes licencias y resguardo de autoría, son de gran utilidad para los docentes del área matemática. La gran versatilidad de RStudio para interactuar con diferentes bases de datos, lenguajes y programas lo señalan como un importante entorno para la enseñanza orientada a la formación de competencias profesionales abarcando posibles futuros desempeños del egresado en diferentes plataformas tecnológicas. Se considera además de gran utilidad en las cátedras de nivel superior y en la formación de becarios de investigación.

El ejercicio de la reproducibilidad, respaldado por control de versiones y las comunidades de práctica del lenguaje R, aseguran la posibilidad de mantener vigentes los formatos, modalidades y contenidos de los materiales de enseñanza-aprendizaje basados en documentos RMarkdown y en proyectos de RStudio.

Se considera oportuno considerar la planificación y la realización de talleres de capacitación dirigidos a docentes e investigadores del área matemática en el uso de estas herramientas para la elaboración de materiales educativos e informes de investigación, dado que el camino hacia la generación de competencias asociadas a la creación de materiales reproducibles, es un proceso gradual y continuo, que comienza con la elaboración de scripts (códigos), continúa con la generación de documentos dinámicos (Rmarkdown y Jupyter Notebooks, entre otros) y finaliza con la trazabilidad y el mantenimiento de versiones en nubes abiertas y gratuitas (GitHub, entre otras) generando una curva de aprendizaje prolongada pero muy beneficiosa para los docentes.

Bibliografía

Arsac G., Balachef N. & Mante M. (1992) Teacher's Role and reproducibility of didactical situations. *Educational Studies in Mathematics*, 23 (1): 5-29.

Artigue, M., Douady, M. & Moreno L. (1995). *Ingeniería didáctica en educación matemática. Un esquema para la investigación la innovación en la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas*. Bogotá, Colombia: Grupo Editorial Iberoamérica.

Brousseau, G. (1986). Fondements et méthodes de la didactique des mathématiques. *Recherche en Didactique des Mathématiques*, 7(2): 33-112.

Bryan, J. & Hester J. (s.f.). *Happy Git and GitHub for the useR.* Recuperado el 5 de mayo de 2021 del sitio web: https://happygitwithr.com/

Fernández-Casal, R. y Cotos Yañez, T.,R. (2018). *Escritura de libros con bookdown.* Recuperado el 5 de mayo de 2021 de: https://rubenfcasal.github.io/bookdown_intro/

FitzJohn, R.G., Pennell, M.W., Zanne, A.E., Stevens, P.F., Tank, D.C. & Cornwell, W. K. (2014). How much of the world is woody? British Ecological Society. *Journal of Ecology*, 102: 1266-1272. Recuperado el 5 de mayo de 2021 de: https://besjournals.onlinelibrary.wiley.com/doi/pdf/10.1111/1365-2745.12260

Hill, A. & De León, D. (6 de abril de 2020). Sharing on Short Notice. How to get your teaching materials online with R Markdown. *RStudio Education.com Blog*. https://education.rstudio.com/blog/2020/04/sharing-on-short-notice/

Hill, A. (31 de diciembre de 2020). Up & running with blogdown in 2021*. ApresHill Blog*. https://www.apreshill.com/blog/2020-12-new-year-new-blogdown/

Lezama J. (2005). Una mirada socioepistemológica al fenómeno de reproducibilidad. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, 8 (3), 339-362. Recuperado el 5 de mayo de 2021 de: https://www.redalyc.org/pdf/335/33508306.pdf

Marwick, B. (2016). Computational Reproducibility in Archaeological Research: Basic Principles and a Case Study of Their Implementation. *Journal of Archaeological Method and Theory*, 23 (2), 1–27.

Monterrey, P.A. (2018). Reproducibilidad de sus resultados: Un reto ineludible para la investigación científica [versión electrónica]. *Innovación & Ciencia*, XXV (4). Recuperado el 5 de mayo de 2021 de: https://innovacionyciencia.com/articulos_cientificos/reproducibilidad-de-sus-resultados-un-reto-ineludible-para-la-investigacion-cientifica

Montoya, M. S. & Lezama, Fr. (2016). La reproducibilidad de situaciones de aprendizaje en un taller de reflexión docente. *Cuadernos de Investigación Educativa*, 7(1), 41-54. Recuperado el 5 de mayo de 2021 de: http://www.scielo.edu.uy/scielo.php?script=sci_arttext&pid=S1688-93042016000100004&lng=es&tlng=es

No, I. N. (s.f.). *Tarea Clase 1 con R. Curso de Introducción a Ciencia de Datos*. Recuperado el 5 de septiembre de 2021 de: http://rstudio.clasesvirtuales.org:3838/sample-apps/Tareas_interact_clase1/

No, I. N. (2020). *Investigaciones: Informes de Investigación*. Clasesvirtuales.org Recuperado el 5 de mayo de 2021 de: http://www.clasesvirtuales.org/investigaciones.html

No, I. N., Pascal, G. y Tornillo, J. E. (2021). *Clase 1- Conceptos Básicos. Curso de Introducción a Ciencia de Datos.* Recuperado 5 de septiembre de 2021 de: http://www.clasesvirtuales.org/Clase_1_Irma_R_fiunlz.html#1

Peng, R.D. (2011). Reproducible Research in Computational Science. *Science* 334 (6060), 1226-1227.

Rodríguez-Sánchez, F., Pérez-Luque, A. J., Bartomeus, I., & Varela, S. (2016). Ciencia reproducible: qué, por qué, cómo. *Revista Ecosistemas,* 25(2), 83-92. Recuperado el 5 de mayo de 2021 de: https://doi.org/10.7818/ECOS.2016.25-2.11

Torrente, J., Marchiori, E, Sancho P., Martinez Ortiz, I., Mellini, B., Talamo, A. ,et al. (2018). *Fomentando la creatividad: creación de escenarios de aprendizaje basados en juegos. Una guía para profesores*. Programa ProActive. Dirección General de Educación y Cultura. Comisión Europea. Recuperado el 5 de mayo de 2021 de: http://www.ub.edu/euelearning/proactive/documents/handbook_creative_gbl_es.pdf

Tse, J. K. Y., Chan, S. W. Y., & Chu, S. K. W. (2020). Quality Assessment for Digital Stories by Young Authors. *Data and Information Management*, *5*(1), 174-183. Recuperado el 5 de mayo de 2021 de: https://www.researchgate.net/publication/347594264_Quality_Assessment_for_Digital_Stories_by_Young_Authors

Walum, H. & De León, D. (s.f.). *Teacups, Giraffes, & Statistics*. Recuperado el 5 de mayo de 2021 de: https://tinystats.github.io/teacups-giraffes-and-statistics/index.html

Yihui Xie, Amber T. & Hill, A. (2021). *Blogdown: Creating Websites with R Markdown.* Recuperado el 5 de mayo de 2021 de: https://bookdown.org/yihui/blogdown/

Ynoub, R. (2017) *"El diseño de la investigación: entre la táctica y la estrategia" Cap. X en "Cuestión de método"* . Tomo II. Maestría en Metodología de la Investigación Científica. Universidad Nacional de Lanús, Argentina: [s.n.].

Autores:

No, Irma Noemí
Master en Ingeniería de Sistemas de Decisión (URJC), Licenciada en Matemáticas (UNLP), Licenciada en Educación (UNQ). Especialista en Metodología de la Investigación Científica (UNLA). Diplomada en Estudios Avanzados de Empresas (UPV). Docente Investigadora de la Facultad de Ingeniería UNLZ. ino@ingenieria.unlz.edu.ar

Tornillo, Julián Eloy
Master en Ingeniería de Sistemas de Decisión e Investigador de la Universidad Rey Juan Carlos de Madrid (URJC). Ingeniero Industrial, Profesor adjunto, Investigador del Instituto de Investigaciones en Ingeniería Industrial (I4) y Sub-Director de la Carrera de Ingeniería Industrial de la UNLZ. Actividades de vinculación y consultoría de empresas. jtornillo@ingenieria.unlz.edu.ar

Pascal, Guadalupe
Master en Ingeniería en Sistemas de Decisión por la URJC (España). Visiting Fellow (2018-2019) en el Centre for Systems Neuroscience UoL. Ingeniera Industrial, Secretaria de Investigación, Profesora Asociada e Investigadora del Instituto de Investigaciones en Tecnología y Educación (IIT&E) y del Instituto de Investigaciones en Ingeniería Industrial (I4), (CIC) de la Facultad de Ingeniería UNLZ. gpascal@ingenieria.unlz.edu.ar

UNIÓN
REVISTA IBEROAMERICANA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA

ISSN: 1815-0640
Número 64. Abril 2022
Páginas 1-16

Ensino de Estatística como Objeto de Pesquisa: Uma Revisão Sistemática da Literatura para o período de 2014 a 2021

Paulo Vitor da Silva Santiago, Francisco Régis Vieira Alves, Maria José Costa dos Santos

Fecha de recepción: 27/08/2021
Fecha de aceptación: 8/11/2021

Resumen	Este artículo pretende realizar un análisis sobre la enseñanza de la estadística en la práctica pedagógica del profesor de matemáticas. Se utilizó como metodología, la investigación de carácter cualitativo, siendo una revisión bibliográfica sistemática, a partir de consultas realizadas en las plataformas Scielo y Google Académico, en el periodo comprendido entre 2014 y 2021. También se observó que de los 186 trabajos encontrados, sólo 16 están relacionados con los descriptores - "educación matemática y enseñanza de la estadística"- "enseñanza de la estadística y formación del profesorado" y "educación matemática y formación del profesorado". Se puede concluir que hay pocas investigaciones relacionadas con la enseñanza de la estadística por parte de los profesores. **Palabras clave**: Enseñanza de la Estadística; Educación Matemática; Formación del Profesorado.
Abstract	This article seeks to conduct an analysis of the teaching of statistics in the pedagogical practice of mathematics teachers. It was used as methodology, the research of qualitative nature, being a systematic literature review, from consultations performed in Scielo and Google Academic platforms, in the period from 2014 to 2021. It was also observed that of the 186 papers found, only 16 are related to the descriptors - "mathematics education and statistics teaching" - "statistics teaching and teacher training" and "mathematics education and teacher training". It can be concluded that there is little research related to the teacher's teaching of statistics. **Keywords**: Teaching Statistics; Mathematics Education; Teacher Training.
Resumo	Este artigo busca realizar uma análise sobre o ensino de estatística na prática pedagógica do professor de matemática. Utilizou-se como metodologia, a pesquisa de natureza qualitativa e quantitativa, sendo uma revisão sistemática de literatura, nas plataformas *Scielo* e *Google Acadêmico*, no período de 2014 a 2021. Observou-se ainda que dos 186 trabalhos encontrados, apenas 16 estão relacionados aos descritores "educação matemática e ensino de estatística", "ensino de estatística e formação de professores" e "educação matemática e formação de professores". Pode-se concluir que são poucas as pesquisas relacionadas ao ensino de estatística na prática docente.

Palavras-chave: Ensino de Estatística; Educação Matemática; Formação Docente.

1. Introdução

O presente artigo é um estudo de iniciação científica referente à sistematização de um conjunto de pesquisas sobre a práxis do professor de matemática em seu ambiente de desenvolvimento profissional a respeito do ensino de Estatística na disciplina de Matemática. Nesse aspecto, a intenção foi limitar o número de pesquisas e priorizar as mais atuais, pretendendo visualizar aquelas relacionadas à temática e que foram escritas e publicadas por três revistas brasileiras *on-line*, a saber: Boletim de Educação Matemática (BOLEMA); Revista de Educação Matemática e Tecnológica Ibero-americana (EM TEIA) e Revista Sergipana de Matemática e Educação Matemática (REVISEM).

Nesse sentido, este artigo tem como pergunta problematizadora: o que tem sido investigado sobre as experiências formativas dos professores e alunos no Ensino de Estatística nas produções científicas brasileiras de Educação Matemática?

Para responder a essa questão, utilizou-se como metodologia uma revisão sistemática de literatura, baseada em textos diversos e documentos (Menezes *et al*., 2019). Desse modo, buscou-se pelos seguintes descritores: “educação matemática e ensino de estatística”, “ensino de estatística e formação de professores” e “educação matemática e formação de professores”, que foram colocados no algoritmo de busca em pares, escolhidos para identificar e compreender o panorama atual de pesquisas que envolvem o ensino de estatística na prática docente do professor de matemática, nas perspectivas de Fiorentini e Lorenzato (2006) e Gil (2008), já que foram usados materiais elaborados por diversos autores sobre a temática da pesquisa.

Desse modo, o objetivo deste trabalho é realizar uma análise do que vem sendo pesquisado nas produções científicas brasileiras que surgem no Ensino de Estatística nas revistas voltadas para a pesquisa em Educação Matemática.

Nessa situação, o artigo está estruturado de modo a expor uma introdução para descrever o contexto da pesquisa desenvolvida, o delineamento metodológico que organizou a pesquisa, coleta e análise das produções, os resultados/discussões e as considerações finais.

2. Metodologia

A metodologia foi constituída, quanto a sua natureza, como qualitativa, cujas características são descritiva, analítica e exploratória — o que, segundo Prodanov e Freitas (2013, p. 51-52), proporciona “mais informações sobre o assunto que vamos investigar, possibilitando sua definição e seu delineamento”.

A Revisão Sistemática da Literatura (RSL), segundo Sampaio e Mancini (2007), é um procedimento de pesquisa que proporciona a sistematização e a distribuição de estudos possibilitando um olhar crítico e geral do objeto a ser pesquisado. Desse modo, a coleta de dados foi realizada por meio das plataformas *Scielo* e *Google Acadêmico*, nas quais se investigou as pesquisas sobre o Ensino de Estatística nos periódicos da BOLEMA, EM TEIA e REVISEM que são sobre Educação Matemática, no período de 2014 a 2021.

As concepções qualitativas deste estudo têm conexão com o que Martins (2004) descreve, isto é, que o material conseguido qualitativamente requer do pesquisador uma habilidade integrada e crítica que, por sua vez, precisa do processo de uma interação inovadora e instintiva. Com relação à pesquisa, na concepção de Tozoni-Reis (2009), a principal característica é que a fonte dos dados e a área em que serão coletados seja um documento (histórico, organizacional, associativo, oficial e outros).

As plataformas oferecem *interface* de fácil operacionalidade e funcionamento pelos critérios de busca, pois a definição do recorte temporal constitui em recurso condicionante na recuperação de temáticas recentes e atualizadas. Com relação aos descritores, foram recuperados 186 (cento e oitenta e seis) artigos dentre os periódicos selecionados. Foram definidos como critérios de eliminação: estudos do tipo revisão sistemática e estado da arte, dissertações e teses, artigos não envolvendo ao ensino de Matemática, artigos não analisados por pares e artigos inconclusos ou incompletos.

A partir dessa busca e triagem dos trabalhos, foram encontrados 16 artigos nas revistas Boletim de Educação Matemática, Revista de Educação Matemática e Tecnológica Ibero-americana e a Revista Sergipana de Matemática e Educação Matemática em formato (*On-line*) para construção do *corpus* do artigo e que tem relação direta ao temário desta pesquisa.

Após essa busca, foi feita uma leitura cuidadosa dos resumos de todos os artigos e foi elaborada uma planilha, contendo os seguintes tópicos: título, ano de publicação, palavras-chave, instituição, financiamento, metodologia, aportes teóricos e resultados. Dessa forma, entende-se que a pesquisa se estabelece na categorização do método exploratório e descritivo (Pereira *et al*., 2018).

Logo depois, visualizando as relações e recorrências dos temas inseridos nos trabalhos, decidiu-se por ordenar os descritores para análise. Para a estruturação dos descritores foram encaradas algumas dificuldades, como artigos que não tinham em seu resumo informações relevantes para o preenchimento da planilha, fazendo como que fosse necessária a leitura dos textos por completo para alcançar as informações pretendidas.

Na análise dos dados coletados, utilizou-se a análise documental, que, segundo Bardin (1977), equivale ao agrupamento de métodos na análise de comunicação visando obter a descrição do conteúdo por meio de procedimentos sistemáticos e objetivos com textos e parâmetros (totais ou não) que permitam inferir conhecimentos relativos às condições de produção ou recebimento desses textos. Diante disso, os grupos deste trabalho não foram determinados a *priori*, mas sim apresentados após a análise dos dados coletados (Puglisi; Franco, 2005).

Posto isso, tal análise realizou-se com a seleção de artigos que abordam em seus resumos a educação matemática e ensino de estatística – ensino de estatística e formação de professores, e educação matemática e formação de professores, com o uso de um recurso digital *on-line*, por meio da plataforma *WordArt.com*, conhecida pela construção por nuvem de palavras, em que os termos com maior frequência nos resumos dos artigos se destacam na nuvem formada.

3. Resultados e Discussões

Considerando a leitura de todos os artigos que foram encontrados no levantamento de literatura, neste tópico, serão apresentados os resultados numéricos de cada fase da busca realizada e, posteriormente, abordadas as considerações relativas a cada descritor.

Foram identificados inicialmente 56 artigos dos 186 encontrados no algoritmo de busca em pares, considerando as publicações mais recentes e atualizadas quanto ao tema, tratou-se em seguida da relevância e importância frente aos descritores, sobretudo, relacionados à qualidade dos periódicos em meio científico. Após a realização dos critérios de inclusão e exclusão de seleção, os pesquisadores chegaram ao quantitativo de 4 artigos (BOLEMA), 6 artigos (EM TEIA) e 6 artigos (REVISEM), totalizando 16 artigos (Quadro 1). Para cada artigo descoberto foi dada uma identificação alfanumérica com uma letra e número. Em seguida, a cada código descrito, foi dado um número sequencial, eventualmente e sucessivamente.

Revista	Título	Autores	Ano	Lista
BOLEMA	Aspectos da interpretação de gráficos de estudantes universitários em um ambiente virtual	Fabiana Chagas de Andrade; Carolina Vieira Schiller; Dione Aparecido Ferreira da Silva; Larissa Pereira Menezes; Alexandre Sousa da Silva	2020	R01
	Um Cenário sobre a Pesquisa em Educação Estatística no Boletim de Educação Matemática – BOLEMA, de 2006 até 2015	Josney Freitas Silva; Edda Curi; Juliano Schimiguel	2017	R02
	Traduzindo Pensamento e Letramento Estatístico em Atividades para Sala de Aula: construção de um produto educacional	Mario de Souza Santana	2016	R03
	As Narrativas de Duas Professoras em seus Processos de Desenvolvimento Profissional em Educação Estatística	Celi Espasandin Lopes	2014	R04
EM TEIA	Ensino de Estatística no Ensino Médio: uma proposta interdisciplinar entre matemática e educação física	Felipe Antonio Machado Fagundes Gonçalves; Guataçara dos Santos Junior; Caroline Subirá Pereira; Cristiane de Fatima Budek Dias	2019	R05
	Novas tecnologias, novas demonstrações, novos caminhos para a matemática e educação matemática	Duelci Aparecido de Freitas Vaz; Julio César Saavedra Vásquez; Joelmir Divino Carlos Feliciano Vilela	2019	R06
	Ensino de Estatística na escola do campo: contribuições do ensino por meio da realidade de educandos de um 6º ano do Ensino Fundamental	Luciana Boemer Cesar Pereira; Guataçara dos Santos Junior	2014	R07
	Desafios do ensino na educação básica de combinatória, estatística e probabilidade	Rute Elizabete de Souza Borba; Leandro de Oliveira Souza; José Ivanildo Felisberto de	2018	R08

		Carvalho		
	Planejamento de atividades de modelagem Matemática: um caminho possível	Luzinete Oliveira Mendonça; Celi Espasandin Lopes	2015	R09
	Ensino de estatística na formação do professor dos anos iniciais	Michel da Costa; Maria Elisabette Brisola Brito Prado; Angélica Fontoura Garcia Silva	2016	R10
REVISEM	Estado do conhecimento: experiências de aprendizagem e de ensino de estatística	Camila Rubira Silva; Débora Pereira Laurino	2021	R11
	Interfaces entre a pesquisa em Educação Estatística e o livro didático de Matemática: as produções acadêmicas e científicas do GT12 de 2016 a 2020	Pedro Paixão Borges; Alan Junior Severo	2021	R12
	Desenvolvimento profissional de uma formadora de professores de matemática	Flávia Cristina Figueiredo Coura; Cármen Lúcia Brancaglion Passos	2019	R13
	Entrando na Zona de Risco: utilizando as TDIC para ensino e aprendizagem de conceitos de Estatística Descritiva	Rafael Winícius da Silva Bueno; Clarissa Coragem Ballejo; Lori Viali	2020	R14
	Desenvolvimento profissional de professores na construção colaborativa de sequências de ensino de Estatística	Eurivalda Santana; Sandra Paula Almeida Nascimento; Maria Elizabete Souza Couto	2021	R15
	Educação Financeira: uma possibilidade de integração com a Educação Estatística	Andréa Pavan Perin; Celso Ribeiro Campos	2021	R16

Quadro 1. Distribuição dos artigos: revista, título, ano e lista.
Fonte: Elaborado pelos autores (2021).

Com base nisso, elaborou-se uma nuvem de palavras (Figura 1) a partir das palavras-chave mencionadas nos artigos para mostrar as temáticas abordadas nos estudos, bem como listá-las nas plataformas das revistas digitais. Destacaram-se as palavras com indicação à própria área da investigação como: Educação Matemática, Ensino de Estatística, Formação de Professores. Alguns termos referem-se à Estatística Descritiva, Educação Estatística, Letramento Estatístico, Pensamento Estatístico, Literacia Estatística, e Gráficos Estatísticos.

Figura 1. Nuvem de palavras-chave construído no *WordArt* dos trabalhos selecionados.
Fonte: Elaborado pelos autores (2021).

Observa-se que os termos encontrados (Figura 1) subsidiaram a estruturação dos argumentos nesta pesquisa, que mencionam para a verificação das publicações que versam a importância do Ensino de Estatística nas experiências formativas dos docentes e estudantes. Dessa forma, o termo "Estatística", faz menção ao grupo de habilidades estatísticas mostrado na Base Nacional Curricular Comum (BNCC).

Com base nisso, selecionou-se da nuvem de palavras do *WordArt* os termos "Educação", "Estatística" e "Ensino" pela diversidade em que aparece em diversos trabalhos, sendo que eles se associam ao pensamento estatístico, possibilitando que o sujeito assuma o processo de conquista, tratamento e análise crítica dos dados (Silva e Silva, 2019). Outros termos muito citados são "Matemática", "Estatístico" e "Professor", que se relacionam com a capacidade de o sujeito analisar e identificar uma situação direta, selecionando ferramentas estatísticas mais adequadas para interpretação e descrição dos dados (Melo; Groenwald, 2018). E por último, o termo "Literacia Estatística" tem a compreensão da capacidade do sujeito com um agrupamento de conhecimentos, habilidades e princípios de maneira eficaz com situações, abrangendo dados que surgem no cotidiano (Perin; Wodewotzki, 2019).

Nesse sentido, a nuvem de palavras (Figura 1) contém termos com diversas temáticas de investigação — formador, professores, desenvolvimento, profissional, conhecimento, didático, crítica, atividades, palavras que mostram descritores das investigações de acordo com níveis de projetos e/ou ensino de estatística divididos: 25% no Ensino Fundamental; 25% do Ensino Médio; 25% da Educação Superior e 31% nos Grupos de Pesquisas. Essa divisão possibilitou perceber que as experiências e os conhecimentos dos professores de matemática relacionados ao ensino de estatística provêm dos ambientes de ensino e da carreira docente profissional (Tardif, 2019). Nessa perspectiva, foi realizada, com os três descritores, a discussão dos artigos ligados à Educação Matemática, Ensino de Estatística, Formação de Professores.

3.1. Experiências da Educação Matemática para o ensino

Nesse momento, foram selecionados quatro artigos, sendo: um da revista Boletim de Educação Matemática — Santana (2016); um da Revista de Educação Matemática e Tecnológica Ibero-americana — Vaz, Vasquez e Vilela (2019); e dois da Revista Sergipana de Matemática e Educação Matemática — Bueno, Ballejo e Viali (2020) e Perin e Campos (2021).

A formação inicial do docente de Matemática e sua prática pedagógica tem inquietado a comunidade de educadores matemáticos e sido bastante investigada, ocasionando grandes discussões e várias publicações científicas. Os docentes responsáveis pelas formações, embora se dediquem à investigação no campo da educação e à docência, não podem afirmar que conhecem a prática pedagógica da escola atual (FIORENTINI, 2010). Isso porque as instituições de ensino não são as mesmas e sempre se encontram em contínua modificação.

Em meio a esse contexto, Santana (2016) mostra a construção de um produto educacional do Mestrado Profissional em Educação Matemática para o ensino e aprendizagem da Estatística, embasado nos fundamentos teóricos do letramento e do pensamento estatístico e norteado pelo ciclo investigativo, implementando o desenvolvimento de atividades com características de letramento estatístico aplicadas em uma turma do 3º ano do Ensino Médio. A pesquisa favoreceu o desenvolvimento de habilidades de letramento estatístico e o aprendizado de conceitos da área, além de ter possibilitado maior motivação por parte dos estudantes, uma vez que a resolução das atividades foi além do esperado. Dessa forma, houve uma melhor interação durante a observação trabalhada em grupos na resolução de problemas.

Em suas pesquisas, Vaz, Vasquez e Vilela (2019) investigaram três eventos da história da matemática com a finalidade de promover a produção tecnológica e de conhecimento matemático, utilizando a conjectura de Kepler, o teorema das quatro cores e o problema booleano. Os tópicos mencionados levam ao encontro da implementação da ciência Matemática com as tecnologias digitais, mostrando pesquisas em que a relação do computador e um teorema é aceita pelos cálculos desenvolvidos. Outro apontamento descrito é que alguns cálculos matemáticos são aplicados com suporte de *softwares*, ajudando na resolução dos problemas mencionados e aprimorando cada etapa da atividade estruturada no GeoGebra. A investigação apresenta o fortalecimento do conhecimento do aluno com as demonstrações visuais e dinâmica da tecnologia, sendo esta uma ferramenta interessante para o professor de matemática.

Por conseguinte, uma proposta similar acontece na pesquisa de Bueno, Ballejo e Viali (2020). Nesse estudo, os autores investigaram a utilização das tecnologias digitais da informação e comunicação (TDIC) para o ensino e aprendizagem de conceitos de Estatística Descritiva com alunos de uma disciplina de um curso do Ensino Superior. Diante desses recursos digitais, observa-se que eles estão presentes a cada momento em sala de aula, uma vez que nossa sociedade passa por mudanças globais com as tecnologias. Nesse trabalho, foi descrita a experiência dos conteúdos de Estatística com uso das tecnologias digitais, ou seja, houve uma orientação entre o professor e os estudantes, para construírem um infográfico nas plataformas do *Mentimeter* e *Easel.ly*, sendo a turma separada em grupos. Os resultados da investigação são significativos a respeito dos conteúdos de Estatística de maneira dinâmica e prática, acontecendo o processo de aprendizado fundamentado na teoria construcionista[1], na qual o aluno ensina o computador com seus comandos, obtendo dados para a construção do objeto proposto.

Além disso, Perin e Campos (2021) realizaram a integração da Educação Estatística e Educação Financeira em uma atividade de modelagem matemática com trinta e dois estudantes no 3º ano do Ensino Médio, acontecendo ao final uma escrita de um texto argumentativo da tarefa. Nesse momento, ocorre a integração das temáticas com uma atividade de Modelagem Matemática sobre o tema inflação. Na análise, percebe-se que os estudantes aprendem conceitos da Estatística, como a média e mediana, levando a apontarem o seu desenvolvimento ligado à literacia e ao raciocínio estatístico durante a situação-problema.

Observa-se que, por meio da formação de professores, é possível conquistar novas práticas pedagógicas estruturadas em um produto educacional, contribuir com a inclusão das novas tecnologias digitais educacionais, bem como a integração de dois tópicos a serem desenvolvidos na modelagem matemática. Com isso, percebe-se que a Educação Matemática na formação docente do profissional de Matemática visa suprir um dos principais problemas de aprendizagem dos alunos, que é a resolução de problemas com suporte das tecnologias digitais.

3.2. Ensino de Estatística para o ensino e aprendizagem

Além da presença constante do Ensino de Estatística no cotidiano, alguns trabalhos selecionados neste tópico destacam a relevância de estudos investigativos no ensino e aprendizagem de Matemática. Nesse sentido, destaca-se um artigo da revista BOLEMA - Silva, Curi e Schimiguel (2017); dois da Revista EM TEIA — Pereira e Santos Junior (2014) e Gonçalves *et al*. (2019); e dois da REVISEM — Borges e Severo (2021) e Silva e Laurino (2021).

Assim como em todas as pesquisas científicas descritas neste trabalho, Silva, Curi e Schimiguel (2017) identificam estudos na temática “Educação Estatística” da revista BOLEMA, tendo assim investigado 40 artigos entre o período de 2006 até 2015, sendo desenvolvida uma pesquisa do tipo Estado do Conhecimento. Desse modo, o mapeamento realizado mostrou investigações na área de Educação Financeira desenvolvidas por parcerias institucionais e interinstitucionais. Tais pesquisas apontam que a temática de Probabilidade e Estatística se inclui na formação de professores, sendo utilizado o método de pesquisa qualitativa em todas os trabalhos estudados pelos autores, percebeu-se que as investigações evidenciaram as dificuldades enfrentadas pelos educadores e educandos no contexto do ensino de aprendizagem das temáticas descritas. Conclui-se que, a partir dos fichamentos realizados, há uma certa quantidade de publicações nacionais e internacionais que acreditam no desenvolvimento na área de Educação Estatística.

No trabalho de Pereira e Santos Junior (2014), investigou-se o Ensino de Estatística no Ensino Fundamental de uma escola do campo, havendo a inclusão das Diretrizes Curriculares do Estado do Paraná (DCE) e dos Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN) na orientação do trabalho com Estatística nas escolas

[1] Termo criado por Seymour Papert (2008) e segundo o autor é a construção do conhecimento mediado pela interação do estudante com ferramentas interativas no computador.

do ensino básico nas atividades propostas. Nesse aspecto, percebe-se que o artigo contribui para o ensino e aprendizagem dos tópicos (tabela, gráficos, infográfico, média e porcentagem) incluídos nos conteúdos de Estatística. Dessa forma, observou-se que os estudantes mostraram interesse na proposta de trabalho de ensino de Estatística com dados obtidos a partir da descrição de suas vivências, representadas em diversas formas de aprendizagem, zelando pela escrita na tentativa de mostrar de forma clara suas resoluções dos problemas propostos.

Uma escrita relevante no campo interdisciplinar foi a de Gonçalves *et al*. (2019), que discorre sobre as contribuições das sequências de ensino nas disciplinas de Matemática e Educação Física quanto ao Ensino de Estatística aplicada aos alunos do Ensino Médio e utilizando a Análise Textual Discursiva. O desenvolvimento da pesquisa foi de cunho qualitativo e interpretativo com quinze estudantes e realizou-se por meio de atividades interdisciplinares, cujo conteúdo tinha as seguintes características a serem trabalhadas: divergências na série/idade escolar, trabalhadores, mães e pais de família, devido ao fato de alguns deles trabalharem durante o dia em que não estão na escola. Desse modo, a Sequência de Ensino Interdisciplinar (SEI) aplicada aos alunos foi disponibilizada no repositório Universidade Tecnológica Federal do Paraná (UTFPR), contendo os conteúdos relacionados as duas disciplinas citadas em toda a pesquisa e servindo de auxílio para outros professores aplicarem em suas aulas.

A pesquisa realizada por Borges e Severo (2021) apresenta resultados de livros didáticos e paradidáticos em Educação Estatística desenvolvidos pelos membros do Grupo de Trabalho 12 (GT12), da Sociedade Brasileira de Educação Matemática (SBEM) de 2016 a 2020, divididos em três níveis de estudo. Nesse sentido, o grupo GT12 atinge o seu objetivo com os documentos oficiais, lançando um olhar crítico ao Programa Nacional do Livro Didático (PNLD), no que diz respeito aos conteúdos de Estatística nos livros didáticos, e destacando o pensamento do professor da Educação Básica em sua atuação com o desenvolvimento da literacia estatística dos alunos.

Quanto aos estudos de Silva e Laurino (2021), estes discutem a produção científica das experiências de aprendizagem de ensino de Estatística em consonância do Estado do Conhecimento de artigos publicados em periódicos entre janeiro de 2010 até outubro de 2020 com *Qualis* A1, A2, B1 e B2, bem como na Análise de Conteúdo de Bardin (1977) para estruturação de categorias temáticas. Outro aspecto destacado no trabalho foi o uso dos termos da Educação Estatística indexados nos artigos analisados, trazendo uma investigação das experiências de aprendizagem e de ensino de Estatística: no Ensino Infantil, no Ensino Fundamental, no Ensino Médio e na Educação Superior. Contudo, entende-se que a formação de professores acontece em um processo contínuo durante toda a vida do docente, por meio de experiências em diferentes ambientes e instituições. Tal trabalho contribui para trazer reflexões acerca de como as experiências formativas têm acontecido na reprodução da aprendizagem e no ensino de Estatística, a fim de torná-las significativas para educandos e educadores.

Isso quer dizer que o interesse na temática de Estatística e Probabilidade pode evidenciar as dificuldades encontradas em vários estudos, mas também que os estudos nas Diretrizes Curriculares do Estado do Paraná (DCE) e dos Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN) podem orientar uma prática pedagógica dentro da escola. Deve-se considerar que essas pesquisas se incluem na interdisciplinaridade de duas disciplinas podendo ser trabalho em um grupo de pesquisa no Programa Nacional do Livro Didático (PNLD) com os conteúdos de Estatística, à medida que é necessário ver como acontece no Ensino Infantil, Fundamental, Médio e na Educação Superior. Por questões diversas, o ensino de Estatística tem tomado fundamentação em várias pesquisas, promovem o nivelamento mínimo possível dos estudantes em cada etapa do ensino, utilizando-se das várias metodologias e formas de ensino, fato que se deve entender como uma solução na erradicação dos conhecimentos a serem adquiridos.

3.3. Formação de Professores no Ensino Fundamental e Médio

A transformação na sociedade acontece constantemente, apresentando a estruturação de novos sujeitos relacionado as novas demandas nas singularidades econômicas, culturais e sociais. Dessa forma, é necessário que o desenvolvimento profissional dos docentes leve em consideração essas modificações e, para que isso aconteça, é importante transmitir conhecimentos e moldar a iniciativa dos estudantes. Dessa forma, selecionou-se dois artigos da revista Boletim de Educação Matemática - Andrade *et al*. (2020) e Lopes (2014); três da Revista de Educação Matemática e Tecnológica Ibero-americana - Mendonça e Lopes (2015), Costa, Prado e Silva (2016) e Borba, Souza e Carvalho (2018) e dois da Revista Sergipana de Matemática e Educação Matemática – Coura e Passos (2019) e Santana, Nascimento e Couto (2021), para descrever estudos científicos sobre a atuação profissional do professor em sala de aula.

Segundo Andrade *et al*. (2020), buscou-se na literatura sobre letramento estatístico e educação crítica para desenvolver uma atividade para interpretar gráficos em um Ambiente Virtual de Aprendizagem (AVA) sendo suporte para os 23 participantes de Engenharia de uma instituição do Ensino Superior Pública do Rio de Janeiro. Nesse sentido, o artigo mostra os esforços na condução do ensino de Estatística mais crítico introduzido para os estudantes de Engenharia, sem mudar o devido processo de aprendizagem e as conexões necessárias para a profissão, já que diversos temas trabalhados poderão fazer parte da atuação desses sujeitos. Notou-se que a atividade conduzida pelo aplicativo *Edmodo*, proporcionou uma boa atenção entre os alunos, estimulando-os a verificar os gráficos construídos pelos colegas de turma. Outro fato importante da atividade foi trabalhar o senso crítico desses estudantes, construindo o desenvolvimento de habilidades da literacia estatística. Por fim, percebe-se que o estudo tem uma grande relevância ao ensino de estatística aplicando conceitos matemáticos para estudantes de Engenharia.

Em conjunto com as aplicações em sala de aula, pode-se ser visualizado o trabalho de Lopes (2014), realizado no contexto de uma narrativa sobre duas docentes que ensinam Matemática no Ensino Fundamental para implementação da Educação Estatística em suas aulas. As atividades são desenvolvidas para as turmas do 5º e do 9º ano, buscando evidências para formação profissional das professoras. As narrativas dentro do artigo permitem a revelação de saberes na Matemática e na Estatística estruturadas na prática profissional, os quais se tornam importantes à formação do professor, pois são resultantes de experiências determinadas pela complexidade presente na sala de aula.

Nesse relato, Mendonça e Lopes (2015) realizaram uma pesquisa qualitativa com o objetivo de compreender o planejamento do professor em atividades de modelagem, sendo estas desenvolvidas por três docentes de forma colaborativa com foco na Educação Estatística. As atividades observadas no trabalho mostram um planejamento aberto, considerando que o processo investigativo dos autores se realiza na intervenção pedagógica desenvolvida durante a modelagem das situações-problema. De modo geral, é possível visualizar que as três atividades aplicadas têm um bom planejamento aberto e que seu desenvolvimento depende da intervenção pedagógica durante todo o procedimento. Conclui-se que os docentes aceitaram a responsabilidade de fixar o desenvolvimento da modelagem nas suas intervenções no decorrer da investigação com os estudantes.

No conteúdo desenvolvido em um curso de graduação, Costa, Prado e Silva (2016) desenvolveram um estudo no ensino de Estatística em um curso de Pedagogia, localizado no estado de São Paulo, com um grupo de seis alunas, que foram analisadas por três professores de Estatística para argumentação do letramento estatístico. Diante da situação, observou-se que há necessidade de pesquisa no sentido de mostrar a inclusão da Estatística na formação de "professores pedagogos", aplicando teoria e prática, como forma de permitir aos futuros docentes a experiência de situações encontradas em suas salas de aula. Por meio dessa análise, verificou-se que as instituições de ensino superior precisam se preocupar com a formação profissional diante do trabalho do professor em sala de aula, desenvolvendo nestes estudantes os conhecimentos necessários para as diversas formas entre planejamento e o processo de aprendizagem significativa para os estudantes.

Analisando a descrição do conteúdo, Borba, Souza e Carvalho (2018) apresentam um trabalho com temáticas da educação básica, Combinatória, Estatística e Probabilidade, realizando um aprofundamento dessas áreas no Ensino Fundamental até o Ensino Médio para o raciocínio dos professores. Nessa pesquisa, apontou-se que a compreensão não acontece sem a instrução formal do professor e que até os adultos escolarizados podem ter concepções errôneas durante a interpretação e julgamentos dos dados dentro dos tópicos citados. Importante notar dentro do trabalho, que as crianças aprendem os conteúdos de Combinatória, Estatística e Probabilidade nos primeiros anos do Ensino Fundamental e na Educação Infantil. Percebe-se também, que é preciso inovar os conceitos matemáticos incluídos nessas áreas de estudo, partindo desde a investigação, levantamento, hipóteses, experimentação, sistematização e a comunicação de evidências trabalhadas. Assim, nota-se a importância da formação inicial e continuada de professores para garantir o desenvolvimento desses conteúdos em sala de aula.

Contudo, pode-se observar a formação inicial do professor na licenciatura na pesquisa de Coura e Passos (2019), investigaram profissionais que atuam na formação de professores, em que descreveu o desenvolvimento de uma formadora para professores de Matemática e com diálogos de caráter biográfico-narrativo com os participantes. O trabalho expõe uma narrativa de experiências desenvolvidas na formação profissional, cujas características acontecem de modo investigativo na docência. Essa interpretação tem assumido uma postura do professor para interpretar a história de vida, dentro da prática pedagógica dos professores de Matemática.

Por isso, buscou-se nos estudos de Santana, Nascimento e Couto (2021), a análise do desenvolvimento profissional de professores que ensinam conteúdos de Estatística nos anos iniciais com sequências didáticas em parceria com uma

Universidade, realizando uma abordagem qualitativa em sala de aula. Esse estudo resultou em dois tipos de elementos ocorridos nas experiências diferentes de aprendizagem dos professores: renovação/ampliação do conhecimento específico e revelação/renovação da prática de ensino. Os autores concluíram que o processo formativo é resultado de estudos, estruturação de conhecimentos, interação, aprendizagem e verificação da teoria unidos à prática.

Os respectivos trabalhos mostram estudos relevantes para a formação de professores, utilizando ambientes virtuais, narrativas contextualizadas, desenvolvimento de práticas pedagógicas para pedagogos aplicados em diversos tipos de ensino da educação básica, assim, construindo conhecimentos necessários para estudos das vivências escolares. Com essa perspectiva, o profissional docente de matemática assume uma prática de ensino voltado para as ações realizadas dentro da escola com o objetivo de colocar em atuação as teorias pedagógicas, cuja finalidade de concretizar o processo de ensino e aprendizagem dos alunos.

4. Considerações finais

Neste estudo, foram analisados 16 artigos que atendiam os três descritores da pesquisa sobre a “educação matemática e ensino de estatística”, “ensino de estatística e formação de professores” e “educação matemática e formação de professores”. Outro fato observado foi a relação dos periódicos Boletim de Educação Matemática (BOLEMA), Revista de Educação Matemática e Tecnológica Ibero-americana (EM TEIA) e Revista Sergipana de Matemática e Educação Matemática (REVISEM), caracterizados pelos diversos conhecimentos no Ensino de Matemática e Educação Matemática, por meio de vivências e experiências pelos docentes de matemática e outras áreas, ou seja, pelas questões culturais, sociais e econômicas desenvolvidas durante a investigação dos trabalhos.

Este trabalho favorece a compreensão da Educação Matemática dentro do ensino de Estatística, trabalhando a formação de professores no contexto educacional, bem como na contribuição para o cotidiano dos estudantes. Foi possível verificar que o processo desses descritores merece atenção de todos os envolvidos na promoção eficiente e fundamental de um ensino e aprendizagem nas instituições de ensino. Contudo, o estudo contribui no processo de formação inicial de professores como componente que não pode se caracterizar em apenas um sujeito, e sim a oportunidade de levar o conhecimento a todos que se encontram na formação de futuros docentes.

Com a análise dos trabalhos, percebe-se as metodologias e didáticas aplicadas no modelo tradicional de ensino passando por algumas mudanças na aplicação de tecnologias digitais junto ao suporte teórico diante de cada cenário. Motivo pelo qual o ensino de Estatística enseja reflexões no ambiente escolar de outras instituições. Tal fato decorre da necessidade de novas observações críticas e reflexivas para flexibilizar modelos de ensino na construção crítica e reflexiva. Reflexões estas que remontam o novo modo de pensar que incluem a formação do professor de matemática, desde a elaboração dos conteúdos até a concepção de cada componente curricular, colocando em prática outros suportes para mediação em sala de aula.

Por fim, tais investigações poderão contribuir para novas ideias interessantes ao proporcionar temáticas relevantes que envolvem o campo de estudo da Educação Estatística, podendo ser observado para além das publicações aqui analisadas, o intermédio da discussão de serem (re)produzidas na aprendizagem ou (re)pensadas para as experiências em sala de aula no Ensino de Estatística de forma mais eficiente para professores que lecionam matemática e de sua *práxis* na Educação Matemática.

Bibliografia

Andrade, F. C., Schiller, C. V., Silva, D. A. F., Menezes, L. P., & Silva, A. S. (2020) Aspectos da interpretação de gráficos de estudantes universitários em um ambiente virtual. *Bolema,* 34 (67), 462-479. Recuperado em 2 julho, 2021, de: https://doi.org/10.1590/19804415v34n67a06.

Bardin, L. (1977). *Análise de conteúdo*. Lisboa: Edições 70, 281 p.

Borba, R. E. de S., Souza, L. de O., & Carvalho, J. I. F. de. (2018). Desafios do ensino na educação básica de combinatória, estatística e probabilidade. *EM TEIA,* 9 (1), 1-24. Recuperado em 3 julho, 2021, de: https://periodicos.ufpe.br/revistas/emteia/article/view/231908.

Borges, P. P., & Severo, A. (2021). Interfaces entre a pesquisa em Educação Estatística e o livro didático de Matemática: as produções acadêmicas e científicas do GT12 de 2016 a 2020. *REVISEM,* 6 (1), 238-254. Recuperado em 3 julho, 2021, de: https://seer.ufs.br/index.php/ReviSe/article/view/14609.

Bueno, R. W. da S., Ballejo, C. C., & Viali, L. (2020). Entrando na zona de risco: utilizando as tdic para ensino e aprendizagem de conceitos de estatística descritiva. *REVISEM,* 5 (1), 71-88. Recuperado em 3 julho, 2021, de: https://seer.ufs.br/index.php/ReviSe/article/view/12401.

Costa, M. da., Prado, M. E. B. B., & Silva, A. F. G. (2016). Ensino de estatística na formação do professor dos anos iniciais. *EM TEIA,* 7 (1), 1-17 Recuperado em 3 julho, 2021 de: https://periodicos.ufpe.br/revistas/emteia/article/view/3885.

Coura, F. C. F., & Passos, C. L. B. (2019). Desenvolvimento profissional de uma formadora de professores de Matemática. *REVISEM,* 4 (2), 25-47. Recuperado em 3 julho, 2021, de: https://seer.ufs.br/index.php/ReviSe/article/view/11787.

Fiorentini, D., & Lorenzato, S. (2006). *Investigação em educação matemática*: percursos teóricos e metodológicos. Campinas: Autores Associados.

Fiorentini, D. (2010). Desenvolvimento profissional e comunidades investigativas. In *Anais do Encontro nacional de didática e prática de ensino,* Belo Horizonte. MG.

Gonçalves, F. A. M. F., Santos Junior, G. dos, Pereira, C. S., & Dias, C. de F. B. (2019). Ensino de estatística no ensino médio: uma proposta interdisciplinar entre matemática e educação física. *EM TEIA,* 10 (3), 1-16. Recuperado em 3 julho, 2021, de: https://periodicos.ufpe.br/revistas/emteia/article/view/241150.

Gil, A. C. (2008). *Como elaborar projetos de pesquisa*. 5. ed. São Paulo: Atlas.

Lopes, C. E. (2014). As narrativas de duas professoras em seus processos de desenvolvimento profissional em educação estatística. *Bolema,* 28 (49), 841-856. Recuperado em 2 julho, 2021, de: https://doi.org/10.1590/1980-4415v28n49a19.

Martins, H. H. T. S. (2004). Metodologia qualitativa de pesquisa. *Educação e Pesquisa,* 30 (2), 289-300.

Melo, K. M. F. de, & Groenwald, C. L. O. (2018). O pensamento Estatístico no Ensino Fundamental: uma experiência com projetos de pesquisa articulados com uma sequência didática eletrônica. *REnCiMa*, 9 (2), 300-319. Recuperado em 2 julho, 2021, de: https://revistapos.cruzeirodosul.edu.br/index.php/rencima/article/view/1671.

Mendonça, L. O., & Lopes, C. E. (2015). Planejamento de atividades de modelagem matemática: um caminho possível. *EM TEIA,* 6 (1), 1-24. Recuperado em 3 julho, 2021, de: https://periodicos.ufpe.br/revistas/emteia/article/view/2262.

Menezes, A. H. N., Duarte, F. R., Carvalho, L. O. R., & Souza, T. E. S. (2019). Metodologia científica: teoria e aplicação na educação a distância. *Universidade Federal do Vale do São Francisco, Petrolina-PE. e-book, 83p.* Recuperado em 5 julho, 2021, de: https://portais.univasf.edu.br/dacc/noticias/livro-univasf/metodologia-cientifica-teoria-e-aplicacao-na-educacao-a-distancia.pdf.

Papert, S. (2008). *A máquina das crianças:* repensando a escola na era da informática. Porto Alegre: RS: Artes Médicas.

Pereira, L. B. C., & Santos Junior, G. dos. (2014). Ensino de estatística na escola do campo: contribuições do ensino por meio da realidade de educandos de um 6º ano do Ensino Fundamental. *EM TEIA,* 5 (1), 1-25. Recuperado em 3 julho, 2021, de: https://periodicos.ufpe.br/revistas/emteia/article/view/2213.

Pereira, A. S., Shitsuka, D. M., Parreira, F. J., & Shitsuka, R. (2018). *Metodologia da pesquisa científica.* UFSM. Recuperado em: 5 julho, 2021, de: https://repositorio.ufsm.br/bitstream/handle/1/15824/Lic_Computacao_Metodologia-Pesquisa-Cientifica. pdf.

Perin, A. P., & Wodewotzki, M. L. L. (2019). A modelagem Matemática: um ambiente para o desenvolvimento do raciocínio estatístico. *Caminhos da Educação Matemática em Revista*, 9 (2), 158-170. Recuperado em 25 junho, 2021, de: https://aplicacoes.ifs.edu.br/periodicos/index.php/caminhos_da_educacao_matematica/article/view/324.

Perin, A. P., & Campos, C. R. (2021). Educação Financeira: uma possibilidade de integração com a Educação Estatística. *REVISEM,* 6 (1), 339-358. Recuperado em 3 julho, 2021, de: https://seer.ufs.br/index.php/ReviSe/article/view/14544.

Prodanov, C. C., & Freitas, E. C. de. (2013). *Metodologia do trabalho científico: métodos e técnicas da pesquisa e do trabalho acadêmico.* 2. ed. Novo Hamburgo: Feevale.

Puglisi, M. L., & Franco, B. (2005). *Análise de conteúdo*. 2. ed. Brasília: Líber Livro.

Sampaio, R. F., & Mancini, M. C. (2007). Estudos de revisão sistemática: um guia para síntese criteriosa da evidência científica. *Brazilian Journal of Physical Therapy,* 11 (1), 83-89.

Santana, E., & Nascimento, S. P. A. (2021). Desenvolvimento profissional de professores na construção colaborativa de sequências de ensino de Estatística. *REVISEM,* 6 (1), 85-106 Recuperado em 3 julho, 2021, de: https://seer.ufs.br/index.php/ReviSe/article/view/14780.

Santana, M. de S. (2016). Traduzindo Pensamento e Letramento Estatístico em Atividades para Sala de Aula: construção de um produto educacional. *Bolema,* 30

(56), 1165-1187. Recuperado em 02 julho, 2021, de: https://doi.org/10.1590/1980-4415v30n56a17.

Silva, C. R., & Laurino, D. P. (2021). Estado do conhecimento: experiências de aprendizagem e de ensino de Estatística. *REVISEM,* 6 (1), 127-147. Recuperado em 3 julho, 2021, de: https://seer.ufs.br/index.php/ReviSe/article/view/14743.

Silva, E. I. da, & Silva, J. P. da. (2019). Letramento Estatístico: uma experiência no 1° Ano do Ensino Médio. *Caminhos da Educação Matemática em Revista*, 9 (2), 171-186.

Silva, J. F., Curi, E., & Schimiguel, J. (2017). Um Cenário sobre a Pesquisa em Educação Estatística no Boletim de Educação Matemática – BOLEMA, de 2006 até 2015. *Bolema,* 31 (58), 679-698. Recuperado em 2 julho, 2021, de: https://doi.org/10.1590/1980-4415v31n58a08.

Tardif, M. (2014). *Saberes docentes e formação profissional*. 17. ed. Petrópolis: Vozes.

Tozoni-Reis, M. F. C. (2009). *Metodologia da pesquisa.* 2. ed. Curitiba: IESDE Brasil.

Vaz, D. A. de F., Vásquez, J. C. S., & Feliciano, J. D. C. (2019). Novas tecnologias, novas demonstrações, novos caminhos para a matemática e a educação matemática. *EM TEIA,* 10 (3), 1-17. Recuperado em 3 julho, 2021, de: https://periodicos.ufpe.br/revistas/emteia/article/view/241388.

Autores

Paulo Vitor da Silva Santiago: profesor de Matemática e mestre em ensino de ciências e matemática pela Universidade Federal do Ceará (UFC). Membro da Sociedade Brasileira de Educação Matemática, Regional Ceará (SBEM-CE). Membro do Grupo de Estudos Tecendo Redes Cognitivas de Aprendizagem (G-TERCOA) e do Grupo de Pesquisa e Produção de Ambientes Interativos e Objetos de Aprendizagem (PROATIVA). E-mail: pvitor60@hotmail.com. 0000-0002-6608-5452

Francisco Régis Vieira Alves: professor titular do departamento de matemática do Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Ceará (IFCE), campus Fortaleza. Bolsista de Produtividade em Pesquisa do Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico CNPQ-PQ2. Docente permanente do mestrado acadêmico em Ensino de Ciências e Matemática PGECE/IFCE. Docente permanente do mestrado profissional em Educação Profissional Tecnológica (PROEPT/IFCE). Docente permanente do programa de doutorado acadêmico em REDE-RENOEN (Rede Nacional de Ensino). E-mail: fregis@ifce.edu.br. 0000-0003-3710-1561

Maria José Costa dos Santos: professora, pesquisadora e orientadora nos programas de Pós-graduação em Educação (PPGE) e Pós-graduação mestrado profissional em Ensino de Ciências e Matemática da Universidade (ENCIMA) Federal do Ceará (UFC). Coordenadora da Linha de Pesquisa Educação, Currículo e Ensino (LECE/PPGE). Coordenadora do Programa de Formação para Docência do Ensino Superior, Lotada na Coordenadoria de Inovação e Desenvolvimento Acadêmico da (PAAP/COIDEA/EIDEIA/UFC). Líder do grupo de pesquisa Tecendo Redes Cognitivas de Aprendizagem(G-Tercoa/CNPq). Site:http://www.gtercoa.ufc.br. E-mail: gtercoa@ufc.br. E-mail: mazzesantos@ufc.br. 0000-0001-9623-5549

UNIÓN
REVISTA IBEROAMERICANA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA

ISSN: 1815-0640
Número 64. Abril 2022
Páginas 1-23

Muestreo en la educación básica: análisis de las orientaciones curriculares y libros de textos en Brasil y Andalucía – España

Luan Costa de Luna y Gilda Lisbôa Guimarães

Fecha de recepción: 17/05/2021
Fecha de aceptación: 15/10/2021

Resumen	El objetivo de este artículo es analizar las orientaciones curriculares de Brasil y Andalucía-España con la finalidad de establecer acercamientos y diferencias cuanto al aprendizaje de muestreo. Observamos que las dos guías presentan una perspectiva de la función muestral en el contexto de la investigación con datos reales, pero no se proponen habilidades como percibir la relación entre muestra y población, pensar sobre la variabilidad y relación al tamaño muestral y comprender el margen de error. Por otro lado, el currículo español propone los conceptos de representatividad, sesgo y el uso de un lenguaje más adecuado para la interpretación de los datos y comunicación de la información, lo que no ocurre en la orientación brasileña. **Palabras clave**: Educación Estadística, muestreo, currículo.
Abstract	The aim of this article is to analyze the curricular guidelines of Brazil and Andalusia-Spain to establish approaches and divergences regarding the learning of sampling. We observed that although the guidelines present a perspective of the function of the sample in the context of research with real data, skills such as understanding the relationship between sample and population, thinking about the variability in relation to the sample size and understanding the margin of error are not proposed. On the other hand, the Spanish curriculum proposes the concepts of representativeness, bias and the use of a more adequate language for the interpretation of data and communication of information, which does not occur in the Brazilian orientation. **Keywords**: Statistics Education, sampling, curriculum.
Resumo	O objetivo deste artigo é analisar as orientações curriculares do Brasil e da Andaluzia-Espanha a fim de estabelecer aproximações e divergências quanto à aprendizagem de amostragem. Observamos que apesar das orientações apresentarem uma perspectiva da função da amostra no contexto de pesquisa com dados reais, não são propostas habilidades como perceber a relação entre amostra e população, pensar acerca da variabilidade em relação ao tamanho da amostra e compreender margem de erro. Por outro lado, o currículo espanhol propõe os conceitos de representatividade, viés e uso de uma linguagem mais adequada para a interpretação de dados e comunicação de informações, o que não ocorre na orientação brasileira. **Palavras-chave:** Educação Estatística, amostragem, currículo.

1. Introducción

La Estadística es una ciencia que posibilita la comprensión de nuestra realidad y, consecuentemente, viabiliza la toma de decisiones en situaciones de incerteza y de riesgo. A pesar de esta relevancia, esta ciencia no es entendida por todos. En el Brasil, por ejemplo, los resultados de la investigación sobre el Indicador de Alfabetismo Funcional (INAF), en 2018, apuntaron que solamente 34% de los brasileños alcanzan a comparar o relacionar datos numéricos o textuales expresos por medio de gráficos o tablas sencillas involucrando situaciones de ámbito cotidiano o social.

Tal como afirma Gal (2002), creemos que una cultura estadística es esencial. El autor citado llama la atención al hecho de que la mayoría de los individuos son consumidores de datos insertos en el contexto de lectura y, por lo tanto, necesitan disponer de una postura crítica frente a la validez de la información que les sea presentada. Por otro lado, hay productores de datos, los cuales están inseridos en el llamado contexto de investigación. Así, necesitan desarrollar una postura cuestionadora y comprender las fases que componen una investigación estadística.

De esta manera, tanto para la interpretación, como para la construcción de datos, es fundamental dar especial atención a la muestra utilizada en cada caso. Para interpretar muestras, es importante analizar cómo los datos fueron recolectados, cuales criterios fueron utilizados para su selección, su representatividad o si sugiere la existencia de una tendencia de sesgo. Para la construcción de datos, es relevante comprender las etapas que componen definir una muestra, o sea, lo que se debe considerar para la planificación de una pesquisa de muestreo: las características/criterios importantes que debe tener la muestra, su tamaño y cual técnica de muestreo es la más efectiva, considerando los objetivos investigativos.

En relación con el ámbito de la investigación, Guimarães y Gitirana (2013) presentan un modelo de ciclo investigativo que empieza por la definición del objetivo, pasando por el levantamiento de hipótesis y la definición de la muestra, seguido por la recolección, clasificación, representación y análisis de los datos, para entonces, llegar a la conclusión, donde nuevas preguntas podrán ser generadas y, de esta forma, se podría generar un nuevo ciclo de investigación. Es fundamental señalar que todas esas fases están interconectadas y son dependientes entre sí.

En este artículo nos interesa más específicamente una de estas fases, la definición de la muestra, que corresponde a cualquier subconjunto de la población (Triola, 2008). Como también, entender la finalidad, las ventajas y las desventajas de cada tipo de muestra que se venga a utilizar.

Investigadores (Ben-Zvi, Baker y Makar, 2015) ratifican que seleccionar muestras representativas y utilizarlas para establecer generalizaciones sobre poblaciones desconocidas es el núcleo de la Estadística. Reflexiones de este orden y de cómo las muestras varían (variabilidad) son cruciales para construir estimaciones y tomar decisiones adecuadas basadas en datos.

En el escenario brasileño, tras la publicación de la Base Nacional Común Curricular – BNCC (Brasil, 2017), la componente de Estadística y Probabilidad ganó mayor atención que en años anteriores. Bajo esta perspectiva, las propuestas de los libros de texto pasaron por varios cambios, buscando atender a esta nueva perspectiva curricular. Situando esto en el escenario internacional, percibimos que en España varios investigadores han estado realizando estudios sobre el muestreo en la Educación Básica en los últimos años (Batanero 2019; Begué, Batanero, Gea y Beltrán-Pellicer, 2020). Dichos estudios indican que los estudiantes comprenden el concepto de muestra y son capaces de dar significado en diferentes contextos. Pero la mayoría de los estudiantes tienen dificultades para seleccionar una muestra representativa de la población, y tampoco pueden identificar sesgos en las muestras debido a creencias, a que se enfocan principalmente en argumentos que aluden al tamaño de la muestra sin considerar la aleatoriedad, olvidando también la variabilidad.

De esto modo, nuestro objetivo es analizar las guías curriculares y libros de texto de Brasil y Andalucía-España de Educación Básica con la finalidad de establecer acercamientos y diferencias sobre conceptos relacionados con el muestreo.

2. Muestreo en la Base Nacional Común Curricular

En Brasil, la Educación Básica está dividida en tres etapas: educación infantil, enseñanza fundamental y enseñanza media. En nuestro caso, nos enfocamos en la enseñanza fundamental (primaria y secundaria), la cual presenta una duración de nueve años y engloba los años iniciales, del 1º al 5º año (de 6 a 11 años), y los años finales, del 6º al 9º año (de 11 a 15 años).

La Base Nacional Común Curricular – BNCC es el documento orientador vigente que define el conjunto orgánico y progresivo de aprendizajes esenciales que todos los estudiantes deben desarrollar a lo largo de la Educación Básica. En ella son evidenciadas competencias y habilidades, la primera definida como un conjunto de conocimientos (conceptos y procedimientos), habilidades (prácticas cognitivas y socioemocionales), actitudes y valores para dar solución a los complejos desafíos de la vida cotidiana, del pleno ejercicio de la ciudadanía y del mundo laboral; mientras que las habilidades expresan el aprendizaje esencial, que debe ser asegurado para los estudiantes de los diferentes contextos escolares, referente al saber-hacer.

El área de conocimiento de la Matemática es dividida en la BNCC (Brasil, 2017) en cinco unidades temáticas, siendo una de ellas la Probabilidad y la Estadística. Esta presenta un enfoque en abordar conceptos, hechos y procedimientos presentes en muchas situaciones-problema de la vida cotidiana, que implican en los ciudadanos la necesidad de poseer habilidades para recolectar, organizar, representar, interpretar y analizar datos presentes en una variedad de contextos, permitiéndoles razonar con fundamentos y tomar decisiones adecuadas, así como raciocinar y utilizar conceptos, representaciones e índices estadísticos para describir, explicar y predecir fenómenos.

Para la Estadística, la BNCC destaca que desde la enseñanza fundamental:

> Los primeros pasos involucran el trabajo de recolección y organización de datos de una investigación de interés de los alumnos. La planificación de cómo hacer una investigación ayuda a comprender el papel de la estadística en el cotidiano de los alumnos. Así, la lectura, la interpretación y la construcción de tablas y gráficos tienen un papel fundamental, bien como la forma de producción de texto escrito para la comunicación de datos, pues es preciso comprender que el texto debe sintetizar o justificar las conclusiones. (Brasil, 2017, p.275, traducción libre)

Tal objetivo se identifica en el enfoque de aprendizaje de la estadística en los años iniciales de la enseñanza fundamental, que es la recolecta de datos a partir de contextos de interés de los estudiantes para explorar los diferentes conceptos. Acreditamos que este es un punto importante, pues investigadores del área sugieren el uso de datos reales y pertinentes al alumnado cuando se trabaja con estadística (Campos, Wodewotzki y Jacobini, 2011; Gal, 2019). A partir de una lectura en todo el documento curricular, elaboramos un compilado de las competencias que se asocian al muestreo (Cuadro 1).

Competencia	Descripción
2	Desarrollar el raciocinio lógico, el espíritu investigativo y la capacidad de producir argumentos convincentes, recurriendo a los conocimientos matemáticos para comprender y actuar en el mundo.
4	Realizar observaciones sistemáticas de aspectos cuantitativos y cualitativos presentes en las prácticas sociales y culturales, con tal de investigar, organizar, representar y comunicar información relevante e interpretarla y evaluarla crítica y éticamente, de manera argumentada.
8	Interactuar con sus pares de manera cooperativa, trabajando colectivamente en la planificación y desarrollo de investigaciones que puedan contestar a cuestionamientos, y en la búsqueda de soluciones para problemas, de modo a identificar aspectos consensuales o no en la discusión de una determinada cuestión, respetando el modo de pensar de los colegas y, incluso, aprendiendo con ellos.

Cuadro 1. Competencias específicas de Matemática asociadas al aprendizaje del muestreo
Fuente: Adoptado de Brasil (2017)[1]

De acuerdo con el Cuadro 1, podemos observar que estas competencias para la enseñanza fundamental contemplan distintas etapas del ciclo investigativo de una pesquisa estadística (Guimarães y Gitirana, 2013), incluyendo el muestreo. Señalamos que, en la competencia 4, se observa una perspectiva de la alfabetización estadística (Gal, 2002) que es mencionada como "comunicar informaciones relevantes, para interpretarlas y evaluarlas crítica y éticamente, produciendo argumentos convincentes" (Brasil, 2017, p.266). Luego, percibimos que las habilidades concernientes a los productores de datos son preocupaciones presentes en la BNCC.

Para garantizar el desenvolvimiento de las competencias específicas, cada componente curricular presenta un conjunto de habilidades relacionadas a distintos objetos de conocimiento (contenidos, conceptos y procesos) que, a su vez, son organizados en unidades temáticas (Cuadro 2).

Año escolar	Objetos de conocimiento	Habilidades
1º año – 6/7 años de edad	Recolección y organización de información. Registros personales para la comunicación de la información recolectadas.	(EF01MA22) Realizar investigación, involucrando hasta dos variables categóricas de su interés y universo de hasta 3 elementos, y organizar datos por medio de representaciones personales.
2º año – 7/8 años de edad	Recolección, clasificación y representación de datos en las tablas simple/de doble entrada y en gráficos de columnas.	(EF02MA22) Comparar información de investigación presentada por medio de tablas de doble entrada y en gráficos de columnas simples o barra, para

[1] Guimarães y Oliveira (2014) señalan tres tipos de representaciones en tablas: cuadros, banco de datos y tablas propriamente dichas. Para ellas, un cuadro es una configuración rectangular con líneas y columnas que no expresan variables. Una tabla implica una sistematización cuantitativa de determinadas variables.

		comprender mejores rasgos de la realidad próxima. (EF02MA23) Realizar investigación de hasta 30 elementos, eligiendo hasta tres variables categóricas de intereses, organizando los datos recolectados en listados, tablas y gráficos de columna simple.
3º año – 8/9 años de edad	Recolección, clasificación y representación referentes a las variables categóricas, por medio de tablas y gráficos.	(EF03MA28) Realizar investigación involucrando variables categóricas en un universo de hasta 50 elementos, organizar los datos recolectados utilizando listados, tablas simples o de doble entrada y representarlos en gráficos de columnas simples o agrupadas, con y sin uso de tecnologías digitales.
4º año – 9/10 años de edad	Diferenciación entre variables categóricas y variables numéricas. Recolección, clasificación y representación de datos de la investigación realizada.	(EF04MA28) Realizar investigación involucrando variables categóricas y numéricas, y organizar datos recolectados por a través de tablas y gráficos de columnas simples o agrupadas, con y sin uso de las tecnologías digitales.
5º año – 10/11 años de edad	Lectura, recolección, clasificación interpretación y representación de datos en tablas de doble entrada, gráficos de columnas agrupadas, gráficos pictóricos y gráficos de líneas.	(EF05MA25) Realizar investigación involucrando variables categóricas y numéricas, organizar datos recolectados a través de tablas, gráficos de columnas, pictóricos y de líneas, con y sin uso de las tecnologías digitales, y presentar texto escrito sobre la finalidad de la investigación y la síntesis de los resultados obtenidos.

Cuadro 2. Objetos de conocimiento y habilidades asociadas al muestreo – años iniciales de la enseñanza fundamental (6 – 11 años de edad)
Fuente: Adoptado de Brasil (2017)

A partir del Cuadro 2, podemos percibir que, en los años iniciales de la enseñanza fundamental no hay ninguna mención explícita para el aprendizaje de muestreo; únicamente en tres de las habilidades se sugiere el tamaño máximo del universo a investigar (de 3 a 50 elementos). Por otro lado, en todos los años de esta etapa de escolaridad presentan indicios de la realización de la propuesta de una investigación estadística. Luego, quedará a cargo del profesor explorar junto a los estudiantes aspectos relacionados al muestreo.

Sin embargo, no encontramos estudios que apoyen esta definición de que existe o no una diferencia significativa en el manejo sobre la cantidad de datos establecidos en el BNCC. Además, en los 4° y 5° años, son abordadas las mismas habilidades respecto al muestreo. Delante de esto, creemos que sería pertinente la exploración de nociones iniciales del aprendizaje del referido concepto. Para tanto, nos orientamos por los estudios realizados con estudiantes brasileños del 5° año (Gomes y Guimarães, 2018; Gomes, 2019), que revelan que estos alumnos son más que capaces, por ejemplo, de estructurar criterios para la validez de una muestra.

Para los años finales de la enseñanza fundamental la BNCC enfatiza que:

> La expectativa es que los alumnos sepan planificar y construir informes de investigaciones estadísticas descriptivas, incluyendo medidas de tendencia central y construcción de tablas y diversos tipos de gráficos. Esta planificación incluye la definición de cuestiones relevantes y de la población a ser investigada, la decisión sobre la necesidad o no de usar muestras y, cuando sea el caso, la selección de sus elementos a través de una adecuada técnica de muestreo. (Brasil, 2017, p. 275, traducción libre)

Constatamos que, en esta fase del ciclo escolar, el enfoque sigue en la realización de investigación estadística y en los estudiantes como productores de datos, lo que exige una postura activa en su proceso aprendizaje. En este proceso, el espíritu investigador, la autonomía, colaboración, argumentación y criticidad son fundamentales. No obstante, es imprescindible que los temas a investigar, además de presentar un carácter de relevancia social, también formen parte del mundo de interés de los estudiantes, pues esto genera una mayor empatía y envolvimiento. En esta etapa escolar es destacada la definición de la población o muestra a ser investigada, juntamente con las técnicas de muestreo (Cuadro 3).

Año escolar	Objetos de conocimiento	Habilidades
6º año – 11/12 años de edad	Recolecta de datos, organización y registro. Construcción de diferentes tipos de gráficos para representar e interpretar la información.	(EF06MA33) Planificar y recolectar datos de la investigación relacionadas a las prácticas sociales elegidas por los alumnos, además de hacer uso de planillas electrónicas para registro, representación e interpretación de la información en tablas, varios tipos de gráficos y textos.
7º año – 12/13 años de edad	Investigación de muestreo e investigación censitaria. Planificación de la investigación, recolecta y organización de los datos, construcción de las tablas y gráficos, además de interpretación de la información.	(EF07MA36) Planificar y realizar investigación involucrando temas de la realidad social, identificando la necesidad de ser censitaria o de usar muestras e interpretar los datos para comunicarlos a través de reporte escrito, tablas y gráficos, contando con el apoyo de planillas electrónicas.
8º año – 13/14 años de edad	Investigación censitaria o de muestreo. Planificación y ejecución de la investigación de muestreo.	(EF08MA26) Seleccionar razones, de diferentes naturalezas (física, ética o económica), que justifiquen la realización de investigaciones de muestreo y no censitarias, y reconocer que la selección de la muestra puede ser hecha de diferentes maneras (muestra casual simple, sistemática y estratificada). (EF08MA27) Planificar y ejecutar investigación de muestreo adecuada, y escribir reporte que contenga gráficos apropiados para representar los conjuntos de datos, destacando aspectos tales como las medidas de tendencia central, la amplitud y las conclusiones.
9º año – 14/15 años de edad	Planificación y ejecución de investigación de muestreo y presentación de reporte.	(EF09MA23) Planificar y ejecutar investigación de muestreo involucrando temas de la realidad social y comunicar los resultados a través de reportes conteniendo evaluaciones de medidas de tendencia central y de la amplitud, tablas y gráficos adecuados, construidos con el apoyo de planillas

		electrónicas.

Cuadro 3. Objetos de conocimiento y habilidades asociadas al muestreo – años finales de la enseñanza fundamental (11 – 15 años de edad)
Fuente: Adoptado de Brasil (2017)

Según el Cuadro 3, es posible notar que la BNCC sugiere la realización de investigaciones estadísticas fundamentadas en temáticas de la realidad social en todos los años escolares (del 6° al 9° año), considerando el establecimiento de la muestra como una de las fases a abordar con los estudiantes. De esta manera, creemos que la escuela debe involucrar a los estudiantes en los procesos de investigación, definiendo muestras que se puedan insertar en hojas de cálculo electrónicas para producir gráficos y tablas que ayuden a los estudiantes a comprender su importancia y relevancia para la extracción de conclusiones y la toma de decisiones. Tales elementos merecen ser señalados y valorados, pues, en currículos anteriores, el enfoque de la estadística no consideraba esa dimensión (Luna y Guimarães, 2021).

Percibimos que el aprendizaje por muestreo es indicado explícitamente a partir del 7° año (12 – 13 años). Acreditamos que este es un indicador limitante, pues, conforme ya resaltamos anteriormente, diversas investigaciones indican que los niños ya desde los años iniciales de la enseñanza fundamental (6 – 11 años) son capaces de aprender sobre tal concepto.

Observamos que la habilidad para el 6° año es la misma del 5° año (ver Cuadros 2 y 3), lo que ratifica nuestro argumento. O sea, las nociones de iniciales del muestreo pueden ser exploradas ampliamente ya desde los años iniciales de la enseñanza fundamental.

Aún en la BNCC, se propone la percepción y la justificativa de que la investigación sea censitaria o de muestreo, y el uso adecuado de los métodos probabilísticos en la realización de investigaciones. Sin embargo, conceptos importantes, como la variabilidad y el tamaño de la muestra, no son mencionados. Tampoco hay alguna alusión a la noción de margen de error y de posibles muestras sesgadas.

Específicamente en cuanto a los métodos de muestreo, señalamos nuestro incómodo respecto de las habilidades, ya que solo se señalan las técnicas probabilísticas (aleatoria simple, estratificada y sistemática). No obstante, los métodos no probabilísticos tienen su importancia, además de recurrentemente ser utilizados. Luego, juzgamos esencial tenerlos como punto de discusión y uso.

Acorde a la gradación de habilidades por año escolar, la BNCC argumenta que: “Se basa en la comprensión y utilización de nuevas herramientas y también en la complejidad de las situaciones-problemas propuestas, cuya resolución exige la ejecución de más etapas o nociones de unidades temáticas distintas” (Brasil, 2017, p. 275). Sin embargo, encontramos claras inconsistencias en la gradación de la propuesta, que es el caso de las habilidades previstas para los 8° y 9° años, con respecto a la investigación estadística, donde no existen diferencias de objetivo de aprendizaje. Y lo mismo ocurre con los 5° y 6° años.

Frente a este análisis, nos preguntamos si hubo y cuál fue el impacto de la BNCC sobre los libros de texto brasileños. Pues, mirar el currículo es fundamental; sin embargo, es importante analizar el material didáctico disponible para el trabajo del docente en el aula.

Por lo tanto, tuvimos acceso a todas las colecciones de libros de texto de Matemática brasileños aprobados por el Programa Nacional del Libro Didáctico y del Material Didáctico (PNLD) – edición 2019 y 2020, sea versión digital o impresa, y así, fue posible analizar las actividades sobre muestreo.

3. Muestreo en los libros de texto brasileños

El libro texto es un recurso de grande importancia en los procesos de enseñanza y de aprendizaje de la educación básica en Brasil; muchas veces es el principal recurso que tiene el profesor para desarrollar sus prácticas en el aula (Carvalho y Lima, 2010; Januário, 2017). De esta forma, Friolani (2007) comenta que los profesores elaboran los planes de clase realizando únicamente la distribución de las unidades o de los capítulos presentados en el libro de texto dentro del periodo lectivo, con la preocupación de cumplir los contenidos programados en el tiempo esperado. Esto suele generarse, en muchos casos, a causa de los padres y por la propia escuela, que exigen el uso pleno de los libros, independientemente de que exista o no un aprendizaje efectivo. En cuanto a la elección de los libros a adoptar en las escuelas, el autor explica que, en muchos casos, se hace por la cantidad de ejercicios que la obra contiene y no por la resolución de problemas, es decir, con un enfoque en los algoritmos.

Brown (2009) destaca la interacción del profesor con el libro de texto, señalando tres grados de apropiación: la transferencia, la adaptación y la improvisación. Cuando los profesores proponen planes de clase, siguiendo estrictamente las propuestas de actividades y las etapas pedagógicas de los libros, ocurre la trasferencia; cuando elaboran de manera que generan una estrategia espontanea para provocar las discusiones de los estudiantes, ocurre la improvisación; y cuando realizan cambios, sucede la adaptación, o sea, cuando la acción docente aporta su propia concepción a partir de lo vivido con el material. La discusión propuesta por Brown (2009) es fundamental para darse cuenta de las posibilidades que el libro de texto dispone para la práctica docente.

El Grupo de Estudios en Educación Estadística en la Enseñanza Fundamental – GREF, registrado en el Consejo Nacional de Desenvolvimiento Científico y Tecnológico (CNPq), investiga procesos de enseñanza y de aprendizaje de la Estadística y de la Probabilidad. Diversas fueron las investigaciones realizadas, entre las cuales figuran algunas sobre los libros de texto brasileños.[2]

En Brasil, existe una política pública referente a los materiales didácticos, el llamado Programa Nacional del Libro Didáctico y del Material Didáctico (PNLD), que se remonta a 1985 para promover la redemocratización en la educación del país. Desde entonces, son distribuidas obras didácticas en todas las escuelas públicas brasileñas, de manera regular y gratuita. Entre finales de 2019 e inicios de 2020, más de 32 millones de estudiantes fueron beneficiados.

Sin embargo, antes de que los libros de texto brasileños se distribuyan en las escuelas, estos pasan por una evaluación en el PNLD y, entre los criterios de análisis, se exige que esté plenamente alineado con las habilidades de la BNCC. Esa evaluación es realizada por especialistas que siguen criterios técnicos, entre

---

[2] https://ufpepesquisas.wixsite.com/gref

ellos “garantizar la cualidad, incentivando la producción de materiales cada vez más adecuados a las necesidades de la educación brasileña, en conformidad con los objetivos de la legislación de la Educación Básica” (Brasil, 2019, p.9).

Los libros poseen un ciclo cuadrienal, por lo tanto, las elecciones de las obras didácticas de parte de los profesores son realizadas cada cuatro años. Como resultado de la publicación de la BNCC, el edicto del PNLD sufrió algunas modificaciones, entre las cuales se identifica la de “garantizar que los materiales contribuyan para el desarrollo de las competencias y habilidades involucradas en el proceso de aprendizaje en los años finales de la enseñanza fundamental, definidas en las Base Nacional Común Curricular (BNCC)” (Brasil, 2019, p.3).

Otra modificación del PNLD es el hecho de que en la versión del libro del profesor hay un formato en ‘U’ (Figura 1), que presenta el descriptor del BNCC al que se relaciona la actividad, pudiendo presentar otra información diversa.

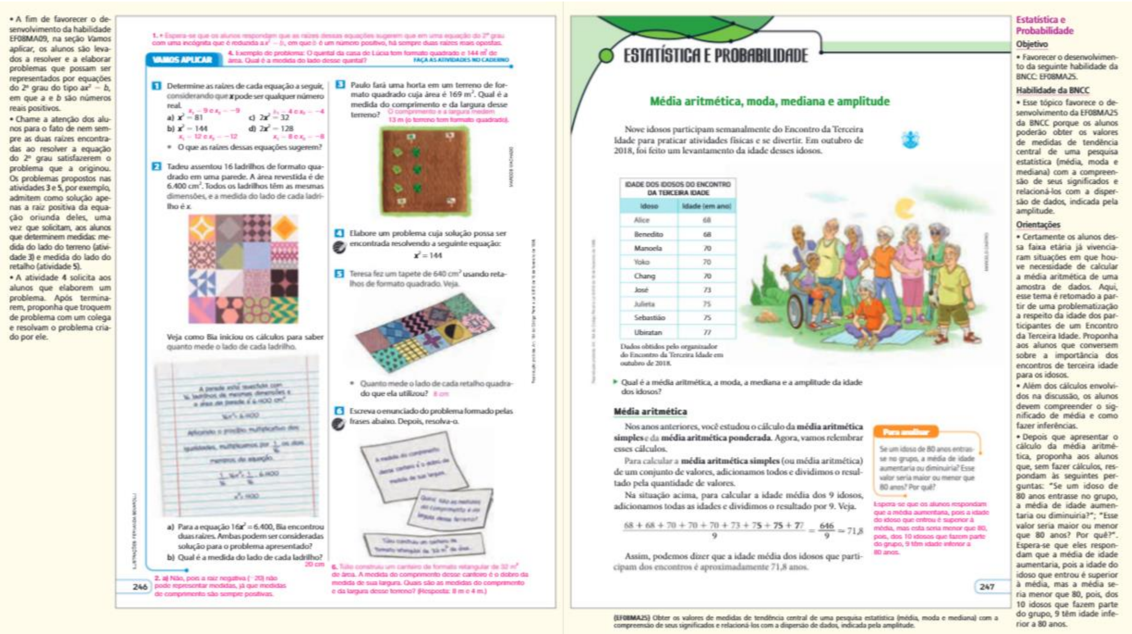


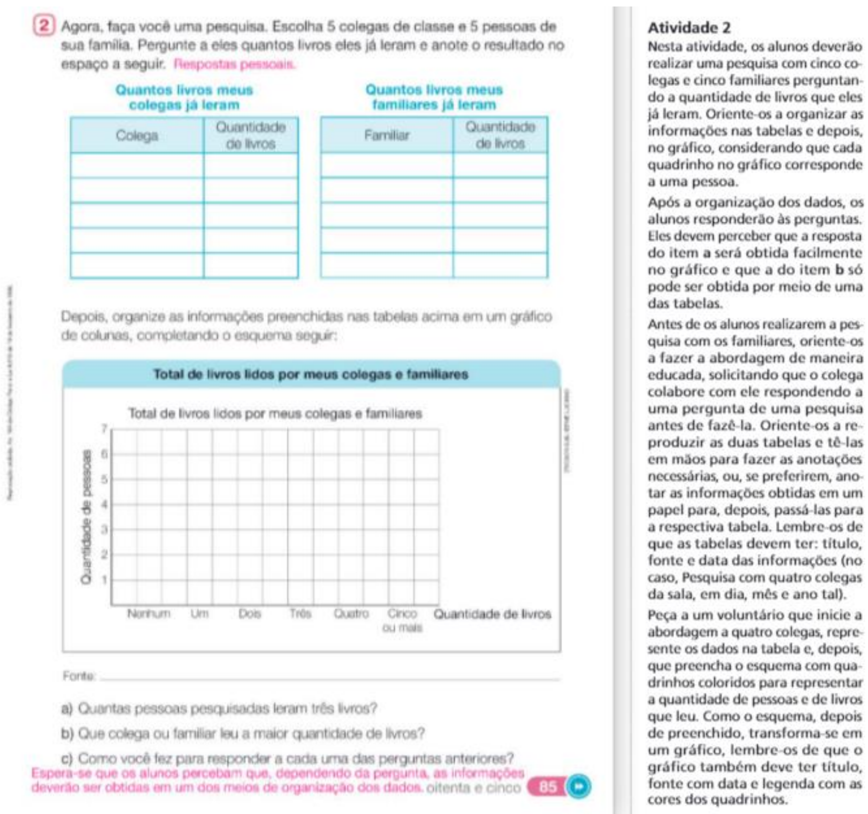
Figura 1. Libro del profesor – Formato en U
Fuente: Colección Araribá Mais 8º ano (2018, pp. 246 – 247)

El formato en U puede contener orientaciones didácticas y metodológicas para cada actividad, indicaciones de lecturas, sugerencias de recursos tecnológicos para la práctica docente, además de las respuestas a situaciones propuestas para los estudiantes. La inclusión del formato en U representa un gran avance para el PNLD 2020 respecto a ediciones anteriores. En las que dichas orientaciones se concentraban en el inicio o en el final del libro, bajo el nombre ‘Manual do Profesor’, que consistía simplemente en resoluciones de las actividades y pocas veces, y de manera bien general, poseían sugerencias para el desarrollo de las actividades en el aula (Carvalho y Gitirana, 2010). Esperamos que tal formato pueda colaborar para la formación continuada de los profesores, en particular, en lo que dice respeto a los conceptos inherentes al muestreo, ya que la información para el docente está al lado de las actividades, facilitando o incluso provocando su lectura, lo que ciertamente puede contribuir a una propuesta más adecuada.

Para verificar lo explorado sobre muestreo en los libros de texto, fue realizado un análisis de todas las obras de los años iniciales de enseñanza fundamental aprobadas por el PNLD 2019 (16 colecciones, o sea, 80 libros de texto), y Luna y Guimarães (2021) analizaron todas de los años finales de la enseñanza fundamental PNLD 2020 (11 colecciones, totalizando 44 libros de textos).

Percibimos que los libros de texto de los años iniciales de la enseñanza fundamental (6-11 años), aprobados por el PNLD 2019, no presentan propuestas de actividades u orientaciones al profesor en el formato en U sobre muestreo, lo que implica que tales colecciones atienden a las habilidades señaladas en la BNCC, sin ir más allá de eso, lo que podría ocurrir, pues los estudios previos (Gomes y Guimarães, 2018; Gomes, 2019) evidencian que los niños de esa franja de edad y de año escolar, son capaces de comprender habilidades relacionadas al muestreo (conceptuar e identificar una muestra; reconocer las ventajas y finalidades del uso del muestreo, percibir la relación entre muestra y población y seleccionar y/o identificar una muestra representativa).

Por otro lado, encontramos actividades que conducen a los estudiantes a realizar investigaciones estadísticas, pero sin ninguna referencia a la muestra, lo que naturalmente compromete los resultados y la comprensión de la importancia de la muestra en cualquier investigación. Tal hecho también corrobora lo que propone Gomes y Guimarães (2017) que, tras el análisis de libros de texto del 5° año (10 - 11 años) aprobados por el PNLD 2016 (edición anterior a la publicación de la BNCC), llegaron a la conclusión que conceptos relacionados al muestreo no fueron trabajados de manera explícita (Figura 2).


2 Agora, faça você uma pesquisa. Escolha 5 colegas de classe e 5 pessoas de sua família. Pergunte a eles quantos livros eles já leram e anote o resultado no espaço a seguir. Respostas pessoais.

Quantos livros meus colegas já leram

Colega	Quantidade de livros

Quantos livros meus familiares já leram

Familiar	Quantidade de livros

Depois, organize as informações preenchidas nas tabelas acima em um gráfico de colunas, completando o esquema seguir:

Fonte: ____

a) Quantas pessoas pesquisadas leram três livros?

b) Que colega ou familiar leu a maior quantidade de livros?

c) Como você fez para responder a cada uma das perguntas anteriores? Espera-se que os alunos percebam que, dependendo da pergunta, as informações deverão ser obtidas em um dos meios de organização dos dados.

oitenta e cinco 85

Atividade 2

Nesta atividade, os alunos deverão realizar uma pesquisa com cinco colegas e cinco familiares perguntando a quantidade de livros que eles já leram. Oriente-os a organizar as informações nas tabelas e depois, no gráfico, considerando que cada quadrinho no gráfico corresponde a uma pessoa.

Após a organização dos dados, os alunos responderão às perguntas. Eles devem perceber que a resposta do item **a** será obtida facilmente no gráfico e que a do item **b** só pode ser obtida por meio de uma das tabelas.

Antes de os alunos realizarem a pesquisa com os familiares, oriente-os a fazer a abordagem de maneira educada, solicitando que o colega colabore com ele respondendo a uma pergunta de uma pesquisa antes de fazê-la. Oriente-os a reproduzir as duas tabelas e tê-las em mãos para fazer as anotações necessárias, ou, se preferirem, anotar as informações obtidas em um papel para, depois, passá-las para a respectiva tabela. Lembre-os de que as tabelas devem ter: título, fonte e data das informações (no caso, Pesquisa com quatro colegas da sala, em dia, mês e ano tal).

Peça a um voluntário que inicie a abordagem a quatro colegas, represente os dados na tabela e, depois, que preencha o esquema com quadrinhos coloridos para representar a quantidade de pessoas e de livros que leu. Como o esquema, depois de preenchido, transforma-se em um gráfico, lembre-os de que o gráfico também deve ter título, fonte com data e legenda com as cores dos quadrinhos.

Figura 2. Actividad de realizar estadística
Fuente: Colección Buriti, 4º ano (2017, p.85)

A la vista de la Figura 2, podemos notar que a cada estudiante se le solicitó realizar una encuesta con 5 compañeros y 5 familiares sobre la cantidad de libros que ya han leído, lo que se complementa en la parte de las instrucciones al profesor. Sin embargo, ninguna mención es realizada sobre la muestra definida por el libro. Creemos que las propuestas de actividades sobre la realización de investigaciones deben explorar algunas nociones elementares de muestreo. En la actividad presentada, conceptos de muestra, censo, población y otros más, podrían haber sido desenvueltos. Por ejemplo, enseñar a los estudiantes que la investigación realizada por cada uno de ellos fue tan solo con una parcela de la población, o sea, una muestra. También, sería coherente proponer una comparación entre los resultados obtenidos por cada estudiante, abordando de esta manera la variabilidad. También se podría proponer una discusión de que la clase puede ser una población por investigar, siendo por tanto un censo, o considerando que la clase puede ser una muestra de alumnos de la escuela, por ejemplo.

Para los años finales de la enseñanza fundamental, 11 colecciones de Matemática de 6° al 9° año (44 libros de texto) componen las obras aprobadas por el PNLD edición 2020. Luna y Guimarães (2021) analizaron las actividades de muestreo presentes en todas estas colecciones. Los autores identificaron cinco habilidades de aprendizaje exigidas para la ejecución de tales actividades: (1) comprender sobre población, censo, muestra y entender sus relaciones; (2) pensar sobre la selección y representatividad de una muestra; (3) identificar y hacer uso adecuado de las técnicas de muestreo; (4) realizar encuesta estadística y (5) analizar márgenes de error. En las Figuras 3 y 4 presentamos ejemplos extraídos de los libros de texto.

5. Identifique o tipo de amostragem utilizado em cada caso.

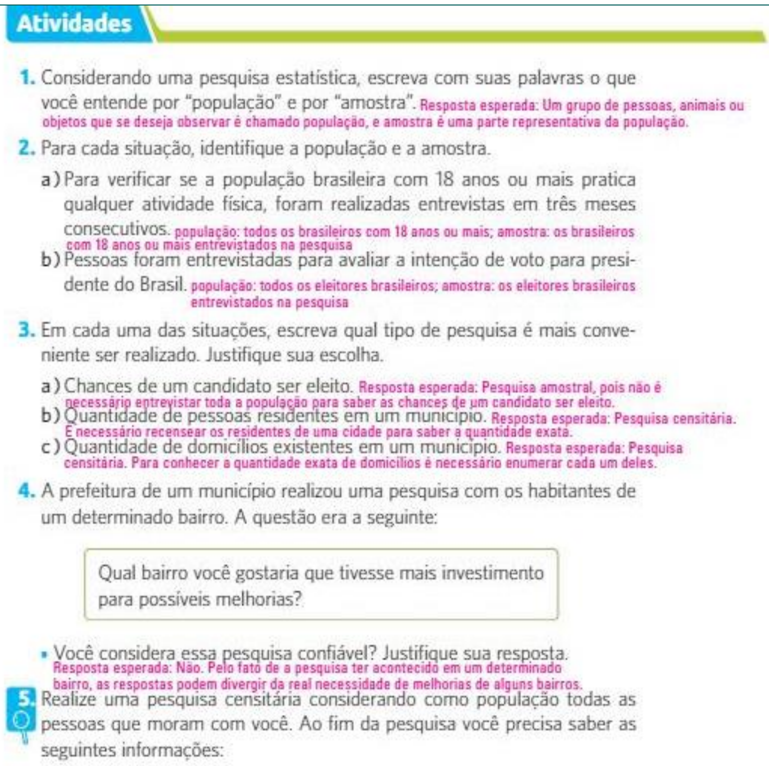
a) Os caixas de uma loja foram programados para que, a cada 20 clientes atendidos sequencialmente, o último deles seja convidado a avaliar o grau de satisfação quanto ao atendimento recebido na loja atribuindo uma nota de 0 a 10. amostragem sistemática

b) Em uma pesquisa sobre a preferência dos eleitores pelos candidatos a prefeito de uma cidade foram entrevistados 3000 moradores, selecionados ao acaso dentre moradores de diferentes bairros, faixas de renda mensal, escolaridade e sexo. amostragem estratificada

c) Em uma festa junina, 30 participantes foram sorteados ao acaso para dizer do que mais gostaram e do que menos gostaram nas atrações oferecidas na festa. aleatória simples

Figura 3. Actividades para identificar y hacer uso adecuado de las técnicas de muestreo
Fuente: Colección Trillas de la Matemática, v. 8 (2018, p.239)

Observemos que, en la Figura 3, la actividad presentada contiene tres ítems (a, b, c), los cuales están destinados a que los estudiantes identifiquen la técnica de muestreo utilizada en cada situación. Por lo tanto, se clasifica en la habilidad de identificar y hacer uso adecuado de las técnicas de muestreo. Luna y Guimarães (2021) comentan que las actividades de esta naturaleza aparecen predominantemente, pero pocas son las ocasiones en las que se requiere indicar la técnica a utilizar en un contexto dado, es decir, hacer uso de las técnicas de muestreo en situaciones contextuales.



Atividades

1. Considerando uma pesquisa estatística, escreva com suas palavras o que você entende por "população" e por "amostra". Resposta esperada: Um grupo de pessoas, animais ou objetos que se deseja observar é chamado população, e amostra é uma parte representativa da população.

2. Para cada situação, identifique a população e a amostra.

a) Para verificar se a população brasileira com 18 anos ou mais pratica qualquer atividade física, foram realizadas entrevistas em três meses consecutivos. população: todos os brasileiros com 18 anos ou mais; amostra: os brasileiros com 18 anos ou mais entrevistados na pesquisa

b) Pessoas foram entrevistadas para avaliar a intenção de voto para presidente do Brasil. população: todos os eleitores brasileiros; amostra: os eleitores brasileiros entrevistados na pesquisa

3. Em cada uma das situações, escreva qual tipo de pesquisa é mais conveniente ser realizado. Justifique sua escolha.

a) Chances de um candidato ser eleito. Resposta esperada: Pesquisa amostral, pois não é necessário entrevistar toda a população para saber as chances de um candidato ser eleito.

b) Quantidade de pessoas residentes em um município. Resposta esperada: Pesquisa censitária. É necessário recensear os residentes de uma cidade para saber a quantidade exata.

c) Quantidade de domicílios existentes em um município. Resposta esperada: Pesquisa censitária. Para conhecer a quantidade exata de domicílios é necessário enumerar cada um deles.

4. A prefeitura de um município realizou uma pesquisa com os habitantes de um determinado bairro. A questão era a seguinte:

> Qual bairro você gostaria que tivesse mais investimento para possíveis melhorias?

- Você considera essa pesquisa confiável? Justifique sua resposta. Resposta esperada: Não. Pelo fato de a pesquisa ter acontecido em um determinado bairro, as respostas podem divergir da real necessidade de melhorias de alguns bairros.

5. Realize uma pesquisa censitária considerando como população todas as pessoas que moram com você. Ao fim da pesquisa você precisa saber as seguintes informações:

Figura 4. Actividades de diferentes habilidades de muestreo
Fuente: Colección Convergencias v.7 (2018, p.221)

Con relación a la Figura 4, las actividades 1, 2 y 3 se refieren a la habilidad de comprender los conceptos de población, censo y muestra, así como sus relaciones, En la actividad 4, los estudiantes deben juzgar la validez de una encuesta y, por lo tanto, la capacidad de pensar sobre su selección y representatividad. Mientras tanto, en la actividad 5, es solicitada una encuesta, o sea, se refiere a la habilidad de realizar encuesta estadística.

Luna y Guimarães (2021) llaman la atención sobre el hecho de que 52,7% del total de actividades presentes en todas las colecciones aprobadas por el PNLD edición 2020, hacen referencia a la habilidad de comprender sobre población, censo, muestra y percibir sus relaciones. De este modo, señalan la necesidad de una mayor distribución de la cantidad actividades en las diferentes habilidades relacionadas a la adquisición de conocimientos en muestreo. Los autores destacan que, a pesar de que en la BNCC los conceptos de muestreo solo se presentan explícitamente a partir del 7° año (12 – 13 años), hay actividades presentes en algunas colecciones de libros didácticos del 6° año (11 – 12 años) que exploran situaciones sobre población, censo y muestra, así como percibir sus relaciones y pensar en la selección y representatividad de una muestra, lo que va de acuerdo con lo que consideramos pertinente.

A la vista de todo el análisis de los libros texto, Luna y Guimarães (2021) concluyen que, si bien las actividades están acordes con la BNCC, las habilidades relacionadas a la selección, representatividad, métodos de muestreo y márgenes de error fueron poco exploradas. Incluso, los autores destacan que la variabilidad de la muestra y su relación con el tamaño y representatividad necesitan ser agregadas a las propuestas de actividad, de manera urgente.

4. Muestreo en la orientación curricular española

La Educación Básica española es organizada en tres etapas: educación infantil (0 – 6 años), educación primaria (6 – 11 años) y educación secundaria (11 – 16 años). Para el recorte de este artículo, nos enfocaremos en las dos últimas etapas. Es importante señalar que el Ministerio de Educación actúa como una coordinación general que visa garantizar la homogeneidad en el estado español, sin embargo, cada una de las 17 comunidades autónomas es responsable de la organización de la educación bajo su jurisdicción.

En particular, nos dedicaremos a analizar el currículo de la comunidad autónoma de Andalucía, pues, además de que su documento curricular está actualizado, cuenta con varios investigadores del área de la Educación Estadística, desenvolviendo diversas pesquisas sobre conceptos relacionados con el muestreo.

El documento curricular en vigor fue publicado por el Boletín Oficial de la Junta de Andalucía (Andalucía, 2021). En ello, son establecidos objetivos, sugerencias metodológicas, contenidos, criterios de evaluación, estándares de aprendizaje evaluables, entre otras directrices.

Los objetivos se relacionan con los logros que los estudiantes deben alcanzar al final del proceso de escolarización. Mientras que las sugerencias metodológicas forman parte de un conjunto de estrategias, procedimientos, acciones organizadas y planificaciones con tal de contribuir para el efectivo aprendizaje de los estudiantes. Respecto a los contenidos, estos hacen referencia a los conocimientos dispuestos en las asignaturas. Los criterios de evaluación describen lo que se debe evaluar y, de la misma forma, lo que los estudiantes necesitan alcanzar, tanto en términos de conocimiento como de habilidades. En cuanto a los estándares de aprendizaje evaluables, estos tratan de especificaciones sobre los criterios de evaluación, los cuales permiten definir los resultados de aprendizaje y deben ser observables, mensurables y evaluables.

Como resaltamos anteriormente, analizaremos el currículo de la comunidad autónoma de Andalucía, en particular, la etapa de la Educación Primaria, más los tres años de la Educación Secundaria Obligatoria (ESO). Esto porque, bajo el contexto brasileño, la enseñanza fundamental finaliza con estudiantes en la franja de los 14 – 15 años. Entonces, para que podamos establecer padrones de equivalencia etaria, decidimos analizar hasta el tercer año de la ESO (14 – 15 años).

En la Educación Primaria son propuestos ocho objetivos para el área de conocimiento de Matemática. Presentamos en el Cuadro 4 los que poseen relación (implícita o explícita) con el aprendizaje sobre el muestreo.

Podemos constatar que los tres objetivos descriptos en el Cuadro 4 se relacionan con el aprendizaje de muestreo. En el objetivo número 2, se indica el uso de conocimientos matemáticos para comprender y analizar la información y mensajes sobre hechos de lo cotidiano, lo que permite fomentar la capacidad de los estudiantes de emitir juicios acerca de la validez de encuestas muestrales, por ejemplo, confrontando creencias y actitudes, así como movilizando una postura crítica frente a lo que les sea presentado (Gal, 2002). Concretamente, en los objetivos 6 y 8, son abordadas técnicas iniciales para la colecta de datos y el uso de recursos tecnológicos con el fin de analizar y seleccionar informaciones pertinentes. Creemos que todos los objetivos mencionados contribuyen para la vivencia de las diferentes etapas del ciclo investigativo (Guimarães y Gitirana, 2013). Se observa también que para estos años escolares no se menciona la muestra, a pesar del claro incentivo para la realización de encuestas.

Nº del objetivo	Descripción del objetivo
2	Emplear el conocimiento matemático para comprender, valorar y reproducir informaciones y mensajes sobre hechos y situaciones de la vida cotidiana, en un ambiente creativo, de investigación y proyectos cooperativos y reconocer su carácter instrumental para otros campos de conocimiento.
6	Interpretar, individualmente o en equipo, los fenómenos ambientales y sociales del entorno más cercano, utilizando técnicas elementales de recogida de datos, representándolos de forma gráfica y numérica, formando un juicio sobre la misma.
8	Utilizar los medios tecnológicos en todo el proceso de aprendizaje, tanto en el cálculo como en la búsqueda, tratamiento y representación de informaciones diversas; buscando, analizando y seleccionando información y elaborando documentos propios con exposiciones argumentativas de los mismos.

Cuadro 4. Objetivos de Matemática de la educación primaria relacionados al aprendizaje de muestreo
Fuente: Adoptado de Andalucía (2021)

En el documento curricular (Andalucía, 2021), la Matemática es distribuida en cinco bloques, siendo uno de ellos perteneciente a la Estadística y Probabilidad. Donde son indicadas estrategias metodológicas:

> El bloque adquiere su pleno significado cuando se presenta en conexión con actividades que implican a otras materias. Igualmente, el trabajo ha de incidir de forma significativa en la comprensión de la información de los medios de comunicación, para suscitar el interés por los temas y ayudar a valorar el beneficio que los conocimientos estadísticos proporcionan ante la toma de decisiones, normalmente sobre cuestiones que estudian otras materias. […] Es fundamental la incorporación a la dinámica habitual de trabajo en el aula de las alternativas metodológicas existentes para el uso educativo de internet, tales como las *Webquests*, cazas del tesoro, herramientas de autor, entre otras. (Andalucía, 2021, p. 90)

La comprensión de mundo y la tomada de decisiones son puntos valorados en las sugerencias metodológicas para la práctica docente. También se señala el uso de metodologías para el uso adecuado del internet, tal como la *WebQuest.* Consideramos que tales recomendaciones poseen extrema importancia.

La Educación Primaria en España (6 – 11 años) es dividida en tres ciclos, y su documento curricular orientador presenta contenidos, criterios de evaluación y estándares de aprendizaje evaluables relacionados con el muestreo (Cuadro 5).

Ciclo	Contenidos	Criterios de Evaluación	Estándares de aprendizaje evaluables
Primer (6 y 7 años de edad)	5.4. Utilización de técnicas elementales para la recogida y ordenación de datos en contextos familiares y cercanos. MAT.01.12.	MAT.01.12. Leer, entender, recoger y registrar una información cuantificable de los contextos familiar y escolar, utilizando algunos recursos sencillos de representación gráfica: tablas de datos y diagramas de barras, comunicando oralmente la información mostrando esfuerzo y constancia en la búsqueda de soluciones.	MAT.01.12.02. Realiza e interpreta gráficos muy sencillos: diagramas de barras, poligonales y sectoriales, con datos obtenidos de situaciones muy cercanas.
Segundo	5.2. Recogida y	MAT.02.13. Leer e interpretar,	MAT.02.13.02. Recoge y

(8 y 9 años de edad)	clasificación de datos cuantitativos utilizando técnicas elementales de encuesta, observación y medición. MAT.02.13.	recoger y registrar una información cuantificable del entorno cercano utilizando algunos recursos sencillos de representación gráfica: tablas de datos, diagramas de barras, diagramas lineales, comunicando la información oralmente.	clasifica datos cualitativos y cuantitativos, de situaciones de su entorno, utilizándolos para construir tablas de frecuencias absolutas y relativas.
Tercer (10 y 11 años de edad)	5.2. Recogida y clasificación de datos cualitativos y cuantitativos utilizando técnicas elementales de encuesta, observación y medición. MAT.03.14.	MAT.03.13. Leer e interpretar, recoger y registrar una información cuantificable en situaciones familiares del contexto social, utilizando y elaborando algunos recursos sencillos de representación gráfica: tablas de datos, diagramas de barras, diagramas lineales, diagramas poligonales y sectoriales, comunicando la información oralmente y por escrito.	MAT.03.13.02. Recoge y clasifica datos cualitativos y cuantitativos, de situaciones de su entorno, utilizándolos para construir tablas de frecuencias absolutas y relativas.

Cuadro 5. Muestreo en la educación primaria del currículo andaluz
Fuente: Adoptado de Andalucía (2021)

Partiendo del Cuadro 5, podemos percibir que el enfoque presentado en los ciclos de la educación primaria consiste en explorar la realización de encuestas estadísticas, sus diferentes representaciones gráficas y las frecuencias absolutas y relativas. Observamos que en el segundo y tercer ciclo los contenidos los criterios de evaluación y estándares de aprendizaje evaluables son muy similares. La única diferenciación notoria está relacionada con el contexto (entorno cercano/situaciones familiares del contexto social) y recursos de representación gráfica (utilización/elaboración de algunos recursos sencillos). De esta manera, reiteramos que una vez que son propuestas la elaboración y realización de investigaciones por los estudiantes, es imprescindible inducir a reflexionar sobre habilidades relacionadas con la necesidad y justificativa de que una encuesta sea censal o de muestreo, así como también objetivar la exploración de las definiciones de población, censo y muestra.

En el escenario de la ESO, se identifican 11 objetivos para el área de conocimiento de la Matemática. Entre los cuales, 4 presentan relación con el proceso de aprendizaje del muestreo.

Nº del objetivo	Descripción del objetivo
1	Mejorar la capacidad de pensamiento reflexivo y crítico, así como la de incorporar al lenguaje y modos de argumentación, la racionalidad y las formas de expresión y razonamiento matemático, tanto en los procesos matemáticos, científicos y tecnológicos como en los distintos ámbitos de la actividad humana.
3	Cuantificar aquellos aspectos de la realidad que permitan interpretarla mejor; utilizar técnicas de recogida de la información y procedimientos de medida, realizar el análisis de los datos mediante el uso de distintas clases de números y la selección de los cálculos apropiados a cada situación.
4	Identificar los elementos matemáticos (datos estadísticos, geométricos, gráficos, cálculos, etc.) presentes en los medios de comunicación, Internet, publicidad u otras fuentes de información, analizar críticamente las funciones que desempeñan estos elementos matemáticos y valorar su aportación para una mejor comprensión de los mensajes.

6	Utilizar de forma adecuada las distintas herramientas tecnológicas (calculadora, ordenador, dispositivo móvil, pizarra digital interactiva, etc.), tanto para realizar cálculos como para buscar, tratar y representar información de índole diversa y también como ayuda en el aprendizaje.

Cuadro 6. Objetivos de Matemática de la ESO relacionados al aprendizaje de muestreo
Fuente: Adoptado de Andalucía (2021)

Al igual que en la educación primaria, los objetivos de la Matemática para la ESO están relacionados a las acciones propuestas para la formación de un ciudadano crítico que se apropia de elementos de la Alfabetización Estadística (Gal, 2002) y del Ciclo Investigativo (Guimarães y Gitirana, 2013). Y este aspecto se muestra claro cuando se menciona el análisis crítico de las funciones que realizan los datos estadísticos para una mejor comprensión de los mensajes.

En cuanto a las estrategias metodológicas para el bloque de la Estadística y Probabilidad:

> […] se abordará el proceso de un estudio estadístico completando todos los pasos previos al análisis de resultados, siendo recomendable comenzar con propuestas sencillas cercanas a la realidad del alumnado para, posteriormente, profundizar en ejemplos relacionados con las distintas materias del currículo. El desarrollo debe ser gradual: comenzará en el primer curso con las técnicas para la recogida, organización y representación de los datos a través de las distintas opciones como tablas o diagramas, para continuar, en segundo con los procesos para la obtención de medidas de centralización y de dispersión que les permitan realizar un primer análisis de los datos utilizando el ordenador y la calculadora. (Andalucía, pp. 781 – 782)

Es recomendable que se realice un trabajo que ofrezca contextos de familiaridad para los estudiantes y, en un primer momento, utilizar técnicas de colecta, de organización y de representación de los datos. Y como secuencia, explorar algunas medidas de tendencia central y de dispersión. Al igual que en la educación primaria, las estrategias metodológicas presentadas para la ESO, necesitan ser mejor especificadas, para que así pueda ser posible actuar como efectiva herramienta para la práctica docente. Lo que pudimos percibir es que hay una descripción sucinta bien específica del currículo, pero no de las orientaciones para el trabajo del profesor en el aula.

Exhibimos en el Cuadro 7 contenidos, criterios de evaluación y estándares de aprendizaje evaluables, todos relacionados al muestreo.

Año	Contenidos	Criterios de evaluación	Estándares de aprendizaje evaluables
1º (12 y 13 años de edad)	Población e individuo.	1.Formular preguntas adecuadas para conocer las características de interés de una población y recoger, organizar y presentar datos relevantes para responderlas, utilizando los métodos estadísticos apropiados y las herramientas adecuadas, organizando los datos en tablas y construyendo gráficas para obtener conclusiones razonables a	1.1. Define población, muestra e individuo desde el punto de vista de la estadística, y los aplica a casos concretos. 1.3. Organiza datos, obtenidos de una población, de variables cualitativas o cuantitativas en tablas, calcula sus frecuencias absolutas y relativas, y los representa gráficamente. 2.1. Emplea la calculadora y herramientas tecnológicas para organizar datos, generar gráficos estadísticos y calcular las medidas de tendencia central y el rango de variables estadísticas cuantitativas. 2.2. Utiliza las tecnologías de la

		partir de los resultados obtenidos.	información y de la comunicación para comunicar información resumida y relevante sobre una variable estadística analizada.
2º (13 y 14 años de edad)	Variables estadísticas. Variables cualitativas y cuantitativas. Medidas de tendencia central. Medidas de dispersión.	1. Formular preguntas adecuadas para conocer las características de interés de una población y recoger, organizar y presentar datos relevantes para responderlas, utilizando los métodos estadísticos apropiados y las herramientas adecuadas, organizando los datos en tablas y construyendo gráficas, calculando los parámetros relevantes para obtener conclusiones razonables a partir de los resultados obtenidos.	1.1. Define población, muestra e individuo desde el punto de vista de la estadística, y los aplica a casos concretos. 1.3. Organiza datos, obtenidos de una población, de variables cualitativas o cuantitativas en tablas, calcula sus frecuencias absolutas y relativas, y los representa gráficamente.
3º (14 y 15 años de edad)	Fases y tareas de un estudio estadístico. Población, muestra. Métodos de selección de una muestra estadística. Representatividad de una muestra.	1. Elaborar informaciones estadísticas para describir un conjunto de datos mediante tablas y gráficas adecuadas a la situación analizada, justificando si las conclusiones son representativas para la población estudiada. 2. Calcular e interpretar los parámetros de posición y de dispersión de una variable estadística para resumir los datos y comparar distribuciones estadísticas. 3. Analizar e interpretar la información estadística que aparece en los medios de comunicación, valorando su representatividad y fiabilidad.	1.1. Distingue población y muestra justificando las diferencias en problemas contextualizados. *1.2.* Valora la representatividad de una muestra a través del procedimiento de selección, en casos sencillos. 3.1. Utiliza un vocabulario adecuado para describir, analizar e interpretar información estadística de los medios de comunicación.

Cuadro 7. Muestreo en la ESO del currículo andaluz
Fuente: Adoptado de Andalucía (2021)

De acuerdo con el Cuadro 7, podemos notar que, desde el 1° año de la ESO (12 – 13 años) los contenidos son orientados por el trabajo con el muestreo. Se inicia con nociones de población, muestra, individuo y realización de encuesta con muestra, haciendo uso de recursos tecnológicos para auxiliar las representaciones gráficas y elaboraciones de cálculos. En el 3° año (14 – 15 años) hay un mayor abordaje del concepto, retomando las definiciones de población y muestra, además de distinguirlas por medio de justificativas en problemas contextualizados. También son indicadas para la realización de la encuesta estadística métodos de selección de una muestra, representatividad y vieses. Otro destaque es el uso de un vocabulario específico para analizar e interpretar los resultados obtenidos.

Otro aspecto notado fue la ausencia de conceptos de variabilidad y margen de error. Ruiz-Reyes, Begué, Batanero y Contreras (2017), en un análisis comparativo de currículos, apuntan que en la orientación española de 2015 no hay discusiones sobre la variabilidad en función del tamaño de la muestra, consideración que también encontramos en nuestro análisis acerca de Andalucía (2021). Además, destacamos que podría estar más explícito cuales métodos de selección de muestra deben ser abordados, una vez que, queda subentendido que contempla los métodos probabilísticos y no estadísticos. Y aquí no percibimos un direccionamiento en relación con este tópico.

Consideramos bastante pertinente el criterio de evaluación 3 del 3° año de la ESO, destacando que se debe analizar e interpretar la información estadística que aparece en los medios de comunicación, valorando su representatividad y fiabilidad. Esperamos que, ante esto, los estudiantes puedan percibir el papel de la Estadística para la comprensión del mundo, al tener cuestionamientos críticos, conocimientos estadísticos y matemáticos, bien como conocimiento de contexto y postura crítica (Gal, 2002).

5. Muestreo en los libros texto de España

Así como en Brasil, en España también hay una política de distribución gratuita de libros texto. En la página web de la Junta de Andalucía, encontramos informaciones relacionadas a esta temática:

> El alumnado matriculado en los centros docentes de Andalucía sostenidos con fondos públicos, esto es, públicos y concertados, en los cursos de Primaria, Educación Secundaria Obligatoria (ESO), Formación Profesional (FP) Básica y Educación Especial, puede disponer gratuitamente de los correspondientes libros de texto. Estos libros son propiedad de la Administración educativa y, una vez concluido el año académico, permanecen en el centro docente para que puedan ser utilizados por otros alumnos o alumnas. Todos los libros de texto se renuevan cada cuatro cursos escolares. (Junta de Andalucía, 2021)

Los representantes de los estudiantes deben notificar que desean participar en el programa de gratuidad y aquellos que prefieran no participar, necesitan hacer el comunicado en el centro docente en el acto de las matrículas escolares. Para cada curso escolar, son distribuidos libros de texto a los estudiantes de la Educación Básica, para que de esta manera sea garantizada la efectuación de la política pública vigente:

> Cada año, la Consejería de Educación y Deporte informa de los cursos escolares a los que les corresponde renovar los libros de texto. En el curso 2020/2021, se renovarán de forma completa los libros de Primero y Tercero de Educación Secundaria Obligatoria (ESO), así como los libros correspondientes a Primero y Segundo de Educación Primaria (estos volúmenes se renuevan todos los cursos) y la dotación específica para el alumnado con necesidades específicas de apoyo educativo. La medida beneficiará a unos 940.000 estudiantes de enseñanzas obligatorias escolarizados en centros docentes sostenidos con fondos públicos. (Andalucía, 2021)

En una búsqueda bibliográfica, no encontramos ninguna investigación documental sobre el análisis de los libros texto españoles pertenecientes a la Educación Primaria y Secundaria relacionados a actividades de muestreo. Este tipo de publicación es de bastante relevancia, ya que resalta la importancia de las propuestas curriculares sobre los libros. Como también no tuvimos acceso a los libros de textos españoles sea en versión digital o impresa.

No obstante, una serie de artículos exploraron otros conceptos del bloque de Estadística y Probabilidad en estas etapas de la escolarización (Ortiz, Batanero y Serrano, 2001; Gómez-Torres, Haro, Bataneo y Contreras, 2013; Gómez-Torres, Batanero y Contreras, 2014; Ortiz, Albanese y Serrano, 2016). Estos investigadores realizaron análisis en libros de texto españoles discutiendo cuestiones relacionadas al lenguaje, procedimientos y posibles significados de la Estadística y de la Probabilidad.

En cuanto a la relación entre currículo y libro de texto, Gómez-Torres Batanero y Contreras (2014), al analizar en dos colecciones de Matemática direccionados a la Educación Primaria buscando destacar la forma de abordaje de los significados de la Probabilidad (intuitivo, clásico, repetitivo y subjetivo), se percataron de que los libros de texto proponen actividades que contemplan la orientación curricular (MECD, 2014), sin embargo, presenta otras habilidades, que no se proponen en estos documentos, como la exploración de otros procedimientos probabilísticos.

Por otro lado, en ámbito de la ESO, los resultados presentados por Ortiz, Albanese y Serrano (2016), demuestran que los 3 libros de texto analizados presentan divergencias en lo que es sugerido en el currículo escolar. Esto porque no siguen las recomendaciones sobre el uso del diagrama del árbol y de la relación de la Estadística y Probabilidad, cuando se trabaja con un enfoque clásico de los conceptos probabilísticos.

Así, por medio de este trabajo, objetivamos reforzar la importancia de estudios futuros sobre el análisis de las actividades de muestreo en libros de texto españoles y para que se pueda también existir una contribución internacional entre todos los involucrados que buscan pensar formas de una educación emancipadora y de cualidad. Destacamos que las guías curriculares y propuestas de actividades contenidas en los libros de texto tienen un papel fundamental en el subsidio de la formación continua de los profesores de Matemática, especialmente en el ámbito del concepto de muestreo, en el que estudios previos con docentes brasileños y españoles revelan dificultades de estos profesionales, por ejemplo, para identificar sesgos en la selección de una muestra (López-Martin, Batanero y Gea, 2019; Martins, Monteiro y Queiroz, 2013).

6. Conclusión

A partir del análisis del lineamiento curricular de Brasil y de España, pudimos establecer acercamientos y diferencias en cuanto al aprendizaje de muestreo.

En el grupo de edad de 6 a 11 años (lo equivalente a los años iniciales de la enseñanza fundamental en el sistema educacional brasileño), percibimos que tanto Brasil como España presentan recomendaciones similares a respecto del aprendizaje de muestreo. El núcleo de los conceptos que se desarrollarán en esta fase de la escolarización, son productos de encuestas estadísticas que, sin embargo, no presentan ninguna mención explícita de muestreo. Así, sugerimos que en esta etapa sería pertinente propuestas de exploración de nociones básicas de concepto, tales como las que los niños demostraron comprender en Gomes y Guimarães (2018) y Gomes (2019) – (conceptuar e identificar una muestra; reconocer las ventajas y finalidades del uso del muestreo, percibir la relación entre muestra y población, además de poder seleccionar y/o identificar una muestra representativa). Bajo esa perspectiva, entendemos que diversas son las evidencias (Watson y Moritz, 2000; Watson y Kelly, 2005; Meletiou-Mavrotheri y Paparistodomou, 2015; Gomes y Guimarães, 2018) de las capacidades de los estudiantes en este nivel educacional sobre la posibilidad de entender conceptos basilares del muestreo.

En cuanto a los estudiantes de 11 a 15 años de edad, percibimos que es propuesto explícitamente el desarrollo de conceptos de muestreo en la misma franja etaria (12 – 13 años), o sea, 7° año (Brasil) e primero ano de la ESO (España). El currículo brasileño destaca las técnicas de muestreo a ser trabajadas (aleatoria simple, sistemática y estratificada), lo que no ocurre claramente en la orientación española. Pero, en contrapartida, en Andalucía (2021) los conceptos de representatividad, sesgo y el uso de un lenguaje más adecuado para la interpretación de los datos y comunicación de la información, están explícitamente presentes, a diferencia de Brasil (2017). Creemos que, dada la importancia y viabilidad de los estudiantes para comprender conceptos de variabilidad, margen de error y la comprensión de la asociación de la variabilidad en función del tamaño de la muestra, significa decir que las dos orientaciones curriculares necesitan proponer una exploración más efectiva.

Entre los principales resultados e implicaciones educativas, destacamos que los lineamientos curriculares contenidos en la BNCC estuvieron presentes en las propuestas de actividades de los libros didácticos brasileños. Sin embargo, Luna y Guimarães (2021) llamaron la atención para la mala distribución de las actividades a lo largo de los años escolares: demasiado predominio de datos ficticios, exceso de situaciones con la población/muestra referida a personas, ausencia de discusiones sobre la variabilidad y aún la inexistencia de una diversificación entre las habilidades exploradas en las actividades. Los autores apuntan estas cuestiones como resultado del gran énfasis que se aplica a la habilidad de comprender sobre población, censo, muestra y el entendimiento de sus relaciones.

Si bien es importante resaltar que ambas propuestas aquí analizadas, Brasil (2017) y Andalucía (2021), enfatizan la necesidad de realización de pesquisas por parte de los estudiantes desde los años iniciales y en contextos reales, convirtiendo, de esta manera, la estadística en una herramienta fundamental para la comprensión del mundo de forma científica.

Llamamos atención para la necesidad de investigaciones con libros de texto españoles con el propósito de relacionar currículo y material didáctico, como también, ser posible de percibir diferencias y similitudes con propuestas internacionales. Una vez que, los lineamientos curriculares determinan las propuestas de actividades presentadas en los libros de texto para la concreción de los procesos de enseñanza y de aprendizaje. Entendemos que estas precisan ser analizadas y repensadas, con detenimiento, frente a las demandas de la práctica de enseñanza y de perspectivas sobre el papel de la educación. Creemos todavía que corresponde a cada uno de los educadores una reflexión crítica de estos documentos y la superación de estas lagunas presentadas.

Por ello, esperamos que los resultados aquí evidenciados puedan contribuir para los diversos actores involucrados en este debate: profesores, editores y autores de libros de texto y todos los profesionales responsables por la elaboración de propuestas curriculares. Y entender que la incorporación de aspectos como los que aquí en este artículo fueron mencionados, posibilitará un mejor desenvolvimiento de la comprensión de muestreo, sea como consumidores o productores de datos.

Las ideas discutidas en este texto, así como las recomendaciones y desafíos identificados, son potenciales recursos para la formación de profesores. En todo caso, señalamos que la laguna en los libros de texto puede perjudicar el aprendizaje de los alumnos y por eso es necesario que el docente esté atento para proponer a sus alumnos todas las habilidades que les permitan comprender la muestra.

Referencias bibliográficas

Andalucía (2021). Consejería de Educación. *Orden de 15 de enero de 2021, por la que se desarrolla el currículo correspondiente a la etapa de Educación Secundaria Obligatoria en la Comunidad Autónoma de Andalucía*.

Batanero, C., Begué, N., Gea, M.M. y Roa. R. (2019). El muestreo: Una idea estocástica fundamental. *Suma*, 90, 41-47.

Begué, N., Gea, M, M., Batanero, C. y Beltrán, P. (2020). Comprensión de la representatividad y variabilidad muestral por estudiantes de Educación Secundaria. *Yupana*, 12, 8-22.

Ben-Zvi, D., Bakker, A. y Makar, K. (2015). Learning to reason from samples. *Educational Studies in Mathematics*, 88(3), 291-303.

Brasil (2017). *Base Nacional Curricular Comum*. Brasília: MEC. Disponible en: http://basenacionalcomum.mec.gov.br/abase/ Acceso en: 02 ene. 2021.

Brasil (2019). *Edital de convocação para o processo de inscrição e avaliação de obras didáticas e literárias para o Programa Nacional do Livro e do Material Didático*.

Brow, M.W. (2009). The Teacher–Tool Relationship: Theorizing the Design and Use of Curriculum Materials. In: J. Remillard, G. Lloyd & B. Herbel-Eisenmann (Eds.), *Mathematics Teacher at Work*: Connecting curriculum materials and classroom instruction. Series editor: Alan Schoenfeld, 17-36.

Campos, C. R., Wodewotzki, M. L. L. y Jacobini, O. R. (2013). *Educação Estatística*: *teoria e prática em ambientes de modelagem matemática*. 2ª ed. Belo Horizonte: Autêntica. (Coleção Tendências em Educação Matemática).

Carvalho, J. B. P. y Gitirana, V. (2010). Manual do professor: do livro com respostas ao manual de orientação didático-metodológica. In: Matemática: Ensino Fundamental. *Coleção Explorando o Ensino*, v. 17. (pp. 53-68). Brasília: Ministério da Educação, Secretaria de Educação Básica.

Carvalho, J. B. P. y Lima, P. F. (2010). Escolha e uso do livro didático. In: Matemática: Ensino Fundamental. *Coleção Explorando o Ensino*, v. 17. (pp. 15-30). Brasília: Ministério da Educação, Secretaria de Educação Básica.

Friolani, L. C. (2007). *O pensamento estocástico nos livros didáticos do ensino fundamental*. Disertación (maestría). Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, Brasil, 138 f.

Gal, I. (2002). Adults' statistical literacy: Meanings, components, responsibilities. *International Statistical Review*, *70*(1), 1-25.

Gal, I. (2019). Understanding statistical literacy: About knowledge of contexts and models. In: *Tercer Congreso Internacional Virtual de Educación Estadística*. Actas... Granada: Universidad de Granada, p. 1-15.

Gomes, T. M. (2019). *Análise de dados e construção do conceito de amostragem por estudantes do 5º e 9º ano*: uma proposta à luz da Teoria da Atividade. Centro de Educação - Universidade Federal de Pernambuco. Maestría en Educación Matemática y Tecnológica, 207 f.

Gomes, T. y Guimarães, G. (2017). Amostragem nos livros didáticos do 5º e 9º ano do Ensino Fundamental do Brasil. In: Congreso Iberoamericano de Educacion Matematica, pp. 325-326. *Actas...FISEM*, Madrid..

Gomes. T. y Guimarães, G. (2018). Compreensão dos estudantes do ensino fundamental sobre seleção de uma amostra representativa. *Com a palavra o professor*, 3(2), 132-149.

Gómez-Torres, E., Batanero, C. y Contreras, J. M. (2014). Procedimientos probabilísticos en libros de texto de matemáticas para educación primaria en España. *Épsilon*, 31(2), 25-42.

Gómez-torres, E., Haro, J. J. O., Batanero, C. y Contreras, J. M. (2013). El lenguaje de probabilidad en los libros de texto de Educación Primaria. *Revista Iberoamericana de Educación Matemática*, 35, 75 – 91.

Guimarães, G. L. y Gitirana, V. (2013). Estatística no Ensino Fundamental: a pesquisa como eixo estruturador. In: BORBA, R. E.; MONTEIRO, C. E. (Org.). *Processos de ensino e aprendizagem em Educação Matemática*. (pp. 93-132). Recife: UFPE.

Guimarães, G. y Oliveira, I. (2014). Construção e interpretação de gráficos e tabelas. In: C. R. Vianna e E. Rolkouki (Eds.). *Pacto nacional pela alfabetização na idade certa*: Educação estatística (pp. 21-38). Brasília: Ministério da Educação, Secretaria de Educação Básica.

Januário, G. (2017). *Marco conceitual para estudar a relação entre materiais curriculares e professores de Matemática*. Tese de Doutorado (Educação Matemática). Pontifícia Universidade Católica de São Paulo. 194f.

López-Martín, M. D. M., Batanero, C. y Gea, M. M. (2019). ¿Conocen los futuros profesores los errores de sus estudiantes en la inferencia estadística?. *Bolema*, 33(64), 672-693.

Luna, L. C. y Guimarães, G. L. (2021). O que livros didáticos de Matemática propõem para a aprendizagem de amostragem? *Bolema*, Rio Claro, 35(70), 815-839.

MECD (2014). *Real Decreto 126/2014, de 28 de febrero, por el que se establece el currículo básico de la educación primaria*. Madrid: Autor.

Meletiou-Mavrotheris, M. y Paparistodemou, E. (2015). Developing students' reasoning about samples and sampling in the context of informal inferences. *Educational Studies in Mathematics*, *88*(3), 385-404.

Ortiz, J. J., Albanese, V. y Serrano, L. (2016). El lenguaje de la estadística y probabilidad en libros de texto de Educación Secundaria Obligatoria. En J. A. Macías, A. Jiménez, J. L. González, M. T. Sánchez, P. Hernández, C. Fernández,

F. J. Ruiz, T. Fernández y A. Berciano (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XX,* 397-406. Málaga: SEIEM.

Ortiz, J. J., Batanero, C. y Serrano, L. (2001). El lenguaje probabilístico en los libros de texto. *Suma*, *38*, 5-14.

Ruiz-Reyes, K., Begué, N., Batanero, C. y Contreras, J. M. (2017). Un estudio comparado de los contenidos de muestreo en la Educación Secundaria Obligatoria en Chile. *Educação Matemática Pesquisa*, *19*(3), 67-83.

Triola, M. F. (2008) Introdução à estatística: atualização da tecnologia. (Tradução e revisão técnica: Ana Farias e Vera Flores). 10 ed. Rio de Janeiro: LTC.

Watson, J. M. y Moritz, J. B. (2000). Developing concepts of sampling. *Journal for Research in Mathematics Education*, *31*(1) 44-70.

Watson, J. y Kelly, B. (2005). Cognition and instruction: Reasoning about bias in sampling. *Mathematics Education Research Journal*, *17*(1), 24-57.

Autores:

Primer autor: **Luna, Luan Costa de.**
Estudiante de Doctorado en Educación Matemática y Tecnológica por la Universidad Federal de Pernambuco. Tiene maestría en Educación Matemática (2019) y licenciatura en Matemáticas (2016). Desarrolla investigaciones en el campo de la Educación Matemática, especialmente en Educación Estadística. En el ámbito profesional, actúa como coordinador pedagógico, formador de docentes, desarrollador y revisor de materiales didácticos.
Dirección Electrónica: luancluna@gmail.com
ORCID: https://orcid.org/0000-0002-2990-253X

Segundo autor: **Guimarães, Gilda Lisbôa.**
Tiene licenciatura en Pedagogía por la Pontificia Universidad Católica de São Paulo (1982) con Maestría y Doctorado en Psicología Cognitiva por la Universidad Federal de Pernambuco (2002). Postdoctorado en la Universidad de Burgos, España (2011) y en la Université Laval, Canadá (2013). Es profesora efectiva en el Departamento de Métodos y Técnicas de Enseñanza y en el Programa de Posgrado en Educación Matemática y Tecnológica de la UFPE. Investiga, orienta y desarrolla procesos de formación inicial y continua en Educación Estadística relacionados con el aprendizaje de alumnos y docentes de diferentes niveles educativos, análisis de libros de texto, entre otros.
Dirección Electrónica: gilda.lguimaraes@gmail.com
ORCID: https://orcid.org/0000-0002-1463-1626

REVISTA IBEROAMERICANA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA

ISSN: 1815-0640
Número 64. Abril 2022
Páginas 1-20

https://union.fespm.es

Indagaciones y reflexiones acerca del uso de recursos digitales por parte de futuros profesores de matemática

Tamara Sola, Magali Freyre, Marcela Götte

Fecha de recepción: 6/10/2021
Fecha de aceptación: 28/11/2021

Resumen

Es creciente el interés en el uso de tecnologías digitales para la educación matemática. Se pretende explorar el uso de videotutoriales y aplicaciones para el estudio de conceptos matemáticos por parte de estudiantes de profesorado en matemática a través de un cuestionario que se diseña e implementa en tres instituciones de la provincia de Santa Fe. Los estudiantes utilizan videotutoriales cuando necesitan resolver un ejercicio práctico, prefieren explicaciones claras y detalladas y videos con ejercicios resueltos paso a paso y explicaciones de conceptos y definiciones. En cuanto a las aplicaciones, las utilizan preferentemente en celulares para graficar, verificar y resolver problemas.
Palabras clave: videotutoriales, aplicaciones, conceptos matemáticos, estudiantes de profesorado.

Abstract

Interest in the use of digital technologies for mathematics education is growing. The intention is to explore the use of video tutorials and applications for the study of mathematical concepts by students of the mathematics teacher training program through a questionnaire that is designed and implemented in three institutions in the province of Santa Fe. Students use video tutorials when they need to solve a practical exercise, they prefer clear and detailed explanations and videos with exercises solved step by step and explanations of concepts and definitions. Regarding applications, they are preferably used in mobile phones to make graphs, verify and solve problems.
Keywords: video tutorials, applications, mathematical concepts, students of the mathematics teacher training program.

Resumo

É notavel o incremento do interes no uso das tecnologias digitais para educação matemática. Pretende-se explorar a utilização de vídeos tutoriais e aplicações para o estudo de conceitos matemáticos por alunos de faculdade de matemática através de um questionário projetado e implementado em três instituições da província de Santa Fé. Os alunos utilizam tutoriais em vídeo quando precisam resolver um exercício prático, preferem explicações claras e detalhadas e vídeos com exercícios resolvidos passo a passo e explicações de conceitos e definições. Quanto aos aplicativos, são preferencialmente utilizados no telefone celular para representar graficamente, verificar e resolver problemas.
Palavras-chave: vídeostutoriais, aplicações, conceitos matemáticos, estudantes de faculdade.

1. Introducción

El uso de Internet se ha convertido en un recurso popular a nivel mundial y tiene implicancias en el sistema escolar. Actualmente, muchos estudiantes, recurren al uso de videotutoriales y aplicaciones que hoy en día se encuentran muy presentes. Los dispositivos móviles han generado un gran interés en los jóvenes, principalmente, brindándoles la posibilidad de construir conocimientos en cualquier momento y lugar (Santos Mellado, 2018).

La educación va modificando sus objetivos relacionados con el nivel de formación y la capacidad de innovación. Por estas razones, actualmente se requiere un nuevo estilo de trabajo que incluya estos dispositivos y donde los estudiantes sean capaces de superar las restricciones del espacio, el tiempo o la ubicación geográfica, pero ante estos cuestionamientos aparece como dominante el conocimiento (Saucedo Fernández, Diaz Perera, Herrera Sánchez, Recio Urdaneta, 2013). Las implicancias de estas modificaciones son precisas: hay un mayor interés en las potencialidades de las tecnologías digitales para la enseñanza y el aprendizaje priorizando un estudio empírico de los usos que tanto profesores como estudiantes hacen de ellas para el transcurso de las actividades educativas. Además, se vinculan las posibles mejoras en cuanto al aprendizaje de los alumnos con la participación en este tipo de actividades, siendo las tecnologías digitales un aspecto importante, pero no solo el único implicado.

Teniendo en cuenta este entorno, esta investigación considera el hecho de que la demanda de videotutoriales y aplicaciones por parte de los estudiantes genera un aumento de la producción de estas herramientas que tienen a su disposición. Si bien existe una gran variedad disponible de estas tecnologías, su utilización no está regulada, razón por la cual se puede acceder a videos o a aplicaciones educativas en algunos casos adecuados y en otros no. Como afirma Cárdenas González (2015):

> El uso tecnológico como estrategia pedagógica en diferentes instituciones educativas ha sido una práctica de buena aceptación por parte de docentes y estudiantes, que ven una alternativa para mejorar el aprendizaje de sus asignaturas humanas y exactas, pero en algunas ocasiones se utiliza y ejecuta de forma instintiva esta tecnología sin ningún análisis pedagógico, lo cual puede no ser tan provechoso para los estudiantes que se acercan a estos medios. (p. 95).

Ante esta situación, muchos docentes consideran conveniente recomendar a sus estudiantes la consulta de ciertos materiales disponibles en Internet o el empleo de aplicaciones referidas al tema trabajado, luego de haberlos analizado ellos previamente. Como plantean Acuña Soto y Larios Osorio (2018) los estudiantes utilizan videotutoriales al margen de los profesores, quienes en algunos casos no tienen en cuenta que pueden ser materiales adecuados para atender a ciertas necesidades de aprendizaje.

El estudio que se reporta se encuentra enmarcado en una adscripción en investigación que indaga acerca del uso de aplicaciones y videotutoriales por parte de futuros profesores en matemática. Puesto que las tecnologías digitales tienen su mayor auge en esta época y se han extendido hasta el ámbito educativo, interesa conocer el uso que estudiantes y docentes de profesorado de matemática hacen de los videotutoriales y las aplicaciones en dispositivos móviles para el aprendizaje de la matemática. Esto favorece la reflexión acerca de las implicancias del uso de ciertas tecnologías digitales por parte de estudiantes de profesorado de matemática. Siguiendo esta línea de pensamiento, se pretende en este estudio:

1. Establecer cuáles son los recursos digitales que prefieren futuros profesores de matemática.
2. Indagar qué lugar tienen los videotutoriales y aplicaciones en el estudio que realizan de conceptos matemáticos futuros profesores.

Se muestran el análisis y los resultados obtenidos a partir de un cuestionario realizado con 127 estudiantes de profesorado en matemática de tres instituciones de la provincia de Santa Fe: la Facultad de Humanidades y Ciencias de la Universidad Nacional del Litoral (FHUC-UNL), el Instituto Superior de Profesorado N° 32 de la ciudad de Santa Fe (ISP N° 32) y el Instituto Superior de Profesorado N° 6 de la ciudad de Coronda (ISP N° 6). En dicho instrumento se prioriza el uso, utilidad y preferencias que los alumnos pueden explicitar con respecto al trabajo con aplicaciones y videotutoriales disponibles para el estudio de conceptos matemáticos.

2. Marco de referencia

Las tecnologías digitales traen consigo nuevas formas de vinculación con los conceptos matemáticos. Esto ocurre sobre todo si se pone el foco en la manera en que las personas las utilizan y no se consideran únicamente sus potencialidades de comunicación e información. Por esta razón, resulta interesante investigar el papel que juegan las tecnologías digitales en la educación matemática, en cuanto constituyen una forma de acceso a los conceptos que logra relacionar lo que los estudiantes conocen con aquello que quieren conocer (Palmas Pérez, 2018).

Con respecto al papel que juegan las tecnologías digitales en la enseñanza de la matemática, Novembre, Nicodemo y Coll (2015) sostienen que sus potencialidades en la clase de matemática abren la posibilidad de abordar problemas que serían imposibles sin su ayuda, adoptando un enfoque experimental de la Matemática que cambia la naturaleza de su aprendizaje. De esta manera, interpelan a los docentes a plantearse qué es lo que cambia en la enseñanza y el aprendizaje cuando se resuelve un problema conocido utilizando tecnología. Consideran que este planteo es una oportunidad para elevar la calidad de los procesos de enseñanza y de aprendizaje, propiciando una práctica docente reflexiva, significativa y situacional. Aunque lo que para muchos profesores "puede conllevar a ser un problema (por el uso del alumnado en las propias clases), para otros puede ser una herramienta muy motivante para el proceso de enseñanza – aprendizaje del alumnado" (Moreno Guerrero, 2011, p. 3).

La utilización de estos dispositivos móviles en la enseñanza originó el término m-learning. Según Moreno Guerrero (2011) el aprendizaje móvil es un conjunto de prácticas y metodologías de enseñanza y de aprendizaje mediante dispositivos móviles con conexión inalámbrica. Por esta razón, se considera el m-learning como una mixtura entre el aprendizaje a través de Internet (e-learning), con "los dispositivos móviles para producir experiencias educativas en cualquier situación, lugar y momento, trasladando los procesos educativos a una nueva dimensión al poder cubrir necesidades de aprendizaje urgentes, en movilidad y con gran interactividad" (Moreno Guerrero, 2011, p. 4). Se necesita de conexión inalámbrica puesto que "es necesario poder conectarse a la red mientras estamos en desplazamiento o en lugares inhóspitos" (Ascheri, Testa, Pizarro, Camiletti, Díaz, 2014, p. 1094). De forma que "esto hace bueno el dicho de 'cualquier momento es bueno para aprender'" (Ascheri et al., 2014, p. 1094).

Particularmente, existe una gran cantidad de aplicaciones creadas y destinadas especialmente a la educación. Estos instrumentos que comúnmente son denominados con la sigla Apps (Software Applications) "son programas creados para atender tareas específicas, concretas, que atiendan a una necesidad del usuario con la mayor rapidez posible" (Juárez Molina, 2014, p.1). Entre las aplicaciones a las que cualquier usuario tiene acceso se destacan aquellas que tienen características educativas, puesto que son aplicaciones desarrolladas con el fin de brindar a los usuarios espacios en los cuales puedan resolver diferentes situaciones problemáticas. La posibilidad de portabilidad, la conectividad en cualquier momento y lugar, la accesibilidad, la inmediatez de las comunicaciones y las posibilidades de participación colaborativa no sólo pueden mejorar los procesos de enseñanza y aprendizaje, sino también la interacción social entre usuarios o la accesibilidad a recursos e información (Herrera y Fennema, 2011), lo que permite que se resuelvan problemas ofreciendo nuevas herramientas. Pero, aunque estos aspectos son valorables, es necesario considerar que como todo instrumento tecnológico, la utilización de ciertas aplicaciones tienen ciertos riesgos que hay que conocer.

En lo que refiere a videotutoriales, puede afirmarse que existe una gran variedad disponible a la que estudiantes pueden acceder para el estudio de conceptos matemáticos. Estos videotutoriales también pueden ser utilizados por los docentes en sus propuestas de enseñanza. La palabra videotutorial procede de la unión de los sustantivos vídeo y tutorial. Por un lado, por vídeo se entiende aquel "sistema de grabación y reproducción de imágenes en movimiento acompañadas o no de sonidos" (RAE, 2019) y, por otro lado, por tutorial se considera a aquel "sistema instructivo de autoaprendizaje que pretende simular al maestro y muestra al usuario el desarrollo de algún procedimiento o los pasos para desarrollar una actividad determinada" (Marcilla de Frutos, 2013, p. 26). Por esta razón se considera a lo largo de este estudio como una pieza de material didáctico creada como objeto de aprendizaje de contenido audiovisual, que permite realizar consultas sobre dudas y seguir paso a paso la solución de un problema, haciendo al estudiante el actor principal. (Saucedo Fernández et al., 2013; Bengochea y Medina, 2013).

Además, se puede indicar que el uso de videotutoriales puede beneficiar: "la realimentación, comprobación, aplicación, demostración, resolución de ejercicios, problemas de la vida diaria y proyectos de una manera interactiva brindando un juego de iniciativas a través de organizadores gráficos y animaciones hacia la búsqueda de fundamentación científica y su ejecución" (Saucedo Fernández et al., 2013, p.1994).

A partir de los videotutoriales el material se presenta de forma visual y auditiva, este tipo de soporte tiene como ventaja que "el alumno capte mejor los conceptos. En varios estudios, como en el de Vidal i Raméntal (2009), se ha demostrado que el grado de aprendizaje de los alumnos es mayor cuando los contenidos se presentan en varios soportes de manera simultánea" (Marcilla de Frutos, 2013, p. 28). Otra ventaja interesante es aquella que se da en el caso en que los propios docentes son quienes crean los videotutoriales para sus alumnos, puesto que se adecuarán a los contenidos explicados a lo largo de sus clases. De esta manera, estas actividades les permiten a los alumnos desarrollar un aprendizaje significativo que indica un cambio en los esquemas de conocimiento, generar nuevas relaciones entre los conceptos para mejorar el proceso de enseñanza y de aprendizaje, permitir a sus usuarios acceder a información necesaria en cualquier momento y lugar, avanzando en el aprendizaje a su propio ritmo y propiciando la autoevaluación y autogestión. Pero es necesario que los estudiantes sean capaces de realizar una valoración acerca de la información brindada por los videotutoriales y aplicaciones, donde se relacione el contenido que se presenta con lo que ellos trabajan.

3. Metodología

3.1 Características de la investigación

La investigación es de tipo cualitativo, razón por la que los datos estudiados están expresados en palabras, frases y afirmaciones antes que datos numéricos (Mc Knight, Magid, Murphy y McKnigt, 2000), siendo "su propósito 'reconstruir' la realidad, tal como la observan los actores de un sistema social definido previamente" (Sampieri, 2014, p. 9).

3.2 Sujetos de estudio y recogida de datos

El principal método de recolección de datos utilizado en este estudio es el cuestionario que resulta útil para este trabajo ya que se pretende saber qué es importante y significativo para los estudiantes en relación con el uso de videotutoriales y aplicaciones para la construcción de conceptos matemáticos.

Se toma un muestreo no probabilístico por conveniencia puesto que se consideran sujetos que resultan accesibles o adecuados, en este caso estudiantes de carreras de profesorado pertenecientes a instituciones a las que los investigadores tienen acceso. La limitación de este tipo de muestreo tiene que ver con la posibilidad de generalización y es por esto que los resultados se limitan a las características de los sujetos de la muestra por lo cual no quita importancia a la investigación.

Los estudiantes que forman parte de la muestra se seleccionan considerando la institución a la que pertenecen y siendo de años de cursado distintos. En cada encuesta, entregada en formato papel, se pide a los alumnos que indiquen el año de ingreso y el nombre de la carrera que están estudiando (esto se debe a que cada instituto cuenta con un nivel e identificación del título diferente). En cuanto al tamaño de la muestra, el mismo no fue definido con anterioridad, se consideran todas las encuestas obtenidas, ya que se accedió a las mismas por la colaboración de docentes del ISP N° 32 y del ISP N° 6. En el caso de la FHUC-UNL, se llevan a cabo por una de las investigadoras, seleccionando estudiantes que participaban de distintas clases dictadas en esta institución.

A partir de preguntas abiertas, se prioriza estimular la expresión con sus propias palabras. Quizás la técnica más adecuada para este fin es la entrevista, pero como se trata de una muestra amplia (127 estudiantes en total) se considera como mejor solución el empleo de un cuestionario, puesto que “la investigación cualitativa mediante cuestionarios abiertos se convierte en la alternativa a la limitante de este paradigma en cuanto al número de participantes con los que se investiga” (Álvarez y Jurgenson, 2003, p. 150). A partir del instrumento de recolección de datos aplicado se pretende identificar qué tipo de recursos digitales prefieren los estudiantes de profesorado en matemática y determinar cómo utilizan dichos sujetos los videotutoriales y las aplicaciones. Esto permite además identificar valoraciones acerca de estos recursos que los mismos estudiantes emplean para el estudio de conceptos matemáticos. El cuestionario presentado está formulado para alumnos de la FHUC-UNL, del ISP N° 32 y del ISP N° 6.

Antes de presentar el cuestionario a los sujetos seleccionados se realiza una “prueba piloto”, como suele recomendarse, con intención de calibrar el instrumento a emplear. En efecto, las funciones de la prueba piloto son evaluar: “…a) la comprensión de las preguntas y las categorías de respuestas; b) el orden de las preguntas, y c) la duración de la encuesta. Basándose en los resultados de la prueba o pretest se realizarán los ajustes necesarios” (Yuni y Urbano, 2014, p. 76). Dicha prueba se realiza con alumnos de la Facultad de Humanidades y Ciencias, los cuales resaltan principalmente los cambios que deben hacerse en cuanto a la redacción de ciertas preguntas, entre otras cuestiones que son consideradas para la versión definitiva del instrumento aplicado mediante la técnica de cuestionario (Figura 1).

Carrera:	Año de ingreso:	Edad:	
1- ¿Recurres a videos de internet para estudiar matemática?	Si	No	
Si respondes **SI** continúa en la pregunta 2, si respondes **NO** continúa en la pregunta 16.			
2- ¿En qué ocasiones?			
3- ¿En qué temas de matemática?			
4- ¿Cuánto te han servido los videos que usaste?	Poco	Más o menos	Mucho
5- ¿Qué tipo de videos prefieres?	Con resolución de ejemplos	Con explicaciones del concepto y definiciones	Resolución de ejercicios con todos los pasos
6- ¿Qué esperas de un video?	Ampliar conocimientos	Explicación	Resolver un problema
7- ¿Cómo buscas los videos?			
8- ¿Tienes sitios preferidos? ¿Cuáles?			
9- ¿Te recomiendan videos? ¿Quiénes?			
10- ¿Hay algún video que te ha servido realmente? ¿Recuerdas cuál es? ¿Sobre qué tema?			
11- ¿Buscas un segundo video para comparar?	A veces	Siempre	Nunca
12- ¿Qué ventajas encuentras en la utilización de un video?			
13- ¿Qué te gusta de un video de matemática?			
14- ¿Qué no te gusta de un video de matemática?			
15- ¿Qué crees que falta en los videos de matemática que has visto?			
16- ¿Usas aplicaciones para estudiar matemática?	Si	No	
17- ¿Cuáles utilizas?			
18- ¿En qué dispositivos?	Celular	Computadora	Tablet
19- ¿Para qué fines?			

Figura 1. Versión definitiva del instrumento de cuestionario diseñado para estudiantes

Se recogen 127 respuestas al cuestionario en total, de los cuales participan 44 estudiantes de Profesorado de Matemática de la FHUC-UNL, 51 estudiantes del ISP N° 32 de la ciudad de Santa Fe y 32 alumnos del ISP N° 6 de la ciudad de Coronda. Los cuestionarios se entregaron en formato papel por una de las investigadoras a cada estudiante de la muestra de la FHUC-UNL y por parte de profesores que colaboraron con la investigación a los estudiantes que participaron en el ISP N° 32 y en el ISP N° 6.

3.3. Análisis y tratamiento de datos

Una vez realizada la recolección de las respuestas a los cuestionarios, se trabaja sobre la lectura de las mismas para obtener los datos, analizarlos e interpretarlos. Cabe advertir que los datos que se obtienen son no estructurados, ya que algunas preguntas son de respuesta abierta, que requieren categorizarse. Este análisis y estructuración se realiza a partir del contenido cuantitativo y de la frecuencia de aparición de ciertas características similares.

Resulta necesario aclarar que la interpretación que se haga de las respuestas de los alumnos puede modificarse según la apreciación de otros investigadores, porque cada uno tiene su propia perspectiva. Con respecto a esta cuestión el análisis se organiza en base a un estudio de cada uno de los datos por sí mismos y a la relación de ellos con lo proporcionado en las demás respuestas, puesto que esto permite deducir aspectos comunes y diferentes entre los datos. Luego, “los segmentos de datos o unidades son organizados en un sistema de categorías” (Sampieri, 2014, p. 419).

Como se cuenta con 127 respuestas, el volumen de datos obtenidos es amplio y se requiere una organización adecuada. Para ello se utiliza como herramienta el software *Microsoft Excel*, que permite la construcción de tablas con los datos recogidos y, además, el diseño de gráficos estadísticos. Esta elección se realiza considerando que, a partir del sistema de categorías elaborado, se asigna a cada una de ellas un número. Dichos valores son los que se cargan en las bases de datos para disminuir su tamaño, ya que se cuenta con un total de 19 preguntas donde cada una tiene sus categorías.

La elaboración de las categorías para cada respuesta pasa por diferentes fases hasta lograr una redacción final, puesto que en “la mayoría de los estudios cualitativos se codifican los datos para tener una descripción más completa de éstos, se resumen, se elimina la información irrelevante y se realizan análisis cuantitativos elementales; finalmente, se trata de entender mejor el material analizado” (Sampieri, 2014, p. 426).

Se comienza con la lectura de las respuestas al cuestionario por parte de los estudiantes de la Facultad de Humanidades y Ciencias, porque son a los que primero se tiene acceso y se agrupan las ideas que se retoman en cada una de las respuestas porque “cuando consideramos que un segmento o unidad es relevante podemos extraerlo como un potencial ejemplo de la categoría o de los datos” (Sampieri, 2014, p. 426). Se encuentran elementos de contenido muy distinto, por lo cual se elaboran varias categorías que involucran diversas ideas que están en relación. De este modo, la clasificación que se realiza funciona como un sistema abierto, donde se va incluyendo en cada categoría toda la información que aparece en cada respuesta. De este modo, las categorías emergen de preguntas y reflexiones de las investigadoras a partir de las narraciones de los participantes.

Luego de elaborar un bosquejo de la categorización, se continúa trabajando con las respuestas al cuestionario de las dos instituciones restantes. Muchas ideas se comparten con las previamente procesadas, pero de algunas se elaboran nuevas categorías. Al finalizar con la interpretación de cada una de las respuestas, se vuelve a revisar la categorización porque “al principio de la comparación entre unidades se crean varias categorías; pero cuando avanzamos hacia el final, el ritmo de generación de nuevas categorías desciende” (Sampieri, 2014, p. 431), de modo que quedan algunas que apuntan a ideas similares y que pueden formar parte de una única categoría. Por esta razón la actividad como investigadoras consiste en revisar cada uno de los nuevos segmentos de datos y los realizados anteriormente para conectar conceptualmente las respuestas al cuestionario y elaborar más categorías o consolidar las anteriores. De este modo, queda construida la tabla de categorización que es revisada varias veces hasta elaborar su versión final. Luego, se vuelven a revisar las 127 respuestas, pero en este momento, para asignar a cada una el número que determina la categoría de la cual forma parte.

4. Discusiones y resultados

En este apartado se van recorriendo las cuestiones abordadas y se describen algunas respuestas obtenidas con las categorías elaboradas.

El primer asunto consignado en el cuestionario es mediante una pregunta cerrada: *¿Recurres a videos de Internet para estudiar matemática?,* por lo cual las categorías de la respuesta ya estaban definidas al momento de presentar el cuestionario y se enumeran como (1) sí y (2) no. En cuanto a los resultados obtenidos, los estudiantes de nuestra muestra sí utilizan videotutoriales para estudiar matemática.

Luego, se les pregunta acerca de los momentos en los que utilizan los videotutoriales, a partir del interrogante: *¿En qué ocasiones?*, donde las categorías que se elaboran teniendo en cuenta las respuestas son:

> [1] cuando haya dudas, se necesita revisar algún concepto o resolver un ejercicio,
>
> [2] cuando se necesitan ejemplos,
>
> [3] en momentos previos a parciales,
>
> [4] en momentos de ocio. Esta categoría incluye aquellas situaciones de distensión donde los alumnos pueden buscar información por diversión o interés,
>
> [5] no contesta o no responde a lo pedido.

Principalmente, el 68% de ellos recurren a su uso cuando tienen dudas, necesitan revisar algún concepto o resolver un ejercicio y con un porcentaje menor se puede ver que el 6% los utilizan en momentos previos a parciales o cuando necesitan ejemplos, siendo solo un 2% el porcentaje de alumnos que los busca en momentos de ocio. Amerita aclarar que en esta pregunta se obtuvieron 141 resultados, debido que algunas de las respuestas analizadas se encuadran en varias categorías definidas.

En la tercera pregunta, también abierta: *¿En qué temas de matemática?* aparecieron diferentes opciones que los alumnos respondieron, a partir de las que se elaboran las siguientes categorías: [1] Números/Operaciones (dentro de esta opción también se incluyen temas de matemática discreta), [2] Análisis Matemático, [3] Álgebra y Funciones, [4] Geometría, [7] Estadística/Probabilidad y por último se diferencia entre [5] no contesta y [6] no especifica un tema porque podía ser que algunos alumnos consulten sobre temas diversos y por esta razón prefieren no nombrar alguno en particular.

Considerando las diferentes áreas de matemática que los alumnos estudian, el 25% lleva a cabo consultas sobre Álgebra y Funciones. Este dato coincide con lo observado por Massut Bocklet (2016), cuando afirma que los estudiantes que participaron en su investigación mencionan que los videotutoriales se deberían aplicar en aquellas unidades con mayor contenido gráfico-visual. Con un porcentaje similar (23%) realizan búsquedas sobre temas relacionados con Análisis

Matemático. Si bien un porcentaje alto (21%) de estudiantes no especifica un tema, se puede afirmar que el 11% de los sujetos de la muestra, miran videotutoriales sobre Geometría y en un porcentaje mucho menor, 4% y 3% sobre Estadística/Probabilidad y Números/Operaciones, respectivamente.

Puede concluirse que los estudiantes seleccionados para este estudio, ante un problema, ya sea por falta de comprensión o al no poder resolver un ejercicio, recurren a los videotutoriales puesto que les permiten resolver sus dudas de manera inmediata. Esta conclusión coincide con lo aportado por Moreno Guerrero (2011) sobre los dispositivos móviles, puesto que plantea que estos permiten "cubrir necesidades de aprendizaje urgentes, en movilidad y con gran interactividad" (p. 4). De esta manera, estos resultados ayudan a establecer en qué situaciones cada alumno decide utilizar este tipo de recurso.

Las preguntas 4, 5 y 6 son de tipo cerrado, por lo cual las opciones de respuestas se establecen y elaboran por las investigadoras previamente. Para la cuarta pregunta *¿Cuánto te han servido los videos que usaste?* Los sujetos que realizaron el cuestionario podían elegir entre las siguientes opciones: (1) poco, (2) más o menos o (3) mucho, donde se definieron este tipo de respuestas porque se cuestiona acerca de la utilidad. Luego del análisis de los resultados se obtuvo que el 49% de los estudiantes afirma que dichos videotutoriales les han servido mucho, el 35% de los sujetos de la muestra seleccionó la opción más o menos y no se obtuvieron respuestas para la opción poco.

Con respecto a la pregunta *¿Qué tipo de videos prefieres?*, se les pedía a los estudiantes que especifiquen entre aquellos (1) con resolución de ejemplos, (2) con explicaciones del concepto o definiciones, (3) con resolución de ejercicios con todos los pasos.

A partir de las respuestas se puede asegurar que principalmente 65 estudiantes prefieren aquellos con resolución de ejercicios con todos los pasos. Este dato es compartido por investigaciones de Saucedo Fernández et al. (2013) y Bengochea y Medina (2013), puesto que indican que los videotutoriales permiten realizar consultas sobre dudas y seguir paso a paso la solución de un problema, haciendo al estudiante el actor principal. Además, 35 de los sujetos de la muestra buscan los videotutoriales con explicaciones del concepto y definiciones, y seguidamente, se encuentran 31 alumnos que eligen los que presentan resoluciones de ejemplos. Al igual que sucedió en la pregunta anterior, se obtienen 150 resultados, debido que algunas de las respuestas analizadas se encuadran en varias categorías definidas.

En la pregunta *¿Qué esperas de un video?,* las opciones de respuesta son (1) ampliar conocimientos, (2) explicación y (3) resolver un problema. A partir de este interrogante se descubre que un gran número (48%) de los que sí utilizan este tipo de recursos digitales esperan una explicación cuando recurren al uso de videotutoriales, aunque también un 26% busca videos que les permitan ampliar conocimientos y además, en un porcentaje menor, 15% de los sujetos de la muestra seleccionó la tercera opción (resolver un problema). Estos datos obtenidos nos permiten entrever que los estudiantes no buscan solo resolver ejercicios, sino que también pretenden encontrar explicaciones.

Desde la pregunta 7 hasta la 10 se pidió a los estudiantes la redacción de sus ideas a partir de preguntas abiertas, por esta razón, en la pregunta 7 *¿Cómo buscas los videos?* se elaboran las siguientes categorías, que incluyen respuestas como las indicadas:

[1] recurriendo a un sitio preferido (Figura 2),

7- ¿Cómo buscas los videos?	JULIO PROFE

Figura 2. Respuesta a la pregunta 7 del estudiante 98.

[2] transcribiendo el ejercicio o la parte del tema que no se comprende utilizando buscadores (Figura 3),

7- ¿Cómo buscas los videos?	POR PROBLEMAS

Figura 3. Respuesta a la pregunta 7 del estudiante 120.

[3] por tema o palabras claves utilizando buscadores (Figura 4),

7- ¿Cómo buscas los videos?	En youtube, buscando como vemos en clases o a veces con otros nombres que utilizan en otras carreras

Figura 4. Respuesta a la pregunta 7 del estudiante 13.

[4] pidiendo recomendación a otras personas (Figura 5),

7- ¿Cómo buscas los videos?	DESDE EL LINK QUE MANDAN LOS PROFESORES

Figura 5. Respuesta a la pregunta 7 del estudiante 48.

[5] no contesta o no responde a lo pedido.

En cuanto a las predilecciones de los estudiantes respecto a la búsqueda, en nuestro caso, principalmente 79 de los estudiantes encuestados realizan su indagación en base a algún tema específico o con palabras claves utilizando diferentes buscadores. Aunque 28 alumnos no contestan la pregunta, en un número mucho menor (13), deciden realizar las búsquedas a partir de sus sitios preferidos. Las opciones de transcripción del ejercicio o la parte del tema que no se comprende utilizando buscadores, y la de pedir recomendación a otras personas tienen menor cantidad de respuestas.

En la pregunta *¿Tienes sitios preferidos? ¿Cuáles?* se pide a los alumnos que nombren sus sitios preferidos por lo cual la categorización se realiza de forma directa según las respuestas de ellos, sin apreciaciones de las investigadoras. Aparecieron sitios como [1] Julio Profe, [2] Unicoos, [3] Educatina, [4] Derivando, [5] Youtube, [6] no contesta, [7] no tiene sitios preferidos [8] Math2 Me o [9] Profe Alex. En cuanto a los resultados obtenidos, se pudo observar que el 30% de los estudiantes no tiene sitios preferidos, aunque en un porcentaje menor (27%) elige Youtube y un 14% la opción Julio Profe.

En la pregunta 9: *¿Te recomiendan videos? ¿Quiénes?* las categorías elaboradas se redujeron, puesto que a los estudiantes consultados les recomiendan videos [1] familiares, [2] profesores, [3] compañeros de la facultad o secundaria, [4] no contesta o [5] no le recomiendan. En esta pregunta se observa de forma directa qué sujetos entran en cada categoría y se diferencia entre aquellos que no contestan o no le recomiendan porque es interesante aquella opción de alumnos que no reciben información de otras personas y que deciden realizar una búsqueda por ellos mismos.

Para esta pregunta, la mayoría de los estudiantes un total de 65, contestó que no recibe ninguna recomendación sobre qué tipo de videotutoriales buscar, aunque 32 alumnos afirman que son sus compañeros de secundaria como de la facultad, los que realizan las recomendaciones. Según este dato pareciera que, si los profesores de estas instituciones recomiendan videotutoriales, estas sugerencias no son tenidas en cuenta por los estudiantes. Asimismo, como señala Villarreal (2012), se considera importante que los estudiantes tengan la oportunidad de aprender matemática con recursos tecnológicos, donde sea el docente quien los utilice y recomiende, porque su uso genera nuevas maneras de relacionarse con los conocimientos matemáticos.

Cuando se pregunta: *¿Hay algún video que te ha servido realmente? ¿Recuerdas cuál es? ¿Sobre qué tema?* se analizan dos cuestiones en base a los videos que les sirvieron, principalmente el tema de dicho videotutorial. Las tres categorías principales que se elaboraron son [1] no hay ningún video que les haya servido o [3] no contesta, y si hay algún tema se diferencian entre [2 A] Geometría, [2 B] Álgebra y Funciones, [2 C] Números/Operaciones, [2 D] Análisis Matemático, [2 F] Estadística/Probabilidad o [2 E] no recuerda. En estas categorías se incluyen también temas que los estudiantes nombraron acordes a cada área. En base a los resultados obtenidos en la pregunta, alrededor del 27% de los estudiantes no recuerda algún video que haya sido significativo o elude la pregunta. Los que elaboran algún tipo de respuesta, priorizan áreas como Álgebra y Funciones y Análisis Matemático, ambas con un 17%.

La pregunta 11, *¿Buscas un segundo video para comparar?*, indaga sobre la posible búsqueda de una segunda opción del video por parte de los estudiantes, lo que permite dar cuenta de una apropiación del recurso. Por esta razón se establecen tres opciones para que los alumnos elijan (1) a veces, (2) siempre o (3) nunca. Además, se agrega una cuarta opción en la tabla de categorización para aquellos estudiantes que no respondieron, porque no son usuarios de videotutoriales.

Para esta pregunta se obtuvo un predominio de la respuesta: “a veces” con un 52%, seguida por la respuesta: “siempre” con un 21% mostrando que gran parte de los estudiantes deciden seguir buscando videos, generándose una mayor apropiación del recurso.

A lo largo de las preguntas 12, 13, 14 y 15 se pide una cierta opinión sobre los videos utilizados. Para la pregunta *¿Qué ventajas encuentras en la utilización de un video?* las categorías elaboradas fueron las siguientes:

[1] posibilidad de verlo en cualquier momento y lugar (Figura 6),

12- ¿Qué ventajas encuentras en la utilización de un video?	que a veces no tengo que venir hasta la facultad, sino que simplemente en mi casa a la hora que estudie lo puedo buscar y ver.

Figura 6. Respuesta a la pregunta 12 del estudiante 1.

[2] posibilidad de verlo las veces necesarias, pausando o retrocediendo (Figura 7- Figura 8),

12- ¿Qué ventajas encuentras en la utilización de un video?	Me parece practico repetirlo cuantas veces sea nesesario.

Figura 7. Respuesta a la pregunta 12 del estudiante 52.

12- ¿Qué ventajas encuentras en la utilización de un video?	Pausarlo y pensar sobre lo que se ha dicho, volver hacia atrás si no se entiende algo.

Figura 8. Respuesta a la pregunta 12 del estudiante 24.

[3] permite mayor comprensión al tener otro punto de vista y explicación (Figura 9),

12- ¿Qué ventajas encuentras en la utilización de un video?	Que lo demuestran desde otro punto de vista y lo explican distinto.

Figura 9. Respuesta a la pregunta 12 del estudiante 30.

[4] permite acceder a diversidad de ejemplos y aplicaciones de los conceptos (Figura 10),

12- ¿Qué ventajas encuentras en la utilización de un video?	Que podes buscar mas ejemplo para aclarar dudas.

Figura 10. Respuesta a la pregunta 12 del estudiante 45.

[5] aspectos visuales y gestuales a diferencia del libro (Figura 11),

12- ¿Qué ventajas encuentras en la utilización de un video?	Que hay alguien que te explica, no es como el libro donde no hay gestos, ademanes, etc.

Figura 11. Respuesta a la pregunta 12 del estudiante 43.

[6] no contesta o no explica ventajas.

Con respecto a la opinión sobre los videos utilizados, se puede argumentar que se valora la posibilidad de generar mayor comprensión al tener otro punto de vista y explicación, puesto que 52 estudiantes mencionaron aspectos referidos a esta categoría. Además, también se muestra como significativo la posibilidad de verlo las veces necesarias, pausando o retrocediendo (con 27 respuestas de alumnos). En este sentido, en la muestra considerada no se destaca como ventaja importante la posibilidad de acceder a la información en cualquier lugar y momento, como señalan Ascheri et al. (2014).

La pregunta 13 apunta a lo que les gusta a los estudiantes de los videotutoriales. Por esta razón se pregunta de forma directa *¿Qué te gusta de un video de matemática?* A partir de las respuestas se elaboran las categorías que se presentan a continuación:

[1] las formas en que realizan las explicaciones;

[2] que presenta variedad de ejercicios resueltos;

[3] que presenta ejemplos;

[4] que presenta variedad de gráficos;

[5] el dinamismo y practicidad que presentan;

[6] no contesta o no responde a lo pedido.

Siguiendo la línea de resultados de las respuestas de los alumnos, en este caso, el 40% de ellos remarcan que les gustan las formas en que realizan las explicaciones en los videotutoriales consultados. El 35% no contesta la pregunta. Por otro lado, se encuentran otros aspectos destacables de los videotutoriales, aunque con el porcentaje mucho menor como el caso de la presencia de ejemplos con un 10% o el dinamismo y practicidad con un 8%. Los resultados pueden observarse en el siguiente diagrama (Figura 12):

Figura 12. Resultados pregunta 13

Además, la pregunta *¿Qué no te gusta de un video de matemática?* Consultaba, por lo contrario, donde los alumnos nombraron aspectos que se retoman en las siguientes categorías:

[1] poca variedad de ejemplos en algunos temas o ejemplos muy simples. Por ejemplo: *“muchas palabras y pocos ejemplos”* (respuesta del alumno 113),

[2] utilización de términos desconocidos. Por ejemplo: *"que se usen notaciones o términos distintos a los que uso"* (respuesta del alumno 38),

[3] mucha duración y explicaciones obvias. Por ejemplo: *"que sea muy largo"* (respuesta del alumno 101),

[4] la suposición de temas ya comprendidos o explicaciones distintas a las de la clase o los libros. Por ejemplo: *"que emplee otras formas a las usadas en clase"* (respuesta del alumno 25),

[5] falta de detalle en la explicación. Por ejemplo: *"cuando se basan en lo mecánico y no implementan otras estrategias de enseñar"* (respuesta del alumno 76),

[6] no poder preguntar ante la falta de comprensión. Por ejemplo: *"no poder consultar alguna duda del momento"* (respuesta del alumno 114),

[7] la voz de los protagonistas del video, que sea una clase filmada y/o escriba a mano, que use pizarras digitales y los anuncios. Por ejemplo: *"que tenga una voz computarizada"* (respuesta del alumno 121),

[8] no saber si es correcto. Por ejemplo: *"que tenés que ver varios para saber si es lo que necesitabas"* (respuesta del alumno 17),

[9] no contesta o no responde a lo pedido,

[10] no hay cosas que no le gusten.

Aunque 61 estudiantes prefieren no desarrollar ningún aspecto negativo, algunos (24 estudiantes) objetan que encuentran falta de detalle en las explicaciones y otros, 14 alumnos, nombran como una cuestión negativa la duración y explicaciones obvias de ciertos videotutoriales.

Por último, respecto a la pregunta *¿Qué crees que falta en los videos de matemática que has visto?*, dentro de los aspectos más importantes que los alumnos enunciaron se establecen ocho categorías:

[1] calidad visual;

[2] calidad de audio;

[3] falta de teoría y demostraciones;

[4] detalle sobre el origen de la información y/o confiabilidad de la fuente;

[5] más contenidos y diversidad de métodos y/o explicaciones con motivación;

[6] ejemplos de aplicación;

[7] no cree que le falte nada;

[8] no contesta o no responde a lo pedido.

Analizando la cantidad de respuestas que obtuvo cada categoría se puede observar que un porcentaje importante (58%) de los alumnos no contestaron a esta pregunta, aunque los que enuncian ciertas consideraciones remarcan la falta de contenidos y diversidad de métodos y explicaciones con motivación (con un 12%) o de ejemplos de aplicación (con un 9%). La motivación puede verse plasmada en los aportes de Saucedo Fernández et al. (2013) puesto que en sus experiencias se observa que “al alumno se le hace más cómodo, práctico y hasta interesante tener material en video que ir a la biblioteca” (p. 1998).

Luego se encuentran las preguntas que refieren al uso que los alumnos hacen de las aplicaciones. En efecto, se empieza la sección preguntando *¿Usas aplicaciones para estudiar matemática?* a partir de una pregunta cerrada con opciones: (1) sí y (2) no. Con respecto a esta última parte de la encuesta, se debe aclarar que el 78% de los estudiantes que forman parte de la muestra utilizan este tipo de recurso digital.

A continuación, se prefiere preguntar sobre las aplicaciones más usadas dentro de la matemática con el siguiente interrogante *¿Cuáles utilizas?*, pidiéndoles que nombren cuáles prefieren. Esto se evidencia en las categorías elaboradas: [1] Photomath, [2] GeoGebra, [3] Mathway, [4] Youtube, [5] Symbolab, [6] Graficadora, [7] Calculadora, [8] Mathlab, [10] WolframAlpha, [11] aplicaciones de estadística, [12] calculadora de integrales, derivadas y números complejos o [9] no contesta o menciona programas que no son aplicaciones.

Para esta pregunta se obtuvo un predominio de la respuesta: “GeoGebra” con 80 menciones por parte de los estudiantes, aunque 31 alumnos deciden no contestar a la pregunta. Luego aparece la respuesta “Photomath” en 25 ocasiones y “Symbolab” con un número mucho menor de sólo 9.

La pregunta 18: *¿En qué dispositivos?* refiere a los dispositivos donde se utilizan estas aplicaciones y como se trata de una pregunta cerrada se encuentran tres opciones de respuesta: (1) computadora, (2) tablet y (3) celular. Los resultados de esta pregunta indican que los estudiantes hacen uso de las aplicaciones en sus celulares con un total de 91 respuestas en esta opción, seguida del uso de la computadora con 55 respuestas.

Por último, se pregunta de forma directa *¿Para qué fines?* con el objetivo de observar la relación entre estas aplicaciones y el estudio de conceptos matemáticos. A partir de las respuestas, se determinan las siguientes categorías:

[1] verificación de soluciones (Figura 13),

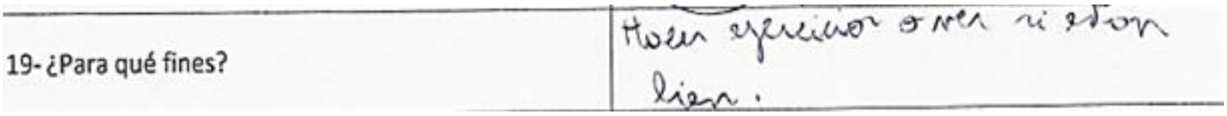


Figura 13. Respuesta a la pregunta 19 del estudiante 96

[2] resolución de problemas, ejercicios o para conjeturar (Figura 14),

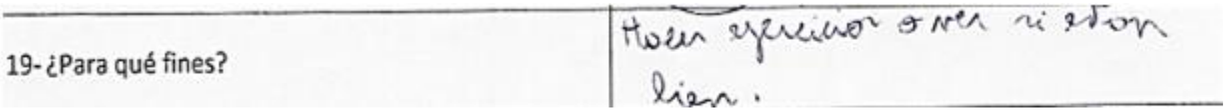


Figura 14. Respuesta a la pregunta 19 del estudiante 124.

[3] realización y/o visualización de gráficas (Figura 15),

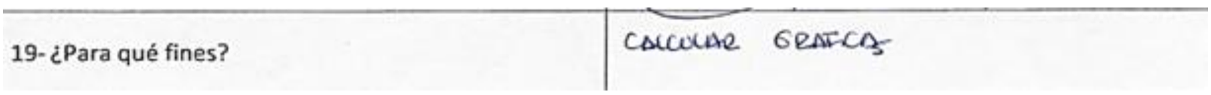


Figura 15. Respuesta a la pregunta 19 del estudiante 57.

[4] ahorro de tiempo (Figura 16),


19- ¿Para qué fines?

Figura 16. Respuesta a la pregunta 19 del estudiante 75.

[5] comprensión de un tema o concepto (Figura 17),

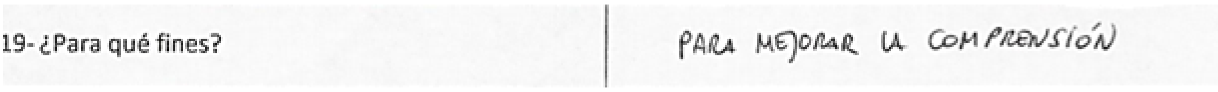

19- ¿Para qué fines? | PARA MEJORAR LA COMPRENSIÓN

Figura 17. Respuesta a la pregunta 19 del estudiante 40.

[6] para dar una clase (Figura 18),

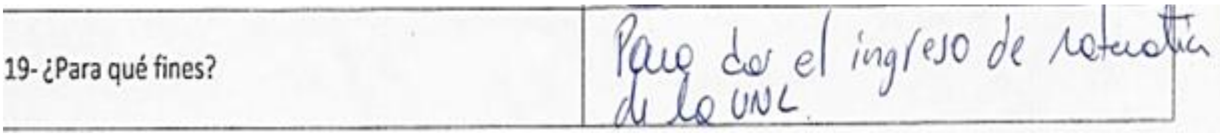

19- ¿Para qué fines? | Para dar el ingreso de matemática de la UNL

Figura 18. Respuesta a la pregunta 19 del estudiante 44.

[7] no contesta.

[8] no responde a lo pedido.

Se añade la última opción porque muchos alumnos contestan con actividades que no se corresponden con los fines de una aplicación. Con respecto a los resultados de esta última pregunta, las respuestas fueron muy variadas. Aparecieron ideas que prevalecieron como la realización y/o visualización de gráficas (41 respuestas), verificación de soluciones (38 respuestas) y resolución de problemas, ejercicios o para conjeturar (31 respuestas).

5. Conclusiones

Los resultados que se presentan en este artículo dan cuenta del estudio de los datos obtenidos a partir del cuestionario realizado a estudiantes de Profesorado en Matemática de la FHUC-UNL, del ISP N° 32 de la ciudad de Santa Fe y alumnos del ISP N° 6 de la ciudad de Coronda.

De forma general, se puede argumentar que hay un uso recurrente tanto de videotutoriales como de aplicaciones por parte de los estudiantes. Se puede establecer que la mayoría utiliza videotutoriales, preferentemente para subsanar dudas en el momento de estudio. Éstos no obedecen a recomendaciones de profesores y priorizan buscar explicaciones, a su ritmo, de aquellos contenidos que generan dudas. En cuanto a sus necesidades, los estudiantes plantean que prefieren explicaciones claras y detalladas, con la posibilidad de ampliar el contenido, generando mejor comprensión. En gran parte, los tipos de videos que prefieren son aquellos que tienen ejercicios resueltos paso a paso y explicaciones de conceptos y definiciones.

Con respecto a las aplicaciones, de todos los dispositivos móviles disponibles, el más utilizado es el celular, y las más empleadas por los estudiantes son GeoGebra y Photomath. Los principales fines de su uso corresponden a realizar gráficas, verificar y resolver problemas. De esta manera, recurren a ellas para complementar la resolución de las actividades.

A partir de estos resultados y la bibliografía consultada emerge como necesario también indicar que las tecnologías digitales “pueden construirse en un estructurante de la dinámica de la producción matemática entre los estudiantes” (Villarreal, 2004, p. 53). De ahí aparece la importancia de añadir el m-learning a los proyectos de formación de profesores (Moreno Guerrero, 2011).

Por último, un aspecto que Villarreal (2012) retoma y que es importante considerar, priorizando la educación matemática, es que actualmente se mantiene la tradición atravesada por el uso del lápiz y el papel como herramientas de trabajo privilegiadas. De este modo es necesario considerar las posibilidades que podrán ser aprovechadas por los docentes si se acepta “el reto de abandonar viejas prácticas y decidimos adentrarnos en la «zona de riesgo» del terreno educativo hoy minado de tecnologías que para muchos resultan desconocidas y amenazadoras” (Villarreal, 2012, 91).

Resulta interesante analizar cómo se vinculan los estudiantes con los videotutoriales y las aplicaciones para el aprendizaje de los conceptos matemáticos dado que ambos recursos pueden representar un complemento a las estrategias tradicionales de formación. Esto cobra especial relevancia al tratarse de estudiantes del profesorado de matemática. De esta manera, el aporte que realizan sobre usos y preferencias de videotutoriales y aplicaciones posibilita que se indague sobre este tema y representa una oportunidad de enriquecer el desempeño de futuros profesores de matemática en relación con las planificaciones de clase que realicen. Los recursos digitales nombrados pueden ser aplicados por un docente en sus clases o propuestos para ser utilizados por los estudiantes para el estudio de conceptos matemáticos. Estos aportes brindan la posibilidad de desarrollar clases más dinámicas donde el alumno pase a tener una nueva relación con el conocimiento, considerando las potencialidades de las herramientas tecnológicas.

Con respecto a las limitaciones de la investigación, un aspecto interesante es que no se pudo profundizar en el tipo de uso que hacían los estudiantes encuestados de los videotutoriales y las aplicaciones, lo que permitiría caracterizar de forma completa la utilización de estos recursos. Esta limitación se debe al tamaño de la muestra y al tiempo de duración de la adscripción de la cual forma parte la investigación. Esta cuestión podría obtenerse a partir de una serie de entrevistas a un número significativo de sujetos que hayan participado de la resolución de los cuestionarios.

Con respecto a líneas de indagación futuras, se puede estudiar el uso que los docentes de estos estudiantes le dan a los videotutoriales y a las aplicaciones, para poder desarrollar propuestas educativas que atiendan a este uso que los estudiantes realizan. También una posible consulta puede ser acerca de por qué ciertas instituciones educativas no han tomado la iniciativa de la recomendación o diseño de videotutoriales o aplicaciones. Además, se puede indagar acerca del modo en que las tecnologías digitales intervienen en la formación de conceptos matemáticos, permitiendo determinar, en caso de ser posible, evidencias que favorecen u obstaculizan esa formación.

Bibliografía

Acuña Soto M., Larios Osorio V., Liern Carrión V., Blasco O., Lafuente Lechuga M. (2018). *Valoración de videotutoriales de matemáticas disponibles en internet con el modelo ValFM (Valoración Flexible Multicriterio)* (Laboratorio Iberoamericano para la valoración de procesos educativos de la enseñanza de la matemática). https://www.uv.es/liern/LABIPE.pdf

Álvarez J. & Jurgenson G. (2003). *Como hacer investigación cualitativa. Fundamentos y metodología.* Paidós Educador.

Ascheri, M. E., Testa O., Pizarro, R., Camiletti, P. & Díaz, L. (2014). *Desarrollo de aplicaciones para dispositivos móviles con sistema operativo Android para la enseñanza aprendizaje de temas de Matemática en el nivel medio. Análisis de la inclusión de dichas aplicaciones.* [Sesión de comunicación]. WICC 2014 XVI Workshop de Investigadores en Ciencias de la Computación, Ushuaia, Argentina. http://sedici.unlp.edu.ar/bitstream/handle/10915/43878/Documentocompleto.pdf?sequence=1

Bengochea, L. & Amelio, J. (2013). El papel de los videotutoriales accesibles en el aprendizaje del futuro. En M. A. Córdova Solís & L. Martínez Bengochea (Eds.), *V Congreso Internacional ATICA* (pp. 80- 87). Universidad Continental, Fondo Editorial. https://hdl.handle.net/20.500.12394/2985

Cárdenas González, E. (2015). Video tutoriales. Una estrategia B-S. Learning A propósito de los estilos de enseñanza- aprendizaje de las matemáticas y la física. *Boletín virtual*. *4* (8), 93-102.

Herrera, S. I. & Fennema, M. C. (2011). *Tecnologías móviles aplicadas a la educación superior.* [Sesión de comunicación]. XVII Congreso Argentino de Ciencias de la Computación, La Plata, Argentina. http://hdl.handle.net/10915/18718

Juárez Molina, A. (2014). *La motivación a través de Apps móviles para trabajar la resolución de problemas matemáticos.* [Tesis de grado]. Universidad de Almería.

Marcilla de Frutos, C. (2013). *Las tic en la didáctica de las matemática.* [Tesis de máster]. Universidad de Burgos.

Massut Bocklet, M. F. (2016). *Estudio de la utilización de vídeos tutoriales como recurso para las clases de matemáticas en el bachillerato con "Flipped Classroom".* [Tesis doctoral]. Universidad de Barcelona.

Mc Knight, C., Magid, A., Murphy, T. & Mc Knight, M. (2000). *Mathematics Education Research: A Guide for the Research Mathematician.* American Mathematical Society.

Moreno Guerrero, A. (2011). *Móvil learning*. Recuperado el 13 de junio de 2019 de http://recursostic.educacion.es/observatorio/web/fr/cajon-de-sastre/38-cajon-de-sastre/1026-movil-learning

Novembre, A., Nicodemo, M. & Coll, P. (2015). *Matemática y TIC-Orientaciones para la enseñanza.* ANSES.

Palmas Pérez, S. (2018). La tecnología digital como herramienta para la democratización de ideas matemáticas poderosas. *Revista Colombiana de Educación. 74*, 109-132.

Real Academia Española RAE (2019). *Diccionario de la lengua española* (23ª ed.). https://dle.rae.es

Sampieri, R., Collado C. & Baptista Lucio M. (2014). *Metodología de la investigación.* Sexta Edición. McGraw-Hill / Interamericana Editores, S.A. DE C.V.

Santos Mellado, J.A. (2018). *Valoración de videotutoriales de matemáticas disponibles en internet. Nuevos instrumentos para el análisis de los procesos educativos*. [Tesis doctoral]. Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del Instituto Politécnico Nacional.

Saucedo Fernández, M., Díaz Perera, J., Herrera Sánchez, S. & Recio Urdaneta, C. (2013). *El video tutorial como alternativa didáctica en el Área de Matemáticas.* Comité Latinoamericano de Matemática Educativa.

Villarreal, M. (2004). Transformaciones que las tecnologías de la información y la comunicación traen para la educación matemática*. Yupana. 1*(1), 41-55.

Villarreal, M. (2012). Tecnologías y educación matemática: necesidad de nuevos abordajes para la enseñanza*. Virtualidad, Educación y Ciencia*. *3* (5), 73-94.

Yuni J. & Urbano, C. (2014). *Técnicas para Investigar: Recursos Metodológicos para la Preparación de Proyectos de Investigación. Volumen 2*. Editorial Brujas.

Autores:

Primer autor: **Sola, Tamara**: Estudiante avanzada del Profesorado en Matemática de la Universidad Nacional del Litoral. Ha participado como expositora en congresos y jornadas especializados nacional e internacionales. Ha desarrollado actividades bajo el Programa de Becas de Iniciación a la Investigación para Estudiantes de Carreras de Grado.

Segundo autor: **Freyre, Magali Lucrecia**: Profesora de Matemática en los niveles secundario, universitario y superior no universitario. Ha participado como expositora en congresos y jornadas especializados nacionales e internacionales. Cuenta con publicaciones en revistas especializadas en enseñanza de la matemática.

Tercer autor: **Götte, Marcela**: Profesora en Matemática y Magister en Didácticas Específicas. Trabaja en formación de docentes en Matemática y de Educación Especial. Docente investigadora en temas referidos a la enseñanza de la matemática en distintos niveles del sistema educativo.

UNIÓN
REVISTA IBEROAMERICANA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA

ISSN: 1815-0640
Número 64. Abril 2022
Páginas 1-16

https://union.fespm.es

Evidencias de razonamiento geométrico en estudiantes de primero medio de enseñanza media en un colegio de la provincia de Concepción

Fabián Eduardo Quiroga Merino, Claudio Armando Méndez Arriagada, Juan Eduardo González Canales, Paulina Elizabeth Serrano Salas

Fecha de recepción: 8/13/2020
Fecha de aceptación: 31/12/2020

Resumen	Esta investigación tiene por objetivo diagnosticar el nivel de razonamiento geométrico en la unidad de Homotecia a estudiantes de secundaria que se encuentran entre los 14 y 15 años de edad en un colegio de alto rendimiento (COAR), según el Ministerio de Educación de Chile (MINEDUC), obteniéndose información mediante un diagnóstico, producciones escritas y transcripciones de audio, las que se analizaron según la teoría de Van Hiele, la teoría de registros semióticos de Duval y los paradigmas geométricos de Kuzniak, permitiendo evidenciar un bajo nivel del razonamiento en el contenido de Homotecia, y un cumplimiento parcial de los estándares esperados según el programa del MINEDUC tanto en el logro de objetivos como en el desarrollo de habilidades. **Palabras clave:** Matemática, geometría, razonamiento geométrico**.**
Abstract	This research aims to diagnose the level of geometric reasoning in the Homothety unit for high school students between 14 and 15 years old in a high performance school (COAR), according to the Ministry of Education of Chile (MINEDUC), obtaining information through a diagnostic test, written productions and audio transcripts, which were analyzed according to Van Hiele's theory, Duval's theory of semiotic registers and Kuzniak's geometric paradigms, allowing evidence of a low level of reasoning in the Homothy unit, and a partial fulfillment of the expected standards according to the MINEDUC program both on the achievement of objectives and on the development of skills. **Key words:** Mathematics, geometry, geometric reasoning.
Resumo	Esta pesquisa tem por objetivo diagnosticar o nível de raciocínio geométrico na Unidade de Homotecia a estudantes de ensino médio que encontram-se entre os 14 e 15 anos de idade em um colégio de alto rendimento (COAR), segundo o Ministério da Educação do Chile (MINEDUC), obtendo-se informação mediante um diagnóstico, produções escritas e transcrições de audio, as quais foram analizadas de acordo com a teoría de Van Hiele, teoría de registros semióticos de Duval e os paradigmas geométricos de Kuziak. Permitindo assim evidenciar um baixo nível de raciocínio no conteúdo de Homotecia e um cumprimento parcial

dos padrões esperados segundo o programa do MINEDUC tanto no alcance de objetivos como no desenvolvimento de habilidades.
Palavras chave: Matemática, geometria, raciocínio geométrico.

1. Introducción

Al analizar los distintos establecimientos según nuestro contexto estudiantil, nos hemos dado cuenta que la mayoría de ellos presenta problemas en la asignatura de Matemáticas, encontrando que Geometría es uno de los sectores más descendidos, esto se puede observar en las distintas evaluaciones estandarizadas a las que son sometidas los establecimientos.

Por una parte, en el Simce[1] de Matemáticas, se presenta un gran porcentaje de estudiantes dentro del nivel insuficiente, según los resultados del Ministerio de Educación, dando a conocer el déficit en esta asignatura[2]. Por otra parte, en la evaluación PSU[3] se puede evidenciar las falencias que poseen los estudiantes en el eje[4] de Geometría, dada la baja cantidad de respuestas correctas (preguntas 37 a 58) en comparación con los ejes de números y álgebra (Preguntas 1 a 36) según muestra la Figura 1.

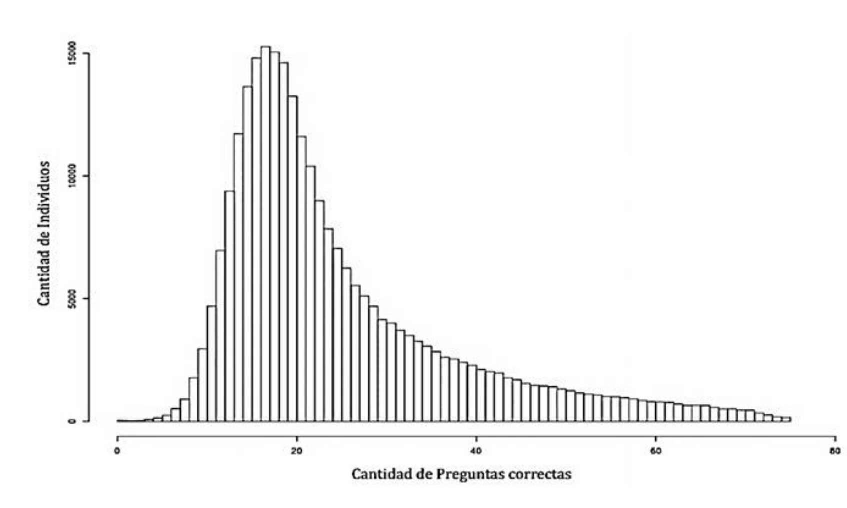


Figura 1. Distribución de individuos por cantidad de preguntas correctas en PSU de Matemáticas Admisión 2018.
Fuente: DEMRE

[1] Sistema de Medición de la Calidad de la Educación, es una evaluación externa que se aplica a los estudiantes en los establecimientos educacionales, cuyo principal propósito consiste en contribuir al mejoramiento de la calidad y equidad de la educación, informando sobre los logros de aprendizaje de los estudiantes en diferentes áreas de aprendizaje del currículo nacional, y relacionándolos con el contexto escolar y social en el que estos aprenden en Chile.

[2]Agencia de calidad de la educación (2015-2020), Simce, recuperado de: http://archivos.agenciaeducacion.cl/Conferencia_EERR_2018.pdfhttps://www.agenciaeduc

[3] PSU; Prueba de Selección Universitaria, es una evaluación escrita implementada en Chile para el proceso de admisión universitaria.

[4] En Chile la asignatura de Matemáticas se divide en 4 ejes temáticos: Números (asociado a los contenidos de aritmética) Álgebra y Funciones, Geometría, Estadística y Probabilidades.

Actualmente en Chile, los colegios privados son aquellos que obtienen los mejores resultados en las evaluaciones estandarizadas, obteniendo en la prueba Simce una diferencia de 60 puntos y 100 puntos en la PSU con respecto a los colegios municipales, pero aun así manifiestan el mismo patrón en Geometría.

A partir de estos datos surge la siguiente interrogante:

¿Por qué el eje de Geometría resulta ser más complicado de comprender para los estudiantes que Álgebra o Números?

Basándonos en nuestras experiencias encontramos que en Álgebra y Números existen técnicas y patrones para mecanizar la resolución de ejercicios, sin embargo, en Geometría se espera que el estudiante genere de forma espontánea una idea para poder desarrollar el ejercicio.

Cada una de las evaluaciones estandarizadas se centra sólo en los contenidos y las habilidades según la Taxonomía de Bloom, dejando de lado la forma en que los estudiantes razonan y como estructuran de manera lógica sus respuestas.

Según la teoría del desarrollo próximo diseñada por Vygotsky (Mind in society: The development of Higher Psicological proceses, 1979), para que el estudiante comprenda, hay etapas por las cuales este transita, lo que no ocurre solamente de manera individual, sino que también al resolver problemas con alguien más capaz, resultando ser de gran interés en la educación, en especial si esta persona es el profesor. Respecto a lo anterior, Bruner en 1976 lo compara con un proceso de andamiaje, en el que el profesor diseña los distintos andamios sobre los que el alumno se apoya y por ende es aquí donde se requiere un proceso de evaluación que dé a conocer la posición del estudiante, a esto lo llama proceso de diagnóstico.

Según lo observado en profesores, los diagnósticos que se ocupan para medir el aprendizaje del estudiante se suelen centrar en identificar aquellos contenidos que los estudiantes no logran aplicar de manera correcta, para tomarlos como referencia al momento de planificar las clases siguientes, buscando por lo general recordarles la forma y/o el mecanismo para resolverlo. Sin embargo, es de común conocimiento que muchos de los estudiantes suelen realizar de manera correcta un ejercicio sin la necesidad de comprender completamente lo que hacen o por qué lo hacen. Con todo lo anterior, se identifica la necesidad de un diagnóstico que vaya más allá de la medición de un determinado contenido y que se enfoque en comprender el razonamiento que hay detrás de lo que contesta el estudiante.

Finalmente, es importante contar con un diagnóstico que mida adecuadamente el razonamiento geométrico, que permita, a futuro, diseñar mejor los andamios de la enseñanza. Dada esta estructura escalonada, resulta de interés la Teoría de Niveles de Razonamiento Geométrico propuesta por el matrimonio Van Hiele (1986), pues ésta consta de cinco niveles de razonamiento que se identifican mediante el cumplimiento de ciertas características asociadas a cada nivel.

Para comprender lo antes descrito, esta investigación se basa en responder la siguiente interrogante:

¿Cómo es el razonamiento geométrico empleado por los estudiantes de primero medio, en un determinado colegio de alto rendimiento de la comuna de Concepción?

2. El razonamiento en geometría

Para el autor Shigeo Katagiri(2017), el pensamiento matemático se puede clasificar en tres categorías importantes que son, el contenido matemático, el método matemático y la actitud con la que se desarrolla una actividad, en donde es esta última la que marca la diferencia entre pensamiento y razonamiento.

Dentro de este artículo se caracterizará el razonamiento geométrico en base a las siguientes habilidades:

- Establecer relaciones entre los distintos conceptos geométricos
- Argumentar de manera clara sobre las distintas propiedades o relaciones geométricas
- Comprender los elementos que forman parte de una teoría geométrica
- Comunicar en forma convincente los resultados obtenidos.

Todo estudio se relaciona con un contexto estudiantil, sus creencias individuales o grupales, sus costumbres respecto al abordaje de un nuevo contenido, y con una forma distinta de ver el mundo del aprendizaje. Para distinguir de mejor manera el paradigma en el que se desarrolla su aprendizaje, Kuzniak (2004) desde el punto de vista de la geometría, y a partir de las habilidades que desarrolla un estudiante, define tres tipos de paradigmas:

La geometría natural (Geometría I), enfocado en lo visual, lo instrumental, lo tangible que puede conocer el alumno. La axiomática natural (Geometría II), enfocado en el uso de distintos elementos y propiedades derivadas de la geometría euclidiana. Y la axiomática formalista (Geometría III), cuyo enfoque es el desarrollo de toda la geometría incluyendo la no euclidiana. Las dos primeras se trabajan durante la época escolar y dado que sus características son muy similares a la de los primeros niveles de Van Hiele (1986), despiertan especial interés para comprender los resultados.

Hasta este punto se comprende lo que es razonar matemáticamente y cómo los paradigmas influyen en el desarrollo de este. Sin embargo, no se deben olvidar las características más particulares de la geometría, como lo son los constantes movimientos entre registros semióticos de distinta naturaleza, o en términos de las habilidades de Bloom (1971) la habilidad de representación. Por ejemplo, los estudiantes deben saber interpretar un elemento matemático en un lenguaje escrito, simbólico o algebraico, obtener información a partir de un gráfico o dibujo, e incluso transformar elementos desde un tipo de representación a otro, pero esto resulta complejo si el alumno no comprende cómo trabajar con las distintas representaciones que un objeto posee, y cómo poder obtener información a partir de estas.

Según Duval (1999) las representaciones semióticas son aquellas producciones constituidas por el empleo de signos (enunciado en lenguaje natural, fórmula algebraica, etc.) y son el medio que un individuo utiliza para exteriorizar sus representaciones mentales y volverlas accesibles a otros.

Duval (1999) presenta además dos conceptos importantes: Semiosis o la producción de una representación semiótica y la Noesis o la comprensión y discriminación de las distintas representaciones. La relación entre ellas es muy importante dado que en palabras del propio Duval(1999) “no hay Noesis sin Semiosis”(p.15) es decir, para que un alumno pueda decir que comprendió un tema o para demostrarlo, si este entiende bien un concepto, debe ser capaz de moverse entre las distintas representaciones que el objeto posee.

El modelo de Van Hiele (1986) clasifica el razonamiento de los estudiantes en cinco niveles, a partir del tipo de respuesta que esta entrega y el cómo logra llegar a ella; y si bien no se basa directamente en lo correcto o lo incorrecto del resultado, sí otorga información para clasificarlo. Es un modelo secuenciado pues, para superar un determinado nivel, es necesario haber superado los niveles anteriores de manera ordenada, y también es local, es decir, puede variar según la unidad matemática que se está estudiando.

Jaime y Gutiérrez (1998), complementan la teoría de Van Hiele (1986) a partir de la distinción de los procesos involucrados en el razonamiento (reconocimiento, definición, clasificación y demostración) los que permiten una forma más sencilla de identificar los niveles de razonamiento y la teoría de los grados de adquisición, que ayuda en el caso de encontrar respuestas con características de dos niveles consecutivos, permitiendo discernir a qué nivel realmente pertenece una respuesta, lo anterior en base al análisis de lo completa o correcta que es la respuesta entregada por el estudiante.

3. Marco metodológico

Esta investigación es un estudio de caso cualitativo de campo, cuya muestra corresponde a 30 alumnos de primer año de enseñanza media (14 a 15 años) de un colegio científico-humanista de alto rendimiento en la provincia de Concepción, región del Biobío, Chile. Para el estudio de este nivel, se cuenta con los resultados Simce de octavo año (2017), que según los estándares de la agencia de calidad de educación en Chile los clasifica dentro de un nivel adecuado[5] de aprendizaje.

Para comprender mejor la forma de razonar de los estudiantes, el estudio se separó en dos secciones, y por lo tanto utiliza dos tipos de instrumentos. El primero, es un test diagnóstico sobre Geometría que permitió recabar información acerca del nivel de razonamiento que los alumnos habían adquirido hasta la fecha. El segundo, se enfoca en obtener información durante el proceso de enseñanza-aprendizaje de la unidad de Homotecia.

Al inicio de este proceso de investigación, se aplicó un test elaborado por la Magister Estefanía Caamaño Bello, que se basa en los procesos mentales asociados a los razonamientos (Jaime y Gutiérrez, 1998), incluyendo ítems elaborados según los procesos de reconocimiento, definición, clasificación y demostración, considerando los siguientes atributos.

[5] La Agencia de calidad de la educación en Chile clasifica el rendimiento en tres niveles: Insuficiente, Elemental y Adecuado, siendo este último el más alto.

Ítem	Proceso de razonamiento predominante	Niveles de Van Hiele en que transita.	Habilidad (Programa de matemática en Chile)
1.a	Reconocimiento	Niveles 1 y 2.	- Representar. - Argumentar y comunicar
1.b	Definición	Niveles 1, 2, 3 y 4.	- Representar. - Argumentar y comunicar
2	Definición	Niveles 1, 2, 3 y 4.	- Argumentar y comunicar.
3	Demostración	Niveles 1, 2, 3 y 4.	- Argumentar y comunicar.
4	Clasificación	Niveles 1, 2 y 3.	- Representar - Resolver problemas. - Argumentar y comunicar.
5.a	Reconocimiento	Niveles 1 y 2.	- Resolver problemas. - Argumentar y comunicar.
5.b	Demostración	Niveles 1, 2, 3 y 4.	- Resolver problemas. - Argumentar y comunicar.

Tabla 1. Estructura de los ítems del Test Diagnóstico aplicado para la medición del nivel de razonamiento geométrico de los estudiantes.

Para mejorar la recopilación durante la aplicación de la unidad de Homotecia, se adaptaron algunas preguntas de las guías a trabajar, evitando influir en el desarrollo normal de la clase planificada. Se obtienen también grabaciones de audio, cuyas transcripciones permiten enriquecer aún más la investigación.

Para revisar el test diagnóstico, a cada respuesta se le asignó un proceso, para ello se utilizó una rúbrica específica para el test, diseñada en base a los procesos de razonamiento mencionados. Para analizar el progreso durante la unidad, se utiliza una pauta general que permite distinguir los niveles de razonamiento geométrico asociados a respuestas en diversos contextos. El estudio de las transcripciones se realiza rescatando indicios de alguna característica asociada a un nivel de razonamiento, esto dado el carácter informal y espontáneo con que se producían los diálogos.

Una vez finalizado el ordenamiento de la información para cada método en que se recopilaron los datos, se indagó de forma transversal entre estos, buscando caracterizar el pensamiento del estudiante.

La siguiente tabla muestra la cantidad de evidencias halladas en las producciones de los estudiantes según la clasificación de niveles de Van Hiele.

Niveles	NIVEL 1	NIVEL 2	NIVEL 3	No Observado	Sin Respuesta
Test Diagnostico	112	15	35	11	37
Guía de aprendizaje	25	1	0	25	52
Test de homotecia	50	49	0	38	13
Evaluación	13	6	0	23	2
Registros de Audio	9	2	0	-	-

Tabla 2. Resultados según niveles de Van Hiele.

De un total de 317 evidencias encontradas en las producciones de los estudiantes, se aprecia en la figura 2, que el mayor porcentaje del razonamiento de los estudiantes se clasifica dentro del primer nivel de Van Hiele.

Figura 2. Gráfico de resultados por nivel de Van Hiele.

4. Análisis de resultados.

El análisis de resultados se desglosa en el siguiente esquema, que ordena los procesos de cada nivel según su predominancia, siendo los colores más oscuros, los que tuvieron mayor presencia en las producciones de los estudiantes.

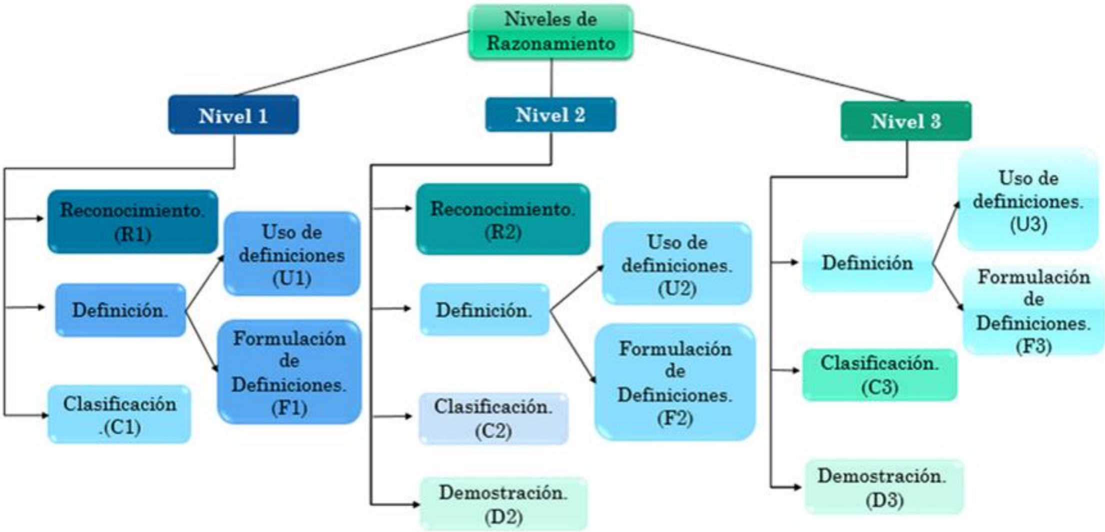


Figura 3. Procesos de cada nivel según predominancia.

Sin ignorar que cada nivel incluye al anterior, a continuación, se describen las características destacadas de cada nivel identificado, desglosado según los procesos establecidos por Jaime y Gutiérrez (1998) para evaluar los resultados según la escala de Van Hiele.

Nivel 1

Reconocimiento (R1)

1. Identifican características o componentes de una figura guiándose estrictamente de lo que observan.

2. Aún si emplean un lenguaje matemático, este suele no ser apropiado y tiene un significado visual.
3. Utilizan propiedades imprecisas de las figuras, entendiendo una propiedad imprecisa como una propiedad mal empleada.
4. Al aprender una técnica para resolver un ejercicio o problema no son capaces de aplicarlo a un contexto distinto.

Uso de definiciones (U1):

1. Los estudiantes de primer nivel no comprenden las definiciones.

Formulación de definiciones (F1):

1. No comprenden la estructura de una definición, en el mejor de los casos enlistan características físicas.

Clasificación (C1):

1. Clasifican figuras en base a su apariencia global.
2. No comprenden las definiciones de las figuras por tanto no clasifican de acuerdo a ellas.
3. No generalizan las características que identifican en una figura a otras de su misma clase.

Demostración (D1):

1. No saben demostrar, no siguen instrucciones ni un procedimiento lógico al probar algo. Por esta razón es que este proceso no se contempla en este nivel.

Nivel 2

Reconocimiento (R2):

1. Saben que las figuras geométricas poseen propiedades y las reconocen como características de ella.
2. Utilizan un vocabulario apropiado para describir los componentes de las propiedades.

Desde este nivel en adelante, según los autores Jaime y Gutiérrez (1998) este proceso presenta iguales características, lo que no quiere decir que los estudiantes que han alcanzado un nivel superior de razonamiento tengan ausencia de este proceso, por el contrario, existe, pero no se distingue del nivel dos.

Uso de definiciones (U2):

1. Rechazan o ignoran las definiciones que contradicen la que ellos tienen adquirida.

Formulación de definiciones (F2):

1. Aun no dominan la estructura lógica que lleva una definición, por lo que enlistan o enumeran propiedades y características que suelen ser insuficientes o innecesarias para identificar una figura.

Clasificación (C2):

1. Clasifican en base a las definiciones que ellos previamente tienen adquiridas, las que suelen ser exclusivas, por lo que no admiten inclusión de familias de figuras.

Demostración (D2):

1. Muestran ausencia de comprensión de una demostración.
2. Al comprobar la validez de una afirmación experimentan sin utilizar los ejemplos suficientes, finalmente suelen generalizar.
3. No manejan una estructura lógica en su procedimiento.

Nivel 3

Uso de definiciones (U3)

1. Comprenden, y son capaces de utilizar definiciones exclusivas e inclusivas.
2. Identifican definiciones distintas de un mismo concepto.

Formulación de definiciones (F3):

1. Son capaces de elaborar una definición siguiendo una estructura lógica.
2. Intentan no ser redundantes, al utilizar solo las propiedades y características suficientes para reconocer a la figura u objeto matemático.

Clasificación (C3):

1. Al comprender definiciones, son capaces de clasificar figuras respecto a ellas. Reconocen que existen familias de figuras que comparten características.

Este proceso no permite distinguir el cuarto nivel, pues es el tercero, donde han alcanzado el máximo logro de este proceso.

Demostración (D3):

1. A la hora de probar una situación son capaces de seguir una secuencia de deducciones lógicas que es respaldada por sus procedimientos.
2. Son capaces de dar razones informales para probar la veracidad de una propiedad, siendo los casos específicos solo una ayuda y no la demostración misma.

Ejemplos destacados

R1. La imagen siguiente muestra un ejemplo de respuesta a un ejercicio en donde se debe construir una homotecia, cuyo centro es un punto P distinto del origen.

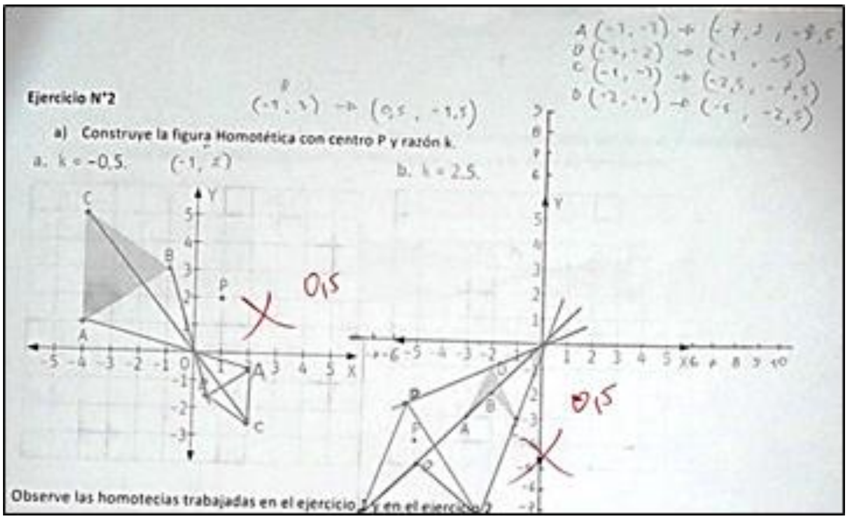
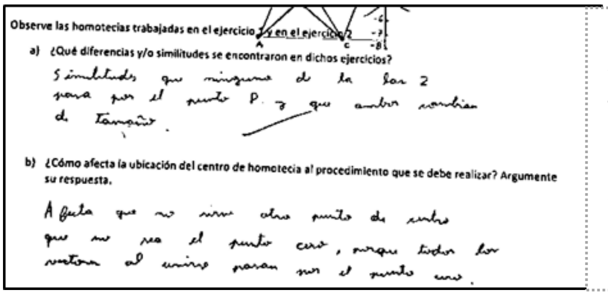


Imagen 1. Construcción de Homotecia con centro P.

Como se puede apreciar, los estudiantes replicaron el procedimiento que se realiza al construir una homotecia con centro en el origen, ignorando el punto P, siendo esto una muestra de cómo no son capaces de llevar un "método" de construcción a un contexto distinto.


Observe las homotecias trabajadas en el ejercicio 1 y en el ejercicio 2

a) ¿Qué diferencias y/o similitudes se encontraron en dichos ejercicios?

b) ¿Cómo afecta la ubicación del centro de homotecia al procedimiento que se debe realizar? Argumente su respuesta.

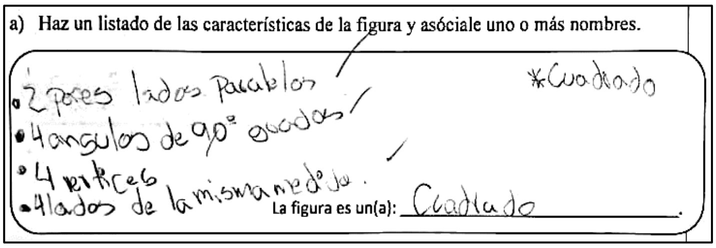
a) "Similitudes que ninguna de las dos pasa por el punto P y que ambas cambian de tamaño"

b) "Afecta que no sirve otro punto de centro que no sea el punto cero, porque todos los vectores pasan por el punto cero"

Imagen 2. Conclusiones construcción de Homotecia con centro P.

R1. Estas respuestas nos dejan claro que su razonamiento corresponde a un primer nivel, puesto que la identificación de características que realizan, son solo respecto a una construcción errónea de homotecia (Imagen 1).

R2. Una de las preguntas del test diagnóstico solicita a los estudiantes que caractericen una figura (cuadrado) y posterior a ello determinen el nombre que llevaría. Un estudiante respondió lo siguiente:


a) Haz un listado de las características de la figura y asóciale uno o más nombres.

La figura es un(a): Cuadlado

2 pares de lados paralelos

4 ángulos de 90° o rectos

4 vértices

Imagen 3. Test Diagnóstico, ítem 1

La mención de *'2 pares de lados paralelos'* que hace referencia a una propiedad, es la única característica de las mencionadas que determina que esta respuesta se encuentre en nivel dos, pues reconoce las propiedades como características de una figura, sin embargo, no deja de lado otras características de origen visual. En definitiva, sin aquella mención al paralelismo de lados, esta respuesta, habría correspondido al primer nivel.

R2 (D3). En una de las preguntas del Test Diagnostico se solicita identificar los errores de la figura 4**.**

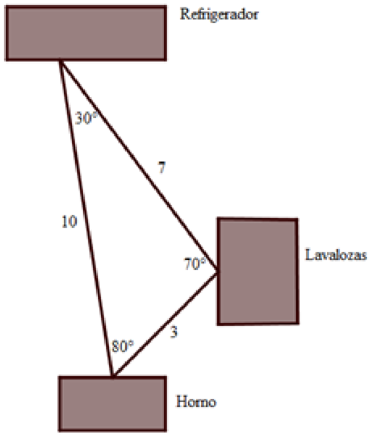
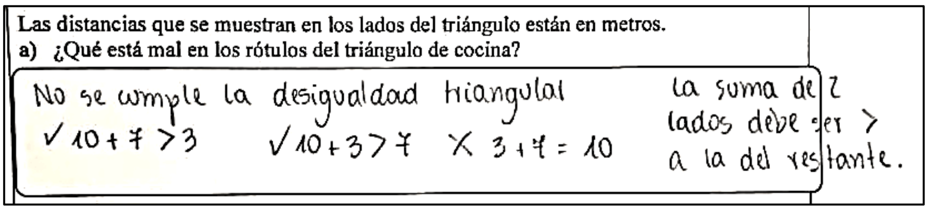


Figura 4. Triángulo de cocina.

A lo que un estudiante responde lo siguiente:



Las distancias que se muestran en los lados del triángulo están en metros.
a) ¿Qué está mal en los rótulos del triángulo de cocina?

No se cumple la desigualdad triangular
✓ 10 + 7 > 3 ✓ 10 + 3 > 7 ✗ 3 + 7 = 10
la suma de 2 lados debe ser > a la del restante.

Imagen 4. Respuesta Test Diagnóstico, ítem 5.

Según el proceso predominante en las respuestas esperadas a esta pregunta (reconocimiento) esta respuesta se considera de nivel dos, pues se menciona la propiedad que falla debido a los rótulos (desigualdad triangular). Pero si evaluamos únicamente respecto al proceso de reconocimiento, ignoramos la posibilidad de que su razonamiento sea superior en otro proceso implicado, de hecho, en esta respuesta también está presente el proceso de demostración, pues además de mencionar y describir la propiedad, el estudiante mostró, cómo es que no se cumple la propiedad mencionada, llegando a un nivel tres (**D3**) pues su procedimiento muestra una deducción lógica y correcta.

5. Discusión

5.1. Analogía con otras teorías

Se identifica que hay diferencias entre el paradigma observado en la estructura de las clases realizadas por la profesora y el que adoptan los estudiantes; quienes lejos de utilizar razonamientos basados en axiomas o lógica deductiva, se preocupaban más de las medidas inexactas que presentaban algunas figuras, a causa de eso, algunos mencionaban que "el ejercicio estaba errado".

Es interesante esta observación dado que la Geometría I, tiene características asociables al nivel 1 de Van Hiele, que recordemos, se basa en la observación, manejo tangible del objeto de trabajo e instrumentos que apoyan el desarrollo de las actividades, como regla o compás.

Desde el ámbito de las representaciones semióticas se pudieron notar dos tipos interesantes de respuestas. La primera es la que presenta dificultad para poder reproducir algún tipo de representación gráfica o geométrica y la segunda, corresponde a la existencia de diversas representaciones bien elaboradas, o a veces incompletas, que no tienen ningún razonamiento explicitado o no dan respuestas a las preguntas. Esta podría ser otra de las causas por la que los alumnos no alcanzan un razonamiento geométrico de mayor nivel, ya que en palabras de Duval (1999) *“No hay noesis sin semiosis*” (p.15).

Otro punto a destacar, es que los alumnos intentaron reproducir métodos. Esto se refleja en múltiples casos y puede ser una de las causantes que limiten su razonamiento y se adhieran a un trabajo mecánico (Imagen 1 y 2).

5.2. Resultados y sesgos en otros estudios.

Sarrín (2019) estudia en una escuela pública de Perú las rotaciones de figuras según el modelo de Van Hiele, obteniendo resultados de nivel 2 en transición al nivel 3, Fuentes,Wilches y Robles (2015) trabajan en una escuela rural de Colombia aplicando las fases de Van Hiele para revisar procesos geométricos, obteniendo un desarrollo hacia el nivel 2 y 3 con algunas respuestas de nivel 4 que no estaban presentes al inicio. Otras muestras de diagnósticos o análisis se pueden ver con Rivera y Ordaya (2018) en un documento que incluye un cuadro comparativo entre el test diagnóstico y la aplicación de fases en un estudio con un método cuantitativo obteniendo inicialmente estudiantes de secundaria en nivel 2 y posteriormente pasando a promediar sobre el nivel 3.

Este tipo de resultados son los más recurrentes en secundaria y primaria, sin embargo, se sustentan en establecimientos públicos, rurales o de bajo rendimiento. Y por tanto si bien permiten tener una idea generalizada de distintos países con respecto a la situación puntual y a la efectividad de los procesos de enseñanza sugeridos por Van Hiele, se identifica una clara inclinación a la investigación en sectores de riesgo y no al análisis en los sectores supuestamente destacados en educación.

5.3. Comparación de lo esperado para el curso y sus resultados

Los resultados que se obtuvieron de los alumnos respecto, lo que se espera por el ministerio de educación de Chile son los siguientes:

Indicadores de evaluación	Habilidades y procesos	Nivel esperado	Nivel alcanzado
•Reconocen las propiedades de la homotecia, como paralelismo, conservación del	Reconocimiento	2	2

ángulo y conservación de razones.			
•Conjeturan sobre el factor de la homotecia	Argumentación. Reconocimiento. Formulación de definiciones.	3	2
•Realizan homotecias mediante el centro y el factor dado.	Representar Uso de definiciones.	3	1 y 2
•Aplican la homotecia en modelos ópticos, como la "cámara oscura", el ojo humano y fenómenos de la Tierra y el universo.	Resolución de problemas Representación Argumentación Modelación Reconocimiento	3	2

Tabla 3. Relación Nivel esperado-Nivel alcanzado según indicadores para el contenido de Homotecia en el Curriculum Chileno.

Como se puede apreciar, en general el tipo de razonamiento que se espera alcanzar es de nivel 3, puede ser superior, pero se considera 4 como un nivel sobresaliente. Con respecto a estos indicadores se puede ver que los alumnos se encuentran desarrollando el pensamiento de nivel 2, es decir son capaces de contestar de forma incompleta o no bien estructurada respecto a las preguntas solicitadas. Este razonamiento tiene como consecuencia el no lograr utilizar bien las definiciones salvo que el alumno entienda claramente cada elemento de esta.

6. Conclusiones

Buscando cumplir con los objetivos de la investigación se han podido obtener las siguientes conclusiones:

1. Se puede apreciar que más de la mitad de los estudiantes, en la unidad de Homotecia, razonan según las características del primer nivel del modelo de Van Hiele, lo que se ve reflejado tanto en el test diagnóstico aplicado como en el transcurso de la unidad observada. Los alumnos que superaron este nivel se encuentran en un proceso de adquisición del nivel dos de Van Hiele, siendo el nivel tres un razonamiento logrado sólo en casos específicos durante el proceso.

2. Los alumnos evidenciaron la necesidad de medir y de contar con medidas exactas de las figuras propuestas, situación que demuestra el apego instrumental y físico que caracteriza a los razonamientos de bajo nivel.

3. Los alumnos no han superado los estándares del Ministerio, en primer lugar, se observó que los estudiantes no logran cumplir con todos los indicadores asociados a los objetivos de la unidad de homotecia, aquellos que cumplen con lo esperado deberían razonar según las características de un nivel 3 o superior, pero como ya se mencionó los alumnos aún se encuentran desarrollando el segundo nivel. Aún más, al revisar las habilidades

involucradas en este trayecto es posible notar que los alumnos solo consiguen un desarrollo parcial en estas, ya que no lograron ni comprender ni aplicar el concepto de homotecia en su totalidad, ni tampoco lograron cumplir con una argumentación matemática adecuada.

4. Los resultados no difieren de los que comúnmente se obtienen en la educación pública de Latinoamérica, los que usualmente se clasifican en nivel 2 y que alcanzan el nivel 3 tras procesos guiados, sin embargo, la carencia de estudios empíricos realizados en establecimientos privados y/o de alto rendimiento deja un vacío teórico respecto a la importancia de alcanzar o no un determinado nivel de razonamiento. Se pudo confirmar en este caso particular que no es necesario alcanzar altos niveles para destacar en las pruebas estandarizadas de Chile, y por ende sería conveniente expandir el espectro de investigación, pues quizá lo considerado eficiente no responde a las estructuras mentales esperadas.

Estas últimas conclusiones llevan directamente a plantear una serie de interrogantes: ¿Cómo es posible que estudiantes que obtienen resultados sobresalientes en las pruebas estandarizadas, no puedan razonar adecuadamente en geometría? ¿Por qué es posible conseguir buenos resultados sin lograr un desarrollo correcto de las habilidades? ¿Puede ser que la estructura de dichos instrumentos permita prescindir de estas capacidades? ¿Ocurre la misma situación en los establecimientos de alto rendimiento en otros países? Podría ser interesante realizar un análisis que permita identificar por qué fue posible esta situación.

Bibliografía

Beltrametti, M., Esquivel, M. y Ferrarri, E. (2005). Evolución de los niveles de pensamiento geométrico de estudiantes de profesorado en Matemática

Burger, W.F.; Shaughnessy, J.M. (1986): Characterizing the Van Hiele levels of development in geometry, Journal for Research in Mathematics Education vol. 17 n° 1, pp. 31-48.

Bloom, B. (1971), et al. Taxonomía de los objetivos de la educación: la clasificación de las metas educacionales: manuales I y II. Traducción de Marcelo Pérez Rivas; prólogo del Profesor Antonio F. Salonía. Buenos Aires: Centro Regional de Ayuda Técnica: Agencia para el Desarrollo Internacional (A.I.D).

Duval, R. (1998). Geometry from a cognitive point of view. En C. Mammana y V. Villani (eds.). Perspectives on the teaching of geometry for the 21st century. An International Commission on Mathematical Instruction (ICMI) Study [Chapter 2.2]. The Netherlands: Dordrecht, Kluwer, pp. 37-52.

Duval, R. (1999). Representation, Vision and Visualization: Cognitive functions in mathematical thinking. Basis Issues for learning. En F. Hitt y M. Santos (eds.). Proceedings of the 21st Annual Meeting North American Chapter of the International Group of PME. Cuernavaca, México. Columbus, Ohio, USA: ERIC/CSMEE Publications-The Ohio State University, pp. 3-26.

Duval, R. (1999). Semiosis y pensamiento humano: registros semióticos y aprendizajes intelectuales. Cali, Colombia: Universidad del Valle.

Fuentes Hernández, N. M., Portillo Wilches, J. C., & Robles, J. R. (2015). Desarrollo de los niveles de razonamiento geométrico según el modelo de Van Hiele y su relación con los estilos de aprendizaje. Panorama, 9(16), 44–54.

Gutiérrez, A., Jaime, A. y Fortuny, J. M. (1991). An alternative paradigm to evaluate the acquisition of the Van Hiele levels. Journal for Research in Mathematics Education, 22(3), pp. 237-251.

Gutiérrez, A.; Jaime, A. (1998). On the assessment of the Van Hiele levels of reasoning. Focus on Learning Problems in Mathematics. Special Issue Elements of Geometry in the Learning of Mathematics 20(2-3), 27-46

Isoda M. y Katagari S. (2017). Pensamiento matemático: cómo desarrollarlo en la sala de clases. Singapore. Worl Scientific Publishing. coord. de Roberto Araya; traducción de Alexis Jéldrez. LB 1501 I83P.

Jaime, A. (1993). Aportaciones a la interpretación y aplicación del Modelo de Van Hiele: La enseñanza de las isometrías en el plano. La Evaluación del nivel de razonamiento (Tesis Doctoral). Universidad de Valencia, España.

Jaime, A. y Gutiérrez, A. (1990). Una propuesta de fundamentación para la enseñanza de la geometría: El modelo de Van Hiele. En S. Llinares; M. Sánchez, (Eds.), Teoría y práctica en educación matemática. Colección Ciencias de la Educación, 4, 295-384. Sevilla, España: Alfar.

Jaime, A. y Gutiérrez, A. (1994). A model of test design to assess the Van Hiele levels [Un modelo para evaluar los niveles de Van Hiele]. En J. da Ponte & J. Matos (Eds.), Proceedings of the International Conference for the Psychology of Mathematics Education (PME-18th) [Actas de la Conferencia Internacional para la Psicología de la Educación Matemática (PME-18th)], 41- 48. Lisboa, Portugal.

Kuzniak, A. (2004). Paradigmes et espaces de travail géométriques. Note pour l'habilitation à diriger des recherches. Institute de Recherche sur l'Enseignement des Mathématiques, Université de Paris VII – Diderot.

Kuzniak, A (2006) Paradigmes et espaces de travail géométriques. Éléments d'un cadre théorique pour l'enseignement et la formation des enseignants en géométrie, Canadian Journal of Math, Science & Technology Education, 6:2, 167-187, DOI:

Palomino Rivera, A. A. ., & Berrocal Ordaya, C. . (2018). El Modelo de Van Hiele en aprendizaje de geometría en estudiantes de los PAGPA, 2017. Investigación, 26(2), 19 -.

Sarrín Suárez, M. M. (2019). Rotaciones y niveles de razonamiento, según el modelo de Van Hiele: resultados de una experiencia. Educación, 28(54), 127-158.

Van Hiele, P.M. (1986). Structure and insight. A theory of mathematics education. London: Accademic Press.

Van Hiele-Geldof (1957): De didaktik van de meetkunde in de eerste klas van het V.H.M.O. (Tesis doctoral no publicada, Univ. of Utrecht).

Vygotsky, L.M; Cole, M. (1979) Mind in society: The development of Higher Psicological proceses.

Wood, D., Bruner, J. S. y Ross, G. (1976). The role of tutoring in problem solving.Journal of Child Psychology and Psychiatry, 17, 89-100.

Autores:

Fabián Quiroga Merino: Magister en Educación, Departamento de Curriculum e Instrucción, Facultad de Educación, Universidad de Concepción. fquiroga@udec.cl

Claudio Armando Méndez Arriagada: Profesor de Matemática y Computación (Colegio Adventista de concepción, nivel medio), egresado de la Universidad de Concepción (2019), Sede Concepción, curso en innovación en la enseñanza de las Probabilidades. clmendez@udec.cl

Juan Eduardo González Canales: Profesor de Matemática y Computación (Colegio del Sagrado Corazón), egresado de la Universidad de Concepción (2019), Sede Concepción, con cursos de perfeccionamiento en Neurociencia aplicada a la Educación, Modelamiento, Lenguaje Digital e innovación en la enseñanza de las Probabilidades. juangonzalez.ed@gmail.com

Paulina Elizabeth Serrano Salas: Profesora de Matemática y Computación (Liceo Industrial de la Construcción HVL), Egresada de la Universidad de Concepción (2019) sede Concepción. pauliserranosalas@gmail.com

UNIÓN
REVISTA IBEROAMERICANA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA

ISSN: 1815-0640
Número 64. Abril 2022
Páginas 1-21

https://union.fespm.es

Estrategias de autorregulación para el aprendizaje de la matemática en estudiantes de una institución educativa departamental en Colombia.

Ivonne Daniela Amaya Ochoa, Jenny Consuelo Mahecha Escobar, Francisco Conejo Carrasco

Fecha de recepción: 20/10/2020
Fecha de aceptación: 29/12/2022

Resumen	Este articulo presenta la investigación enmarcada en autorregulación del aprendizaje de las matemáticas realizada en la Institución Educativa Fidel Cano del municipio de Tena en grado decimo durante el año lectivo 2020, el estudio posee características del enfoque metodológico mixto con el fin de identificar los procesos y estrategias de aprendizaje autorregulado que utilizan los estudiantes, cuáles privilegian y el tipo de estrategias pedagógicas que potencian su uso. Para ello, se aplicó el MSQL (Motivated Strategies for Learning Questionnaire) a 22 estudiantes y se realizaron entrevistas a 8 docentes de matemáticas y 8 estudiantes, evidenciando en el análisis que en el proceso de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas se privilegian procesos cognitivos como los de elaboración los cuales se potencian por medio de actividades prácticas, procesos metacognitivos como el establecer objetivos desarrollados gracias al control que puede llegar a tener el estudiante sobre su propio aprendizaje, que la motivación intrínseca está ligada a la utilidad del contenido matemático y estrategias pedagógicas afectivas como el reforzamiento generan seguridad al estudiante al enfrentarse a una tarea matemática. **Palabras clave**: Autorregulación del aprendizaje, estrategia pedagógica, motivación, metacognición.
Abstract	This article presents the research framed in self-regulation of mathematics learning carried out at the Fidel Cano Educational Institution in the municipality of Tena in tenth grade during the 2020 school year, the study has characteristics of the mixed methodological approach in order to identify the processes and strategies of self-regulated learning that students use, which ones they favor and the type of pedagogical strategies that promote their use. For this, the MSQL (Motivated Strategies for Learning Questionnaire) was applied to 22 students and interviews were conducted with 8 mathematics teachers and 8 students, showing in the analysis that in the process of teaching and learning mathematics, cognitive processes such as those of elaboration which are enhanced through practical activities, metacognitive processes such as establishing objectives developed thanks to the control that the student can have over their own learning, that intrinsic motivation is linked to the usefulness of mathematical

	content and pedagogical strategies affective ones such as reinforcement generate security for the student when facing a mathematical task. **Keywords**: Self-regulation of learning, pedagogical strategy, motivation.
Resumo	Este artigo apresenta a pesquisa enquadrada na autorregulação da aprendizagem matemática realizada na Instituição Educacional Fidel Cano no município de Tena na décima série durante o ano letivo de 2020, o estudo tem características da abordagem metodológica mista para identificar os processos e estratégias de aprendizagem autorregulada que os alunos utilizam, quais favorecem e o tipo de estratégias pedagógicas que promovem a sua utilização. Para isso, o MSQL (Motivated Strategies for Learning Questionnaire) foi aplicado a 22 alunos e foram realizadas entrevistas com 8 professores de matemática e 8 alunos, mostrando na análise que no processo de ensinar e aprender matemática, processos cognitivos como os de elaboração que são aprimorados por meio de atividades práticas, processos metacognitivos como estabelecer objetivos desenvolvidos graças ao controle que o aluno pode ter sobre sua própria aprendizagem, que a motivação intrínseca está ligada à utilidade do conteúdo matemático e estratégias pedagógicas afetivas como reforço geram segurança para o aluno diante de uma tarefa matemática. **Palavras-chave:** Auto-regulação da aprendizagem, estratégia pedagógica, motivação, metacognição.

1. Introducción

En el proceso de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas el identificar los procesos en los cuales los estudiantes están inmersos al momento de enfrentarse a una tarea es de gran interés, y en las últimas décadas los modelos de enseñanza han cambiado centrándose en el estudiante y todos los factores que pueden llegar a influir en su aprendizaje dejando de lado en gran medida lo que caracterizaba a la educación tradicional en donde el rol docente se limitaba a ser trasmisor del conocimiento y el estudiante un agente pasivo en el proceso. Ahora, cuando se habla de aprendizaje autorregulado o autónomo cabe resaltar que uno de los primeros autores en hablar de la enseñanza centrada en el estudiante y en este tipo de aprendizaje fue Henry Holec en 1981 (Boyadzhieva, 2016) al indicar para que los educandos inicien este proceso es necesario que cada uno se responsabilice de sus conocimientos, habilidades y conductas al momento de trabajar en una actividad específica. Conjuntamente, el aprendizaje autorregulado puede entenderse como “la facultad de tomar decisiones que permitan regular el propio aprendizaje” (Monereo, 2001, p.12) y como lo indica Pintrich (Boekaerts, Zeidner y Pintrich, 1999) es un proceso activo y constructivo en el cual los estudiantes establecen metas, monitorean, regulan y controlan su cognición, motivación, conducta y emociones teniendo como guía los objetivos de aprendizaje y los elementos del contexto.

2. Objetivos

Es importante resaltar las diferentes estrategias pedagógicas o prácticas de clase que pueden llegar a fomentar y potenciar el uso de estrategias de autorregulación del aprendizaje y es por esto que se realizó el estudio cuyo objetivo general era analizar el uso de estas estrategias en el área de matemáticas en estudiantes de décimo grado de la Institución educativa departamental Fidel Cano del municipio de Tena, un establecimiento educativo de carácter público del departamento de Cundinamarca.

3. Metodología

Con el fin de analizar el uso de estas estrategias, en principio se identificaron y describieron cada uno de los procesos de autorregulación del aprendizaje con apoyo de diferentes referentes teóricos y tomando como base investigaciones anteriores comprendiendo que los procesos o estrategias presentes en el aprendizaje autorregulado son la cognición, la motivación, la metacognicion y las afectivas, estas últimas enfocadas a la autoeficacia. Luego, con la aplicación del MSLQ (Motivated Strategies for Learning Questionnaire) se identificaron los procesos de autorregulación del aprendizaje que privilegian en el área de matemáticas los estudiantes de décimo grado, quienes al diligenciar el cuestionario siempre enfocaron sus calificaciones a lo que se realiza en dicha clase, este cuestionario consta de 81 ítems en escala Likert y fue validado en la investigación realizada por los psicólogos Burgos y Sánchez en el 2012 llamada “Adaptación y validación preliminar del cuestionario de motivación y estrategias de aprendizaje (MSLQ)” en donde se realizó una traducción del cuestionario original realizado por Pintrich (2004) revisando la redacción y la comprensión de cada ítem por parte de expertos de diferentes universidades.

Posteriormente, se realizaron entrevistas a estudiantes y docentes de matemáticas con el fin de identificar las estrategias pedagógicas o prácticas en la clase de matemáticas fomentaban y/o potenciaban procesos de autorregulación del aprendizaje como la cognición, metacognición, motivación y autoeficacia brindando a la comunidad académica una base para poder implementar ejercicios de clase que apunten a desarrollar la autonomía y la responsabilidad del aprendizaje en cada estudiante.

Con el fin de desarrollar los objetivos de investigación descritos anteriormente el enfoque metodológico utilizado fue de tipo mixto ya que para el análisis de datos se realizaron inferencias cuantitativas y cualitativas (Hernández, Fernández y Baptista, 2014). El cuestionario se aplicó a 22 estudiantes y la entrevista a 8 docentes y 8 estudiantes. Por un lado, para realizar el análisis de la aplicación del cuestionario MSLQ cada ítem se organizó según el proceso al cual se enfocaba y después se promediaron los puntajes de cada uno para con esto determinar el nivel de utilización de los procesos de autorregulación del aprendizaje de las matemáticas descritos como bajo (promedio de calificación menor a 3) promedio (promedio de calificación de 4 a 5) o alto (promedio de calificación de 5 a 7). Luego para el análisis de entrevistas a estudiantes y docentes de matemáticas se identificaron las prácticas de clase que pueden llegar a potenciar la utilización de estrategias de autorregulación del aprendizaje contrastando por medio de un análisis categorial las preguntas entre estudiantes, entre docentes y estudiantes vs docentes.

4. Autorregulación del aprendizaje

Como mayor referente teórico del estudio se tuvieron en cuenta autores como Zimmerman (Zimmerman, Kitsantas y Campillo, 2005), Monereo (2001) y Pintrich

(2004), quienes desarrollaron modelos de aprendizaje autorregulado. Por un lado Zimmerman y Pintrich se centran en analizar y mostrar las fases que lleva el proceso en los educandos y describir qué habilidades se presentan en cada una de ellas, Monereo por su parte, expone un modelo de enseñanza para el aprendizaje autorregulado que cuenta también con unas fases enfocadas al desarrollo e implementación de la estrategia y la descripción de las habilidades presentes en los diferentes momentos de una actividad.

Para Zimmerman el estudiante tiene un papel activo en su proceso de aprendizaje y define la autorregulación del aprendizaje de manera general, considerándola como un conjunto de habilidades que deben ser controladas por cada uno con el fin de auto manejar las variables contenidas en el contexto y su propio conocimiento. Además, propone que en el proceso de autorregulación del aprendizaje se tiene en cuenta factores como: la cognición, la metacognicion, la motivación, la conducta y el contexto y propone que el proceso de autorregulación del aprendizaje se da en 3 fases cíclicas: planificación, ejecución y autorreflexión (Chan y León, 2017).

Pintrich (Boekaerts, Zeidner y Pintrich, 1999) define al aprendizaje autorregulado como un proceso activo y constructivo en el cual los estudiantes establecen metas, monitorean, regulan y controlan su cognición, motivación y conducta teniendo como guía los objetivos de aprendizaje y el contexto, tal como referencia sobre este autor en Chan y León (2017) es un proceso en el cual los estudiantes dirigen sistemáticamente sus pensamientos, sentimientos y acciones hacia el logro de sus metas. Además, consideraba que el aprendizaje autorregulado se explica por medio de la cognición, la motivación y el comportamiento; procesos que pueden llegar a ser regulados por la persona y que se da en 4 fases: la cognitiva, la motivacional o emocional, la conductual y la contextual (Ruiz, 2015). En la fase cognitiva se activan los presaberes y se establecen metas, en la motivacional se tiene en cuenta los sentimientos, emociones y el auto concepto, en la fase conductual se inicia la realización de la tarea por medio del plan establecido y por último la fase contextual que hace referencia al ambiente donde se da el proceso de enseñanza y aprendizaje.

Durante la primera fase se establecen objetivos, se planifica la conducta y se activan los conocimientos que se tiene de la tarea, la persona y el contexto, en la segunda interviene la metacognición, la emoción y la conducta enfocándose en la realización de la tarea, luego en la tercera fase se aplican estrategias cognitivas y motivacionales y dependiendo de su efectividad se adaptan o cambian y por último en la fase 4 se evalúa al docente y al estudiante haciendo una reflexión sobre la tarea. Por consiguiente, se puede decir que los procesos de autorregulación del aprendizaje están correlacionados y se presentan en diferentes etapas y de manera conexa el uno con el otro.

Para Monereo (2001) cuando se trata de autorregulación del aprendizaje es necesario indagar sobre la autonomía de aprendizaje entendida como la “facultad de tomar decisiones que permitan regular el propio aprendizaje para aproximarlo a una determinada meta, en el seno de unas condiciones específicas que forman el contexto de aprendizaje” (Monereo, 2001, p.12). Este autor propone que la enseñanza para la autorregulación del aprendizaje se debe dar en 3 fases: presentación de la estrategia, practica guiada de la estrategia y practica autónoma de la estrategia (Álvarez, 2012).

En la primera fase se presentan las cuestiones y decisiones que guiaran el proceso de aprendizaje, luego se realiza una observación de la conducta (entre docente-estudiante y estudiante- estudiante) en el momento de resolver problemas complejos con el fin de identificar las estrategias que se utilizan para realizar una tarea; luego en la fase 2 el docente posee el control en la aplicación iniciando la tarea y finalmente en la fase 3 el estudiante se apropia de la estrategia y llega a tener la capacidad de autorregular su aprendizaje.

5. Procesos de autorregulación del aprendizaje

Luego de realizar una búsqueda bibliográfica sobre autorregulación del aprendizaje en el estudio realizado se tomaron en cuenta la cognición, la metacognición, la motivación y la las estrategias afectivas (autoeficacia) como los procesos a analizar ya que son aquellos que la componen, además son aquellos que pueden ser medidos por medio del cuestionario MSLQ, el cual contiene 81 ítems donde los estudiantes calificaban de 1 a 7 siendo 1 "no me describe en lo absoluto" y 7 "me describe en absoluto". En el cuestionario no se especificaba el proceso que media cada ítem por lo que se realizó una clasificación para poder obtener los promedios de calificación y así identificar el nivel de utilización de los procesos de autorregulación del aprendizaje de las matemáticas descritos como bajo (promedio de calificación menor a 3) promedio (promedio de calificación de 4 a 5) o alto (promedio de calificación de 5 a 7).

A continuación se presenta algunos referentes teóricos para contextualizar cada uno de los procesos señalados anteriormente y el análisis de los resultados obtenidos de la aplicación del cuestionario MSLQ.

5.1. Cognición

Para Sternberg (1986) la cognición se refiere netamente al aprendizaje, es decir, la cognición es aprendizaje, y es necesario diferenciar aprendizaje de instrucción, esta última se da por medio de interacciones de la persona con los demás y el contexto mientras que el aprendizaje o cognición no depende en gran parte del contexto. Por su parte, Mayer (1996), propone que la cognición es una serie de procesos mentales mientras que el aprendizaje es la adquisición de representaciones mentales.

El cuestionario aplicado permite conocer 4 estrategias que utilizan los estudiantes como: pensamiento crítico, organización, elaboración y ensayo. Donde el pensamiento crítico se refiere a la aplicación de conocimientos previos y la toma de decisiones, la organización al orden y los métodos que se utilizan para adquirir los conocimientos, la elaboración a la manera como se conectan los saberes y el ensayo a la repetición de conceptos con el fin de codificar información y los resultados se presentan en la siguiente tabla teniendo en cuenta las escalas establecidas por Burgos y Sánchez (2012). Algunos de los ítems que se identificaron se enfocaban a este proceso de autorregulación del aprendizaje son: 46. Cuando estudio para una evaluación leo en reiteradas ocasiones mis apuntes y los textos, 64. Cuando estudio relaciono el material que leo con lo que ya sé, 63. Cuando estudio para una evaluación, utilizo mis apuntes y subrayo los conceptos más importantes, 38. Cuestiono las cosas que escucho o leo en clases para decidir si son convincentes.

Escala	Sub-escala	Factor	Ítem	Promedio de puntuación
Estrategias de aprendizaje	Estrategias cognitivas y metacognitivas	Pensamiento crítico	39-46-59-72	5,01
		Organización	53-62-64-67-69-81	4,7
		Elaboración	32-42-49-63	5,03
		Ensayo	38-47-51-66-71	5,02
Promedio total				**4,9**

Tabla 1. Promedio utilización de estrategias cognitivas.

Según los factores descritos en el cuestionario se identificaron valores donde por ejemplo el pensamiento crítico obtiene un puntaje promedio de 5, lo que significa que los estudiantes hacen una conexión valiosa con los conocimientos previos, además, le dan una importancia a estos, considerando que los conocimientos en algunos casos son secuenciales y/o que los presaberes pueden ser utilizados para aprender nuevos conceptos favoreciendo a la toma decisiones; lo que de cierto modo concuerda con la mayoría de los conceptos trabajados en el currículo descrito para el área de matemáticas, donde se presenta una secuencia de saberes donde unos dependen de otros, por ejemplo en décimo grado al trabajar trigonometría es necesario tener bases en conceptos de geometría como lo son las propiedades de los triángulos en general, los cuales se refuerzan desde la primaria. Luego, las estrategias de organización tienen el puntaje más bajo entre las estrategias cognitivas con un promedio total de 4,7; lo que significa que los estudiantes utilizan algunos métodos de estudio como subrayar o mirar sus apuntes, pero no consideran que esto tengan una implicación importante en la adquisición de conocimientos y son poco utilizadas, pero estas estrategias cognitivas están sujetas a la presentación de evaluaciones lo que también lleva a deducir que los estudiantes utilizan las estrategias cognitivas de organización si están dirigidas en pro de una calificación y aunque los estudiantes no utilicen o no le den importancia a estas estrategias para Weintein y Mayer (1986) son precisamente las facilitan el trabajo ya que les permite analizar cierta tarea bajo diferentes perspectivas y así tener la posibilidad de decidir cuál es la más conveniente.

Por otro lado, las estrategias de elaboración son las que tienen un promedio mayor de utilización dentro de las estrategias cognitivas identificadas por los estudiantes con un puntaje de 5,03; por tanto son las que privilegian en su utilización, pero tienen casi una misma relevancia que las demás aunque se les facilite mejor su utilización. Este tipo de estrategias se refiere a los métodos que utilizan los estudiantes para realizar conexiones entre los presaberes y los aprendizajes a desarrollar, de este modo los estudiantes consideran importante el relacionar material anterior de la clase de matemáticas y de otras áreas para realizar las actividades propuestas o estudiar para las evaluaciones por medio de resúmenes o asociaciones, y además el uso de lecturas en la clase de matemáticas donde se dé una entrada al tema o se evidencie el desarrollo histórico de los contenidos matemáticos puede ser de gran ayuda para fortalecer estas conexiones.

Ahora, las estrategias de ensayo obtuvieron un puntaje promedio cercano al anterior con 5,02 indicando que los estudiantes también utilizan este tipo de métodos para adquirir conocimientos matemáticos los cuales están fundamentados en la repetición, lo que ayuda a que memoricen palabras, formulas, conceptos o propiedades por medio de la lectura reiterativa de estas, pero se identificó que el realizar listas u organizar alguna información con el fin de aprenderlo tiene relación con el uso de estrategias de organización, las cuales son las menos utilizadas por los estudiantes, así que los estudiantes consideran importante por ejemplo el revisar sus apuntes varias veces para poder aprender diferentes conceptos pero se les dificulta el organizar alguna información con el fin de memorizarlo por medio de la repetición.

5.2. Metacognición

La metacognición se considera como un estado de conciencia hacia los procesos mentales inmersos en el desarrollo de una tarea, además de la conciencia para controlar las acciones y conocimientos (Peñalosa, Landa y Vega, 2006). Para Lanz (2006) la metacognición tiene relación con "percibir, comprender, aprender, recordar y pensar todo lo que se ha aprendido", y según Shunk (2012) es el control consiente y deliberado de la actividad cognitiva de uno mismo y deriva dos grupos de habilidades: el saber el tipo de estrategias y recursos que se necesitan al momento de realizar una tarea y el saber cómo y cuándo utilizar las diferentes habilidades y estrategias para terminar la tarea de manera exitosa.

El cuestionario aborda la autorregulación metacognitiva identificando procesos como la planificación, la supervisión y la regulación. Estos procesos describen habilidades donde se plantean objetivos y se revisan las tareas a realizar con anterioridad, se cuestiona su propio conocimiento y los métodos utilizados para aprender para con esto decidir si se debe hacer una reestructuración de dichos métodos con el fin de tener mejores resultados al adquirir y aplicar los conocimientos y los resultados se presentan en la siguiente tabla teniendo las escalas establecidas por Burgos y Sánchez (2012) pero el cuestionario no separa los procesos presentes en el factor autorregulación metacognitiva por lo que fue necesario identificar cuáles eran los ítems dirigidos a la planificación, a la supervisión y a la regulación. Como ejemplo de algunos de estos ítems se tiene: 61. Cuando estudio, pienso profundamente en un aspecto y decido qué es lo que debo leer, más que leerlo todo, 55. Me hago preguntas para asegurarme que entendí el material que he estado viendo en clase y 79. Si me confundo al tomar apuntes en clase, me aseguro de aclarar las dudas después.

Escala	Sub-escala	Factor	Procesos	Ítem	Promedio de puntuación
Estrategias de aprendizaje	Estrategias cognitivas y metacognitivas	Autorregulación metacognitiva	Planificación	54-61-78	4,53
			Supervisión	33-36-55-57-76	4,82
			Regulación	41-44-56-79	5,27
	Promedio total				**4,88**

Tabla 2. Promedio utilización de estrategias metacognitivas.

Como se puede observar los promedios van bajando desde el primer proceso que es el de planificación que dista del de regulación por casi una unidad con un puntaje promedio de 4,53, significando que los estudiantes al abordar una tarea en algunas ocasiones establecen objetivos de aprendizaje, analizan las tareas revisando los posibles métodos de solución para con esto tener una mejor organización y comprensión, pero se identificó que estas actividades de planificación están sujetas a implementarse si hay una evaluación; controlando consiente y deliberadamente la actividad cognitiva para estudiar por una calificación y por tanto estando sujeta a un estímulo.

Luego, los procesos de supervisión obtienen un puntaje promedio de 4,8 por lo que los estudiantes consideran vigilar como adquieren de sus conocimientos por medio de preguntas que se hacen al momento de estudiar y al cuestionarse que tanto han comprendido de una tarea, por lo que se puede decir que para los estudiantes la autoevaluación les permite ser más conscientes de su manera de aprender ubicándose en la fase 2 según el modelo Pintrich (Boekaerts, Zeidner y Pintrich, 1999) ya que llegan a monitorear su aprendizaje y precisamente autoevaluando pueden llegan a modificar las actividades cognitivas, por lo que se plantea necesario establecer actividades de clase donde se tenga en cuenta esta autoevaluación teniendo en cuenta que se debe fomentar un método consiente, reflexivo y objetivo de las maneras de aprender y de enfrentar una tarea.

Por otro lado, los procesos de regulación obtienen el puntaje promedio mayor entre todos con 5,27 indicando que los estudiantes tienen habilidades significativas para ajustar sus actividades cognitivas según lo requiera la tarea o según si se debe rectificar o corregir la conducta durante la realización de una actividad. Por consiguiente, los estudiantes utilizan estrategias que les ayudan a controlar o regular la adquisición de conocimientos y en caso tal de tener que reestructurar la manera de abordar una temática lo hacen convenientemente para alcanzar los objetivos de la actividad propuesta durante la clase pero de nuevo la evaluación es un factor que puede llegar a condicionar la utilización de estas habilidades ya que aquellos ítems que están enfocados a la presentación de exámenes son los que tuvieron mayor puntaje.

5.3. Motivación

Como se cita en Ospina (2006, p.158) para Woolfolk “la motivación se define usualmente como algo que energiza y dirige la conducta” y se determinan tipos de motivaciones como lo son las internas, las externas, las positivas y las negativas. Las positivas se refieren a la motivación hacia un objetivo mientras que las negativas intentan evitar un castigo o daño siendo así las motivaciones externas provenientes de estímulos que tiene como fin una recompensa las que no persisten y las intrínsecas al ser internan son sostenibles.

Carrillo, Padilla, Rosero y Villagómez (2009) exponen que la motivación intrínseca es generada a partir del propio individuo y su objetivo es llegar a la autorrealización al momento de lograr metas, es realizada por el deseo y el interés de hacerla y como se cita en Lanz (2006) Bruner expone tres tipos de motivación intrínseca: De curiosidad, competencia y reciprocidad, las cuales se refieren respectivamente a la exploración, el control del ambiente y a la conciencia de la situación en sí.

Por otro lado, la motivación extrínseca se da de manera externa, a partir de estímulos como lo son las recompensas, el reconocimiento, las notas o el afecto y se determinan cuatro formas de motivación extrínseca; la regulación externa, donde las acciones está guiada para satisfacer una demanda, la regulación introyectada, cuando se presenta presión y así conseguir aprobación, la regulación identificada donde se realiza una acción que puede o no generar gusto pero se le da la relevancia necesaria y por último la regulación integrada donde se toma conciencia tanto de la conducta como del valor de la realización de cierta tarea (Camposeco, 2012).

En lo que respecta a la motivación para el aprendizaje de las matemáticas pueden considerarse aspectos como el tipo de metas que tiene el estudiante versus las que tiene el docente y la comunidad, la autoeficacia, el uso adecuado, significativo y puntual de estrategias de aprendizaje, las creencias y expectativas, el contexto, la práctica docente y el ambiente motivacional (Álvarez y Martin, 2015).

El cuestionario identifica 3 componentes los cuales son el de valoración, el afectivo y el de expectativas de éxito, este último se separó para ser desarrollado en la subcategoría de autoeficacia y algunos ítems que describen estos dos primeros componentes son: 22. Lo que más me satisface en clases es comprender los contenidos lo más profundamente posible, 11. En estos momentos, lo más importante para mi es obtener buenas notas para mejorar mi promedio, 26. Me gusta el contenido del curso, 4. Lo que aprendo en una clase lo podré utilizar en otras y 14. Cuando presento exámenes, pienso en las consecuencias de mi fracaso.

En el componente de la valoración se consideran el valor de la tarea, la orientación de la meta extrínseca e intrínseca y en la tabla a continuación se muestran los puntajes promedio teniendo en cuenta las escalas establecidas por Burgos y Sánchez (2012).

Escala	Sub-escala	Factor	Ítem	Promedio de puntuación
Motivación	Valoración	Orientación a la meta intrínseca	1-16-22-24	5,39
		Orientación a la meta extrínseca	7-11-13-30	5,86
		Valor de la tarea	4-10-17-23-26-27	6,28
	Componente Afectivo	Prueba de ansiedad	3-8-14-19-28	3,6
Promedio total				**5,28**

Tabla 3. Promedio utilización de estrategias motivacionales.

El factor valor de la tarea se refiere a la percepción que tienen los estudiantes sobre las tareas académicas obteniendo un puntaje promedio alto con 6,28 lo que indica que para los estudiantes lo interesante y provechoso del contenido de las clases es un factor que influye directamente en su motivación al aprender algún contenido matemático. Algunos de los ítems permiten identificar que para los estudiantes es más interés el contenido de la clase de matemáticas si este tiene alguna utilidad, bien sea si este se puede aplicar las demás áreas o que tengan alguna utilidad en su desarrollo personal por aprender.

Por medio del factor orientación de meta extrínseca se consideran los estímulos los cuales obtuvieron un puntaje promedio de 5,86 y contrastando con lo establecido por Camposeco(2012) se identificaron tres formas de motivación: la regulación externa, la regulación identificada y la regulación introyectada, la primera cuando los estudiantes le dan la importancia a obtener buenas notas con el fin de subir su promedio, la segunda cuando al estudiante le satisface obtener buenas notas y la tercera cuando para los estudiantes el reconocimiento de sus compañeros es muy importante al obtenerlo bien sea por su desempeño durante la clase o por sus notas. Teniendo en cuenta esta última se encontró que cuando se refiere a la obtención de mejores notas en comparación a las de sus compañeros tiene mayor importancia que el reconocimiento de sí mismos respecto a sus habilidades teniendo una diferencia significativa entre ambas percepciones por lo que se evidencia que la competitividad al obtener notas es un elemento motivador.

Por otra parte, el factor orientación de la meta intrínseca identifica los estímulos internos con un promedio de 5,39 identificando así que los estudiantes consideran un elemento movilizador profundizar los contenidos ya que el ítem que mayor puntaje obtuvo en promedio fue aquel que estaba dirigido a la satisfacción que siente el estudiante al trabajar los contenidos lo más profundo posible y en algunas ocasiones en la escuela por diferentes causas esto no ocurre, bien sea por cumplir los contenidos del currículo o por perdida de clase, pero algo que puede llegar a motivar a los estudiantes es aprender diferentes perspectivas de una temática, como lo es la revisión del desarrollo histórico de la temática, diferentes métodos de solución o aplicación de los contenidos matemáticos en algo practico o del contexto como por ejemplo el trabajo de campo de medición, ángulos de elevación y depresión aplicado a resolución de triángulos con razones trigonométricas, problemas relacionados con construcciones de edificios y la aplicación en las demás áreas.

Por último, dentro del componente afectivo se tiene en cuenta la prueba de ansiedad con una puntuación promedio de 3,6 y aunque está cercano a estar en un nivel bajo esto se toma como una variable movilizadora (Pintrich, 2004) pero algunos de los ítems tuvieron puntajes elevados indicando que hay afectaciones en la motivación de los estudiantes de manera negativa respecto a sus sentimientos y pensamientos sobre todo al momento de presentar un examen hallan estudiado o no por lo que los resultados de los exámenes pueden llegar a desmotivar. Por otro lado, uno de los ítems que tuvo un menor puntaje considerándose como positivo y teniendo repercusiones favorables en la motivación fue aquel que se refería a lo que siente el estudiante de sí mismo durante los exámenes ya que en éste se especifica si él piensa sobre las consecuencias de su fracaso, lo que indica que para los estudiantes presenta mayor ansiedad el hecho de ser comparado con sus compañeros en tanto a sus resultados que sus propias percepciones afectando negativamente su motivación y por tanto presentando dificultades para enfrentar una tarea y mantener su conducta según el nivel de exigencia de la misma.

5.4. Autoeficacia

El concepto de autoeficacia nace conceptualmente de la Teoría Cognitiva Social en donde Bandura concibe la autoeficacia como “juicios de cada individuo sobre sus capacidades, en base a los cuales organizará y ejecutará sus actos que le permitan alcanzar el rendimiento deseado” (Alarcón, 2016, p. 55) teniendo una implicación en la motivación puesto que hay una relación directa entre lo que las personas hacen, sienten y piensan y la percepción que tiene la persona sobre si misma con la motivación en pro del desarrollo de procesos autorregulados del aprendizaje. Mientras que para Zimmerman, Kitsantas y Campillo (2005) la autoeficacia es el conjunto de creencias que el sujeto posee sobre su capacidad para aprender o dar un rendimiento efectivo y si es fundamental para desarrollar procesos autorreguladores del aprendizaje teniendo en cuenta funciones como el establecimiento de metas, la auto supervisión, el uso de estrategias metacognitivas, la autoevaluación y las autor relaciones (Alarcón, 2016).

Ahora, la autoeficacia académica, se determina por las creencias propias sobre la capacidad para aprender o tener un buen rendimiento académico y estas tienen una implicación importante en la motivación académica al tener relación con la motivación intrínseca, las metas académicas y la expectativa ante los resultados. Aparte de ello los estudiantes considerados con un nivel alto de autoeficacia son más persistentes, lo que conlleva a que afronten con más compromiso tareas difíciles y sean menos influidos por emociones como la ansiedad (Fernando y Bernardo, 2011). Por otro lado, la autoeficacia reguladora también se refiere a las creencias sobre la capacidad, pero en este caso se tiene en cuenta la capacidad de utilizar estrategias de control autónomo del proceso de aprendizaje como el establecimiento de metas, la planificación, la autoevaluación etc.

Para Bandura, ya de manera más específica la autoeficacia matemática hace referencia a las creencias o pronósticos que hacen las personas sobre su desempeño en tareas realizaran de índole matemático (Aranda, 2017) y las variables que influyen en mayor medida son las experiencias previas y las percepciones en tanto a sus capacidades y uso de estrategias en matemáticas.

Dentro de este proceso de autorregulación del aprendizaje se pueden encontrar ítems como: 2. Al estudiar de manera adecuada, aprenderé los contenidos de los cursos, 18. Al esforzarme lo suficiente, entenderé los contenidos de la clase, 12. Confió en que entenderé los conceptos básicos enseñados en clases y 31. Confió en que tendré éxito en las clases, incluso en aquellas de mayor dificultad.

Escala	Sub-escala	Factor	Ítem	Promedio de puntuación
Motivación	Componente de expectativas (se éxito)	Creencias de control sobre el aprendizaje	2-9-18-25	5,7
		Autoeficacia	5-6-12-15-20-21-29-31	5,6
Promedio total				**5,67**

Tabla 4. Promedio componente de expectativas.

Teniendo en cuenta que el factor de autoeficacia obtuvo un puntaje de 5,6 se puede decir que los estudiantes tienen una percepción positiva de sus capacidades antes de realizar una tarea matemática y además confían en sus habilidades las cuales llevan a que la terminen de manera efectiva lo que contribuye en cierto modo para que realicen las actividades de aprendizaje de una manera más confiada y por tanto alcancen las metas de aprendizaje, pero gracias al análisis de algunos ítems se identificó que los estudiantes confían en que entenderán los conceptos básicos de las clases más que los difíciles y por tanto es importante considerar que las percepciones que tienen los estudiantes de sí mismos están sujetas a la dificultad que tiene la tarea, pero en realidad deberían estar seguros de sus habilidades independientemente de si la tarea es difícil o por otro lado se debe cambiar la idea de que hay tipos de tareas y mejor encaminar a los estudiantes a pensar que tienes las capacidades suficientes para afrontar todo tipo de tarea de aprendizaje.

Por su lado, el factor de creencias de control sobre el aprendizaje al obtener un puntaje promedio de 5,70 significa que los estudiantes comprenden que el esfuerzo y los resultados son variables directamente proporcionales ya que siempre y cuando haya un esfuerzo significativo en la realización de una tarea mejor serán los resultados sin tener en cuenta la dificultad de la misma lo que puede mejorar su nivel de autoeficacia.

Debido a que esta sub-escala del cuestionario obtuvo un puntaje promedio total de 5,67 los estudiantes se encuentran en un nivel medio cercano al alto se puede inferir que tienen percepciones positivas de sus habilidades y decisiones al momento de realizar una tarea, creen y confían en sus conocimientos y además están conscientes que a medida que el esfuerzo empleado por aprender sea mayor puede tener resultados buenos y esto los hace sentir aún más confiados de la manera como desarrollan las actividades.

6. Estrategias pedagógicas que potencian el aprendizaje autorregulado

Por medio del análisis de entrevistas a estudiantes y docentes se identificaron el tipo de prácticas o estrategias pedagógicas que pueden potenciar el uso de procesos de autorregulación del aprendizaje y con apoyo de una matriz de categorización se organizaron los resultados en las tablas que se presentan exponiendo el tipo de estrategia y la cantidad de estudiantes y docentes que coincidieron con dicha estrategia como método que fomenta la autorregulación del aprendizaje.

6.1. Estrategias que potencian habilidades cognitivas

Las preguntas realizadas a estudiantes y docentes apuntaban a identificar el tipo de actividades propuestas, metodología de enseñanza y las estrategias que favorecen la adquisición de conocimiento como por ejemplo: ¿Crees que los contenidos de las clases de matemáticas se pueden relacionar entre sí y con las demás áreas? ¿Lo consideras necesario? ¿Por qué? (para estudiantes) y ¿Qué tipo de estrategias pedagógicas crees que tienen mayor impacto al momento de aprender matemáticas, las prácticas o las memorísticas? ¿Por qué? (para docentes)

<table>
<tr><th>Participantes</th><th>Tipo de estrategia</th></tr>
<tr><td>Ningún estudiante</td><td rowspan="2">Estrategias de repetición o memorísticas
El método que utiliza el docente para asegurarse que los estudiantes adquirieran los conocimientos es por medio de la repetición de algoritmos y aplicación de fórmulas en ejercicios cuya habilidad está sustentada en codificar información y aplicarla el ejercicio del mismo tipo.</td></tr>
<tr><td>D_1</td></tr>
<tr><td>E_1, E_2, E_3, E_4, E_5, E_6 E_7, E_8</td><td>Estrategias de tipo práctico
La manera que facilita la adquisición de conocimientos por parte de los estudiantes es la aplicación de los conceptos en situaciones que pueden no ser propias de las</td></tr>
</table>

	matemáticas como problemas de aplicación de contenidos matemáticos en la vida diaria, laboratorios a campo abierto donde prevalece la experimentación.
D_1, D_2, D_5, D_6, D_7	
E_1, E_2, E_3, E_4, E_5, E_6, E_8	**Estrategias de transversalidad** Actividades de clase donde se establezca y potencie la relación y aplicación de las matemáticas en diferentes áreas del conocimiento como realizar actividades que involucren otras áreas de aprendizaje como en física o química y que ayuden al aprendizaje de estas, o donde se observe la aplicación de las matemáticas en diferentes contextos profesionales como en la construcción, la ingeniería, la medicina o la agricultura que es lo más cercano al grupo poblacional.
D_1, D_2, D_3, D_4, D_5, D_6, D_7	
E_1, E_3, E_4, E_5, E_8	***Resolución de problemas*** Las actividades en la clase de matemáticas que fomentan la participación y el pensamiento crítico en los estudiantes son aquellas que van más allá de la aplicación de una algoritmo o de seguir unos pasos y aquellas donde el estudiante debe aplicar el contenido matemático para resolver problemas de aplicación, donde deban decidir por sí mismos como abordar cada tarea, problemas donde se involucre su contexto y/o realidad, trabajos de lógica o pensamiento lógico, calendarios matemáticos, películas con contenido matemático y con esto hacer un debate, participación simultánea en el tablero y trabajo colaborativo
D_1, D_2, D_3, D_4, D_6	
E_1, E_3, E_4, E_5, E_8	**Resolución constante de inquietudes** Prácticas pedagógicas y actividades que permitan que el estudiante participe activamente en la clase con la seguridad de ser escuchado atentamente y sean solucionadas sus dudas. Por ejemplo, al iniciar la explicación del tema que tanto el docente como los estudiantes realicen preguntas indagando aspectos importantes del tema. Por otro lado, los estudiantes hacen énfasis que el hecho que la docente esté dispuesta a resolver sus dudas sin importar si ya se hizo la explicación o busca diferentes maneras para explicar a cada uno y si es necesario se hace explicación individual.
Ningún Docente	

Tabla 5. Estrategias pedagógicas que potencian las habilidades cognitivas**.**

Las estrategias como actividades de tipo práctico como laboratorios a campo abierto o aplicaciones de la matemática en diferentes contextos o en la vida son las que aportan en mayor medida al aprendizaje de los contenidos matemáticos, este tipo de estrategias son descritas por Weintein y Mayer (1986) como de ensayo para tareas complejas de aprendizaje ya que tienden a trascender a la aplicación permitiendo o exigiendo un análisis más profundo.

Asimismo, las actividades que fomentan la participación y el pensamiento crítico en los estudiantes según los docentes son las estrategias de personalización y creatividad (Gargallo, Suarez y Pérez, 2009), donde el estudiante es responsable de su aprendizaje, tome decisiones, se involucre resolución de problemas y se presente un reto en su desarrollo y según los estudiantes son las estrategias de búsqueda, recogida y selección de información (Gargallo, Suarez y Pérez,2009) ya que al presentarse varios ejemplos en la explicación de la clase o se propone resolución de problemas llegan a participar o a realizar cuestionamientos de los contenidos matemáticos en la clase, dándole también la posibilidad de expresar sus inquietudes y estas sean respondidas, lo que tiene implicaciones importantes para los estudiantes ya que la mayoría enfatiza que el hecho de que halla la posibilidad de preguntar varias veces y sin restricción alguna es algo que les permite comprender mejor los temas.

Por último, las estrategias pedagógicas transversales al permitir la relación de diferentes áreas del conocimientos pueden facilitar el aprendizaje de las matemáticas ya que al relacionar los temas entre sí para coherencia en cada tema y con las demás áreas se adquieren mejor los conceptos en las clases de matemáticas lo que para Gargallo, Suarez y Pérez (2009) son estrategias de recuperación, de transferencia y de uso. Con ello se puede concluir que las metodologías de enseñanza y actividades propuestas deben apuntar a permeabilizar todas las áreas del conocimiento con el fin de generar conocimientos matemáticos más sólidos.

6.2. Estrategias pedagógicas que potencian habilidades metacognitivas

Bajo esta perspectiva las preguntas apuntaban a identificar cuáles son las estrategias o actividades que influyen en cómo aprenden los estudiantes y cómo son conscientes del proceso de aprendizaje reconociendo qué, cuándo y cómo se les facilita adquirir los conocimientos. Algunas de las preguntas realizadas fueron: ¿Qué métodos de evaluación crees que aportan a tu aprendizaje de las matemáticas? (para estudiantes) y ¿Crees que hay algún orden específico en el desarrollo de la clase de matemáticas que ayude para que los estudiantes comprendan al máximo las temáticas? ¿Cuál sería ese orden? (para docentes).

Participantes	Tipo de estrategia metacognitiva
E_3, E_4, E_5, E_6 E_7, E_8	**Estrategias que fomentan autonomía y retroalimentación** El estudiante tiene el control de su proceso de aprendizaje y es consciente de su manera de aprender de manera efectiva, los docentes utilizan el método inductivo a partir de una actividad lúdica-sensorial y luego que los estudiantes por medio de la exploración construyan el concepto matemático para luego aplicarlo. Además, los estudiantes consideran importante la retroalimentación durante la realización de actividades por parte del docente y en el proceso evaluativo, el cual debe hacerse contantemente y en caso tal de ser una evaluación sumativa consideran que son mejores los quiz o exámenes cortos ya que se evalúa lo trabajado en clase.
D_5, D_7, D_8	
Ningún estudiante	**Estrategias guiadas** El docente es el guía de las actividades y quien propone las pautas de realización y evaluación de la misma.
D_1	
E_1, E_3, E_4, E_5, E_6, E_7, E_8	**Estrategias de organización/ planificación** El proceso de enseñanza y aprendizaje tiene en cuenta una planificación que en general puede establecerse como planteamiento de objetivos, feedback o conceptos previos, ejecución de la actividad, evaluación y retroalimentación.
D_1, D_4	
E_1, E_2, E_3, E_4, E_6, E_7, E_8	**Estrategias de organización/ evaluación** Tanto estudiantes como docentes consideran que el método de evaluación que aporta al aprendizaje de las matemáticas debe tener características de tipo formativo. Se debe realizar retroalimentación de las actividades, evaluaciones formales e informales constantemente y se debe tener en cuenta la heteroevaluación y la coevaluación Evaluar habilidades cognitivas, procedimentales y actitudinales es muy importante para los estudiantes.
D_2, D_4, D_7, D_8	

Tabla 6. Estrategias pedagógicas que potencian las habilidades metacognitivas**.**

Las estrategias de autocontrol (Gargallo, Suarez y Pérez, 2009) permiten que el estudiante indague y construya los contenidos matemáticos y los docentes indican que es precisamente el método inductivo el que tiene mayor impacto ya que los estudiantes por medio de la exploración generan su propio conocimiento teniendo una idea mental propia de cada concepto construyendo sus propias ideas y siendo así más tangible y propio su aprendizaje.

Por último, se identificó si puede haber algún orden en el desarrollo de la clase de matemáticas que ayude para que los estudiantes comprendan al máximo las temáticas y algunos docentes expresaron consideraciones similares al con las 3 fases planteadas por Monereo para que el aprendizaje sea autorregulado las cuales son: presentación de la estrategia, practica guiada de la estrategia y practica autónoma de la estrategia planteada (Álvarez, 2012). Mientras que para los estudiantes la organización tiene características del modelo planteado por Pintrich (2000) en donde intervienen aspectos cognitivos, motivacionales, conductuales y del contexto.

6.3. Estrategias pedagógicas motivacionales

Por medio de las preguntas se analizó qué prácticas pedagógicas y actividades mantienen la disposición e interés en los estudiantes, además, descubrir cuál es la mayor motivación que tienen los estudiantes por aprender los contenidos de la clase de matemáticas. Algunas de estas preguntas fueron: ¿Cuáles estrategias en el desarrollo de la clase de matemáticas hacen que tú estés más dispuesto e interesado en aprender?, ¿Cuál es tu mayor motivación al aprender el contenido de la clase de matemáticas? (para estudiantes) y ¿Qué tipo de estrategias pedagógicas has notado que mantienen a los estudiantes más dispuestos e interesado en aprender? (para docentes).

Participantes	Tipo de estrategia motivacional
E_1, E_2, E_6, E_7	**Estrategias de disposición** Estrategias que mantienen al estudiante dispuesto como las que promueven el trabajo cooperativo, el aprendizaje significativo se regula la motivación, el contexto, los recursos y el tiempo.
D_1, D_3, D_6	Realizar actividades en grupo bien sea para realizar talleres o para preparar una exposición, tareas donde se involucre el contexto y puedan aplicar los temas en su realidad o lo que los rodea y el método de solución sea aplicado, y además tareas donde se utilicen elementos tecnológicos e innovadores.
E_1, E_5, E_6, E_7	**Estrategias de tipo extrínseco** Actividades donde se evidencie la aplicación de las temáticas trabajadas en clase, que promuevan trabajo colaborativo como realizar talleres que deben entregar de forma individual, pero tiene la posibilidad de trabajar con sus compañeros para resolver dudas. Actividades sujetas a una calificación y/o aprobación del área como talleres, ensayos, quiz, evaluación escrita cuyo puntaje ira a la planilla de notas.
D_1, D_2, D_4, D_5, D_6	La metodología de obtener cierta cantidad de firmas por la realización de ejercicios, por ejemplo, que en la clase por una actividad se asigne cierto número de "firmas" o puntos y que los estudiantes obtengan una la cantidad proporcional según el trabajo realizado durante la clase.
E_2, E_3, E_4, E_8	**Estrategias de tipo intrínseco** Estrategias que promueven el interés por aprender, como la aplicación de los temas en la vida cotidiana y en la realidad del estudiante o aplicación de las matemáticas en temas innovadores y que hagan parte de la ciencia y la tecnología actual. Las actividades que no requieran solamente cálculos, como problemas de lógica, abordar el desarrollo histórico de la temática, utilizar mapas conceptuales y explicaciones por parte del docente más cercanas al estudiante, de tal modo que su primer acercamiento a la matemática sea de manera informal y posteriormente llegar a formalizar conceptos, procesos matemáticos.

D_3	Los docentes concientizar a los estudiantes sobre la importancia que tiene el aprendizaje de las matemáticas en su vida. Los estudiantes reconocen la utilidad de las matemáticas ya que los ayuda en su diario vivir y en su proyecto de vida no solo académica.

Tabla 7. Estrategias pedagógicas motivacionales.

Las estrategias denominadas por Gargallo, Suarez y Pérez (2009) como afectivas, de disposición y de apoyo de tipo intrínseco son las que mantienen la disposición en los estudiantes, para los docentes las actividades que promueven el aprendizaje significativo, el trabajo cooperativo, actividades que generan retos, de desarrollo investigativo y donde los estudiantes sean parte del proceso y para los estudiantes en específico lo que moviliza su aprendizaje es lo competente que se siente y precisamente los sentimientos de seguridad que el contexto le ofrece. Por otro lado, las estrategias de tipo extrínseco como la valoración constante de actividades por medio de puntos o firmas según el trabajo realizado genera satisfacción para los estudiantes al ser reconocido todo el trabajo realizado y no solamente resumir todo en un examen, siendo así más importante para ellos la valoración del proceso y de su trabajo real en cada clase que el reflejado en un examen final.

Las estrategias de regulación integrada (Camposeco, 2012) donde se toma conciencia tanto de la conducta como del valor de la realización de cierta tarea al realizar un taller donde se apliquen los conocimientos matemáticos pero aplicados al contexto genera un estímulo positivo en los estudiantes y son actividades que generan interés por aprender, siendo así los contenidos de la clase útiles y provechosos lo que concuerda con darle importancia al valor a la tarea y un rol importante a los estímulos extrínsecos. Mientras que, para todos los docentes entrevistados la mayor motivación de los estudiantes por aprender es de tipo extrínseco y bajo regulación identificada (Camposeco, 2012) ya que es obtener una nota y aprobar la materia lo que llega a motivarlos y concuerda para la mitad de los estudiantes quienes tienen la misma percepción, cuya motivación es bajo regulación integrada (Camposeco, 2012) porque el aprender los contenidos puede ser útil en su vida diaria y proyecto de vida académica cuando aspiren a cursar una carrera universitaria.

6.4. Estrategias pedagógicas afectivas

Por último, se analizó el tipo estrategias pedagógicas que influyen en las percepciones que tiene el estudiante sobre sí mismo, sus habilidades en matemáticas y que puede hacerlo sentir seguro o inseguro al afrontar alguna tarea matemática y para ello se realizaron preguntas como: ¿Consideras que eres hábil en matemáticas? ¿Qué estrategias utilizadas por el docente en el desarrollo de la clase han aportado para que creas esto?, ¿Te has sentido inseguro en clase de matemáticas? ¿Por qué y en qué momentos? (para estudiantes) y ¿Qué crees que influye en la creencia que tienen algunos estudiantes de ser “malos en matemáticas”? (para docentes).

<table>
<tr><th>Participantes</th><th>Tipo de estrategias afectivas</th></tr>
<tr><td>E_1, E_2, E_3, E_4, E_5, E_6, E_7, E_8</td><td rowspan="2">Estrategias de ejecución con seguridad
Estrategias que permiten que el estudiante realice las actividades de manera más confiada como las que permiten participación y retroalimentación.
Los docentes proponen actividades donde se haga análisis de ejemplos y contraejemplos, enseñar a través del análisis de los errores y dificultades de cada uno. Buscar espacios de participación y de afirmación, es decir, afirmar a la persona cuando está hablando y que cuando se equivoque no reprochar sus errores.
Los estudiantes consideran que cuando el docente utiliza varios ejemplos y aplicaciones de los temas se sienten más seguros de realizar las actividades por tanto en las explicaciones o trabajos realizados por ellos entre más ejercicios halla es mucho mejor, además la confianza y conocimiento que le brinda el docente para exponer sus puntos de vista e inquietudes también aporta a ello.</td></tr>
<tr><td>D_3, D_5</td></tr>
<tr><td>E_1, E_2, E_3, E_4, E_5, E_6, E_7</td><td rowspan="2">Estrategias afectivas/ interacciones
Estrategias que fomentan la confianza de los estudiantes sobre sus habilidades.
Según los estudiantes cuando los docentes responden dudas sin juzgar sus dificultades y están dispuestos a explicar cordialmente esto genera confianza en sus habilidades y se disponen a realizar las actividades así se hayan equivocado.
Los estudiantes creen importante que los docentes les digan constantemente lo hábiles que son, les den mensajes de apoyo y les digan que creen en ellos.</td></tr>
<tr><td>D_5</td></tr>
</table>

Tabla 8. Estrategias pedagógicas afectivas (autoeficacia).

En primera instancia, los docentes consideran que si las percepciones de los estudiantes sobre sus habilidades son positivas esto tiene implicaciones significativas en su aprendizaje lo cual se logra por medio de la motivación, de la elección apropiada de actividades y además teniendo un lenguaje adecuado que acerque a los estudiantes a las matemáticas, reforzando la idea de que todos pueden ser hábiles y que se tengan estas consideraciones coincide con lo que dice Zambrano (2016) al indicar que la autoeficacia ayuda el procesamiento de información y el desempeño cognitivo siendo así un apoyo importante para el buen rendimiento académico de los estudiantes.

Por su lado, la mayoría de los estudiantes admite haberse sentido inseguro solo por no haber entendido, tener miedo a equivocarse o porque los exámenes le generan ansiedad pero hay actitudes o métodos utilizados por la docente que lo ayudan a realizar las actividades con seguridad tales como la retroalimentación constante, repaso antes de los exámenes, exámenes cortos por temática y estrategias de reforzamiento expresando a los estudiantes que las matemáticas son fáciles, que ellos son hábiles, inteligentes y pueden realizar cualquier actividad brindándoles diferentes métodos de solución de alguna tarea y así puedan decidir el que más se ajuste a sus destrezas.

Por todo lo anterior se puede inferir que además de centrarse en la planificación de actividades se debe pensar en los sentimientos de los estudiantes al aprender, tener en cuenta que para ellos es importante expresar sus inquietudes sin necesidad de ser juzgados y poderlo hacer libremente la cantidad de veces que sea necesario ya que cada uno tiene un ritmo y manera de aprender diferente y en parte esto se logra aplicando estrategias afectivas de programación lingüística donde lo más importante no es adquirir un conocimiento sino conocer cómo y en qué tiempo aprender cada uno.

Por último, según algunos docentes aspectos que pueden influir en las creencias de los estudiantes sobre sus habilidades y que piensen que son “malos en matemáticas” puede ser la forma errónea que se les enseña los conceptos básicos ya que ahí empiezan las falencias y la confusión mientras que otros indican que las afirmaciones personales que vienen sobretodo de las familias y lastimosamente de algunos docentes. Mientras que, los estudiantes enfatizan y reiteran que la estrategia que brinda seguridad al momento de realizar alguna actividad en la clase de matemáticas es que se refuerce los temas constantemente de diferentes modos y si es necesario de manera individual, permitiendo el trabajo en grupos y además el reforzamiento por medio de mensajes de apoyo y seguridad por parte del docente como decir que son inteligentes y pueden esforzarse cada vez más; lo que refuerza el hecho de repensar al estudiante como un ser integral que piensa, actúa y siente.

7. Conclusiones

La investigación describió los procesos de autorregulación del aprendizaje de las matemáticas su nivel de utilización y las estrategias pedagógicas que pueden llegar a potenciar cada uno de estos.

En primer lugar los procesos cognitivos que privilegian los estudiantes al momento de aprender matemáticas son los de elaboración, en los cuales hacen conexiones entre los saberes previos y los nuevos y además con contenidos de las demás áreas, es por esto que las prácticas pedagógicas deben fortalecer por medio de diferentes estrategias tales como trabajos de campo donde se aplican conceptos y se experimente, procesos de medición, aplicabilidad y comprobación de los contenidos matemáticos, ejercicios que involucren temáticas de otras áreas y la implementación de lecturas. En segundo lugar, la motivación intrínseca está ligada a la utilidad del contenido matemático tanto de manera práctica como la aplicabilidad en las demás áreas y la extrínseca está sujeta a la obtención de una nota y el reconocimiento de ésta por parte del docente y de los compañeros.

En tercer lugar, dentro de los procesos metacognitivos el establecer objetivos al momento de enfrentarse a una tarea o aprender matemáticas es de gran importancia para los estudiantes, lo que indica que tienen habilidades para planificar y analizar qué tipo de conocimientos y las estrategias que pueden aportarles en la actividad que deban desarrollar. Sin embargo, cabe resaltar que los procesos metacognitivos de planificación, supervisión y regulación indicados en la investigación vienen guiados de manera sucesiva, y por tanto en teoría deberían tener una misma relevancia, pero los estudiantes por el contrario le dan importancia a la planificación y va descendiendo la utilización de los procesos de supervisión y de regulación lo que puede estar ligado a dos factores: la motivación o el desconocimiento de algunos procesos de autorregulación del aprendizaje. La motivación puede tener implicaciones en estos procesos ya que posiblemente al momento de cuestionar sus conocimientos se sientan desprovistos de varias opciones para poder enfrentar una tarea matemática y esto haga que se presente frustración bajando su interés por realizarla, además de ello el hecho de realizar un estudio y reestructuración sobre sus propios conocimientos y métodos conlleva de cierto modo a una habilidad consiente y honesta de la autoevaluación, proceso que poco es utilizado en las instituciones o que se le da poca notabilidad, por lo que es necesario crear espacios donde se le brinden diferentes métodos de estudio y se le permita al estudiante evaluar su aprendizaje e identifique los mecanismos que le facilitan su aprendizaje y en caso tal de tener que reformarlos pueda hacerlo sin perder la motivación. Por ejemplo, al desarrollar alguna tarea matemática exponer diferentes métodos de solución y que el estudiante sea libre de utilizar la que desee y posteriormente indique como considera que fue su desempeño antes durante y después de haber realizado la tarea.

En cuarto lugar las percepciones que tienen los estudiantes de sus habilidades y la consciencia que tienen en la relación que hay entre esfuerzo y logro son factores que influyen directamente la confianza con que enfrentan una tarea y por tanto el desarrollo de habilidades de autorregulación del aprendizaje, pero el nivel de ansiedad al presentar un examen tiene efectos adversos en sus emociones afectando su desempeño en algunos casos.

Por otro lado, las estrategias que potencian en mayor medida habilidades cognitivas son las de tipo práctico, en donde se pueda aplicar los conceptos matemáticos en diferentes situaciones y se relacionen con las demás áreas, en consecuencia las actividades y contenidos en matemáticas deberían salir un poco del aula y optar por realizar trabajos de campo, proyectos de aplicación y utilización de ejemplos y tareas que involucren temáticas de otras áreas. Además, el desarrollo de proyectos pedagógicos transversales puede ser un mecanismo significativo para el desarrollo de estrategias autorreguladoras cognitivas del aprendizaje.

Ahora, las estrategias pedagógicas que potencian los procesos metacognitivos de los estudiantes son aquellas que le dan el control del aprendizaje al estudiante y donde se realiza una retroalimentación constante, lo que implica que el proceso de enseñanza debe propender por la exploración de conceptos matemáticos para que así cada estudiante genere sus conceptos con el apoyo y la guía del docente quien adopta el papel de mediador, dándole un papel aún más relevante al estudiante en su proceso de aprendizaje.

Los estudiantes enfatizaron en que la disposición y la actitud del docente en el proceso de enseñanza y aprendizaje cuenta como una estrategia motivante ya que consideran importante que el docente esté dispuesto a responder las dudas y se den espacios de socialización y retroalimentación contante, donde también cobra valor el hecho de implementar estímulos extrínsecos como lo son las evaluaciones de tipo formativo y espacios donde se facilite el trabajo colaborativo.

Como estrategias pedagógicas afectivas es importante que el docente adopte prácticas que le generen seguridad al estudiante al enfrentarse a una tarea matemática estrategias de reforzamiento, permitiendo un espacio de aprendizaje donde el estudiante tenga la libertad de implementar el método que se le facilite y que puedan equivocarse sin ser juzgados, realizar ejercicios de relajación, programación lingüística y organización del espacio y del tiempo.

Cabe resaltar que el estudio permite reconocer características importantes del aprendizaje autorregulado en matemáticas y las estrategias que pueden llegar a potenciar estas habilidades, pero se considera necesario profundizar en 3 cuestiones: identificar los aspectos que intervienen para que los procesos metacognitivos de los estudiantes se mantengan durante todo el proceso de aprendizaje de las matemáticas, las implicaciones de la evaluación en los procesos de autorregulación del aprendizaje de las matemáticas y el tipo de evaluación que puede fomentar y potenciar el aprendizaje autorregulado en matemáticas. Cuestiones que surgieron de los hallazgos más importantes de la investigación y tienen implicaciones importantes en la utilización de las estrategias de autorregulación del aprendizaje en matemáticas.

Bibliografía

Aranda, R. (2017) *Relación entre autoeficacia, auto concepto y desempeño en la asignatura de matemáticas.* (Tesis de maestría) Universidad de Concepción, Chile.

Alarcón, D. (2016). *Relación entre autoeficacia y autorregulación en el aprendizaje en estudiantes de primer grado del nivel de educación básica.* (Tesis de maestría) Universidad de Manizales, Colombia.

Álvarez, A. (2012) *La Autorregulación de los Aprendizajes en la Asignatura de Estudios Sociales: El caso del Estudiantado de Undécimo Año del Colegio Bilingüe Santa Cecilia.* (Tesis de maestría). Universidad Estatal a distancia vicerrectoría académica escuela de ciencias de la educación, Costa Rica.

Álvarez, N., & Marín, N. (2015). *Factores de motivación para las clases de matemáticas. Encuentro Distrital de Educación Matemática EDEM*, 2, 241-246.

Boekaerts, M., Zeidner, M., Pintrich, P. (1999). *Handbook of self-regulation*. Academic Press/San Diego, California. Estados Unidos.

Boyadzhieva, E. (2016) *Enseñanza centrada en el alumno y autonomía del alumno. Revista PROCEDIA*, 232, 35-40.

Burgos, E. & Sánchez, P. (2012*) Adaptación y validación preliminar del cuestionario de motivación y estrategias de aprendizaje* (MSLQ) (Tesis).Universidad de Bío-Bío, Chile.

Camposeco, F. (2012) *La autoeficacia como variable en la motivación intrínseca y extrínseca en matemáticas a través de un criterio étnico*. (Tesis doctoral). Universidad Complutense de Madrid, Madrid.

Carrillo, M., Padilla, J., Rosero, T., & Villagómez, M. (2009). *La motivación y el aprendizaje*. *ALTERIDAD Revista de Educación*, 2, 20-32.

Chan, E. & León, E. (2017). *Exploración del proceso de aprendizaje autorregulado de estudiantes universitarios mayahablantes. IE Revista de Investigación Educativa de la Rediech*, 14, 91-110.

Fernández, E., & Bernardo, A. (2011). *Autoeficacia en la autorregulación del aprendizaje de estudiantes universitarios. INFAD Revista de Psicología*, Vol 3, 1, 201-208.

Gargallo, B., Suárez, J. y Pérez, C. (2009). *El cuestionario CEVEAPEU para la evaluación de las estrategias de aprendizaje de los estudiantes universitarios. Relieve*, Vol15, 2, 1-31.

Hernández, R., Fernández, C., & Baptista, P. (2014). *Metodología de la investigación.* McGraw-Hill/México.

Lanz, M. (2006). *Aprendizaje autorregulado: el lugar de la cognición, la metacognición y la motivación. Estudios Pedagógicos*, 2, 121-132.

Mayer, R. (1996). *Learners as information processors: Legacies and limitations of educational psychology's second metaphor. Educational Psychologist*, 31, 151-161.

Monereo, C. (2001). *La enseñanza estratégica: enseñar para la autonomía. En Ser estratégico y autónomo aprendiendo*. GRAÔ /Barcelona. España.

Ospina, J. (2006). La motivación, motor del aprendizaje. Revista Ciencias de la Salud, 158-160.

Peñalosa, E., Landa, P., & Vega, C. (2006). *Aprendizaje autorregulado: una revisión conceptual. Revista Electrónica de Psicología Iztacala*, 2, 1-21.
Pintrich, P. (2000). Handbook of self-regulation. Academic Press, 13-41.
Pintrich, P. (2004). *A conceptual Framework for assessing motivation and Self-regulated learning in college students". Educational Psychology Review*, 4, 385–407.
Ruíz, B. (2015) *Autorregulación y su relación con el rendimiento académico en los estudiantes.* (Tesis de grado). Universidad Rafael Landìvar, Zacapa.
Schunk, D. (2012). *Teorías del aprendizaje.* Pearson/ México.
Sternberg, R. (1986). *Cognition and instruction: Why the marriage sometimes ends in divorce. En R. F. Dillon y R. J. Sternberg (Eds.), Cognition and instruction.* Academic Press /Orlando.
Weinstein, C., & Mayer, R. (1986). *The teaching of learning strategies. En M. C. Wittrock (Ed.), Handbook of research on teaching.* McMillan /New York.
Zimmerman, B., Kitsantas, A., Campillo, M. (2005). *Evaluación de la autoeficacia regulatoria: una perspectiva social cognitiva*. *Evaluar,* Vol 5, 1, 1-21.

Autores:

Amaya Ochoa Ivonne Daniela: Profesora de matemáticas, Licenciada en matemáticas, Universidad Pedagógica Nacional, Colombia. Magister en Educación de UNIMINUTO. Línea de investigación: Autorregulación del aprendizaje. Mail: red.ivonne@gmail.com Dirección: Diag 15 c #13c-45e Soacha, Cundinamarca. Teléfono: 3107677225

Jenny Consuelo Mahecha Escobar: Docente-tutora de proyectos de investigación aplicada bajo la línea de investigación: autorregulación en el aprendizaje de la Maestría en Educación de UNIMINUTO. Trabajadora social, Magister y especialista en comunicación educativa. Mail: jmahecha@uniminuto.edu Dirección: Cll 71ª N. 92 – 33 Barrio La Salina Teléfono: +57 3102156451

Francisco Conejo Carrasco: Docente líder de la Maestría en Educación de UNIMINUTO. Licenciado en historia, especialista en historia moderna, de américa y contemporánea, Máster en profesorado de educación secundaria obligatoria y bachillerato, formación profesional y enseñanza de idiomas, cursando el doctorado en educación. Mail: Francisco.conejo@uniminuto.edu Cll 86A #69T-81. T5. Apt 1902 Solarium de Pontevedra. Teléfono: +57 3153482752

UNIÓN
REVISTA IBEROAMERICANA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA

ISSN: 1815-0640
Número 64. Abril 2022
Páginas 1-15

https://union.fespm.es

Un Proceso de Construcción Conjunta en el Diseño de un Proyecto de Enseñanza

Rosa Martínez, Patricia Detzel

Fecha de recepción: 20/09/2020
Fecha de aceptación: 04/05/2021

Resumen	Presentamos parte del desarrollo de una investigación llevada en conjunto entre investigadores y profesores de matemática de una escuela secundaria. El trabajo colaborativo permite integrar puntos vista de todos los participantes, posibilitando la construcción de conocimientos ajustados a la realidad de la práctica de enseñanza. Se diseñaron, implementaron y analizaron actividades de enseñanza, de manera conjunta, para incluir GeoGebra en el aula. En esta ocasión procuramos dar cuenta del proceso de construcción de un proyecto de enseñanza conjunto, sobre el tema funciones, con la intención de visibilizar aspectos constitutivos de una investigación colaborativa. **Palabras clave**: Investigación colaborativa, práctica de enseñanza, software GeoGebra, escuela secundaria.
Abstract	We present part of the development of a joint research among researchers and teachers of mathematics of a secondary school in the province. Collaborative work makes it possible to integrate the views of all participants, enabling the construction of knowledge adapted to the reality of teaching practice. Jointly designed, implemented and analyzed teaching activities to include GeoGebra in the classroom. In this occasion we try to give account of the process of construction of a joint teaching project, on the subject of functions, with the intention of visibilizing constitutive aspects of a collaborative research. **key words:** Collaborative research, teaching practice, software GeoGebra, high school.
Resumo	Apresentamos parte do desenvolvimento de uma pesquisa realizada em conjunto entre pesquisadores e professores de matemática de uma escola secundária. O trabalho colaborativo permite integrar os pontos de vista de todos os participantes, possibilitando a construção de conhecimentos ajustados à realidade da prática docente. Atividades de ensino foram projetadas, implementadas e analisadas em conjunto para incluir o GeoGebra na sala de aula. Nesta ocasião procuramos dar conta do processo de construção de um projeto pedagógico conjunto, sobre funções, com o intuito de tornar visíveis os aspectos que constituem uma pesquisa colaborativa. **Palavras-chave:** Pesquisa colaborativa, prática de ensino, software GeoGebra, escola secundária.

1. Introducción

Este trabajo es parte de una investigación[1] que busca producir conocimientos matemático - didácticos en un contexto de colaboración, de manera conjunta entre docentes en la posición de investigadores (DI) y docentes de aula (DA), que se da a partir del análisis del proceso de diseño e implementación de propuestas de enseñanza.

Nos enmarcamos en un tipo de investigación participativa (Anadón, 2007), en particular en el modelo de investigación colaborativa (IC) desarrollado por Bednarz, Desgagné y sus colaboradores (Bednarz, 2004, 2009, 2013a, 2017a, 2017b; Desgagné, 1997, 1998, 2001; Desgagné, Bednarz, Couture, Poirier, y Lebuis, 2001). En la IC se da un diálogo entre DI y DA a partir de integrar sus puntos de vista posibilitando la construcción de saberes ajustados a la realidad de las prácticas de enseñanza tomando en cuenta su complejidad (Bednarz, 2017a). A los DA los moviliza repensar sus prácticas de enseñanza y a los DI producir conocimientos sobre esos procesos, el interés común está en la aceptación de unos y otros de trabajar conjuntamente en una problemática compartida para estudiarla mediante una actividad reflexiva.

Desde hace años nos preocupamos por la enseñanza de la matemática en la escuela secundaria. En la comunidad de los DI, es compartida una perspectiva en la cual una propuesta de enseñanza debe impulsar, en el aula, la elaboración de relaciones con los diferentes objetos matemáticos en vistas a construir las nociones que se quieren enseñar. A partir de concebir a la clase como espacio de producción de conocimiento, las actividades que se eligen desarrollar deben desafiar a los alumnos a realizar vínculos que ayudarán a encaminar el trabajo hacia las conceptualizaciones en cuestión. Si bien hay numerosas investigaciones que producen secuencias y situaciones de enseñanza atendiendo a estas ideas, creemos necesario considerar las perspectivas de los DA sobre objetivos y potencialidades de tales situaciones de manera que puedan concebir una gestión posible de la clase. Nos interesó, a partir de convenir una problemática sobre la enseñanza, la planificación, implementación y análisis de actividades para producir conocimiento matemático didáctico en un proceso de trabajo conjunto.

Este artículo es el resultado del análisis de los registros de las reuniones y de reflexiones de nuestra participación como investigadoras[2] en una experiencia colaborativa[3] con profesores de matemática de una escuela secundaria (alumnos de 15 años) del paraje de Lonco Luan, ubicada en el interior de la provincia de Neuquén, que fue realizado entre los años 2015-2016. Los análisis llevados a cabo en el espacio de trabajo colaborativo fueron haciendo visible para todos los integrantes del grupo aspectos de la enseñanza que se problematizan. En el desarrollo de una IC, el rol del investigador deviene complejo, sobre todo en su capacidad para mantener una doble

---

[1]Proyecto de investigación (2013 – 2016) 04-E092, subsidiado por SeCyT de la Universidad Nacional del Comahue, Argentina.

[2] Además de nuestra participación a los encuentros, estuvieron presentes en algunas reuniones los profesores Lucas Colipe y Emanuel Issa, integrantes del proyecto de investigación.

[3] Parte de esos resultados fueron comunicados en la Escuela de Didáctica de la Matemática, EDIMAT 2015, en el panel: Espacios de trabajo colaborativo: un medio para pensar las Tics en el aula, a cargo de Detzel y Martinez, organizado por UNSam, UNIPE, UNAJ, octubre, Buenos Aires.

verosimilitud a lo largo de todo el proceso (Bednarz, 2017a) propia del entramado de la misma. Las discusiones sobre la elaboración de consignas para el aula, que involucren el uso de GeoGebra y conocimientos de funciones, atravesadas tanto por una sensibilidad teórica como una sensibilidad práctica de los DA y DI, abrió cuestionamientos sobre el uso del software que hicieron posible configurar una perspectiva para abordar la enseñanza en el aula donde el alumno es invitado a producir ideas matemáticas. Procuraremos mostrar algunos aspectos constitutivos de la IC teniendo en cuenta el proceso de construcción del proyecto de enseñanza conjunto, sobre funciones con GeoGebra[4]. Estos aspectos son abordados en los puntos **3.** Selección del problema para el aula, **4.** Anticipación de la gestión de la clase y **5** Desnaturalización de una práctica de enseñanza.

2. Acerca de la investigación colaborativa

2.1 En relación a nuestra investigación

Consideramos distintas etapas de la IC (Bednarz, 2009, 2013a; Desgagné, 1998, 2001; Desgagné y otros, 2001), tales como delimitación de la problemática (co-situación), desarrollo de la investigación (co-operación) y sistematización de datos y análisis (co-producción). El prefijo "co" se refiere a una actitud del investigador de respetar las lógicas y reflejar las perspectivas de dos mundos, el de las DI y el de las DA, lo que constituyó un desafío a lo largo del proceso.

En una primera etapa, de la co-situación, delimitamos una problemática a abordar que pueda satisfacer las inquietudes de las DA[5] y de las DI. Profesoras de matemática de la escuela[6] secundaria de Lonco Luán demandan un trabajo conjunto para abordar el uso de las netbooks en la clase. La escuela recibe en esa época computadoras de un Plan Nacional[7], en ese contexto las docentes tienen la firme intención de incluirlas de manera de favorecer el proceso de enseñanza y de aprendizaje para sus estudiantes y les urge potenciar su uso en el aula. Nos interesa resaltar que el trabajo se inicia por la demanda de las DA para aproximar respuestas a ¿cómo incorporar las netbooks en sus clases de matemática? Para los DI es una ocasión para indagar acerca del proceso de construcción conjunta de situaciones de enseñanza para aulas reales, que favorezcan la producción de conocimientos matemáticos por parte de los estudiantes.

Se constituyeron espacios de trabajo presenciales, nueve encuentros de aproximadamente 5 hs cada uno, algunos en Aluminé y otros en la escuela C.E.P.E.M

4 Software libre pensado para la enseñanza de la matemática y que está incorporado en las netbooks del programa 'Conectar Igualdad' en Argentina.

[5] Agradecemos a las Profesoras Mirta Alvarez y Liliana Mendez, docentes de matemática de la escuela. También mencionamos a la profesora Agniszka Boczkowska quien, en su carácter de asesora pedagógica de la escuela, medió en la concreción del trabajo conjunto. Del mismo, reconocemos los aportes del técnico realizados en las reuniones que participó.

[6] La escuela secundaria secundaria C.P.E.M Nº 79 del paraje Lonco Luan está situada en Aluminé, provincia de Neuquén. El establecimiento se ubica en la cordillera neuquina a orillas del Río Aluminé y sobre la Ruta Provincial Nº 23 (a 40 Km de la localidad de Aluminé y a 360 de la ciudad capital de Neuquén). En este lugar se encuentra asentada la Comunidad Mapuche Catalán y que están distanciados entre sí. Asisten a esta escuela jóvenes de la comunidad Catalán y la comunidad Puel. No disponen de internet y en invierno, por la nieve, muchas veces quedan incomunicados.

[7] El programa Nacional Conectar Igualdad, creado por el decreto 450/10, tuvo como propósito recuperar y valorizar la escuela pública y reducir las brechas digitales, educativas y sociales en el país. En ese marco se distribuían netbooks a todos los alumnos y docentes de las escuelas secundarias del país.

N° 79 en Lonco Luan, durante los años 2015 y 2016. En los mismos participaron las profesoras de matemática, la asesora pedagógica, un técnico informático de la escuela y el equipo de investigación. Los desarrollos de estos encuentros se registraron en audios y se confeccionaron diarios en los que se iban volcando los acuerdos establecidos, las consignas de las actividades, las preguntas, las tareas pendientes para los encuentros por venir. Con el uso de un proyector se elaboró el diario compartido que guardaba las huellas de las discusiones y reflexiones de los encuentros presenciales. Además, se realizaron observaciones de clases.

En esta etapa de co-situación, las DI y DA negociamos abordar un tema específico de la enseñanza de la matemática que devino de una demanda de las docentes. Como ya lo mencionamos, convenimos desarrollar colaborativamente, la planificación, implementación y análisis de actividades para la enseñanza de un conocimiento en particular. De esta manera, se fomentó que un colectivo de trabajo piense, organice e implemente actividades usando el software GeoGebra en el aula. En esta etapa, el objeto se construye en una especie de diálogo y acuerdos constantes entre las DI y las DA. Desde la perspectiva de una IC se señala la importancia en el acuerdo sobre una problemática compartida que refleje las preocupaciones de las dos comunidades.

En una primera instancia el centro de la discusión fue cómo abordar el uso del programa GeoGebra en el aula, luego fue el diseño de una propuesta de enseñanza de funciones mediadas por el uso de dicho software.

Una vez que se va configurando la problemática a estudiar, es necesario establecer una modalidad de trabajo para abordarla. De este modo entramos en la etapa de co-operación, que presenta aquí un gran desafío; debemos garantizar que las diferentes reuniones reflexivas entre los participantes sean oportunidades, no solo la recopilación de datos para las DI, sino también para lograr una mayor comprensión de las prácticas profesionales de las DA, de una reestructuración e incluso una transformación de esas prácticas. Las DI desarrollamos así un enfoque de exploración que conduce a una construcción conjunta y se da la posibilidad de producir conocimientos nuevos sobre prácticas de enseñanza.

En nuestro caso, enfatizamos un trabajo de discusión y análisis didáctico con la intención de adentrarnos en un proceso de elaboración de un proyecto de enseñanza buscando cómo hacerlo posible. Realizar explicitaciones de las decisiones que se toman en relación a los actos de enseñanza dan lugar a cuestionamientos. Nuestras mediaciones, como DI, en el seno de los encuentros, se apoyan en los desarrollos de la Didáctica de la Matemática. Las DA contribuyen con conocimientos sobre prácticas de enseñanza, conocimientos de la acción compartidos por el colectivo docente.

Desde este lugar, discutir la matemática involucrada y preguntarse por las relaciones entre los procedimientos de los estudiantes y las representaciones de las funciones que la aplicación posibilita, fue lo que movilizó un proceso de problematización. Tal proceso, sostenido a lo largo de los encuentros, tuvo un rasgo fundamental que fue el de empezar a imaginar, explorar y construir un diálogo entre las actividades de enseñanza, el conocimiento que circulará en la clase, la entrada de GeoGebra y el conocimiento a enseñar. Esta instancia de reflexiones ayuda a explicitar las razones que comandan las elecciones didácticas dando lugar a la construcción de un conocimiento inédito.

Finalmente, en la etapa de co-producción, elaboramos y ponemos en forma los resultados. Llevamos a cabo un análisis de manera concomitante con la recolección de datos (en este sentido, el modelo presentado aquí no es lineal). Nuestro desafío fue atender que el conocimiento producido sea relevante tanto para las DA como para nosotras, las DI. En nuestra experiencia, los intercambios producidos en los encuentros posibilitaron desnaturalizar las relaciones imbricadas en el conocimiento en juego. Se construye, conjuntamente, una propuesta que finalmente se implementa en el aula, a partir de hacer foco en el estudio de la covariación y crecimiento uniforme, como un modo de caracterizar las funciones lineales a partir de la modelización.

2.2 Aspectos de la IC

Desgagné y Bednarz (2005) y Desgagné (2001) utilizan los conceptos de “sensibilidad teórica” y de “sensibilidad práctica” para indicar las respectivas posturas de los DI y de los DA que les permiten entrar en un proceso de co-construcción y llevar adelante la colaboración. La sensibilidad práctica del DA se refiere a un campo contextual, a un conjunto de recursos y condicionamientos en los que se basa para juzgar la acción que debe producirse en la práctica (Desgagné y Bednarz, 2005). En cuanto a la sensibilidad práctica del DI, lo lleva a reconocer las perspectivas de los profesionales y a acercarse a su comunidad profesional (Desgagné, 2001, 2007). En nuestra experiencia una sensibilidad práctica la encontramos, por ejemplo, en el proceso de elección de la situación que permitió abordar el tema funciones y el uso del GeoGebra en el aula, que desarrollamos en el apartado 3.

La sensibilidad teórica del DI hace referencia a un campo conceptual movilizado para examinar el objeto de cuestionamiento o para teorizar la acción práctica (Desgagné y Bednarz, 2005). En nuestra investigación, esta sensibilidad puede vincularse al conocimiento que se tiene para concebir escenarios de enseñanza sobre funciones mediante un software, en los que el carácter de necesidad del conocimiento (Brousseau, 2000, p. 10) está presente. Este aspecto se traduce en la selección y adaptación de problemas provenientes de la investigación. También se observa en los análisis a priori de situaciones de enseñanza anticipando diferentes estrategias y justificaciones a partir del marco de referencia sobre el proceso de modelización. En los DA se da una sensibilidad teórica (Desgagné y Bednarz, 2005), necesaria para que el profesional pueda participar en un proceso de co-construcción con los DI. Consideramos la sensibilidad teórica de los DA como la “disposición” del docente a “salir” momentáneamente de su práctica, e interesarse por la investigación, por las perspectivas teóricas (Barry y Saboya, 2015). En nuestro caso esta sensibilidad teórica de los DA se traduce en una apertura en la elección de los problemas tomados de la investigación y en asumir llevar adelante una propuesta diferente a la habitual, también se refleja en la explicitación de argumentos para justificar sus decisiones, diferencias e implícitos.

La IC exige el criterio de doble verosimilitud en el desarrollo del trabajo. Para ello, los DI estarán constantemente atentos a las preocupaciones de las dos “comunidades” que contribuyen a aportar a la construcción de un saber para la práctica de enseñanza (Desgagné, 2001). Este criterio toma matices según las etapas de la IC. En la co-situación, una “doble pertinencia social” se da con el desafío de definir un proyecto que reúna las preocupaciones de todos los participantes (DI y DA) (Desgagné, 2001). Por último, se debe tener en cuenta un criterio de “doble fecundidad de resultados” en la etapa de co-producción que consiste en presentar los resultados que integran las categorías de los DA y los DI, de manera creíbles para ambos. Esta postura demanda también al DI hacerse intérprete de la palabra de los docentes tanto en la acción, como en el momento de la investigación y en el análisis de la misma. El rol del investigador es complejo, necesita de experiencia, sensibilidad y apertura para permitir esta co-construcción y mantener esta doble verosimilitud a lo largo de todo el proceso (Bednarz 2017a). Los ítems que a continuación desarrollamos tienen por propósito dar cuenta de esta complejidad.

3. Selección del problema para el aula

En el desarrollo de la IC se va configurando la problemática que inicialmente surgió por la demanda de las DA en incluir las netbooks en sus clases. Así, deviene un trabajo de pensar en introducir las funciones usando GeoGebra a partir de discutir diferentes situaciones.

Debatir posibles consignas para el aula permite colectivamente indagar condiciones de situaciones de enseñanza. En ese transitar las decisiones emergen de una confrontación de ideas, propia de ese trabajo colectivo, en el que se da un ir y venir con las posibilidades ideales y reales del aula con los alumnos. La aproximación colaborativa a los problemas de enseñanza abona la idea de concebir al DA como productor de conocimiento a partir del análisis de sus prácticas en el sistema real.

Para llevar a cabo esa tarea las DI pusimos a consideración actividades de enseñanza provenientes del campo de Didáctica de la Matemática en las que se propone estudiar la variación de las áreas de polígonos que están dentro de otros, a partir de construir una figura dinámica. El rol del software GeoGebra vendría a robustecer las relaciones[8] con el saber matemático en juego cuando se ven limitadas con el solo uso de lápiz y papel. En esta etapa de co-operación, nuestro desafío, en posición de DI, fue abrirnos a una sensibilidad más didáctica para interpretar indicios en relación al nivel de aceptación por parte de las DA, en verse con esa situación en el aula.

La consideración del problema para el aula está directamente ligada a la posibilidad de tal trabajo y a la factibilidad por parte de las profesoras para su implementación. La anticipación de las posibles intervenciones didácticas del problema de la variación de las áreas resultó una tarea compleja y, por ello, creemos que este tipo de actividades no pasó a formar parte del proyecto de enseñanza de las DA. Podemos decir que cuando, en una situación para el aula, la conceptualización que justifica el vínculo entre conocimiento y problema está por fuera de la experiencia de los docentes, resulta muy difícil que puedan introducir genuinamente su perspectiva (Sadovsky y otros, 2016, p. 18).

Esta situación nos lleva (DI) a reparar en las condiciones del entorno de las prácticas de enseñanza, para desarrollar una sensibilidad a las preocupaciones de las DA. Hay razones de demasiada estructura didáctica, según creemos, que llevan a la búsqueda de otras situaciones de enseñanza aceptadas por ambas

[8] El uso del Geogebra en la construcción de una figura dinámica permite dar sentido a la noción de variación y dependencia, dado que una misma figura posibilita estudiar distintas relaciones entre las magnitudes en juego. Además, da lugar a abordar un trabajo entre diferentes registros que avanza sobre formatos tradicionales.

comunidades. En este contexto, las DI proponemos otro tipo de situaciones que no sea tan ajena a las DA, donde la modelización está presente, aunque la necesidad del uso de GeoGebra no está resuelta.

El problema de "Las Tiendas[9]" emerge entonces como una situación factible para el salón de clase.

> Dos tiendas de ropa del barrio han publicitado nuevas ofertas. En "Tienda la Nube" sobre el precio del artículo nos hacen una rebaja de $50, después un recargo del 12% y finalmente un descuento de $6. En "Tienda el Sol" sobre el precio del artículo nos realizan un aumento de $130, después un descuento del 23% y finalmente un recargo de $8 ¿Dónde es mejor ir a comprar?

Es una actividad que involucra el estudio y la comparación de dos variaciones lineales y, aunque no está diseñado para Geogebra se vislumbra su potencial para cumplir las expectativas de DI y DA. Comenzamos así a pensar, conjuntamente, modificaciones a la situación original de manera que sea necesario, para su resolución, el uso de dicho software.

Nuestras intervenciones como DI para adaptar la situación de enseñanza tienen por objetivo considerar una gestión de clase que promueva y sostenga una producción de conocimientos por parte de los estudiantes y que el uso de la aplicación resulte ser una herramienta eficaz para la resolución. Las DA contribuyen con aportes relativos a posibles intervenciones, explicitar condiciones de funcionamiento, conocimientos propios de su experiencia (cierto conocimiento de GeoGebra, cierto recorrido en el aula: "primero en la carpeta, durante cierto tiempo hacen cuentas, después la hoja de cálculo...). Así, la colaboración desarrollada dio lugar a un trabajo que se encauza entre esas premisas y que pretende integrar conocimientos de prácticas de enseñanza y conocimientos de la investigación relacionados con ciertos aspectos de su trabajo (Perrin Glorian y Moreira Baltar Bellemain, 2016, p. 38).

Las DA ven en el problema de las tiendas un modo de proyectarse en su aula con una organización diferente a la habitual. Las DI sostenemos, en el análisis, el sentido de los conocimientos involucrados a partir de discutir las condiciones de la situación de enseñanza (se anticipa la consigna con la cual se plantearía la actividad en la clase, lo que se supone harían los estudiantes para resolver, posibles intervenciones del docente en relación al objeto de estudio, una organización de la clase, entre otros para favorecer ciertas interacciones de los alumnos; etc.). Esto muestra cómo la presencia de una sensibilidad teórica abrió un camino de readaptación para ser llevado al aula, en que las funciones toman su lugar, a partir de la modelización, y entonces el proceso de construcción de esos modelos es parte de lo que se debe hacer para resolver la situación y no solo la aplicación de los mismos. Al mismo tiempo, reconocemos una sensibilidad práctica en el trabajo de "recalibrado" de las actividades para el aula. Esta instancia, significó construir un análisis que permita desarrollar un uso del software en un problema escolar y, dejar de lado problemas diseñados con GeoGebra en los que la actividad matemática involucrada exige una reconstrucción de ideas demasiado alejadas de las prácticas tradicionales.

[9] El enunciado del problema fue extraído de Ruiz Munzón (2010), La introducción del álgebra elemental y su desarrollo hacia la modelización funcional. Tesis doctoral, Departament de Matemàtiques Universitat Autònoma de Barcelona. España.p: 129.

Así, para las DI que nos inscribimos en una IC, con el deseo de sumar las inquietudes de las DA, requirió un trabajo de ajuste que nos lleve a abrirnos y a ser permeables a las preocupaciones surgidas de la práctica de enseñanza. La sensibilidad a las cuestiones compartidas, tanto por la investigación como por la práctica de enseñanza, proporcionó una reformulación en la búsqueda de un objeto que abone el trabajo conjunto entre investigadores y docentes.

4. Anticipación de la gestión de la clase

Es importante que DI y DA compartan algunas cuestiones, una cierta concepción del aprendizaje y de la enseñanza. Nos referimos a una mínima "cultura didáctica" compartida, en el sentido que lo proponen Barry & Saboya (2015, p. 56), una cierta proximidad entre investigadores y profesionales que haga posible un trabajo conjunto y que no se trate de un diálogo de sordos. En este caso, nos aúna la convicción que trabajar con GeoGebra en el aula mejoraría las clases de matemática y en consecuencia los aprendizajes de los estudiantes.

La permeabilidad de las DI y las DA en la fase de selección de la situación de enseñanza para el aula, permitió entrar en un proceso de co-construcción. La actividad elegida (el problema de las Tiendas), satisface en principio las necesidades de los dos grupos. Su enunciado, como dijimos anteriormente, es una situación que no resulta tan ajena para las DA y las DI vimos su potencial para modelizar a las funciones a partir del uso de la hoja de cálculo de GeoGebra como recurso para estudiar las variaciones. El proceso de co-construcción, en nuestro caso, se corresponde con la búsqueda de condiciones didácticas para que el problema seleccionado, admitiera un uso adecuado de GeoGebra para su resolución. Ese juego de adaptación, a partir de modificaciones en la consigna para usar el software, se va construyendo desde perspectivas diferentes. El juego de intercambios y discusiones, las que en algunos casos conlleva cuestionamientos, configura el marco de acuerdos y construcción conjunta. Esta tarea de analizar las condiciones de uso de GeoGebra, unas, lo hacen considerando un alumno genérico (en el sentido que se usa en Teoría de las Situaciones Didácticas (Brousseau, 2007) mientras que otras, lo hacen a partir de imaginar la clase con los alumnos reales.

En ese contexto, la tabla, como una de las representaciones más usuales para el trabajo con funciones, es un medio a través de la cual se iniciaría la propuesta para el aula, por al menos dos razones: es un conocimiento disponible por los alumnos y permite un acceso a la hoja de cálculo. Sin embargo, el modo en que entraría en la clase da lugar a la confrontación de ideas, a la diversidad de puntos de vistas. La conjunción de esas ideas y de perspectivas distintas ha estado atravesado por una sensibilidad indispensable en el desarrollo de una IC. Por un lado, las DI vemos en el problema una oportunidad para entrar al estudio de las variaciones a partir de la posibilidad de generar muchos valores que surgen como resultado de cálculos complejos y podrían ser organizados por los estudiantes. Así, en vista de una próxima inclusión del software, la posibilidad de varios pares de valores generaría la necesidad de una tabla que sistematice la información. Los intercambios que las DI alentamos lo hacemos teniendo en cuenta la necesidad del conocimiento y el uso de dicho software. En esos términos, la riqueza de entrar con la hoja de cálculo estaría dada por ser un dispositivo fértil para que a partir de utilizar la herramienta fórmula y arrastre se obtengan muchos valores en un mínimo de tiempo.

Por otro lado, las DA llevan como propuesta iniciar el trabajo organizando una tabla en el pizarrón, a partir de recuperar las cuentas en lápiz y papel que los estudiantes harían en forma individual. Desde ese lugar, las elecciones que hacen para este análisis, se apoyan en el funcionamiento de sus alumnos, en un conocimiento que traen de su propia experiencia de aula y de sus posibilidades en prever una gestión que incluya GeoGebra. Piensan en cómo desarrollar la clase para vincular los cálculos sueltos, que sus alumnos obtendrían de manera individual y con cuentas "por partes", con expresiones que muestran las regularidades. Así, en su anticipación la clase no se iniciaría usando dicha aplicación.

Esta propuesta, que momentáneamente deja de lado el uso de GeoGebra, difiere e interpela a los DI. En este sentido Sadovsky (2016) advierte "que cuando la posición de los DA es distinta a la de los capacitadores, se suele desconfiar de las apreciaciones e interpretarlas en términos de resistencia" (p. 23). Sin embargo, abrir al debate para comprender cuáles son las razones habla de una cierta sensibilidad lo que conlleva, en este caso, a robustecer el análisis didáctico a partir de anticipar posibles escenas en las que se va configurando el lugar del software en la resolución del problema. Las discusiones, a propósito de esas perspectivas distantes en relación a la entrada en escena de GeoGebra, propiciaron una conversación que construye acuerdos para el aula. Es decir, se conjugan posturas constructivas con posibilidades reales de sostener un trabajo en el aula fundamentado en el sentido del conocimiento.

La discusión sobre cómo hacer la entrada del software, partiendo de un trabajo individual y con lápiz y papel, considerando la construcción de una tabla en el pizarrón por la docente auspicia una colaboración. Se construyen argumentos compartidos, se confrontan diferencias a propósito del trabajo que se hace. Se ilumina sobre prácticas implícitas que ayudan a comprender aspectos que suelen quedar en un segundo plano cuando se efectúan elecciones en torno al desarrollo de la clase. En ese marco, pensar esa concatenación de cuentas hechas en lápiz y papel como soporte para la construcción de las expresiones en la hoja de cálculo habla de construir un sentido de la fórmula como medio para expresar la dependencia de valores. El sentido de variación como aspecto inherente a la construcción de función comienza a tener su lugar a partir de la decisión de las DA al proponer un trabajo individual para dar la posibilidad de que surjan varios pares de valores, cuestión que se encamina hacia el estudio de regularidades en la tabla a partir de organizar esos cálculos. La discusión colectiva permitió acordar dos posiciones: una que buscaba en la diversidad de los cálculos en lápiz y papel una entrada al GeoGebra enfatizando el estudio de variaciones y otra que intentaba profundizar una búsqueda también de sentido de las fórmulas ancladas en la sucesión de cálculos aritméticos. El encuentro de ideas produce nuevas significaciones para esta problemática de la entrada al álgebra incluyendo este software. Desde este lugar, se constituye una oportunidad de discutir la transición aritmética-algebraica en el trabajo matemático de los alumnos y en el trabajo colaborativo del grupo.

5 Desnaturalización de una práctica de enseñanza

Abordar el análisis de la inclusión de la aplicación a situaciones de enseñanza, nos permitió habilitar un diálogo entre la actividad matemática y los objetos matemáticos involucrados. En esta discusión se entrelazan aportes de los DI y DA en relación a los conocimientos acerca de posibles recorridos para la enseñanza de funciones desde perspectivas diferentes lo que conlleva a pensar en qué medida el uso de software se constituye una herramienta potente para la clase.

Recordemos que el objetivo de este trabajo conjunto se correspondía con el requerimiento de las DA en organizar un recorrido para la enseñanza de funciones con GeoGebra. En el tercer encuentro de trabajo, la discusión había avanzado a un punto en el que la construcción de la tabla en la hoja de cálculo permitiría estudiar la relación entre los valores. Las DA se interesan en discutir cómo avanzar en la obtención de la gráfica vinculando los datos en las dos vistas simultáneas (hoja de cálculo – vista gráfica), en la que estaba en juego la construcción de fórmulas. En ese sentido, la cuestión se transforma en cómo tomar en cuenta las ventajas de esta incorporación para que no se trate de un simple traslado de lo que se hace con lápiz y papel. Ese interés nos llevó a preguntarnos ¿qué uso de las representaciones que ofrece el software resguardará su sentido?, más precisamente ¿cuál es el aporte del GeoGebra en relación al objeto de enseñanza? ¿Cuál es la contribución de la ventana gráfica?, ¿cómo avanzar en una propuesta consensuada que supere una enseñanza ostensiva[10] de las funciones?

En ese camino, avanzamos en pensar escenarios con el uso de GeoGebra en el que se relacionen distintos registros de representación. Al pensar la consigna para la clase surge un encadenamiento de interrogantes que pone en cuestión ciertos objetos matemáticos y las condiciones de uso del software. Así, se anticipó un momento en el cual el uso de la hoja de cálculo permitiría generar una gran cantidad de datos en un mínimo de tiempo y esfuerzo. Las cuentas las hace la aplicación, lo cual provee un caudal de datos que permitiría, a partir de usar una escala conveniente, dar la respuesta al planteo inicial, en este caso $486, gasto que es indistinto donde se compre. Entonces, en este punto, la cuestión fue discutir: si ya se encontró ese valor ¿para qué se necesitaría la gráfica? Las DA proponen discutir la unicidad de 486 para recurrir a la gráfica como un modo de abordar la cuestión. En otras palabras, nos preguntamos: ¿cómo asegurar que no hay otros valores posibles? Concebir ese punto como la intersección de dos rectas podría asegurar la unicidad de ese valor. Esta discusión ahonda en ¿por qué los puntos que se representan, a partir de los valores de la tabla, serían puntos de una recta? El asunto se desliza a plantear cómo emergen entonces las rectas a partir de obtener un gráfico cartesiano con un conjunto de puntos alineados. Advertir que los datos de los puntos en la tabla y de la gráfica corresponden a un mismo recorte puso en cuestión la necesidad de construir el lazo entre el cálculo y el dibujo de los puntos alineados. Los puntos en la vista gráfica son el reflejo de lo que está en la tabla, la representación emerge a través del software sin hacer entrada de una fórmula (Ver Figura 1).

[10] Nos referimos con ostensivo a un tipo particular de interacción muy difundido en la enseñanza de la matemática, denominado prácticas ostensivas o simplemente ostensión. Las llamadas prácticas ostensivas describen un conjunto de procedimientos didácticos caracterizados básicamente porque el docente suministra al alumno todos los elementos y relaciones constitutivas de la noción visualizada, mientras que el alumno escucha, observa y resuelve ejercicios de aplicación de las nociones dadas por el docente (Brousseau, 2007, p. 101).

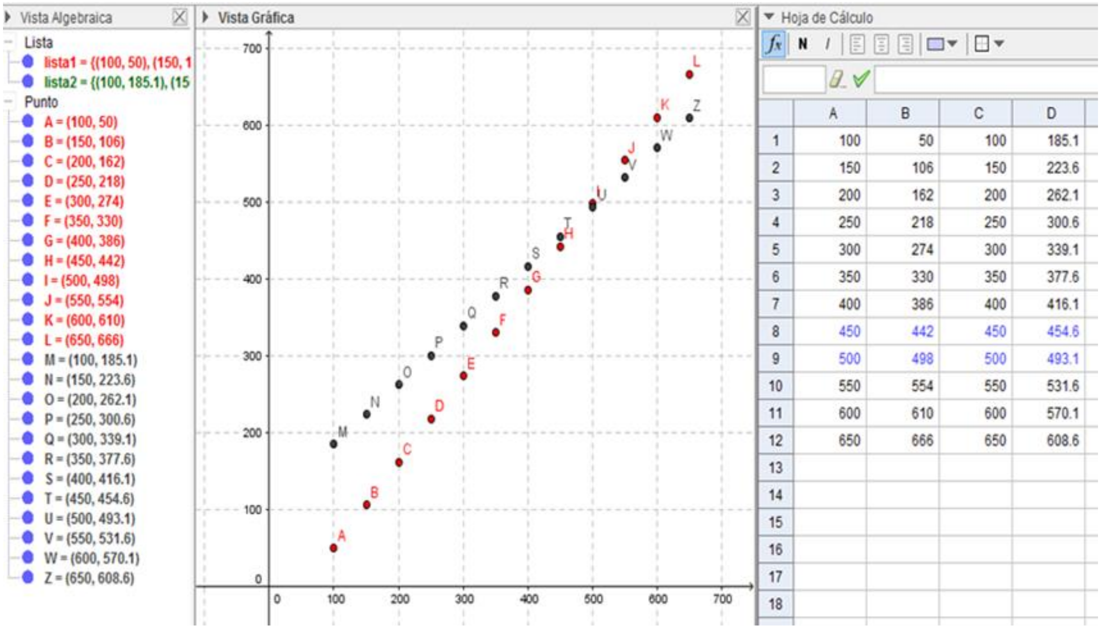


Figura 1. Captura de pantalla- del encuentro de trabajo conjunto-que muestra las tres ventanas del software: puntos, gráfica de puntos alineados y hoja de cálculo (2016)

En el desarrollo del trabajo estaba presente una fuerte intención de mantener una perspectiva de sentido del conocimiento, en este caso una inclusión de la gráfica de la recta justificada por alguna necesidad en la resolución de la actividad. Aparece el cuestionamiento del trazado de una recta como gráfica que incluye a los pares de puntos de la relación involucrada, es decir se pone en escena debatir por qué los puntos en la gráfica mantienen la alineación.

Vemos entonces que ese juego de interrogantes pone en evidencia la no transparencia de la relación entre los datos de la hoja de cálculo y su relación con la representación de los mismos a través de una recta, abriendo nuevas cuestiones: ¿qué es lo que nos asegura que esos datos se representan con una recta? Hay una búsqueda de sentido, de explicitar razones que vinculan las distintas representaciones desde un lugar que aporte más información a la vez que permite hablar del tipo de variación. En ese contexto, la discusión si es o no una recta la curva que describe ese conjunto de puntos, hace posible poner en juego una presentación ostensiva de la enseñanza de las funciones frente a un requerimiento de argumentos que se va entrelazando en el debate. La búsqueda de esas justificaciones lleva a anticipar lo que en sus clases podría acontecer. Ubicados en ese imaginario, se proponen distintas relaciones que podrían surgir a partir de estudiar regularidades numéricas en la tabla y que contribuyen a reconocer la variación que caracteriza el comportamiento lineal desde un lugar más ligado a visibilizar el crecimiento proporcional. Buscar razones para asegurar que el recorte de la curva es efectivamente una porción de recta, a partir de los datos de la tabla, permite resignificar el comportamiento uniforme asociado a la pendiente en los diferentes registros. Así, problematizar la relación de la información en los distintos registros lleva a visibilizar un vínculo para interpretar los cambios y conocer más sobre la dependencia y la variabilidad de las magnitudes involucradas en uno y otro registro.

En este trabajo conjunto reconocer conocimientos acerca de posibles recorridos para la enseñanza de funciones contrastados con las discusiones acerca de alcances y límites de las distintas representaciones mediadas por GeoGebra, hace que emerja una propuesta de trabajo para el aula de las funciones que avanza en los distintos registros y su vinculación. Se configura una posible entrada a las funciones estudiando la covariación (crecimiento uniforme) como un modo de caracterizar las funciones lineales.

Nos interesa remarcar una cierta sensibilidad teórica por parte de las DA al asumir llevar a su aula un planteo de enseñanza de funciones diferente al habitual entrando en el juego de redefinir las consignas de manera superar prácticas ostensivas.

6 Conclusión

La IC ofrece un espacio reflexivo concebido como de formación para DA tanto como de investigación a propósito de su práctica. En esta ocasión se propuso dar cuenta del proceso, llevado a cabo entre DI y DA, en la construcción de un proyecto de enseñanza sobre funciones con GeoGebra, para evidenciar la colaboración. Esa elaboración posibilitó un análisis de los aspectos constitutivos de determinados saberes que se quiere enseñar (qué relaciones se establecen, qué argumentos se movilizan, cuáles procedimientos se asocian, qué registros de representaciones se requieren, qué saberes disponen los alumnos en vínculo con lo que se quiere enseñar), ayuda a visibilizar relaciones relevantes que pueden surgir en su desarrollo en el aula.

Una de las cuestiones que guiaron el desarrollo que presentamos aquí es la complejidad que tiene desde el punto de vista del trabajo docente, concebir la enseñanza y el aula de matemática como espacios de producción de conocimientos. En ese sentido, se remarca entonces la necesidad de concebir ese trabajo a partir de un colectivo en colaboración.

Nos ubicamos en dos momentos particulares de nuestra IC, selección de la situación de enseñanza y discusión de la gestión de la clase. Se muestra parte de ese análisis con la intención de visibilizar aspectos que particularizan a una IC. De esta manera podemos decir que, en la selección de la situación de enseñanza que incluya el uso de GeoGebra en el inicio del trabajo conjunto, se convino en un problema proveniente de la investigación y que los docentes les resulta familiar. Se logra en esa aceptación satisfacer una doble pertinencia social en el sentido que la situación se reconoce por ambas comunidades. Este criterio de doble verosimilitud es fundamental dado que abre la posibilidad de entrar en un proceso de co-construcción. En la anticipación de una posible gestión de la clase se organiza un medio didáctico que emerge del juego entre una sensibilidad teórica y una sensibilidad práctica, entre DI y DA, en la creación de un “medio didáctico” que favorece el uso de la hoja de cálculo como recurso eficaz para el estudio de las variaciones y dar sentido a las funciones.

El análisis y discusión realizados constituyen una vía de acceso -conjunta- donde se redefinen las consignas, la modalidad de trabajo (un poco en papel y lápiz, luego GeoGebra) y se va configurando la propuesta que finalmente llegó al aula. Se acuerda en una entrada al aula con una organización diferente a la habitual que aborda el estudio de las funciones a partir de la modelización. En particular, el problema conduce a explorar/estudiar las variaciones entre magnitudes pudiendo caracterizar el crecimiento uniforme. La hoja de cálculo aparece como recurso eficaz para el estudio de las variaciones y dar sentido a las funciones. Al mismo tiempo, el análisis conjunto de este recurso ofreció un escenario fértil para la problematización del conocimiento, en el que los intercambios entre los DI y DA aportan a la comprensión, a desnaturalizar prácticas y así contribuir con argumentos para disponer de mayor margen de maniobra en el aula.

El trabajo conjunto avanza atravesado por las particularidades de la IC. Un aspecto importante presente en el desarrollo de la etapa de la co-operación y que marcó el desarrollo de la experiencia se vincula con atender a las distintas perspectivas de las DI y DA conforme se va trabajando conjuntamente. Entre lo ideal y lo posible se construye un problema en el que el uso de la hoja de cálculo logra combinar perspectivas de las DI y DA. La modelización como un proceso que marca un tipo de actividad acompañado de una gestión que suaviza la transición hoja-lápiz-software sin descuidar a la producción de conocimiento por parte de los alumnos. La postura del DI es muy compleja, necesita de experiencia, sensibilidad y apertura para permitir esta co-construcción y mantener esta doble verosimilitud a lo largo de todo el proceso.

Bibliografía

Anadon M. (2007). *La recherche participative. Multiples regards*. Québec: Presses de l'Université du Québec.

Barry y Saboya (2015). Un éclairage sur l'étape de co-situation de la recherche collaborative à travers une analyse comparative de deux études en didactique des mathématiques, en Recherches Qualitatives. *La Recherche Qualitative Aujourd'hui: Réflexions et Pratiques.* Canadá. Vol. 34(1), pp. 49-73.

Bednarz N., Desgagné S., Diallo P. Poirier, L. (2001). Approche collaborative de recherche: une illustration en didactique des mathématiques. In P. Jonnaert, S. Laurin (dir.). Les didactiquesdes disciplines, un débat contemporain. Sainte-Foy: Presses de l'Université du Québec. p. 177-207.

Bednarz, N. (2004). Collaborative research and professional development of teachers in mathematics [CD-ROM]. Dans M. Niss y E. Emberg (Éds), Proceedings of the international conference on mathematics education. Copenhagen, Denmark : Plenary Lectures.

Bednarz, N. (2009). Analysis of a collaborative research project : a researcher and a teacher confronted to teaching mathematics to students presenting difficulties. Mediterranean Journal for Research in Mathematics Education, 8(1), 1-24.

Bednarz, N. (2013a). Recherche collaborative en didactique des mathématiques. Une entrée avec les enseignants sur les questions de la profession. Dans A. Bronner, C. Bulf; C. Castela, J.; P. Georget; M. Larguier; B. Pedemonte, … E. Roditi (Éds), Questions vives en didactique des mathématiques : problèmes de la profession d'enseignant, rôle du langage (Vol. 1, pp. 121-170). Grenoble: *La Pensée Sauvage*.

Bednarz, N. (2013b). À la rencontre entre deux préoccupations : vers la clarification d'un objet commun d'investigation. Dans N. Bednarz (Éd.), *Recherche collaborative et pratique enseignante: regarder ensemble autrement* (pp. 41-47). Paris: L'Harmattan.

Bednarz, N. (2017a). Conferencia inaugural EDIMAT 2017. Parte 1: De la entrada en la investigación al análisis: la investigación colaborativa-en-acción sus características sus exigencias sus aportes *Escuela en Didáctica de la Matemática*. Neuquén.

Bednarz, N. (2017b). Conferencia inaugural EDIMAT 2017. Parte 2: La actividad reflexiva en el corazón de la perspectiva de investigación colaborativa. Características de los dispositivos puestos en lugar fundamentos la co-operación en acción exigencias. *Escuela en Didáctica de la Matemática. Neuquén*.

Bednarz, N. (2017c). Conferencia inaugural EDIMAT 2017. Parte 3: Análisis y difusión: los desafíos de la doble verosimilitud. *Escuela en Didáctica de la Matemática*. Neuquén.

Brousseau, G. (2000). Educación y Didáctica de las matemáticas, en *Educación Matemática. México*, Vol. 12 No. 1 Abril 2000 pp. 5-38. http://www.revista-educacion-matematica.org.mx/descargas/Vol12/1/03Brousseau.pdf

Brousseau, G. (2007). *Iniciación al estudio de la teoría de las situaciones didácticas*, libros del Zorzal, Bs. As.

Desgagné, S. (1997). Le concept de recherche collaborative : l'idée de rapprochement entre chercheurs universitaires et praticiens enseignants. *Revue des sciences de l'éducation,* 23(2), 371-393.

Desgagné, S. (1998). La position du chercheur en recherche collaborative : illustration d'une démarche de médiation entre culture universitaire et culture scolaire. *Recherches qualitatives,* 18, 77-105.

Desgagné, S.; Bednarz, N.; Couture, C.; Poirier, L. y Lebuis, P. (2001). L'approche collaborative de recherche en éducation: un nouveau rapport à établir entre recherche et formation. *Revue des sciences de l'éducation*, 27(1), 33-64.

Desgagné S. (2001). La recherche collaborative: nouvelle dynamique de recherche en éducation. In M. Anadon (dir.). *Des nouvelles dynamiques de recherche en éducation.* Québec : Presses de l'Université Laval. p. 51-76.

Desgagné, S., y Bednarz, N. (2005). Médiation entre recherche et pratique en éducation: faire de la recherche « avec » plutôt que « sur » les praticiens. *Revue des sciences de l'éducation,* XXXI (2), 245-258.

Desgagné, S. (2007). Le défi de coproduction de «savoir» en recherche collaborative : autour d'une démarche de reconstruction et d'analyse de récits de pratique enseignante. Dans M. Anadón (Éd.), *La recherche participative: multiples regards* (pp. 89-121). Québec : Presses de l'Université du Québec.

Detzel y Martinez (2015). Espacios de trabajo colaborativo: un medio para pensar las Tic en el aula, en VII Escuela en Didáctica de la Matemática, octubre, Buenos Aires.

Perrin-Glorian, M. J. y Moreira Baltar Bellemain, P. (2016). L'ingenierie didactique entre recherche et ressource pour l'enseignement et la formation des maitres, en I Simpósio Latino-Americano de Didática da Matemática, novembro de 2016, Bonito - Mato Grosso do Sul - Brasil

Ruiz Munzón, N. (2010). *La introducción del álgebra elemental y su desarrollo hacia la modelización funcional*. VOLUMEN 1, Tesis doctoral, Universitat Autònoma de Barcelon. Sadovsky, P.; Itzcovich, H.; Quaranta, M.E.; Becerril, M. M. y García, P. (2016). Tensiones y desafíos en la construcción de un trabajo colaborativo entre docentes e investigadores en didáctica de la matemática, en *Educación Matemática*, vol. 27, núm. 1, abril de 2016.

Martinez, Rosa. Es Profesora en Matemáticas. Magister en Educación en Ciencias de la Universidad Nacional del Comahue. Se desempeña como Profesor Adjunto, en el área de Didáctica de la Matemática en la Facultad de Ciencias de la Educación -UNCo. Ha participado en numerosos proyectos de investigación en enseñanza de la matemática. Actualmente investiga en temáticas relacionadas con la conformación de grupos colaborativos entre investigadores y docentes de matemática alrededor de la problemática de su enseñanza. rosifmartinez@gmail.com

Detzel, Patricia. Es Profesora en Matemáticas. Magister en Educación en Ciencias, con orientación Matemática, de la Universidad Nacional del Comahue. Se desempeña como Profesor Adjunto, dedicación completa en el Departamento de Matemática de FaEA, de la Universidad Nacional del Comahue. Ha participado en numerosos proyectos de investigación en enseñanza de la matemática. Actualmente investiga sobre temáticas vinculadas a la formación continua de docentes que enseñan matemática, desde una perspectiva colaborativa. pdetzel@gmail.com

UNIÓN
REVISTA IBEROAMERICANA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA

ISSN: 1815-0640
Número 64. Abril 2022
Páginas 1-19

A abordagem de conceitos iniciais ao método científico nos anos finais do ensino fundamental: uma experiência articulando o estudo da estatística com o desenvolvimento de projetos de pesquisa

Karine Machado Fraga de Melo, Claudia Lisete Oliveira Groenwald

Fecha de recepción: 10/10/2021
Fecha de aceptación: 26/10/2021

Resumen	Este artículo presenta una discusión acerca del sondeo de conceptos iniciales al método científico en los años de la Educación Secundaria Obligatoria (ESO). Se ha adoptado el método de análisis de caso para la realización de esa investigación. La experiencia englobó dos grupos de 9º año (14 / 15 años), totalizando 52 alumnos de una escuela pública de la ciudad de Porto Alegre/RS. Los resultados mostraron que la implementación de una secuencia didáctica electrónica articulada con la estrategia metodológica proyectos de investigación posibilitó a los estudiantes participantes del experimento, el estudio de conceptos iniciales del método científico, entre estos se destacaron: elementos esenciales que constituyen un trabajo científico, problematización de la investigación, resumen, referencial teórico, estudio bibliográfico, metodología, instrumento para recolecta de datos , referencias bibliográficas. **Palabras clave**: Enseñanza Secundaria Obligatoria, estadística, método científico, proyectos de investigación.
Abstract	This article presents a discussion on the approach of initial concepts to the scientific method in the final years of elementary school. The case study method was adopted for the research. The participants were two groups of 9th graders of a puplic state school in the city of Porto Alegre, state of Rio Grande do Sul, Brasil, totaling 52 students. The results showed that the implementation of an electronic didactic sequence articulated with the methodological strategy of research projects provided the opportunity for students participating in the experiment, the study of the initial concepts to the scientific method, among which stood out: essential elements that constitute a scientific work, study issue, abstract, theoretical framework, bibliographic study, methodology, instrument for data collection, bibliographic references. **Keywords**: Elementary School, statistic, scientific method, research project.

Resumo	Este artigo apresenta uma discussão sobre a abordagem de conceitos iniciais ao método científico nos anos finais do Ensino Fundamental. Adotou-se para a realização da pesquisa o método de estudo de caso. A experiência abrangeu duas turmas de 9ºano do Ensino Fundamental, num total de 52 alunos de uma escola pública do munícipio de Porto Alegre/RS. Os resultados apontaram que a implementação de uma sequência didática eletrônica articulada com a estratégia metodológica projetos de pesquisa oportunizou aos estudantes participantes do experimento, o estudo dos conceitos iniciais ao método científico, entre eles destacaram-se: elementos essenciais que constituem um trabalho científico, problema de pesquisa, abstract, referencial teórico, estudo bibliográfico, metodologia, instrumento para coleta de dados, referências bibliográficas. **Palavras-chaves:** Ensino Fundamental, estatística, método científico, projetos de pesquisa.

1.Introdução

Segundo as Diretrizes da Educação Básica do Brasil, a Educação Estatística tem um papel fundamental no desenvolvimento da interdisciplinaridade, da transversalidade, do espírito científico e da formação dos alunos para a cidadania (Brasil, 1998).

Lopes (2008) considera a Educação Estatística um tema essencial da Educação para a cidadania, uma vez que possibilita o desenvolvimento de uma análise crítica sob diferentes aspectos científicos, tecnológicos e/ou sociais.

Lopes (2010b) afirma, também, que as sugestões metodológicas dos currículos para a Educação Básica devem ser no sentido de aproveitar os interesses reais dos alunos para coletar e organizar os conjuntos de dados que servirão de base ao trabalho que será desenvolvido ao longo de uma unidade.

Simultaneamente, de acordo com Machado (2000), é preciso o enriquecimento de práticas pedagógicas fomentando e valorizando os trabalhos de grupos, a realização de projetos, as atividades exploratórias e de investigação e o gosto pela resolução de problemas visando uma participação efetiva dos alunos no processo de ensino e aprendizagem.

Considerando tais referências, apresenta-se as contribuições da articulação da estratégia metodológica de projetos de pesquisa com o estudo dos conceitos estatísticos direcionados para estudantes dos anos finais do Ensino Fundamental, destacando a apropriação de conceitos iniciais ao método científico pelo grupo de alunos participantes de um experimento proposto na investigação, evidenciados pela professora ao acompanhar e avaliar o desempenho dos grupos na realização das atividades práticas que constituíram as etapas estabelecidas para o desenvolvimento dos projetos de pesquisa.

2 Projetos de Pesquisa: Uma Abordagem Didático-Metodológica para o Processo de Ensino e Aprendizagem da Estatística

A Educação Estatística demanda um ambiente de aprendizagem no qual o aluno participa ativamente do processo de ensino e aprendizagem em situações reais, em que tenham que fazer investigações.

Para Batanero (2011), uma forma eficaz de trabalhar Estatística no contexto escolar é através de projetos. Nesse sentido Novanta (2013), destaca que o trabalho com projetos de pesquisa leva os estudantes a responderem alguns questionamentos, por exemplo: "*qual é o meu problema?*", *"necessito de dados?"*, *"Quais?"*, "*Como posso obtê-los?"*, *"o que significa esse resultado na prática?".*

Os alunos devem apreciar como a Estatística é associada ao método científico: observar a natureza e formular questões, relacionar dados que lançam luz sobre essas questões, analisar os dados e comparar os resultados com o que tinham pensado previamente, levantar novas questões e assim sucessivamente (Hogg, 1991).

Para Lopes (2010a) o ensino da Estatística deve ocorrer através das experimentações, observações, registros, coleta e análise de dados, de modo interdisciplinar, podendo então possibilitar aos estudantes o desenvolvimento do sentido crítico, elemento fundamental no exercício de uma cidadania crítica, responsável e participativa.

Observa-se uma consonância entre as ideias de Hogg (1991) e de Lopes (2010a) ao afirmar que a Educação Estatística no nível básico deve possibilitar aos estudantes a aprendizagem sobre: como formular questões que podem ser resolvidas com os dados e como coletar, organizar e apresentar dados relevantes para respondê-las; selecionar e usar métodos estatísticos apropriados para analisar os dados; desenvolver e avaliar inferências e previsões baseadas em dados.

Lopes (2004) propõe um processo de ensino e aprendizagem da Educação Estatística com uma perspectiva investigativa, na qual os alunos tenham vivência com a geração e com a análise de dados em situações nas quais precisem tomar decisões com base nos dados coletados. Segundo Lopes (2004) o processo compreende as etapas: definição da questão-problema; coleta dos dados; representação dos dados; interpretação dos dados; e elaboração de deduções e/ou decisões. Na perspectiva investigativa, o aluno deve participar ativamente do processo, desde a geração até a análise dos dados e da tomada de decisão.

A abordagem de projetos de pesquisa no processo de ensino e aprendizagem da Estatística se dispõe a atender os seguintes objetivos:

> 1º) Partir do interesse do aluno, propiciando a este a oportunidade de fazer o que gosta, de dar o seu toque pessoal, de ter a chance de expressar o que sente e de ser o protagonista do seu aprendizado;
> 2º) Apresentar a Estatística como um saber potencialmente útil para a compreensão deste interesse ao desenvolver um processo de investigação que integra conteúdos, métodos, meios e fins;
> 3º) Fazer uso do trabalho cooperativo em pequenos grupos de modo que o discente tenha a oportunidade de se expressar, discutir e ponderar ideias e pontos de vista, ajudar e aprender com os colegas (Biajone, 2006, p. 03).

Mas, para que o trabalho com projetos de pesquisa tenha resultados promissores, segundo Groenwald, Silva e Moura (2004), é importante seguir algumas etapas, pré-estabelecidas e organizadas: iniciativa, discussão, planejamento, desenvolvimento, apresentação dos resultados e avaliação. A seguir, descrevem-se essas etapas, segundo Groenwald, Silva e Moura (2004).

Na etapa da iniciativa, tanto os alunos como os professores assumem a elaboração de um projeto, debatendo temáticas que sejam do interesse dos estudantes e que se relacionem com suas experiências. Nessa fase, todas as ideias devem ser levantadas, prevalecendo a democracia participativa entre os diferentes componentes envolvidos, como alunos, docentes, escola e comunidade.

No planejamento é organizado um cronograma de atividades, os procedimentos que devem ser realizados e quem os realiza.

Na etapa de elaboração de um plano de trabalho cada integrante deve indicar sugestões e iniciativas, de acordo com suas possibilidades e potencialidades. É muito importante que todos os participantes assumam uma conduta ativa e tenham clareza de qual será o seu papel, em cada uma das atividades.

Os autores também consideram importante estabelecer as razões pelas quais foi decidido optar por um determinado assunto e estar ciente de que o planejamento de um projeto é um instrumento flexível, que deve sofrer modificações em seu desenvolvimento, adaptando-se às dificuldades e às novas dúvidas que podem surgir.

O desenvolvimento é a etapa onde se executa o planejado. Nesta etapa, as informações pesquisadas devem ser compartilhadas e discutidas pelos membros do grupo ao qual pertencem. Nesta fase, ainda segundo os autores, poderão ser discutidos, com maior profundidade, os avanços inconvenientes e novas ideias surgidas da realidade investigada.

A apresentação dos resultados deve ser à comunidade escolar, através de um trabalho escrito, de um pôster ou de outra maneira que exija o envolvimento dos alunos na apresentação. Essa etapa é importante para a socialização dos conhecimentos adquiridos e a ampliação através do debate com o público.

Na fase de avaliação, devem-se definir as formas da avaliação da atividade realizada pelos alunos, podendo ser realizada pelo professor, por outros professores ou outros envolvidos, além do próprio aluno.

Recomenda-se a elaboração e o cumprimento de todas as etapas para que os objetivos sejam alcançados com sucesso e os alunos atinjam um crescimento satisfatório, tendo sempre em todas as fases, um momento para reflexão, ação e novamente reflexão, modificando o planejamento cada vez que o grupo sentir necessidade, sem pedir de vista o objetivo final, traçado no início do planejamento (Groenwald, Silva, Mora, 2004).

O projeto é uma fonte de investigação e criação e sua dinâmica de trabalho permite, por intermédio da realização de suas etapas, o uso da coleta, da organização e da análise de informações, da adoção e discussão de estratégias, da resolução de problemas, da tomada de decisões e da comunicação, seja oral ou escrita, dos resultados obtidos (Nogueira, 2002).

Nesse sentido, ao considerar a formação de um sujeito crítico, como um objetivo a ser atingido pelo processo de ensino e aprendizagem, é essencial a construção de conceitos e não apenas o desenvolvimento de técnicas operacionais. Observa-se então que, para Busatta e Magalhães (2015), o ensino através de projetos corrobora com este objetivo, uma vez que o estudante iniciará a partir da análise de situações e a construção dos conceitos ocorrerão na medida em que o educando necessite avançar no processo de desenvolvimento do pensamento estatístico.

Nesta investigação, ao propor a articulação da estratégia metodológica de projetos de pesquisa com o estudo dos conceitos estatísticos implementados em uma sequência didática eletrônica1, pretendeu-se investigar as contribuições de tal proposta para o processo de ensino e aprendizagem da Estatística nos anos finais do Ensino Fundamental, bem como, as possibilidades de impulsionar o pensamento estatístico.

3 Ações Metodológicas da Investigação

Para o desenvolvimento desta investigação, foi adotada a abordagem qualitativa, que de acordo com Bogdan e Biklen (1999), tem como alvo compreender melhor o comportamento e a experiência humana. Os pesquisadores salientam a importância de entender o processo pelo qual as pessoas constroem significados e descrevem o que são esses significados.

Na investigação utilizou-se o método de estudo de caso, que segundo Lüdke e André (1986), visa à descoberta, enfatiza a interpretação em contexto, busca retratar a realidade de forma completa e profunda utilizando fontes de informação diversificada que permitem generalizações naturalísticas, procura representar os diferentes pontos de vista numa situação social e utiliza uma linguagem e uma forma mais acessível do que outros relatórios de pesquisa.

Para investigar as contribuições da articulação do desenvolvimento de projetos de pesquisa com a implementação de uma sequência didática eletrônica, para o processo de ensino e aprendizagem da Estatística nos anos finais do Ensino Fundamental, foi realizada uma experiência com alunos do 9º ano.

O desenvolvimento da investigação passou pelas seguintes etapas:

- elaboração da proposta de atividade na qual se articula o desenvolvimento de projetos de pesquisa à implementação de uma sequência didática eletrônica contendo os conceitos básicos da Estatística;

- implementação da sequência didática eletrônica na plataforma de ensino SIENA. (Sistema Integrado de Ensino e Aprendizagem). O SIENA foi organizado pelos grupos de Tecnologias Educativas da Universidade de La Laguna, Tenerife, Espanha e o GECEM (Grupo de Estudos Curriculares de Educação Matemática) do Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Matemática da Universidade Luterana do Brasil. O Sistema SIENA possui duas opções de uso: a primeira serve para o aluno estudar um conteúdo específico e realizar o teste, para verificar quais são seus conhecimentos sobre os conceitos estudados; a segunda opção

[1] Nesta investigação, aborda-se o termo sequência didática eletrônica e entende-se como sendo um conjunto de atividades pedagógicas organizadas e implementadas em uma plataforma de ensino, no qual são utilizados diferentes recursos didáticos, entre eles: material de estudo desenvolvido a partir do editor de apresentação gráfica *Powerpoint* da *Microsoft*, salvo em *HTML*; atividades lúdicas desenvolvidas no aplicativo *JCLIC*; jogo *Online*; *links* de vídeos referentes aos conceitos estudados.

oportuniza, ao aluno, realizar o teste e estudar os conceitos nos quais apresentou dificuldade.

- realização da experiência com duas turmas do 9º ano do Ensino Fundamental de uma escola pública de Porto Alegre, Rio Grande do Sul;
- análise dos dados coletados durante a aplicação do experimento.

Para a obtenção de dados foram utilizados os seguintes procedimentos: registro da organização e representação dos dados coletados pelos alunos; registros dos textos desenvolvidos pelos grupos para a análise das representações tabulares e gráficas produzidas; filmagens das apresentações dos resultados de pesquisa dos grupos, com autorização da escola e dos responsáveis pelos alunos; observações realizadas no decorrer da experiência pela professora.

Assim, com a utilização de diferentes procedimentos para a obtenção de dados, foi realizada a triangulação dos mesmos, para identificar os resultados obtidos.

4 O Experimento Realizado com Estudantes do 9ºano do Ensino Fundamental

A experiência foi realizada com duas turmas do 9º ano do Ensino Fundamental de uma escola pública de Porto Alegre, Rio Grande do Sul. Participaram da experiência 52 alunos, dos quais 28 pertenciam à turma 91 e 24 pertenciam à turma 92.

O experimento foi aplicado no período de 6 meses, integrado aos estudos dos conteúdos matemáticos. Os encontros aconteceram no turno da manhã, no horário de aula da disciplina de Matemática. Os alunos também acessaram em suas residências o material de estudos disponibilizado no Sistema SIENA.

Concomitantemente, ao estudo dos conceitos estatísticos implementados na sequência didática eletrônica, foram desenvolvidos pelos estudantes projetos de pesquisa sobre temas de relevância social. O objetivo da articulação da sequência didática eletrônica com o trabalho de projetos de pesquisa foi promover a construção dos conceitos estatísticos na medida em que os educandos necessitassem avançar em seus projetos.

Ocorreram encontros na sala de aula e no laboratório de informática da escola. Nas orientações a professora desenvolveu a definição de pesquisa e suas etapas, exemplos de pesquisas desenvolvidas, sugestões de temas a serem pesquisados. A Figura 1 apresenta trechos de um dos materiais de estudos elaborados para o tópico *Pesquisa e Estatística*.

Figura 1 - Trecho de um dos materiais de estudos desenvolvido para o tópico da sequência didática eletrônica: Pesquisa e Estatística
Fonte: a pesquisa.

No final das orientações foi sugerido aos alunos que se reunissem em pequenos grupos e que refletissem sobre um dos temas de relevância social que considerassem importantes para a sociedade e de interesse do grupo. As sugestões apresentadas para os alunos contemplavam os temas transversais sugeridos pelos Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN) (Brasil,1998) e os temas integradores sugeridos pela Base Nacional Comum Curricular (Brasil, 2015).

Após a escolha do tema, a professora auxiliou os grupos na delimitação do problema de pesquisa. Os alunos também foram orientados a realizarem um estudo bibliográfico sobre o tema a ser pesquisado seguido de uma produção textual para composição do referencial teórico da pesquisa. Durante os encontros a professora orientou sobre o significado de problema de pesquisa, estudo bibliográfico, referencial teórico, metodologia da pesquisa. Os conceitos foram apresentados aos alunos de acordo com o nível de escolaridade dos mesmos. A Figura 2 apresenta o quadro com as etapas da pesquisa e as ações realizadas pelos alunos durante o desenvolvimento das pesquisas.

Etapas	Ações realizadas pelos alunos	Ambiente em que ocorreram as ações
Planejamento	Acesso ao material de estudo disponibilizado na sequência didática eletrônica com as orientações para o desenvolvimento das etapas das pesquisas	Laboratório de informática
	Escolha do tema	Tarefa para casa
	Elaboração do problema de pesquisa	Sala de aula
Construção do referencial teórico e do instrumento para coleta de dados	Estudo Bibliográfico sobre o tema a ser pesquisado, para isso foi sugerido a leitura de no mínimo três textos sobre o assunto selecionado	Tarefa para casa
	Produção de um texto para o referencial teórico	Sala de aula
	Construção do instrumento para coleta de dados	Sala de aula
	Aplicação do instrumento de coleta de dados	Saída a campo
Organização e representação dos dados	Acesso ao material de estudo disponibilizado na sequência didática eletrônica	Laboratório de informática
	Produção de registros para organizar e representar os dados coletados	Sala de aula
	Construção das representações tabulares e gráficas utilizando o *Software Excel da Microsoft*, com base nos registros produzidos	Tarefa para casa
Análise e interpretação dos dados	Acesso ao material de estudo disponibilizado na sequência didática eletrônica	Laboratório de informática
	Produção de um texto contendo a análise e a interpretação das representações gráficas e tabulares	Sala de aula
Divulgação e comunicação dos resultados	Construção do *banner*	Sala de aula e tema de casa
	Apresentação do *banner* para a turma	Sala de aula
	Apresentação do *banner* para a comunidade escolar	Saguão da escola

Figura 2 - Quadro com as ações realizadas pelos alunos durante o desenvolvimento das pesquisas
Fonte: a pesquisa.

Após a realização das atividades práticas da primeira etapa de desenvolvimento dos projetos de pesquisa, denominada de *Planejamento,* ficou estabelecido com os grupos o acesso ao estudo teórico dos conceitos estatísticos, abordados pelo segundo tópico da sequência didática eletrônica, *Introdução à*

Estatística, necessários para a execução das atividades práticas propostas pelo experimento para a segunda etapa de desenvolvimento dos projetos de pesquisa.

Na etapa da organização e representação dos dados, foi proposto aos grupos que, a partir dos registros escritos, utilizassem um software para apresentar as representações tabulares e gráficas. Tal proposta visou possibilitar o desenvolvimento de habilidades de caráter instrumental, de acordo com o contexto em que os estudantes estavam inseridos. Salienta-se que essa habilidade é importante, visto que esses alunos vivem em uma sociedade eminentemente tecnológica.

Cada grupo, ao término da pesquisa, entregou o desenvolvimento impresso do trabalho e elaborou um *banner* para divulgar os resultados obtidos. Para elaboração dos *banners*, foi necessário que a professora auxiliasse os grupos. Em um primeiro momento, foi explicado aos grupos o que era um *banner* e qual seu objetivo; após, reuniram-se a professora e as duas turmas para discutir quais elementos deveriam compor o *banner*. Os elementos selecionados foram: um *template* com os dados da escola, o título, os autores, introdução, metodologia, referencial teórico, análise dos dados, conclusões, referências bibliográficas.

A divulgação dos resultados ocorreu, em um primeiro momento, para os demais grupos do 9ºano e, em um segundo momento, houve a socialização com a comunidade escolar, através da apresentação na III Feira Científica-Cultural promovida pela escola.

Observou-se que durante a Feira Científica Cultural, os estudantes demonstraram responsabilidade e seriedade durante as apresentações, com o comparecimento de todos os alunos no evento. Nesse sentido, Campos (2007) afirma que para possibilitar o desenvolvimento da habilidade de comunicação nos alunos, é necessário oportunizar situações nas quais eles tenham que explicar seus resultados para convencer outras pessoas de suas ideias.

5. Análise dos Dados

Para analisar a habilidade de comunicação estatística escrita foi solicitado aos grupos que ao término da pesquisa entregassem impresso a versão escrita de todo o processo de desenvolvimento da pesquisa. Para analisar a habilidade de comunicação estatística oral foi proposto aos alunos a elaboração de um banner, a partir da versão escrita da pesquisa, para apresentação e socialização dos resultados obtidos com os demais grupos que constituem a turma.

As habilidades estatísticas e os objetivos considerados para cada etapa de desenvolvimento dos projetos de pesquisa foram selecionados de acordo com os hábitos mentais e as habilidades para resolução de problemas necessários para o pensamento estatístico propostos por Chance (2002), bem como pelo modelo PPDAC (Problema, Plano, Dados, Análise e Conclusões) propostos por Wild e Pfannkuch (1999). A Figura 3 apresenta o quadro com as habilidades estatísticas investigadas em cada etapa de desenvolvimento dos projetos de pesquisa.

Etapa	Objetivo das atividades propostas	Habilidades a serem desenvolvidas
Planejamento	Promover, em sala de aula, um ambiente favorável, para investigação e reflexão acerca de temas de interesse dos estudantes, no qual os mesmos tenham que tomar decisões	**H1 –** Formar grupos de trabalho; **H2 -** Selecionar um tema de relevância social, de acordo com interesse do grupo; **H3 -** Formular questões;

	e, nesta etapa de planejamento a tomada de decisão dos grupos refere-se a seleção dos temas de pesquisa, a análise e a justificativa da escolha. Visa-se também possibilitar aos estudantes momentos de formulação de questionamentos.	
Construção do referencial teórico e do instrumento para coleta de dados. (Segunda etapa)	Viabilizar momentos nos quais os alunos sejam colocados frente a situações que exijam a decisão sobre quais técnicas serão necessárias utilizar para formulação de respostas para as questões de pesquisa.	**H4-** Selecionar textos com informações sobre o tema a ser pesquisado; **H5-** Ler e sintetizar as ideias contidas nos textos pesquisados; **H6-** Debater as condições para obter dados; **H7-** Construir procedimentos para coletar os dados; **H8-** Refletir sobre as variáveis estatísticas envolvidas na construção do instrumento para coleta de dados através da identificação e classificação das mesmas; **H9-** Escolher a amostra; **H10**- Aplicar o instrumento de coleta de dados.
Organização e representação dos dados	Possibilitar aos alunos a construção de procedimentos para organizar e representar os dados coletados com a aplicação do questionário; Utilizar a planilha eletrônica como ferramenta para apresentar as representações tabulares e gráficas obtidas com base nos dados coletados.	**H11 -** Organizar os dados coletados; **H12 –** Representar os dados coletados utilizando diferentes formas; **H13 -** Utilizar a planilha eletrônica para apresentar os dados obtidos.
Análise e interpretação dos dados	Possibilitar aos estudantes o desenvolvimento da habilidade da comunicação estatística escrita a partir da produção textual contendo a análise e interpretação das representações gráficas e tabulares dos dados coletados.	**H14 -** Habilidade de Comunicação Estatística Escrita: utilizar corretamente a terminologia estatística para interpretar e comunicar os resultados obtidos com a aplicação do instrumento de coleta de dados a partir da produção textual contendo a análise e interpretação das representações gráficas e tabulares.
Divulgação e comunicação dos resultados obtidos	Possibilitar aos alunos o desenvolvimento da habilidade de comunicação estatística oral a partir de situações nas quais os estudantes tenham que explicar os resultados obtidos de forma que a explicação seja compreensível à outros.	**H15** – Criar instrumentos para comunicação e divulgação dos resultados de pesquisa. **H16** – Habilidade de Comunicação Estatística Oral: utilizar corretamente a terminologia estatística para comunicar, oralmente, os resultados expressos nas representações gráficas e tabulares produzidas; **H17 -** Estruturar a versão impressa de um trabalho de pesquisa que contenha, como elementos obrigatórios: capa, folha de rosto, sumário, abstract, introdução; referencial teórico, metodologia, análise dos dados, considerações finais, referências bibliográficas;

Figura 3 - Quadro das habilidades investigadas em cada etapa do desenvolvimento dos projetos de pesquisa
Fonte: a pesquisa.

Foram formados 23 grupos e os temas de pesquisa selecionados por eles, de acordo com a Figura 4, contemplam questões de relevância social.

TURMA 91		
Grupo	Número de alunos	Tema
01	03	Cultura Asiática: Japão
02	03	Aparelhos tecnológicos mais utilizados no dia a dia
03	02	Redução da Maioridade Penal
04	03	Principais formas de agressões cometidas contra as mulheres
05	02	A Segurança Pública no bairro Belém Novo
06	03	Bullying

07	03	Agressão Sexual: "Cultura" do Estupro
08	02	A qualidade dos meios de transportes públicos no bairro Belém Novo
09	01	O Salário Mínimo
10	03	A importância da separação do lixo
11	03	Saúde Pública no Bairro Belém Novo
TURMA 92		
12	01	Um estudo sobre o Projeto Social WimBelemDon
13	01	O significado das cores na separação do lixo
14	03	O uso da tecnologia no dia a dia
15	02	O interesse dos jovens pelo estudo
16	02	Principais meios de poluição no bairro Belém Novo
17	02	Violência contra os animais
18*[2]	02	O consumo de bebidas alcóolicas na adolescência.
19	02	Gravidez na adolescência
20	02	Violência no trânsito
21	02	A qualidade do serviço de saúde pública do posto de saúde do bairro Belém Novo
22	02	O lixo jogado nas ruas
23	02	O racismo
24	03	Fatores que favorecem a violência no trânsito

Figura 4 - Quadro com a distribuição dos grupos investigados e os temas selecionados
Fonte: a pesquisa.

Evidencia-se que, nesta etapa de planejamento e execução dos projetos de pesquisa, os estudantes vivenciaram momentos de questionamentos, tais como: *"Qual tema pesquisar? Como justificar a relevância do assunto a ser pesquisado? O que já se conhece do tema? O que será feito? Como?*".

Entende-se que ao oportunizar aos estudantes momentos de questionamentos, contribuiu-se para o desenvolvimento do pensamento estatístico geral, que, segundo Wild e Pfannkuch (1999), é um tipo de pensamento estatístico que está relacionado ao planejamento do ciclo investigativo, no qual se possibilita aos alunos evidenciar a importância da coleta de dados.

Considerou-se que os objetivos traçados para as atividades práticas, Figura 3, que constituíram essa etapa foram alcançados pois, ocorreu em sala de aula, a promoção de um ambiente favorável para a investigação e reflexão acerca de temas de relevância social de interesse dos grupos investigados, no qual os mesmos tiveram que tomar decisões referentes à seleção, análise e justificativa dos temas de pesquisa.

Salienta-se que conceitos relacionados ao método científico foram abordados com estudantes do 9º ano do Ensino Fundamental. Durante a etapa de planejamento, a professora explicou aos alunos a definição de problema de pesquisa.

Na "*Construção do Referencial Teórico* e do *Instrumento para Coleta de Dados*", segunda etapa, de desenvolvimento das pesquisas, oportunizou-se a amostra investigada o estudo teórico dos conceitos estatísticos: amostra, população e variáveis, abordados no segundo tópico que constitui a sequência didática eletrônica, denominado *Introdução à Estatística*, bem como foram apresentados aos estudantes conceitos referentes ao método científico, entre eles: estudo bibliográfico, referencial teórico, instrumentos de coleta dados, metodologia, referências bibliográficas.

[2] Os alunos que constituíam o grupo 18 não concluíram o trabalho, pois um dos alunos foi transferido de escola e o outro abandonou os estudos. Participaram apenas no início das atividades.

Para a terceira etapa de desenvolvimento dos projetos de pesquisa foram investigadas três habilidades: H11, H12 e H13, conforme Figura 3. Ao analisar os registros produzidos pelos grupos para a organização dos dados, identificou-se a presença do segundo componente do pensamento estatístico específico, proposto por Wild e Pfannkuch (1999): a transnumeração. Observou-se que dos vinte e três grupos investigados, sete grupos necessitaram do auxílio da professora para organizar e representar os dados coletados com a aplicação do instrumento de coleta. A Figura 5 ilustra a organização dos dados coletados, referentes à idade dos sujeitos de pesquisa do Grupo 15.

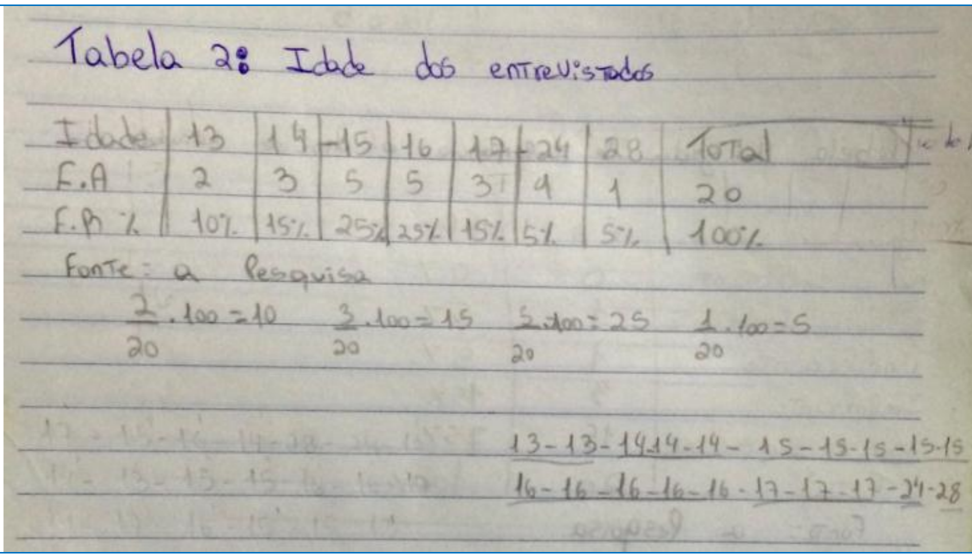


Tabela 2: Idade dos entrevistados

Idade	13	14	15	16	17	24	28	Total
F.A	2	3	5	5	3	1	1	20
F.R %	10%	15%	25%	25%	15%	5%	5%	100%

Fonte: a Pesquisa

$\frac{2}{20}.100=10$ $\frac{3}{20}.100=15$ $\frac{5}{20}.100=25$ $\frac{1}{20}.100=5$

13-13-14 14-14- 15-15-15-15-15
16-16-16-16-16-17-17-17-24-28

Figura 5 - Registro escrito apresentado pelo Grupo 15 para Organização dos Dados
Fonte: a pesquisa.

Observou-se que o grupo anotou as idades em ordem crescente, lado esquerdo da Figura 5, ou seja, os alunos apresentaram o rol para as idades e a partir dele, construíram a tabela de distribuição de frequências para as idades dos entrevistados. Essa transformação, do rol para uma representação tabular, evidenciou a presença do segundo componente do pensamento estatística presença do segundo componente do pensamento estatístico específico, a transnumeração, em que ao passar os dados brutos a uma representação tabular ou gráfica permite significá-los (Wild; Pfannkuch, 1999).

Nesse sentido considerou-se que a terceira etapa, possibilitou aos estudantes condições necessárias à construção de procedimentos para organizar e representar os dados coletados favorecendo assim, o desenvolvimento do componente responsável pelo pensamento estatístico específico: a transnumeração. Constatou-se o desenvolvimento de habilidades de caráter instrumental, visto que a amostra investigada utilizou como recurso tecnológico para apresentar as representações tabulares e gráficas o *software Excel*. A Figura 6 ilustra os registros produzidos pelo Grupo 08, utilizando como recurso tecnológico o *software Excel* da *Microsoft*.

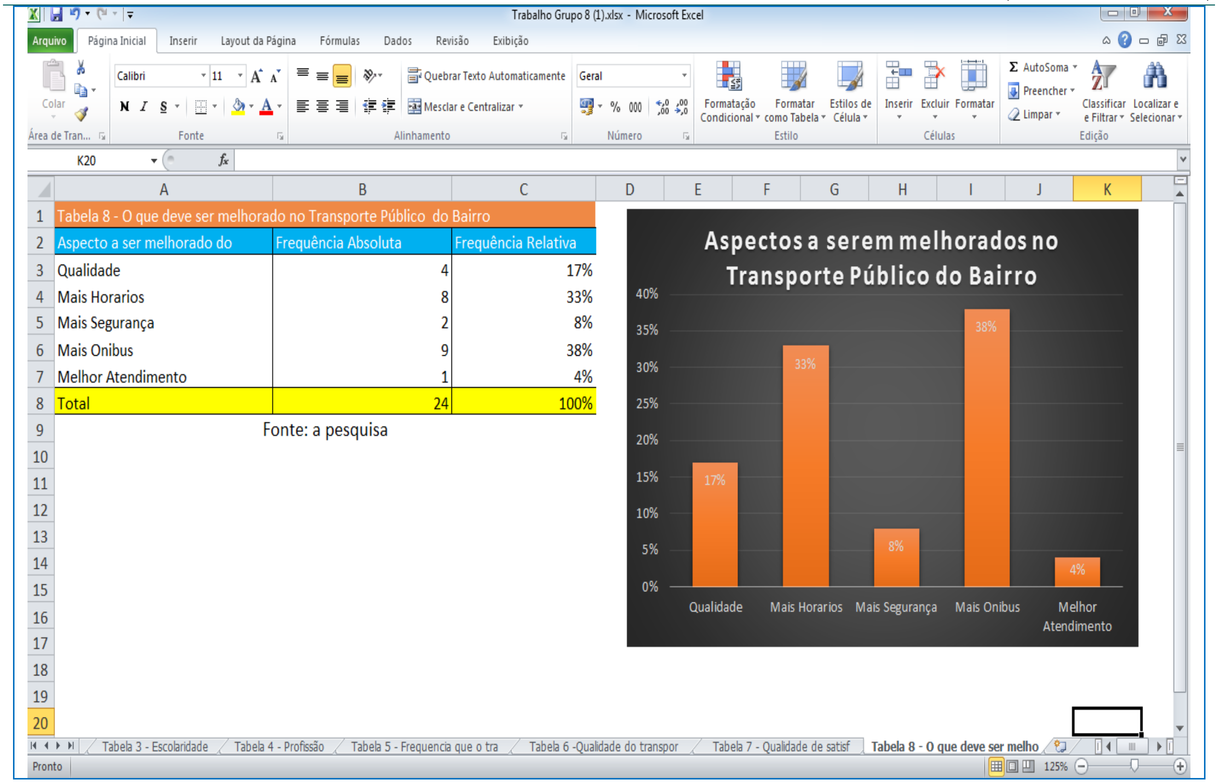


Tabela 8 - O que deve ser melhorado no Transporte Público do Bairro		
Aspecto a ser melhorado do	Frequência Absoluta	Frequência Relativa
Qualidade	4	17%
Mais Horarios	8	33%
Mais Segurança	2	8%
Mais Onibus	9	38%
Melhor Atendimento	1	4%
Total	24	100%

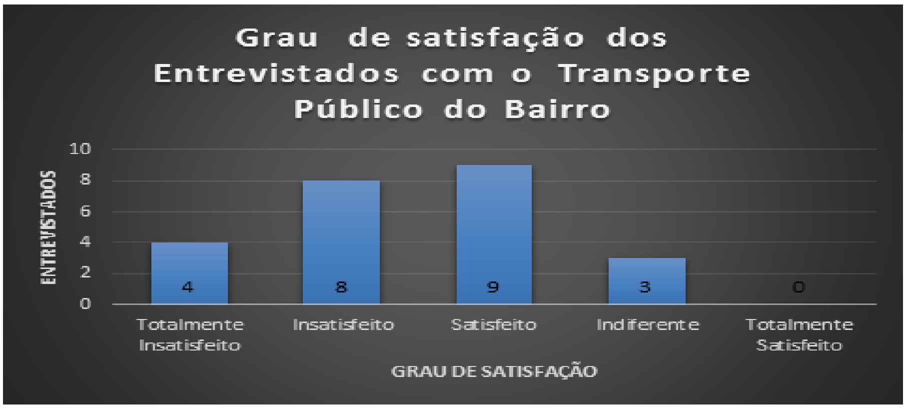
Fonte: a pesquisa

Figura 6 - Registros produzidos pelo Grupo 08 utilizando como recurso tecnológico o software Excel para representações gráficas e tabulares
Fonte: a pesquisa.

De acordo com a Figura 5,observou-se que o Grupo 08 explorou os recursos fornecidos pelo *software Excel*, para a apresentação de suas representações gráficas e tabulares. O grupo propôs títulos para as representações gráficas e tabulares e também a referência da fonte de obtenção dos dados. Salienta-se ainda que para representar os dados expressos na tabela o grupo selecionou o gráfico de colunas, evidenciou-se que o grupo realizou a escolha correta. Todos os arquivos enviados à professora pesquisadora foram avaliados e corridos, após devolvidos aos grupos para impressão.

Na quarta etapa, denominada *Análise e Interpretação dos dados*, buscou-se investigar a habilidade de comunicação estatística escrita, com base nos textos produzidos pelos grupos investigados, a partir das representações gráficas e tabulares elaboradas pelos mesmos, para analisar e interpretar os dados coletados, com a aplicação do instrumento de coleta (questionários), em que se evidenciou, também, a presença da transnumeração, na qual os alunos comunicaram o significado com os dados representados nas tabelas e gráficos, de forma compreensível à outros. A Figura 7 apresenta o parágrafo do texto, *Análise dos Dados*, produzido pelo Grupo 08, no qual os alunos propuseram uma representação gráfica para a variável "*grau de satisfação dos entrevistados com o transporte público do bairro*".

O gráfico a seguir refere-se à satisfação dos entrevistados em relação aos meios de transportes públicos do bairro.



Fonte: a pesquisa

De acordo com o gráfico, 17% dos entrevistados (4) estão totalmente insatisfeitos com o transporte público, 33% (8 entrevistados) estão insatisfeito com o transporte público, 37% (9 entrevistados) estão satisfeitos com o transporte público, 13% (3 entrevistados) votaram indiferente, nenhum dos entrevistados disse que estava totalmente satisfeito .

Figura 7 - Parágrafo do texto "Análise dos Dados" produzido pelo Grupo 08
Fonte: a pesquisa.

De acordo, com a representação gráfica proposta pelo Grupo 08, verificou-se que os alunos apresentaram um título para o gráfico e informaram a fonte dos dados, nomearam o eixo das ordenadas e o eixo das abscissas. Na análise da representação gráfica o grupo explicita as porcentagens referentes ao grau de satisfação dos entrevistados e acrescentam o número de entrevistados correspondente a cada uma delas.

A análise da habilidade estatística oral dos grupos foi realizada durante as apresentações dos banners desenvolvidos pelos grupos para socializar os resultados de suas pesquisas com os colegas. As apresentações foram gravadas com autorização dos responsáveis pelos alunos e com autorização da direção da escola. A análise dos vídeos das apresentações permitiu observar que, dos 23 grupos, 7 apresentaram dificuldades na explicação e divulgação oral dos resultados de suas pesquisas.

Com relação à presença adequada da terminologia própria da Estatística na explicação, argumentação e discussão dos resultados obtidos, evidenciou-se que os Grupos: 02, 05, 07, 09, 13, 14 e 16 recorrem a linguagem própria da Estatística na explicação e descrição dos resultados obtidos com base nos dados coletados. A seguir apresenta-se, Figura 8, um trecho da fala do Grupo 05.

"*Concluímos que 57% da amostra pesquisada estava insatisfeita com a segurança do bairro, lembrando que a amostra é só o que nós pesquisamos, não é a população inteira de Belém Novo*" (GRUPO 05).

Figura 8 – Trecho da fala do Grupo 05 ao apresentar os dados obtidos com o desenvolvimento da pesquisa
Fonte: a pesquisa.

Neste trecho evidenciou-se que o grupo fez a leitura correta dos dados contidos no gráfico do *banner* e em seus argumentos utiliza adequadamente a linguagem própria da Estatística para expressar os resultados obtidos. Identificou-se no discurso do Grupo 5 a compreensão dos conceitos estatísticos de amostra e população. Identificou-se, também, na apresentação oral, a presença da transnumeração, pois se entende que ao realizar a leitura correta dos dados contidos no gráfico, a aluna, por meio de uma linguagem Estatística adequada socializa os resultados obtidos de forma que possibilite as pessoas que estão assistindo a apresentação, a compreensão da informação que está sendo divulgada, identificando-se a transnumeração, que de acordo com Wild e Pfannkuch (1999), comunica o significado que surge dos dados, de forma que seja compreensível a outros.

Ao analisar os vídeos das apresentações dos Grupos: 03, 06, 08, 10, 11, 17,19, 21 e 23, observou-se que estes divulgaram os dados obtidos por meio da leitura adequada das informações contidas nas representações gráficas ou tabulares dos *banners*, embora não tenham utilizado em suas leituras e descrições a terminologia própria da Estatística.

Observou-se ainda, que a articulação do estudo dos conceitos estatísticos por meio de uma sequência didática eletrônica implementada com a estratégia metodológica projetos de pesquisa oportunizou aos grupos investigados a apropriação de conceitos relacionados ao método científico, entre eles: problema de pesquisa, referencial teórico, metodologia, considerações finais, referências bibliográficas.

A Figura 9 apresenta trechos retirados das gravações das apresentações que evidenciaram, nos diálogos dos alunos, a apropriação dos conceitos iniciais ao método cientifico, de acordo com o nível de escolaridade em que se encontravam os estudantes investigados.

"... agora vou passar a palavra à minha colega... que ela vai falar sobre a metodologia: que são as etapas do trabalho". (ALUNA A, GRUPO 05).
"... logo depois criamos o problema de pesquisa, no qual a pergunta é qual o grau de satisfação dos entrevistados...". (ALUNA B, GRUPO 05)

Figura 9- Trechos retirados das gravações das apresentações orais dos grupos nos quais se referem aos conceitos iniciais ao método científico.
Fonte: a pesquisa.

Evidenciou-se também, nas apresentações orais dos grupos, a identificação das etapas da pesquisa, estudadas no tópico do grafo *Pesquisa Estatística*. A Figura 10, apresenta um trecho retirado da gravação da apresentação do Grupo 03, no qual a aluna citou as etapas de desenvolvimento do trabalho.

> ***"...** Para construção desse trabalho: primeiro a gente escolheu o tema de pesquisa que é a redução da maioridade penal, depois a gente escolheu o problema de pesquisa, que é qual a opinião das pessoas sobre a redução, depois a gente fez uma pesquisa bibliográfica na internet pesquisando vários textos, depois a gente construiu o instrumento de coleta de dados: o questionário, depois a gente aplicou o questionário, depois a gente organizou os dados obtidos através de gráficos e tabelas, depois a gente elaborou o referencial teórico e para finalizar a análise de dados" (ALUNA, GRUPO 03).*

Figura 10 - Trecho retirado da gravação da apresentação oral do Grupo 03 no qual a aluna cita as etapas de desenvolvimento do trabalho
Fonte: a pesquisa.

A análise das apresentações, a partir das observações realizadas pela professora pesquisadora, possibilitou evidenciar atitudes positivas nos grupos frente às orientações e considerações das apresentações orais. Dos vinte e três grupos investigados, vinte grupos: iniciaram as apresentações identificando os componentes do grupo e a disciplina em que haviam realizado a pesquisa, apresentaram o tema da pesquisa e a justificativa do mesmo, identificaram o problema de pesquisa, explicaram o referencial teórico, mencionaram as etapas de desenvolvimento da pesquisa, explicaram a análise dos dados a partir das representações gráficas e tabulares, apresentaram as considerações finais e as referências bibliográficas. Quatro grupos demonstraram dificuldades nas apresentações orais.

Todos os grupos investigados entregaram à professora pesquisadora as versões impressas de acordo com as solicitações. Salienta-se a parceria da professora de Inglês, que auxiliou os alunos na produção do *abstract*, contribuindo para promoção do trabalho interdisciplinar entre duas áreas do conhecimento distintas, conforme Figura 11.

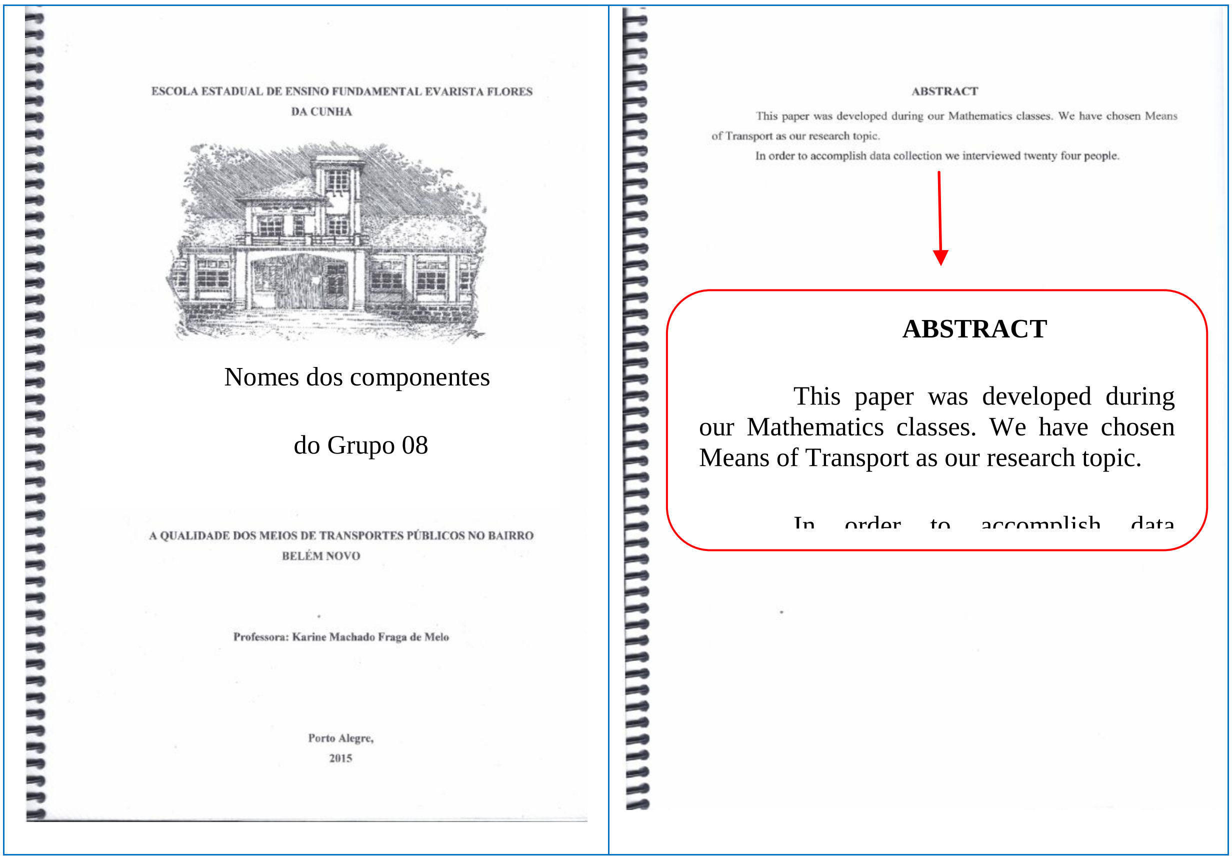


Figura 11 - Versão impressa das pesquisas desenvolvidas
Fonte: a pesquisa.

Evidenciou-se de modo geral, no grupo de estudantes participantes do experimento, a apropriação de conceitos iniciais ao método científico, entre eles: elementos essenciais que constituem um trabalho científico, problema de pesquisa, abstract, referencial teórico, estudo bibliográfico, metodologia, instrumento para coleta de dados, referências bibliográficas.

6 Considerações Finais

A articulação do estudo dos conceitos estatísticos a partir da implementação (desenvolvimento, aplicação e avaliação) de uma sequência didática eletrônica com a estratégia metodológica de projetos de pesquisa possibilitou, a amostra investigada, o estudo teórico dos conceitos estatísticos a partir da necessidade de compreensão dos mesmos para o avanço no desenvolvimento das etapas que constituíram as pesquisas, o que propiciou condições necessárias para a transformação do objeto teórico de estudo (conceitos estatísticos) em instrumentos cognitivos aplicados a situações práticas e reais favorecendo o desenvolvimento de habilidades estatística articuladas ao desenvolvimento de componentes responsáveis pela formação do pensamento estatístico.

A etapa de divulgação dos resultados obtidos favoreceu a análise das habilidades estatísticas de comunicação escrita e oral. Nessa fase evidenciou-se, também, a presença da transnumeração. Verificou-se ainda, que os estudantes desenvolveram a habilidade de utilizar a linguagem própria da Estatística para explicar, argumentar e discutir os resultados obtidos.

O acompanhamento e avaliação contínua das fases de desenvolvimento dos projetos de pesquisa dos grupos possibilitou a identificação das habilidades estatísticas desenvolvidas em cada etapa das pesquisas realizadas pelos grupos. Além de identificar as habilidades desenvolvidas, foi possível verificar os tipos de pensamento estatístico propostos por Wild e Pfannkuch (1999) em cada uma das fases das pesquisas.

Ao articular o desenvolvimento de projetos de pesquisa com o estudo dos conceitos estatísticos implementados em uma sequência didática eletrônica, possibilitou-se a abordagem da Estatística associada ao método científico no processo de ensino e aprendizagem da Matemática nos anos finais do Ensino Fundamental. Sugere-se que essa articulação seja feita em todos os níveis de escolaridade, pois considera-se um processo gradativo que deve ser aprofundado, de acordo com o nível de escolaridade em que os alunos se encontram.

Considera-se, assim como Moran (2003), essencial à formação dos estudantes o princípio de que a Educação é um processo de vida e não apenas, uma preparação para o futuro ou uma forma de transmissão da cultura e do conhecimento. Nesse sentido, acredita-se que ambientes pedagógicos, em que ao lado da aprendizagem curricular seja enfatizada também a investigação e reflexão, contribuem para transformar o aluno de objeto em sujeito e de aprendiz em cidadão crítico e atuante no contexto social ao qual está inserido.

Referências Bibliográficas

Batanero, C. (2011). *Estadística com Proyectos*. Universidad de Granada.

Biajone, J. (2006).Trabalho de projetos: possibilidades e desafios na formação estatística do pedagogo. *Dissertação*. Universidade Estadual de Campinas: Programa de Pós-Graduação em Educação. Campinas, SP.

Bodgan, R. C.; Biklen, S. K. (1999). *Investigação Qualitativa em Educação: uma introdução à teoria e aos métodos*. Porto: Porto Editora.

Brasil. Secretaria de Educação Fundamental. (1998). *Parâmetros Curriculares Nacionais: Matemática: introdução aos Parâmetros Curriculares Nacionais*. Brasília: MEC/SEF.

Brasil. Ministério de Educação. (2015). *Base Nacional Comum Curricular*. Brasília: MEC. Recupeado el 12 de abril de 2016 de http://basenacionalcomum.mec.gov.br/#/site/inicio.

Busatta, M.; Magalhães, M. N. (2015). *Ensino de Estatística através de Projetos.* Instituto de Matemática e Estatística, IME – USP.

Campos, C. R. (2007). A Educação Estatística: uma investigação acerca dos aspectos relevantes à didática da estatística em cursos de graduação. *Tese* de Doutorado. Rio Claro (SP).

Chance, B. L. (2002). Components of statistical thinking and implications for instruction and assessment. In*: Journal of Statistics Education*, 10(3).

Groenwald, C. L. O.; Silva, C. K. da; Mora, C. D. (2004). Perspectivas em Educação Matemática*. ACTA SCIENTIAE,* Revista de Ciências Naturais e Exatas. 6(1), 37-55.

Hogg, R. V. (1991). Statistical education: improvements are badly needed. *The American Statistician*, 45, 342-343.

Lopes, C. A. E. (2008). O ensino da Estatística e da probabilidade na Educação básica e a formação dos professores**.** *Caderno* Cedes, Campinas, SP, 28 (74), 57-73. Recupeado el 18 de octubre de 2016 http://www.cedes.unicamp.br.

Lopes, C. A. E. *A* (2010a). *Educação Estatística no Currículo de Matemática: um ensaio teórico*. REUNIÃO ANUAL DA ANPED 33. Caxambu. Recupeado el 13 de octubre de 2016 http://www.anped.org.br/ 33encontro / internas/ver/trabalhos-gt19.

Lopes, C. A. E. *A* (2010b). Os Desafios para Educação Estatística no Currículo de Matemática. In:*Estudos e Reflexões em Educação Estatística*. LOPES, Celi Espasandin,COUTINHO, Cileda de Queiroz e Silva, ALMOULOUD, Saddo Ag (Orgs). São Paulo: Mercado de Letras, 85-103.

Lüdke, M.; André, M. E. D.(1986). A. *Pesquisa em Educação: abordagens qualitativas*. São Paulo: EPU.

Machado, I. R.(2000). O insucesso escolar em Matemática no terceiro ciclo do ensino básico: Factores concorrenciais. In: FERNANDES, E. & MATOS, J. F. (Orgs.). *Actas do ProfMat* 2000. Funchal: Associação de Professores de Matemática.

Moran, J. M. (2003). Perspectivas (virtuais) para a Educação. *Cadernos Adenenauer*. Rio de Janeiro, 4 (6), 31-35.

Nogueira, N. R. (2002). *Pedagogia dos Projetos*. São Paulo: Ed. Érica.

Novanta, A. F. (2013). Ensino de Estatística através de projetos: uma experiência no 9º do Ensino Fundamental*. Dissertação*. Instituto Nacional de Matemática Pura e Aplica: IMPA. Rio de Janeiro.

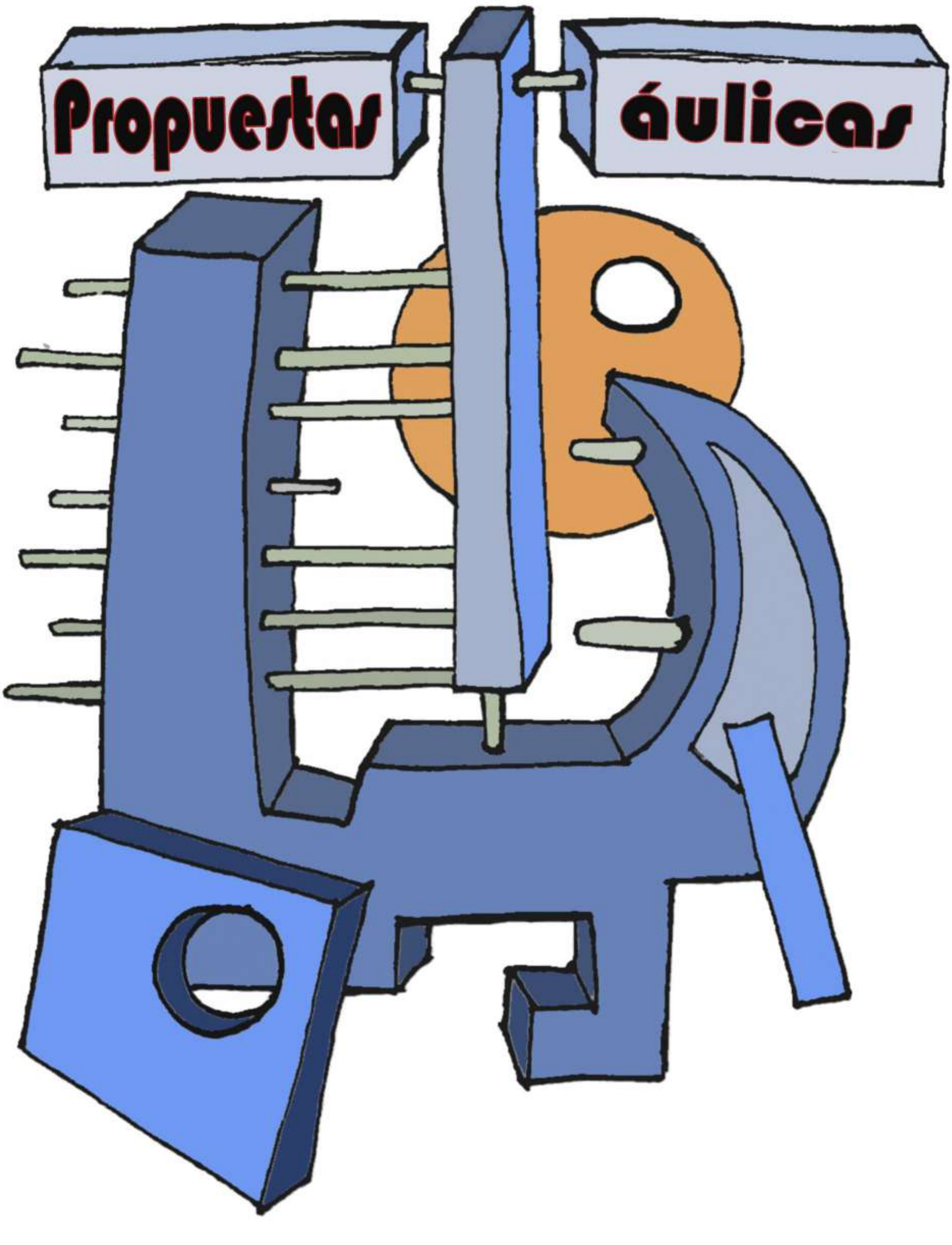
Wild, C.; Pfannkuch, M. (1999). *Statistical Thinking in Empirical Enquiry. International Statistical*. Review, 67(3), 223-265.

Autores

Melo Karine Machado Fraga de. Licenciada en Química y doctora en Ciencias de la Educación. Profesora titular del Colégio Estadual Dr. Glicério Alves .Desarrolla investigaciones sobre, enseñanza e aprendizaje en Educación Matemática. E-mail: karinemfm@gmail.com
https://orcid.org/0000-0003-4288-2147

Groenwald Claudia Lisete Oliveira. Licenciada en Matemáticas y doctora en Ciencias de la Educación. Profesora titular de la Universidad Luterana de Brasil y coordinadora del Programa de Posgrado en Enseñanza de Ciencias y Matemáticas. Desarrolla investigaciones sobre currículo en Educación Matemática, enseñanza e aprendizaje y tecnología en Educación Matemática. E-mail: claudia1959@gmail.com.
https://orcid.org/0000-0001-7345-8205

UNIÓN
REVISTA IBEROAMERICANA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA
http//union.fespm.es/index.php



UNIÓN
REVISTA IBEROAMERICANA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA

ISSN: 1815-0640
Número 64. Abril 2022
Páginas 1-21

Experiencias con actividades lúdicas para el aprendizaje de operaciones con números enteros

Experiências com atividades divertidas para aprender operações com inteiros

Elena Freire-Gard, Claudia Castillos-Carelli, Lucas Bentancur-Rodríguez

Fecha de recepción: 27/5/2021
Fecha de aceptación: 22/11/2021

Resumen	Este artículo presenta experiencias de dos futuros profesores de matemáticas en formación inicial docente al enseñar operaciones con números enteros en su práctica docente y analiza las repercusiones en el aprendizaje al incluir actividades lúdicas y applets de GeoGebra en estudiantes de 12-13 años. Las actividades lúdicas y los applets fueron inspirados en el modelo de bloques, en el videojuego plantas vs. zombies y en las cartas Magic. La metodología utilizada para la investigación fue cualitativa-interpretativa y se basó en la investigación-acción sobre la práctica docente. Las actividades lúdicas permitieron a los estudiantes inferir las reglas para sumar y multiplicar números enteros. **Palabras clave**: formación de docentes de secundaria, educación a distancia, matemáticas, material didáctico, tecnología educacional.
Abstract	This article presents the experiences of two future mathematics teachers in initial teacher training when teaching operations with Integers in their teaching practice and analyzes the repercussions on learning when including play activities and GeoGebra applets in 12-13 year old students. The playful activities and applets were inspired by the block model, in the video game plants vs. zombies and on Magic cards. The methodology used for the research was qualitative-interpretive and was based on action research on teaching practice. Playful activities allowed students to infer the rules for adding and multiplying Integers. **Keywords**: secondary teacher training, distance education, mathematics, teaching materials, educational technology.
Resumo	Este artigo apresenta as experiências de dois futuros professores de matemática na formação inicial de professores ao ensinar operações com números inteiros em sua prática de ensino e analisa o impacto na aprendizagem da inclusão de atividades lúdicas e miniaplicativo GeoGebra em alunos de 12 a 13 anos. As atividades lúdicas e os applets foram inspirados no modelo de blocos, nas plantas de videogame vs. zumbis e em cartas de Magic. A metodologia utilizada para a pesquisa foi qualitativo-interpretativa e se baseou na pesquisa-ação sobre a prática docente. As atividades lúdicas permitiram aos alunos inferir as regras para somar e multiplicar números inteiros. **Palavras-chave:** formação secundária de professores, educação à distância, matemática, material didáctico, tecnologia educacional.

1. Introducción

El aprendizaje de los números enteros y su enseñanza es un tópico de preocupación para los profesores de matemáticas. No solo por la importancia que tiene en el aprendizaje de otros temas del currículo, sino por los errores que se identifican al realizar operaciones con números negativos. Para que los estudiantes logren aprender a realizar operaciones con números enteros, es necesario que superen obstáculos epistemológicos y cognitivos. Por un lado, se requiere que el estudiante posea cierta madurez cognitiva (11-12 años) para comprender el tema. Por otro lado, como propone Filloy (1999), la madurez cognitiva depende del desarrollo individual de cada estudiante. Otra dificultad para aprender a realizar operaciones con números negativos es la sugerida por Glaeser (1981), quien identificó que la falta de posibilidades de los estudiantes para manipular números negativos les impide construir el significado de las cantidades negativas aisladas. Esta dificultad se refuerza con el hecho de que los estudiantes vivencian un estancamiento en el estadio de las operaciones concretas y necesitan objetos tangibles para darle sentido a los números negativos. Cabe destacar que Parada, Pluvinage y Sacristán (2013) nos alertan que en la educación formal el tema números negativos se introduce en un contexto aritmético; sin embargo el desarrollo histórico de su enseñanza surgió como necesidad para realizar cálculos algebraicos.

2. Antecedentes

Particularmente en el tema números enteros, encontramos experiencias como las de Castillo Banda (2019) y Castillo Angulo (2014), quienes incluyen materiales manipulativos para su enseñanza. En relación a estos materiales, Castillo Angulo (2014) identificó que los estudiantes experimentan mejoras en el aprendizaje de las operaciones de números enteros. A su vez, Castillo Banda (2019) incluyó un juego que aplicó con estudiantes de 12 años. El mismo fue realizado con rondanas de diferentes colores, unas para números positivos y otras para números negativos. Esta autora reconoce que los estudiantes necesitan oportunidades para reflexionar sobre sus propias acciones y construir sus propios significados.

Otra experiencia que lleva a apreciar el valor de los juegos la ofrecen Carmona-Mesa y Villa Ochoa (2018), quienes realizaron una capacitación docente en el uso de tecnología en Colombia. La misma promovió que los participantes lograran descubrir el potencial que ofrecen los juegos digitales para el aprendizaje de la matemática. Entre los recursos incorporados, uno de ellos se vincula a la enseñanza de los números enteros e involucró el análisis del videojuego Math zombies como medio para fortalecer el aprendizaje de las operaciones matemáticas. El análisis realizado permitió modificar las creencias de los futuros profesores sobre la inclusión de videojuegos para aprender matemáticas y valorar las posibilidades de aprendizaje que ofrecen.

3. Marco teórico

La elaboración del primer juego, presentado en este artículo, tiene como base el modelo de concretos o de bloques (Freudenthal, 1983; Gallardo, 2002 citado en Hernández y Gallardo, 2006). El modelo de concretos, también llamado modelo de bloques es el recurso didáctico más utilizado para lograr el aprendizaje de números enteros (Parada, et. al., 2013, p.246). Este modelo consta de representaciones de los números enteros mediante el uso de bloques para identificar y aprender las reglas para operar dentro de este conjunto numérico (Hernández y Gallardo, 2006).

El mismo es utilizado para aprender números negativos como un modelo de neutralización que pone en acción bloques opuestos que se anulan entre sí (Janvier, 1985). La propuesta anterior ha tenido algunas modificaciones, como por ejemplo la sugerida por Calvo, Deulofeu, Jareño y Morera (2016) con cargas positivas y negativas con una lógica similar.

4. Contexto

Esta investigación se realiza en Uruguay, en el último año de formación inicial docente con dos futuros profesores de matemática (Claudia y Lucas), que cursan Didáctica III. Este curso consta de una parte teórica y otra práctica. En la parte práctica los futuros profesores tienen a su cargo un grupo de Educación Media Básica (estudiantes entre 12 y 15 años), en el que desempeñan el rol docente durante todo el año. Durante ese año son supervisados por el profesor formador a cargo del curso de Didáctica III (Elena). Claudia y Lucas se encontraban en la segunda semana de la práctica docente cuando el 16 de marzo del año 2020 la educación en todos los niveles pasó a ser únicamente virtual, debido a la pandemia provocada por el COVID 19. A partir de ese momento el único medio por el cual se impartieron las clases de Educación Secundaria fue mediante la plataforma virtual educativa Schoology. Además del trabajo en plataforma, se incluyeron videoconferencias y debido a las dificultades de conectividad que presentaron muchos estudiantes, de forma complementaria, se grabaron video-clases asincrónicas. Finalmente, a partir del mes de julio del mismo año, cambia la modalidad de enseñanza volviendo a la enseñanza presencial con grupos reducidos. En este último período se combinó el trabajo virtual con el presencial dentro del aula. La investigación sucede en la transición entre la modalidad de enseñanza virtual y la presencial.

Previo a planificar la unidad temática de números enteros, Claudia y Lucas indagaron en diversos reportes de investigación (Hernández y Gallardo, 2006; Valdés, 2011) con el objetivo de identificar las dificultades que suelen presentar los estudiantes en la apropiación del contenido del tema. Sumado a las dificultades que se identificaron, ellos plantearon su preocupación por el contexto de enseñanza en que se encontraban. En el mes de julio de 2020, Claudia y Lucas diseñaron e implementaron dos juegos y dos applets creados con GeoGebra, con la intencionalidad de utilizar nuevas estrategias para facilitar el aprendizaje del tema números enteros. En este artículo se reportan dichas experiencias y sus resultados.

4.1. Pregunta de investigación

La pregunta que guía esta investigación lleva a indagar sobre el impacto en el aprendizaje de los estudiantes al incluir actividades lúdicas y applets en el tema números enteros. En ese sentido la pregunta de esta investigación es: ¿Qué repercusiones se evidencian en el aprendizaje de los números enteros al incluir actividades lúdicas y applets diseñados con GeoGebra para su enseñanza?

4.2. Objetivo

El objetivo que se propuso para realizar el estudio se orienta hacia: Analizar las repercusiones en el aprendizaje del tema números enteros al incluir dos actividades lúdicas y dos applets de GeoGebra en cinco grupos de 1er año (12-13 años) de Educación Secundaria y en un club de niños (11-12 años).

5. Metodología

Esta investigación se enmarca en un enfoque cualitativo para analizar las repercusiones de incluir dos actividades lúdicas y dos applets con el fin de aprender a operar con números enteros. El enfoque cualitativo es utilizado en el sentido que plantea Kilpatrick (1988, citado en Sierra-Vázquez, 2011, p.183). Este autor propuso desplazar la investigación empírico analítica hacia la investigación cualitativa-interpretativa y propone incluir este enfoque para informar y así mejorar las prácticas pedagógicas del profesor. A su vez, se incluye la investigación-acción (Elliot, 2000) orientada a resolver problemas concretos de la educación matemática.

Un primer investigador (Elena) tiene el doble rol de ser investigadora y profesora formadora de Didáctica. Otros dos investigadores (Claudia y Lucas) desempeñan también un doble rol, el de investigadores y profesores practicantes en el aula. A su vez, ambos profesores practicantes tienen además del grupo de práctica, otros grupos a su cargo. Entre las técnicas que se utilizan para desarrollar la investigación se incluyen: observación de aula, revisión documental, entrevista a estudiantes.

La investigación se desarrolla de la siguiente manera: a) diseño de la planificación del tema números enteros, creación de actividades lúdicas y applets. b) Implementación de la planificación, c) observación de aula a partir de las retroalimentaciones de los estudiantes y d) análisis reflexivo, realizado en el curso de Didáctica III, por parte de los profesores practicantes sobre lo que va pasando en cada una de sus clases.

6. El proceso de trabajo, elaboración, implementación y análisis

Tal como se planteó en la metodología, dos de los investigadores cumplen un doble rol, ser investigadores y a la vez profesores practicantes en sus grupos de 1er año de Ciclo Básico Único (CBU). Los investigadores están involucrados en diferentes fases del rol docente: en el diseño de las actividades lúdicas, las planificaciones de clase, su análisis a priori, implementación y el análisis luego de la misma. Particularmente en estas diferentes fases, la profesora formadora orientó y acompañó a los profesores practicantes en el proceso de desarrollo del rol docente. De esta forma la profesora formadora realizó un acompañamiento en el diseño de las actividades que se implementaron y a la vez, desarrolló una metodología reflexiva sobre la práctica docente, lo que posibilitó incluir mejoras sobre la misma. Cada semana los futuros profesores realizaron la planificación de clases para la siguiente semana y la compartieron en la clase de Didáctica III. A la vez, fueron comunicando los avances y dificultades que se les presentaron para implementar la planificación. Entre algunos aspectos que se atendieron para ir mejorando el rol docente, se identifican la gestión del aula, el registro del pizarrón y la discusión grupal. Respecto a la gestión del aula se sugirió al profesor practicante mostrar en forma grupal el juego, realizar trabajos en pequeños grupos y luego la puesta en común de resultados. Respecto de la puesta en común se propuso mostrar posibles jugadas al tirar los dados o situaciones de cartas que pudieran presentarse. Por otra parte fue necesario crear diferentes estrategias de enseñanza según las características particulares de cada grupo, por ejemplo, según el número de estudiantes. El trabajo de discusión grupal fue relevante para compartir lo que habían descubierto los estudiantes de Educación Secundaria y a la vez, para formalizar o institucionalizar el conocimiento en el aula.

La primera actividad lúdica fue diseñada para sumar números enteros y la segunda para realizar operaciones combinadas dentro de ese conjunto numérico. Las mismas se incluyeron con la expectativa de que fueran un medio para introducir y fortalecer los conocimientos.

El proceso de trabajo de los profesores practicantes involucró las siguientes fases:

1. Diseño de actividades lúdicas.
2. Diseño de una estrategia para incluir los juegos en la plataforma virtual.
3. Creación de un video tutorial para aprender a jugar.
4. Subida de la plantilla de cartas en la plataforma virtual para motivar a los estudiantes a que jueguen en sus hogares y puedan realizar operaciones de números enteros.
5. Implementación de la actividad lúdica en la plataforma virtual para cinco grupos de 1er año de Ciclo Básico de Educación Secundaria y otro conformado por estudiantes de un club de niños.
6. Evaluación sobre los aprendizajes de los estudiantes.
7. Análisis de los resultados obtenidos en relación a los aprendizajes y las opiniones de los estudiantes.

6.1. Los juegos y los applets

A continuación se explica a grandes rasgos en qué consisten los juegos y applets. La primera actividad lúdica se inspiró en el video-juego *Plantas Vs. Zombies*, ampliamente conocido por los estudiantes. Este juego surgió como idea para introducir las operaciones de adición y sustracción de números enteros. Además del juego se incluyeron dos applets que brindan retroalimentación sobre las operaciones que se realizaron. De esta forma se trasladó el combate con fichas entre plantas y zombies al campo virtual. El segundo juego es una actividad lúdica con cartas para realizar operaciones combinadas.

6.2. Primer juego: Plantas vs. Zombies

Un primer juego, tiene como finalidad aprender a sumar números enteros. Para su diseño se tuvo en cuenta la propuesta de Freudenthal (1983) de neutralizar opuestos. Se crearon fichas con plantas y zombies, donde cada planta representa una unidad positiva y cada zombie una unidad negativa (ver los tres formatos del juego en Imagen 1 a Imagen 3). Se inicia el juego al tirar dos dados: un dado contiene en tres caras la imagen de un *zombie* (con un signo de "-" superpuesto) y en las otras tres caras contiene la imagen de una *planta* (con un signo de "+" superpuesto); el otro dado tiene números del 1 al 6.

Imagen 1. Un primer formato del juego de plantas vs. zombies. Fuente: Creación propia.

Imagen 2: Un segundo formato del juego. Fuente: creación propia.

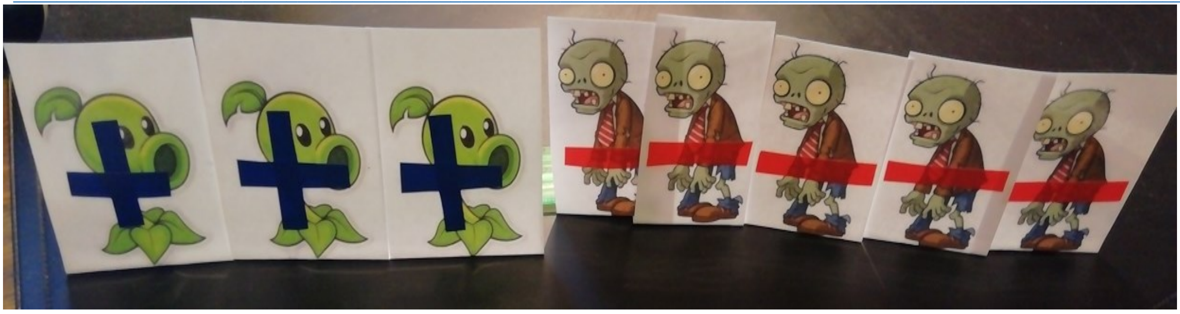


Imagen 3: Otra forma de presentar el juego. Fichas sin soporte.

6.3. Metodología del juego

Se forman dos equipos, uno representará a las plantas y el otro a los zombies. Un integrante de cada equipo tira los dados, miran sus caras superiores y se ponen en el tablero las fichas que entrarán en "combate". Vale aclarar que en el turno de las plantas (o zombies) pueden salir zombies o plantas; con esto nos encontramos con la posibilidad que puedan sumar números enteros de igual signo. Luego de lanzar los dados los estudiantes tendrán que calcular cuántas *plantas* o *zombies* quedarán como sobrevivientes (recordando que cada planta anula a un zombie y viceversa). Si el resultado de la primera ronda es positivo gana el equipo de las plantas, o en su defecto si es negativo gana el equipo de los zombies. Por ejemplo, según las siguientes imágenes (Imágenes 4 y 5) se puede observar que luego de tirar los dados han salido 3 plantas y 5 zombies que representan los números +3 y -5.

Imagen 4. Tirada de los dados con las caras superiores representando +3.

Imagen 5. Tirada de los dados con las caras superiores representando -5.

En este caso entran en juego 3 plantas vs. 5 zombies, que se visualizarán a través del tablero con las fichas del juego (Imágenes 6 a 9), tres plantas se neutralizan con tres zombies y el resultado final será de dos zombies. Para ampliar la idea del juego detallamos las instrucciones en el Anexo 1.

Imagen 6: Inician 3 plantas y 5 zombies.

Imagen 8: Nuevamente otra planta se neutraliza con otro zombie.

Imagen 7: 1 planta se neutraliza con 1 zombie.

Imagen 9: Luego de la última neutralización, el resultado es “2 zombies”.

6.4. Implementación del primer juego

El primer juego fue implementado en cinco grupos de 1er año de Educación Secundaria y en un grupo de un club de niños para introducir las adiciones de números enteros. Si bien el objetivo para el profesor es que el estudiante aprenda a realizar adiciones de números enteros y que los estudiantes infieran las reglas para sumar estos números, para los propios estudiantes la intención del juego era divertirse. Primero el profesor practicante realizó la explicación a toda la clase sobre las reglas del juego, luego los estudiantes en subgrupos jugaron varias partidas y el profesor practicante constató que las reglas fueron comprendidas adecuadamente. A continuación se realizó la transposición a las operaciones que surgían en cada partida, siendo estas registradas en sus cuadernos. Finalmente se realizaron discusiones grupales de las operaciones y sus resultados, planteando en el pizarrón las generalizaciones que lograron realizar los estudiantes.

Lucas implementó el juego en un club de niños de Montevideo, con estudiantes del último año de Educación Primaria (11-12 años). El juego *plantas vs. zombies* fue utilizado como un recurso para incorporar un contenido no incluido en el currículo escolar, pero con el objetivo de dar un primer acercamiento a la adición de números enteros. En la puesta en práctica de las actividades lúdicas se logró identificar que se incrementó la motivación de los estudiantes para aprender el tema (Imágenes 10, 11 y 12). Todos ellos se divirtieron compitiendo y pudieron visualizar la adición de números enteros a través de las diferentes agrupaciones de fichas. El proceso de aprendizaje pudo evidenciarse cuando los estudiantes aprendieron a realizar adiciones de números enteros con el uso de los materiales manipulativos. Paulatinamente fueron despojándose de estos materiales logrando resolver satisfactoriamente estas operaciones.

Imagen 10, 11 y 12. Estudiantes del club de niños jugando *plantas vs. zombies.*

Esta primera actividad lúdica también se implementó en los cinco grupos de 1^er^ año de Educación Secundaria que tenían a cargo los profesores practicantes. A partir de la aplicación del juego, en varias instancias y en todos los grupos, Lucas y Claudia infirieron tres etapas de aprendizaje que transitaron sus estudiantes para realizar las sumas de números enteros. Estas etapas se definen según la dependencia que presentan los estudiantes respecto de las fichas del juego. En las tres semanas en que fue aplicado, se apreciaron avances en todos los estudiantes en la comprensión de la suma. Los mismos se evidenciaron a partir de las participaciones de los estudiantes y su vinculación con las fichas del juego. Queremos resaltar los casos en que los estudiantes presentaban dificultades. Ellos, luego de tres semanas de jugar y familiarizarse con los objetos manipulativos, lograron un avance significativo en la comprensión de las adiciones de números enteros.

6.5. Registro en el pizarrón y la institucionalización del conocimiento

Luego de presentar el juego y jugar 3 o 4 partidas, el profesor practicante explicó cómo plantear cada una de las operaciones que surgieron al tirar los dados. Con el objetivo de vincular el aprendizaje que surge a partir del juego, el profesor practicante registra en el pizarrón los resultados de cada partida. Para el registro se confeccionó una tabla en la que cada planta fue representada con una circunferencia azul y el signo "+" incluido en ella y cada zombie fue representado con una circunferencia roja y el signo "-". A continuación se explica cómo se realizó el registro de cada jugada.

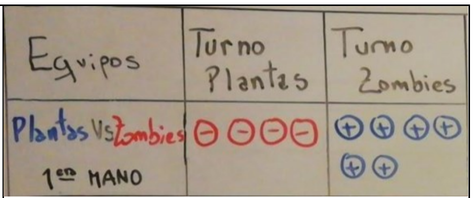
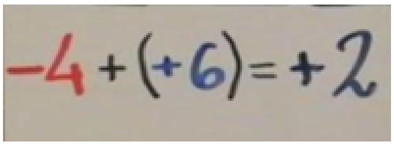
Cada equipo lanza los dados, sale planta o zombie y un número entre 1 y 6. El profesor practicante realiza el registro en el pizarrón. Representa mediante círculos (con los signos "+" o "-") según sea planta o zombie. Por ejemplo si al tirar los dados se obtienen 4 zombies y 6 plantas se representará de la siguiente manera:	
En la actividad lúdica los estudiantes, utilizando las fichas, deberán anular fichas opuestas (cada planta con un zombie) hasta que ya no haya opuestos. Una vez obtenido el resultado en fichas el estudiante deberá trasponer las representaciones de las plantas y zombies a un registro simbólico similar al sugerido por Calvo et. al. (2016). De esta manera se realizará el siguiente registro:	
Seguidamente el profesor practicante pregunta a sus estudiantes cuál es la operación que surgió en la partida. A partir de esto se realiza una nueva transposición desde las fichas del juego al registro con números enteros. Se obtiene el siguiente registro:	

Tabla 1. Explicación del registro en el pizarrón

Luego de varios turnos el profesor practicante registró en el pizarrón (ver Imagen 13). Cabe considerar que entre algunas operaciones que surgieron se encontraron suma de números enteros negativos, suma de números enteros de diferente signo, suma de números enteros con diferente signo e igual valor absoluto lo cual permitió luego de varias operaciones realizar algunas conjeturas.

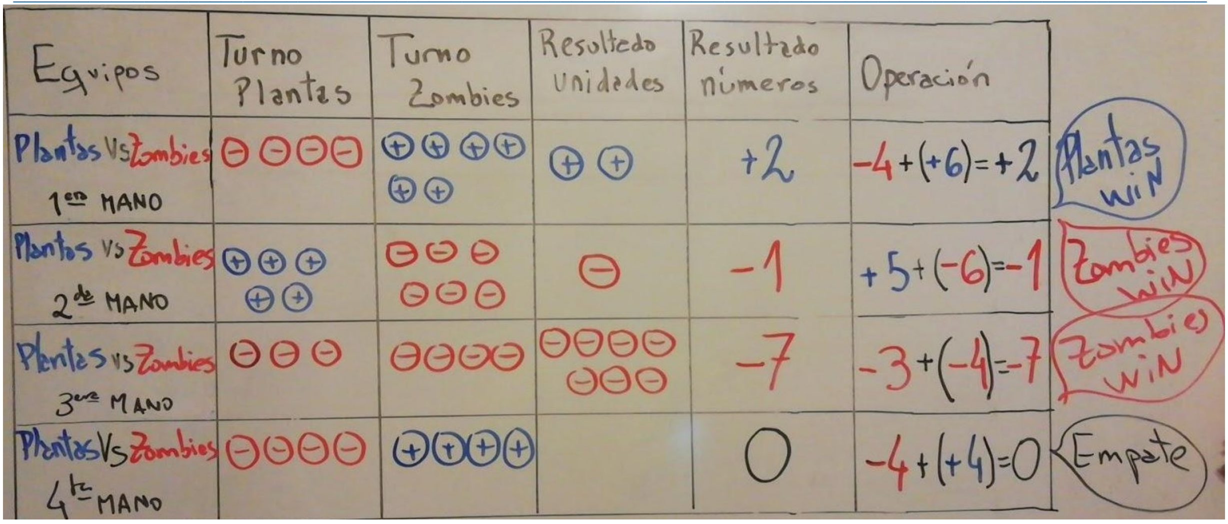


Imagen 13: Registro en el pizarrón del juego.

7. Análisis del aprendizaje de la adición de números enteros

Para el análisis del aprendizaje de la adición con números enteros, los futuros profesores crearon tres indicadores relacionados con la dependencia que los estudiantes tenían respecto de los objetos manipulativos (ver Tabla 2). Los mismos están asociados a tres etapas de aprendizaje que vivenciaron los estudiantes, en los cinco grupos y en el club de niños en que fueron aplicadas las actividades lúdicas.

Indicador etapa 1	Indicador etapa 2	Indicador etapa 3
El estudiante depende exclusivamente de las fichas para poder sumar números enteros. Necesita ver las fichas agrupadas en plantas y zombies.	El estudiante comienza a desprenderse poco a poco de las fichas y pasa a entender qué operación aritmética debe ejecutar para obtener el resultado de la adición de números enteros y puede justificarlo.	El estudiante deja de lado los objetos manipulativos, lo que implica un nivel de mayor abstracción para sumar números enteros. En esta etapa ya se han incorporado las reglas para sumar números enteros.

Tabla 2. Indicadores de las tres etapas de aprendizaje que se identificaron. Fuente: Creación propia.

En la primera etapa, cuando el estudiante tiene su primer acercamiento al tema depende exclusivamente de las fichas para poder calcular la adición de números enteros. Esta etapa empieza cuando los estudiantes comenzaron a manipular las fichas de plantas y zombies, anulándolas una a una (una planta con un zombie) hasta no tener más fichas para anular, obteniendo así el resultado de la operación con las fichas sobrantes. Cuando se trató de la adición de dos números enteros del mismo signo, el estudiante no se encontró con fichas para anular, por lo tanto, las agrupó para obtener el resultado de la operación. En resumen, para sumar dos números enteros el estudiante necesita manipular las fichas y agruparlas para luego poder anularlas (ver Imagen 14).

Imagen 14. El estudiante enfrenta las fichas para anularlas y así sumar números enteros.

En la segunda etapa el estudiante comienza, paulatinamente, a desprenderse de las fichas. Este desprendimiento de las fichas se produce al entender qué operación debe ejecutar para obtener el resultado de la adición de números enteros. En esta etapa, el estudiante necesita visualizar y manipular las fichas para concretar la adición de números enteros, ya que no ha logrado el nivel de abstracción suficiente para sumar valores que excedan las cantidades de fichas disponibles. Para empezar a transitar esta etapa, de forma progresiva, el docente puede facilitar el camino presentando las fichas desordenadas sin enfrentarlas. De forma complementaria cuando el profesor plantea operaciones que no es posible realizarlas con las fichas, por superar su cantidad, como estrategia propondrá operaciones alternativas para que el estudiante infiera el resultado de la operación original. En esta etapa, es necesario que el estudiante justifique cómo obtuvo el resultado de las operaciones realizadas.

En la tercera etapa se requiere un mayor nivel de abstracción para sumar números enteros ya que el estudiante logra la independencia de los objetos manipulativos habiendo interiorizado el procedimiento. Al transcurrir algunas semanas (2-3 semanas dependiendo del grupo) los estudiantes comenzaron a deducir las reglas para sumar números enteros. En esta etapa ya no necesitan de los objetos manipulativos.

8. Algunos resultados obtenidos

Una primera evidencia del Indicador de la Etapa 1 fue a partir de las instancias orales. En ellas, luego de plantear las primeras operaciones en el pizarrón se pudo constatar que los argumentos que daban los estudiantes para poder resolverlas fueron a partir de manipular las fichas del juego. Un ejemplo de esta intervención oral es el siguiente: cuando en el juego surgió la operación “(-5) + (-3)=…”, el estudiante manipula las fichas y responde *“si tengo 5 zombies y 3 zombies más, en total tengo 8 zombies”* (estudiante 1). Este razonamiento le permite al estudiante comprender que (-5) + (-3)= -8. Frente a la operación “(-8) + (+5)=…” se registró la siguiente respuesta “si 8 zombies combaten con 5 plantas ganan los zombies, quedan 3 zombies sobrevivientes” (el estudiante manipula las fichas enfrentándolas para obtener el resultado) “por lo tanto (-8) + (+5) = -3” (estudiante 2).

Respecto del Indicador de la Etapa 2, se presenta como evidencia la situación ocurrida al proponer una adición en la que la cantidad de números enteros a sumar excedieron a la cantidad de fichas disponibles para el estudiante. En particular se presentó la siguiente operación “(-10) + (-6)=…”, en este caso el profesor practicante había entregado a sus estudiantes doce fichas de zombies y doce de plantas. En este caso el estudiante no pudo concretar la operación con las fichas, pues no disponía de suficientes fichas para realizarla. La estrategia del profesor practicante fue recurrir a una nueva operación y que pudiera realizarla con las fichas disponibles, para luego inferir el resultado de la operación original. En este caso el profesor practicante le propuso a su alumno realizar la operación "(-7) + (-4)=…", "agrupo 7 zombies con 4 zombies y me doy cuenta que el resultado son 11 zombies o sea que (-7) + (-4)= -11" (estudiante 3). Luego el profesor practicante le pidió que pensara el resultado de la operación "(-10) + (-6)=…" a los cual el estudiante pudo concluir que "el resultado es -16 pues sumo zombies con zombies" (estudiante 3). En esta última operación el estudiante no utilizó las fichas, pero pudo deducir el resultado de la misma. Podría decirse entonces que la Etapa 2 es una etapa puente hacia la Etapa 3 en la que el estudiante está en la transición entre utilizar las fichas para realizar sumas de números enteros y comenzar a realizar inferencias de resultados sin utilizarlas. Este tipo de evidencias se repitieron en varias instancias con situaciones similares, por ejemplo al realizar las operaciones "(-13)+(+7)=…, "(-16)+(-15)=…", "(+13)+(-15)= …".

Finalmente, para visualizar el Indicador de la Etapa 3, luego de algunas semanas de trabajo en la clase (dos o tres semanas, según el grupo) se logran hacer generalizaciones a través de reglas que permiten sumar números enteros sin depender de las fichas del juego. En primera instancia los estudiantes deducen una aproximación a la regla, por ejemplo al plantear: "(-3) + (-6)=…" uno de los estudiantes manifiesta que "para sumarlos hago 3+6 porque son todos zombies y da -9 porque todos son zombies" (estudiante 3); al plantearles "(-5) + (+2)=…" otro estudiante dijo "como combaten zombies y plantas y tengo más zombies que plantas el resultado es -3" (estudiante 4). En esta última etapa el profesor practicante introduce el concepto de valor absoluto de un número entero para orientar a sus estudiantes a relacionar las conclusiones que estaban infiriendo a partir del juego y trasponerlas al lenguaje matemático y así llegar a las reglas para sumar números enteros. Es así que son los propios estudiantes quienes logran deducir que la suma de dos números enteros del mismo signo se obtiene al sumar sus valores absolutos conservando en el resultado el mismo signo de cada término. En el caso de la adición de números enteros de diferente signo los estudiantes logran concluir que se restan los valores absolutos y el signo del resultado será el del término de mayor absoluto.

Se puede identificar que el estudiante está comenzando a transitar la Etapa 3 cuando lograr realizar las adiciones de números enteros sin necesidad de los objetos manipulativos y además justifica la operación que realiza mediante la analogía con el juego y en palabras coloquiales. Este tipo de evidencias se observaron principalmente a partir de las intervenciones orales que realizaron los estudiantes en varias instancias. A continuación se presenta una evidencia concreta de un estudiante que inicia en la Etapa 3. En una prueba escrita que fue propuesta por uno de los profesores practicantes se identificó una justificación realizada por un estudiante, en la cual hizo referencia al juego. En la siguiente imagen se muestra parte de esa evaluación en donde el estudiante justifica cómo pensó la operación sin utilizar objetos manipulativos, pero sí haciendo referencia a su imagen mental de las fichas y evidenciando el indicador de la etapa 3 (ver Imagen 15). Aunque en el siguiente caso el estudiante no logra decir con términos matemáticos la propiedad, el hecho de asociarlo a lo que ocurre en el juego le permitió razonar en forma adecuada para obtener el resultado de la operación.

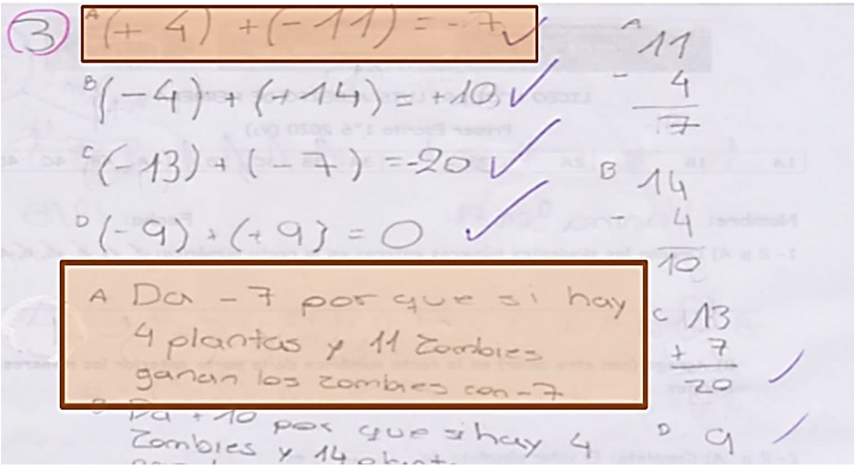


Imagen 15. Respuestas de un estudiante al realizar adición de números enteros y su justificación.

Estos hechos dejan en evidencia la importancia de la inclusión de estos recursos lúdicos para el aprendizaje de la matemática.

9. El juego más allá del aula, una estrategia para involucrar a las familias

La propuesta del juego manipulativo fue compartida en los cursos virtuales de matemática alojados en la plataforma Schoology ofrecida por Plan Ceibal. Allí se invitó a los estudiantes a descargar las fichas del primer juego, los moldes de los dados y la plantilla de cartas del segundo juego. De esta forma los estudiantes involucraron a las familias en el aprendizaje de la matemática. Para compartir estas vivencias se les pidió elaborar breves filmaciones en las que estuvieran jugando con algún familiar y tener así un registro del juego realizado en sus casas (ver Imágenes 16, 17).


Imagen 16 e Imagen 17. Dos padres e hijos jugando en sus casas *plantas vs. zombies.*

10. Applets con GeoGebra para sumar y restar números enteros

Los profesores practicantes diseñaron dos applets interactivos con el fin de que los estudiantes pudieran corroborar los resultados de las sumas y las restas de números enteros que realizaban. Asimismo otro de los objetivos de poner en práctica estos dos applet fue el de reforzar los conocimientos de los estudiantes sobre adición y sustracción de números enteros. La inclusión del primer applet en la plataforma virtual fue una extensión del uso de los objetos manipulativos en la instancia presencial. En esta oportunidad el formato virtual continuó favoreciendo el desprendimiento del objeto manipulativo sin enfrentar las fichas de las plantas y los zombies. Este primer applet permitió sumar números enteros de diferente signo. En el mismo los estudiantes introdujeron el valor de cada término de la adición y debajo aparecían imágenes de plantas y zombies representando cada término y su suma al activar la casilla de control (Imágenes 18 a 20). La operación se realizó al asociar plantas con unidades positivas y zombies con unidades negativas. En este applet se utilizó la lógica del modelo de bloques y la neutralización de opuestos (Janvier, 1985; Hernández y Gallardo, 2006).

Imagen 18. Presentación del applet, instrucciones para utilizarlo.

Imagen 19. Un ejemplo de suma de números enteros.

Imagen 20. Otro ejemplo de una suma de números enteros de diferente signo.

A la vez, se diseñó un segundo applet que permitió trabajar la sustracción de números enteros. Para su confección se tuvieron en cuenta los conocimientos ya aprendidos sobre adición de números enteros. El applet comienza planteando la sustracción de dos números enteros y luego propone realizar la adición del opuesto del segundo sumando con la intención que los estudiantes trabajen lo aprendido mediante los juegos manipulativos y las fichas de zombies y plantas. Luego de una explicación previa en la que se incluyen nuevamente a los zombies y a las plantas como guía, se propone en el applet realizar una serie de operaciones, en cada una el applet ofrece su respectiva retroalimentación. Además, en cada caso el applet ofrece al estudiante orientaciones para continuar trabajando (Imágenes 21 a 24).

Imagen 21. El segundo applet, presenta la explicación de la transformación de sustracción en la suma del opuesto del sustraendo.

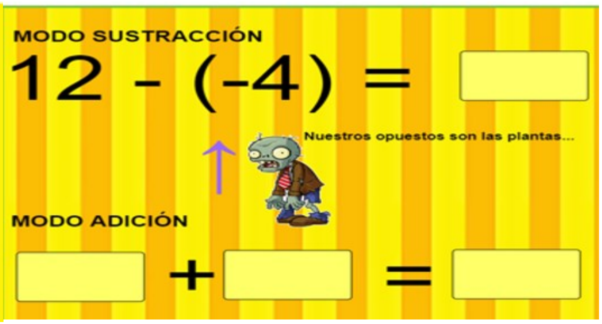


Imagen 22. Un primer ejercicio y la orientación de convertir la sustracción en adición.

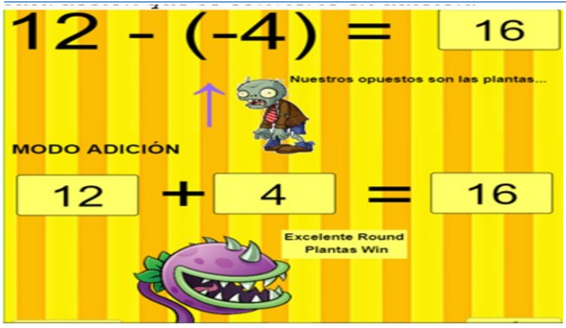


Imagen 23. Procedimiento y realización de la operación y retroalimentación.

Imagen 24. Otro ejemplo de sustracción con la retroalimentación.

11. Segundo juego: juego de cartas para operaciones combinadas

Al ver el efecto positivo y el potencial del juego Plantas vs. Zombies, se elaboró una extensión del mismo, esta vez inspirada en los clásicos juegos de cartas “Magic”, conocidos por sus versiones de Pokémon y Yu-Gi-Oh. La nueva versión del juego involucra el uso de cartas con plantas y zombies, tiene como finalidad para el profesor lograr que los estudiantes realicen operaciones combinadas con números enteros. La explicación detallada de las reglas del juego se encuentra en el Anexo II.

Otro aspecto que promueve este juego de cartas es dar la oportunidad para que los estudiantes hagan inferencias sobre las reglas de adición y multiplicación de números enteros. En este juego pueden participar dos equipos (cada uno con 2 a 4 participantes), el profesor transita por los equipos y supervisa las operaciones que surgen y a la vez pide a los estudiantes que registren cuáles operaciones salieron según las cartas que seleccionan. En el pizarrón se registran dichas operaciones y se realiza una puesta en común sobre sus resultados.

Uno de los potenciales del juego es que la dinámica lleva a los estudiantes a argumentar cómo obtienen los resultados de las operaciones con números enteros. El juego de cartas tiene como finalidad combatir en cada jugada y ganar puntos. Para ello cuentan con “plantas y zombies” que atacan y “hechizos” que los acompañan (ver imágenes 25, 26 y 27). Los hechizos tienen nombres muy convenientes que proporcionan una pista sobre su efecto. Por ejemplo, los hechizos multiplicadores permiten intuir los resultados de una multiplicación sin que el estudiante sepa de antemano las reglas para multiplicar números enteros. Otro hechizo es el convertidor que dice en su leyenda “multiplica por (-1) los puntos de cualquier carta. Una aplicación de este hechizo es la siguiente: si a una carta de zombie con el (-5) el equipo contrario le aplica un hechizo convertidor resultará en (+5), se registrará: (-5)x(-1)=+5. La incorporación de este hechizo permitió que los estudiantes deduzcan las reglas para multiplicar números enteros.

Imagen 25. Algunas cartas del juego (combatientes).

Imagen 26. Izquierda: hechizos de zombies. Derecha: hechizos de las plantas.

Otro hechizo es el “anulador” que dice en su leyenda “multiplica por 0 los puntos de cualquier carta”. De esta forma se introduce la propiedad de absorción de la multiplicación de números enteros.

El equipo ganador de la partida será el que logró desarrollar mejores estrategias para realizar operaciones. En consecuencia los estudiantes lograrán fortalecer sus habilidades argumentativas. Este juego se aplicó en varias instancias para posibilitar la inducción de propiedades, específicamente para la regla de los signos y la jerarquización en operaciones combinadas entre adiciones y multiplicaciones. El análisis de los datos se encuentra aún en proceso. Entre algunas de las observaciones que se realizaron se evidenció el potencial del trabajo colaborativo que surgió entre los estudiantes. Por lo general van operando en forma oral, sin realizar un registro de las operaciones de surgen, esto último es importante que lo supervise el profesor y que incluya alguna discusión grupal utilizando cartas de gran tamaño para que todo el grupo pueda verlas, a la vez se sugiere ir planteando ejemplos de situaciones que pueden ocurrir en una partida de cartas para propiciar las intervenciones orales y aportes de los estudiantes. Según el número de estudiantes de cada clase la discusión será grupal o en pequeños subgrupos. Las cartas pueden imprimirse en hojas A4, pegarse en el pizarrón y pueden ser, también, un recurso para plantear operaciones con números enteros.

12. Conclusiones

Luego de las experiencias se concluye que la aplicación de los juegos para la enseñanza de la matemática puso en evidencia que la motivación es un factor fundamental para que los estudiantes quieran aprender. Este hecho fue reportado, también, en otras investigaciones (Rojas, 2009; Muñiz-Rodríguez, Alonso, Rodríguez-Muñiz, 2014).

Asimismo, los profesores practicantes identificaron que el juego en un ámbito de competencia fomenta el uso de diferentes estrategias de resolución. En particular su inclusión propició que los propios estudiantes pudieran realizar deducciones. El primer juego permitió inferir las reglas para sumar números enteros. Con la implementación del segundo juego de cartas se reafirmaron los conocimientos adquiridos y a la vez se propició que los estudiantes pudieran hacer conjeturas sobre cómo multiplicar números enteros de diferente o de igual signo. Estas deducciones fueron socializadas y luego se institucionalizaron en la clase. A su vez, el juego de cartas permitió fortalecer la jerarquización de operaciones en las operaciones combinadas.

Luego de implementar los applets, los estudiantes expresaron que se sintieron muy a gusto utilizándolos y que les resultó muy divertido, del mismo modo con los juegos. Esto quedó evidenciado en los espacios virtuales (ver Imagen 27).

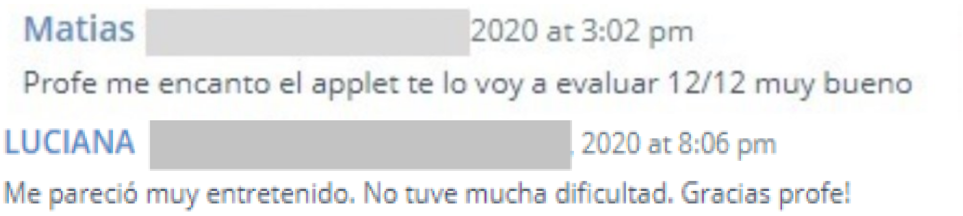


Imagen 27. Algunos comentarios de los estudiantes respecto de los applets.

La retroalimentación de los estudiantes permitió a los futuros profesores percibir la importancia de la motivación y de la afectividad para facilitar el aprendizaje tal como proponen De Guzmán (2004), Gil, Guerrero, Blanco (2006) y McLeod (1992). Sumado a esto, se observó que el proceso de enseñanza de los números enteros requiere un tiempo personal del estudiante que se encuentra vinculado a la comprensión que va adquiriendo del tema y al grado de abstracción que va logrando.

Entre otros de los hallazgos se concluye que en la implementación de los juegos, para lograr la interiorización de las reglas de adición y multiplicación de números enteros, es necesario un paulatino desprendimiento de los objetos manipulativos (lúdicos). Para ello, fue primordial la identificación de las diferentes etapas del aprendizaje de las operaciones con números enteros a través del juego. Asimismo, se consideró fundamental respetar los tiempos personales de cada estudiante para que logren transitar estas etapas de aprendizaje con éxito. En este sentido, es clave la selección de los ejercicios realizada por el profesor. Este hecho dio la oportunidad de darles mayor seguridad y reforzar lo aprendido.

Los juegos permitieron que los estudiantes desarrollen la cooperación, el aprendizaje y el compañerismo entre pares. El desarrollo del compañerismo se constató cuando algunos estudiantes explicaron a sus compañeros las reglas de los juegos, ayudando a comprender los resultados obtenidos.

Consideramos que el impacto de los juegos y los applets puso en evidencia mejoras en el aprendizaje a nivel grupal. El uso de los applets permitió a los estudiantes obtener una retroalimentación que los guiaba en sus respuestas, confirmando o corrigiéndolas. La profesora formadora observó en las clases, en las que se implementaron los juegos, el progreso que tuvieron todos los estudiantes en la comprensión del tema. En particular se observó la repercusión de estos recursos lúdicos en aquellos estudiantes que presentaban dificultades específicas para aprender matemática. Esto se evidenció en diversos casos de estudiantes que presentaban problemas de conducta. En consecuencia de la dinámica de los juegos implementados, es que comenzaron a integrarse y a vincularse con sus compañeros. Esto generó un nuevo vínculo entre pares y a su vez, repercutió en sus comportamientos de forma favorable.

13. Proyecciones a futuro

El impacto positivo de las actividades lúdicas sobre la motivación y el aprendizaje de los estudiantes nos impulsó a compartir estas experiencias en diferentes eventos de divulgación matemática educativa. En específico se compartieron en: el XI Simposio de Matemáticas y Educación Matemática (MEM, 2021, Colombia), en un taller brindado en el Instituto de Profesores Artigas en Uruguay en el marco de la Escuela de Verano (2021), en la Jornada 167 de la Sociedad de Educación Matemática Uruguaya (SEMUR) y en el 6° Congreso Internacional de Matemática Educativa del Centro de Investigaciones en Ciencias y Tecnologías aplicadas de México (CICATA-Legaria, IPN). A partir de las retroalimentaciones recibidas en las presentaciones es que nos proponemos continuar con la difusión de esta propuesta para seguir investigando sobre la implementación de estos recursos y su impacto en el aprendizaje de los estudiantes.

La divulgación de esta propuesta de trabajo despertó el interés y la motivación de varios docentes de matemática para implementarla en sus aulas. De este modo otra línea de investigación que se abre se vincula al estudio de las metodologías de trabajo implementadas por otros profesores de matemática al utilizar estos mismos recursos. A su vez, los nuevos datos permitirán profundizar en el análisis del impacto en el aprendizaje de los estudiantes en el tema números enteros.

Por último se está desarrollando una extensión en el juego de cartas con el fin de que los estudiantes puedan formalizar y generar más estrategias para el cálculo de operaciones combinadas. Además, con esto se lograría incluir otras operaciones como la sustracción y la potenciación de base entera y exponente natural.

Referencias bibliográficas

Calvo, C., Deulofeu, J., Jareño, J., y Morera, L. (2016). *Aprender a enseñar matemáticas en la educación secundaria obligatoria.* Madrid: Editorial Síntesis.

Carmona-Mesa, J. y Villa-Ochoa, J. (2018). Uso de calculadoras simples y videojuegos en un curso de formación de profesores. *Uni pluriversidad*, *18*(1), 13-24. https://doi.org/10.17533/udea.unipluri.18.1.02

Castillo Angulo, C. (2014). *Aprendizaje de adición y sustracción de números enteros a través de objetos físicos.* Maestría en Enseñanza de las Ciencias Exactas y Naturales. Disponible en: http://repositorio.autonoma.edu.co/jspui/handle/11182/883

Castillo Banda, N. (2019). *Propuesta de un modelo didáctico para la enseñanza-aprendizaje de la aritmética de números enteros en la educación primaria*. http://repositorio.unjfsc.edu.pe/handle/UNJFSC/3835

De Guzmán, M. (2004). Juegos matemáticos en la enseñanza. Revista *SUMA, 4*, 61-64. http://revistasuma.es/sites/revistasuma.fespm.es/IMG/pdf/46/SUMA_46.pdf

Elliot, Jh. (2000). *La investigación-acción en educación*. Capítulo 1 y 5. Morata. https://www.terras.edu.ar/biblioteca/37/37ELLIOT-Jhon-Cap-1-y-5.pdf

Filloy, E. (1999). Aspectos teóricos del álgebra educativa. México: Editorial Iberoamérica.

Freudenthal, H. (1983). *Didactical phenomenology of mathematical structures* (Vol. 1). Holland: Springer Science & Business Media.

Gil, I.; Guerrero Barona, E. y Blanco Nieto, L. (2006). El dominio afectivo en el aprendizaje de las Matemáticas. *Electronic Journal of Research in Educational Psychology, 4(*1), 47-72. https://www.redalyc.org/comocitar.oa?id=293123488003

Glaeser, G. (1981). Epistemologie des nombres relatifs. *Recherches en Didactique des Mathematiques, 2*(3), 303-346. https://revue-rdm.com/1981/epistemologie-des-nombres-relatifs/

Hernández, A. y Gallardo, A. (2006). La extensión del dominio numérico de los naturales a los enteros vía el modelo concreto de bloques. *Educación*

Matemática, *18*(1), 73-97. https://dialnet.unirioja.es/servlet/articulo?codigo=2260464

Janvier, C. (ed.): 1985, *Problems of Representations in the Teaching and Learning of Mathematics*, Lawrence Erlbaum, Hillsdale, NJ.

McLeod, D. B. (1992). *Research on affect in mathematics education: A reconceptualization.* En D. Grouws (Ed.), Handbook of research on mathematics teaching and learning: A project of the National Council of Teachers of Mathematics (p. 575–596). Macmillan Publishing Co, Inc.

Muñiz-Rodríguez, L.; Alonso, P., Rodríguez-Muñiz, L. (2014). El uso de los juegos como recurso didáctico para la enseñanza de las matemáticas. UNIÓN. *Revista Iberoamericana de Educación Matemática, 39,* 19-33. https://dialnet.unirioja.es/servlet/articulo?codigo=4870030

Parada, E., Pluvinage, F., Sacristán, A. (2013). Reflexiones en una comunidad de práctica de educadores matemáticos sobre los números negativos. *Recherches en didactique des mathématiques*, *33*(3), 233-266. https://bit.ly/3acYjKp

Rojas, I. R. (2009). Aplicación de juegos lógicos en la Juventud Salesiana. *UNIÓN, 19*, 150-156. http://www.fisem.org/www/union/revistas/2009/19/Union_019_017.pdf

Sierra Vázquez, M. (2011). Investigación en Educación Matemática: objetivos, cambios, criterios, método y difusión. *Educatio Siglo XXI, 29*(2), 173-198. https://revistas.um.es/educatio/article/view/133021

Valdés Núñez, J. (2011). Lúdica y matemáticas a través de TIC para la práctica de operaciones con números enteros. *Revista de Investigación. Desarrollo e Innovación: RIDI,* *1*(2), 17-27. https://dialnet.unirioja.es/servlet/articulo?codigo=6763034

Primer autor: **Elena Freire-Gard,** efreire@docente.ceibal.edu.uy, https://orcid.org/0000-0003-1498-0903 Profesora de Didáctica en el Instituto de Profesores Artigas. Departamento de Matemáticas. Consejo de Formación en Educación, Montevideo-Uruguay. Estudiante de Doctorado en Matemática Educativa y Ciencias Aplicadas en el Centro de Investigaciones en Ciencias y Tecnología Avanzada. IPN. México. Magister en Ciencias en Matemática Educativa (Cicata-Legaria, México DF).

Segundo autor: **Claudia Castillos-Carelli**: claudia.castillos@docente.ceibal.edu.uy, https://orcid.org/0000-0002-3993-1692 Profesora de matemática de Educación Secundaria egresada del Instituto de Profesores Artigas. Montevideo-Uruguay.

Tercer autor: **Lucas Bentancur-Rodríguez,** lbentancur@docente.ceibal.edu.uy, https://orcid.org/0000-0002-1379-3543 Bachiller. Estudiante de profesorado de matemática que cursa su último año de formación docente. Montevideo-Uruguay.

Anexos

Anexo I: Primer juego Plantas vs. Zombies

1. Materiales del juego

- 12 fichas con un zombie con un signo de "-" superpuesto
- 12 fichas con una planta con un signo de "+" superpuesto.
- Dos dados, uno de ellos con números del 1 al 6, otro dado con una planta en tres de sus caras y un zombie en las otras tres.

2. Instrucciones del juego

Se forman dos equipos: uno de plantas (asociados a números enteros positivos) y otro de zombies (asociados a números enteros negativos). Un representante del primer equipo tirará los dados obteniendo la cantidad de zombies o plantas que entran en combate. Un representante del segundo equipo repite la operación anterior.

Comienza el combate: cada planta anula a un zombie y viceversa. Las fichas que no se anularon, serán los sobrevivientes.

Al comenzar la siguiente ronda, se incorporan los sobrevivientes de la mano anterior y se vuelven a tirar los dados y hay un nuevo combate entre plantas y zombies. Al finalizar la tercera ronda, necesariamente habrá un único equipo ganador. El equipo ganador será el que tenga sobrevivientes. Otro posible resultado final será el de empate (cuando se anulan todos los combatientes).

Anexo II: Segundo juego, cartas Plantas Vs. Zombies

1.1 Materiales del juego

El mazo de cartas está conformado por:

- 16 cartas de plantas con valores que van desde el +1 al +6.
- 16 cartas de zombies con valores que van desde el -6 al -1.
- Un dado con la imagen de una ***biblioteca*** en cuatro de sus caras, numeradas con 2 y 3. En las otras caras hay una imagen de un ***cementerio***, uno de ellos tiene el número 3 y el otro de los cementerios tiene la palabra ***oponente*** y el número 2.
- 8 cartas con hechizos de plantas y 8 cartas con hechizos de zombies.

1.2 Palabras claves del juego

Biblioteca: Mazo inicial de cartas de cada equipo.
Cementerio: Es el mazo que se forma luego de que el equipo ganador de cada mano se lleva todas las cartas jugadas.
Caras del dado (ver Imagen 27)**:**

- ➢ **Biblioteca 2:** retira dos cartas de su biblioteca y podrá bajar hasta dos cartas en esa mano.
- ➢ **Biblioteca 3:** retira tres cartas de su biblioteca y podrá bajar hasta tres cartas en esa mano.
- ➢ **Cementerio 3:** retira tres cartas a elección de su propio cementerio y podrá bajar hasta 3 cartas en esa mano.
- ➢ **Cementerio oponente 2:** retira dos cartas de la parte superior del cementerio del oponente y podrá bajar hasta dos cartas en esa mano.

Imagen 27. El dado del juego de cartas.

Hechizos: son cartas especiales que sólo se pueden aplicar sobre una planta o un zombie (indistintamente), modificando su puntaje, en su leyenda dice:

- **Multiplicador:** *multiplica por 2 (ó por 3) los puntos de cualquier combatiente*.
- **Convertidor:** *"multiplica por (-1) los puntos de ataque de cualquier combatiente", convierte una planta en zombie y viceversa.*
- **Anulador:** *"multiplica por 0 el valor de ataque de cualquier combatiente"*.

Observación: En todos los casos los hechizos pueden ser aplicados indistintamente, sin importar si proviene del equipo de las plantas o de los zombies. Esto se debe a que en los cementerios se acumulan tanto las cartas del propio mazo como las del contrincante, y todas ellas pueden ser utilizadas por el jugador.

1.3 Instrucciones del juego

Se forman dos equipos (2 a 4 participantes cada uno). Uno será de plantas y el otro de zombies, cada uno con su mazo de cartas. Luego de barajar las cartas cada jugador tomará seis de la parte superior de su biblioteca. Estas seis cartas permanecerán en su mano sin que las vea el contrincante. Se empieza la partida, los jugadores se ponen de acuerdo en quien comienza. Un jugador tira el dado y la imagen que salga en la cara superior del dado, indicará de dónde y cuántas cartas se extraen. En el caso de que salga "cementerio" y este no tenga cartas, el jugador no retirará carta alguna, bajará la cantidad de cartas indicadas por el dado, seleccionadas entre las opciones que tenga en su mano. En el turno del segundo equipo se repite el procedimiento anterior. Comienza el combate al colocar las cartas sobre la mesa de la siguiente manera: quien tiró primero el dado es quién baja en la mesa la primera carta. A continuación el equipo contrario deberá bajar la siguiente carta sobre la mesa. Esta operación se repite hasta que se acabe la cantidad de cartas permitidas para cada jugador (esto se indicó en el número que apareció en la cara superior del dado, ya sea *biblioteca* o *cementerio*). Cabe aclarar que si bien el jugador tiene un máximo permitido de cartas a bajar, en cualquier momento puede optar por dejar de hacerlo según le resulte más conveniente a su jugada.

Una vez que todos los jugadores hayan bajado la cantidad de cartas habilitadas, se realizarán las operaciones matemáticas que surjan de las cartas que aparecen en la mesa. Si el resultado final es un número entero negativo indicará que el equipo de los zombies es el ganador de la mano y se le adjudicará el puntaje en valor absoluto del resultado anterior. En caso contrario, si el resultado final es un número entero positivo, será el equipo de las plantas quienes obtengan ese resultado como puntaje. El registro del juego se llevará por parte de cada equipo en una tabla (con una columna de plantas y otra de zombies en donde se incluyan las operaciones realizadas y su resultado). El juego termina cuando se acaban las cartas de la biblioteca de uno de los equipos o también podría proponerse la cantidad de rondas que se jugarán (ejemplo: 4 rondas). Otra alternativa del juego como versión para principiantes, no incluye hechizos e involucra solo adiciones de números enteros.

UNIÓN
REVISTA IBEROAMERICANA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA

ISSN: 1815-0640
Número 64. Abril 2022
Páginas 1-13

Área entre curvas con GeoGebra

José Luis Vergara Ibarra

Fecha de recepción: 24/10/2021
Fecha de aceptación: 4/03/2022

Resumen	Existen muchos trabajos relacionados al estudio y simulación del área bajo la curva empleando GeoGebra, sin embargo, este caso particular es resuelto mediante comandos básicos predefinidos en el software, lo que reduce la posibilidad de extender esta idea al área entre curvas. En este sentido, el presente artículo muestra cómo diseñar a través de GeoGebra registros de representación geométrica y numérica que articulen las vistas CAS, algebraica y gráfica, ofreciendo oportunidades de visualización e interacción dinámica del área entre curvas. Mediante el desarrollo de este tema quedan plasmadas varias ideas que pueden ser de utilidad para su aplicación en el aula. **Palabras clave**: Área entre curvas, GeoGebra, Simulación, Dinámico
Abstract	There are many works related to the study and simulation of the area under the curve using GeoGebra, however, this particular case is solved by basic predefined commands in the software, which reduces the possibility of extending this idea to the area between curves. In this sense, the present article shows how to design through GeoGebra registers of geometric and numerical representation that articulate the CAS, algebraic and graphic views, offering opportunities for visualization and dynamic interaction of the area between curves. Through the development of this topic, several ideas are expressed that can be useful for application in the classroom. **Keywords**: Area between curves, GeoGebra, Simulation, Dynamic
Resumo	Existem muitos trabalhos relacionados ao estudo e simulação da área sob a curva empregando GeoGebra, porém, este caso particular é resolvido mediante comandos básicos predefinidos no software, o que reduz a possibilidade de estender esta idéia à área entre curvas. Neste sentido, o presente artigo mostra como projetar através de GeoGebra registros de representação geométrica e numérica que articulem as janelas CAS, algébrica e gráfica, oferecendo oportunidades de visualização e interação dinâmica da área entre curvas. O desenvolvimento deste tema traduz várias ideias que podem ser úteis para a sua aplicação na sala de aula. **Palavras-chave:** Área entre curvas, GeoGebra, Simulação, Dinâmico

1. Introducción

En los libros de cálculo de una variable y varias variables tales como Bruce y Larson (2010), Stewart (2018), Smith y Minton (2012), Zill y Wright (2011), entre otros; los autores para definir conceptos matemáticos se apoyan a través de imágenes o figuras estáticas sin la participación de la tecnología que dinamice estas representaciones. Para tal fin, muchas veces recomiendan sistemas computacionales aritméticos difíciles de utilizar.

La integral definida desde el punto de vista práctico tiene muchas aplicaciones como por ejemplo se puede utilizar para calcular el área entre curvas, los volúmenes de sólidos de revolución y de corte transversal, el trabajo realizado por una fuerza variable, longitud de arco, entre otros. El proceso de construcción de la integral definida se puede comprender desde el enfoque geométrico al teórico o viceversa, es decir, se divide la región en formas geométricas conocidas como rectángulos, trapezoides o cuadrados, luego se calcula el área de cada parte y sumando estas áreas se puede aproximar el valor del área de la región (área bajo la curva o entre curvas). Las sumas de estas formas geométricas en sentido algebraico y analítico son las sumas de Riemann. Aumentando la cantidad de las formas geométricas, el área tiende a ser más exacta y la región a medir es cada vez más completa. Finalmente tendiendo al infinito el número de las formas que componen la región se puede definir la integral definida. Tradicionalmente este proceso es aceptado, pero podemos ofrecer otras posibilidades de visualización aprovechando los medios tecnológicos que permitan interactuar con los estudiantes. Este enfoque es discutido por Vega, Duarte y Cárdenas (2015), quienes establecen que la tecnología, como recurso de exploración y visualización, debe permitir que el estudiante establezca relaciones entre los distintos objetos matemáticos y se familiarice con las propiedades que estos cumplen, haciéndolos tangibles y manipulables en lugar de abstractos e imperceptibles.

La motivación en redactar este artículo nace al escuchar una capacitación sobre *Métodos de Integración en una y Varias Variables* en la Universidad Técnica de Manabí en la cual los docentes facilitadores definen la integral de manera formal conectando este resultado con la noción geométrica del área bajo la curva y posteriormente con el teorema fundamental del cálculo. En esta capacitación los docentes hacen sus mejores esfuerzos para construir rectángulos que aproximen el área bajo la curva de un problema en particular con GeoGebra (Figura 1), además se hace una reflexión sobre el software y su impacto en el aprendizaje y enseñanza del cálculo en una y varias variables, a pesar de que no es muy conocido y no se tenga un dominio básico del mismo. Por lo general en la enseñanza universitaria la forma de abordar las aplicaciones de la integral definida es basada mediante ilustraciones en los textos; aquí se encuentran muchos conceptos ilustrados por imágenes estáticas. Actualmente existen aplicaciones como GeoGebra que pueden transformar estas representaciones (imágenes estáticas) en ilustraciones dinámicas, haciéndolas más visuales, tangibles y reales (Dantas y Vieira, 2017; Ancochea, Arranz y Muñoz, 2021; Vergara, 2021; Cayetano y Pereiro, 2021; Vergara, 2022).

Dar movimiento a estas representaciones estáticas en sistemas computacionales es complicado porque se requieren conocimientos avanzados de programación y por lo general consumen altos recursos de sistema y de costo. Por el contrario, GeoGebra permite realizar simulaciones dinámicas de algunos conceptos matemáticos mediante comandos y herramientas básicas, además es un software de geometría dinámica libre y gratis; escrito en Java. Así también, GeoGebra es un conjunto de herramientas para la creación y gestión de recursos educativos denominadas Herramientas de Autor. (Pizzorno y Montiel 2021)

De acuerdo con Ancochea, Arranz y Muñoz (2021), la versatilidad del software permite que, con unas pocas entradas, el alumnado pueda desarrollar su inventiva para obtener resultados imprevistos. Además, Grisales (2018) concluye que la utilización de estos recursos es una estrategia adicional que logra motivar al estudiante y asegura la experimentación del concepto a través de simulaciones y herramientas interactivas, impulsando un rol más protagónico del estudiante para la construcción del conocimiento. Simultáneamente el aprendizaje asistido con GeoGebra desarrolla el pensamiento visual, actividad valiosa en el aprendizaje de las matemáticas (Juandi y Priatna 2018, p.6).

Debido a esto, autores como Cayetano y Pereiro (2021) desarrollan varias actividades para estudiantes, entre ellas, modelan flores donde aplican el concepto de integral para calcular el área de los pétalos que constituyen la flor haciendo más accesible este concepto. Martínez y García (2020) analizan cómo los estudiantes comprenden el concepto de la integral definida mediado con GeoGebra. En suma, a estos trabajos se va a considerar la simulación dinámica del área entre curvas un recurso importante que puede ser utilizado para una comprensión más general sobre la teoría de la integral. Por último, aprovechar la versatilidad de GeoGebra en un sentido numérico para resolver importantes problemas que otros métodos de cálculo de la integral definida no resuelven.

En este sentido, el objetivo del presente trabajo es diseñar con GeoGebra la simulación dinámica de las formas geométricas que proporcionan el área aproximada entre curvas al sumarlas. Por otra parte, se presenta el área aproximada en problemas que no se pueden resolver mediante la integral definida. Estas propuestas técnicas y didácticas pueden ser implementadas en un ambiente híbrido de aprendizaje.

De forma paralela en el diseño y cálculo se darán las definiciones pertinentes que sustenten los modelos dinámicos, es decir, la teoría estará en conexión con los objetos geométricos dinámicos obtenidos. Existen distintas versiones de GeoGebra, en este trabajo se usará GeoGebra clásico 5; no obstante, todas las construcciones se pueden implementar sobre las versiones en línea y las aplicaciones desarrolladas para dispositivos móviles. Las imágenes utilizadas a lo largo del artículo son creadas por el autor mediante GeoGebra.

2. Área y el papel de GeoGebra

Se empieza preguntando, ¿Qué se entiende por área? Esta pregunta puede ser sencilla de responder cuando se trata de regiones acotadas por lados rectos, por ejemplo, cuadrados, rectángulos, triángulos o polígonos formados por la unión de triángulos y rectángulos. Pero si esta región está acotada por curvas (no lineales) no es sencillo responder esta pregunta. Una de las ideas de aproximar el área con un lado curvo es aproximarla mediante rectángulos.

Dividir la región a medir en 1, 2, 3, n rectángulos para aproximar el área bajo la curva e ilustrarlo en cualquier tipo de pizarra toma tiempo y espacio de trabajo en la práctica docente o el excesivo uso de imágenes en las presentaciones y una escasa interacción por parte del estudiante. Aprovechando los *comandos y herramientas* básicas de GeoGebra podemos superar esta dificultad de muchas maneras. El siguiente ejemplo (Figura 1) muestra una de las posibilidades de trabajar el área bajo la curva, es decir, se dibuja cada rectángulo mediante la herramienta polígono, donde la altura de cada rectángulo es el extremo derecho evaluado en la función.

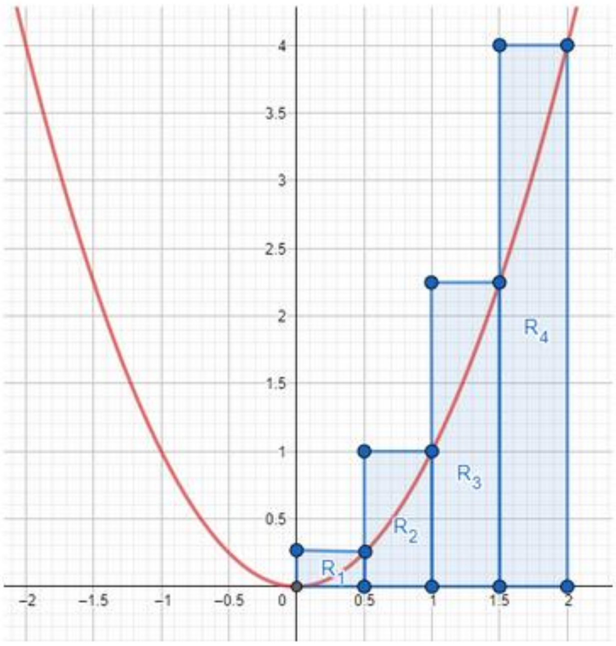


Figura 1. Aproximación del área bajo la curva, 4 rectángulos.

El método anterior exige una mayor cantidad de tiempo, ya que, por un lado, se requiere particiones más finas para una mejor aproximación y, por otro lado, para obtener el área total con el software se debe sumar el área de cada rectángulo.

Una manera fácil y eficiente de obtener este resultado es utilizar comandos que ya están definidos en GeoGebra, en la cual solo hay que digitar en los argumentos, la función, extremos del intervalo y el número de rectángulos. Este método proporciona directamente la región aproximada por rectángulos y su área, para ello revisemos el ejemplo que sigue. Supongamos que queremos aproximar el área bajo la cura $f(x) = \sqrt{x-2}$ a través de 10 rectángulos.

Se empieza ingresando la expresión $\sqrt{x-2}$ que GeoGebra dará por defecto el nombre $f(x)$, luego se utiliza el comando *SumaInferior(<Función>, <Extremo inferior del intervalo>, <Extremo superior del intervalo>, <Número de rectángulos>)* y se sustituye en cada argumento lo siguiente *SumaInferior(f, 3, 9, 10),* ingresando este comando se tiene la Figura 2.

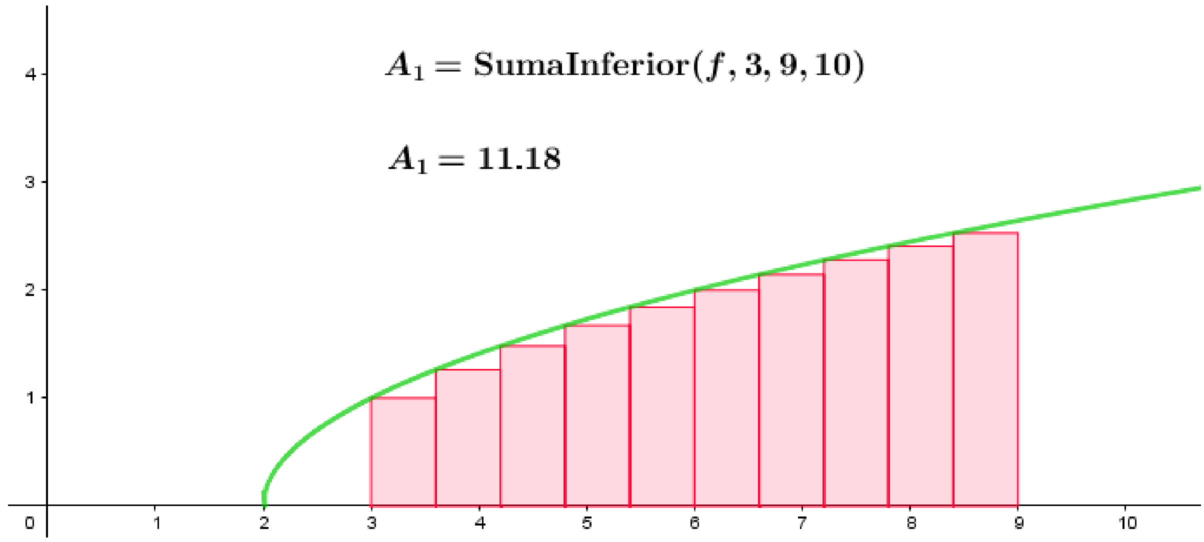


Figura 2. Suma Inferior o puntos extremos izquierdo.

Nótese, que creando un deslizador n que varíe de 1 a 50 con incremento 1, se puede reemplazar en el último argumento del comando por n y de esta manera se hace dinámica la ilustración y al mismo tiempo al aumentar el valor de n se visualiza cómo este valor se aproxima al área bajo la curva. En la Tabla 1 se ilustran la suma superior y trapezoidal.

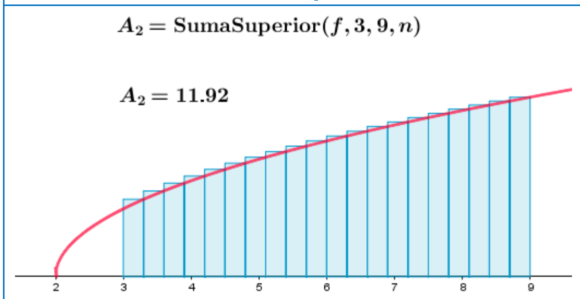
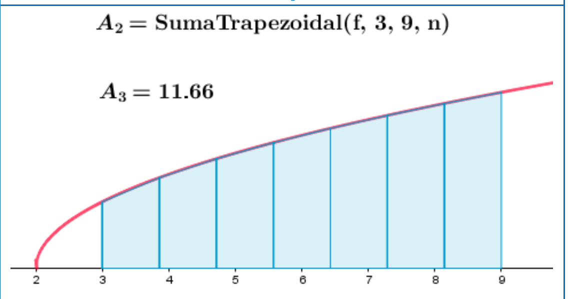
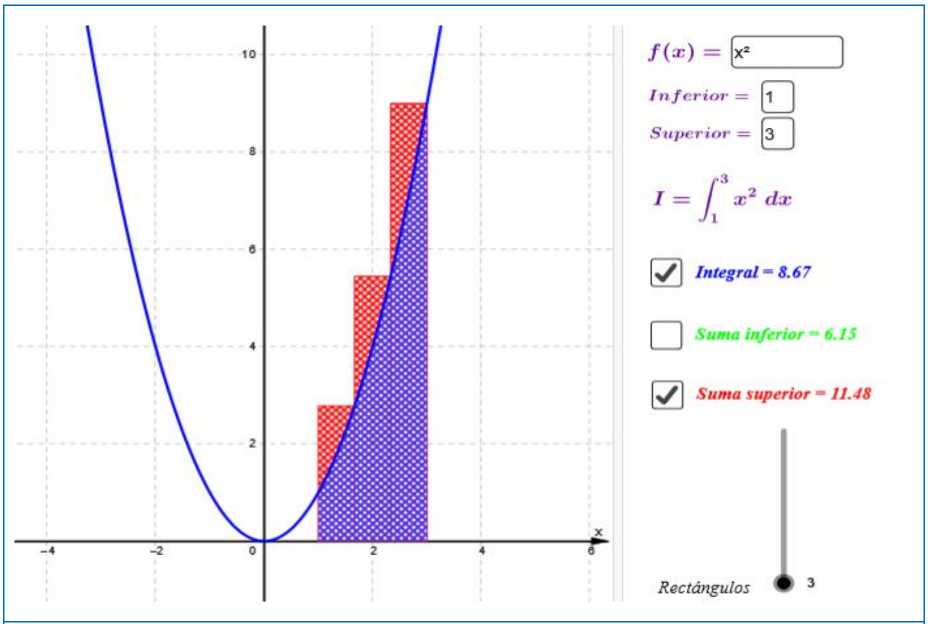
Suma Superior	**Suma Trapezoidal**
	
Número de rectángulos n=30	**Número de Trapecios n=7**

Tabla 1. Suma Superior y Trapezoidal variando n.

Actualmente la Comunidad GeoGebra Latinoamericana con el apoyo del Instituto GeoGebra Lanús, han desarrollado un proyecto llamado Latino Applets que promueve el uso de applets. Ellos a través de YouTube muestran cómo usarlos y dejan el enlace del recurso o actividad para que pueda ser aprovechado por los docentes en el aula de clases. Tomemos nuestro caso de interés, es decir, la simulación dinámica del área bajo la curva. Esta actividad puede tener distintos fines educativos de acuerdo a los resultados de aprendizaje que se han planteado en sus áreas y niveles pertinentes, ver Tabla 2.



Uso: **https://youtu.be/SDQm7apzsd8**

Tabla 2. Nota: Adaptado de Sumas de Riemann, por A. Arevalo,2018, GeoGebra (https://www.geogebra.org/m/zdsg42dz). CC-BY-SA

En tal sentido, GeoGebra juega un rol interesante para la enseñanza y aprendizaje de este tema, no sólo por su versatilidad o su carácter dinámico, sino porque también posibilita crear un Classroom a partir de cualquier actividad, donde los docentes pueden observar las interacciones significativas de sus estudiantes en tiempo real. En los siguientes enlaces se explica cómo aprovechar estos recursos GeoGebra (https://youtu.be/2B7q4hyPjeQ) y cómo realizar una actividad en línea con los estudiantes (https://youtu.be/t_5rZ97BRg0).

3. Modelación del área entre curvas

El área entre curvas es una generalización del área bajo la curva y en este punto GeoGebra no cuenta con comandos establecidos para aproximar el área y modelar de forma dinámica este concepto. Para este propósito se necesita acudir a la teoría e integrarla al software, es decir, crear una conexión con las definiciones y la generalización de estos patrones sobre una combinación de comandos. Esto es alcanzado gracias al potencial del comando secuencia para incorporar patrones matemáticos y reproducirlos a objetos geométricos, simbólicos y numéricos. (Vergara, 2022)

3.1. Partición de un intervalo

Bartle y Sherbert (2011) define: si $I \coloneqq [a, b]$ es un intervalo acotado cerrado en $\mathbb{R}$, entonces una partición de I es un conjunto ordenado finito $\mathcal{P} \coloneqq (x_0, x_1, \dots, x_{n-1}, x_n)$ de puntos en I tal que

$$a = x_0 < x_1 < \cdots < x_{n-1} < x_n = b.$$

Los puntos de $\mathcal{P}$ son utilizados para dividir $I \coloneqq [a, b]$ en n subintervalos cerrados no superpuestos.

$$\boldsymbol{I_1 \coloneqq [x_0, x_1], \qquad I_2 \coloneqq [x_1, x_2], \dots, \qquad I_n \coloneqq [x_{n-1}, x_n]}$$

Las particiones del intervalo $I \coloneqq [a, b]$ pueden ser arbitrarias, sin embargo, se van a considerar particiones regulares lo que asegura que el ancho de cada subintervalo sea el mismo y se puede denotar mediante la expresión $\Delta x = (b-a)/n$, ver Figura 3.

3.2. Análisis del modelo

Se comienza dividiendo el problema en pequeñas partes para generalizar los patrones matemáticos en el software a través de comandos anidados para ello observe la Figura 3.

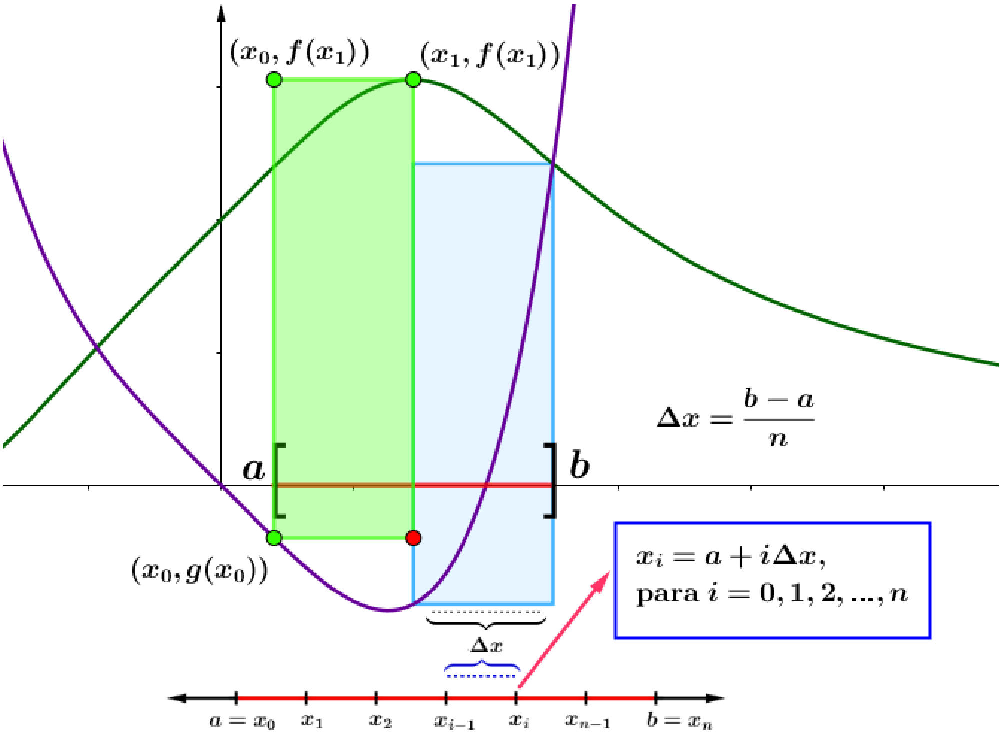


Figura 3. Área ente curvas – Análisis.

El rectángulo verde de la Figura 3 puede construirse a través de la herramienta polígono o el comando $Polígono(< Punto >, \ldots, < Punto >)$. Su construcción se puede empezar por cualquiera de sus vértices en sentido horario o antihorario, si empezamos por el punto $(x_0, g(x_0))$, hacia el punto rojo llegamos al punto $(x_0, f(x_1))$, sustituyendo estos puntos en el comando polígono se tiene la sintaxis: $Polígono((x_0, g(x_0)), (x_1, g(x_0)), (x_1, f(x_1)), (x_0, f(x_1)))$. Elaborar rectángulos entre curvas a través de su herramienta o el comando es impreciso y toma tiempo; más aún si se quiere particiones más finas. Esto se puede solucionar con el comando secuencia haciendo unas adaptaciones en las expresiones algebraicas mencionadas y combinado comandos.

La modelación está relacionada con la partición del intervalo y las funciones involucradas. Aquí el ancho de cada subintervalo y a la vez del rectángulo es Δx y cada punto en el eje x es $x_i = a + i\Delta x$ para $i = 0, 1, 2, \ldots, n$, ver Figura 3.

3.2.1. Conexión de ecuaciones algebraicas y el lenguaje de GeoGebra.

Si se considera dos puntos A y B sobre el eje x en GeoGebra, éstos hacen de extremos del intervalo de la Figura 3. Los puntos A y B se pueden variar sobre el eje real, entonces se puede establecer dos relaciones:

- $\Delta x = (b-a)/n = (x(B)-x(A))/n$
- $x_i = a + i\Delta x = x(A) + i\Delta x$

Las expresiones del lado derecho de las ecuaciones anteriores son las que se registran en GeoGebra. Estas expresiones pueden variar de acuerdo con la creación de los puntos A y B, especialmente si ambos puntos dependen de deslizadores o las intersecciones de las curvas, no obstante, otras posibilidades pueden basarse sobre esta idea. Con el lenguaje del software, los puntos de la partición evaluados en las funciones f y g (Figura 3) quedan representados en el comando polígono como:

- $Secuencia(\ Polígono(\ (x(A)+i\Delta x, g(x(A)+\ i\Delta x)), (x(A)+(i+1)\Delta x, g(x(A)+i\Delta x)), (x(A)+(i+1)\Delta x, f(x(A)+\ (i+1)\Delta x)), (\ x(A)+i\Delta x, f(x(A)+(i+1)\Delta x))))$.

Los puntos verdes y el rojo representados en la Figura 3 están dados para $i = 0{,}1$. El rol de $x(A)$ y $x(B)$ es tomar la coordenada x de los puntos A y B respectivamente.

3.2.2. Diseño e implementación

La generalización de estos patrones para n rectángulos en GeoGebra se hace mediante el comando *Secuencia(<Expresión>, <Variable>, <Valor inicial>, <Valor final>)* por lo que se requiere fijar los puntos A y B sobre el eje x, después crear un deslizador llamado n (n=número de rectángulos) que varíe de 1 a 100 con incremento 1, luego ingresar en la entrada dos funciones particulares y $\Delta x = (b-a)/n$. Finalmente registre la sintaxis:

- $Secuencia(\ Polígono(\ (x(A)+i\Delta x, g(x(A)+\ i\Delta x)), (x(A)+(i+1)\Delta x, g(x(A)+i\Delta x)), (x(A)+(i+1)\Delta x, f(x(A)+\ (i+1)\Delta x)), (\ x(A)+i\Delta x, f(x(A)+(i+1)\Delta x))), i, 0, n-1\ )$.

Siguiendo estos pasos se consigue la modelación dinámica del área entre curvas de la Figura 4, en la cual se pueden animar los puntos A y B, el deslizador, cambiar las funciones, el número de subintervalos (cantidad de rectángulos también). En la vista algebraica la lista o conjunto que proporciona los rectángulos de nombre $l1$, también da el área total que aproxima el área entre curvas, esto se alcanza utilizando el comando *Suma(<Lista>)*, para ello se digita en la entrada *Suma(* $l1$ *)*. Si desea calcular el área entre curvas sin esta aproximación se utiliza el comando *IntegralEntre(<Función>, <Función>, <Extremo inferior del intervalo>, <Extremo superior del intervalo>)*.

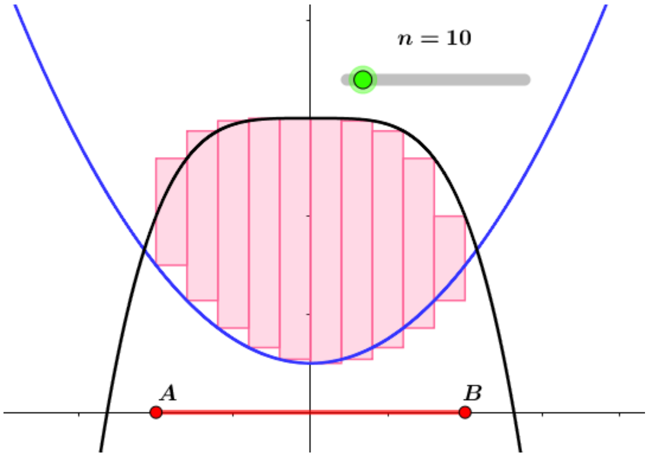


Figura 4. Modelación del área entre curvas por 10 rectángulos.

El objeto geométrico o forma geométrica para aproximar el área entre curvas hasta ahora está representada por rectángulos, sin embargo, también se puede emplear trapezoides como se muestra en la Tabla 1.

Los pasos para obtener este modelo son los mismos del problema anterior a diferencia de una sencilla modificación en las expresiones del comando secuencia. Al digitar los pasos anteriores y la siguiente sintaxis resulta la Figura 5:

- $Secuencia(Polígono((x(A) + i\Delta x, g(x(A) + i\Delta x)), (x(A) + (i + 1)\Delta x, g(x(A) + (i + 1)\Delta x)), (x(A) + (i + 1)\Delta x, f(x(A) + (i + 1)\Delta x)), (x(A) + i\Delta x, f(x(A) + i\Delta x))), i, 0, n - 1)$

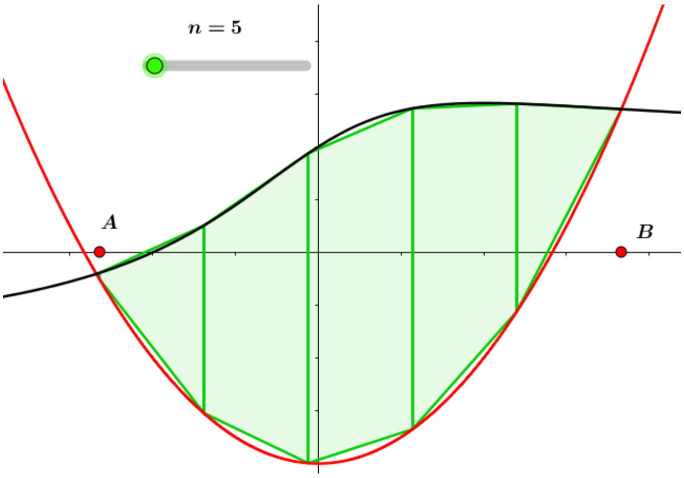


Figura 5. Modelación del área entre curvas por 5 trapezoides.

Es sabido que el área entre curvas es más general que el área bajo la curva, es decir, si se considera la función color azul de la Figura 4 y la roja de la Figura 5 y se igualan a cero se tiene el área bajo la curva sobre el intervalo $[a, b]$.

4. Una mirada numérica

Muchos problemas de área del entorno involucran funciones para las que no se dispone de antiderivada elemental. De hecho, una gran parte de integrales definidas no se pueden calcular de manera exacta. Por otro lado, ciertas intersecciones entre las curvas no se pueden obtener con los métodos básicos para resolver ecuaciones, por lo que éstos (límites de integración) también se requieren aproximarlos.

La integral definida es el límite de una secuencia de sumas de Riemann, es decir, que cualquier suma sirve como una aproximación de la integral. En ese sentido se hace uso de la aproximación estudiada.

A continuación, se propone un problema para mostrar las posibilidades que ofrece GeoGebra de trabajar en la integración numérica.

Considere calcular el área entre las curvas $f(x) = \cos(x^2)$ y $g(x) = \mathrm{sen}(x^2)$, cuyos límites de integración están dados por intersección de las curvas dentro del intervalo $[-1, 1]$. Este ejemplo muestra la importancia de utilizar algún método numérico porque considerando estas funciones como un sistema de ecuaciones sus soluciones son imposibles de hallar manualmente, además al aplicar la integral definida para determinar el área entre estas curvas, la diferencia de f y g no cuentan con una antiderivada elemental.

Solución:

Se registra en la entrada de GeoGebra las funciones $\cos(x^2)$ y $\mathrm{sen}(x^2)$, luego se realiza la intersección de las curvas en el intervalo $[-1, 1]$, esta intersección produce los puntos A y B. Ahora digitamos en la entrada:

- *n=Deslizador(1, 400, 1, 1, 100, false, true, false, false)*
- $\Delta x = (x(B) - x(A))/n$
- $area = Secuencia(\ Polígono(\ (x(A) + i\Delta x, g(x(A) + \ i\Delta x)), (x(A) + (i + 1)\Delta x, g(x(A) + i\Delta x)), (x(A) + (i + 1)\Delta x, f(x(A) + \ (i + 1)\Delta x)), (\ x(A) + i\Delta x, f(x(A) + (i + 1)\Delta x))), i, 0, n - 1\ )$.
- $Suma(area)$
- *IntegralEntre(f, g, x(A), x(B))*

En la Figura 6 puede verse la solución del problema donde *a* en la vista algebraica es el área de aproximación para 31 rectángulos y *b* el área obtenida mediante un comando definido en GeoGebra, esta aproximación es aún mejor si variamos el deslizador hasta $n = 400$ o aplicamos la forma trapezoidal. A efectos del número de iteraciones se recomienda aumentar esta cantidad hasta 1000 para asegurar un buen rendimiento del software.

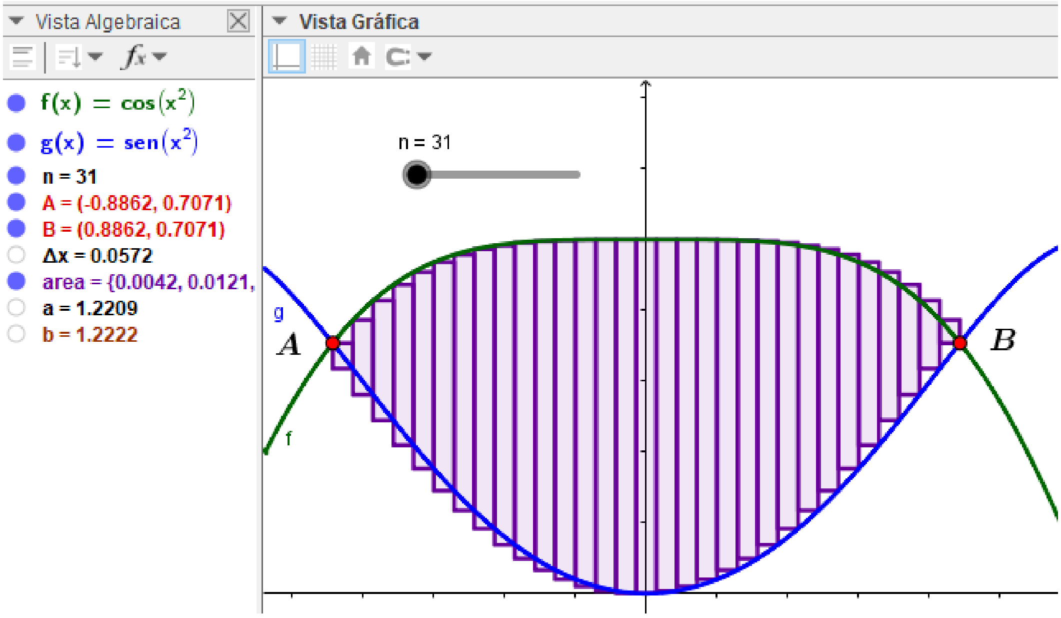


Figura 6. Aproximación numérica del área entre curvas.

5. Conclusión

Las construcciones dinámicas posibilitan el estudio e interpretación de la idea de límite y su relación con las sumas de Riemann, el concepto de partición (o refinamiento de la partición) y su norma, el máximo y el mínimo de las alturas de los rectángulos que definen las sumas superior e inferior, la relación que existe entre la suma inferior y superior con la integral que proporciona el área exacta. En resumen, todas estas ideas y las bondades de GeoGebra pueden servir como apoyo para el estudio teórico de la integral de Riemann pasando al teorema fundamental del cálculo, además da las posibilidades de resolver ejercicios cuyas primitivas de las funciones involucradas no estén definidas.

Las demostraciones de estos resultados son más claros con la ayuda de estas simulaciones dinámicas y promueven las bases para el estudio de otro tipo de integrales e incluso extenderse a dimensiones superiores tanto a nivel teórico o práctico.

Las exploraciones dadas permiten obtener una comprensión básica de algunas ideas detrás de los métodos de integración numérica más sofisticados. Por otro lado, este enfoque puede aplicarse para resolver problemas del entorno que en muchos casos solo se pueden efectuar de forma numérica.

Los diseños realizados han evidenciado como la teoría matemática influye sobre GeoGebra y GeoGebra sobre la teoría para crear modelos dinámicos en la que se conjugan los conceptos analíticos, geométricos y numéricos. Esto sugiere su aplicación en la enseñanza y aprendizaje a nivel analítico, geométrico y numérico, pues ofrece oportunidades de visualización, interacción, experimentación, análisis y síntesis de estos conceptos, potenciando la creatividad y el pensamiento computacional y abstracto sobre patrones matemáticos.

Referencias bibliográficas

Ancochea, B., Arranz, J., Muñoz, J. (2021). Superficies de revolución con GeoGebra. Sección: Propuestas Áulicas. UNIÓN, 17(61), 01-17. https://union.fespm.es/index.php/UNION/article/view/215

Arevalo, A. (11 de diciembre de 2018). Sumas de Riemann*. Recuperado el 20 de abril de 2021* de https://www.geogebra.org/material/show/id/zdsg42dz

Bartle, R., Sherbert, D. (2011). Introduction to real analysis. México, D.F: Jhon Wiley & Sons, Inc.

Bruce, E., Larson, R. (2010). *Cálculo 1 de una variable*. México, D.F: McGraw-Hill/Interamericana.

Dantas, S., Vieira, C. (2017). Formas de revolução e cálculo de volume*. Revista Centro de Ciências Naturais*, *39* (1), 142-155. https://doi.org/10.5902/2179460X24428

Grisales, A. (2018). Uso de recursos TIC en la enseñanza de las matemáticas: restos y perspectivas*. Entramado*, *14* (2), 198-214. https://doi.org/10.18041/1900-3803/entramado.2.4751

Juandi, D., Priatna, N. (2018). Discovery learning model with geogebra assisted for improvement mathematical visual thinking ability*. Revista: Journal of Physics: Conference Series.* https://doi.org/10.1088/1742-6596/1013/1/012209

Martínez, M., García, D. (2020). Estudio de las aprehensiones en el registro gráfico y génesis instrumental de la integral definida*. Formación Universitaria*, *13* (5), 177-190. http://dx.doi.org/10.4067/S0718-50062020000500177

Pereiro, D., Cayetano, J. (2021). Flores: del jardín a GeoGebra. Sección: GeoGebra en Unión. *UNIÓN*, 17(62), 01-20. https://union.fespm.es/index.php/UNION/article/view/331

Pizzorno, S., Montiel, G. (2021). Ambientes Virtuales de Aprendizaje construidos socialmente con Herramientas de Autor de GeoGebra. *Revista: Innovaciones Educativas*, *23* (34), 213-227. https://doi.org/10.22458/ie.v23i34.3432

Smith, R., Minton, R. (2012). *Calculus*. New York, D.F: The McGraw-Hill Companies.

Stewart, J. (2018). *Cálculo. Trascendentes Tempranas*. México, D.F: Cengage Learning Editores.

Vega, J., Duarte, F., Cárdenas, Y. (2015). Enseñanza de las matemáticas básicas en un entorno e-Learning: un estudio de caso de la Universidad Manuela Beltrán Virtual*. Revista Escuela de Administración de Negocios*, (79), 172-185.

Vergara, J. (2021). Sólidos de revolución con GeoGebra*. Revista Digital: Matemática, Educación e Internet*, *22* (1). https://doi.org/10.18845/rdmei.v22i1.5735

Vergara, J. (2022). Sólidos de Revolución y suma de Riemann en GeoGebra. *Revista Digital: Matemática, Educación e Internet*, 22(2). https://doi.org/10.18845/rdmei.v22i2.6134

Zill, D., Wright, W. (2011). *Cálculo. Trascendentes Tempranas*. México, D.F: McGraw-Hill/Interamericana editores.

José Luis Vergara Ibarra. Profesor de Enseñanza Media y Superior, colegio Veintitrés de Octubre, Montecristi-Ecuador; Universidad Técnica de Manabí, Portoviejo-Ecuador. Profesor y miembro del curso GeoGebra en alianza con la Universidade Estadual do Paraná (UNESPAR) y el apoyo de la Fundação de Amparo à Pesquisa do Estado de Mato Grosso – FAPEMAT, Brasilia-Brasil. Miembro del Instituto GeoGebra de la Universidad Técnica de Manabí, miembro de la Comunidad GeoGebra Latinoamericana y miembro del Instituto GeoGebra Internacional.

ingjosevergaraibarra@gmail.com
https://orcid.org/0000-0002-2735-9246

REVISTA IBEROAMERICANA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA

ISSN: 1815-0640
Número 64. Abril 2022
Páginas 1-20

http://www.fisem.org/www/index.php
https://union.fespm.es/index.php/UNION

Matemáticas en contexto en Educación Primaria: conexiones con el entorno y la música

Ángel Alsina, Manoli Contreras y Joaquim Reyes

Fecha de recepción: 19/01/2021
Fecha de aceptación: 17/11/2021

Resumen	Se describe un enfoque competencial de la enseñanza de las matemáticas en Educación Primaria a partir de actividades contextualizadas. Para ello, en la primera parte se fundamenta teóricamente el conocimiento pedagógico para la enseñanza de las matemáticas a partir de diversos modelos de conocimiento del profesorado y se presentan diversas recomendaciones para la implementación de actividades matemáticas competenciales, a partir del Enfoque de los Itinerarios de Enseñanza de las Matemáticas (EIEM). En la segunda parte, se presentan dos actividades en contexto: “Matemáticas en la calle” y “Musicomáticas”, en las que se trabajan las matemáticas en conexión con el entorno y la música, respectivamente. **Palabras clave**: Conexiones matemáticas, matemáticas en contexto, enseñanza de las matemáticas, competencias clave, educación primaria.
Abstract	A competency-based approach to teaching mathematics in Primary Education is described through contextualised activities. To this end, the first part provides a theoretical basis for the teaching of mathematics based on various models of teacher knowledge and presents various recommendations for the implementation of mathematical competence activities, based on the Mathematics Teaching Itinerary Approach (EIEM). In the second part, two activities in context are presented: "Mathematics in the street" and "Musicomátics", in which mathematics is worked on in connection with the environment and music, respectively. **Keywords**: Mathematical connections, mathematics in context, mathematics teaching, key competencies, primary education.
Resumo	Uma abordagem de competências para o ensino de matemática na Educação Primária é descrita a partir de atividades contextualizadas. Para o efeito, a primeira parte descreve o conhecimento pedagógico para o ensino da matemática com base em vários modelos de conhecimento do professor e apresenta várias recomendações para a implementação de atividades matemáticas de competência, com base na Abordagem do Itinerários de Ensino de Matemática (EIEM). Na segunda parte, são apresentadas duas atividades em contexto: “Matemática de rua” e “Musicomática”, em que a matemática é trabalhada no contexto da vida quotidiana e da música, respetivamente. **Palavras-chave:** Conexões matemáticas, matemática em contexto, ensino de matemática, competências-chave, educação básica.

1. Introducción

> Hace ya algunos años comprobé que la mejor manera de enseñar matemáticas es encontrar elementos significativos que interesen y motiven al alumnado y no presentar múltiples tareas sin un objetivo real. Para lograr que estos elementos sean significativos es conveniente que las actividades que ofrecemos al alumnado busquen siempre ser interdisciplinares. Las matemáticas no pueden ser una materia alejada de la realidad, han de estar relacionadas con el entorno cercano del alumnado para que puedan tener interés en ellas y las vean como una materia útil.
>
> La relación existente entre la música y las matemáticas y el interés que este tema suscita son aspectos que se han estudiado e investigado a lo largo de la historia de la música y de las matemáticas. Fruto de esta trayectoria, algunos docentes se plantean desde ya hace años trasladar esta relación al ámbito educativo para observar y aclarar las repercusiones de la educación musical para el aprendizaje matemático y viceversa.

Estos fragmentos, que ilustran una visión integrada de la enseñanza de las matemáticas, forman parte de las comunicaciones que dos maestros en ejercicio con una amplia trayectoria docente (la segunda y el tercer autor de este artículo), presentaron en la tercera edición del *Congrés Català d'Educació Matemàtica* (https://c2em.feemcat.org), celebrado de forma *online* en Catalunya (España) durante el confinamiento como consecuencia de la pandemia ocasionada por la COVID-19. Este congreso, en el que participaron casi 800 maestros y maestras de Educación Infantil y Primaria, profesorado de Secundaria y Bachillerato, futuro profesorado y profesorado universitario, principalmente, fue una evidencia más de que los eventos de Educación Matemática que se celebran en todo el mundo –congresos, jornadas, simposios, seminarios, etc.– son un excelente espacio de intercambio de conocimientos tanto didácticos como disciplinares para mejorar la identidad profesional para enseñar matemáticas y fomentar el desarrollo profesional.

Este artículo, como se indica en el propio título, se focaliza en uno de estos conocimientos, enseñar matemáticas en contexto, al tratarse de un conocimiento pedagógico que puede tener un impacto positivo en el aprendizaje de las matemáticas del alumnado. Se usa intencionadamente el término condicional porque las matemáticas en contexto no son garantía de aprendizaje, si no van acompañadas de un diseño de las actividades y una gestión de la enseñanza eficaz.

Desde este prisma, el artículo se estructura en dos partes: en la primera parte, se fundamente teóricamente el conocimiento pedagógico para la enseñanza de las matemáticas a partir de diversos modelos de conocimiento del profesorado (Ball, Thames y Phelps, 2008; Carrillo et al., 2018; Godino, Giacomone, Batanero y Font, 2017; Shulman, 1986) y, seguidamente, se presentan diversas recomendaciones para la implementación de actividades matemáticas en contexto, principalmente a partir del Enfoque de los Itinerarios de Enseñanza de las Matemáticas (EIEM), planteado por Alsina (2018, 2019, 2020a). En la segunda parte, se describen dos actividades matemáticas competenciales en contexto implementadas en Educación Primaria: la primera actividad, "Matemáticas en la calle", se ha llevado a cabo en los primeros niveles de Educación Primaria (6-8 años) con el propósito de presentar al alumnado actividades de numeración que vayan más allá de los típicos ejercicios de conteo de material de clase, piezas de construcción o similares; mientras que la segunda actividad, "Musicomátics", implementada en el último nivel de infantil y toda la primaria (5-12 años), tiene por objeto tratar de mejorar las competencias matemáticas y musicales del alumnado a través del trabajo conjunto de ambas materias.

2. El conocimiento pedagógico para la enseñanza de las matemáticas: orientaciones para el diseño y la gestión de actividades matemáticas en contexto.

Proponer orientaciones didácticas implica, necesariamente, referirse al conocimiento pedagógico para la enseñanza de las matemáticas. Por esta razón, como se ha indicado, en esta primera parte se fundamenta este conocimiento del profesorado a partir de diversos modelos (Ball et al., 2008; Carrillo et al., 2018; Godino et al., 2017; Shulman, 1986) y, seguidamente, se presentan algunas recomendaciones para el diseño y la gestión de actividades matemáticas en contexto, principalmente a partir del EIEM (Alsina, 2018, 2019, 2020a).

2.1. El conocimiento pedagógico para la enseñanza de las matemáticas: ¿qué es y qué implica?

Las prácticas de enseñanza determinan en buena medida lo que el alumnado aprende y cómo lo aprende, razón por la que la investigación educativa se ha interesado en estudiar el conocimiento que el profesorado manifiesta en sus prácticas docentes. Desde este prisma, una de las propuestas teóricas más relevantes fue desarrollada durante la década de los ochenta del siglo XX por Shulman (1986). Entre las categorías de conocimiento base para la enseñanza que propone este autor, se destaca la noción de conocimiento pedagógico del contenido (PCK, por su acrónimo en inglés) que se describe como aquel que permite al profesorado representar y formular una materia para hacerla comprensible a otros.

A partir de la propuesta de Shulman (1986) para analizar el conocimiento que pone en juego el profesorado en sus prácticas de enseñanza de las asignaturas escolares, han ido surgiendo diversos enfoques y modelos en el contexto de la investigación en educación matemática que tratan de ofrecer un marco para describir y analizar el conjunto de conocimientos del profesorado para enseñar matemáticas. Por su impacto, nos referimos sintéticamente a tres de ellos, y nos focalizamos exclusivamente en el dominio acerca del conocimiento pedagógico para la enseñanza.

El primer marco, desarrollado en Michigan (Estados Unidos), tenía como objetivo indagar qué hacía el profesorado y qué matemática utilizaban durante el proceso de enseñanza en Educación Primaria. Como consecuencia de sus hallazgos, los investigadores describen el *Mathematical Knowledge for Teaching* (MKT), un conjunto de conocimientos y habilidades que requiere el profesorado para gestionar las tareas y los problemas recurrentes en la enseñanza de las matemáticas (Ball et al., 2008). En este modelo, el conocimiento pedagógico del contenido (PCK) se refiere a la comprensión de lo que puede pensar o hacer matemáticamente el alumnado, incluyendo los errores que cometen, el conocimiento del contenido y la enseñanza que el profesorado utiliza para gestionar tareas o secuencias de aprendizaje y, finalmente, el conocimiento del contenido y el currículo, que es un conocimiento acerca de los programas y los materiales instruccionales. Para Depaepe, Verschaffel y Kelchtermans (2013), el PCK descrito en el MKT es uno de los mayores aportes de este modelo a la conceptualización del conocimiento del profesorado de matemáticas.

El segundo marco, desarrollado principalmente en la Universidad de Granada (España), se basa en el Enfoque Ontosemiótico del Conocimiento y la Instrucción Matemática (EOS). Desde este planteamiento teórico, Godino et al. (2017) proponen el modelo de Conocimientos y Competencias Didáctico-Matemáticas (CCDM), que es una evolución del modelo de categorías de los conocimientos didácticos-matemáticos del profesor (CDM) descrito por Godino (2009) y Pino-Fan y Godino (2015). Muy sintéticamente, este modelo incluye tanto los conocimientos como las competencias del profesor de matemáticas, y se utilizan diversas herramientas de análisis de las prácticas matemáticas y didácticas introducidas en el EOS: las nociones de sistema de prácticas (análisis de significados globales), configuración ontosemiótica (análisis ontosemiótico de las prácticas), dimensión normativa (análisis normativo), trayectorias didácticas (gestión de configuraciones didácticas) e idoneidad didáctica (análisis de la idoneidad didáctica) se utilizan como base para delimitar sub-competencias de la competencia general de análisis e intervención didáctica, propia del profesor de matemáticas.

Finalmente, el tercer marco, desarrollado en la Universidad de Huelva (España), parte de la base que todo el conocimiento del profesorado es especializado. Desde esta perspectiva, Carrillo et al. (2018) plantean el Modelo del Conocimiento Especializado del Profesor de Matemáticas (MTSK), que incluye, entre otros, un dominio de conocimiento didáctico del contenido (PCK) y un dominio de creencias del profesor sobre qué son las matemáticas, cómo se enseñan y cómo se aprenden. En el PCK se incluye el conocimiento de la enseñanza de las matemáticas, que agrupa teorías de enseñanza de las matemáticas, recursos de enseñanza y estrategias, técnicas, tareas y ejemplos; el conocimiento de las características de aprendizaje de las matemáticas, que contiene teorías de aprendizaje, fortalezas y dificultades del alumnado, procesos y estrategias habituales o inusuales que utilizan y aspectos emocionales del aprendizaje; por último, el conocimiento de los estándares de aprendizaje en matemáticas incluye el conocimiento del profesorado de los contenidos que debería aprender el alumnado, la profundidad con que dichos contenidos deberían ser desarrollados y las secuenciación de los contenidos en un curso o nivel educativo en particular.

A modo de síntesis, en la Tabla 1 se presentan los principales aspectos del conocimiento pedagógico para la enseñanza que se consideran en cada uno de los marcos descritos y qué implicaciones tiene.

	MKT (Ball et al., 2008)	**CCDM Godino et al. (2017)**	**MTSK (Carrillo et al., 2018)**
Dominio/ Categoría	Conocimiento Pedagógico del Contenido (PCK)	Competencia de análisis e intervención didáctica	Conocimiento Didáctico del Contenido (PCK)

Subdominios/ herramientas	Conocimiento del contenido y el alumnado Conocimiento del contenido y la enseñanza Conocimiento del contenido y el currículo	Sistema de prácticas Configuración ontosemiótica Dimensión normativa Trayectorias didácticas Idoneidad didáctica	Conocimiento de la Enseñanza de las Matemáticas Conocimiento de las Características de Aprendizaje de las Matemáticas Conocimiento de los Estándares de Aprendizaje en Matemáticas
Principales implicaciones para la práctica docente	El profesorado debería conocer lo que puede pensar o hacer matemáticamente el alumnado, incluyendo los errores; la gestión de tareas o secuencias de aprendizaje; y, finalmente, los programas y materiales instruccionales.	El profesorado debería estar capacitado para abordar los problemas didácticos básicos que están presentes en la enseñanza. Además, en las prácticas didácticas puestas en juego en la resolución de problemas didácticos también intervienen objetos matemáticos y didácticos específicos (conocimientos), que deben ser conocidos por el profesor.	El profesorado debería conocer las teorías de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas; los recursos y estrategias, técnicas, tareas y ejemplos; las fortalezas y dificultades del alumnado; los procesos y estrategias de aprendizaje habituales o inusuales y los aspectos emocionales; y, finalmente, los contenidos que se deberían enseñar.

Tabla 1. Principales aspectos del conocimiento pedagógico para la enseñanza de las matemáticas

2.2. Planificación y gestión de actividades matemáticas en contexto.

Del conjunto de conocimientos pedagógicos descritos en la Tabla 1, se aborda la planificación y gestión de la enseñanza de las matemáticas en contexto por su posible impacto positivo en aspectos tanto cognitivos como actitudinales del alumnado, siempre que dicha planificación y gestión se ajusten tanto a sus necesidades reales de aprendizaje como a sus intereses.

En este artículo, se asume que un contexto es una situación más o menos problemática que puede ser objeto de estudio y que genera preguntas o problemas que requieren las matemáticas para contestarlas o resolverlas (Alsina, 2011). Desde esta perspectiva, un contexto no debería entenderse sólo como el contexto del aula, el contexto social o familiar de la escuela o del alumnado, o el contexto histórico, sino que es un término mucho más general que engloba todas aquellas situaciones y actividades que tienen sentido para el alumnado y fomentan su pensamiento matemático crítico (Niss, 1995).

Ante esta perspectiva, surgen algunas preguntas: ¿por qué es interesante utilizar contextos en la clase de matemáticas?; ¿qué funciones tienen?; ¿para qué sirven?; ¿qué tipos de contextos podemos utilizar?; ¿cómo trabajar? Reeuwijk (1997), investigador y educador del Instituto Freudenthal de la Universidad de Utrecht (Países Bajos), expone cinco motivos para utilizar contextos:

1. Pueden motivar al alumnado. Asimismo, pueden ayudarles a comprender por qué las matemáticas son útiles y necesarias. Pueden aclarar por qué ciertos ámbitos de las matemáticas revisten importancia, y pueden contribuir a que los alumnos

entiendan el modo en que se emplean las matemáticas en la sociedad y en la vida cotidiana.

2. Pueden favorecer que el propio alumnado aprenda a usar las matemáticas en la sociedad, además de descubrir qué matemáticas son relevantes para su educación y profesión posteriores.
3. Pueden incrementar el interés del alumnado por las matemáticas y la ciencia en general.
4. Pueden despertar la creatividad del alumnado, impulsarlos a utilizar estrategias informales y de sentido común al afrontar, por ejemplo, la resolución de una situación problemática o de un juego.
5. Puede actuar como mediadores entre la situación concreta y las matemáticas abstractas.

Desde este prisma, en relación a las matemáticas en contexto, Alsina (2011, p. 14) indica que:

> El uso de contextos en la clase de matemáticas, pues, puede contribuir a facilitar el aprendizaje de esta disciplina pero, sobre todo, a comprender cuál es el sentido de las matemáticas, cuáles son sus verdaderas funciones: formativa, teniendo en cuenta que los contextos permiten pasar progresivamente de situaciones concretas o situaciones abstractas (matematización progresiva); instrumental, al considerar que los contextos son, en realidad, herramientas que favorecen la motivación, el interés o el significado de las matemáticas; y aplicada, al fomentar el uso de las matemáticas en contextos no exclusivamente escolares y, por lo tanto, contribuir a la formación de personas matemáticamente más competentes.

Previamente, Alsina (2010) había planteado un diagrama piramidal en el que se comunicaba de forma sencilla el tipo de contextos necesarios para desarrollar el pensamiento matemático y su “frecuencia de uso” más recomendable, en función de la posición que ocupa cada contexto: de más o menos frecuencia desde la base hacia la cúspide. En este diagrama piramidal, más conocido como “Pirámide de la Educación Matemática”, no se descartaba ningún recurso, sino que solo se pretendía informar sobre la conveniencia de restringir algunos de ellos a un uso ocasional y, por eso, se consideró que podía ser una herramienta útil para el profesorado preocupado por hacer de su metodología una garantía de educación matemática.

En la base se situaban los contextos que necesita todo el alumnado para aprender matemáticas y que, por lo tanto, se podrían y deberían “consumir” diariamente: las situaciones problemáticas y los retos que surgen en la vida cotidiana de cada día, la observación y el análisis de los elementos matemáticos del entorno, la manipulación con materiales diversos y los juegos, entendidos como la resolución de situaciones problemáticas. Después seguían los que deben “tomarse” alternativamente, como los recursos literarios y los recursos tecnológicos. Y, por último, en la cúspide, se ubicaban los recursos que deberían usarse de forma ocasional, concretamente los libros de texto, por las razones que ya se han expuesto en la introducción.

Con los años, este planteamiento ha evolucionado hacia el EIEM (Alsina, 2018, 2019), asumiendo que la palabra “itinerario” se refiere a una secuencia de enseñanza intencionada que contempla tres niveles

1. Enseñanza en contextos informales: la enseñanza del contenido matemático se inicia en situaciones reales o realistas, como por ejemplo el entorno inmediato, o bien materiales manipulativos y juegos, en los que el conocimiento de la situación y las estrategias se utilizan en el contexto de la situación misma, apoyándose en los conocimientos informales, el sentido común y la experiencia.
2. Enseñanza en contextos intermedios: la enseñanza del contenido prosigue en contextos que hacen de puente entre los contextos reales o realistas de la fase previa y los contextos formales de la fase posterior, como por ejemplo algunos recursos literarios (cuentos y canciones) y tecnológicos (*applets*, robots educativos programables, etc.), que a través de la exploración y la reflexión conducen a la esquematización y generalización progresiva del conocimiento matemático.
3. Enseñanza en contextos formales: la enseñanza del contenido finaliza en contextos gráficos y simbólicos, como por ejemplo las fichas y los libros de texto, en los que se trabaja la representación y formalización del conocimiento matemático con procedimientos y notaciones convencionales para completar de esta forma el aprendizaje desde lo concreto hasta lo simbólico.

Como se indica en Alsina (2019), el EIEM se aleja de una visión de la enseñanza de las matemáticas basada en la repetición y la práctica de ejercicios que presentan los libros de texto como principales estrategias didácticas para “aprender” matemáticas, y en su lugar, plantea que es necesario fomentar la comprensión más que la mera memorización, la actividad heurística más que la pura ejercitación, o el pensamiento matemático crítico más que la simple repetición.

Para ello, Alsina (2020a) indica que esta visión contemporánea de la educación matemática requiere, primero, de un amplio dominio profesional de los conocimientos matemáticos a enseñar, puesto que no se puede enseñar bien lo que no se sabe y, segundo, un amplio dominio profesional acerca de las formas de enseñar dichos conocimientos, puesto que el alumnado de hoy no tiene las mismas necesidades para aprender matemáticas que el alumnado de años atrás, por lo que no tiene ningún sentido enseñar lo mismo que hace décadas y menos aún enseñarlo de la misma forma. Desde este prisma, describe diversas recomendaciones que se sintetizan a continuación (Alsina, 2020a): 1) planificar y gestionar la enseñanza de los contenidos a través de los procesos matemáticos de resolución de problemas, razonamiento y prueba, comunicación, representación y conexiones, es decir, promover una enseñanza que implique pensar y hacer, más que memorizar definiciones y procedimientos; 2) promover prácticas de enseñanza-aprendizaje que consideren tanto al alumnado como al profesorado, en las que haya espacio tanto para que el alumnado indague y construya su conocimiento, como para que el profesorado explique de forma directa un conocimiento matemático; 3) considerar contextos reales, intermedios y formales, con distinto protagonismo en función del nivel escolar; 4) garantizar el principio de abstracción progresiva, desde lo concreto hacia lo abstracto, de manera que, a lo largo de un itinerario, se considere la visualización, la manipulación, la simbolización y la abstracción; 5) disponer de criterios objetivos para la selección de los contextos de enseñanza de las matemáticas, a partir de distintas herramientas; y 6) promover la educación matemática inclusiva a través de itinerarios de enseñanza que consideren la diversidad del alumnado, en todas sus dimensiones (cognitiva, cultural, de género, motriz, sensorial, etc.).

Con base en estos antecedentes, a continuación, se describen dos actividades matemáticas competenciales en contexto que se han planificado considerando las conexiones con el entorno y la música, principalmente, y se gestionan a partir de una enseñanza basada en los procesos.

3. Ejemplos de actividades matemáticas competenciales en contexto en Educación Primaria.

3.1. Matemáticas en la calle.

Escuela/ Maestro	Escola Pública Turó de Guiera (Cerdanyola del Vallès, Barcelona)/ Joaquim Reyes
Niveles	1º-2º de Educación Primaria (6-8 años)
Objetivos	Conectar conocimientos de matemáticas con el entorno inmediato. Promover el desarrollo del sentido numérico. Explorar el entorno inmediato. Aprender a utilizar correctamente instrumentos de dibujo.
Contenidos	**Contenidos de matemáticas** - Estrategias de conteo. - Interpretación y representación de series. - Búsqueda de distintas soluciones a un problema. - Comparación de distintas cantidades numéricas. **Contenidos de conocimiento del medio** - El barrio, las calles, los edificios y sus partes. **Contenidos de educación artística** - Uso de la regla como elemento de dibujo.

Tabla 2. Datos descriptivos de la actividad **“**Matemáticas en la calle”.

Actividad 1. Observación y representación de la fachada de mi edificio.

Considerando que la escuela se ubica en un entorno urbano (Figura 1), la primera actividad empieza en el aula planteando diversas preguntas al alumnado: ¿cómo es el edificio donde vivís?, ¿cómo se ve desde la calle?, ¿qué cosas veis en el edificio?

Figura 1. Vista desde la ventana del aula.

Después de un primer diálogo en el que el alumnado habla de los edificios donde viven y de sus características principales, se pide que dibujen la fachada de su edificio intentando recordar el número de pisos, ventanas y balcones que hay.

Para realizar el dibujo se facilita un Din A3, que previamente doblan por la mitad, y en la primera mitad dibujan la fachada. Una vez realizada esta primera parte de la actividad, se pide al alumnado que, cuando lleguen a su casa, realicen un pequeño boceto de la fachada, contando realmente la cantidad y distribución exacta de los pisos, ventanas y balcones. No hace falta que sea un gran dibujo, sino simplemente un esquema atendiendo a los parámetros indicados. Es importante que, sobre todo, anoten los pisos que hay y la distribución de ventanas y balcones que, normalmente, es regular en todos los pisos (Figura 2).

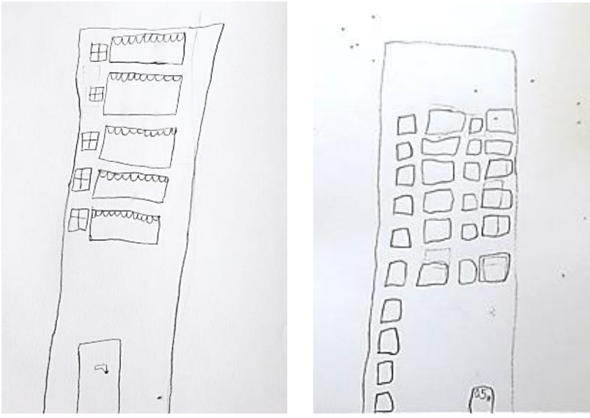


Figura 2. Dibujos inicial y esquemático.

En el dibujo esquemático de la Figura 2, se observa como este alumno se ha fijado en dibujar el número de pisos que hay en su edificio y en reflejar que la serie de ventanas y balcones es 1-**1**-1-**1**. Otros alumnos mayores lo representan algunas veces añadiendo números: dibujan solo la serie de un piso y anotan el número de pisos que hay.

Después de dos o tres días, cuando traen el esquema a la clase, rellenan la segunda parte del Din A3: deben repetir la fachada de su edificio, pero colocando los pisos, ventanas y balcones exactos que hay, consultando el esquema que han hecho en su casa. Al contrario que en el primer dibujo, en el que tenían libertad total para representar su idea, aquí se marcan unas consignas: a) debe ser un dibujo en el que las líneas del edificio se tracen correctamente y en el sentido adecuado, buscando, respectivamente, la perpendicularidad y paralelismo con el suelo; b) el edificio debe mantenerse en pie y no caerse, por lo que es necesario que esté en posición vertical; y c) los pisos deben tener los distintos elementos alineados, por lo que deben usar la regla como elemento de dibujo (Figura 3).

Figura 3. Uso de la regla para representar el edificio.

Una vez terminada la tarea, cada alumno dispone de un Din A3 con dos representaciones de sus edificios: una imaginaria y otra real (Figura 4).

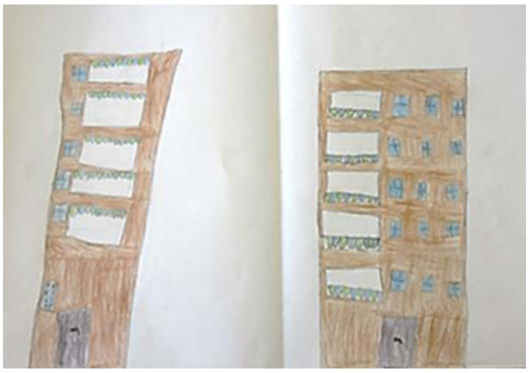


Figura 4. Dibujo imaginado y real.

Actividad 2. Estrategias de conteo.

A continuación, se lleva a cabo una tarea de forma individual o por parejas para ayudar al alumnado a aprender estrategias que les sean útiles para contar los elementos de su edificio. Para ello, se utilizan piezas de mosaico o similares de distintos colores, hojas de papel y los dibujos previos del propio edificio:

- Primero representan su edificio (uno de los dos, si trabajan en parejas) con las piezas de mosaico, usando un color diferente para cada piso. No es necesario distinguir entre ventanas y balcones y, si su edificio es de más de 5 o 6 pisos, solo representan esta cantidad como máximo.
- Se plantean diversas preguntas, como ¿cuántas ventanas tenemos?, y la más importante y necesaria para encontrar estrategias de conteo rápido: ¿cómo podemos contar más rápido estas ventanas?
- Se introduce la noción de contar haciendo grupos y se pregunta qué grupos podrían realizar para conseguir un cálculo más rápido. Puesto que se ha insistido en representar cada piso de un color distinto, acostumbran a ver enseguida que hay unas estructuras horizontales regulares que pueden utilizar para agrupar cantidades y contar mejor. Una vez sumadas las cantidades horizontales, se les pregunta si habría otra forma de hacerlo, y algunos descubren que también pueden calcular utilizando las estructuras verticales.

En la primera imagen de la Figura 5, por ejemplo, se observa como una alumna de 6 años primero encuentra, como medio de cálculo más eficiente, las estructuras verticales y va contando primero dos bloques (3+3), luego tres bloques (3+3+3) y al fin los cuatro bloques (3+3+3+3). En este momento, se le hace reflexionar sobre si puede encontrar otra forma de conteo rápido y si hay alguna manera de no tener que repetir cada vez sumas ya hechas. Cuando utiliza las estructuras horizontales, ya mantiene la cantidad contada en la primera suma para añadir el tercer bloque: 4+4 = 8 y luego 8+4 = 12 (no 4+4+4, que es el sistema que se usa la primera vez). Es muy importante en estas edades incidir en el recuerdo de la cantidad contada y, a partir de ella, seguir sumando y no volver a empezar otra vez desde 0. En la segunda imagen de la Figura 5 aparece el resultado de otra alumna de 7 años que ya ha entendido el procedimiento del sumar “a partir de”.

Figura 5. Conteo con piezas de mosaico.

Actividad 3. Conteo y comparación de la cantidad de ventanas y balcones del propio edificio.

Una vez trabajadas las estrategias de conteo y después de que el alumnado haya asociado la noción de cálculo rápido a agrupar cantidades, se pide que cuenten todas las ventanas del edificio imaginado y luego todas las ventanas del edificio real y, a continuación, se sigue el mismo procedimiento con los balcones. En algunos casos, como en alumnado de menor edad o con dificultades de aprendizaje, es recomendable limitar el número de pisos.

A continuación, se pide al alumnado que comparen cantidades entre el edificio imaginado y el edificio real, utilizando los comparativos “más… qué” o “menos… que”, que suelen ser complejos para algunos. Para ello, se plantean diversas preguntas: ¿hay más ventanas en un piso del edificio real o en uno del piso imaginado?, ¿cuántas ventanas hay más (o menos) en un piso del edificio real que en uno del edificio imaginado?, ¿hay más balcones en el edificio imaginado o en el real?, ¿cuántos balcones hay más (o menos) en el edificio imaginado que en el real?, ¿cuántos pisos hay más (o menos) en un edificio que en el otro? y otras cuestiones que pueden ir surgiendo relacionadas con la comparación y conteo de los distintos elementos.

Actividad 4. Representación de edificios imaginarios, con consignas previas.

Finalmente, cuando el alumnado ya ha llevado a cabo las tareas previas descritas con los elementos de su propio edificio, se plantean nuevas preguntas para transferir lo aprendido a otras situaciones. Desde este prisma, se les plantean nuevos retos que consisten en representar un nuevo edificio con las piezas de mosaico, atendiendo a consignas dadas, promoviendo de esta forma la reversibilidad del pensamiento: en las situaciones previas, partían de un edificio real y buscaban el nº de ventanas, balcones, etc., mientras que en esta tarea, se les plantea la situación hipotética de un edificio con un determinado nº de ventanas, balcones, etc., y deben pensar estrategias numéricas para repartirlos de forma regular en diversos pisos. Por ejemplo, se les formulan situaciones como las siguientes: 1) Si debemos construir un edificio que tenga 16 ventanas, ¿cómo las podemos repartir? ¿en cuántos pisos? ¿cuántas formas distintas encontramos de repartirlas de forma regular?; 2) Si tenemos un edificio de 5 pisos, ¿cuántas ventanas necesitamos en cada piso para tener en total 20? ¿y 25? Con estas actividades, se introduce al alumnado en situaciones de reparto de objetos de forma regular y en las operaciones aritméticas de multiplicación y división.

Actividad 5. Observación y representación de un edificio significativo del entorno.

Con el objeto de consolidar los aprendizajes previos, a continuación, se busca un edificio significativo de la zona y que sea de fácil acceso para todo el alumnado, como por ejemplo la sede de una empresa, un edificio situado en una zona céntrica, una fábrica o cualquier otro que tenga alguna característica específica que lo convierta en peculiar y que sirva para trabajar los contenidos matemáticos descritos, como el que se muestra en la primera imagen de la Figura 6. Una vez concretado el edificio, se da aproximadamente una semana de tiempo para que todos tengan tiempo de ir a verlo fuera del horario escolar, solos o acompañados de sus amigos, familiares, etc.

Una vez transcurrida la semana, se les pide que intenten dibujar este edificio lo más detalladamente que puedan, intentando recordar el número de pisos, ventanas y balcones que tiene. Seguidamente, se organiza una “excursión” a este edificio para realizar el esquema, anotando con precisión el número y distribución de todos los elementos, tal como se observa en la segunda imagen de la Figura 6.

Figura 6. Edificio conocido situado en la plaza más céntrica del barrio.

Ya en clase, se llevan a cabo las mismas tareas de representación y conteo de los elementos del edificio, aplicando las estrategias aprendidas.

Cabe señalar que esta tarea permite llevar a cabo la actividad matemática competencial en contexto descrita también en entornos no urbanos. Se trata, simplemente, de localizar un edificio representativo del pueblo o incluso de un entorno más rural y llevar a cabo las tareas descritas.

Actividad 6. Juego de pistas con la numeración de las calles.

Esta última actividad, que forma parte de la misma unidad, consiste en localizar *in situ* los edificios de una calle a partir de los números que los identifican. Para llevar a cabo la actividad, previamente, el docente prepara pistas de edificios representativos: una panadería, un banco, una casa, etc.

Seguidamente, hacen una salida a la calle (se recomienda que sea peatonal y que permita poder desplazarse con seguridad): primero, se plantean diversas preguntas, como por ejemplo ¿cómo podemos saber el nombre de la calle?, ¿todos vivís en la misma casa?, ¿cómo explico dónde está mi casa?, etc. Con estas preguntas iniciales se pretende generar un diálogo para que el alumnado se dé cuenta de que la calle tiene un nombre, cada edificio un número que lo identifica, etc. A continuación, se observan los números de los edificios y se plantean nuevas preguntas para observar el sistema de numeración de las calles: ¿si estamos en el 42, por qué el siguiente es el 44? ¿Dónde está el 43? De esta forma, se fomenta el aprendizaje de las series de números de 2 en 2, la clasificación de números en pares e impares, etc.

Figura 7. Observación del nombre y los números de la calle.

Seguidamente se inicia el juego, que consiste en dar una tarjeta con un enigma a cada grupo de 3-4 alumnos y alumnas, como las que se muestran en la Figura 8, para que localicen un determinado edificio de la calle.

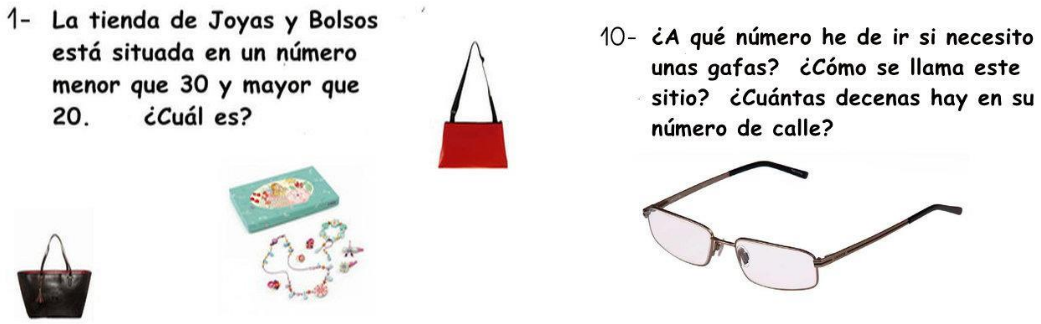


Figura 8. Tarjetas con las pistas.

Esta actividad permite trabajar de forma globalizada otros conocimientos como el lenguaje, puesto que el alumnado debe leer las pistas, indicar el nombre concreto del edificio (por ejemplo, un banco), explicar la solución a los demás, etc. Además, se trabaja también la educación en valores y la competencia ciudadana, ya que el alumnado no puede correr por la calle, debe respetar a las personas, no entrar en las tiendas, etc.

3.2. Musicomátics.

Escuela/ Maestra	Escola Creixen Terrassa (Terrassa, Barcelona)/Manoli Contreras
Niveles	5-12 años
Objetivos	Conectar conocimientos de matemáticas y de música. Atender las inteligencias múltiples. Fomentar diferentes formas de pensar y hacer. Favorecer que el alumnado sea el agente activo de su propio aprendizaje.

Contenidos	**Contenidos de música** - Recuento de unidades melódicas. - Interpretación de células rítmicas. - Discriminación auditiva. - Tipos de sonidos. **Contenidos de matemáticas** - Recuento de unidades. - Lectura de tablas. - Simetría. - Patrones. - Representación de líneas. - Mínimo común múltiplo y máximo común divisor.

Tabla 3. Datos descriptivos de la actividad **“**Musicomátics”

Esta actividad competencial se inscribe en el proyecto europeo *Sounding Ways Into Mathematics* del programa Comenius del *European Music Portfolio*, iniciado en 2014 por ocho escuelas de Catalunya que se unieron en red para desarrollar el trabajo interdisciplinar entre la música y las matemáticas, estudiar su viabilidad, definir las características y necesidades de su implantación, desarrollar y someter a prueba las actividades que lo configuren y evaluar su impacto en el aprendizaje. Una de las escuelas, Creixen Terrassa, decide implementarlo de forma permanente en el centro.

El alumnado de Educación Primaria lleva a cabo una sesión de Musicomátics semanal, además de las que realizan de matemáticas o de música. El funcionamiento de las sesiones se basa en el diseño por parte de la maestra de una situación a partir de la que el alumnado investiga, se plantea dudas y experimenta diferentes aspectos para dar respuesta a dichas situaciones y/u otras cuestiones que surgen durante el proceso, favoreciendo que cada alumno y alumna evolucione de acuerdo a su ritmo, sus necesidades y sus capacidades en el momento de llevar a cabo la actividad. A continuación, se describe una muestra de actividades diseñadas para alumnado de entre 5 y 12 años.

Actividad 1. Recuento de unidades y canción (5-6 años).

El alumnado tiene su primer contacto con el concepto de unidad matemática y melódica a partir del reconocimiento de canciones y melodías, relacionando la unidad matemática con la unidad melódica y empezando a diferenciar la parte del todo. Cuentan canciones que se van sucediendo (que el docente va interpretando en bucle) y ello les lleva a reflexionar qué es una unidad, qué parte de una unidad podría ser una estrofa de una canción, qué tipo de final (conclusivo o suspensivo) indica el final de una canción, etc. De forma contraria, también pueden reproducir canciones un número determinado de veces a partir de una simple caja de música (Figura 9).

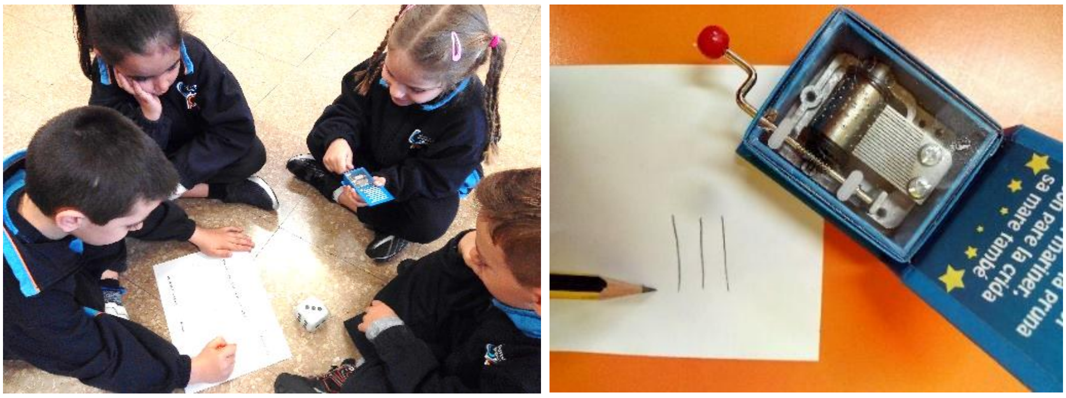


Figura 9. Recuento de unidades y canción.

Actividad 2. Interpretación de células rítmicas y lectura de información de una tabla (5-6 años).

El alumnado se introduce en el mundo de la interpretación de pequeñas células rítmicas de entre cuatro y ocho pulsaciones a partir de cuadros y tablas de información (Figura 10) y descubren que son capaces de leer la información reflejada en estos cuadros y tablas y aplicarla en la producción y la interpretación musical. Esta tarea les permite, además, llevar a cabo pequeñas estadísticas y deducir probabilidades: qué instrumento ha sonado un mayor número de veces, qué ritmo ha sonado un menor número de veces, dónde deberían escribir su nombre para tocar el mismo instrumento o el mismo ritmo que un compañero, etc.

Figura 10. Interpretación de células rítmicas y lectura de información de una tabla.

Actividad 3. Simetría y danza (7-8 años).

Los alumnos y las alumnas descubren, experimentan, asimilan, se plantean y crean diferentes simetrías a partir del movimiento corporal y la danza, ya sea espontánea o coreografiada (Figura 11). Experimentar la simetría a partir del propio cuerpo hace que sea mucho más sensorial y la capacidad de reacción del alumnado ante el “error” es mucho más rápida e intuitiva.

Figura 11. Simetría lateral y danza.

Esta actividad puede ampliarse en cursos posteriores introduciendo la simetría de traslación y la simetría radial, a medida que las coreografías adquieren complejidad.

Actividad 4. Seriaciones (8-9 años).

Se plantea la composición y posteriormente la discriminación de series a partir de elementos musicales (instrumentos, ritmos, notas musicales...) que pueden verse, pero también escucharse (Figura 12). De esta manera, se añade el valor de la audición y la discriminación auditiva a la propia lógica de las seriaciones. Los alumnos y las alumnas, ya sea individualmente o en grupo, pueden componer sus propias series y, además, interpretarlas ampliando de esta forma la percepción del concepto. Con las series creadas, el alumnado puede acompañar piezas musicales existentes o crear las suyas propias. Puede realizarse también de forma inversa si invitamos a los alumnos y a las alumnas a descubrir qué series se ocultan en determinadas piezas musicales (los violines de *Viva la vida* de Coldplay, el bajo de *Billy Jean* de Michael Jackson o incluso la percusión del *Bolero* de Ravel). En cursos inferiores, se puede comenzar con un trabajo más simple donde se produzcan series con pocos elementos. Como en cualquier otro trabajo de seriaciones, se puede trabajar a partir de una variable (únicamente instrumento o únicamente ritmo) o combinando varias de ellas (instrumento y ritmo o instrumento y nota)

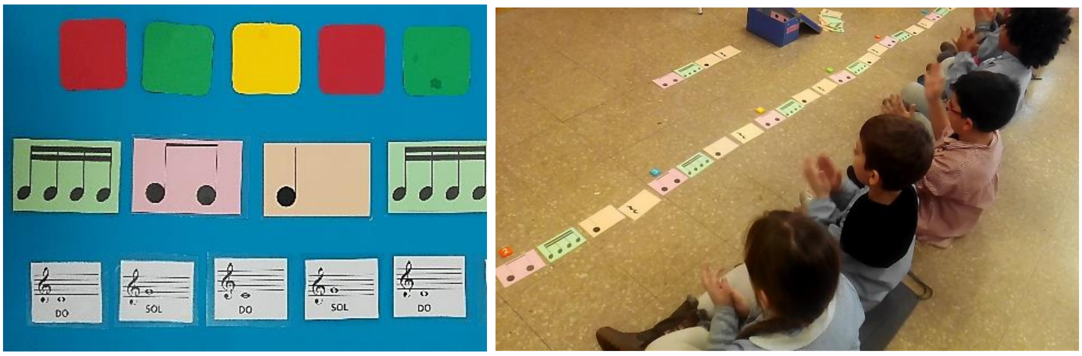


Figura 12. Seriaciones.

Actividad 5. Geometría y cualidades del sonido (8-9 años).

Esta actividad se basa en el vocabulario común existente entre la geometría y las cualidades del sonido. En ambas áreas, los alumnos y las alumnas pueden usar conceptos como largo, corto (conceptos que se pueden medir tanto matemática como musicalmente); ascendente, descendente, horizontal (referidos a la orientación espacial pero también a la direccionalidad del sonido); etc. Esto permite trabajar aspectos de la geometría a partir de la discriminación auditiva y aspectos del sonido a partir de la geometría y las líneas. Un sonido que modula de grave hacia agudo y que tiene una duración de cuatro pulsaciones puede representarse gráficamente como una línea ascendente con una longitud de cuatro unidades (ya sean estas unidades centímetros, palmos o cuadros de una cuadrícula). De la misma forma, una sucesión de sonidos podría dar lugar a la representación de un polígono. Así, una sucesión de tres sonidos con la misma duración, uno ascendente, seguido de uno descendente y otro que se mantiene, se verían representados con un triángulo equilátero si indicamos al alumnado que cierren la línea poligonal, como se observa en la primera imagen de la Figura 13.

Se puede invertir el sentido de esta actividad haciendo que sea el alumno o la alumna el responsable de producir un sonido, es decir, de interpretar musicalmente el polígono deseado. Una flauta de émbolo sería un buen recurso dada su sencillez, como se muestra en la segunda imagen de la Figura 13. En cursos inferiores, se podría comenzar con el trabajo de sensibilización de líneas y sonidos sencillos.

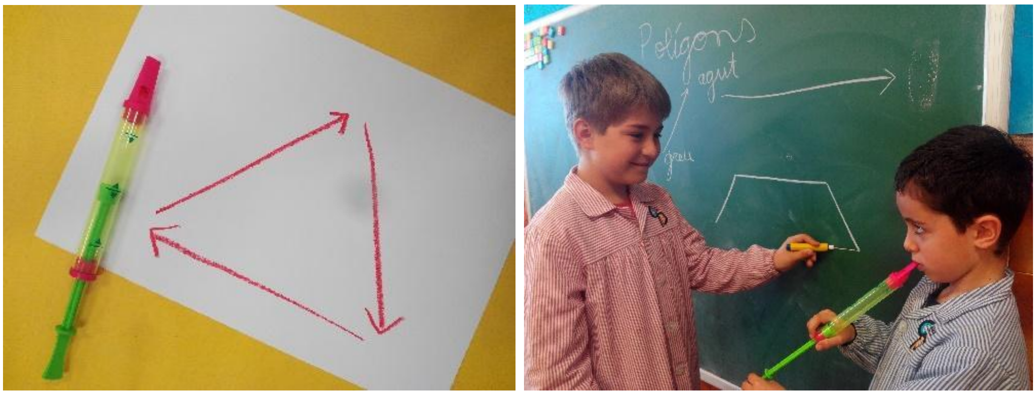


Figura 13. Geometría y cualidades del sonido.

Actividad 6. Polirritmia, mínimo común múltiplo y máximo común divisor (11-12 años).

El alumnado puede descubrir el concepto de mínimo común múltiplo y máximo común divisor a partir de la práctica de polirritmias, ya sean proporcionadas por el docente o de propia creación. La actividad consiste en pedir a un grupo de alumnos y alumnas que interprete, por ejemplo, un ritmo binario con percusión corporal mientras que a otro grupo se le pide que interprete, siguiendo con el ejemplo, un ritmo ternario dando a todos ellos la instrucción de acabar cada compás con una negra que interpretarán con una palmada. Fácilmente, el alumnado descubre que las palmadas de un grupo y otro coinciden de forma regular, lo que les permite indagar acerca de cuál es el mínimo común múltiplo de 2 y 3, o de múltiplos posteriores (Figura 14). La actividad puede combinar tantos factores como se deseen y puede servir también para buscar divisores y múltiplos de cualquier otro número o grupos de números. De forma inversa, pueden también llegar a la creación de polirritmias a partir del estudio y observación de los factores comunes de diferentes números.

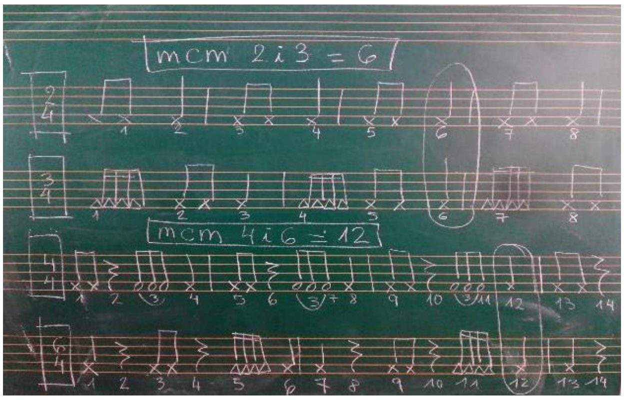


Figura 14. Poliritmia y mínimo común múltiplo.

Como se ha podido observar, a lo largo de la implementación del proyecto y la creación y puesta en práctica de las actividades se usan materiales propios de cualquier clase de música (instrumentos de pequeña percusión, flautas, tarjetas con representaciones gráficas de figuras rítmicas, equipo de audio, cajas de música, etc.) y de cualquier clase de matemáticas (dados, reglas, piezas geométricas de plástico, etc.). También se han creado materiales propios, como tarjetas para la identificación de figuras geométricas en una audición, tarjetas con figuras rítmicas, notas e instrumentos para la creación y discriminación de series, palitos para representar de manera conjunta una unidad de longitud común y la duración de un sonido, etc., que son materiales de muy fácil elaboración.

Consideraciones finales

Desde el punto de vista del desarrollo profesional del profesorado de matemáticas, uno de los cambios que ha ocasionado la pandemia ocasionada por la COVID-19 es la posibilidad de participar, ya sea de forma sincrónica o asincrónica, en múltiples *Webinars* de acceso abierto y en muchas ocasiones gratuito que se organizan en todo el mundo. En estas actividades *online* se puede acceder a una amplia gama de conferencias, comunicaciones, talleres, etc. impartidos tanto por reconocidos expertos en educación matemática como por profesorado anónimo que comunica sus experiencias en dichos eventos, que a menudo son de una gran calidad profesional, como las dos actividades descritas en la segunda parte de este artículo. En dichas actividades se ha evidenciado un amplio conocimiento pedagógico para enseñar matemáticas en contexto, de forma interconectada con otras áreas de conocimiento como la música, el conocimiento del medio, la educación artística, el lenguaje, etc., haciendo especial hincapié en que estas actividades competenciales permiten un enriquecimiento mutuo de las distintas disciplinas involucradas, en lugar de considerar que una de ellas es una herramienta para el aprendizaje de la otra.

Algunos de los rasgos comunes de las actividades descritas tienen que ver con la planificación y la gestión de la práctica docente. En relación a la planificación, se trata de tareas a partir de contextos cercanos y de interés para el alumnado, como puede ser el propio edificio, una calle próxima a la escuela, materiales manipulativos diversos, música actual y danzas atractivas para el alumnado, etc. Así, pues, se pone de manifiesto el uso de los contextos descritos en los distintos niveles del EIEM (Alsina, 2018, 2019, 2020a) con el propósito de que el alumnado primero visualice las ideas matemáticas en contextos informales (contextos reales, materiales manipulativos, etc.) y progresivamente, avancen en la esquematización y formalización a través de otros contextos como la música o la representación gráfica. Respecto a la gestión, se caracteriza por promover una enseñanza a través de prácticas productivas que impliquen pensar y hacer, más que memorizar definiciones y procedimientos (Alsina, 2020b): se plantean preguntas en forma de retos que el alumnado debe resolver; se promueve el razonamiento y la argumentación; la comunicación a través de la interacción, la negociación y el diálogo; la representación; y, como no, las conexiones interdisciplinares y con el entorno.

En definitiva, se ha evidenciado lo que puede pensar o hacer matemáticamente todo el alumnado desde un marco inclusivo; la planificación y la gestión de tareas o secuencias de aprendizaje a través de recursos, estrategias, técnicas y tareas contextualizadas; los diversos aspectos del currículum, incluida la evaluación; y, por supuesto, la capacidad de abordar algunos de los problemas didácticos básicos que están presentes en la enseñanza de las matemáticas (como por ejemplo el uso de materiales descontextualizados como el libro de texto como único recurso para enseñar matemáticas), ofreciendo alternativas mucho más ajustadas a los intereses del alumnado, a partir de las actividades matemáticas en contexto descritas. Estos conocimientos, en su conjunto, forman parte del conocimiento pedagógico para enseñar matemáticas que describen los diversos modelos de conocimiento del profesorado (Ball et al., 2008; Carrillo et al., 2018; Godino et al., 2016, 2017; Shulman, 1986), que son imprescindibles para poder llevar a cabo una enseñanza eficaz. Una enseñanza que, de acuerdo con las directrices contemporáneas, debe promover el desarrollo de habilidades que permitan al alumnado de Educación Primaria usar de forma comprensiva y eficaz el conocimiento matemático en todas las situaciones de su vida cotidiana, que es una de las principales finalidades del enfoque competencial de las matemáticas.

Bibliografía

Alsina, Á. (2010). La “pirámide de la educación matemática”. Una herramienta para ayudar a desarrollar la competencia matemática. *Aula de Innovación Educativa, 189,* 12-16.

Alsina, Á. (2011). *Educación matemática en contexto de 3 a 6 años.* Barcelona: ICE-Horsori.

Alsina, Á. (2018). Seis lecciones de educación matemática en tiempos de cambio. Itinerarios didácticos para aprender más y mejor. *Padres y Maestros, 376,* 13-20.

Alsina, Á. (2019). *Itinerarios didácticos para la enseñanza de las matemáticas (6-12 años).* Barcelona: Graó.

Alsina, Á. (2020a). El Enfoque de los Itinerarios de Enseñanza de las Matemáticas: ¿por qué?, ¿para qué? y ¿cómo aplicarlo en el aula? *TANGRAM – Revista de Educação Matemática, 3*(2), 127-159.

Alsina, Á. (2020b). Cinco prácticas productivas para una enseñanza de las matemáticas a través de los procesos. *Saber & Educar, 28,* 1-13.

Ball, D., Thames, M. H., y Phelps, G. (2008). Content knowledge for teaching: What makes it special? *Journal of teacher education*, *59*(5), 389-407.

Carrillo, J., Climent, N., Montes, M., Contreras, L., Flores-Medrano, E., Escudero-Ávila, D... Muñoz-Catalán, Mª.C. et al. (2018). The mathematics teacher’s specialised knowledge (MTSK) model. *Research in Mathematics Education, 20*, 236–253.

Depaepe, F., Verschaffel, L., y Kelchtermans, G. (2013). Pedagogical content knowledge: A systematic review of the way in which the concept has pervaded mathematics educational research. *Teaching and Teacher Education*, *34*, 12-25.

Godino, J. D. (2009). Categorías de análisis de los conocimientos del profesor de matemáticas. *UNIÓN, Revista Iberoamericana de Educación Matemática, 20,* 13-31.

Godino, J., Giacomone, B., Batanero, C., y Font, V. (2017). Enfoque ontosemiótico de los conocimientos y competencias del profesor de matemáticas. *Bolema, 31*(57), 90-113.

Niss, M. (1995). Las matemáticas en la sociedad. *UNO, Revista de Didáctica de las Matemáticas, 6,* 45-58.

Pino-Fan, L., y Godino, J. D. (2015). Perspectiva ampliada del conocimiento didáctico-matemático del profesor. *Paradigma, 36*(1), 87-109.

Reeuvijk, M.V. (1997). Las matemáticas en la vida cotidiana y la vida cotidiana en las matemáticas. *UNO, Revista de Didáctica de las Matemáticas, 12,* 9-16.

Shulman, L.S. (1986). Those who understand: Knowledge growth in teaching. *Educational Researcher*, *15*(2), 4-14.

Autores:

Alsina, Ángel: Profesor Catedrático de Didáctica de las Matemáticas en la Universidad de Girona (España). Sus líneas de investigación están centradas en la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas en las primeras edades y en la formación del profesorado de matemáticas. Ha publicado numerosos artículos científicos y libros sobre cuestiones de educación matemática, y ha llevado a cabo múltiples actividades de formación permanente del profesorado de matemáticas en España y en América Latina. Email: angel.alsina@udg.edu

Contreras, Manoli: Maestra de Educación Musical y Matemáticas en la etapa de Educación Infantil y Primaria en la escuela Creixen Terrassa (España). Participa en el proyecto Musicomàtics del *European Music Portfolio* desarrollando labores de investigación desde 2014 y de formación del profesorado en diferentes centros de recursos pedagógicos de Catalunya desde 2017. Email: manoli.contreras@gmail.com

Reyes, Joaquim: Maestro de Educación Primaria en la Escuela Turó de Guiera de Cerdanyola del Vallés (España). Ponente en el Congrés Català d'Educació Matemàtica (C2EM) de los años 2016 y 2020 con sendas propuestas sobre innovación en la enseñanza de las matemáticas. Autor de artículos sobre distintas cuestiones relacionadas con la enseñanza. Impulsor de un cambio metodológico en la enseñanza matemática en la Escuela Las Seguidillas de Badia del Vallés. Email: jreyes4@xtec.cat

UNIÓN

REVISTA IBEROAMERICANA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA

http//union.fespm.es/index.php

UNIÓN
REVISTA IBEROAMERICANA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA

ISSN: 1815-0640
Número 64. Abril 2022
Páginas 1-11

Estimulando la modelización matemática mediante la creación de problemas

Uldarico Malaspina

Resumen	En este artículo se presenta y comenta problemas creados en el marco de un taller con profesores de secundaria de Jaén (Cajamarca – Perú). La intención fue crear problemas a partir de alguna situación cotidiana, como una manera de enseñar las matemáticas basándose en la indagación. La experiencia didáctica fue muy valiosa, pues contribuyó a reafirmar el papel fundamental de la indagación y la creación de problemas, como bases para la modelización matemática y para la ampliación de conocimientos. Así, partiendo de indagaciones en relación a un goteo de agua por un grifo doméstico averiado, se inició la modelización correspondiente al cálculo del desperdicio de agua durante un mes y el manejo de funciones y sus gráficos, asociados a una situación concreta; más aún, se muestra que se puede aprovechar la situación para tratar, intuitivamente, una función discontinua. **Palabras clave**: Indagación; creación y resolución de problemas; modelización matemática; variables y funciones; discontinuidad.
Abstract	This article presents and comments on problems created in the framework of a workshop with secondary school teachers from Jaén (Cajamarca – Peru). The intention was to create problems from some everyday situation, as a way of teaching mathematics based on inquiry. The didactic experience was very valuable, since it helped to reaffirm the fundamental role of inquiry and the creation of problems, as bases for mathematical modeling and for expanding knowledge. Thus, based on inquiries regarding a leak of water from a damaged domestic faucet, the modeling corresponding to the calculation of water waste for a month and the management of functions and their graphs, associated with a specific situation, began; moreover, it is shown that the situation can be exploited to treat, intuitively, a discontinuous function. **Keywords:** Inquiry; problem posing and problem solving; mathematical modelling; variables and functions; discontinuity.
Resumo	Este artigo apresenta e comenta problemas criados no âmbito de uma oficina com professores do ensino médio de Jaén (Cajamarca – Perú). A intenção era criar problemas a partir de alguma situação cotidiana, como forma de ensinar matemática a partir da indagação. A experiência didática foi muito valiosa, pois ajudou a reafirmar o papel fundamental da indagação e da criação de problemas, como bases para a modelagem matemática e para a ampliação do conhecimento. Assim, com base em

indagações relativos a uma fuga de água de uma torneira doméstica danificada, iniciou-se a modelação correspondente ao cálculo do desperdício de água para um mês e a gestão das funções e respectivos gráficos, associados a uma situação específica; além disso, mostra-se que a situação pode ser explorada para tratar, intuitivamente, uma função descontínua.
Palavras-chave: Indagação; criação e resolução de problemas; modelagem matemática; variáveis e funções; descontinuidade.

1. Problema

Si por el goteo de agua en un grifo averiado, cada 3 horas se desperdician 240 ml de agua, encontrar la función que relaciona el tiempo con la cantidad de agua que se desperdicia.

Cabe aclarar que este problema fue el quinto de una secuencia de problemas tentativos propuestos por un grupo de profesores de secundaria, participantes en un taller sobre creación de problemas de matemáticas, con énfasis en la indagación.

2. La experiencia didáctica

Fue una experiencia didáctica desarrollada en forma virtual en el 2021, con docentes en servicio, de secundaria, de la especialidad de matemáticas: un taller con 100 profesores de secundaria, de la especialidad de matemáticas, seleccionados por la Unidad de Gestión Educativa Local (UGEL) de Jaén (Cajamarca-Perú) como parte de los programas de formación continua en matemáticas y ciencias, que ofrece la Academia Nacional de Ciencias del Perú al profesorado de educación básica. El taller se inició con trabajos grupales a cargo de los integrantes del equipo docente.

El propósito fundamental fue brindar a los profesores en servicio experiencias de aprendizaje o profundización de conocimientos matemáticos, haciendo indagaciones, concretando preguntas y creando problemas a partir de una situación dada, preferentemente en un contexto doméstico cotidiano. Los participantes no habían tenido experiencias similares anteriores. En el grupo de 18 profesores con el que trabajé, propuse como situación el goteo de agua por la avería de un grifo[1] y usé la figura que me envió una colega del equipo docente, tomada de Internet (Figura 1)

A continuación, reproduciré sucintamente las secuencias de expresiones (afirmaciones, interrogantes, dudas) que se suscitaron en el grupo de profesores participantes, a partir de la situación presentada y de algunas preguntas motivadores que fui introduciendo:

Situación:

[1] En el Perú, suele decirse: goteo de agua por un caño malogrado. Esta expresión aparece en las intervenciones de los profesores

Figura 1

¿Podemos crear algún o algunos problemas a partir de esta situación?

- Ideas propuestas por algunos participantes:
  - Calcular la cantidad de agua que se desperdicia.
  - Costo extra que genera el desperdicio por ese goteo.

¿Cómo hacerlo?

- Ante esta pregunta hubo algunos intercambios de ideas que finalmente llevaron a algunas consideraciones y a nuevas preguntas:
  - Tiempo en el goteo.
  - ¿En qué tiempo se llenaría una taza? (Lo cual requeriría una observación empírica.)
  - ¿Qué cantidad de agua se desperdicia en un día?
  - Los recibos vienen por mes, por lo cual convendría calcular el desperdicio en un mes

Con estas consideraciones y preguntas, algunos integrantes del grupo propusieron el siguiente enunciado de un problema tentativo:

<u>Problema tentativo 1:</u>

Calcular la cantidad de agua que se desperdicia en un mes, por el goteo de agua en un caño.

Ante este enunciado, luego de preguntar por su claridad para resolverlo, hubo reacciones como las siguientes

- ¿Pero cómo se puede calcular la cantidad de agua que se desperdicia?
- Falta considerar una referencia de la cantidad de agua que se desperdicia en cierto tiempo.
- Se podría considerar que en 3 horas se llena una taza.

- ¿Y qué capacidad tiene esa taza?
- Podríamos suponer que la taza es de 240 ml.

Con estas consideraciones, se modificó el enunciado anterior:

Problema tentativo 2

> **Calcular la cantidad de agua que se desperdicia en un mes, por el goteo de agua en un caño, sabiendo que en 3 horas se llena una taza de 240 ml, por ese goteo.**

Hubo cierto consenso en que se había llegado a un problema claramente enunciado y que su resolución era cuestión de hacer unos cálculos:

- Calcular la cantidad de agua que se desperdicia en un día (multiplicar 240 ml por 8, por ser el número de veces que hay 3 horas en un día)
- El resultado anterior multiplicarlo por 30

Sin embargo, un profesor hizo notar que debería indicarse que el llenado de los 240 ml de agua debería ser cada 3 horas y no solo indicar que en tres horas se desperdician 240 ml. En esa línea, propuso el siguiente enunciado:

Problema tentativo 3

> **Si cada 3 horas se llena 240 ml de agua en un balde, encontrar la función que modela la situación.**

Este enunciado provocó preguntas y algunas respuestas en el grupo, como las siguientes

- ¿Qué significa ”modela la situación”?
- La expresión se usa…
- ¿La entienden los alumnos?
- ¿Por qué no especificar las variables que intervendrán en la función?
- Tiempo y agua.
- Hay que especificar las unidades de medición.

Recogiendo estas ideas, se propuso otro enunciado, como un refinamiento del anterior:

Problema tentativo 4

> **Si por el goteo de agua en un caño malogrado, cada 3 horas se acumulan 240 ml de agua en un cilindro, encontrar la función que relaciona el tiempo con la cantidad de agua que se acumula en el cilindro.**

Finalmente, recordando que la intención inicial fue calcular la cantidad de agua que se desperdicia, se hizo otro refinamiento de forma al enunciado anterior y así quedó el problema con el que inicié este artículo:

Problema

Si por el goteo de agua en un caño malogrado, cada 3 horas se desperdician 240 ml de agua, encontrar la función que relaciona el tiempo con la cantidad de agua que se desperdicia.

Naturalmente, también hubo una serie de interrogantes y respuestas en el grupo, como las siguientes

- ¿Cuál será la variable independiente?
- El tiempo
- ¿Y la variable dependiente es la cantidad de agua que se desperdicia?
- Claro…
- ¿Qué unidades de medida usaremos?
- Horas y mililitros
- ¿Entonces buscamos una expresión algebraica para la función f?
- Claro… Podemos usar la variable t para representar el tiempo en horas.
- O sea, buscamos $f(t)$.

En este punto se produjo un silencio, como de desconcierto. Entonces comenté que leyendo con atención el problema, ya tenemos un punto del gráfico de la función. Luego de dejar tiempo a la reflexión, pregunté:

¿Podemos encontrar algunos puntos del gráfico de la función?

Mencionaron los pares ordenados (3; 240) y (6; 480) y hubo otras intervenciones:

- ¿Y a 24 cuánto le corresponde?
- ¡Es un caso de proporcionalidad directa!
- ¿Es una función lineal?
- Su gráfico es una recta.

Algunos participantes mostraron estar en terreno seguro e inmediatamente pasaron a usar un sistema de coordenadas cartesianas y mostrar una representación del gráfico de la función que imaginaron (Figura 2)

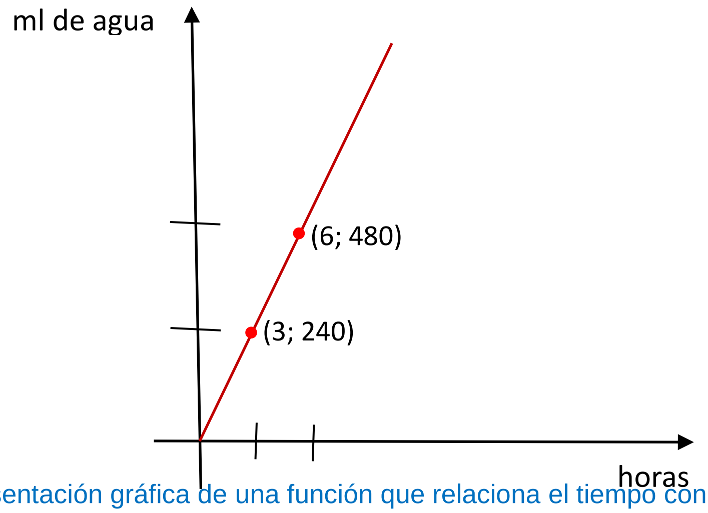


Figura 2. Una representación gráfica de una función que relaciona el tiempo con la cantidad de agua que se desperdicia

Ante este gráfico, ya al final de la sesión de trabajo grupal, surgieron preguntas, como las siguientes

- ¿Con este gráfico ya resolvimos el problema?
- ¿Cuál es la expresión algebraica de esta función?
- ¿La recta no debería ser más parada? Su pendiente es 80,
- ¿Con este gráfico podemos calcular el desperdicio de agua en un mes?

Ya no hubo tiempo para responderlas en el grupo, pero se percibió la satisfacción de lo trabajado. Cuando se expuso en la reunión plenaria, hice algunos comentarios relacionados con estas preguntas, en los que ahora me detengo un poco más:

- Lo que se pide en el problema (el requerimiento) es la función que relaciona el tiempo con la cantidad de agua que se desperdicia. Esa función está representada en el gráfico mostrado, que refleja la proporcionalidad directa entre el tiempo de goteo y la cantidad de mililitros de agua que se desperdicia. Ciertamente, siendo factible – y sencillo – obtener una expresión algebraica de esa función, será más práctico usar tal expresión para obtener los correspondientes mililitros de agua que se desperdician, considerando determinado tiempo de goteo.

- Una manera de obtener la expresión algebraica de la función, es observando que su gráfico es parte de una recta que pasa por el origen de coordenadas y el punto (3; 240). Así, su pendiente es 80 y su expresión algebraica es

$$f(t) = 80\,t\,,\ \text{para } t \geq 0$$

- En cuanto a la pendiente 80 y la observación que la recta no es lo suficientemente “parada” al tener tal pendiente, es una ocasión para reflexionar sobre las representaciones gráficas teniendo en cuenta las escalas que se consideran en los ejes coordenados. Ciertamente, si la escala en ambos ejes fuera la misma – como suele hacerse habitualmente en clases y en textos – la inclinación de la recta no corresponde a la pendiente 80; pero en este caso, observando el punto (3; 240), el tamaño del segmento horizontal que se usa para considerar la abscisa 3 es – en términos relativos – muy grande, comparado con el tamaño del segmento vertical que se usa para considerar la ordenada 240. El segmento que corresponde a una unidad en el eje horizontal se obtiene dividiendo el segmento horizontal correspondiente a (3; 240) en 3 segmentos de longitud 1 (en la escala adoptada), mientras que el segmento que corresponde a una unidad en el eje vertical se obtiene dividiendo el segmento vertical en 240 segmentos de longitud 1 (en la escala adoptada).

- Para calcular el desperdicio de agua en un mes, habría que calcular el número de horas que tiene un mes, considerando – para simplificar – un mes de 30 días (24 x 30 = 720) y determinar el punto en el gráfico cuya abscisa es 720. La ordenada de tal punto nos dice la cantidad de agua que se desperdicia en un mes. Ciertamente, esto es posible pero engorroso obtenerlo gráficamente y es mucho más fácil usar la expresión algebraica de la función:

$$f(720) = 80 \times 720 = 57600$$

que nos da la cantidad de mililitros que se desperdicia en un mes.

- Para calcular el costo, tendría que multiplicarse por el número que corresponda, según la tarifa de consumo de agua, que probablemente no esté por mililitros sino por metros cúbicos, lo cual lleva a recordar (o calcular) cuántos mililitros tiene un metro cúbico de agua.

  También deberá tenerse en cuenta que la tarifa podría considerar un pago fijo por un consumo menor o igual a determinada cantidad y entonces examinar si el consumo total, con el desperdicio por el goteo del caño, es mayor que ese consumo.

3. Una mirada desde la creación de problemas y la modelización matemática

Lo trabajado permite hacer diversas reflexiones en el marco de la creación de problemas y en el marco de la modelización matemática. Así, evidenciamos una forma de crear problemas por *elaboración* (partiendo de una situación, en la que no hay un problema explícito propuesto) y podemos percibir las cuatro fases que considero en la creación de un problema: indagar, proponer, resolver y refinar. La indagación (el formularse preguntas) llevó a un primer problema tentativo; el intento de solución y más indagaciones llevaron a un primer refinamiento de tal problema y llegar a un segundo problema tentativo; y así, hasta llegar al problema que es un refinamiento del problema tentativo 4.

En el proceso descrito, desde que se propuso la situación, se puede percibir también esa transición de ida y vuelta entre matemáticas y realidad, que es propia de los procesos de modelización matemática (Borromeo, 2018). Más aún, según Blomhøj (2004), los procesos de modelización tienen los subprocesos de a) formulación del problema; b) sistematización; c) matematización; d) análisis del sistema matemático; e) interpretación/evaluación; y f) validación. En el proceso descrito podemos advertir la presencia de estos subprocesos, salvo el de validación, que significaría – en una situación real – comparar datos observados con datos predichos por el modelo.

Cabe destacar también la presencia muy importante de la indagación, como una fase en el proceso de creación de problemas y destacada por Sala, Font y Ledesma (2021), en todo proceso de modelización.

4. Ampliando conocimientos matemáticos: una función discontinua

Las transiciones de ida y vuelta entre matemática y realidad, en los procesos de modelización, nos llevan a plantearnos preguntas, observando con más atención la situación planteada. Por ejemplo, la función f obtenida, como un modelo matemático para determinar el desperdicio de agua por el goteo en el grifo averiado, tiene como representación algebraica $f(t) = 80\, t$, para $t \geq 0$; y esta es una función continua, con una representación gráfica en la Figura 2[2]. Sin embargo, tratándose de un goteo, estrictamente hablando, el desperdicio de agua no se incrementa a cada instante. Así, podemos suponer – coherentemente con el dato que cada 3 horas se llena una taza de 240 ml – que cada 2 segundos cae una gota. Ciertamente, es un supuesto simplificador, en un marco de proporcionalidad directa. Entonces, cada 2 segundos se incrementa el agua que se desperdicia, pero, desde que empiezan a correr los 2 segundos hasta un instante antes de que se cumplan, el total de agua que se desperdicia se mantiene constante. Esto nos hace pensar en una discontinuidad por saltos de la función[3]. Como tenemos el dato que en 3 horas se desperdician 240 ml de agua, podemos deducir que en 1 hora se desperdician 80 ml de agua, lo cual significa que en 3600 segundos se desperdician 80 ml de agua y, en consecuencia, que en 2 segundos se desperdician

$$\frac{80}{3600} \times 2 = \frac{80}{1800} = \frac{2}{45} \approx 0.044 \text{ ml de agua}$$

Así, asumimos que se comienza la observación en el instante 0 y no cae una gota de agua hasta un instante antes de cumplirse 2 segundos y por ello, en ese lapso, se desperdicia 0 ml de agua; a los 2 segundos exactamente, cae una gota de agua, por lo cual se desperdicia $\frac{2}{45}$ ml de agua y desde ese instante hasta un instante antes de cumplirse 4 segundos, el desperdicio de agua se mantiene en $\frac{2}{45}$ ml, hasta el instante en que se cumple exactamente 4 segundos y cae una segunda gota de agua, por lo cual el desperdicio acumulado de agua ya es de $\frac{4}{45}$ ml.

[2] Una manera de tener una idea intuitiva de una función h continua, real, de variable real, definida en un intervalo cerrado [a; b] es observar que es posible hacer una representación gráfica de ella usando lápiz y papel, sin necesidad de levantar el lápiz, desde que se inicia en el punto (a; h(a)). Las funciones que no son continuas, se llaman *discontinuas*.

[3] La discontinuidad se percibe al notar que hay saltos para t = 2, 4, 6, …y en consecuencia el gráfico de la función d no puede hacerse sin levantar el lápiz del papel.

Asumiendo que esto continúa de esta manera, podemos hacer una representación gráfica (parcial) de la función desperdicio de agua, que podemos llamar d, como se muestra en la Figura 3. Su variable independiente es también el tiempo, medido en segundos. Notar que $d(2) = \frac{2}{45}$; $d(4) = \frac{4}{45}$; $d(6) = \frac{6}{45}$

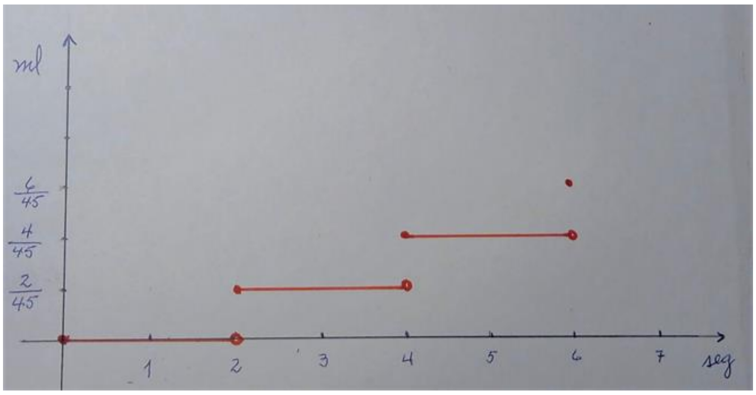


Figura 3. Una representación gráfica de la función d

Es probable que el lector familiarizado con las funciones ya haya reconocido esta función como una función "mayor entero" o "máximo entero"[4] y que suele representarse usando corchetes dobles. La que corresponde al gráfico mostrado, que es una representación de la función desperdicio "más real", considerando que por la avería del grifo hay un goteo de agua y no un chorro continuo de agua, es

$$d(t) = \frac{2}{45}\left[\!\left[\frac{t}{2}\right]\!\right], \text{ para } t \geq 0.$$

¿Y qué relación tiene esta función discontinua d con la función continua f que encontramos antes? Algo fundamental a tener en cuenta es que f relaciona horas con mililitros de agua y d relaciona segundos con mililitros de agua. Así, podemos verificar que los puntos que son los extremos izquierdos de los segmentos horizontales del gráfico de la función d (Figura 3), están alineados en una recta de pendiente $\frac{2}{45} / 2$; o sea $\frac{1}{45}$. Sin embargo, si en el eje de abscisas consideramos horas en lugar de segundos, en lugar de dividir $\frac{2}{45}$ entre 2, debemos dividir $\frac{2}{45}$ entre $\frac{2}{3600}$, que nos da 80. Este número, es la pendiente de la recta sobre la cual está el gráfico de la función f. Por todo esto, si en la Figura 3 usamos horas en el eje horizontal, en lugar de los segundos considerados, podemos intuir e imaginar que los segmentos

[4] La función "máximo entero", hace corresponder a cada número real x el mayor entero que es menor o igual que x. Si llamamos g a tal función, esta suele representarse usando corchetes dobles, por $g(x) = [\![x]\!]$

horizontales reducirán drásticamente su tamaño, pues un segmento de 2 unidades de longitud – unidades que representan segundos – se reduciría a un segmento de $\frac{2}{3600}$ unidades de longitud, considerando unidades que representan horas. Así, los segmentos horizontales prácticamente se reducirían a puntos, todos alineados en una recta de pendiente 80, lo cual nos aproxima al gráfico de la función f (Figura 2). A partir de este ejercicio de imaginación, también podemos decir, metafórica e intuitivamente que, el gráfico de la función desperdicio de agua, por horas, como consecuencia de la caída de una gota de agua ($\frac{2}{45}$ ml), cada 2 segundos, por un grifo averiado, es una sucesión de "puntos" en el plano, muy cercanos entre sí, que comienza en el origen de coordenadas y continúa por el primer cuadrante en la dirección de la recta de pendiente 80 (similar al gráfico de f, en la Figura 2); pero si miramos con un microscopio tal sucesión de "puntos" podríamos ver los segmentos horizontales del gráfico de d, siendo sus extremos izquierdos los puntos de la sucesión.

5. Comentarios finales

La experiencia didáctica descrita, nos hace ver la importancia de considerar en la formación de profesores – tanto inicial como continua – la creación de problemas, como una forma de sentar bases para su formación en modelización matemática, así como de brindar oportunidades de reflexión individual y compartida, que potenciarán sus competencias didácticas y matemáticas (Malaspina, 2017; Malaspina, Torres & Rubio, 2019). Ciertamente, estas experiencias contribuirán a un mejor trabajo en las sesiones de aprendizaje con sus estudiantes.

La indagación, que es una fase importante en los procesos de creación de problemas – sobre todo en la creación por elaboración, partiendo de situaciones – está también muy presente en los procesos de modelización matemática, como el que hemos mostrado.

Se hace evidente que un modelo matemático es una representación de una realidad concreta y a él se llega mediante supuestos – en muchos casos supuestos simplificadores – y transiciones de ida y vuelta con la realidad. Algunos supuestos no explícitos en este caso, son que la presión del agua es constante (si no lo fuera, el desperdicio sería mayor al incrementarse la presión); otro supuesto no explícito es que el grifo no se usa, pues si se usara un determinado tiempo, en ese lapso no habría desperdicio de agua. La consideración de aspectos más minuciosos de la realidad, puede llevar al uso de recursos matemáticos más complejos, pero puede ocurrir que las explicaciones o predicciones que se necesiten hacer en la situación concreta, no requiera del uso de ese grado de complejidad matemática. Por eso la importancia del subproceso de validación en los procesos de modelización. En este caso, siendo d la función que expresa más precisamente el desperdicio de agua en la situación planteada, con los supuestos simplificadores, puede ocurrir que para fines prácticos sea suficiente trabajar con la función f.

Más allá de las observaciones relacionadas con la modelización matemática, se muestra, una vez más, que situaciones reales motivan profundización en las matemáticas. Así, hemos llegado no solo a una función lineal sino a una función "máximo entero" que es un ejemplo importante de función discontinua por saltos.

Bibliografía

Blomhøj, M. (2004). Mathematical modelling: A theory for practice. In B. Clarke et al. (Eds.), *International perspectives on learning and teaching mathematics* (pp. 145-159). Gotemburgo, Suecia: National Center for Mathematics Education

Borromeo Ferri, R. (2018). *Learning how to teach mathematical modeling in school and teacher education.* Cham, Switzerland: Springer. https://doi.org/10.1007/978-3-319-68072-9

Malaspina, U. (2017). La creación de problemas como medio para potenciar la articulación de competencias y conocimientos del profesor de matemáticas. En J. M. Contreras, P. Arteaga, G. R. Cañadas, M. M. Gea, B. Giacomone y M. M. López-Martín (Eds.), *Actas del Segundo Congreso Internacional Virtual sobre el Enfoque Ontosemiótico del Conocimiento y la Instrucción Matemáticos.* *http://enfoqueontosemiotico.ugr.es/civeos/malaspina.pdf*

Malaspina, U., Torres, C., & Rubio, N. (2019). How to stimulate in-service teachers' didactic analysis competence by means of problem posing. En P. Liljedahl, y L. Santos-Trigo (Eds.), *Mathematical Problem Solving*. (pp. 133 -151) Suiza: Springer.

Sala, G., Font, V. & Ledezma, C. (2021). Relaciones entre los procesos de modelización matemática y de indagación desde la perspectiva del aprendizaje de las matemáticas. *Quadrante: Revista de Investigação em Educação Matemática 30*(1) 116-139 https://doi.org/10.48489/quadrante.23590

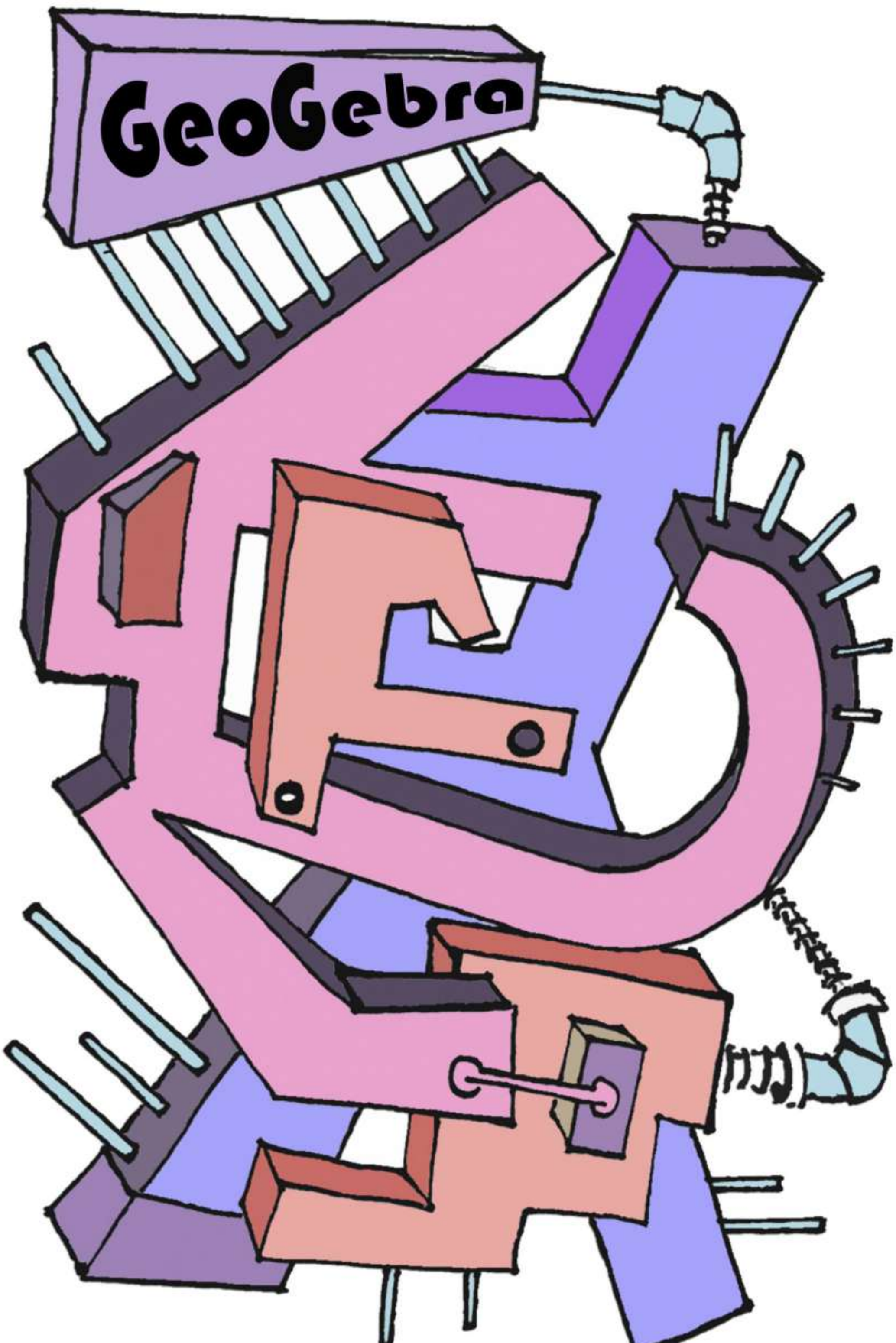
Autor: Malaspina Jurado, Uldarico

Doctor en Ciencias, Profesor Emérito de la Pontificia Universidad Católica del Perú. Expositor en foros internacionales de Educación Matemática. Autor y coautor de libros y artículos de Matemática y Educación Matemática. Académico de Número de la Academia Nacional de Ciencias del Perú. Palmas Magisteriales - Grado Amauta

UNIÓN

REVISTA IBEROAMERICANA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA

http//union.fespm.es/index.php



UNIÓN
REVISTA IBEROAMERICANA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA

ISSN: 1815-0640
Número 64. Abril 2022
Páginas 01-05

GeoGebra en Unión

Alejandro Gallardo Lozano

1. Introducción

Esta es la sección dedicada en la Revista Unión a las noticias y novedades relacionadas con el software GeoGebra en la comunidad Iberoamericana.

En cada número tenemos un artículo elaborado por una firma invitada que pueda realizar un aporte especial en alguno de estos tres aspectos:

- Investigaciones sobre el impacto educativo del uso de GeoGebra en las aulas. Es necesario avanzar en esta línea para favorecer su inclusión en las aulas como un elemento de mejora en la Educación Matemática.

- Experiencias de aula con GeoGebra: modelos de uso con éxito en las aulas de diferentes niveles educativos. Necesitamos responder a la preguntas ¿cómo introducir GeoGebra en mi aula y para qué? ¿Cómo hacer que mi alumnado haga Matemáticas con GeoGebra?

- Trabajos con GeoGebra que nos sirvan a todos para aprender su manejo.

En este número nuestra firma invitada es **Laura del Río**, argentina, Profesora de Matemática y Magíster en Tecnología Informática Aplicada en Educación por la Universidad Nacional de La Plata, Argentina. Docente de Matemática de primer año en la Facultad de Ingeniería de la UNLP y en el nivel secundario, en el Liceo Víctor Mercante. Coordinadora el Instituto GeoGebra de La Plata. Miembro del equipo de traducción al español de GeoGebra. Colaboradora de la unidad de Investigación en Metodologías Alternativas para la Enseñanza de las Ciencias (IMApEC).

Laura es una de las voces más acreditadas en el trabajo con Geogebra a nivel Iberoamericano y agradecemos mucho su colaboración con la Revista Unión.

En su artículo nos presenta una experiencia de trabajo durante la pandemia que puede ser útil también en el trabajo habitual en nuestras aulas. Laura utilizó microjuegos desarrollados con Geogebra para llevar adelante aprendizajes en diferentes contextos y niveles. La tarea se gestiona a través de Geogebra Classroom. Es una clara experiencia de mejora del aprendizaje con el uso de este programa (que nos va gustando) y que responde a la pregunta de si merece la pena integrar Geogebra en nuestras aulas.

2. Novedades y Noticias

- GeoGebra Classroom:

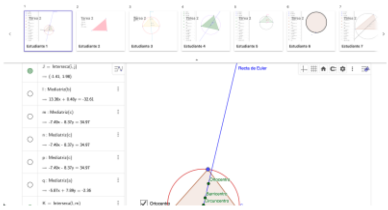
↘ Podemos tener ahora una visión general de qué es lo que se encuentra el alumnado al abrir una tarea propuesta.

↘ Está cada vez más cerca la integración de GeoGebra Classroom en MS Teams. Los alumnos iniciarían sesión de forma automática en GeoGebra desde Teams. Se publicaría una app que tendría que integrar en Teams el Administrador del dominio del Centro. Asimismo se va avanzando en la integración con Google Classroom y Moodle. La idea es que los alumnos utilicen GeoGebra Classroom desde su entorno de trabajo habitual.

↘ Escritura matemática: los estudiantes podrán ahora en sus respuestas escribir con lenguaje matemático a través de un nuevo editor de fórmulas. Vídeo.

↘ Los estudiantes podrán ahora chequear si sus respuestas son correctas en preguntas de respuesta múltiple o preguntas abiertas si el docente lo habilita. Se podrá también limitar el número de intentos. Se ofrece así un feedback inmediato al estudiante para orientar su aprendizaje.

↘ Ahora podemos cambiar de forma ágil entre los trabajos de los diferentes estudiantes que realizan una tarea, con lo que hace más fácil nuestra tarea de revisión de sus aprendizajes.

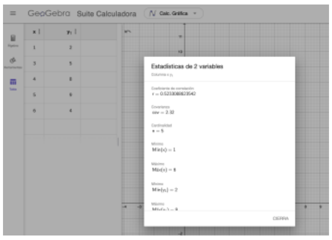


- Quizzes: se está desarrollando posibilidad de generar cuestionarios autocorregibles en Geogebra con la posibilidad de feedback inmediato. Se haría a través de preguntas de opción múltiple, de respuesta abierta y de applets en los que el alumno tendría que realizar algún tipo de construcción y el sistema detectaría si es correcta o no. Tendrá la posibilidad de no dejar pasar a la siguiente pregunta hasta que no se resuelva bien una y la oferta de realizar otras similares antes de avanzar.

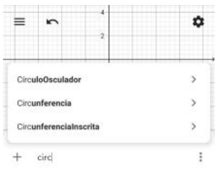
- Mejoras en la Vista Gráfica: habrá ahora una mayor exactitud en las representación de funciones cuando se cambia la escala de los ejes o se hace zoom. Puedes comprobarlo, por ejemplo, con la función $y = sen\left(\frac{1}{x}\right)$.

- Apps:

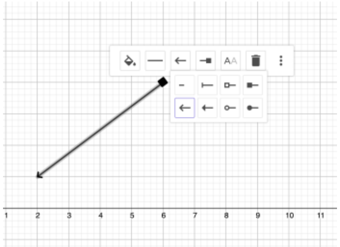
  ↘ Tabla en Geogebra Suite: la tabla ya permite la introducción de valores como si fuera una hoja de cálculo. Ofrece la posibilidad de calcular parámetros estadísticos bidimensionales y la regresión entre las dos variables con múltiples tipos de ajustes posibles.



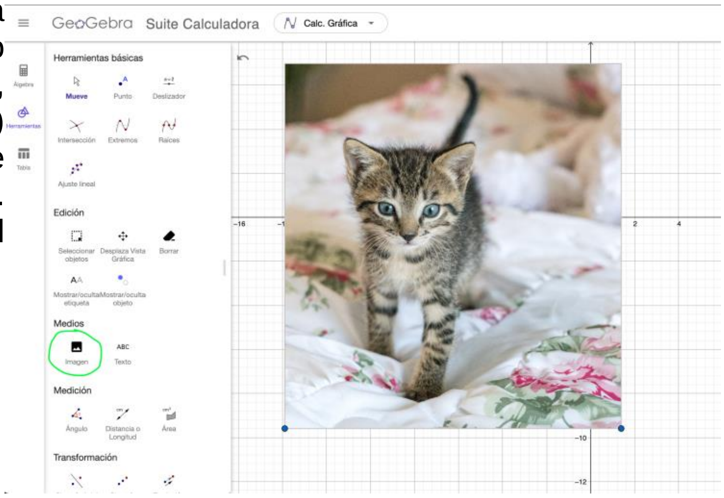
  ↘ Los comandos se autocompletan ahora también en las apps móviles ofreciendo ayuda instantánea y posibilidad de elegir el que más nos interesa. Vídeo.



- Aparece la posibilidad de cambiar los extremos de un segmento con varias posibilidades. ¡Vamos a poder poner bonitos intervalos y semirrectas!



- Se ha incoporado a Geogebra Suite (solo a la web y escritorio, no a las apps móviles) la posibilidad de insertar una imagen. Buena noticia para el trabajo fotogebrero.



- La Calculadora de Probabilidad se va a integrar en las aplicaciones móviles como parte de Calculator Suite (¿diremos por fin adiós a las queridas tablas?).

- Preocupación por el Modo Examen en Geogebra Suite. Está previsto desarrollar la posibilidad de elección de país antes del examen para que se bloqueen capacidades. Y si el alumnado usa Geogebra en los exámenes... ¿podremos trabajar unas matemáticas más de pensamiento e investigación y menos centrada en los procesos algorítmicos?

3. Convocatorias

- Coloquio GeoGebra 2022: Experiencias con GeoGebra en la Educación a Distancia e Híbrida en Latinoamérica. En el canal de YouTube de la Comunidad GeoGebra Latinoamericana. De marzo a diciembre de 2022.

- APINEMA invita a los profesores de primaria y a los profesores de secundaria de matemática al "II Ciclo de Talleres de GEOGEBRA" que se realizará del 07 de mayo al 04 de junio del 2022.

- Concurso Arte con Geogebra organizado por el Instituto Geogebra Maslama al Mayriti de Madrid.

- Concurso Fotogebra 2022. El día 14 de marzo (Día Internacional de las Matemáticas) se lanzó la convocatoria de la nueva edición de esta actividad abierta a todos los países de Iberoamérica.

4. Nuevo curriculum en España.

El nuevo curriculum en la materia de Matemáticas en la nueva ley educativa LOMLOE puede suponer un cambio significativo en nuestra forma de trabajar la asignatura. Incorpora, de forma clara y definitiva (aunque ya estaba en leyes anteriores) el uso de la tecnología, herramientas digitales, software y programas de geometría dinámica para la mejora del aprendizaje matemático.

Es una buena noticia para los que ya estábamos en este camino y es un nuevo incentivo para que más y más docentes se incorporen al uso y aprendizaje con Geogebra, que puede ser el software que mejor apoya los objetivos de aprendizaje competencial.

UNIÓN
REVISTA IBEROAMERICANA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA

ISSN: 1815-0640
Número 64. Abril 2022
Páginas 01-12

Microjuegos creados con GeoGebra: Su rol durante la virtualización de la enseñanza por la pandemia y… ¿después?

Laura del Río

Resumen	Se relata una experiencia en la que se utilizaron *microjuegos* digitales creados con GeoGebra para la enseñanza de la matemática. Se muestran ejemplos de los mismos y se describe cómo se implementaron en el marco de la virtualización de la enseñanza debido a la pandemia de COVID-19. La experiencia se evalúa a través de una encuesta realizada a los estudiantes, que evidencia que la misma fue positiva y permitió el alcance de los objetivos en una buena medida. Se concluye que más allá de que estos juegos se hayan incorporado en un contexto particular, los mismos seguirán siendo utilizados en contextos híbridos y de presencialidad plena. **Palabras clave**: Microjuegos – Juegos Educativos – GeoGebra – GeoGebra Classroom
Abstract	An experience of teaching Mathematics including Micro-Games created using GeoGebra is presented. Examples of these games are shown and the implementation in the context of the virtualization of the teaching due to the COVID-19 pandemic is described. The experience is evaluated through a survey that allows seeing how positive it was. The conclusion is that despite these games being included due to the social distancing context imposed by the pandemic, they will continue being used in hybrid contexts and in face-to-face teaching scenarios. **Keywords**: Micro-Games – Educational Games – GeoGebra – GeoGebra Classroom
Resumo	É relatada uma experiência em que microjogos digitais criados com o GeoGebra foram utilizados para o ensino da matemática. Exemplos deles são mostrados e como eles foram implementados no âmbito da virtualização do ensino devido à pandemia de COVID-19 é descrito. A experiência é avaliada através de um inquérito aos alunos, o que permite constatar que foi positiva e permitiu atingir em boa medida os objetivos. Conclui-se que para além do facto de estes jogos terem sido incorporados num determinado contexto, continuarão a ser utilizados em contextos híbridos ou, ainda, em contextos totalmente presenciais. **Palavras-chave:** Microjogos – Jogos educativos – GeoGebra – GeoGebra Classroom

1. Introducción

El año 2020 ha transformado todos los ámbitos de la vida humana. En particular, la educación ha tenido que convertirse a una modalidad ciento por ciento remota de la noche a la mañana en casi todo el planeta. En este contexto de crisis sanitaria debida a la pandemia de COVID-19, muchos docentes han tenido que improvisar (en el buen sentido de la palabra), con las herramientas a su alcance, las estrategias para poder garantizar la continuidad pedagógica de sus estudiantes.

Fue una etapa dura también para los estudiantes, imposibilitados de encontrarse en el aula con sus pares para compartir el proceso de aprendizaje, e intentando progresar en medio de una multiplicidad de situaciones difíciles que tampoco contribuyeron en forma favorable al desarrollo de las actividades educativas (pérdida de seres queridos, dificultades económicas vinculadas a la pérdida del empleo de sus familias, entre otras).

En este trabajo, se relata una experiencia llevada a cabo en este marco con alumnos ingresantes de una facultad de ingeniería, aunque puede ser replicada en diversos niveles y contextos educativos, como se comenta en el apartado de conclusiones. Esta población en particular tuvo, además de las condiciones desfavorables antedichas, la desventaja de haber tenido que convertirse en estudiantes universitarios sin poder transitar físicamente la universidad. Muchos de los ingresantes provienen de otras ciudades, provincias o, incluso, países, y han llegado a esta institución con la ilusión de conocer un lugar nuevo, personas nuevas, comenzar la carrera que eligieron, vivir la experiencia de estar fuera de casa y lejos de la familia por primera vez. Todas estas ilusiones se vieron súbitamente frustradas con la llegada de la pandemia.

En este contexto, aparece la necesidad, por parte de los docentes, de incrementar la motivación y de mantener el entusiasmo a pesar del distanciamiento físico. Se han utilizado para ello diversas estrategias y herramientas, pero en este trabajo se hace foco en particular en la utilización de *microjuegos* educativos desarrollados con el *software* libre GeoGebra. Los objetivos de su incorporación fueron: la conformación y consolidación de equipos de trabajo y estudio, la motivación de los estudiantes en el contexto de la pandemia, y la puesta en juego de conceptos matemáticos.

Un *microjuego* educativo puede definirse como un juego digital relativamente simple con un objetivo de aprendizaje específico que puede jugarse con facilidad y en un corto período de tiempo (Rahmadi, et al. 2022).

GeoGebra es un *software* libre creado para la enseñanza y el aprendizaje de la matemática, que por sus prestaciones posibilita su utilización como herramienta de autor para la creación de diversos recursos educativos abiertos, entre ellos, *microjuegos*. Además, posee un repositorio de recursos en el cual los usuarios comparten sus creaciones para que puedan ser reutilizados y adaptados en forma libre por otros.

En el presente trabajo, se presentan algunos de los *microjuegos* utilizados en el marco de la virtualización de la enseñanza por la pandemia de COVID 19 en un contexto educativo particular que se describe en próximas secciones. Algunos de estos juegos fueron desarrollados por la autora de este trabajo y otros adaptados a partir de los compartidos por otros usuarios en el repositorio de GeoGebra. Se describe cómo estos fueron implementados utilizando GeoGebra Classroom (Zöchbauer y Hohenwarter, 2020) y cómo fueron integrados al proyecto-marco de enseñanza. Se analiza, luego, el grado de alcance de los objetivos en base a una encuesta realizada a los estudiantes involucrados y a otros elementos que permiten dar cuenta del potencial de estos recursos didácticos. Por último, se exponen las conclusiones, y se propone la utilización de este tipo de juegos en la post-pandemia como medios para la articulación de escenarios de aprendizaje híbridos.

2. Antecedentes

Acerca del uso de juegos para la educación y, en particular, en el campo de la enseñanza de la matemática, existen numerosas investigaciones que dan cuenta de las diversas posibilidades que brindan para el aprendizaje tanto de contenidos específicos como de habilidades matemáticas más genéricas.

Para Miguel de Guzmán (1989), la matemática es una actividad polifacética, y entre sus múltiples facetas se incluye la de ser una actividad artística y lúdica. Luego de establecer un paralelismo entre matemáticas y juego mucho más profundo, este autor dedica parte de su artículo al uso de juegos en la enseñanza de la matemática. Entre los beneficios destaca la motivación y la diversión como forma de popularización de la disciplina, así como también el desarrollo mismo de procesos de pensamiento que son importantes para el quehacer matemático, como las habilidades heurísticas o el desarrollo de estrategias.

García Azcárate (2019), en línea con las ideas de Guzmán, señala que la utilización de juegos en la enseñanza ayuda a contrarrestar la imagen social que se tiene acerca de la matemática como una cosa seria, difícil y aburrida, mejorando la motivación del alumnado. Pero, además, indica que los juegos permiten reforzar destrezas y automatismos, introducir nuevos conceptos, y utilizar estrategias ligadas a la resolución de problemas como escoger alternativas, tomar decisiones, anticipar resultados, y memorizar situaciones. Destaca también que en el juego los errores no se penalizan verdaderamente, y que las correcciones pueden venir naturalmente desde el lugar de los pares, de los compañeros de equipo, alentando a la participación de aquellos estudiantes que menos se atreven a intervenir en la clase.

Por su parte, Vitabar (2021) menciona la capacidad que tienen los juegos para lograr la motivación y para captar la atención de los usuarios, lamentando que la educación no se haya servido antes de los desarrollos alcanzados en esta materia, aunque señala que no es tarde para aprender de los mismos. Su artículo advierte que el uso de juegos en clase no debe confundirse con el concepto de *Ludificación*, que refiere “a la utilización de elementos y mecánicas propias de los juegos en ambientes no lúdicos” (p. 3), como por ejemplo ganar medallas o puntos, utilizar tablas de posiciones, etc. Un punto en común entre el uso de juegos y la ludificación radica en su propósito de servir a la motivación del estudiantado.

Entre los estudios acerca de la implementación de juegos en educación, se puede encontrar un tipo de juego particular: el microjuego.

En el presente trabajo se adopta la definición de microjuego de Rahmadi, Lavicza y Houghton (2021): son juegos pequeños y breves que propician el compromiso y proporcionan una experiencia significativa apoyando el aprendizaje, dirigidos a objetivos muy específicos y que se integran con otros recursos educativos existentes.

Una importante ventaja de este tipo de juegos es que solo ocupan una porción muy pequeña de la clase, permitiendo su implementación en cursos con cronogramas muy ajustados. Deben tener un objetivo específico de aprendizaje. No se intenta abordar un tema completo, sino que apuntan al repaso de un concepto puntual, o a la práctica de una habilidad concreta. Es por esto importante que se integren con otro tipo de recursos educativos, en lugar de intentar reemplazarlos u ocupar un lugar protagónico.

En Rahmadi *et al* (2022) se señalan además de las ventajas mencionadas, algunas desventajas que se observan al comparar los juegos creados por equipos profesionales con aquellos creados por usuarios (generalmente docentes): la carencia de un objetivo específico claro, vinculado con los contenidos escolares y los objetivos de enseñanza, y la falta de interfaces atractivas. Se espera que los microjuegos que se presentan en este trabajo no pequen de estas carencias.

3. Contexto educativo en el que se desarrolla la experiencia

Los juegos que se presentan en este artículo fueron parte de la propuesta pedagógica en cursos de matemática de primer año de la Facultad de Ingeniería de la Universidad Nacional de La Plata, Argentina. Los contenidos que se abordan en estos cursos se refieren al Cálculo Diferencial e Integral.

En estos cursos, el trabajo en equipos por parte de los estudiantes es la norma. Las aulas están especialmente preparadas para fomentar esta forma de trabajo, estando equipadas con mesas grandes en las cuales los estudiantes pueden sentarse alrededor, en lugar de estar todos viendo hacia el frente del aula. El material teórico-práctico propuesto para el estudio acompaña esta metodología: presenta a los estudiantes situaciones problemáticas que conducen a los conceptos que, luego, son formalizados (Bucari, Abate y Melgarejo, 2004).

El advenimiento de la pandemia de COVID-19 ha obligado a docentes y estudiantes a confinarse en sus hogares y a tener que adaptar la modalidad de trabajo a esta nueva realidad contextual.

Surgen entonces las siguientes preguntas: ¿Cómo fomentar el trabajo grupal entre estudiantes que se encuentran en diversos domicilios y que apenas se conocen entre sí? ¿Cómo mantener encendida la motivación por el aprendizaje en un contexto de crisis sanitaria y económica global?

4. Los juegos

Para dar respuesta a esas preguntas y a las necesidades particulares que impuso el contexto de la pandemia, se recurrió a una combinación de múltiples estrategias didácticas y pedagógicas. Pero en este artículo, se destaca la utilización de microjuegos diseñados utilizando el software libre GeoGebra. Algunos de ellos fueron concebidos e implementados especialmente para la ocasión y otros fueron tomados y/o adaptados del repositorio.

En particular, se optó por el formato de los microjuegos ya que la materia es intensa y cuenta con un cronograma ajustado. Este tipo de juegos, como se mencionó anteriormente, ocupa poco tiempo en la clase, por su duración y simpleza, y se dirige a objetivos muy específicos de aprendizaje (Rahmadi, *et al*. 2021).

El primer ejemplo de microjuego que se comparte aquí, se vincula con un tema que se aborda en el comienzo de la materia: los modelos lineales. Al comienzo de este tema se requiere un repaso de funciones lineales, de ecuación de la recta en el plano y del concepto de pendiente. Luego, comienzan a introducirse las nociones de recta tangente y derivada puntual.

A fin de hacer más ameno este repaso y *romper el hielo* entre los alumnos se propuso un microjuego que se denominó Golf (Figura 1). En la pantalla, se ve un golfista colocado en una posición aleatoria y un hoyo ubicado en otra posición aleatoria. La consigna requiere completar la ecuación de la recta en forma adecuada para que la pelota alcance hoyo. Se trata de ejercicios para encontrar la ecuación de la recta dados dos puntos, pero presentados en una forma lúdica, invitando a competir en equipo contra otros estudiantes para ver quién acierta la mayor cantidad de pelotas.

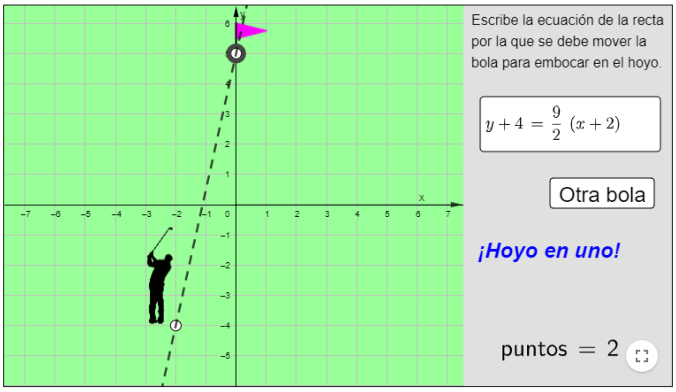


Figura 1. Interfaz del juego de Golf.

La animación de la pelota permite a los estudiantes visualizar la recta que han ingresado pudiendo interpretar por qué su resultado es correcto o incorrecto.

Para favorecer la conformación de grupos de trabajo, se propuso que los estudiantes jugaran en equipos. Cada grupo se conectó a través de una videollamada y uno de los integrantes fue el encargado de operar la aplicación compartiendo la pantalla para que los compañeros pudieran participar.

Los docentes realizamos un seguimiento de la actividad a través de GeoGebra Classroom (Figura 2), una aplicación que permite observar en tiempo real el desarrollo de cualquier actividad realizada utilizando los recursos del repositorio de GeoGebra (Zöchbauer y Hohenwarter, 2020).

Figura 2. Seguimiento del desarrollo del juego utilizando GeoGebra Classroom.

Una vez finalizado el juego, que duró 10 minutos (5 para el nivel 1, en el que solo debían completar la pendiente, y otros 5 para el nivel 2, en el que debían ingresar la ecuación completa de la recta), se anunció al equipo ganador y este estuvo encargado de contar, en una puesta en común con todos los estudiantes del curso, cómo hizo para ganar, quedando así a cargo del repaso.

Otro microjuego propuesto, implementado con una dinámica similar, fue el de los brazos robóticos, adaptado del presentado y desarrollado por Homa (2019). Este juego se trata de alcanzar la mayor cantidad de bolas en un tiempo determinado convirtiendo de coordenadas polares a cartesianas y viceversa. En la presentación de este juego, se mostraron videos de dos mecanismos de brazos robóticos: uno en el cual el brazo se mueve montado en dos ejes perpendiculares, por lo cual para dirigirlo se requiere el ingreso del objetivo en coordenadas rectangulares, y otro que puede extenderse desde un centro y girar en torno a un eje, por lo cual las coordenadas del objetivo se dan, naturalmente, en coordenadas polares.

Uno de los principales problemas que manifiestan los estudiantes en relación a este tema es el siguiente: dadas las coordenadas cartesianas de un punto, para encontrar las coordenadas polares es preciso resolver una ecuación del tipo sen(θ)=A, cos(θ)=B, o tan(θ)=C. Estas ecuaciones tienen infinitas soluciones y aun si restringimos el dominio al intervalo [0,2π], se tienen dos soluciones, en diferentes cuadrantes. Es común que los estudiantes no tengan esto en cuenta, ingresando en la calculadora la inversa de la relación trigonométrica en cuestión y quedándose con ese resultado sin reparar si el cuadrante es el que corresponde o no. En este juego, este error fue atendido muy especialmente mediante la retroalimentación. Cuando el error cometido es específicamente el mencionado, se indica con un mensaje especial y se señala en el gráfico tanto el ángulo ingresado como el correcto, para que los estudiantes puedan recuperar la relación entre ambos y mejorar en el siguiente intento (Figura 3).

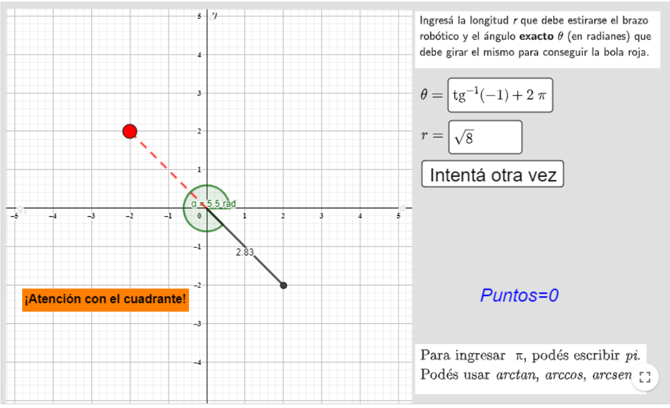


Figura 3. Juego de brazo robótico para pasaje de coordenadas cartesianas a polares.

Otro juego que se utilizó fue desarrollado por Brzezinski (2020) y se trata de un Pac Man que se halla en una posición aleatoria del espacio tridimensional y un punto que representa su comida en otra posición aleatoria. Los estudiantes deben construir un vector que tenga su origen en el Pac Man y su punto terminal en la comida para que él pueda alcanzarla.

Más allá de que estos juegos se propusieron en forma sincrónica y grupal, desde luego pueden también jugarse en forma individual y en forma asincrónica, a modo de práctica, intentando superar una cierta cantidad de puntos.

También cabe destacar que todos estos microjuegos permiten el abordaje de temáticas que se desarrollan en numerosos contextos educativos y en diferentes niveles, ya que muchos de estos temas también se estudian en el nivel de educación secundaria. Por lo tanto, su reutilización en otros ámbitos es posible.

5. Evaluación de la experiencia

La experiencia llevada a cabo en 2020 en el marco de la virtualización de la enseñanza debida a la pandemia de COVID-19 no ha podido evaluarse en forma sistemática debido a lo vertiginoso de los acontecimientos de ese año. Sin embargo, se mencionan en este apartado algunos elementos que permiten dar cuenta de lo positivo de la experiencia. En la repetición de la misma, llevada a cabo en 2021, sí se pudo realizar una evaluación más sistemática implementando una encuesta a los estudiantes. Los resultados de la misma se presentan a continuación en esta misma sección.

Tanto en la implementación del año 2020 como en la de 2021, se pudo observar el entusiasmo de los estudiantes por los juegos en el gran compromiso asumido durante su participación: se conectaban puntualmente en sus espacios grupales, interactuaban activamente, participaban de las puestas en común contando sus estrategias ganadoras. Además, demostraron tener un gran espíritu competitivo expresando, siempre en forma muy amena y jocosa, su *disconformidad* al perder un juego, acusando a sus oponentes de haber *hecho trampa*; reclamando los premios – que eran simplemente unas imágenes de medallas con el nombre del grupo– si la docente se olvidaba de enviarlos. Por otro lado, los mismos alumnos solicitaban que se deje disponible en el aula virtual el juego para poder seguir practicando/jugando por fuera del horario de la clase.

Para estudiar en mayor profundidad el punto de vista de los estudiantes con respecto a los juegos, se implementó en la cohorte 2021 una encuesta con afirmaciones para ser valoradas siguiendo el modelo de Lickert (Hernández Sampieri et al., 2010) de 5 valores (1=muy en desacuerdo al 5=muy de acuerdo). Se indagó acerca de si los juegos contribuyeron a una mejor comprensión de los temas, al fortalecimiento de los grupos de trabajo y a una mejor adaptación a la virtualidad, ya que estos eran los objetivos propuestos.

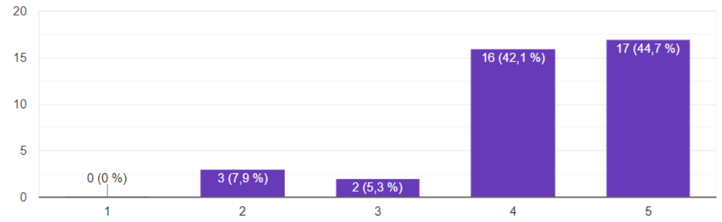
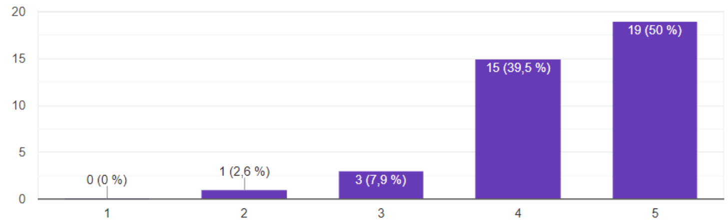
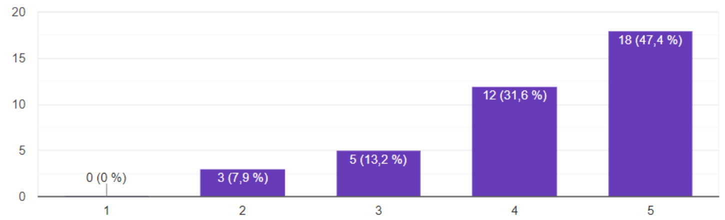
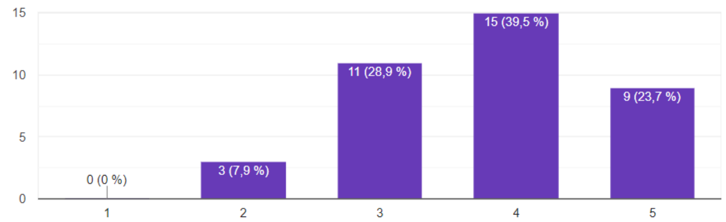
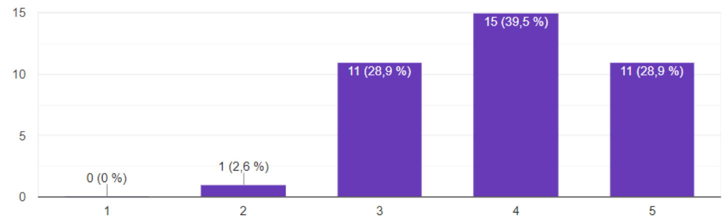
De los 52 alumnos que cursaron la asignatura, 38 respondieron la encuesta en forma anónima, mediante un formulario de Google. Los resultados se presentan en la Tabla 1.

De los gráficos presentados se desprende que, desde el punto de vista de los estudiantes, los juegos contribuyeron con la compresión de algunos de los temas de la materia y con la conformación de los equipos de trabajo, que eran dos de los objetivos principales de su implementación. Respecto de la contribución de los juegos a la adaptación a la virtualidad y a la motivación por el estudio de la materia, se observa también una tendencia positiva, pero no tan marcada como en los casos anteriores. Las respuestas marcadamente negativas a las preguntas (f) y (g) confirman la actitud positiva de los estudiantes manifestada en las preguntas anteriores.

La encuesta incluyó también una pregunta abierta en la que se invitaba a los estudiantes a realizar algún comentario adicional. Esta pregunta no era obligatoria y fue respondida solo por 8 estudiantes. Sus comentarios fueron los siguientes:

- La verdad la cursada de esta materia fue muy completa creo que tanto los juegos como todas las herramientas extras que se usaron sirvieron fueron una muy buena ayuda para nosotros en términos de entender los conceptos y adaptarlos a los usos.
- Me parece que complementan bastante bien, tratar temas de cursada en juegos didácticos, proyectados y cercanos a la realidad se vuelve más llevadero.
- Con mi grupo nos reímos mucho y disfrutamos cada juego, aunque nunca ganamos nada :(
- Si no era por el juego de la estufa con el vector gradiente, me hubiera costado muchísimo más entender ese tema.

- Los juegos me parecen una herramienta fundamental para el desarrollo de la materia, ya que se acercan más a la realidad y nos ayudan a entender la aplicación de los distintos temas. Me encantan.

<table>
<tr><th>Afirmación</th><th>Gráfico de barras - frecuencias de las respuestas</th></tr>
<tr><td>a) “Los juegos me han ayudado a comprender mejor alguno de los temas de la materia”.</td><td>
</td></tr>
<tr><td>b) “Los juegos me han ayudado a relacionarme mejor con mis compañeros de equipo”.</td><td>
</td></tr>
<tr><td>c) “Me gustaría que haya otros juegos a lo largo de la cursada”.</td><td>
</td></tr>
<tr><td>d) “Los juegos me han ayudado a adaptarme mejor a la cursada en la virtualidad”.</td><td>
</td></tr>
<tr><td>e) “Los juegos han contribuido a mi motivación en el estudio de la materia”.</td><td>
</td></tr>
</table>

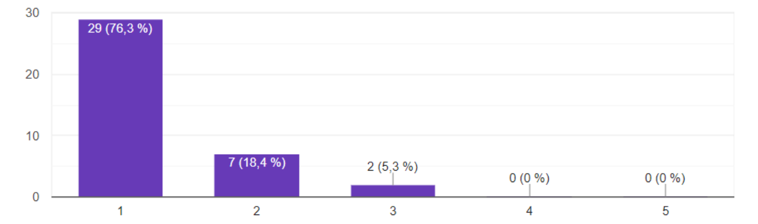
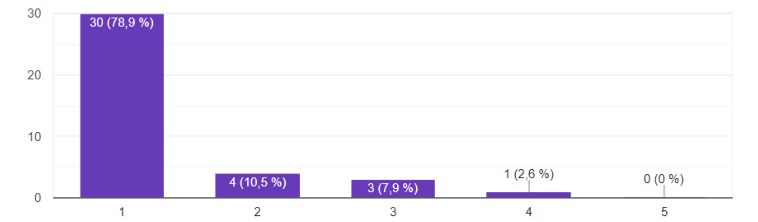
<table>
<tr><td>f) “Los juegos en clase resultan una distracción respecto de lo que en realidad importa”.</td><td>
</td></tr>
<tr><td>g) “Los juegos en clase nos hacen perder tiempo”.</td><td>
</td></tr>
</table>

Tabla 1. Se presenta cada afirmación de la encuesta con el gráfico de barras de respuestas.

- Al ser por tiempo y querer ganar te generan otras posibilidades de pensar los ejercicios, además de que a nuestro grupo siento que nos unió más.
- Me parece una idea genial la de los juegos ya que ayudan a entender mejor los temas y hacen más entretenida la materia, creo que sirven mucho y más en la situación actual para alegrarte la cursada online <3
- Me divirtieron mucho, pero en algunos temas sentí que por el apuro de contestar rápido no podía pensar bien, creando alrededor de un tema que creía sabido, más dudas.

Estos comentarios permiten confirmar la actitud positiva de los estudiantes frente a la estrategia didáctica implementada. Respecto del último de los comentarios, que refleja una actitud no tan positiva en relación a los juegos, se puede mencionar que ninguna propuesta didáctica puede sentar bien al cien por ciento de los estudiantes. En este caso, puede haber alumnos que se sientan presionados y bloqueados por el hecho de tener que pensar rápido y responder, aún si en la práctica no tienen nada que perder, ya que la performance en el juego no tenía influencias negativas ni positivas en las calificaciones de los estudiantes. Esto es interesante, y debe recordarnos, que es importante integrar en la clase una diversidad de estrategias para poder llegar a la totalidad del estudiantado que siempre es diverso. No se debe esperar a encontrar una estrategia única que sea mágica y resuelva la totalidad de los problemas, sino disponer de una variedad de ellas e ir escogiendo las más adecuadas para cada grupo de estudiantes.

6. Conclusión

Los objetivos de la incorporación de microjuegos en la propuesta de enseñanza abordada en este trabajo fueron: la conformación y consolidación de equipos de trabajo y estudio, la motivación de los estudiantes en el contexto de la pandemia, y la puesta en juego de conceptos matemáticos.

La experiencia relatada en este trabajo permite concluir que la implementación de microjuegos digitales contribuyó positivamente a la consecución de tales objetivos y al proceso de enseñanza y aprendizaje en el difícil contexto de la pandemia de COVID-19. De acuerdo a los resultados de la encuesta realizada, los estudiantes se sintieron motivados a asistir y participar activamente de las clases, pudieron conformar y consolidar sus grupos de trabajo, pese al distanciamiento físico y a no conocerse entre sí, y encontraron ayudas para la comprensión de ciertos contenidos matemáticos.

Se considera que la utilización de estos juegos no necesariamente debe limitarse al contexto educativo en el que se desarrolló la experiencia ni a un contexto de enseñanza virtual o remota. Es esperable y deseable que muchos de los aprendizajes adquiridos por los docentes en estos tiempos tan particulares perduren y enriquezcan la enseñanza en épocas de postpandemia. Tanto en un escenario de enseñanza híbrida, donde parte del acto educativo se dará en forma presencial y otra parte en la virtualidad, como en un escenario de vuelta completa a la presencialidad, se puede continuar haciendo uso de todas las estrategias didácticas y recursos que se han desarrollado.

Asimismo, se considera que esta experiencia puede ser replicada en otros contextos e incluso en otros niveles educativos, ya que las temáticas abordadas son diversas y se estudian tanto en el nivel secundario como en el universitario en una gran cantidad de carreras. Además, pueden encontrarse otros muchos juegos vinculados con las más diversas temáticas y para públicos de lo más diversos. Todos los juegos mencionados, al igual que todos los demás recursos educativos del repositorio de GeoGebra, se encuentran disponibles en forma pública bajo una licencia *creative commons*, con lo cual la posibilidad de reutilización es inmediata.

Se espera que a partir de la lectura de este trabajo otros colegas docentes que aún no implementen juegos en sus clases se animen a hacerlo, ya que la experiencia es muy gratificante y muy positiva para los estudiantes.

Referencias bibliográficas

Búcari, N. D., Abate, S. M., Melgarejo, A. A. (2004). Un cambio en la enseñanza de las matemáticas en las carreras de ingeniería de UNLP: propuesta, criterios y alcance. *IV Congreso Argentino de Enseñanza de la Ingeniería (CAEDI)*. Buenos Aires.

Brzezinski, T. (2020) *Pac Man is Hungry!* [en línea]. Recuperado el 26 de octubre de 2021 de https://www.geogebra.org/m/vnrkpxnv

García Azcárate, A. (2019) Matemáticas con juegos: Aprender y disfrutar. *Épsilon*, 101, 11-28.

Guzmán, M. de (1989). Juegos y Matemáticas. *Suma*. 4, 61-64

Hernández Sampieri, R., Fernández Collado, C., Baptista Lucio, M. del P. (2010). *Metodología de la investigación* (5a). México DF: Mc Graw-Hill.

Homa, A. (2019) Robotics Simulators in STEM Education. *Acta Scientiae*, 21(5), 178-191. DOI: https://doi.org/10.17648/acta.scientiae.5417

Rahmadi, I.F., Lavicza, Z., Houghton, T. (2021) Defining Microgames in Education Context. *International Journal of Emerging Technologies in Learning (iJET),* 16(22), 4–16. https://doi.org/10.3991/ijet.v16i22.20929

Rahmadi, I.F., Lavicza, Z., Arkün Kocadere, S., Houghton, T., Hohenwarter, M. (2022) The strengths and weaknesses of user-generated microgames for assisting learning. *Education and Information* Technologies, 27, 979–995. https://doi.org/10.1007/s10639-021-10635-8

Vitabar, F. (2021). ¿Vale la pena ludificar el aula de matemática? UNIÓN - Revista Iberoamericana de Educación Matemática, 17(62). Recuperado a partir de https://union.fespm.es/index.php/UNION/article/view/369

Zöchbauer, J., Hohenwarter, M. (2020). Developing a collaboration tool to give every student a voice in a classroom discussion. En Seventh ERME Topic Conference on Language in the Mathematics Classroom, 1, 195–202.

Laura del Río: UIDET-IMApEC, Departamento de Ciencias Básicas, Facultad de Ingeniería, Universidad Nacional de La Plata, Argentina. Profesora de Matemáticas y Magíster en Tecnología Informática Aplicada en Educación, por la Universidad Nacional de La Plata. Integrante de la Unidad de Investigación, Desarrollo, Extensión y Transferencia IMApEC y Coordinadora del Instituto GeoGebra de La Plata.

UNIÓN
REVISTA IBEROAMERICANA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA

ISSN: 1815-0640
Año XVIII - Número 64. Abril 2022

http://www.fisem.org/www/index.php
https://union.fespm.es/index.php/UNION

Unión. Revista Iberoamericana de Educación Matemática es una publicación de la Federación Iberoamericana de Sociedades de Educación Matemática **(FISEM)**. Tiene ahora una periodicidad cuatrimestral, de modo que se publican tres números al año, en los meses de abril, agosto y diciembre. Es recepcionada en ***Mathematics Education Database***, está incluida en el catálogo ***Latindex, CAPES*** y otros.

UNIÓN
REVISTA IBEROAMERICANA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA

ISSN: 1815-0640
Año XVIII - Número 64. Abril 2022

http://www.fisem.org/www/index.php
https://union.fespm.es/index.php/UNION